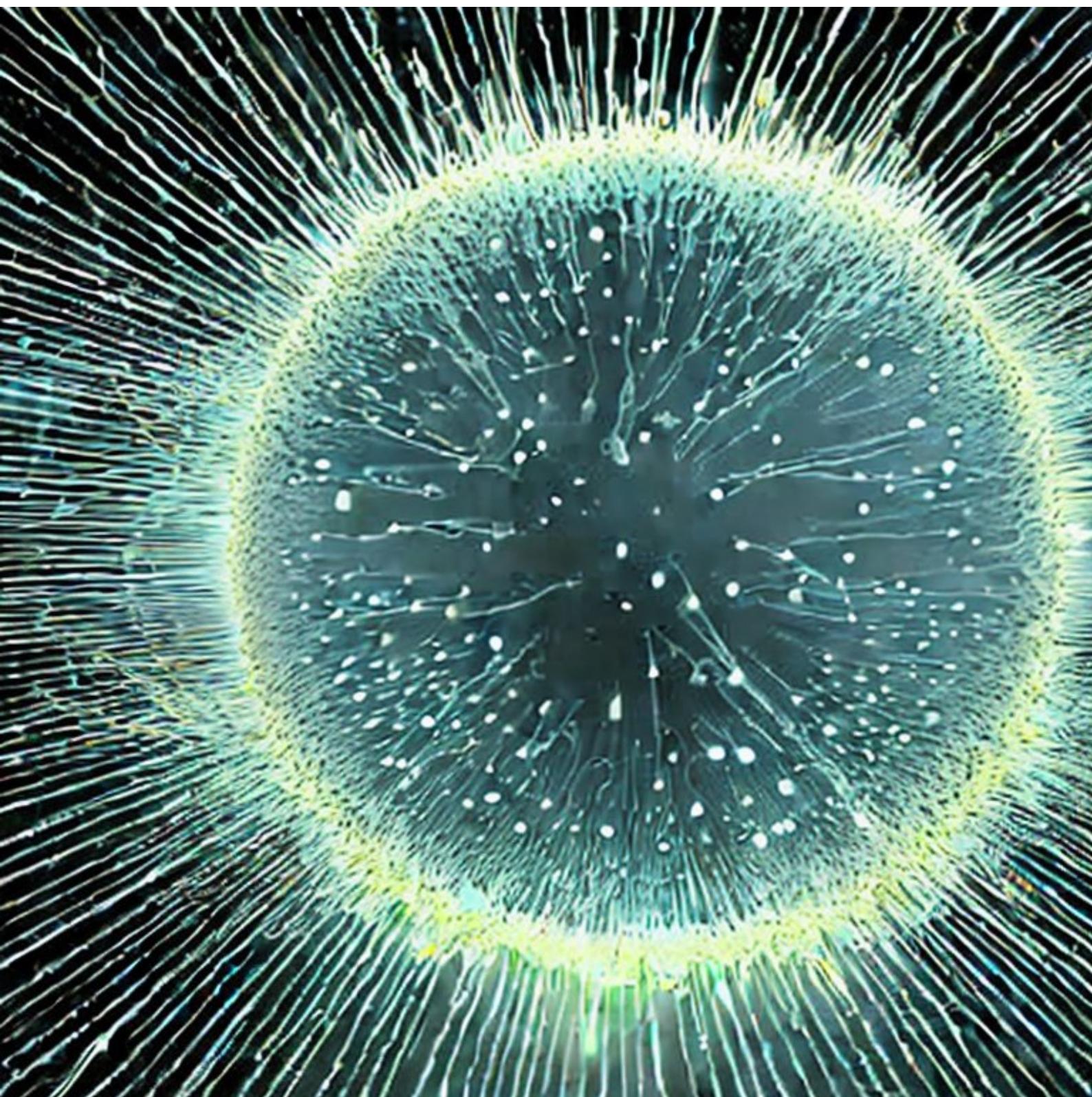


Stochastische Mechanik und Quantenmechanik

Kompendium der stochastischen Interpretation der Quantenmechanik



Michael Rudschuck

michael.rudschuck@vde.com / Version: 18. Juli 2025, Rev. 0.5

STOCHASTISCHE MECHANIK UND QUANTENMECHANIK 0.5

Dr. Michael Rudschuck
michael.rudschuck@vde.com

Copyright © Michael Rudschuck 2010 – 2025

Aktuelle Updates dieses Dokuments finden sich unter:

<https://github.com/Rudschuck/Stochastic-Mechanics-and-Quantum-Mechanics/>

Dieses Werk steht unter der CCPL-Lizenz (<http://de.creativecommons.org/>):

Sie dürfen: das Werk bzw. den Inhalt vervielfältigen, verbreiten und öffentlich zugänglich machen Abwandlungen und Bearbeitungen des Werkes bzw. Inhaltes anfertigen das Werk kommerziell nutzen

Zu den folgenden Bedingungen: *Namensnennung* — Sie müssen den Namen des Autors/Rechteinhabers in der von ihm festgelegten Weise nennen.

Weitergabe unter gleichen Bedingungen — Wenn Sie das lizenzierte Werk bzw. den lizenzierten Inhalt bearbeiten oder in anderer Weise erkennbar als Grundlage für eigenes Schaffen verwenden, dürfen Sie die daraufhin neu entstandenen Werke bzw. Inhalte nur unter Verwendung von Lizenzbedingungen weitergeben, die mit denen dieses Lizenzvertrages identisch oder vergleichbar sind.

Wobei gilt: *Verzichtserklärung* — Jede der vorgenannten Bedingungen kann aufgehoben werden, sofern Sie die ausdrückliche Einwilligung des Rechteinhabers dazu erhalten.

Public Domain (gemeinfreie oder nicht-schützbare Inhalte) — Soweit das Werk, der Inhalt oder irgendein Teil davon zur Public Domain der jeweiligen Rechtsordnung gehört, wird dieser Status von der Lizenz in keiner Weise berührt.

Sonstige Rechte — Die Lizenz hat keinerlei Einfluss auf die folgenden Rechte:

- Die Rechte, die jedermann wegen der Schranken des Urheberrechts oder aufgrund gesetzlicher Erlaubnisse zustehen (in einigen Ländern als grundsätzliche Doktrin des fair use etabliert);
- Das Urheberpersönlichkeitsrecht des Rechteinhabers;
- Rechte anderer Personen, entweder am Lizenzgegenstand selber oder bezüglich seiner Verwendung, zum Beispiel für Werbung oder Privatsphärenschutz.

Hinweis — Im Falle einer Verbreitung müssen Sie anderen alle Lizenzbedingungen mitteilen, die für dieses Werk gelten.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1-1
2. Stochastische Mechanik	2-1
3. Kernaussagen und Interpretationen der Quantenmechanik	3-1
3.1. Erkenntnistheorie und Interpretationen	3-6
3.2. Interpretationen der Quantenmechanik	3-11
3.2.1. Stochastische Mechanik	3-21
4. Einführung	4-1
4.1. Geschichtlicher Abriß der Quantenmechanik	4-1
5. Herleitung der Quantenmechanik aus der Theorie statistischer Systeme	5-1
5.1. Beschreibung stochastischer klassischer Systeme von Punktmassen	5-1
5.1.1. Definition eines stochastischen Systems	5-2
5.1.2. Einsteins Gesetz für das mittlere Verschiebungsquadrat einer Punktmasse unter Wirkung stochastischer Kräfte eines Einbettungs-Mediums endlicher Zähigkeit . .	5-2
5.1.3. Die Fokker-Planck-Gleichung	5-11
5.1.4. Die Navier-Stokes-Gleichung	5-18
5.2. Übergang zur Quantenmechanik — Herleitung der zeitabhängigen Schrödingergleichung .	5-26
5.2.1. Die Ehrenfestschen Sätze	5-36
6. Systematischer Aufbau der Quantenmechanik	6-1
6.1. Postulate der Quantenmechanik	6-1
6.1.1. Korpuskularstatistische Deutung	6-1
6.2. Das Prinzip extremaler Gesamtenergie und die zeitunabhängige Schrödingergleichung .	6-6
6.3. Die Impulsdarstellung der Schrödingergleichung	6-10
6.4. Das Wasserstoffatom	6-13
6.4.1. Gebundene Zustände des Wasserstoffatoms	6-13
6.4.2. Zur Entartung der Wasserstoff-Eigenzustände	6-33
6.5. Das quantenmechanische Einteilchensystem bei Anwesenheit eines Magnetfeldes .	6-83
6.5.1. Das Wasserstoffatom im homogenen Magnetfeld	6-91
7. Der Teilchenspin	7-1
7.0.1. Die Cayley-Kleinschen Parameter und die Paulischen Spinmatrizen	7-5
8. Quantenmechanik nichtrelativistischer Mehrteilchensysteme	8-1
8.1. Die Schrödingergleichung für N wechselwirkende nichtrelativistische Teilchen . .	8-1
8.2. N nichtwechselwirkende Teilchen	8-1
8.3. Das Pauli-Prinzip	8-1

8.4. Das Hartreesche Näherungsverfahren zur Bestimmung der N-Teilchen-Wellenfunktion	8-1
8.5. Antisymmetrisierung der Wellenfunktion. Slater-Determinante und Entwicklungen nach Slater-Determinanten (CI-Entwicklung)	8-1
8.6. Das Näherungsverfahren von Hartree und Fock	8-2
8.7. Zusammenhang zwischen der Gesamtenergie und den Einteilchenenergien	8-2
8.8. Das Theorem von Koopmans	8-2
9. Störungstheorie	9-1
9.1. Diracsche Störungstheorie. Fermis „Goldene Regel“ der Quantenmechanik	9-1
9.2. Zeitabhängige Störungsrechnung 2. Ordnung	9-1
9.3. Schrödingersche (zeitunabhängige) Störungstheorie	9-1
9.4. Zeitunabhängige Störungstheorie bei Anwesenheit von Entartungen	9-1
9.5. Aufspaltung von zwei miteinander entarteten Zuständen in einem Störpotential	9-1
10. Das statistische Atommodell von Thomas und Fermi	10-1
10.1. Die Thomas-Fermi-Dirac-Methode	10-1
11. Das Periodensystem der Elemente	11-1
11.1. Die Greensche-Funktion einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung und das Additivonstheorem der Kugelflächenfunktionen	11-1
11.2. Der Schalenaufbau der Atome	11-1
12. Elastische Streuung (Potentialstreuung) von Teilchen an Streuzentren	12-1
12.1. Die Bornsche Reihe	12-1
12.2. Entwicklung einer ebenen Welle nach Kugelwellen steigender Ordnung	12-1
12.3. Die Faxen-Holtsmark-Formel für die Streuung eines Teilchens an einem Potential endlicher Reichweite	12-1
12.4. Totaler und differentieller Wirkungsquerschnitt eines Streupotentials	12-1
12.5. Streuphasen	12-1
12.6. Streuung am Yukawa-Potential — Die Rutherford-Formel	12-2
13. Die Feinstruktur der optischen Spektren	13-1
13.1. Der Effekt der Spin-Bahnkopplung — Optische Dubletts	13-1
13.2. Der anormale Zeeman-Effekt	13-1
13.3. Der Paschen-Back-Effekt	13-1
14. Phänomeologische Physik des Vakuums	14-1
14.1. Einleitung	14-1
14.2. Exkurs — Klassisches Vakuum	14-2
14.2.1. Die Entdeckung des Vakuums	14-2
14.3. Physikalisches Vakuum	14-3
14.3.1. Vakuumfluktuationen	14-3
14.3.2. Klassische Theorie der Hohlkörperstrahlung	14-6
15. Einführung in die Stochastik	15-1
15.1. Physikalische Messungen	15-1
15.1.1. Messunsicherheiten	15-4

15.2. Brownsche Molekularbewegung	15-8
15.2.1. Beschreibung der Diffusion nach Einstein	15-9
15.2.2. Beschreibung der Diffusion nach Langevin	15-11
15.3. Einige Begriffe und Definitionen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung	15-13
15.4. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	15-18
15.4.1. Axiome der wahrscheinlichkeitsrechnung	15-19
15.4.2. Zufallsvariablen	15-19
15.4.3. Multivariante und bedingte Wahrscheinlichkeiten	15-20
15.4.4. Momente und momente-erzeugende Funktionen	15-21
15.5. Einige wichtige Verteilungsfunktionen	15-23
15.5.1. Die Gaußsche Verteilung	15-23
16. Antworten zu ausgewählten Themen	16-1
16.0.1. Lokalität	16-2
16.0.2. Determinismus und Indeterminismus	16-3
16.0.3. Observablen und Messungen	16-4
17. Hydrodynamische Analoga der Quantenmechanik	17-1
17.0.1. Obervablen	17-6
18. Kritik an der Stochastischen Mechanik und der Stochastischen Elektrodynamik	18-1
18.0.1. Stochastische Mechanik	18-2
18.0.2. Stochastische Elektrodynamik (SED)	18-3
18.1. Der Teilchenspm in der Stochastische Mechanik	18-3
18.2. Die Stochastische Mechanik als phänomenologische Theorie	18-4
18.3. Die Stochastische Mechanik für relativistische Teilchen	18-5
18.3.1. Ansätze für eine Lorentz-invarante Stochastische Mechanik	18-6
18.3.2. Fazit	18-7
18.3.3. Die Geschwindigkeit von Elektronen in Wasserstoffatomen	18-8
19. Quantencomputing	19-1
19.1. Die Ontologie des Quantencomputings	19-3
19.2. Quantencomputer auf Basis des „Quantum Annealing“	19-7
19.3. Paradigmenwechsel	19-10
19.4. Vergleich Quantencomputing: Orthodoxe Quantenmechanik vs. Stochastischen Mechanik	19-11
19.4.1. Grundidee der Nelsonschen Stochastischen Mechanik	19-11
19.4.2. Superposition und Interferenz	19-12
19.5. Physikalische Probleme des Quantencomputings	19-15
19.5.1. Instabilität durch Dekohärenz	19-15
19.5.2. Unlösbares Problem der Fehlerkorrektur	19-16
19.5.3. Technologische Barrieren	19-17
20. Giftschrank der Quantenmechanik	20-1
20.1. Schrödinger Katze	20-7
20.2. Vakuumenergiemaschinen	20-8
A. Software-Simulationen	A-1

B. Periodensystem	B-1
B.1. Atomare Einheiten	B-7
C. Literatur	C-1
C.0.1. Weiterführende Literatur	C-1
Stichwortverzeichnis	C-50

Vorwort:

Die vorliegende Zusammenfassung *Stochastische Mechanik* beruht auf einer Vorlesungsmitschrift der Vorlesungen *Quantenmechanik I* und *Quantenmechanik II*, im WS 95 und SS 96 an der TU Clausthal von Prof. Dr. Lothar Fritzsche gehalten wurden. Im Rahmen dieser Vorlesung wurde die Quantenmechanik über die klassische Mechanik hergeleitet.

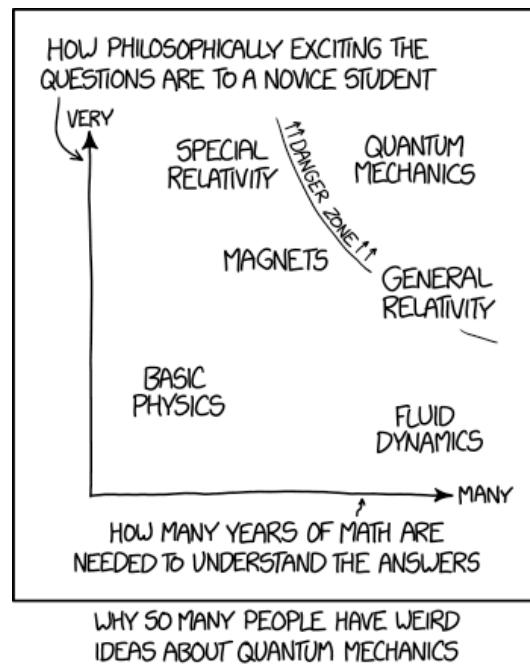
Dieses Skript zeigt wertfrei die Herleitung der Quantenmechanik aus der klassischen Mechanik als eine von vielen Ansätzen.

Die stochastische Mechanik ist eine Interpretation der Quantenmechanik. Interessanterweise wird dabei aber nur eine Annahme zu ihrer Herleitung benötigt. Dies ist die Existenz von Fluktuationen des elektromagnetischen Feldes im Vakuum. Setzt man solche Fluktuationen voraus, so lassen sich die Ergebnisse der Quantentheorie reproduzieren, ohne Quantentheorie zu benutzen. So lässt sich zum Beispiel mit der stochastischen Mechanik der Partikelspin ebenso erklären wie die Lage der Energieniveaus der H̄llenelektronen in der Atomphysik. Weiterhin wird hier ebenso das lange bekannte Problem der Strahlungsemission der bewegten Elektronen gelöst. Alle aus der Quantenmechanik bekannten Aussagen lassen sich im Rahmen der stochastischen Mechanik direkt reproduzieren, ohne den Formalismus der Quantenmechanik zu bemühen.

Fairerweise muss man allerdings auch sagen, dass die Stochastische Mechanik nur eine von vielen Interpretationen der Quantenmechanik ist. Allerdings besticht sie zur einen sehr intuitiven Zugang über die klassische Mechanik.

Ich möchte die Gelegenheit nutzen, um meinen aufrichtigen Dank an all diejenigen auszusprechen, die zur Entwicklung dieses Kompendiums beitragen. Ja, der Präsenz ist gewollt. Dieses Kompendium ist nicht abgeschlossen, sondern wird von mir kontinuierlich weitergeführt. Ziel ist es nicht ein allumfassendes Lehrbuch zu erschaffen, sondern meine Ideen, Anmerkungen, Kritiken zur Stochastischen Mechanik zu bündeln.

*Rüsselsheim, 2025
Michael Rudschuck*



Der obligatorische xkcd [\(link\)](#).

1. Einleitung

Die Quantenmechanik ist zweifellos eine der faszinierendsten und herausforderndsten Theorien in der Physik. Seit ihrer Entwicklung zu Beginn des 20. Jahrhunderts hat sie unser Verständnis der Natur auf fundamentalste Weise verändert und zahlreiche technologische Innovationen ermöglicht, die unser tägliches Leben prägen. Von der Elektronik über die Medizin bis hin zur Kryptographie hat die Quantenmechanik in fast jedem Bereich der Wissenschaft und Technologie Anwendungen gefunden.

Dieses Kompendium bietet eine umfassende Einführung in die Grundlagen der Quantenmechanik sowie fortgeschrittene Konzepte und Anwendungen. Es richtet sich an Studenten und Wissenschaftler, die sich mit den grundlegenden Prinzipien und mathematischen Methoden der Quantenmechanik vertraut machen möchten, sowie an Ingenieure und Techniker, die ein tieferes Verständnis für die zugrunde liegende Physik benötigen, um moderne Technologien zu entwickeln und zu verbessern.

Wir beginnen mit einer historischen Einführung, die die Entwicklung der Quantenmechanik von ihren Anfängen bis hin zu ihren modernen Anwendungen beleuchtet. Dabei werden wichtige Experimente und Entdeckungen diskutiert, die zur Entstehung dieser Theorie geführt haben, sowie die Schlüsselkonzepte und Denkweisen der Pioniere wie Max Planck, Albert Einstein, Niels Bohr, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger und anderen.

Anschließend behandeln wir die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik, einschließlich der Wellenfunktion, der Schrödinger-Gleichung und ihrer Lösungsmethoden. Wir erklären die Bedeutung von Observablen, Operatoren und Eigenwerten und zeigen, wie diese Konzepte in der Quantenmechanik angewendet werden, um physikalische Größen zu beschreiben und zu messen.

Keine andere physikalische Theorie hat eine vergleichbare Dringlichkeit für eine Interpretation wie die Quantenmechanik, weder heute noch in der Vergangenheit. Ähnlich intensiv wie bei der Quantenmechanik wurde nur bei der Speziellen Relativitätstheorie versucht, den Inhalt durch erklärende Deutungen zu ergänzen. Im Gegensatz zur Relativitätstheorie gibt es jedoch eine Vielzahl von Interpretationsschulen für die Quantenmechanik, die sich mit den ungewöhnlichen Konsequenzen auseinandersetzen.

Die besondere Rolle der Quantenmechanik ergibt sich aus mehreren Gründen:

- Die fundamentale Bedeutung für das physikalische Weltbild vonheute.
- Die Notwendigkeit, den Formalismus interpretativ zu erschließen, aufgrund des grundlegenden, mathematischen Charakters der Quantentheorie.
- Die Existenz verschiedener, parallel existierender Interpretationsansätze, die den besonderen Charakter der Quantenmechanik ausmachen.

Dabei machen die folgenden Punkte den besonderen Charakter der Quantenmechanik bzw. der entsprechenden Interpretationen aus:

- Ein hoher mathematischer Abstraktionsgrad, der bereits in der Verwendung von Grundbegriffen der Quantenmechanik deutlich wird, welche der Alltagswelt neu oder zumindest ungewohnt sind. Dazu gehören Konzepte wie Zustand und Zustandsfunktion sowie Observable, die in ihrem Verständnis von der klassischen Physik abweichen.
- Die Quantenmechanik erfordert einen umfangreichen mathematischen Apparat, ohne den sie nicht adäquat formuliert werden kann. Dies beinhaltet den funktionalanalytischen Hilbert-Raum-Kalkül, der es ermöglicht, Vektoren oder Strahlen als Zustandsfunktionen und Zustände zu repräsentieren, während lineare Operatoren die Observablen darstellen.
- Die Aussagen und Ergebnisse, die aus dem quantenmechanischen Kalkül abgeleitet werden können, sind mitunter eingeschränkt. Dies manifestiert sich vor allem in ihrer Natur als Wahrscheinlichkeitsaussagen. Die damit verbundenen Unschärferelationen und der Welle-Teilchen-Dualismus stellen einen deutlichen Bruch mit den grundlegenden Konzepten der klassischen Physik dar und sind teilweise schwer intuitiv erfassbar, was eine vertiefte Erklärung erforderlich macht.

2. Stochastische Mechanik

Die stochastische Mechanik kann als eine Art Verallgemeinerung des theoretischen Schemas der klassischen Mechanik betrachtet werden. Die klassischen deterministischen Trajektorien werden durch zufällige Trajektorien gut definierter stochastischer Prozesse ersetzt. Unter geeigneten Bedingungen und für eine große Klasse von dynamischen Systemen zeigen die Grundgleichungen der stochastischen Mechanik eine überraschende Verbindung zu den Grundgleichungen der Quantenmechanik. Dann ist es möglich, ein geeignetes Schema der physikalischen Interpretation zu entwickeln, so dass der phänomenologische Inhalt der stochastischen Mechanik mit dem phänomenologischen Inhalt der Quantenmechanik übereinstimmt, soweit alle experimentell beobachtbaren Effekte betroffen sind. Die stochastische Mechanik bietet also einen Ansatz zur Quantisierung dynamischer Systeme, der auf Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastischer Prozesse beruht. Dieser Ansatz unterscheidet sich völlig von dem traditionellen Ansatz, der auf Operatormethoden beruht. Vom physikalischen Standpunkt aus ist er jedoch völlig gleichwertig, wenn das richtige physikalische Interpretationsschema verwendet wird.

Die Grundlagen der stochastischen Mechanik wurden 1966 von Edward Nelson gelegt, ausgehend von früheren Ideen von Fenyves, Weizel und anderen. Die ursprüngliche Formulierung von Nelson beruht auf zwei Grundhypthesen. Die erste geht davon aus, dass die Trajektorien des dynamischen Systems durch eine zugrunde liegende Brownsche Bewegung gestört werden. Bewegung gestört werden. Die zweite ist eine besondere Form des zweiten Prinzips der Dynamik, bei der die klassische Beschleunigung durch eine geeignete Form der stochastischen Beschleunigung ersetzt wird. Weiterentwicklungen der Theorie zeigen, dass die Grundgleichung der stochastischen Mechanik aus Variationsprinzipien abgeleitet werden kann, und zwar in volliger Analog zur klassischen Mechanik kann die Grundgleichung der stochastischen Mechanik aus Variationsprinzipien abgeleitet werden, die auf derselben klassischen Aktion basieren, aber stochastisch gestörte Trajektorien als Versuchstrajektorien verwenden. Unter Aus dieser Sicht ist die stochastische Mechanik als eine Art stochastische Verallgemeinerung eng mit der klassischen Mechanik verwandt.

Andererseits können die Grundgleichungen der stochastischen Mechanik, d.h. eine Kontinuitätsgleichung und eine Gleichung vom Typ Hamilton-Jacobi (Madelung-Gleichung), können unmittelbar mit der Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik verbunden werden, indem man eine einfache Transformation vom Typ der von De Broglie eingeführt wurde. Außerdem lässt sich die gesamte Operatorstruktur der quantenmechanischen Algebra der Beobachtungsgrößen leicht aus der allgemeinen Struktur der stochastischen Mechanik ableiten. Daher gibt es auch eine

starke Verbindung zwischen der stochastischen Mechanik und der Quantenmechanik. Unter diesem Gesichtspunkt kann die stochastische Mechanik als eine Art probabilistische Simulation der Quantenmechanik betrachtet werden.

In der ursprünglichen Formulierung von Nelson aus dem Jahr 1966 finden sich auch die Grundzüge der Äquivalenz zwischen der stochastischen Mechanik und der Quantenmechanik, bis hin zu den Auswirkungen der physikalischen Interpretation. Diese Äquivalenz ist durch die Forschung der letzten Jahre bestätigt worden. Es sollte jedoch angemerkt werden, dass die stochastische Mechanik einige Merkmale aufweist, die im Prinzip innerhalb des vorgeschlagenen theoretischen Schemas potenziell beobachtbar sind, die aber keine Entsprechung in der Struktur der effektiven physikalischen Beobachtbarkeit im Rahmen der konventionellen Interpretation der Quantenmechanik keine Entsprechung finden. Daher scheint es völlig offen das Problem, zu entscheiden, ob die besondere Struktur der stochastischen Mechanik einen effektiven Wert hat, im Sinne einer physikalischen Theorie, die detaillierter ist als die gewöhnliche Formulierung der Quantenmechanik. Andernfalls müsste die reichere Struktur der *Beobachtbarkeit* in der stochastischen Mechanik auf rein mathematischen Begriffen beruhen rein mathematischen Begriffen beruhen, ohne ein empirisch beobachtbares physikalisches Gegenstück. Unter diesem Gesichtspunkt wäre es äußerst wichtig, eine Art physikalische Motivation für die zugrunde liegende Brownsche Bewegung zu finden, die allen Trajektorien stochastischen Charakter verleiht.

Die Methoden der stochastischen Mechanik haben in Verbindung mit der euklidischen Formulierung der Quantenfeldtheorie, wie sie von Schwinger, Symanzik und anderen eingeführt wurde, auch eine teilweise Erweiterung auf dynamische Systeme mit einer unendlichen Anzahl von Freiheitsgraden (stochastische Feldtheorie) erfahren. Daher ist das allgemeine theoretische Schema der stochastischen Mechanik a posteriori auch als die zugrundeliegende grundlegende Motivation für den großen Erfolg der probabilistischen Methoden in der Quantenfeldtheorie interpretiert werden, und zwar sowohl unter dem Gesichtspunkt einer strengen mathematischen Kontrolle (konstruktive Quantenfeldtheorie), als auch im Hinblick auf die der praktischen Berechnung physikalischer Größen (numerische Computersimulationen).

Der Charme der Stochastischen Mechanik besteht darin, dass sie einen nahtlosen Übergang zwischen der Quantenmechanik und der klassischen Mechanik ermöglicht. Viele zwischen der Quantenmechanik und der klassischen Mechanik inkompatiblen Konzepte wie Teilchenspin, Welle-Teilchen-Dualismus, Tunneneffekt u. a., können durch die Stochastische Mechanik auf eine sehr einfache, elegante Art hergeleitet werden. In diesem Zusammenhang kann ein Zitat von Sheldon Goldstein [227] gebracht werden:

„I wish to describe a theory, stochastic mechanics, which answers all the questions just raised, and many more; and does so in a way that is so simple and natural that the first reaction of the reader, after understanding the argument, should be that there must be a mistake somewhere, that it cannot all be so simple. As of yet, have found no mistake.“

Wie schon gesagt ist die Stochastische Mechanik nur eine von vielen Interpretationen der Quantenmechanik. Aus diesem Grund muss sie sich daran messen lassen, wie gut sie verschiedene klassische Experimente bzw. Effekte der Quantenmechanik beschreiben kann. Die nachfolgende Tabelle beinhaltet eine solche Aufstellung mit den Verlinkungen zu den entsprechenden Kapiteln dieses Kompendiums:

Herleitung der Schrödinger Gleichung und hieraus abgeleitete Fragestellungen		
Herleitung der Schrödinger Gleichung	✓	Kap. 5
Wellenfunktion	✓	??
Doppelspalteperiment	✓	
Tunneleffekt	✓	??
Nullpunktenergie	✓	??,??
Zeitabhängige Dirac-Gleichung	✓	
Herleitung des Spins		
Spin	✓	7
Stern-Gerlach-Experiment	✓	
Das Bohrsche Magneton	✓	
Spinpräzession in einem magnetischen Feld	✓	
Magnetische Spinresonanz	✓	
Strahlungsemission		
Wasserstoffatom	✓	
Spontane Emission	✓	
Plancksches Gesetz	✓	
Stabilität von Atomen	✓	??
Anwendungen Quantenmechanik		
van der Waals-Wechselwirkung	✓	
Sonstiges und offene Punkte		
Determinismus	(-) ¹	
Schrödingers Katze	(-) ²	Abschnitt 20.1
Geisterhafte Fernwirkung	—	
Quantumcomputing	—	
Makroskopische Analogien		
Hydrodynamische Analoga der Quantenmechanik	✓	17

¹Hinweis: Die stochastische Mechanik versagt nicht beim Determinismus, sondern setzt über den stochastischen Ansatz einen Indeterminismus voraus (siehe die Anmerkungen in Abschnitt).

²Keine Relavanz, siehe Anmerkungen in Abschnitt 20.1

Die Interpretationen der Quantenmechanik gehen dabei sehr weit auseinander und sind keineswegs kompatibel. Aus diesem Grund gibt es ideologische Grabenkriege, die sich in teilweise in sehr drastischen Aussagen wiederspiegeln:

Nobody understands quantum theory.³ Richard Feynman

Es ist kaum anzunehmen, daß die provozierende Wirkung dieser Überschrift unbeabsichtigt war. [187]

Das hohe Ansehen der Gründer der Quantenmechanik und Schöpfer der *Kopenhagener Interpretation*, allen voran Heisenberg, Born, Jordan, Dirac und Bohr, hat bis heute eine grundlegende Diskussion über die Grundlagen auf breiter Basis verhindert.

Shut up an caculate. N. David Mermin

[...] each of the interpretations leaves at least one element unexplained.

Es ist einigermaßen hart, zu sehen, daß wir uns immer noch im Stadium der Wickelkinder befinden
[...]

Does anyone doubt that quantum mechanics is right Edward Nelson
and stochastic mechanics is wrong?

Wenn diese Quantenspringerei nicht aufhört tut es mir leid, mich jemals damit befasst zu haben.

In quantum mechanics, when the wave function is known everything is known – that is the most complete description possible in quantum mechanics. But in stochastic mechanics that is just the starting point: We ask what the diffusion looks like.

New interpretations appear every year. None ever disappear.

Geschichtliche Entwicklung der Stochastischen Mechanik

Die Arbeit von Edward Nelson aus den 1960er Jahren [?] bildet den eigentlichen Ursprung der Stochastischen Mechanik. Allerdings müssen hier an dieser Stelle auch weitere Physiker genannt werden, die den Grundstein der Theorie gelegt haben: Erwin Madelung, Imre Fenyves und Walter Weizel.

Diese hatten das Ziel, die quantenmechanische Bewegungsgleichung auf die *klassische* Streuung kleinster Teilchen im Vakuum zurückzuführen. Aber erst Nelson war es gelungen, die reibungsfreie Brownsche Bewegung kleinster Teilchen schlüssig zu formulieren und daraus die Schrödinger-Gleichung konsequent herzuleiten. Leider wurden einige Fragen bei der Herleitung der Schrödinger-Gleichung in dieser ersten Arbeit durch Nelson noch nicht beantwortet oder blieben unklar [?]. Nelson versuchte jedoch nicht, auf diese Fragen einzugehen, sondern begann durch die Kritik einiger Kollegen letztlich selbst an seiner Arbeit zu zweifeln [?]. Unglücklicherweise mangelte es ihm zu seiner Zeit an Unterstützung, wozu wohl auch beitrug, dass seine Ursprungarbeit recht schwer durchschaubar ist. So nahm seine Theorie letztlich den Status eines mathematischen Kuriosums ein.

Erst Fritsche gelang es später, Nelsons Theorie deutlich einfacher und vollständiger zu formulieren, wobei er an Gebeleins Überlegungen zur Herleitung der Navier-Stokes-Gleichung aus der Theorie der stochastischen Teilchenbewegung aus dem Jahre 1935 anknüpfte (siehe Abschnitt ??). Unter seiner Anleitung entstand eine Staatsexamensarbeit von Jutta Aschenbach [?], in der vor allem wichtige Beziehungen, die bei Nelson *vom Himmel* fallen, konsistent begründet werden. In anschließenden Arbeiten geht Fritsche dann wesentlich über Nelsons ersten Ansatz hinaus, indem er die Quantenmechanik weiter ausbaut und wichtige offene Fragen, zum Beispiel nach dem Spin, beantwortet (siehe zum Beispiel [?] und [?]).

Nelson ist also zwar als *Urvater* der Stochastischen Mechanik zu sehen. Wesentliche Aspekte und Einsichten blieben Nelson jedoch verborgen, da er sich selbst von seiner Arbeit distanzierte.

3. Kernaussagen und Interpretationen der Quantenmechanik

Für ein grundlegende Verständnis der Quantenmechanik sind zunächst die Grundannahmen aufzuzeigen. Diese sind prinzipiell für alle **Interpretationen** mehr oder weniger gültig und stellen den Grundkonsenz dar.

Diese zunächst popularwissenschaftliche Einführung soll klarmachen, daß dabie nicht die Quantenmechanik selbst mysteriös ist, sondern höchstens einige ihrer Interpretationen. Wichtig ist, dass die folgenden Kernaussagen verinnerlicht werden, da sie zum gesamtheitlichen Verständnis der Quantenmechanik beitragen.

Wofür wird die Quantenmechanik benötigt?

Die klassische Mechanik erlaubt es, die Bewegung makroskopischer Körper wie Billardkugeln, Gewehrgeschosse, Planeten, Kreisel oder Pendel aus der Kenntnis der auf sie einwirkenden Kräfte vorherzusagen. Bei sogenannten Mikroteilchen, beispielsweise Elektronen oder Protonen, versagt diese Theorie jedoch: Sie kann das Linienspektrum des Wasserstoffatoms nicht beschreiben. Hier greift erst die Quantenmechanik.

Konsequent müßte man eine Gewehrkugel als gekoppeltes System von circa 10^{23} Mikroteilchen (Eisenatome) behandeln, doch liegen die Differenzen der Vorhersagen der Quantenmechanik von denen der Klassischen Mechanik in der Regel weit unterhalb der Meßgenauigkeit. In diesem Sinne kann man die Klassische Mechanik als makroskopischen Grenzfall der Quantenmechanik bezeichnen.

Was ist die Quantenmechanik?

Obwohl die Anfänge der Quantenmechanik bis in die 20er Jahre (Bohr, Sommerfeld) zurückreichen, gehen bis heute die Auffassungen auseinander über die sogenannte *Interpretation der Quantenmechanik*. Um Mißverständnisse zu vermeiden, sollte daher nicht von der Quantenmechanik gesprochen werden sondern stets dazu gesagt sein, welche Interpretation gemeint ist; beispielsweise die der Kopenhagener Schule (siehe S. 3.2 ff.), diejenige von David Bohm (siehe S. 3.2 ff.), die Schrödingersche Materiewellen-Theorie

To Do 1 (Link fehlt.): (siehe S. ?? ff.)

oder die Bornsche Interpretation.

To Do 2 (Link fehlt.): (siehe S. ?? ff.)

In diesem Kompendium liegt der Schwerpunkt auf der Stochastischen Mechanik nach Edward Nelson, die die Quantenmechanik als Ursache von Fluktuationen des Vakuums erklärt [4].

Was ist die Quantenmechanik nicht?

Quantenmechanik ist eine statistische Theorie und macht nur sehr wenig Aussagen über Einzelsysteme. Insbesondere macht es keinen Sinn, von der „Wellenfunktion eines Schwarzen Lochs“ oder gar der „Wellenfunktion des Universums“ zu reden.

Ebensowenig besagt die Heisenbergsche Unschärferelation, man könne Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig messen.

Es gibt keine Energie-Zeit-Unschärfe: Da t keine Observable sondern ein Parameter ist.

To Do 3 (Link fehlt.): (siehe S. ?? ff.)

Ein Teilchen ist niemals eine Materiewelle. Der sogenannte **Welle-Teilchen-Dualismus** bezieht sich auf statistische Gesamtheiten von Mikroobjekten.

Schwachpunkte der Quantenmechanik

Die Quantenmechanik ist keine *echte* Quantentheorie in dem Sinne, daß man die Existenz von Teilchen hineinsteckt. Sie beschreibt lediglich, wie sich (*statistische Gesamtheiten von*) Teilchen verhalten; aber warum es Teilchen gibt, sagt sie nicht. Dies ist ein sehr subtiler Unterschied, der häufig vergessen wird.

Insbesondere kann sie keine Erzeugung oder Vernichtung (z.B. zerfällt das freie Neutron nach $1/2h$) von Teilchen erklären.

Bei der Aufstellung des Hamiltonoperators wird man von der Quantenmechanik einigermaßen im Stich gelassen: Sie nimmt ihn als gegeben an.

Ist ein Elektron jetzt ein Teilchen oder eine Welle?

Welle-Teilchen-Dualismus : Ein Elektron ist keine klassische Billardkugel, deren zukünftige Bahn aus ihrem jetzigen Bewegungszustand sich vorausberechnen lässt. Es ist aber auch keine oszillierende gaußförmige Dichtewolke, die mit der Zeit (Dispersion) auseinanderfließt. Während viele Interpretationen der Quantenmechanik Materie gleichzeitig Welle- und Teilcheneigenschaften zuordnen, löst sich dieser Widerspruch bei der hier dargestellten stochastischen Mechanik auf (siehe Kapitel 5 und 14).

Was ist die Unbestimmtheit einer physikalischen Größe?

Um dies zu klären muss man sich einmal klarmachen, was die **Unbestimmtheit** nicht bedeutet

Die Unbestimmtheit ist/sind *nicht*:

- Schwankungsbereiche an sich bestimmter Messgrößen
- Bereiche der (subjektiven) Unkenntnis („Ungewissheiten“)
- Mess-Ungenauigkeiten / „Unschärfen“

Die Unbestimmtheit sind Bereiche, in denen bei einer Messung im betreffenden Zustand Messwerte komplementärer Messgrößen überwiegend realisiert werden, obwohl sie nicht gleichzeitig Eigenschaften des Systems sein können.

Durch die Vakuumfluktuationen, die der stochastischen Mechanik zugrunde gelegt werden, wird dieser Zusammenhang offensichtlich (siehe Kapitel 5 und 14).

Was sind die Wellenfunktionen?

Die Wellen der Quantentheorie (**Wellenfunktion**) sind keine realistischen Wellen im uns umgebenden Anschauungsraum, sondern abstrakte Wellen in einem abstrakten Konfigurationsraum. Konsenz ist, dass der Wellenfunktion keine physikalische Bedeutung zugemessen wird, sondern nur ihrem Quadrat, das als eine Wahrscheinlichkeitsdichte (z. B. **Aufenthaltswahrscheinlichkeit**, ???) interpretiert wird.

To Do 4 (Link fehlt.): ... siehe: ??

Graphische Darstellung und didaktische Diskussion: Es besteht die Gefahr, dass die graphische Darstellung der **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** $|\psi|^2$ mit einer graphischen Darstellung des Elektrons verwechselt wird. Dieses wolkenartige Gebilde ist eine Darstellung von $|\psi_{(x,y,z)}|^2$ in zwei Dimensionen. Die Graustufe an jedem Punkt ist ein Maß für die Dichte der Detektionswahrscheinlichkeit.

Wellenfunktion , Zustandsfunktion , ψ -Funktion	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
<ul style="list-style-type: none">• Ist die Lösung der Schrödingergleichung.• Ist in der Regel nicht reellwertig.• Kann nicht direkt gemessen werden.	<ul style="list-style-type: none">• Ist das Betragsquadrat $\psi ^2$.• Ist reellwertig• Kann gemessen werden.

Eine häufig gemachte Fehlinterpretation der **Wellenfunktion** ist, dass man fälschlicherweise annimmt, dass die reale Wellen im Anschauungsraum sind. Diese vereinfachte Annahme ist allerdings falsch. Aus dieser häufig gemachten falschen Annahme resultieren häufig unpräzise Aussagen. Von dieser falschen historischen Annahme kommen Bezeichnungen wie ¹

- der **Welle-Teilchen-Dualismus** (mit dem häufig suggeriert wird, dass man unter gewissen Umständen Teilchen auch als Wellenpakete im Anschauungsraum sehen könne),
- der **Wellencharakter** bzw. **Teilchencharakter** eines Elektrons oder Photons,
- **Materiewellen** (für die Wellenfunktionen, die sich angeblich im Anschauungsraum ausbreiten sollten),
- **Elektronenbeugung** (so als könnten Elektronen an den elektromagnetischen Feldern eines Linsensystems oder an den Atomen eines Kristalls im Anschauungsraum gebeugt werden),
- **Elektronenwolken/Ladungswolken** im Atom (so als seien die Wellen der einzelnen Elektronen im Atom über das Atomvolumen *verschmiert*),
- **verschmierte** Elektronen (so als sei die elektrische Ladung eines Elektrons über einen endlichen Raumbereich verteilt),
- eine Vorstellung, dass sich Elektronen oder Photonen hinter dem Doppelspalt als Wellen ausbreiten, aber als Teilchen auf dem Schirm oder im Detektor nachgewiesen werden".

Hinter diesen Begriffen stehen zwar reale Effekte, jedoch suggerieren sie eine veraltete Interpretation und manchmal auch falsche Vorstellungen. Seit der Etablierung der gegenwärtigen Quantentheorie seit den 1930er Jahren weiß man, dass die Wellenfunktionen der Quantentheorie Wellen in abstrakten Konfigurationsräumen (Orts- oder Impulsräumen) sind. Nur im Fall von Einteilchen-Zuständen sind diese auch dreidimensional wie der Anschauungsraum, in dem sich

¹Quelle: <https://www.forphys.de/overview.html>

die Teilchen bewegen. Im Fall von Zwei-Teilchen-Zuständen sind die Konfigurationsräume bereits sechs-dimensional. Es gibt viele Gründe, warum die Annahmen des „Geburtsfehlers“ als falsch gelten. Zwei-Teilchen-Zustände und auch kohärente Zustände sind dabei die überzeugendsten Indizien.

Seitdem haben Diskussionen darüber, ob ein Teilchen durch den linken oder rechten Spalt oder durch beide gelaufen ist oder links vom Baum oder rechts davon oder auf beiden Wegen (wie bei einer Welle), keinen Sinn mehr. Heute wissen wir genauer:

Solche Wellen sind nicht realistisch aufzufassen. Sie dienen ausschließlich zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten.

Dies ist im Einklang mit dem Zitat von Zeilinger:

... Die Annahme, dass sich diese Wahrscheinlichkeitswellen tatsächlich im Raum ausbreiten, ist also nicht notwendig - denn alles, wozu sie dienen, ist das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten. Es ist daher viel einfacher und klarer, die Wellenfunktion ψ nicht als etwas Realistisches zu betrachten, das in Raum und Zeit existiert, sondern lediglich als mathematisches Hilfsmittel, mit Hilfe dessen man Wahrscheinlichkeiten berechnen kann. Zugespitzt formuliert, wenn wir über ein bestimmtes Experiment nachdenken, befindet sich ψ nicht da draußen in der Welt, sondern nur in unserem Kopf.

Anton Zeilinger

In der Schrödingerschen Formulierung der **Quantenmechanik** dient eine Wellenfunktion als Werkzeug zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, die angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit bestimmte Messergebnisse für Zustände mit einer festen Anzahl von Teilchen ($n = 1, 2, 3, \dots$) auftreten werden.

Die Wellenfunktion im einfachsten Fall für ein Ein-Teilchen-Problem in einer Dimension hat z. B. folgende Form: $\psi_{(x,t)}$. Nimmt man dieses sehr einfache System, so muss darauf hingewiesen werden, was die Bedeutung von x ist.

x darf nicht als eine Teilchenkoordinate interpretiert werden. x definiter eine Ortskoordinate, an dem Wahrscheinlichkeiten berechnet oder Messungen durchgeführt werden sollen.

Dies ist ein sehr subtiler Unterschied, der aber so häufig nicht herausgestellt wird.

Vor einer Ortsmessung, wie zum Beispiel der Bestimmung des Ortes eines Teilchens, ist der Ort in der Regel völlig unbestimmt. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen an einer beliebigen Stelle im Raum zu finden, im Allgemeinen von Null verschieden ist. Wenn jedoch

bei einer Messung das Teilchen in der Nähe eines bestimmten Ortes gefunden wird, muss die Wahrscheinlichkeit, es an anderen Stellen zu finden, Null werden. In diesem Moment ändert sich die Wellenfunktion instantan überall im Raum, selbst hinter den entferntesten Galaxien. Wenn solche Wellen oder Wellenfunktionen realistisch wären, müsste die Information „Teilchen hier und nirgendwo sonst“ mit Überlichtgeschwindigkeit durch den gesamten Raum transportiert werden, was unmöglich ist.

Diese plötzliche Veränderung der Wellenfunktion im gesamten Raum wird als *Kollaps der Wellenfunktion* bezeichnet. Dieser Prozess gibt einige Rätsel auf und ist immer noch umstritten. Wenn man jedoch die Wellenfunktion nicht als etwas Reales ansieht, das sich bei einer Messung im Raum *real* bzw. *materiell* verändert, sondern lediglich als mathematisches Werkzeug zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, verliert das Phänomen jegliche Geheimnisvolle und erscheint sogar als eine logische Notwendigkeit.

Nachfolgend wird noch einmal zusammengefasst, wie und wie nicht die Wellenfunktion zu interpretieren ist:

- In der Schrödinger-Gleichung für n -Teilchen sind die Lösungen *Wellen* in einem $(3 \times n)$ -dimensionalen Raum, sofern der Elektronenspin vernachlässigt wird. Diese *Wellen* existieren nicht im Anschauungsraum, sondern sind lediglich mathematische Konstrukte.
- Die Werte der Wellenfunktionen sind in der Regel komplexe Zahlen, während Messgrößen immer reelle Zahlen sind.
- Eine Wellenfunktion kann im Allgemeinen nicht direkt gemessen werden, da sie eine komplexwertige Größe ist.
- Die Wellenfunktionen als physikalische Lösungen der Schrödinger-Gleichung haben nur einen Zweck: Vorhersagen über die Wahrscheinlichkeit bestimmter Messwerte zu machen.

3.1. Erkenntnistheorie und Interpretationen

Interpretationen: Die Quantenmechanik ist zweifellos eine der herausforderndsten physikalischen Theorien, wenn es darum geht, sie zu interpretieren. Sowohl in der Vergangenheit als auch heute ist kein anderes Gebiet der Physik von vergleichbarer Intensität in dieser Hinsicht betroffen. Dies war bereits in den zwanziger Jahren des letzten Jahrhunderts offensichtlich, als die Theorie entwickelt wurde und insbesondere im berühmten Dialog zwischen Bohr und Einstein zum Ausdruck kam. Die kontroversen Diskussionen über die Quantenmechanik dauern bis heute unvermindert fort. Nur Diskussionen zur Speziellen Relativitätstheorie haben ein ähnliches Ausmaß angenommen, um ihren Inhalt und ihre Aussagen durch eine erklärende Deutung zu ergänzen - wenn man unter dem Begriff Theorie den (mathematischen) Formalismus und die daraus direkt abgeleiteten Aussagen versteht. Im Gegensatz zur Speziellen Relativitätstheorie gibt es

für die Quantenmechanik eine Vielzahl von unterschiedlichen Ansätzen zur Interpretation oder „Interpretations-Schulen“. Dabei geht es jedoch nicht darum, ungewohnte Konsequenzen für den Alltagsverstand zu veranschaulichen, sondern um eine tiefere Deutung der Theorie selbst.

Es gibt viele Gründe, warum die Quantenmechanik eine besondere Rolle in Bezug auf die Interpretation ihrer Theorie einnimmt. Einer der wichtigsten ist sicherlich die enorme Bedeutung der Quantentheorie für das heutige physikalische Weltbild. Der grundlegende und fundamentale Charakter der Theorie unterstreicht die Notwendigkeit einer interpretativen Auseinandersetzung mit dem Formalismus. Es gibt jedoch auch drei weitere Aspekte, die den besonderen Charakter der Quantenmechanik ausmachen:

- Erstens ist der hohe Abstraktionsgrad zu nennen, der sich bereits in der Verwendung von quantenmechanischen Grundbegriffen widerspiegelt, die der Alltagswelt fremd oder zumindest ungewohnt sind, wie z. B. Zustand und Zustandsfunktion oder Observable.
- Zweitens ist die Notwendigkeit eines aufwendigen mathematischen Apparats zu erwähnen, ohne den die Quantenmechanik nicht formulierbar wäre. Hierzu zählt der funktionalanalytische Hilbert-Raum-Kalkül, in dem Vektoren bzw. Strahlen Zustandsfunktionen und Zustände sowie lineare Operatoren die Observablen repräsentieren.
- Drittens ist der mitunter eingeschränkte Charakter der Aussagen und Ergebnisse zu nennen, die aus dem quantenmechanischen Kalkül abgeleitet werden können. Dies zeigt sich vor allem in der Tatsache, dass es sich um reine Wahrscheinlichkeitsaussagen handelt. Die damit verbundenen Unschärferelationen und der sog. *Welle-Teilchen-Dualismus* brechen mit grundlegenden Konzepten der klassischen Physik und sind teilweise schwer intuitiv nachvollziehbar. Deshalb ist eine weitergehende Erklärung notwendig².

Trotz des Einwandes von Richard Feynman, dass niemand die Quantentheorie verstehe, haben sich zahlreiche Forscher bemüht, eine bessere Interpretation der Quantenmechanik zu finden. Dabei geht es nicht nur um die Anwendung des Formalismus, sondern um eine Integration der neuen Konzepte in ein physikalisches Weltbild. Ziel ist es, eine Sinngebung oder Deutung der Quantenmechanik zu erreichen und damit auch die Entwicklung eines physikalischen Weltbildes zu fördern. Für diese Forscher ist eine physikalische Theorie mehr als nur eine Rezeptur zur Lösung bestimmter Rechenaufgaben. John S. Bell brachte es auf den Punkt: Ohne Interpretation ist Quantenmechanik gut FAPP, also good for all practical purposes für alle praktischen Zwecke.
³

Anforderungen an Interpretationen der Quantenmechanik

Zunächst stellt sich die Frage, was eine Interpretation der Quantenmechanik eigentlich bedeutet und was sie umfasst. Wenn man den Begriff *Interpretation* durch *Sinngebung* oder *Deutung* des

²Teaser zur Stochastischen Mechanik

³Shut up and calculate!

mathematischen Formalismus ersetzt, wird die Herausforderung, diese Frage zu beantworten, noch deutlicher. Analog zur Interpretation eines Textes, die eine kritische Auseinandersetzung mit Inhalten, Voraussetzungen und Implikationen beinhaltet, kann man den Begriff in Bezug auf die Quantenmechanik als Reflexion des mathematischen Formalismus der Theorie verstehen. Im Allgemeinen erwartet man von einer umfassenden physikalischen Theorie mehr als nur eine Anleitung zur Lösung von Problemen. Im Falle der Quantenmechanik geht es also um mehr als nur die Berechnung von Bohrschen Atomradien, Spektrallinien oder ähnlichem. Aber man muss sich zunächst fragen, was macht die „Erklärungskraft“ der Quantenmechanik ausmacht.

Gehört dazu zum Beispiel ein Modell der mikrophysikalischen Welt, das über den quantenmechanischen Formalismus hinausgeht? Diese Fragen sind sehr grundsätzlich und im weitesten Sinne philosophisch. Die Antwort hängt von der individuellen philosophischen Überzeugung ab und bestimmt auch die Beurteilung der Frage nach der Abgeschlossenheit oder Vollständigkeit der Quantenmechanik. Die Beantwortung dieser Fragen entscheidet über den Status, den die Quantenmechanik einnimmt. Sind die Paradoxien der Quantenmechanik eine implizite Aufforderung, nach einer weiterführenden, deterministischen oder zumindest kausalen Theorie der Mikrowelt zu suchen? Die Antwort auf diese Frage bleibt offen und stellt eine Herausforderung für die Physik und die Philosophie dar.

Eine ernsthafte und wissenschaftlich fundierte Auseinandersetzung mit den grundlegenden Konzepten der Quantenmechanik und ihrer Interpretation sollte nicht nur die mathematischen Formalismen berücksichtigen, sondern auch die experimentellen Ergebnisse und Beobachtungen, die der Quantenmechanik zugrunde liegen. Es ist wichtig zu verstehen, dass die Quantenmechanik nicht nur ein mathematisches Modell ist, sondern eine Beschreibung der Realität auf subatomarer Ebene. Daher muss jede Interpretation der Quantenmechanik auch unsere grundlegenden Vorstellungen von Raum, Zeit und Kausalität⁴ in Frage stellen und möglicherweise revidieren. Eine erfolgreiche Interpretation der Quantenmechanik sollte auch dazu beitragen, die verschiedenen Interpretationen, die derzeit existieren, zu klären und zu vereinheitlichen. Es sollte dabei auch die Möglichkeit berücksichtigt werden, dass es möglicherweise keine eindeutige Interpretation der Quantenmechanik gibt und dass unsere Vorstellung von der Realität auf subatomarer Ebene möglicherweise immer unvollständig bleiben wird.

Insgesamt ist die Frage nach der Interpretation der Quantenmechanik ein äußerst wichtiges Unterfangen, das uns helfen kann, ein besseres Verständnis der Natur und unserer Welt zu erlangen.

- Es ist notwendig, zu erklären, wie der Übergang von der Mikrophysik, die die Makrowelt aufbaut, zur klassischen Physik erfolgt. In ähnlicher Weise muss auch der Übergang von der Quantenmechanik zur Newtonschen Mechanik erläutert werden. Eine Möglichkeit, dies zu erreichen, besteht darin, dass man den klassischen Konzepten und Begriffen einen Vorrang einräumt und einen „Mechanismus“ bereitstellt, der die ungewöhnlichen Aussagen und Ergebnisse der Quantenmechanik erklärbare macht, beispielsweise durch die Einführung durch

⁴Teaser: Stochastische Mechanik

stochastische Prozesse. Ein weiteres Weg, der in letzter Zeit intensiv verfolgt wird, versucht das Entstehen „klassischen“ Verhaltens durch Auflösung der Problematik verschrankter Zustände durch umgebungsinduzierte Superauswahlregeln zu erklären. Diese Interpretation wird durch den Begriff der Dekohärenz (Kohärenz) umrissen.⁵

- Die Quantisierung bedeutet, dass die Zustände eines physikalischen Systems nicht mehr kontinuierlich, sondern nur noch diskret möglich sind. Das heißt, dass die Quantenmechanik die Idee von Objekten und Eigenschaften, die kontinuierlich variiert werden können, in Frage stellt und durch diskrete Zustände ersetzt. Diese diskreten Zustände werden bei den meisten Interpretationen als Wellenfunktionen beschrieben werden, die die Wahrscheinlichkeiten angeben, mit denen ein Teilchen in bestimmten Zuständen gefunden werden kann. Die Quantisierung stellt eine fundamentale Veränderung der Art und Weise dar, wie wir uns physikalische Systeme vorstellen und beschreiben können. Sie erfordert eine Neuinterpretation der grundlegenden Konzepte der klassischen Physik. Daher ist es notwendig, Modelle zu entwickeln, die sowohl die quantenmechanischen als auch die klassischen Phänomene erklären können.
- Innerhalb eines Minimalprogramms einer Quantenmechanik-Interpretation sollten grundlegende Fragen beantwortet werden, die den Bruch zur klassischen Physik aufzeigen. Einige dieser Fragen betreffen die Grundbegriffe der Theorie:
 - Was ist die Bedeutung der Zustandswellenfunktion ψ ?
 - Wie sind die dynamischen Variablen, Observablen und Eigenwerte zu verstehen?
 - Wie kann man den quantenmechanischen Messprozess und die Reduktion des Wellenpakets erklären?
 - Braucht es ein Projektionspostulat, wie es von Neumann formuliert hat?
 - Was ist die Natur und Ursache der Heisenbergschen Unschärferelation?
 - Wie kann man die durch die Quantenmechanik beschriebenen Mikrosysteme verstehen – handelt es sich um Teilchen, Wellen oder etwas völlig Neues?
 - Wie lassen sich grundlegende quantenmechanische Phänomene wie der Tunneleffekt erklären?

Eine umfassende Interpretation der Quantenmechanik sollte zumindest auf diese Fragen Antworten geben können. Allerdings gibt es noch viele weitere Aspekte, die in eine Interpretation einbezogen werden können, wie zum Beispiel die Frage nach der Quantenverschränkung und ihrer Bedeutung, oder die Beziehung zwischen Quantenmechanik und der Relativitätstheorie. Je nach Fokus und Zielsetzung der Interpretation können also auch weitere Fragen relevant sein.

⁵Wird hier im weiteren nicht betrachtet.

Die Interpretation der Quantenmechanik ist besonders herausfordernd, da sie mit den grundlegenden Annahmen der klassischen Physik bricht und zu ungewöhnlichen Ergebnissen führt. Die Doppelspalt-Versuche, Experimente zum EPR-Paradoxon und der quantenmechanische Messprozess sind besonders geeignet, um die besonderen Eigenschaften der Quantenmechanik zu demonstrieren. Darüber hinaus wurden auch sogenannte Paradoxien der Quantenmechanik formuliert, wie Schrödingers Katze, Wigners Freund und das Quanten-Zenon-Paradoxon, die zu Widersprüchen und unklaren Ergebnissen führen. Diese Paradoxien bieten jedoch auch Möglichkeiten, um die Interpretation der Quantenmechanik zu vertiefen und zu verbessern. Insgesamt erfordert die Interpretation der Quantenmechanik eine sorgfältige und gründliche Auseinandersetzung mit diesen Phänomenen, um ein umfassendes Verständnis zu erreichen.

Die genannten Gründe für die Schwierigkeiten bei der Interpretation der Quantenmechanik haben jeweils ihre eigene Konsequenz. Die erste Herausforderung, dass das Beobachtungssystem in die Quantenmechanik einbezogen werden muss, führt dazu, dass die Interpretation der Theorie nicht einfach auf den reinen Formalismus beschränkt werden kann. Die zweite Herausforderung, dass die Quantenmechanik mit klassischen Konzepten brechen kann, erfordert die Entwicklung neuer Konzepte und Vorstellungen, um die Quantenphänomene zu beschreiben und zu erklären. Die dritte Herausforderung, dass die Quantenmechanik zu unklaren oder sogar widersprüchlichen Ergebnissen führen kann, bedeutet, dass möglicherweise neue theoretische Ansätze erforderlich sind, um die Theorie zu erklären oder zu erweitern. Insgesamt erfordert die Interpretation der Quantenmechanik eine gründliche Auseinandersetzung mit den grundlegenden Konzepten und eine offene Haltung gegenüber neuen Ideen und Ansätzen.

- Aufgrund des hohen Abstraktionsgrads der Quantenmechanik besteht oft Unklarheit oder Uneinigkeit darüber, was die quantenmechanischen Begriffe eigentlich bedeuten oder worauf sie sich beziehen dürfen. Zum Beispiel ist nicht klar, ob ein (bewusster) Beobachter in die quantenmechanischen Berechnungen einbezogen werden sollte oder ob es eine obere Grenze dafür gibt, auf welche Systeme die Zustandsfunktion angewendet werden kann. Es ist auch unklar, ob die Zustandsfunktion auf das gesamte Universum angewendet werden kann oder ob es hierfür Einschränkungen gibt. Diese Fragen sind Gegenstand intensiver Debatten in der Philosophie der Quantenmechanik und können unterschiedliche Interpretationen und Ansätze zur Erklärung erfordern.
- Die quantenmechanischen Theorien sind stark von mathematischen Konzepten geprägt, die einerseits Grenzen vorgeben, andererseits aber auch zur Erklärung der Quantennatur der Mikrowelt beitragen können. Ein Beispiel für die Grenzen des Formalismus sind die so genannten „no-go-Theoreme“, wie die Bellschen Ungleichungen, das Gleasonsche Theorem oder das Kochen-Specker-Theorem, welche die Entwicklung von Theorien mit verborgenen Parametern einschränken oder in Verbindung mit anderen Prinzipien wie der Lokalität sogar verbieten. Andererseits können Analysen der Quantenlogik und des mathematischen Formalismus dazu beitragen, die Quantennatur der Mikrowelt besser zu verstehen. Insbesondere beim Übergang von klassischen zu quantenmechanischen Theorien spielen diese Betrachtungen eine entscheidende Rolle. Allerdings ist die Bedeutung von Quantisierung

bislang nur auf formaler Ebene erklärt, wie beispielsweise durch die Ersetzung von Poisson-Klammern durch Kommutatoren. Auch die Rückgewinnung der klassischen Theorie durch Grenzübergänge von Parametern, wie das Wirkungsquantum $\hbar \rightarrow 0$ oder Quantenzahlen $n \rightarrow \infty$, gelingt oft nur unvollständig.

- Die Charakterisierung der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsaussagen lässt Raum für unterschiedliche Interpretationen. Einerseits gibt es Ansätze wie die Ensemble-Interpretationen, die einen Vorrang der Wahrscheinlichkeiten einräumen. Andererseits gibt es die Vielwelten-Theorie, die die Wahrscheinlichkeiten als Ausdruck einer absoluten Realität sieht. Eine weitere Interpretation, die in der Kopenhagener Deutung postuliert wird, ist die Einschränkung der Erkenntnis durch die Wahrscheinlichkeitsaussagen. Die Kopenhagener Deutung geht davon aus, dass die quantenmechanischen Zustände nur durch Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden können und dass es keine Möglichkeit gibt, die zugrunde liegende Realität direkt zu erfassen. Daher sind die Wahrscheinlichkeiten eine Einschränkung dessen, was tatsächlich gewusst werden kann. Diese unterschiedlichen Interpretationen sind eng verbunden mit der Frage nach der Natur der quantenmechanischen Zustände und der Realität, die diesen zugrunde liegt.

3.2. Interpretationen der Quantenmechanik

Dennoch ist die Frage oder der Wunsch nach einer Interpretation der Quantenmechanik kein rein philosophisches Unterfangen. Bei der Formulierung jeder Theorie fließt ein gewisses Vorverständnis grundlegender Konzepte ein, das heißt, bestimmte Prinzipien werden als allgemein gültig akzeptiert. Zu diesen Prinzipien gehören beispielsweise Kausalität, Lokalität, Separabilität und andere. Der Bruch, den die Quantenmechanik mit vielen dieser Prinzipien oder Konzepten der klassischen Physik herbeigeführt hat, erforderte und erfordert weiterhin eine intensive Auseinandersetzung. Von einer Interpretation der Quantenmechanik darf daher Folgendes erwartet werden:

- Der Übergang von der Mikrowelt (Quantenphysik) zur Makrowelt (NEWTONSche Physik) erfordert eine „Erklärung“. Eine Möglichkeit besteht darin, klassischen Konzepten und Begriffen Vorrang zu geben und einen *Mechanismus* zu konzipieren, der die ungewöhnlichen und fremdartigen Aussagen und Ergebnisse der Quantenmechanik erklären kann. Dies ist genau der Ansatz dem die hier beschriebene Stochastische Mechanik [227] folgt.
- Eine Anforderung an eine Interpretation der Quantenmechanik erfordert, dass oft die Gültigkeit der in der klassischen Physik wesentlichen — und somit uns aus der Alltagswelt vertrauten — physikalischen Konzepte hinterfragt und oft revidiert werden. Oder es muss ein Modell entwickelt werden, das einerseits grundsätzlich quantenmechanischer Natur ist, aber andererseits alle Ergebnisse der klassischen Physik in einem geeigneten Grenzübergang reproduziert.

Tabelle 3.1.: Interpretationen der Quantenmechanik ([Link](#))

Interpretation												
Ensemble Interpretation (S. 3.2)	1926	Max Born	./.	nein	ja	./.	nein	nein	nein	nein	nein	nein
Kopenhagener Interpretation (orthodoxe Interpretation) (S. 3.2)	1927 –	Bohr, Heisenberg	nein	teilweise ¹	ja	nein	teilweise ²	nein ^{3 4}	ja	nein	nein	nein
De-Broglie-Bohm-Theorie (S. 3.2)	1927 – 1952	de Broglie, Bohm	ja ⁶	ja ⁷	ja	ja	nein ⁸	nein	ja	ja		
Quantenlogik (S. 3.2)	1936	Birkhoff	./.	./.	ja ⁹	nein	nein	./. ¹⁰	./.	nein	nein	nein
Zeitsymmetrische Theorien (S. 3.2)	1955	Watanabe	ja	nein	ja	ja	nein	nein ¹¹	nein	nein	ja	
Weiter auf der nächsten Seite.												

⁶Nach dieser Theorie existieren Partikel und Wellenfunktion gleichzeitig und haben eine reale Bedeutung.⁷Eindeutige Teilchengeschichte, aber mehrere Wellenverläufe.⁸Phänomenologische Theorie⁹Aber die Quantenlogik ist in ihrer Anwendbarkeit begrenzter als die kohärenten Historien.¹⁰Interpretativ: Die Quantenmechanik wird als eine Methode zur Vorhersage von Beobachtungen oder als eine Theorie der Messung betrachtet.¹¹[?]

Interpretation	Veröffentlichung	Autoren	Determinismus	Wellenfunktion	Eindeutige Vergangenheit	Verborgene Variablen	der Wellenfunktionson	Lokalität	Beobachter notwendig Kollaps	Kontrafaktische Bestimmtheit	Universelle Welfunktion
Many-worlds interpretation (S. 3.2)	1957	Everett	ja	ja	nein	nein	nein	ja	./. 12	ja	ja
Von Neumann-Wigner- Interpretation (S. ??)	1961 – 1993	von Neumann, Wigner, Stapp	nein	ja	ja	nein	ja	ja	nein	nein	ja
Stochastische Mechanik	1966	Nelson	nein	nein	ja	ja	nein	nein	nein	ja	nein
Many-minds interpretation (S. 3.2)	1970	Zeh	ja	ja	nein	nein	nein	./. 14	ja	./. 15	ja
Consistent histories (S. 3.2)	1984	Griffiths	nein	nein	nein	nein	nein	ja	nein	ja	ja
Transactional interpretation (S. 3.2)	1986	Cramer	nein	ja	ja	nein	ja	nein	nein 16	ja	nein 17

¹²Unzureichend.

¹³Kausaler Zusammenhang.

¹⁴Interpretativ: Die Beobachter trennen die universelle Wellenfunktion in orthogonale Gruppen von Erscheinungen.

¹⁵Unzureichend.

¹⁶In der TI wird der Zusammenbruch des Zustandsvektors als Abschluss der Transaktion zwischen Emitter und Absorber interpretiert.

¹⁷ Die TI ist ausdrücklich nicht-lokal.

Interpretation										Universelle Wellenfunktion	Wel-
										Kontraktionsche Bestimmtheit	
Objective collapse theory (S. 3.2)	1986 – 1989	Ghirardi, Rimini, Weber	nein	ja	ja	nein	ja	nein	nein	nein	nein
Relational quantum mechanics (S. 3.2)	1994	Rovelli	nein ¹⁸	nein	./. ¹⁹	nein	ja ²⁰	ja ²¹	ja ²²	nein	nein
QBism (S. 3.2)	2010	Fuchs, Schack	nein ²³	nein ²⁴	./. ²⁴	nein	ja ²⁵	ja ²⁶	ja	nein	nein
Directional Similarity (S. 3.2)	2014	Newell	nein	nein ⁷	nein ⁸	nein	nein ¹⁰	nein ²⁷	ja	nein ¹⁰	ja ¹¹
Wellenfunktion											
Determinismus											
Autoren											
Veröffentlichung											

¹⁸[?]¹⁹Der Vergleich von Historien zwischen Systemen hat in dieser Interpretation keine klar definierte Bedeutung.²⁰Jede physikalische Interaktion wird als ein Kollapsereignis in Bezug auf die beteiligten Systeme behandelt, nicht nur für makroskopische oder bewusste Beobachter.²¹Der Zustand des Systems ist beobachterabhängig, d. h., der Zustand ist spezifisch für den Bezugsrahmen des Beobachters.²²[?]²³Eine Wellenfunktion kodiert lediglich die Erwartungen eines Akteurs für zukünftige Erfahrungen. Sie ist nicht realer als eine Wahrscheinlichkeitsverteilung im Bayesianismus.²⁴Die Quantentheorie ist ein Instrument, das jeder Akteur nutzen kann, um seine Erwartungen zu steuern. Die Vergangenheit kommt nur insofern ins Spiel, als die individuellen Erfahrungen und das Temperament eines Agenten seine Vorannahmen beeinflussen.²⁵Obwohl der QBismus diese Terminologie vermeiden würde. Eine Änderung der Wellenfunktion, die ein Akteur einem System aufgrund einer Erfahrung zuschreibt, stellt eine Änderung seiner Überzeugungen über weitere Erfahrungen dar, die er machen kann. Siehe Doxastische Logik.²⁶Intrinsisch: Beobachter, oder besser gesagt, Interakteure, sind für den Formalismus ebenso wichtig wie die Systeme, mit denen sie interagieren.²⁷Keine kausale Beziehung.

1. [181] Diese Lösung des EPR-Paradoxons, die Rosen später als Bedingung bezeichnete, dass *die physikalische Realität das ist, was die Quantenmechanik zu beschreiben vermag*, wurde von Bohrs engen Mitarbeitern für ihre Klarheit gelobt. Heisenberg, Klein und Kramers gefiel besonders die Reduktion des EPR-Gedankenexperiments auf das bekannte Problem des „diaphragm with holes“. Die vielleicht interessantesten Reaktionen kamen von Bohrs altem Freund, dem Physiker C. W. Oseen, und dem Physiker und Philosophen Philipp Frank. Oseen hatte verstanden, was Bohr die ganze Zeit gesagt hatte: Vor einer Messung ist der Zustand eines Atoms in Bezug auf die gemessene Größe undefiniert. Frank sah, dass Bohr das EPR tatsächlich auf eine wesentliche Zweideutigkeit fixiert hatte. Was Frank am meisten gefiel, war die Folgerung, dass Physiker den Begriff und das Konzept der physikalischen Realität“ vermeiden sollten. Er verstand Bohr so, dass die Komplementarität die Messverfahren charakterisiert, nicht die gemessenen Dinge. Bohr räumte ein, dass er genau das gemeint hatte.
2. [273] Zitat: „*For a start, discussions of the Copenhagen interpretation in the literature are ambiguous between two different views of the wave function, both of which of course accept the Born interpretation. 5 Sometimes the Copenhagen (and Bohr) interpretation is associated with the epistemic view of the quantum state, according to which the quantum state is but a representation of our knowledge of the physical system, and thus not a real existing entity in itself. On this view the „collapse“ of the wave function is not a physical process, and it just reflects an update of our information about the system; see e.g. Zeilinger (1999). By contrast, the Copenhagen interpretation has also been associated with an ontological view of the quantum state, in which the wave function somehow describes a real wave, and the collapse is a real physical process - presumably induced by the observer. This ontological view is usually attributed to von Neumann in his 1932 textbook exposition of quantum mechanics; see e.g. Henderson (2010). [...] Thus, for Bohr, the wave function is a representation of a quantum system in a particular, classically described, experimental context. Three important points need to be made regarding this contextuality: 1) When a measurement is performed (that is, when an irreversible recording has been made; see below), then the context changes, and hence the wave function changes. This can formally be seen as a collapse of the wave function, with the square quotes indicating that we are not talking about a physical process in which a real wave collapses.*
3. [?] Zitat: „Of course it is entirely justified to imagine this transition, from the possible to the actual, moved to an earlier point of time, for the observer himself does not produce the transition; but it cannot be moved back to a time when the compound system was still separate from the external world, because such an assumption would not be compatible with the validity of quantum mechanics for the closed system. We see from this that a system cut off from the external world is potential but not actual in character, or, as BOHR has often expressed it, that the system cannot be described in terms of the classical concepts. We may say that the state of the closed system represented by a Hilbert vector is indeed objective, but not real, and that the classical idea of objectively real things must here, to this extent, be abandoned.“
4. [183] Zitat: „The description of atomic phenomena has in these respects a perfectly objective character, in the sense that no explicit reference is made to any individual observer and that therefore, with proper regard to relativistic exigencies, no ambiguity is involved in the communication of information.“
5. Bei der stochastischen Interpretation ist es nicht möglich, Geschwindigkeiten für die Teilchen zu

definieren, d. h. die Pfade sind nicht glatt (durch stochastische Prozesse überlagert, Zitterbewegung). Außerdem muss man den Markov-Prozess kennen, um die Bewegung der Teilchen zu jedem Zeitpunkt zu kennen. Wenn man jedoch die genauen Anfangsbedingungen und den Markov-Prozess kennt, ist die Theorie eine realistische Interpretation der Quantenmechanik.

6. In der Interpretation der konsistenten Geschichten ist der Kollaps ein legitimes Berechnungsverfahren, um die Präparation eines Quantenzustands zu beschreiben, aber er ist nicht mehr als eine bequeme Methode zur Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten.
7. Die Wellenfunktion fasst die möglichen Ergebnisse zusammen, wie z. B. die Quoten für ein Pferderennen. Das ist so, als würde man nach dem ontischen Status der Gewinnchancen eines Pferdes fragen, während das Rennen läuft. Existieren die Quoten? Ja. Haben sie irgendeinen Einfluss auf das, was das Pferd tut? Nein. Werden sie durch das Ergebnis bestätigt? Natürlich, denn sie fassen mögliche Ergebnisse zusammen.
8. Die Quantenmechanik liefert keine Details aus der Zeit vor dem „Kollaps“, wie z. B. die genaue Position einer Spin-Achse oder wie viel Grad die Polarisationsrichtung eines Photons von der Horizontalen abweicht. Zwei Photonen mit identischen Eigenschaften können unter denselben Testbedingungen unterschiedliche Ergebnisse liefern, weil
 - a) die Tests ungenau sind (wenn wir Leute bitten, „alle“ Fahrzeuge, die sie in einer Stunde sehen, entweder als Autos oder Busse einzustufen, wie werden sie dann Lastwagen, Krankenwagen und Motorräder einstufen?),
 - b) die Ergebnisse stochastisch sind und
 - c) die Tests die Eigenschaften der getesteten Gegenstände verändern können (wenn man ein Auto zu einem Mechaniker schickt und es gut läuft, bedeutet das, dass es gut lief, bevor man es in die Werkstatt brachte?)
9. In Analogie zu den Gewinnchancen bei einem Pferderennen ist der Zusammenbruch abgeschlossen, wenn das vorletzte Pferd die Ziellinie überquert, d. h. man braucht nicht mehr von Gewinnchancen zu sprechen, weil das, was vorher unbestimmt war, nun eine feststehende Tatsache ist.
10. Um auf die Analogie zu den Quoten für ein Pferderennen zurückzukommen, kann man keine „Gewissheit“ darüber haben, wie das Rennen ausgegangen ist, wenn man nur die Quoten vor dem Rennen kennt, aber andererseits braucht man vielleicht keine Gewissheit, um in der Welt „oft genug“ Erfolg zu haben.
11. Dies ist rein theoretisch. Allerdings ist nicht es nicht praktisch (oder wissenschaftlich) bei der quasi unendlichen Anzahl von „Dingen“, die im Spiel sind und die sich jeden Moment ändern, von einer universellen Wellenfunktion zu sprechen. Außerdem wäre die Gleichung für die universelle Wellenfunktion selbst ein Teil des Universums, so dass der Versuch, sie aufzustellen, wahrscheinlich zu einer kontraproduktiven Rekursionsschleife führen würde.

Übersicht über gängige Interpretationen

Die nachfolgenden Abschnitte listen weitere Interpretationen der Quantenmechanik auf.²⁸

Diese Interpretationen bieten verschiedene Perspektiven darauf, wie die Quantenmechanik die Natur der Realität beeinflusst. Jede Interpretation hat ihre eigenen Vor- und Nachteile und löst, je nach Standpunkt, verschiedene philosophische und methodologische Fragen *aus* oder *auf*.

Ensemble Interpretation: ;

Ensamble Interpretation [\(Wiki\)](#)

Die Ensemble-Interpretation betrachtet die Wellenfunktion eines Quantensystems nicht als Beschreibung eines einzelnen Systems, sondern als statistische Verteilung über ein Ensemble ähnlicher Systeme. Die Messergebnisse werden dann durch statistische Eigenschaften des Ensembles erklärt, anstatt durch individuelle Systeme.

Kopenhagener Interpretation: ;

Kopenhagener Interpretation [\(Wiki\)](#)
(Orthodoxe Interpretation)

Diese Interpretation, die von Physikern wie Niels Bohr und Werner Heisenberg entwickelt wurde, betont die Rolle des Beobachters bei der Messung quantenmechanischer Systeme. Sie besagt, dass ein Quantensystem in einem Zustand von Überlagerung existiert, bis es gemessen wird, und dass die Messung den Zustand des Systems kollabieren lässt.

Die Kopenhagener Interpretation ist die älteste der Interpretationen. Sie basiert auf Bohrs Begriff der *Komplementarität*. Bohr vertrat die Auffassung, dass das klassische und das quantenmechanische Modell zwei komplementäre Ansätze für die Physik sind, die beide notwendig sind. Bohr war der Ansicht, dass eine experimentelle Beobachtung die Wellenfunktion kollabieren oder zerreißen lässt (sic), um ihre künftige Entwicklung mit dem, was wir experimentell beobachten, in Einklang zu bringen. Bohr war sich darüber im Klaren, dass es keine Möglichkeit gab, den genauen Punkt zu bestimmen, an dem der Kollaps stattfand. Jeder Versuch, dies zu tun, würde eher zu einer anderen Theorie als zu einer Interpretation der bestehenden Theorie ergeben. Nichtsdestotrotz war er der Meinung, dass es mit der bewussten Beobachtung verbunden, da dies das ultimative Kriterium ist, an dem wir wissen, dass eine bestimmte Beobachtung stattgefunden hat.

Es ist wichtig hier anzumerken, dass es sich hier um die verbreitetste Interpretation handelt und den größten Konsens hat.

²⁸ Aufgrund der Vielzahl von Interpretationen, wird vor allem auf die sehr guten Wikipedia-Artikel verlinkt.

De-Broglie-Bohm-Theorie: ;

De-Broglie-Bohm-Theorie (Pilotwellen-Theorie) (Wiki)

Die De-Broglie-Bohm-Theorie (auch Pilotwellen-Theorie genannt) postuliert, dass Quantenteilchen sowohl eine materielle Teilchenkomponente als auch eine begleitende Pilotwelle haben. Die Pilotwelle determiniert die Bewegung der Teilchen, während die Teilchen selbst quantenmechanisch sind. Dies erklärt die scheinbare Unvorhersagbarkeit der Quantenmechanik aufgrund des Einflusses der verborgenen Pilotwelle.

Speziell die Bohmsche Sichtweise betrachtet Quantenteilchen als deterministisch und lokal, wobei verborgene Variablen die Ergebnisse von Messungen beeinflussen. Sie postuliert, dass Quantenteilchen eine wohldefinierte Position und Impuls haben, die jedoch aufgrund der Nichtlokalität der Pilotwelle nicht direkt beobachtet werden können.

Bohms Interpretation ist ein explizit nichtlokales mechanistisches Modell. So wie Bohr das philosophische Prinzip der Komplementarität, als etwas ansah, das über die Quantenmechanik hinausgeht, sah Bohm eine tiefe Beziehung zwischen der Verletzung der Lokalität und der Ganzheit oder Einheit von allem, was existiert. Bohm war vielleicht der erste, der eine nichtlokale Natur der Quantenmechanik hervorhob.

Die stochastische Mechanik, wie sie hier dargestellt wird, hat viel mit der von David Bohm vorgeschlagenen kausalen Interpretation der Quantenmechanik gemeinsam. [227] An dieser muss man allerdings nur auf zwei wichtige Unterschiede hinweisen. Erstens ist die Theorie von Bohm vollständig deterministisch. Dies kann sowohl als Vorteil, als auch als Nachteil angesehen werden. Zweitens ist zu berücksichtigen, dass nur die stochastische Mechanik als eine völlig natürliche Verallgemeinerung der klassischen Mechanik auf Prozesse mit *intrinsischer Zufälligkeit* betrachtet werden kann. Dies kann von Bohms Interpretation der Quantenmechanik so nicht gesagt werden.

Quantenlogik: ;

Quantenlogik (Wiki)

Viele-Welten-Interpretation:

Viele-Welten-Interpretation (Wiki)

Die Viele-Welten-Interpretation, die von Hugh Everett vorgeschlagen wurde, postuliert, dass bei jeder Quantenmessung das Universum in alle möglichen Ergebnisse verzweigt. Es gibt daher unendlich viele Paralleluniversen, in denen jede mögliche Realität existiert. Diese Theorie wird

kontrovers bis negativ diskutiert und ist nach wie vor in der populärwissenschaftlichen Literatur präsent.

Die Verfechter der Viele-Welten-Interpretation der Quantenmechanik behaupten, dass ihre Interpretation die Einzige ist, die allein mit der Schrödinger-Gleichung ohne zusätzliche (Mess)-Postulate vereinbar ist. Nach dieser Interpretation führen *Messungen* dazu, dass sich das Universum in so viele Kopien *verzweigt*, wie die Wellenfunktion *Komponenten* hat. [227]

Abgesehen von ihrem bizarren Charakter leidet diese Interpretation an zwei sehr schwerwiegenden Mängeln:

- Die *Verzweigung* sollte von der Wahl der Basis abhängen,
- und ihre Ableitung der Wahrscheinlichkeitsinterpretation von $|\psi|^2$ in Situationen, in denen die verschiedenen „Ergebnisse“ nicht gleich wahrscheinlich sind, impliziert die Zirkularität der Behauptung, dass kleine $|\psi|^2$ kleine „Weltenfragmente“ bedeuten.

Um diese Schwierigkeiten zu überwinden, müsste man die Positionskoordinaten als etwas Besonderes betrachten und folgende Interpretationshypothese aufstellen:

Dass die *Anzahl der Welten* proportional zum Quadrat der Amplitude ist.

Dies kommt der stochastischen Mechanik schon sehr nahe. Nimmt man die Verzweigung in der Viele-Welten-Interpretation ernst, d. h. verlangt man von der Theorie, dass sie die Entwicklung einer einzelnen Welt durch Zeit und Verzweigung identifiziert, dann könnte man auch einfach sagen, dass die Positionskoordinaten einem stochastischen Prozess folgen, dessen marginale Einzelzeitverteilungen durch $|\Psi|^2$ gegeben sind. Die stochastische Mechanik liefert dann eine natürliche Beschreibung des Gesamtprozesses, der allerdings nicht vollständig durch die zeitlichen Randbedingungen allein bestimmt ist.

Von-Neumann-Wigner-Interpretation: ;

Many minds interpretation: ;

Many-minds-interpretation [\(Wiki\)](#)

Consistent histories: ;

Consistent histories [\(Wiki\)](#)

Transactional interpretation: ;

Transactional interpretation [\(Wiki\)](#)

Die Transactionale Interpretation, die von John G. Cramer entwickelt wurde, interpretiert Quantenereignisse als Wechselwirkungen zwischen fortlaufenden *Transaktionswellen*, die sowohl in die Vergangenheit als auch in die Zukunft reichen. Sie bietet eine alternative Sichtweise auf die Quantenmechanik, die die Rolle der Zeit in der Quantenphysik hervorhebt.

Theorie des objektiven Kollaps: ;

Theorie des objektiven Kollaps [\(Wiki\)](#)

Diese Interpretation postuliert, dass die Wellenfunktion eines Quantensystems bei der Messung spontan kollabiert, wodurch das System in einen bestimmten Zustand gebracht wird. Der Prozess des Kollapses wird jedoch nicht vollständig verstanden und bleibt eine der umstrittensten Aspekte der Quantenmechanik.

Relationale Quantenmechanik: ;

Relationale Quantenmechanik [\(Wiki\)](#)

Relationale Interpretation betont die Beziehung zwischen einem Quantensystem und dem Beobachter sowie zwischen verschiedenen Quantensystemen. Sie argumentiert, dass die Realität in Bezug auf diese relationalen Eigenschaften definiert ist, anstatt unabhängig von ihnen zu existieren.

Bayessche Quantenwahrscheinlichkeit: ;

[\(Wiki\)](#)

QBism (en: Quantum Bayesianism) betrachtet die Quantenmechanik aus einer subjektiven Bayesschen Perspektive, wobei die Wellenfunktion als subjektive Wahrscheinlichkeit interpretiert wird, die das Wissen oder den Glauben eines Beobachters über das System repräsentiert. Die Messung aktualisiert dann die persönliche Wahrscheinlichkeit des Beobachters über den Zustand des Systems.

Weitere: ;

weitere
[\(Wiki\)](#)
[\(Wiki\)](#)

Diese zusätzlichen Interpretationen bieten weitere Einblicke in die Natur der Quantenmechanik und zeigen die Vielfalt der philosophischen Ansätze, mit denen die Theorie interpretiert werden kann. Jede Interpretation hat ihren eigenen Ansatz, um die Eigenschaften der Quantenmechanik zu erklären.

3.2.1. Stochastische Mechanik

Herleitung der Schrödinger-Gleichung aus der klassischen Mechanik — Geschichtliche Entwicklung

Obwohl seit den 1960er Jahren bekannt ist, dass sich die Quantenmechanik sauber aus der klassischen Mechanik ableiten lässt, fristet diese Interpretation der Quantenmechanik immer noch ein Schattendasein. Vielen Experten ist die Herleitung der Grundgleichung der Quantenmechanik, also der Schrödinger-Gleichung, aus der klassischen Mechanik unbekannt. Sie steht zwangsläufig im Widerspruch zur allgemein akzeptierten *Kopenhagener Interpretation* der Quantenmechanik. Diese besagt, dass eine physikalische Beschreibung der mikroskopischen Welt als objektiv real existierend ohne Einbeziehung des Beobachters zwangsläufig zu Widersprüchen führt und daher falsch ist.

Die *Kopenhagener Schule* betrachtet gerade die Einbeziehung des Beobachters in eine Theorie des Verhaltens mikroskopischer Systeme als den entscheidenden neuen Gedanken, mit dem die Quantenmechanik über das traditionelle Denkschema der klassischen Physik hinausgeht und zu einer angemessenen Beschreibung des zweifellos nichtklassischen Verhaltens atomarer Systeme gelangt. Diese Auffassung steht in so deutlichem Widerspruch zur gewohnten *Physik des gesunden Menschenverstandes*, dass seit den Anfängen der Quantenmechanik bis heute unaufhörliche Versuche unternommen wurden, diesen eigenartigen *ideologischen Ballast* abzuschütteln, was sich bis heute in einer Unzahl von Interpretationen zur Quantenmechanik äußert.

Wie in [139], [187] beschrieben ist insbesondere die *Kopenhagener Schule*, die als kleinster Konsens der Quantenmechanik angesehen werden kann nicht unproblematisch, was die grundlegenden Annahmen angeht. Dies ist hier, die mathematische Umsetzung eines Konzepts der Einbeziehung eines Beobachters in eine Theorie. Überall dort, wo die physikalische Begründung des mathematischen Apparats unklar bleibt, wird mantraartig wiederholt, dass die Quantenmechanik per se unanschaulich sei - ein weiteres zentrales Dogma der *Kopenhagener Schule* – und daher könne man nicht die naiven Argumentationsweisen der klassischen Physik erwarten.

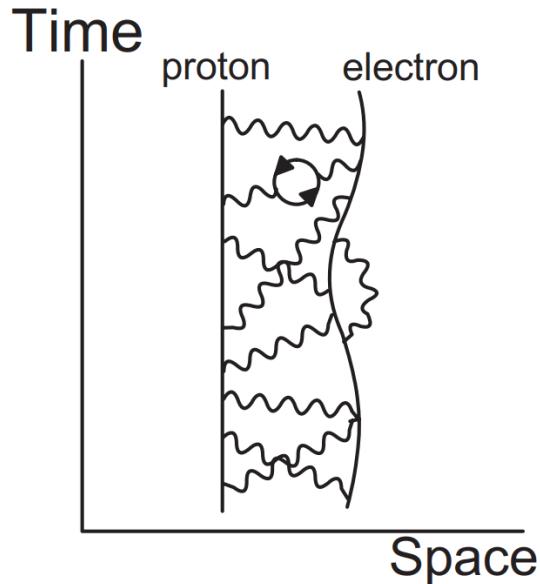


Abbildung 3.1.: H-Atom: Proton und Elektron tauschen Photonen aus. Das schwere Proton ist praktisch stationär und hält das Elektron auf einer „zitterigen“ Bahn fest. Vakuumpolarisation: Wenn das Austauschquant ein Elektron-Positron Paar bildet ist der Effekt eine Reduktion der effektiven Ladung. Das virtuelle Photonenfeld verhält sich wie ein Plasma.

Die Konzeption einer Erklärung der Quantenmechanik basierend auf *nichtdissipativer Diffusion* ist beinahe so alt wie das Konzept der Quantenmechanik selbst. Erstmals wies Schrödinger [193] auf die Möglichkeit und die Konsequenzen einer *Zitterbewegung* des Elektrons hin (Abb. 3.2.1 und 3.2.1). Der Begriff *SCHRÖDINGERSche Zitterbewegung* wird noch heute verwendet und im Kontext der Eigenwerte der Geschwindigkeitsoperatoren in Diracs relativistischer Elektronentheorie diskutiert (vgl. z.B. [195]). Jedoch wurde dieser Ansatz von Schrödinger den Gedanken nicht in aller Konsequenz quantitativ ausgearbeitet. Die potenzielle Verbindung zwischen Quantenmechanik und der Theorie der BROWNSchen Molekularbewegung wurde von Fürth [196] im Jahr 1933 ausführlich erörtert. Nach dem Krieg erfuhr diese Diskussion durch eine Reihe von Arbeiten erneut reges Interesse (vgl. Feynman [198]).

Eine konkretere Form erhielten die Bemühungen um eine stochastisch-mechanische Begründung der Quantenmechanik erst durch die Arbeiten von Weizel [200], [201], [202] und Fényes [203]. Weizel postulierte die Existenz von *Zeronen*, die – ähnlich wie bei der Feldtheorie der Elementarteilchen – durch Nullpunktsschwankungen aus dem Vakuumgrundzustand in Form virtueller Teilchen aller Art entstehen können. Diese Zeronen stoßen mit dem betrachteten Teilchen zusammen, ähnlich wie ein Kolloideteilchen mit den Molekülen einer Flüssigkeit, in der es eine Brownsche

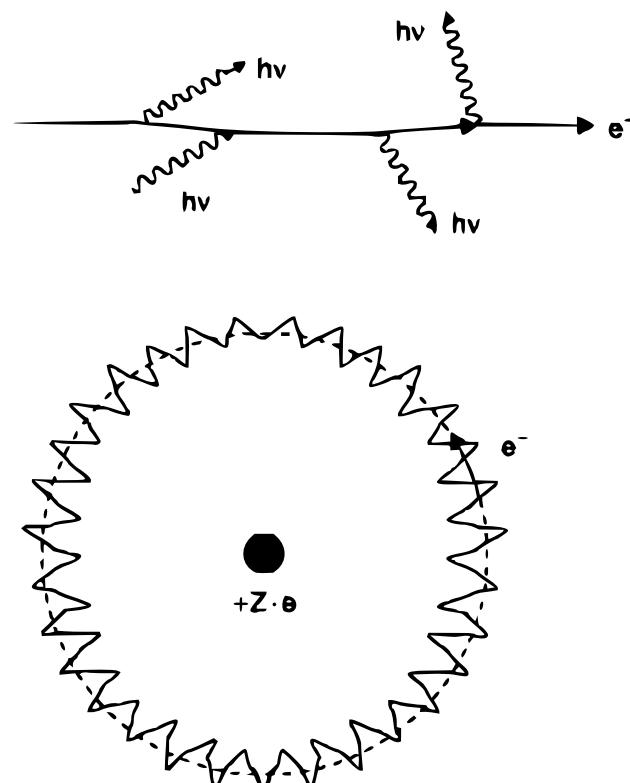


Abbildung 3.2.: Illustration der Zitterbewegung eines Elektrons aufgrund der Emission und Absorption virtueller Photonen.

Bewegung ausführt. Erst durch die Veröffentlichung von Nelson [3], [4] erhielt dieses Konzept eine transparentere Gestalt. Daneben gab es zahlreiche weitere Beiträge zu diesem Thema, von denen hier nur die bedeutendsten von Bohm [204], [206], de Broglie [207], Landé [208], Comisar [209], Santos [210] und de la Persa Auerbach [211] genannt werden.

Die Arbeit von Bopp [213] strebt zwar ebenfalls eine korpuskularstatistische Begründung der Quantenmechanik an, kann sich jedoch nicht zu der radikalen Auffassung der Weizel-Fényes-Nelson-Theorie durchringen, wonach die in der Quantenmechanik realisierten statistischen Gesamtheiten im Prinzip nichts mit der Einwirkung irgendeiner Messanordnung zu tun haben. Aus diesem Grund fehlt dieser Arbeit die Überzeugungskraft des ünmittelbar verständlichen "Konzepts.

Selbst offensichtliche Widersprüche in der *Kopenhagener Interpretation* haben bisher nicht zu grundlegenden Korrekturen geführt. Im Gegenteil: Lehrbücher über Quantenmechanik, die seit ihrer Einführung in zahlreicher Fülle verfasst wurden, befinden sich in einem festen ideologischen Abhängigkeitsverhältnis zueinander. Zum Beispiel stellt Dirac in seinem 1930 veröffentlichten Buch "Quantum Mechanicsfest:

"... jedes Ergebnis einer Messung einer realen dynamischen Größe ist einer seiner Eigenwerte."

Diese Aussage findet sich inhaltlich in jedem modernen Lehrbuch der Quantenmechanik wieder. Zunächst scheint sie nur eine Definition des Begriffs **Eigenwert** als Ergebnis einer Messung zu sein. Innerhalb der Theorie wird jedoch diesem Begriff eine präzise mathematische Bedeutung zugeschrieben. Es besteht jedoch kein Zweifel daran, dass solche Eigenwerte grundsätzlich nicht direkt messbar sind. In Wirklichkeit können nur Differenzen zwischen Eigenwerten bestimmt werden. Die Messung dieser Differenzen ist jedoch immer mit einer gewissen Ungenauigkeit verbunden, die von der Kopplung des Systems an das Messgerät oder an einen *Informationsüberträger* (z.B. Strahlung) abhängt. Die Linien in den Spektren leuchtender atomarer Gase sind hierfür das bekannteste Beispiel: Diese Linien stellen die einzigen messbaren Informationen über die Energiestrukturen eines Atoms dar, aber sie entsprechen Differenzen zwischen den Energie-eigenwerten des betreffenden Atoms und nicht den Eigenwerten selbst. Darüber hinaus haben diese Linien eine gewisse Breite, sodass die Differenzen zwischen den Eigenwerten nicht absolut genau gemessen werden können.

Überall dort, wo die physikalische Begründung des mathematischen Apparats unklar bleibt, wird mantraartig wiederholt, dass die Quantenmechanik per se unanschaulich sei – ein weiteres zentrales Dogma der *Kopenhagener Schule* – und daher könne man nicht die naiven Argumentationsweisen der klassischen Physik erwarten.

4. Einführung

4.1. Geschichtlicher Abriß der Quantenmechanik

Die erste Anwendung der PLANCKSchen *Energie-Quantisierung* $E_n = n \cdot h\nu$ für einen Oszillator der Frequenz ν ergab sich in der Theorie der spezifischen Wärme (1907-1912 durch EINSTEIN, DEBYE, NERNST). BOHR konnte aus seiner Theorie vorhersagen, daß die PICKERING-Serie *keine* Wasserstoffserie, sondern eine Serie des He^+ ist (ganz geringe Abweichungen durch Kernbewegungen, *reduzierte Masse*).

Licht hat drei Eigenschaften:

- Frequenz/Energie
- Polarisation
- Intensität

Die *Verschärfung* des BOHR'schen Korrespondenzprinzips führt zur Quantenmechanik. Der Name Quantenmechanik stammt von M. BORN.

To Do 5 (Abriss ist noch unvollständig.):

5. Herleitung der Quantenmechanik aus der Theorie statistischer Systeme

Bevor auf die konkrete Herleitung der stochastischen Mechanik eingegangen wird, kann man die hier kurz die Herleitungen der Quantenmechanik und der stochastischen Mechanik vergleichen [227]:

- In der einfachen Herleitung der Quantenmechanik wird die **Poisson-Klammer** der klassischen Mechanik durch den **Kommutator** ersetzt. In Schrödingers Herleitung werden Energie und Impuls durch geeignete Differentialoperatoren in der Energiegleichung ersetzt. Hier ist zu erwähnen, dass die Ableitungen rein formal sind.
- Um die stochastische Mechanik abzuleiten, betrachten allgemeine Diffusionsprozesse, d. h. Prozesse, die eine allgemeine Drift besitzen. Die stochastische Mechanik führt dann zu Lösungen $\rho_{t(r)} = |\Psi_{t(r)}|^2$. Dies ergibt sich aus den stochastischen Varianten von:
 1. Kraft = Masse × Beschleunigung
 2. und dem Lagrangeschen Variationsprinzip.

Anmerkung 1:

Die stochastische Mechanik entsteht also nicht nur auf formale Weise, sondern als natürliche Erweiterung der klassischen Mechanik auf Prozesse mit *intrinsischer Zufälligkeit*.

5.1. Beschreibung stochastischer klassischer Systeme von Punktmassen

Im folgenden wird die Quantenmechanik auf eine reine Beschreibung stochastischer, klassischer Systeme von Punktmassen zurückgeführt. Eine tiefergehende Einführung in die **Stochastik** findet sich im Abschnitt 15.

5.1.1. Definition eines stochastischen Systems

Ein physikalisches System heißt *stochastisch*, wenn sein Zustand zu irgendeiner Zeit t nicht eindeutig aus dem Zustand zur Zeit $t - \Delta t$ ($\Delta t > 0$) berechnet werden kann, sondern die Zustandsänderung im Zeitintervall Δt Zufallsgesetzen unterworfen ist, so daß nur Wahrscheinlichkeitsaussagen für die Zustandsänderungen möglich sind. In praxi ist häufig in guter Näherung eine spezielle Klasse von stochastischen Systemen realisiert:

Definition 1:

Wenn die Wahrscheinlichkeit für die Zustandsänderung mit dem Zeitintervall $(t, t + \Delta t)$ (mit $\Delta t \rightarrow 0$) nur vom Zustand des Systems zur Zeit t abhängt, dagegen nicht vom Systemzustand vor diesem Zeitpunkt, dann nennt man ein solches System eine *MARKOFFSche Kette*.

5.1.2. Einsteins Gesetz für das mittlere Verschiebungsquadrat einer Punktmasse unter Wirkung stochastischer Kräfte eines Einbettungs-Mediums endlicher Zähigkeit

Ein Teilchen, das sich unter Wirkung von Stößen anderer Teilchen aus seiner Umgebung in einem Medium endlicher Zähigkeit bewegt, erfährt Kräfte, die es zu einer unregelmäßigen Bewegung veranlassen. Diese Kräfte bewirken im Mittel über viele Stöße eine Abbremsung des Teilchens, wenn es zu irgendeiner Zeit in diesem Medium eine mittlere Geschwindigkeit hatte. Für die Beschreibung des Bewegungsverhaltens des Teilchens ist es daher zweckmäßig, die Kraft, welche es in jedem Augenblick vom umgebenden Medium erfährt, in eine mittlere Bremskraft zu zerlegen, die dem Betrag der Teilchengeschwindigkeit proportional ist, und in eine Kraft \vec{F}_s , die Zufallsgesetzen gehorcht und deren Zeitmittel Null ist.

Man betrachte ein Teilchen der Masse m_0 , das sich unter der Wirkung der Stöße umgebender Teilchen in einem Medium endlicher Zähigkeit bewegt. Die stochastische Kraft $\vec{F}_s = (F_{1s}, F_{2s}, F_{3s})$ die am Teilchen m_0 angreift, hat die folgende *Wahrscheinlichkeitsdichte* :

$$\wp_{(F_{is})} = \frac{1}{\sqrt{\pi} F_{s0}} \cdot e^{-\frac{F_{is}^2}{F_{s0}}} \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.1)$$

mit

$$F_{s0} = \frac{1}{\tau_s} \cdot \sqrt{m_0 \cdot k_b T} \quad (5.2)$$

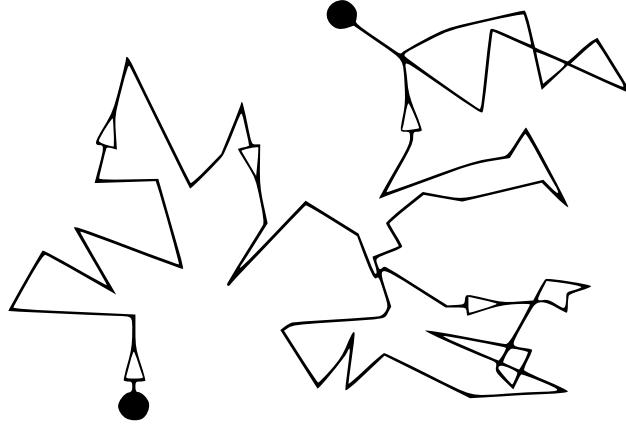


Abbildung 5.1.: Bewegung eines Teilchens unter Wirkung einer stochastischen Kraft (Brownsche Bewegung).

$$\tau_s = \text{mittlere Stoßzeit} \quad (5.3)$$

$$k_b = \text{Boltzmann-Konstante} \quad (5.4)$$

$$T = \text{thermodynamische Temperatur} \quad (5.5)$$

Der mittlere Impulsübertrag pro Stoß ergibt sich als

$$\Delta P_i = F_{so} \cdot \tau_s \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.6)$$

und die mittlere kinetische Energie des *Aufteilchens* m_0 :

$$\left\langle \frac{(\Delta P_i)^2}{2m_0} \right\rangle = \frac{(F_{so}\tau_s)^2}{2m_0} \quad (5.7)$$

hieraus folgt

$$\frac{\langle (\Delta P_i)^2 \rangle}{2m_0} = \frac{k_b T}{2m_0} \quad (\text{Gleichverteilungssatz}) \quad (5.8)$$

Es ergibt sich außerdem

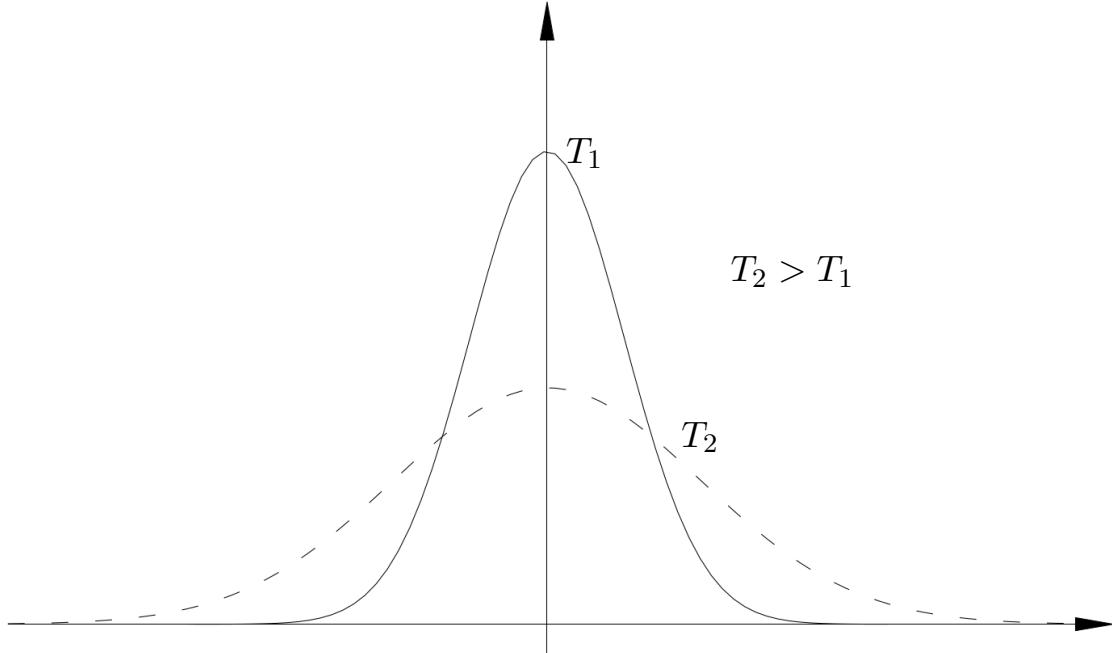


Abbildung 5.2.: Wahrscheinlichkeitsdichte für verschiedene Temperaturen

$$\frac{1}{2m_0} \langle P_i \rangle^2 = \frac{1}{2m_0} \int P_i^2 \tilde{w}_{(P_i)} dP_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.9)$$

mit $P_i = F_{is} \cdot \tau_s$ und $\tilde{w}_{(P_i)} = w_{(F_{is})} = w_{(F_{is})}$

$$\langle P_i \rangle = \int P_i \tilde{w}_{(P_i)} dP_i = 0 \quad (5.10)$$

To Do 6 (Fehler): $P_i \tilde{w}_{(P_i)}$ ist eine ungerade Funktion von P_i

mit einer ungeraden Funktion von P_i folgt:

$$\langle (\Delta P_i)^2 \rangle = \langle P_i^2 \rangle - \langle P_i \rangle^2 = \langle P_i^2 \rangle \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{2m_0} \langle P_i^2 \rangle = \frac{k_b T}{2} \quad (5.12)$$

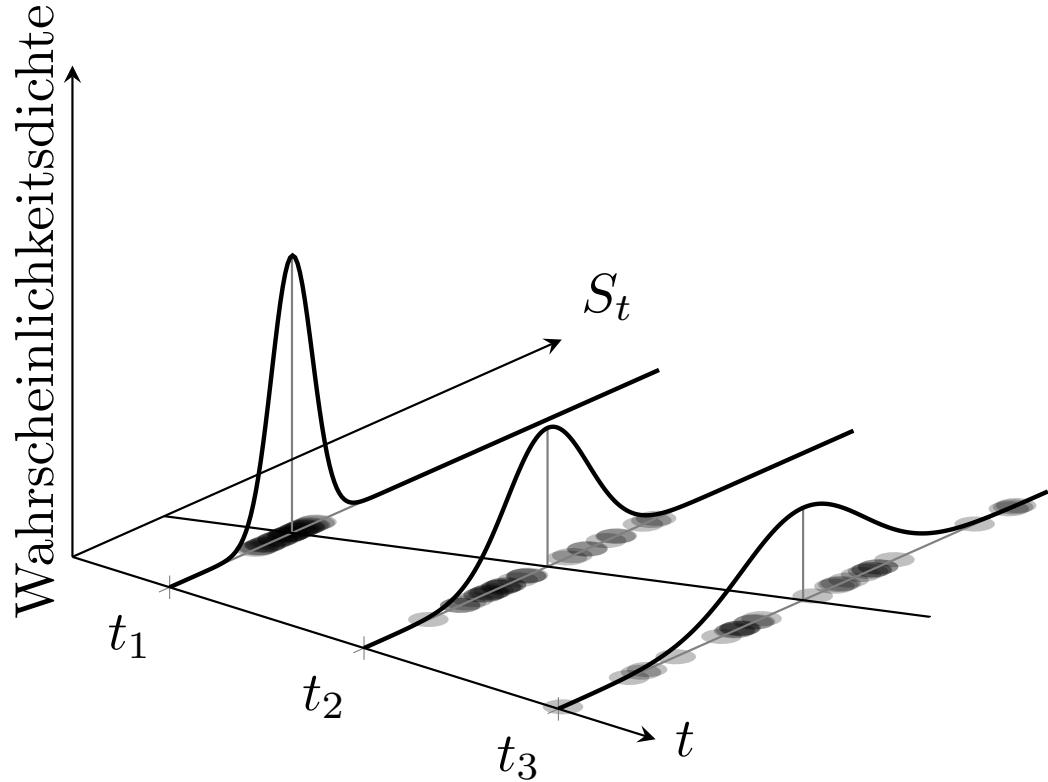


Abbildung 5.3.: Änderung der Wahrscheinlichkeitsdichte über Zeit und Ort.

Zur Berechnung des mittleren Verhaltens eines Teilchens konstruiere man sich ein Ensamble von N identischen, vollständig unabhängigen (d.h. weit voneinander getrennten) Systemen. In jedem System liege das gleiche Kraftfeld $\vec{F}_{(r)}$ vor, in dem sich ein Teilchen (der selben Art) bewegen soll.

Die Position des Teilchens im ν -ten System ($\nu = 1, 2, 3, \dots, N$) zur Zeit t sei $\vec{r}_\nu(t)$. Betrachtet man eine Stelle \vec{r} im Inneren eines Teilvolumens ΔV des Gesamtvolumens V . Man definiere:

$$\epsilon_{\nu(\vec{r}, t)} = \int_{\Delta V_{V_0}} \delta_{(\vec{r} - \vec{r}') \Delta V} d^3 r' = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \vec{r}_\nu(t) \text{ in } \Delta V \\ 0 & \text{wenn } \vec{r}_\nu(t) \text{ nicht in } \Delta V \end{cases} \quad (5.13)$$

Scharmittel für das Antreffen des Aufteilchens im Teilvolumen

$$\Delta V : \frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N \epsilon_{\nu}(\vec{r}, t) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mathcal{W}_{(\vec{r}, t)} \quad (5.14)$$

Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$w_{(\vec{r}, t)} = \varrho(\vec{r}, t) \quad (5.15)$$

$$= \lim_{\begin{array}{l} \Delta V \rightarrow 0 \\ \delta N \rightarrow \infty \end{array}} \frac{\mathcal{W}_{(\vec{r}, t)}}{\Delta V} \quad (5.16)$$

$$(5.17)$$

es gilt

$$\int \varrho_{(\vec{r}, t)} d^3 r = 1 \quad (5.18)$$

Sind $\{\vec{v}_{(\vec{r}, t)}\}$ die Geschwindigkeiten des Teilchens zur Zeit t , so wird der Ausdruck

$$\vec{v}_{(\vec{r}, t)} = \lim_{\begin{array}{l} \Delta V \rightarrow 0 \\ \delta N \rightarrow \infty \end{array}} \frac{\sum_{\nu=1}^N \epsilon_{\nu}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}_{\nu}(t)}{\sum_{\nu=1}^N \epsilon_{\nu}(\vec{r}, t)} \quad (5.19)$$

das Scharmittel der Geschwindigkeit genannt. Sei $\vec{\sigma}_{\nu(t)}$ der *Verschiebungsstrom* des ν -ten Teilchens, d. h. des *Aufteilchens* im ν -ten System.

$$\vec{\sigma}_{\nu} = (\sigma_{1\nu}, \sigma_{2\nu}, \sigma_{3\nu}) \quad (5.20)$$

Dann gilt

$$m_0 \ddot{\sigma}_{i\nu} + \frac{m_0}{\tau} \dot{\sigma}_{i\nu} = F_i + F_{is\nu}(t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.21)$$

Diese Gleichung wird als **Langevin-Gleichung** bezeichnet. Mit $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ und $F_i = -\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}$ die von außen angreifende Kraft ergibt sich:

$$\ddot{\sigma}_{i\nu} + \frac{1}{\tau} \cdot \dot{\sigma}_{i\nu} = f_i + f_{is\nu} \quad (5.22)$$

mit

$$f_i = \frac{F_i}{m_0} \quad (5.23)$$

und

$$f_{is\nu} = \frac{F_{iso(t)}}{m_0} \quad (5.24)$$

Sei $\vec{\sigma}_{s\nu}$ der Teil der Teilchenverrückung $\vec{\sigma}_\nu$, der durch die Anwesenheit der statistischen Kraft zusätzlich auftritt und $\vec{\sigma}_{\nu c}$ die Teilchenverrückung bei Abwesenheit von $\vec{F}_{\nu s}$, dann zerlege nun in $\sigma_{i\nu} = \sigma_{ci\nu} + \sigma_{si\nu}$ (Index c: übliche Kraft (*convective*), s: stochastische Kraft) mit:

$$\ddot{\sigma}_{si\nu} + \frac{1}{\tau} \cdot \dot{\sigma}_{si\nu} = f_{iso(t)} \quad (5.25)$$

$$\ddot{\sigma}_{ci\nu} + \frac{1}{\tau} \cdot \dot{\sigma}_{ci\nu} = f_{icr(t)} \quad (5.26)$$

und bilde $\sigma_{sj\nu}$

$$\sigma_{sj\nu} \cdot \ddot{\sigma}_{sj\nu} + \frac{1}{\tau} \sigma_{sj\nu} \cdot \dot{\sigma}_{sj\nu} = \sigma_{sj\nu} \cdot f_{iso(t)} \quad (5.27)$$

Nun ist

$$\frac{d}{dt} (\sigma_{sj\nu} \cdot \dot{\sigma}_{si\nu}) = \sigma_{sj\nu} \cdot \ddot{\sigma}_{si\nu} + \dot{\sigma}_{sj\nu} \cdot \dot{\sigma}_{si\nu} \quad (5.28)$$

Als Lösung von 5.26 (partikuläre Lösung) ergibt sich:

To Do 7 (nächste Formel falsch):

$$\dot{\sigma}_{si\nu}(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \int \infty^t f_{is\nu}(\tilde{u}) e^{\frac{\tilde{u}}{\tau}} d\tilde{u} \quad (5.29)$$

Dies ist das sog. **Duhamel-Integral**.

Denn die Ableitung nach t ergibt:

$$\dot{\sigma}_{si\nu}(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot \dot{\sigma}_{si\nu}(t) + f_{si\nu}(t)$$

also ist 5.26 erfüllt.

Man substituiere: $t - \tilde{u} = t' \rightarrow \tilde{u} = t - t'$, $d\tilde{u} = -dt'$

$$\dot{\sigma}_{si\nu}(t) = \int_0^\infty f_{is\nu}(t - t') e^{-\frac{t'}{\tau}} dt' \quad (5.30)$$

Dies ist das sog. *Nachwirkungsintegral*.

Wegen

$$\sigma_{si\nu}(t) = \int_{-\infty}^t \dot{\sigma}_{si\nu}(t'') dt'' \quad (5.31)$$

(Bildung des Scharmittels) ist¹

$$\langle \sigma_{si\nu}(t) f_{si\nu}(t) \rangle = \int_0^\infty e^{-\frac{t'}{\tau}} \left[\int_{-\infty}^t \langle f_{si\nu}(t'') \cdot f_{is\nu}(t) \rangle dt'' \right] dt' \quad (5.32)$$

Der Teil in der eckigen Klammer ist dabei Null:

$$\left[\int_{-\infty}^t \langle f_{si\nu}(t'') \cdot f_{is\nu}(t) \rangle dt'' \right] = 0$$

weil $f_{si(t'')}$ ² und $f_{si(t)}$ für $t''' \neq t$ statistisch unabhängig ist (Spezielle Folge der MARKOFF-Kette).

Also gilt $\langle \sigma_{si\nu} f_{si\nu} \rangle = 0$ Analog gilt:

$$\langle \dot{\sigma}_{sj\nu}(t) \dot{\sigma}_{si\nu}(t) \rangle = \delta_{ij} \dot{\sigma}_{si}^2(t) \quad (5.33)$$

mit $\dot{\sigma}_{si}^2 = \langle \dot{\sigma}_{si\nu}^2 \rangle$

Ist T die Temperatur des *Einbettungsmediums*, so gilt nach dem Gleichverteilungssatz:

$$\dot{\sigma}_{si}^2 = \frac{1}{m_0} k_b T \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.34)$$

¹Im folgenden ist statt $f_{is\nu}$: $f_{si\nu}$ geschrieben

²da: $t''' = t'' - t'$

Anmerkung 2:

Die Geschwindigkeitskomponenten für unterschiedliche Raumrichtungen sind statistisch unabhängig.

Bildet man das **Scharmittel** von $\sigma_{si\nu}$ (Gl. 5.26) so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{sj}\dot{\sigma}_{si}) + \frac{1}{\tau} (\sigma_{sj}\dot{\sigma}_{si}) = \frac{1}{m_0} k_b T \delta_{ij} \quad (5.35)$$

Anmerkung 3:

Man beachte: Nach der Scharmittelbildung wird $\sigma_{si}(t)$ zusätzlich ortsabhängig, und deshalb steht $\frac{\partial}{\partial t}$ statt $\frac{d}{dt}$

Die Lösung der zur obigen Differentialgleichung gehörigen homogenen Differentialgleichung lautet:

$$\sigma_{sj}\dot{\sigma}_{si} = g_{(\vec{r})} \cdot e^{-\frac{t}{\tau} \cdot (t - t_0)} \quad (5.36)$$

mit $g_{(\vec{r})}$: beliebige, stetige Funktion von \vec{r} . Partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist:

$$\sigma_{sj}\dot{\sigma}_{si} = \frac{\tau}{m_0} k_b T \delta_{ij} \quad (5.37)$$

Die allgemeine Lösung von 5.35 ist die Summe von 5.36 und 5.37:

$$\sigma_{sj}\dot{\sigma}_{si} = \frac{\tau}{m_0} k_b T \delta_{ij} + g_{(\vec{r})} \cdot e^{-\frac{t}{\tau} \cdot (t - t_0)} \quad (5.38)$$

Damit wird für $\Delta t = t - t_0 \gg \tau$:

$$\sigma_{sj}\dot{\sigma}_{si} = \frac{\tau}{m_0} k_b T \delta_{ij} \quad (5.39)$$

Wegen $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ ist $\dot{\sigma}_{sj}\sigma_{si} = \dot{\sigma}_{si}\sigma_{sj}$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{sj} \dot{\sigma}_{si}) = \frac{\tau}{m_0} k_b T \delta_{ij} \quad (5.40)$$

Bildet man nun auf beiden Seiten $\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} (\dots) dt'$ mit der Anfangsbedingung $\sigma_{si(t_0)} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) und schreibe die \vec{r} -Abhängigkeit von σ explizit.

$$\sigma_{sj(\vec{r}, t_0 + \Delta t)} \sigma_{si(\vec{r}, t_0 + \Delta t)} = 2\nu \sigma_{ij} \Delta t \quad (5.41)$$

mit

$$\nu = \frac{\tau}{m_0} k_b T \quad (\text{kinematische Zähigkeit/Viskosität}) \quad (5.42)$$

Die Gleichungen 5.41, 5.42 heißen EINSTEINSche Relation [219]. Die übliche Kurzform von 5.41 ist:

$$\bar{\Delta X}_i^2 = 2\nu \Delta t \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.43)$$

Die Gleichung 5.41 lässt sich noch in einer anderen Form schreiben:

Sei $\rho_{\Delta t}(\vec{r}, \vec{\sigma}, t) d^3\sigma$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen, das mit Sicherheit zur Zeit t an der Stelle \vec{r} war, nach Ablauf der Zeit Δt im Volumen $d^3\sigma$ in der Umgebung der Stelle $\vec{r} + \vec{\sigma}$ anzutreffen. Dann gilt (siehe Gl. 5.19 mit $\sigma_{sj\nu} \sigma_{si\nu}$ statt \vec{v}_ν und $t + \delta t$ statt t)

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta V \rightarrow 0}} \left[\frac{1}{\sum \nu = 1^N \epsilon_\nu} \sum_{\nu=1}^N \epsilon_\nu \cdot \sigma_{sj\nu} \cdot \sigma_{si\nu} \right] = \sigma_{sj(\vec{r}, t + \Delta t)} \sigma_{si(\vec{r}, t + \Delta t)} \quad (5.44)$$

$$= \int \sigma_{sj} \cdot \sigma_{si} \rho_{\Delta t}(\vec{r}, \sigma_s, t) \cdot d^3\sigma_s \quad (5.45)$$

ber alle $\vec{\sigma}_s$.

Man kann im folgenden stets nur die von $f_{si}(t)$ erzeugten Verschiebungen σ betrachten. Deshalb wird im folgenden bei $\sigma_{...}$ der Index $_s$ weggelassen.

Damit lässt sich 5.41 schreiben als (mit t statt t_0):

$$\int \sigma_j \sigma_i \rho_{\delta t_{(\vec{r}, \vec{\sigma}, t)}} d^3 \sigma = 2\nu \Delta t \sigma_{ij} \quad (5.46)$$

Man beachte:

$$\int \rho_{\delta t_{(\vec{r}, \vec{\sigma}, t)}} d^3 \sigma = 1 \quad (5.47)$$

5.1.3. Die Fokker-Planck-Gleichung

(Wiki: [Fokker-Planck-Gleichung](#))

us der oben gegebenen Definition von $\rho_{\Delta t_{(\vec{r}, \vec{\sigma}, t)}}$ folgt sofort der nachstehende Zusammenhang zwischen der Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Aufteilchens an der Stelle $\vec{r} - \vec{\sigma}$ zur Zeit t , $\rho_{(\vec{r} - \vec{\sigma}, t)}$, und der Dichte seiner Aufenthaltswahrscheinlichkeit an der Stelle \vec{r} zur Zeit $t + \Delta t$, $\rho_{(\vec{r}, t + \Delta t)}$:

Man schreibe im folgenden für $\rho_{(\vec{r}, t)}$ stets $\rho_{(\vec{r}, t)}$. Es gilt:

$$\rho_{(\vec{r}, t + \Delta t)} = \int \rho_{(\vec{r} - \vec{\sigma}, t)} \rho_{\Delta t_{(\vec{r} - \vec{\sigma}, \vec{\sigma}, t)}} d^3 \sigma \quad (5.48)$$

Anmerkung 4:

Die Energieerhaltung ist nicht zwangsläufig gewährleistet $1MeV$ pro e^+ / e^- -Paar \rightarrow Verletzung der Energie lokal bei $\Delta E \Delta t = \hbar$. Vakuumfluktuationen deshalb Streuung bei der Bewegung.^a

^aEdward Nelson, Derivation of the Schrödinger equation from the Newtonian mechanics (1966) Phys. Rev.

Zur Erinnerung: Man betrachte ein Elementarvolumen $d^3 r$ um die Stelle \vec{r} herum und frage danach, wie groß die Zahl der Teilchen pro Volumeneinheit an dieser Stelle zur Zeit $t + \Delta t$ ist, wenn durch Streuung aus anderen Volumina $d^3 r$ um die Stelle $\vec{r} - \vec{\sigma}$ herum Teilchen aus dem *Aufvolumen* $d^3 r$ von \vec{r} gelangen.

Wenn die Wahrscheinlichkeitsdichte in diesem anderen Volumina zur Zeit t $\rho_{(\vec{r} - \vec{\sigma}, t)}$ ist und die Übergangswahrscheinlichkeit von $\vec{r} - \vec{\sigma}$ innerhalb der Zeit Δt mit $\rho_{\Delta t_{(\vec{r} - \vec{\sigma}, \vec{\sigma}, t)}}$ bezeichnet wird. Dann gilt:

$$\rho_{(\vec{r}, t + \Delta t)} = \int \rho_{(\vec{r} - \vec{\sigma}, t)} \rho_{\Delta t_{(\vec{r} - \vec{\sigma}, \vec{\sigma}, t)}} d^3 \sigma \quad (5.49)$$

Diese Gleichung wird als [Smoluchowski-Gleichung](#) oder als [Smoluchowski-Chapman-Emshog](#) bezeichnet.

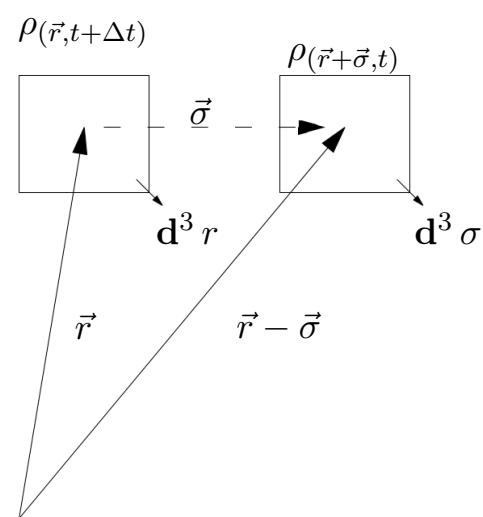


Abbildung 5.4.: Skizze zur Smoluchowski-Gleichung

Man approximiere im folgenden den Integranten

$$G_{(\vec{r} - \vec{\sigma}, t)} = \rho_{(\vec{r} - \vec{\sigma}, t)} \rho_{\Delta t(\vec{r} - \vec{\sigma}, t)}$$

bezüglich der $\vec{r} - \vec{\sigma}$ -Ortsabhängigkeit durch ein TAYLOR-Polynom zweiten Grades an der Stelle \vec{r} mit $\vec{r} - \vec{\sigma} = \tilde{\vec{r}}$:

$$\rho_{(\vec{r}, t + \Delta t)} = \rho_{(\vec{r}, t)} \int \rho_{\Delta t(\vec{r}, \vec{\sigma}, t)} d^3\sigma \quad (5.50)$$

$$- \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \rho_{(\vec{r}, t)} \int \sigma_i \rho_{\Delta t(\vec{r}, \vec{\sigma}, t)} d^3\sigma \quad (5.51)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \rho_{(\vec{r}, t)} \int \sigma_i \sigma_j \rho_{\Delta t(\vec{r}, \vec{\sigma}, t)} d^3\sigma \quad (5.52)$$

$$(5.53)$$

Da $\rho_{\Delta t(\vec{r}, \vec{\sigma}, t)}$ die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeitsdichte hat, gilt:

$$\int \rho_{\Delta t(\vec{r}, \vec{\sigma}, t)} d^3r = 1 \quad (5.54)$$

Andererseits ist:

$$\int \sigma_i \rho_{\Delta t(\vec{r}, \vec{\sigma}, t)} d^3r = \nu_{ic(\vec{r}, t)} \cdot \Delta t \quad (5.55)$$

Der Index c in der Größe $\nu_{ic(\vec{r}, t)}$ steht dabei für *convective*. Ferner gilt mit Gleichung 5.2:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \rho_{(\vec{r}, t)} = \int \sigma_i \sigma_j \rho_{\Delta t(\vec{r}, \vec{\sigma}, t)} d^3\sigma \quad (5.56)$$

$$= 2\nu \Delta t \delta_{ij} \quad (5.57)$$

Der nach dem Einsatz entstehende Ausdruck kann in der Form geschrieben werden:

$$\rho_{(\vec{r}, t + \Delta t)} = \rho_{(\vec{r}, t)} - \Delta t (\vec{\nabla} \rho \vec{v}_c) + \nu \underline{\Delta} \rho \Delta t \quad (5.58)$$

To Do 8 (Link überprüfen.): Link ist fehlerhaft.

(Δ bezeichnet an dieser Stelle den Laplace-Operator). Dabei wurde berücksichtigt:

$$\operatorname{div} \rho \vec{v}_c = \frac{\partial}{\partial x} \rho v_{xc} + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_{yc} + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_{zc} \quad (5.59)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \rho v_{ic} \quad (5.60)$$

Anmerkung 5 (Nebenrechnung):

Nach 5.42 ist:

$$\nu = \frac{k_b T}{m_0} \tau \left[\frac{\text{Energie} \times \text{Zeit}}{\text{Masse}} \right] \quad (\text{ergibt später } h) \quad (5.61)$$

Man substituiere jetzt $\rho_{(\vec{r},t)}$ auf beiden Seiten der obigen Gleichung. Nun kann man durch Δt dividieren und den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ durchführen:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho_{(\vec{r},t+\Delta t)} - \rho_{(\vec{r},t)}}{\Delta t} = \operatorname{div} (\rho_{(\vec{r},t)} v_{c(\vec{r},t)}) + \nu \underline{\Delta} \rho_{(\vec{r},t)} \quad (5.62)$$

$$= \frac{\partial \rho_{(\vec{r},t)}}{\partial t} \quad (5.63)$$

d.h.

$$\frac{\partial \rho_{(\vec{r},t)}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_{(\vec{r},t)} v_{c(\vec{r},t)}) - \nu \underline{\Delta} \rho_{(\vec{r},t)} = 0 \quad (5.64)$$

Diese Gleichung wurde von Fokker und Planck [221] herleitet. Sie stellt einen Spezialfall der zweiten Kolmogoroffschen Differentialgleichung dar, die von Kolmogoroff [224] in einer Arbeit über die analytischen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung abgeleitet wurde.

Die Gleichung 5.64 ist das Ergebnis des Grenzübergangs $\Delta t \rightarrow 0$ der eigentlich wegen der zuvor verwandten Einstein-Beziehung 5.2 unzulässig ist, da diese ja nur unter der Voraussetzung (d. h. $\Delta t \gg \tau$) gilt. Die in 5.64 auftretende zeit t ist also mindestens um die Bremszeit τ unbestimmt. Dies gilt ebenso für die Navier-Stokes-Gleichung, die im nächsten Abschnitt hergeleitet werden.

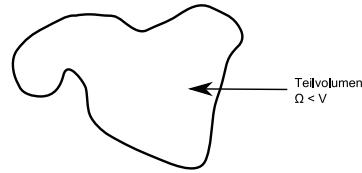


Abbildung 5.5.: Abbildung mit Teilvolumen $\Omega < V$

Anmerkung 6:

Der Wellencharakter wird durch die **Rauschstruktur** des Raumes hervorgerufen. Der **Wellencharakter** (Dualismus) ist vollständig durch die klassische Mechanik von Teilchen beschreibbar.

Man beachte jetzt, daß $\rho_{(\vec{r},t)}$ grundsätzlich die Kontinuitätsgleichung erfüllen muß:

$$\frac{\partial \rho_{(\vec{r},t)}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \cdot v) = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}) \quad (5.65)$$

Grundsätzlich gilt immer:

$$\int_V \rho_{(\vec{r},t)} d^3r = 1 \quad \forall t \quad (5.66)$$

$$\frac{N_\Omega}{N} = \int_\Omega \rho_{(\vec{r},t)} d^3r < 1 \quad (5.67)$$

Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte \vec{j} ist gegeben durch (nach dem **Gaußscher Integralsatz**):

$$\vec{j}_{(\vec{r},t)} = \rho_{(\vec{r},t)} \cdot \vec{v}_{(\vec{r},t)} \quad (5.68)$$

hieraus ergibt sich dann (mit Hilfe des GAUSSSchen Satzes):

$$\int_{F_\Omega} \vec{j}_{(\bar{r},t)} \cdot d^3r = -\frac{\dot{N}_\Omega}{N} \quad (5.69)$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \rho_{(\bar{r},t)} d^3r \quad (5.70)$$

$$= \int_\Omega \operatorname{div} \vec{j}_{(\bar{r},t)} d^3r \quad (5.71)$$

$$(5.72)$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ergibt sich:

$$= \operatorname{div} \vec{j}_{(\bar{r},t)} \Omega \quad (5.73)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \rho_{(\bar{r},t)} \Omega \quad (5.74)$$

Es folgt somit sofort

$$\operatorname{div} \vec{j}_{(\bar{r},t)} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_{(\bar{r},t)} = -\dot{\rho}_{(\bar{r},t)} \quad (5.75)$$

Also wird im Limes $\Omega \rightarrow 0$, wenn alle Volumina den Punkt \bar{r} erhalten:

$$\operatorname{div} \vec{j}_{(\bar{r},t)} = -\dot{\rho}_{(\bar{r},t)} \quad (5.76)$$

Wobei der Term $\vec{j}_{(\bar{r},t)} = \dot{\rho}_{(\bar{r},t)} \vec{v}_{(\bar{r},t)}$ ist.

Anmerkung 7:

Dieser Ausdruck ist vergleichbar mit den Erhaltungssätzen der Elektrodynamik: Energie und der Hydrodynamik: Massendichte.

Man führt jetzt eine *Diffusionsstromdichte* j_D ein, die definiert ist durch:

$$\vec{j}_D = \vec{j} - \rho \vec{v}_c \quad (5.77)$$

Der Ausdruck $\rho \vec{v}_c$ steht dabei für die *Konvektionsstromdichte*. Also gilt:

$$\vec{j} = \vec{j}_D + \vec{j}_c \quad (5.78)$$

mit $\vec{j}_c = \rho \vec{v}_c$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{j}_d + \vec{j}_c) = 0 \quad (5.79)$$

Oder:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_d + \operatorname{div} \vec{j}_c = 0 \quad (5.80)$$

Demnach folgt mit Verwendung von 5.64, wo man $-\nu \Delta \rho$ ersetzt durch die Form $\nu \operatorname{div} \operatorname{grad} \rho = +\operatorname{div} (-\nu \operatorname{grad} \rho)$ dann folgt hieraus 5.64:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_c + \operatorname{div} (-\nu \operatorname{grad} \rho) = 0 \quad (5.81)$$

Mit der Differenz von 5.80 und 5.81 ergibt sich

$$\operatorname{div} \vec{j}_D = \operatorname{div} (-\nu \operatorname{grad} \rho) \quad (5.82)$$

Wenn \vec{j}_D wirbelfrei ist, dann folgt hieraus:

$$\vec{j}_D = -\nu \operatorname{grad} \rho \quad (5.83)$$

Dies ist das FICKsche Diffusionsgesetz.

Man führt jetzt eine Gesamtgeschwindigkeit $\vec{v}_{(r,t)}$ ein durch die Festsetzung:

$$\vec{j}_D(\vec{r},t) = \rho_{(r,t)} \vec{v}_{(r,t)} \quad (5.84)$$

und eine Diffusionsgeschwindigkeit („osmotische Geschwindigkeit“) \vec{u} :

$$\vec{j}_D(\vec{r},t) = \rho_{(r,t)} \vec{u}_{(r,t)} \quad (5.85)$$

Mit den Gleichungen 5.77, 5.83 und 5.84 bis 5.85 folgt dann:



Abbildung 5.6.: Erklärung der Integration

$$\vec{v} = \vec{v}_d + \vec{u} \quad (5.86)$$

und weiter mit 5.83:

$$\vec{u} = -\nu \operatorname{grad} \ln \rho \quad (5.87)$$

$$= -\frac{\nu}{\rho} \operatorname{grad} \rho \quad (5.88)$$

5.1.4. Die Navier-Stokes-Gleichung

(Wiki: [Navier-Stokes-Gleichungen](#))

Man kann nun als nächstes den Ausdruck $\rho_{(\vec{r})}$ an der Stelle \vec{r} und zur Zeit $t + \Delta t$ berechnen. Dieser Ausdruck stellt bis auf den Faktor m_0 den konvektiven Anteil der Impulsstromdichte $m_0 \rho \vec{r}$ dar. Bei Abwesenheit eines äußeren Kraftfeldes $\vec{F}_{(\vec{r})}$ kann analog zu $\rho_{(\vec{r}, t + \Delta t)}$ aus $\rho_{(\vec{r}, t)}$ jetzt die Impulsstromdichte $m_0 \vec{j}_{C(\vec{r}, t + \Delta t)}$ aus $m_0 \vec{j}_{C(\vec{r} - \vec{\sigma}, t)}$ bestimmt werden, wobei

$$\vec{j}_{C(\vec{r}, t + \Delta t)} = \rho_{(\vec{r}, t + \Delta t)} \vec{v}_{c(\vec{r}, t + \Delta t)} \quad (5.89)$$

ist. Es gilt hier analog zu dem vorausgegangenem Fall:

$$\rho_{(\vec{r}, t + \Delta t)} v_{ic}(\vec{r}, t + \Delta t) = \int \rho_{(\vec{r} - \vec{\sigma}, t)} v_{ic}(\vec{r} - \vec{\sigma}, t) \rho_{\Delta t(\vec{r} - \vec{\sigma}, \sigma, t)} d^3\sigma \quad (5.90)$$

Man approximiere wie zuvor:

$$\bar{G}_i(\vec{r} - \vec{\sigma}, \vec{\sigma}, t) = \rho_{(\vec{r} - \vec{\sigma}, t)} v_{ic}(\vec{r} - \vec{\sigma}, t) \rho_{\Delta t(\vec{r} - \vec{\sigma}, \sigma, t)} \quad (5.91)$$

bezüglich der $\tilde{\vec{r}} = \vec{r} - \vec{\sigma}$ Ortsabhängigkeit durch ein **Taylor-Polynom** zweiten Grades. Dann ergibt sich aus 5.90 die zu 5.58 analoge Gleichung:

$$\rho_{(\vec{r}, t + \Delta t)} v_{ic}(\tilde{\vec{r}}, t + \Delta t) - \rho_{(\vec{r}, t)} v_{ic}(\tilde{\vec{r}}, t) = -\Delta t \operatorname{div} (\rho v_{ic} \cdot \vec{v}_c) + \Delta t \nu \underline{\Delta} \rho v_{ic} \quad (5.92)$$

3

In dieser Gleichung tritt nun überall ρv_{ic} anstelle von ρ auf. Auf der linken Seite der Gleichung setzt die Änderung der konvektiven Impulsstromdichte an der Stelle \vec{r} welche nach einer Zeit Δt durch die Einwirkung der gesamten Umgebung, aber ohne Einwirkung einer äußeren Kraft dissipiert.

Man kann somit als nächstes die partielle Zeitableitung bilden.

Der entsprechende Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ (nach der Division mit Δt) führt zu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_{ic}) \Big|_{streu} = -\operatorname{div} (\rho v_{ic} \vec{v}_c) + \nu \underline{\Delta} (\rho v_{ic}) \quad (5.93)$$

Bei Anwesenheit eines äußeren Kraftfeldes $\vec{F}_{(r)}$ bleibt dieser Ausdruck der Form nach ungeändert. Auf der rechten Seite sind lediglich für \vec{v}_c und ρv_{ic} die jetzt unter der Wirkung von \vec{F} gültigen Werte einzusetzen. (Bei der Herleitung von 5.92 geht entscheidend nur die Einstein-Beziehung 5.2 ein, deren Form von der Anwesenheit einer äußeren Kraft unabhängig ist, wie aus der entsprechenden Herleitung hervorgeht.) Die äußere Kraft bewirkt aber eine zusätzliche Änderung der konvektiven Impulsstromdichte, sozusagen durch direktes Angreifen an den Teilchen im Volumenelement $d^3 r$ um \vec{r} .

Diese zeitliche Änderung wird wegen ihrer Entstehung durch externe Ursachen mit einem Index *extern* versehen.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_{ic}) \Big|_{extern} \quad (5.94)$$

Weiterhin kann man die Kraftdichte $k_{i(\vec{r}, t)}$ definieren:

$$k_{i(\vec{r}, t)} = \frac{1}{m_0} \rho \vec{F}_{(r)} \quad (5.95)$$

Demnach kann folgende Beziehung für die Kraftdichte (**Volumenkraft**) k_i hergeleitet werden:

³Hinweis: Differenzen sind mit Δ gekennzeichnet; der **Laplace-Operator** mit $\underline{\Delta}$.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_{ic}) \Big|_{extern} = k_{i(\vec{r},t)} \quad (5.96)$$

Die gesamt Änderung der konvektiven Impulsstromdichte pro Zeiteinheit ist durch die Summe von 5.93 und 5.96 gegeben:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_{ic}) = \frac{\partial}{\partial t} [\rho v_{ic}|_{streu} + \rho v_{ic}|_{extern}] \quad (5.97)$$

Demnach folgt mit der Verwendung von 5.93:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_{ic}) = -\operatorname{div} (\rho v_{ic} \vec{v}_c) + \nu \underline{\Delta} (\rho v_{ic}) + k_{i(\vec{r})} \quad (5.98)$$

Man kann die erhaltenen Gleichungen auf eine besser weiterverwendbare Form bringen und benutzt dabei die folgenden Identitäten:

$$\operatorname{grad} (\rho v_{ic}) = v_{ic} \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} v_{ic} \quad (5.99)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} (\rho v_{ic}) = \rho \underline{\Delta} v_{ic} + 2 \vec{\nabla} v_{ic} + v_{ic} \underline{\Delta} \rho \quad (5.100)$$

$$\operatorname{div} (\rho v_{ic} \vec{v}_c) = v_{ic} \operatorname{div} (\rho \vec{v}_c) + \rho \vec{v}_c \underline{\Delta} v_{ic} \quad (5.101)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_{ic}) = v_{ic} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_{ic}}{\partial t} \quad (5.102)$$

Dies eingesetzt in 5.98 liefert:

$$v_{ic} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}_c) - \nu \underline{\Delta} \rho \right) + \rho \left(\frac{\partial v_{ic}}{\partial t} + (\vec{v}_c \cdot \vec{\nabla}) v_{ic} + \nu \underline{\Delta} v_{ic} - \frac{2\nu}{\rho} \vec{\nabla} \rho \vec{\nabla} v_{ic} \right) = k_i \quad (5.103)$$

Die erste Klammer verschwindet wegen der Fokker-Planck-Gleichung 5.64. Aus 5.87 folgt:

$$\vec{u} = -\nu \vec{\nabla} \ln \rho = -\frac{\nu}{\rho} \vec{\nabla} \rho \quad (5.104)$$

mit 5.103 ergibt sich dann:

$$\frac{\partial \vec{v}_c}{\partial t} + [(\vec{v}_c + 2\vec{u}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{v}_c - \nu \underline{\Delta} \vec{v}_c = \frac{1}{m_0} \vec{F} \quad (5.105)$$

Dabei wurde benutzt (siehe 5.95):

$$m_0 \vec{k}_{(\vec{r},t)} = \rho_{(\vec{r},t)} \vec{F}_{(\vec{r},t)} \quad (5.106)$$

mit

$\vec{k}_{(\vec{r},t)}$ Kraftdichte
 $\vec{F}_{(\vec{r},t)}$ an der Stelle \vec{r} angreifende Karft

$m_0 \vec{k}$ eigentlich Kraftdichte (vgl. 5.106 ohne m_0).

Man ersetze \vec{v}_c durch \vec{v} und \vec{u} :

To Do 9 (Achtung mit e 3 16 vergleichen.):

$$\vec{v}_c = \vec{v} - \vec{u} \quad (5.107)$$

und erhält:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} - \vec{u}) + [(\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{\nabla}] (\vec{v} - \vec{u}) - \nu \underline{\Delta} (\vec{v} + \vec{u}) = \frac{1}{m_0} \vec{F}_{(r)} \quad (5.108)$$

d.h.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{\nabla} \vec{v} - \nu \underline{\Delta} (\vec{v} + \vec{u}) - \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right] = \frac{1}{m_0} \vec{F} \quad (5.109)$$

Man beachte Gleichung 5.87

$$\vec{u} = \frac{\nu}{\rho} \vec{\nabla} \rho \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nu \vec{\nabla} \left(\frac{\frac{\partial \rho}{\partial t}}{\rho} \right)$$

4

⁴Vertauschbarkeit von Zeit- und Ortdifferentiation.

Zur Umformung des obigen Ausdrucks in die eckigen Klammern beachte man:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \rho \right) = -\frac{1}{\rho^2} \dot{\rho} \vec{\nabla} \rho + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \dot{\rho}$$

mit der Abkürzung $\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Nun ist

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \rho \vec{v} \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}) \quad (5.110)$$

$$= -\rho \operatorname{div} (\vec{v}) - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho \quad (5.111)$$

Also wird:

$$\frac{\frac{\partial \rho}{\partial t}}{\rho} = -\operatorname{div} \vec{v} - \vec{v} \cdot \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \rho$$

mit $\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \rho = -\frac{1}{\nu} \vec{u}$ und daher:

$$\begin{aligned} -\nu \vec{\nabla} \left(\frac{\frac{\partial \rho}{\partial t}}{\rho} \right) &= \nu \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \nu \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\nu} \vec{v} \cdot \vec{u} \right) \\ &= \nu \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{grad} (\vec{v} \cdot \vec{u}) \\ &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \end{aligned}$$

Man erhält also:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{u}) \quad (5.112)$$

Für $|\vec{v}| \gg |\vec{u}|$ gilt näherungsweise:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \nu \Delta \vec{v} - \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = \frac{1}{m_0} \vec{F} \quad (5.113)$$

und

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{u} = 0 \quad (5.114)$$

Demnach wird:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} - \nu \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \nu \underline{\Delta} \vec{v} = \frac{1}{m_0} \vec{F} \quad (5.115)$$

Dies ist die sog. **Navier-Stokes-Gleichung** der Hydrodynamik für kompressible Medien ohne Volumenviskosität. Ihre hier gegebene Herleitung aus den beiden **Smoluchowski-Gleichungen**

5.44 und **5.90** stimmt im wesentlichen mit [214] überein. Allerdings wird in der zitierten Arbeit bereits in der Gleichung **5.116** \vec{u} gegen \vec{v} vernachlässigt und \vec{v}_c näherungsweise mit \vec{v} ersetzt. Dadurch tritt in der dort erhaltenen **Navier-Stokes-Gleichung** der Term $-\nu \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$ der obigen Beziehung **5.115** nicht auf. Die zitierte Arbeit gilt demnach nur für inkompressive Medien.

Man beachte:

$$dv_{i(\vec{r},t)} = \frac{\partial v_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial v_i}{\partial t} dt$$

oder

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

mit $\sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_i$ und $\frac{\partial x_1}{\partial t} = v_1$, $\frac{\partial x_2}{\partial t} = v_2$, $\frac{\partial x_3}{\partial t} = v_3$,

Also ergibt sich für die *konvektive Beschleunigung*:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} \quad (5.116)$$

Mit dieser Gleichung lässt sich die Gleichung **5.115** auf die Form bringen:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} - \nu (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \underline{\Delta} \vec{v}) = \frac{1}{m_0} \vec{F} \quad (5.117)$$

Im Grenzfall $\nu \rightarrow 0$ geht diese Gleichung in das **Newtonsche Gesetz** über.

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (5.118)$$

Mit dieser Gleichung und der Gleichung 5.103 folgt dann $\ddot{u} = 0$.

Für spätere Verwendung kann man hier noch die Herleitung eines Ausdrucks für die Dichte der kinetischen Energie anschließen:

Der Teil der äußeren Kraft \vec{F} , der am Teilchen des ν -ten Systems die Beschleunigung $\ddot{\sigma}_\nu$, bewirkt, ist definiert durch

$$\vec{F}_a = m_0 \ddot{\sigma}_\nu \quad (5.119)$$

Die Beschleunigungsarbeit, welche diese Kraft in der Zeitspanne δt leistet, ist per definitionem die Änderung der kinetischen Energie des Teilchens:

$$\begin{aligned} \Delta E_{kin}^{(\nu)} &= \vec{F}_{acc} \cdot \dot{\sigma}_\nu \Delta t \\ &= \Delta t \sum_i \vec{F}_{i,acc} \cdot \dot{\sigma}_{i\nu} \Delta t \end{aligned}$$

Setzt man hierin 5.119 ein, so ergibt sich:

$$\Delta E_{kin}^{(\nu)} = \Delta T m_0 \sum_i \ddot{\sigma}_{i\nu} \cdot \dot{\sigma}_{i\nu}$$

oder wegen

$$\ddot{\sigma}_{i\nu} \cdot \dot{\sigma}_{i\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\sigma}_{i\nu}^2}{\partial t}$$

ergibt sich:

$$\Delta E_{kin}^{(\nu)} = \frac{m_0}{2} \Delta T m_0 \frac{\partial}{\partial t} \sum_i \dot{\sigma}_{i\nu}^2 \quad (5.120)$$

Bildet man von dieser Beziehung das Scharmittel gemäß 5.19, so entsteht unter der Summe analog zu 5.44 der Ausdruck

To Do 10: Evt. falscher Verweis ??

$$\dot{\sigma}_{(r,t)}^2 = \dot{\sigma}_i^2 c_{(r,t)} + \dot{\sigma}_i^2 s_{(r,t)}$$

Da der zweite Term konstant ist, liefert er keinen Beitrag zur Beschleunigungsarbeit. Also ergibt sich für das Scharmittel der Beschleunigungsarbeit aus 5.120:

$$\Delta E_{kin}^{(\nu)} = \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_0}{2} \sum_i \dot{\sigma}_{ic}^2 \right)$$

oder mit $\vec{v}_c = \dot{\vec{\sigma}}_c^2$:

$$\begin{aligned} \Delta E_{kin}^{(\nu)} &= \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_0}{2} v_c^2 \right) \\ &= \Delta \frac{m_0}{2} v_c^2 \end{aligned}$$

Demnach ist:

$$\epsilon_{kin(r,t)} = m_0 \frac{\rho_{(r,t)}}{2} v_c^2$$

5.2. Übergang zur Quantenmechanik — Herleitung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

Bisher wurde angenommen, dass sich das betrachtete Teilchen unter Wirkung von statistischen Kräften gemäß der Langevin-Gleichung 5.22 bewegt. Für Zeitspannen Δt , die groß gegen die Bremszeit τ sind, ergab sich aus dieser Bewegungsgleichung die Einstein-Relation 5.41 und als weitere Konsequenz die Fokker-Planck-Gleichung, das Ficksche Gesetz und die Navier-Stokes-Gleichung. Die Einstein-Relation spielt bei der Herleitung dieser Gleichung eine Schlüsselrolle. Sie lässt sich aber offensichtlich nur unter der Annahme gewinnen, dass die statistische Gesamtkraft, welche auf das Teilchen wirkt, in eine Bremskraft proportional zu $1/\tau$ und in eine statistische Restkraft mit Gauß-Verteilung zerlegt werden kann. Ließe man die Bremskraft gegen Null gehen ($\tau \rightarrow \infty$), so wären keine Aussagen für endliche Zeitspannen Δt mehr möglich, da $\Delta t \gg \tau$ vorausgesetzt werden müsste. Die Behandlung eines quantenmechanischen Teilchens, das sich unter dem Einfluss von statistischen Vakuumkräften bewegt, die im Scharmittel keine Abbremsung bewirken dürfen, ist demnach im Rahmen der bisher entwickelten Theorie nicht einfach durch den Grenzübergang $\tau \rightarrow \infty$ möglich. Dagegen erweist sich ein anderer Lösungsweg als praktikabel, der ebenso naheliegend ist und die Verwendung des bisher entwickelten formalen Apparats erlaubt:

Man unterteile die Gesamtschar des betrachteten Systems in zwei Halbschalen („BROWNSche“ und „Anti-BROWNSche“ Schar)⁵. Diese sind gekennzeichnet durch folgende Langevin-Gleichungen:

$$m_0 \cdot \ddot{\sigma}_{ib} + \frac{m_0}{\tau} \dot{\sigma}_{ib} = F_i(\vec{r}, t) \quad \text{Scharmittel über BROWNSche Halbschale} \quad (5.121)$$

$$m_0 \cdot \ddot{\sigma}_{ia} - \frac{m_0}{\tau} \dot{\sigma}_{ia} = F_i(\vec{r}, t) \quad \text{Scharmittel über Anti-BROWNSche Halbschale} \quad (5.122)$$

Anmerkung 8:

So wie die Newtonsche (oder Einsteinsche) Mechanik streng reversibel ist ($t \rightarrow -t$, $v \rightarrow -v$; bildet Lösungsräume auf Lösungsräume ab), so ist die stochastische Mechanik ($t \rightarrow -t$, $\Psi \rightarrow \Psi^*$; bildet konservative Diffusionen auf konservative Diffusionen ab). Dies gilt grundsätzlich für alle stochastischen Differentialgleichungen, wohl aber für die von Nelson angenommene, die auf einer symmetrischen Definition der stochastischen Beschleunigung beruht und die hier erörtert wird. Man könnte argumentieren, dass die Quantenmechanik auch streng reversibel ist, aber das stimmt nur, wenn man die Quantenmechanik vollständig mit der Schrödinger-Gleichung identifiziert und Messung und Kollaps ignoriert.

Das Scharmittel über diese beiden Gleichungen ist gleich dem arithmetischen Mittel:

⁵Siehe auch: Brownsche Bewegung

$$m_0 \ddot{\sigma}_i = F_{i(\vec{r}, t)} \quad (5.123)$$

mit $\ddot{\sigma}_i = \frac{1}{2} (\ddot{\sigma}_{ia} + \ddot{\sigma}_{ib})$ und $\dot{\sigma}_{ia} = \dot{\sigma}_{ib}$.

Die Bewegungsgleichung des Aufteilchens über die Gesamtschar ist einfach das arithmetische Mittel aus [5.121](#) und [5.122](#).

Fordern man nun für alle \vec{r} und t :

$$\dot{\sigma}_{iB} = \dot{\sigma}_{iA(\vec{r}, t)}$$

d. h.

$$\vec{v}_{B(\vec{r}, t)} = \vec{v}_{A(\vec{r}, t)} \quad (5.124)$$

so ergibt sich im Mittel über die Gesamtschar:

$$m_0 \dot{\vec{v}}_{(\vec{r}, t)} = \vec{F}_{(\vec{r})} \quad (5.125)$$

mit

$$\vec{v} = \vec{v}_A = \vec{v}_B \quad (5.126)$$

wie für die Bewegung eines Teilchens im Vakuum zu fordern ist.

Man denke sich die statistische Kraft $\vec{F}_{s(t)}$ (mit ihrem Brems- bzw. Beschleunigungsangsteil) erst zu einer Zeit t_0 , aktiv. ⁶

Die Einteilung in die beiden Unterscharen A und B spezifiziert man noch durch die zusätzliche Forderung, dass für $t \rightarrow t_0 - 0$ gelten soll:

$$\varrho_{A(\vec{r}, t_0)} = \varrho_{B(\vec{r}, t_0)} = \frac{1}{2} \varrho_{(\vec{r}, t_0)} \quad (5.127)$$

Dabei ist $\varrho_{(\vec{r}, t_0)}$ die Wahrscheinlichkeitsdichte, bezogen auf die Gesamtschar.

Aus den beiden Kontinuitätsgleichungen

⁶In den folgenden Abschnitten wird allerdings stets der Grenzübergang $t_0 \rightarrow -\infty$ angenommen.

$$\frac{\partial \varrho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_A \vec{v}_a = 0 \quad (5.128)$$

$$\frac{\partial \varrho_B}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_B \vec{v}_a = 0 \quad (5.129)$$

folgt dann wegen 5.124 und 5.127 sofort, daß auch die Zeitableitungen von ϱ_A und ϱ_B für alle \vec{r} übereinstimmen müssen. Bildet man von 5.128 und 5.129 die partiellen Zeitableitungen sukzessiv höherer Ordnung, so folgt, dass diese Schlussfolgerung ebenso für alle Zeitableitungen von ϱ_A und ϱ_B gilt. Also ist:

$$\varrho_{A(\vec{r},t)} = \varrho_{B(\vec{r},t)} = \frac{1}{2} \varrho_{(\vec{r},t)} \quad \forall \vec{r}, t \quad (5.130)$$

Will man die Fokker-Planck-Gleichung und die Navier-Stokes-Gleichung für das *Anti-Brownssche*-Untersystem analog herleiten wie für das *Brownssche*-Untersystem, so ist dies nur möglich, wenn man, umgekehrt wie bisher, den Zustand zur Zeit $t - |\Delta t|$ aus dem Zustand zur Zeit t berechnet, also in allen bisherigen Überlegungen Δt durch $-\Delta t$ ersetzt. Da die Langevin-Gleichungen des *A*-Systems aus dem des *B*-Systems entsteht, indem man τ formal durch $-\tau$ ersetzt, ergibt sich wegen $-\Delta t > O$ und $-\tau > O$ auch für das *A*-System analog zu ein positives mittleres Verschiebungskwadrat:

$$\int \sigma_j^A \sigma_i^A \varrho_{\Delta t(\vec{r}, \dot{\sigma}, t)} d^3\sigma = \delta_{ij} \left(\frac{2k_b T \tau}{m_0} \Delta t + \dot{\sigma}_{ic}^2 \delta t^2 \right) \quad (5.131)$$

Alle weiteren Überlegungen bei der Herleitung der Fokker-Planck-Gleichung bzw. der Navier-Stokes-Gleichung können für das *A*-System in vollständiger Analogie übernommen werden. Kann man aber die Zustandsänderungen im *Anti-Brownsschen*-Untersystem stets für das Zeitintervall $(t - |\Delta t|, t]$ berechnen, wenn man die im *Brownsschen*-Untersystem für das Zeitintervall $[t, t + |\Delta t|)$ bestimmt. Die im Limes $\delta t \rightarrow 0$ entstehenden partiellen Zeitableitungen beziehen sich dann für beide Systeme auf den Zeitpunkt t . Nimmt man an, dass für jeden gewählten Zeitpunkt immer eine Systemunterteilung möglich ist, daß stets gilt:

$$\vec{v}^A(\vec{r}, t) = \vec{v}^B(\vec{r}, t)$$

Sind z. B. in zwei Teilvolumina ΔV_A bzw. ΔV_B um den Punkt \vec{r} gleich viele *A*- bzw. *B*-Teilchen enthalten, aber \vec{r}_A und \vec{r}_B stimmen nicht überein, so hat man soviele Teilchen mit unterschiedlichem

$\vec{v}_{A\nu}$ bzw. $\vec{v}_{B\nu}$

To Do 11 (Falsche Formel.): Formel überprüfen

zwischen ΔV_A und ΔV_B auszutauschen, bis \vec{r}_A mit \vec{r}_B übereinstimmt.

To Do 12 (Falsche Formel.): Formel überprüfen

Bei diesem Austausch bleiben ϱ_A und ϱ_B unverändert.

Die Gleichung 5.123 gewährleistet die Reversibilität der Streuprozesse im Mittel über die Ge-
samtschar, wie dies für Streuungen im Vakuum zu verlangen ist.

Man berechne jetzt für jede der beiden Halbschalen die ursprünglichen **Navier-Stokes-Gleichungen** in denen \vec{u} nicht gegen \vec{v} vernachlässigbar war. Diese beiden Gleichungen können sich wegen 5.121 und 5.122 nur im Vorzeichen von ν unterscheiden. Dann gilt:

$$\nu_b = \nu = \frac{k_b T \tau}{m_0} = -\nu_a \quad (5.132)$$

Es gilt also für die BROWNsche Halbschar:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} - \vec{u}) + [(\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{\nabla}] (\vec{v} - \vec{u}) - \nu \underline{\Delta} (\vec{v} - \vec{u}) = \frac{1}{m_0} \vec{F} \quad (5.133)$$

und für die Anti-BROWNsche Halbschar:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} - \vec{u}) + [(\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{\nabla}] (\vec{v} - \vec{u}) + \nu \underline{\Delta} (\vec{v} + \vec{u}) = \frac{1}{m_0} \vec{F} \quad (5.134)$$

Dabei wurde beachtet:

$$\vec{u}_a = -\nu \vec{\nabla} \ln \rho = \nu \vec{\nabla} \ln \rho$$

und

$$\vec{u}_b = \vec{u} = -\nu_b \vec{\nabla} \ln \rho = -\nu \vec{\nabla} \rho = -\vec{u}_a$$

Aus den beiden obigen Gleichungen für die beiden Halbschalen ergibt sich als arithmetisches Mittel:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \nu \underline{\Delta} \vec{u} = \frac{1}{m_0} \vec{F}_{(r,t)} \quad (5.135)$$

Wobei nach [5.116](#) $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ist.

Zu dieser Gleichung [5.112](#) tritt:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \text{grad div } \vec{v} - \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{u}) \quad (5.136)$$

Anmerkung 9:

Diese Gleichungen beschreiben das Scharverhalten eines Einteilchensystems oder das Verhalten eines materiellen Kontinuumssystems, dessen Bewegung unter Einfluß einer äußeren Kraft $\vec{F}_{(r)}$ und mikroskopischen Prozessen reversibler Streuung abläuft. Blickt man zurück auf Gleichung [5.125](#), die als Scharmittel über die beiden Langevin-Gleichungen [5.121](#), [5.122](#) entstanden ist, so scheint obige Gleichung ?? mit dieser in Widerspruch zu stehen, denn [5.125](#) und ?? sind offensichtlich nicht identisch. Dieser Widerspruch löst sich auf, wenn man beachtet, dass die beiden Gleichungen Ergebnis verschiedener Grenzübergänge sind:

Die Zeitableitungen in den Langevin-Gleichungen [5.121](#), [5.122](#) entstehen im Grenzübergang Limes $\Delta t \rightarrow 0$ bevor das Mittel über die Schar gemäß [5.19](#) gebildet wird. Die Zeitableitungen in den Fokker-Planck-Gleichungen bzw. in den Navier-Stokes-Gleichungen werden dagegen gebildet, nachdem über jede der Unterscharen gemittelt worden ist. Wie in Abschnitt [5.1.3](#) ausdrücklich festgestellt wurde, ist der Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ in diesem Falle eigentlich unzulässig, da bei der Herleitung $\Delta t \gg \tau$ vorausgesetzt wird. Man hat also in den Navier-Stokes-Gleichungen die partielle Zeitableitung eigentlich als Differenzenquotient zu lesen, so daß die Zeit t in den Funktionen $\rho_{(r,t)}$ und $\vec{v}_{(r,t)}$ mindestens um die Zeitspanne τ unbestimmt ist. Bei der praktischen Anwendung der Navier-Stokes-Gleichung wirkt sich diese Einschränkung im allgemeinen nicht aus.

Man beachte, daß diese Gleichung für die BROWNSche und die Anti-BROWNSche Halbschar die selbe Formel hat ($\vec{u} \rightarrow -\vec{u}$; $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$), so daß sie sich beim Bilden des **arithmetischen Mittels** nicht ändert.

Nach [5.87](#) war $\vec{u} = -\nu \vec{\nabla} \ln \rho$ woraus sofort folgt:

$$\text{rot } \vec{u} = 0 \quad (5.137)$$

Andererseits gilt allgemein für zwei Vektorfunktionen \vec{a} und \vec{b} folgender Zusammenhang:

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} = \frac{1}{2} [\text{rot } (\vec{b} \times \vec{a}) + \text{grad } (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{a} \text{ div } \vec{b} - \vec{b} \text{ div } \vec{a} - \vec{a} \times \text{rot } \vec{b} - \vec{b} \times \text{rot } \vec{a}]$$

Daraus folgt für $\vec{a} = \vec{u}$ und $\vec{b} = \vec{u}$:

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} u^2$$

Ferner ist

$$\nu \underline{\Delta} \vec{u} \stackrel{5.87}{=} \nu \underline{\Delta} (-\nu \vec{\nabla} \ln \rho) = -\nu^2 \vec{\nabla} (\underline{\Delta} \ln \rho)$$

Damit lässt sich 5.135 auf die Form bringen:

$$\frac{d\vec{v}_{(r,t)}}{dt} = -\text{grad } \vec{P}_{(r,t)} \quad (5.138)$$

mit

$$\vec{P}_{(r,t)} = \frac{1}{m_0} U_{(r,t)} - \frac{1}{2} u^2 - \nu^2 \underline{\Delta} \ln \rho$$

und

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U_{(r,t)}$$

Anmerkung 10:

Man kann durchaus annehmen, daß das auf m_0 wirkende Kraftfeld $\vec{F}_{(r,t)}$ stets konservativ ist.

Aus 5.138 folgt in der Hydrodynamik die Wirbelfreiheit von $\vec{v}_{(r,t)}$, d.h.:

$$\text{rot } \vec{v}_{(r,t)} = 0 \quad (5.139)$$

mit Ausnahme von abzählbar, unendlich vielen Wirbellinien (siehe auch [215]).

Man setze im folgenden für ν fest:

$$\nu = \frac{\hbar}{2m_0} \quad (5.140)$$

(ursprünglich war $\nu = \frac{k_b T \tau}{m_0}$)

Dabei ist $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ und \hbar wird als PLANCKSches Wirkungsquantum oder als Plancksche Konstante bezeichnet:

$$\hbar = 6.06 \cdot 10^{-16} \text{ eVs}$$

Die Schreibweise \hbar für $h/2\pi$ wurde von DIRAC eingeführt.

Mit dieser Festsetzung erhält man:

$$\vec{u}_{(\vec{r},t)} = -\frac{\hbar}{2m_0} \vec{\nabla} \ln \rho_{(\vec{r},t)} \quad (5.141)$$

und setzt entsprechend wegen 5.139

$$\vec{v}_{(\vec{r},t)} = -\frac{\hbar}{m_0} \vec{\nabla} \varphi_{(\vec{r},t)} \quad (5.142)$$

Anmerkung 11:

Wegen rot $\vec{v} = 0$ folgt, dass es muß ein Potential geben muss.

Die Gleichungen 5.135 und 5.136 nehmen mit 5.137, 5.139 und 5.140 die Form an:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \stackrel{5.112}{=} \frac{\hbar}{2m_0} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{u}) \quad (5.143)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{m_0} U - \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 + \frac{1}{2} \vec{\nabla} u^2 - \frac{\hbar^2}{2m_0} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \vec{u}) \quad (5.144)$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit -1 und die zweite mit i und addiert sie anschließend, so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} (-\vec{u} + i\vec{v}) = -\frac{\hbar}{2m_0} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \vec{v}) + \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{u}) - \frac{i}{m_0} \vec{\nabla} \mathbf{U} - \frac{i}{2} \vec{\nabla} v^2 + \frac{i}{2} \vec{\nabla} u^2 - \frac{i\hbar}{2m_0} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \vec{u}) \quad (5.145)$$

Dabei hat man beachtet, daß wegen $\text{rot } \vec{u} = 0$ gilt:

$$\underline{\Delta} u = \text{div grad } \vec{u} = \text{grad} (\text{div } \vec{u})$$

Durch Zusammenfassung der Terme erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial t} (-\vec{u} + i\vec{v}) = \frac{i}{2} \vec{\nabla} [(-\vec{u} + i\vec{v})^2] + \frac{i\hbar}{2m_0} \vec{\nabla} [\vec{\nabla} (-\vec{u} + i\vec{v})] - \frac{i}{m_0} \vec{\nabla} \mathbf{U} \quad (5.146)$$

Anmerkung 12:

Die Funktion $\rho_{(\vec{r},t)}$ und $\varphi_{(\vec{r},t)}$ können kompakt in einer komplexwertigen Funktion $\psi_{(\vec{r},t)}$ zusammengefaßt werden.

$$\psi_{(\vec{r},t)} = \sqrt{\rho_{(\vec{r},t)}} \cdot e^{i\varphi_{(\vec{r},t)}} \quad (5.147)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \ln \psi &= \ln \sqrt{\rho} + i\varphi \\ &= \frac{1}{2} \ln \rho + i\varphi \end{aligned}$$

und weiter:

$$\vec{\nabla} \ln \psi = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \ln \rho + i \vec{\nabla} \varphi$$

$$\frac{\hbar}{2m_0} \vec{\nabla} \ln \psi = \frac{\hbar}{2m_0} \cdot \vec{\nabla} \ln \rho + \frac{i\hbar}{m_0} \vec{\nabla} \varphi$$

Nach den Gleichung 5.141 und 5.142 war:

$$-\vec{u} = \frac{\hbar}{2m_0} \cdot \vec{\nabla} \ln \rho$$

und

$$i\vec{v} = \frac{i\hbar}{m_0} \vec{\nabla} \varphi$$

d.h.

$$-\vec{u} + i\vec{v} = \frac{\hbar}{m_0} \vec{\nabla} \ln \psi \quad (5.148)$$

Aus 5.146 folgt damit:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hbar}{m_0} \vec{\nabla} \ln \psi \right) = \frac{i}{2} \vec{\nabla} \left(\frac{\hbar}{m_0} \vec{\nabla} \ln \psi \right)^2 + \frac{i\hbar}{2m_0} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\hbar}{m_0} \nabla \ln \psi \right) - \frac{i}{m_0} \nabla \mathbf{U} \quad (5.149)$$

oder (Orts- und Zeit-Differentiation vertauscht):

$$\vec{\nabla} \left[\frac{\hbar}{m_0} \frac{\partial}{\partial t} \ln \psi \right] = \vec{\nabla} \left[\frac{i\hbar}{2m_0^2} (\vec{\nabla} \ln \psi) + \frac{i\hbar^2}{2m_0^2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \ln \psi) - \frac{i}{m_0} \mathbf{U} \right] \quad (5.150)$$

Die eckigen Klammern links und rechts sind damit identisch bis auf eine (x, y, z) -unabhängige Konstante die i.a. zeitabhängig sein wird, und die man mit $\beta_{(t)}$ bezeichnet.

$$\frac{\hbar}{m_0} \frac{\partial}{\partial t} \ln \psi = \frac{i\hbar}{2m_0^2} (\vec{\nabla} \ln \psi) + \frac{i\hbar^2}{2m_0^2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \ln \psi) - \frac{i}{m_0} \mathbf{U} + \beta_{(t)} \quad (5.151)$$

Weiterhin gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \psi = \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

sowie

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \ln \psi) &= \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\psi} \vec{\nabla} \psi \right) \\ &= -\frac{1}{\psi^2} (\vec{\nabla} \psi)^2 + \frac{1}{\psi} \underline{\Delta} \psi \\ &= -(\vec{\nabla} \ln \psi)^2 + \frac{1}{\psi} \underline{\Delta} \psi \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{\hbar}{m_0} \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{i\hbar^2}{2m_0} \underline{\Delta} \psi - \frac{i}{m_0} \mathbf{U} + \beta_{(t)} \quad (5.152)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m_0} \underline{\Delta} \psi + \mathbf{U} \psi + \gamma_{(t)} \quad (5.153)$$

mit $\gamma_{(t)} = im_0\beta_{(t)}$.

Man kann jetzt ohne Einschränkung die Funktion $\gamma_{(t)}$ identisch Null setzen, da die physikalisch relevanten Größen:

$$\begin{aligned} \rho_{(\vec{r},t)} &= |\psi_{(\vec{r},t)}| \quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichte} \\ \vec{j}_{(\vec{r},t)} &\quad \text{Wahrscheinlichkeitsstromdichte} \end{aligned}$$

davon nicht beeinflußt werden.

Damit reduziert sich die obige Gleichung auf

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{(\vec{r},t)}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \underline{\Delta} \psi_{(\vec{r},t)} + \mathbf{U}_{(\vec{r},t)} \psi_{(\vec{r},t)} \quad (5.154)$$

Aus Gründen, die erst später einsichtig werden, empfiehlt sich die Einführung des sog. *Impulsoperators* $\vec{\mathbb{P}}$ durch die Festsetzung:

$$\vec{\mathbb{P}} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (5.155)$$

Dann wird

$$\vec{\mathbb{P}}^2 = \hbar^2 \underline{\Delta}$$

Führt man also als weiteren Operator noch den sog. HAMILTON-Operator \mathbb{H} ein durch die Festsetzung:

$$\mathbb{H}_{(\vec{r},t)} = \frac{\vec{\mathbb{P}}^2}{2m_0} + \mathbf{U}_{(\vec{r},t)} \quad (5.156)$$

d.h.

$$\mathbb{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \underline{\Delta} + \mathbf{U}_{(\vec{r},t)} \quad (5.157)$$

dann lässt sich die obige Differentialgleichung für $\psi_{(\vec{r},t)}$ in der Form schreiben:

$$\mathbb{H}\psi_{(\vec{r},t)} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{(\vec{r},t)} \quad (5.158)$$

Dies ist die sog. *zeitabhängige SCHROEDINGER-Gleichung*.

5.2.1. Die Ehrenfestschen Sätze

Die Ehrenfestschen Theoreme werden verwendet, um eine Beziehung zwischen Quantenmechanik und klassischer Mechanik herzustellen. Kurz gesagt bedeuten diese beiden Gleichungen nichts anderes, als dass sich die Mittelwerte (bzw. Erwartungswerte) von Ort und Impuls entsprechend der klassischen, Newtonschen Bewegungsgleichung verhalten.

An dieser Stelle wollen wir kurz darauf eingehen, dass das erste Ehrenfestsche Theorem bereits für jedes System der klassischen stochastischen Mechanik gilt (wobei der Mittelwert wieder als Scharmittel zu verstehen ist).

Im folgenden wird gezeigt, daß für die quantenmechanischen Erwartungswerte von Impuls, Kraft und Ort die Gleichungen der klassischen Mechanik gelten: ⁷

- $m_0 \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{p}$
- $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

Zunächst einige Vorbemerkungen, Definitionen und Hilfssätze:

- Der *Kommutator* zweier Operatoren \mathbb{A} , \mathbb{B} ist: $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}$

⁷ siehe: Ehrenfest-Theorem , vgl. P. Ehrenfest; Zschr. für Physik; Bd. 45 (1927) S. 435

- Weil die Komponenten-Operatoren \mathbb{X}_k ($k = 1, 2, 3$) des Ortsoperators $\vec{\mathbb{X}}$ (auch mit \vec{r} bezeichnet) durch einfache Multiplikation definiert sind:

$$\mathbb{X}_k \cdot f_{(x_1, x_2, x_3, t)} = x_k \cdot f_{(x_1, x_2, x_3, t)}$$

kann man schreiben $\mathbb{X}_k = x_k \cdot \mathbb{1}$ mit $\mathbb{1} = Eins$ -Operator

oder abgekürzt: x_k statt \mathbb{X}_k und entsprechend \vec{r} statt $\vec{\mathbb{X}}$

- Für den HAMILTON-Operator

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2m_0} \sum_{l=1}^3 \mathbb{P}_l^2 + \mathbf{U}_{(\vec{r}, t)}$$

gilt:

$$[\vec{r}, \mathbb{H}] \psi_{(\vec{r}, t)} = \frac{i\hbar}{m_0} \mathbb{P} \psi_{(\vec{r}, t)} \quad (5.159)$$

Beweis 1:

5.159 lautet als Operatorgleichung in Komponenten geschrieben:

$$[\vec{r}, \mathbb{H}] = \frac{i\hbar}{m_0} \mathbb{P} \quad (k = 1, 2, 3)$$

Man verwende nun folgende Formeln:

$$[x_k, \mathbb{H}] = \left[x_k, \frac{1}{2m_0} \sum_{l=1}^3 \mathbb{P}_l^2 + \mathbf{U}_{(\vec{r}, t)} \right]$$

und wegen

$$= \frac{1}{2m_0} \sum_{l=1}^3 [x_k, \mathbb{P}_l^2] + [x_k, \mathbf{U}_{(\vec{r}, t)}]$$

Wegen $[x_k, x_l] = 0$ (Nullopator) ist nun $[x_k, \mathbf{U}_{(\vec{r}, t)}] = 0$. Und wegen $[x_k, \mathbb{P}_l] = i\hbar \delta_{kl} \cdot \mathbb{1}$ („Eins“-Operator) (siehe Ü.7ba]) ist $[x_k, \mathbb{P}_l] = 0$ für alle $l \neq k$ und $[x_k, \mathbb{P}_l^2] = 0$ für alle $l \neq k$.

Deshalb ist:

$$\sum_{l=1}^3 [x_k, \mathbb{P}_l^2] = [x_k, \mathbb{P}_k^2] =$$

und mit $[x_k, \mathbb{P}_k^n] = i\hbar n \mathbb{P}_k^{n-1}$ (siehe [Ü.7.be]) ist speziell für $n = 2$:

$$[x_n, \mathbb{P}_n^2] = 2i\hbar \mathbb{P}_n \quad (5.160)$$

Damit wird

$$[x_k, \mathbb{H}] = \frac{i\hbar}{m_0} \mathbb{P}$$

q.e.d.

- Seien $f_{(\vec{r}, t)}$ und $g_{(\vec{r}, t)}$ Funktionen mit stetigen 2. Ableitungen, ansonsten beliebig. Dann gilt:

$$\int_V (f \Delta g - g \Delta f) d^3r = \oint (\vec{f} \vec{\nabla} g - g \vec{\nabla} f) \cdot \hat{e}_n dF$$

(GREENsche-Formel)

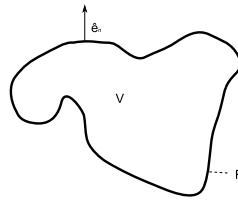


Abbildung 5.7.: Abbildung zur Greenschen Formel

Die **Greensche Formel** folgt aus dem **Gaußscher Integralsatz**

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3r = \oint_F \vec{A} \hat{e}_n dF$$

Wenn man $\vec{A}' = f \cdot \vec{\nabla} g$ bzw. $\vec{A}'' = g \cdot \vec{\nabla} f$ wählt und die beiden Gleichungen voneinander subtrahiert ergibt sich die GREENSche Formel.

- Der HAMILTON-Operator ist ein **Hermitescher Operator**, d. h. es gilt:

$$\int f_{1(\vec{r},t)}^* \mathbb{H} f_{2(\vec{r},t)} d^3r = \int (\mathbb{H} f_{1(\vec{r},t)})^* f_{2(\vec{r},t)} d^3r \quad (5.161)$$

Dabei sollen $f_{1(\vec{r},t)}$ und $f_{2(\vec{r},t)}$ Funktionen mit stetigen 2. Ableitungen sein, die entweder für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ genügend schnell gegen Null streben (dann sind die obigen Integrale über den gesamten \mathbb{R}_3 zu erstrecken) oder die „periodischen Randbedingungen“ genügen. Dann sind die obigen Funktionen über einen „Normierungsquader“ zu erstrecken.

Beweis 2 (Beweis der Hermitetiziät von \mathbb{H}):

$$\begin{aligned}\int f_1^* \mathbb{H} f_2 d^3r &= \int f_1^* \left(-\frac{\hbar}{2m_0} \underline{\Delta} + \mathbf{U} \right) f_2 d^3r \\ &= -\frac{\hbar}{2m_0} \int f_1^* \underline{\Delta} f_2 d^3r + \int f_1^* \mathbf{U} f_2 d^3r\end{aligned}$$

Nun liefert die **Grezsche Formel** mit $f = f_1^*$ und $g = f_2$:

$$\int_V f_1^* \underline{\Delta} f_2 d^3r = \int_V (\underline{\Delta} f_1^*) f_2 d^3r + \oint_F (f_1^* \vec{\nabla} f_2 - f_2 \vec{\nabla} f_1^*) \cdot \hat{e}_n dF$$

Streben f_1, f_2 für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ genügen schnell gegen Null, dann wählt man als V ein Kugelvolumen mit dem Radius R , dann ist \oint_F über die Kugeloberfläche mit dem Radius R zu erstrecken und im $\lim_{R \rightarrow \infty}$ wird $\oint_F (\cdots) \hat{e}_n dF = 0$ Oder (falls f_1, f_2 periodische Randbedingungen) wählt man als V einen „Normierungs-Quader“ und dann wird $\oint_F (\cdots) \hat{e}_n dF = 0$ wegen der Randbedingung für f_1, f_2 .

Damit gilt

$$\int f_1^* \underline{\Delta} f_2 d^3r = \int (\underline{\Delta} f_1^*) f_2 d^3r$$

und mit

$$\int f_{1(\vec{r},t)}^* \mathbf{U}_{(\vec{r},t)} f_{2(\vec{r},t)} d^3r = \int \mathbf{U}_{(\vec{r},t)} f_{1(\vec{r},t)}^* f_{2(\vec{r},t)} d^3r$$

und weil $\underline{\Delta}$ und \mathbf{U} reell sind, ergibt sich:

$$\int f_1^* \left(-\frac{\hbar}{2m_0} \underline{\delta} + \mathbf{U} \right) f_2 d^3r = \int \left(\left(-\frac{\hbar}{2m_0} \underline{\delta} + \mathbf{U} \right)^* f_1 \right)^* f_2 d^3r$$

oder

$$\int f_1^* \mathbb{H} f_2 d^3r = \int (\mathbb{H} f_1)^* f_2 d^3r$$

q.e.d.

Anmerkung 13:

Hermitesche Operatoren werden auch als selbstadjungierte Operatoren bezeichnet.

Nun kann man den ersten Ehrenfestschen Satz beweisen:

$$m_0 \frac{d}{dt} \langle \vec{r} \rangle = \langle \vec{P} \rangle \quad (5.162)$$

Es ist : $\langle P_k \rangle = \int \psi_{(r,t)}^* \mathbb{P}_k \psi_{(r,t)} d^3 r$, ($k = 1, 2, 3$) und mit 5.159 aus Punkt 5.2.1 ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \langle P_k \rangle &= \frac{m_0}{i\hbar} \int \psi^* (x_k \mathbb{H} - \mathbb{H} x_k) \psi d^3 r \\ &= \frac{m_0}{i\hbar} \int \psi^* x_k \mathbb{H} \psi d^3 r - \frac{m_0}{i\hbar} \int \psi^* \mathbb{H} x_k \psi d^3 r \end{aligned}$$

Ferner ist wegen der HERMITETITÄT von \mathbb{H} (hier $f_1^* = \psi^*$, $f_2 = x_k \psi$):

$$\int \psi^* \mathbb{H} x_k \psi d^3 r = \int (\mathbb{H} \psi)^* x_k \psi d^3 r$$

Nun gilt für $\psi_{(r,t)}$ die zeitabhängige SCHRÖDINGERgleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbb{H} \psi$$

und damit für ψ^* :

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = (\mathbb{H} \psi)^*$$

So ergibt sich:

$$\langle P_k \rangle = \frac{m_0}{i\hbar} \int \psi^* x_k \frac{\partial \psi}{\partial t} d^3 r + \frac{m_0}{i\hbar} \cdot i\hbar \int \frac{\partial \psi^*}{\partial t} x_k \psi d^3 r$$

$$\langle P_k \rangle = m_0 \frac{d}{dt} \int \psi^* x_k \psi d^3 r$$

$$\langle P_k \rangle = m_0 \frac{d}{dt} \langle x_k \rangle \quad (k = 1, 2, 3)$$

also vektoriell geschrieben:

$$\langle \vec{P} \rangle = m_0 \frac{d}{dt} \langle \vec{r} \rangle \quad (5.163)$$

Analog lässt sich der zweite **Ehrenfestsche Satz** beweisen.

Mit

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

ist

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \vec{P} \rangle \quad (5.164)$$

Zur Beachtung: Das zweite Ehrenfestsche Theorem, welches besagt, dass die (mittlere) Impulsänderung gleich der äußeren Kraft ist (siehe Gl.) gilt tatsächlich nur im quantenmechanischen (das heißt reibungsfreien) Fall und nicht für ein Teilchen in einem Wärmebad. Auch wenn die äußere Kraft gleich Null ist, wird das Teilchen im Wärmebad der mittleren Energie des umgebenden Mediums angepasst, das heißt abgebremst bzw. beschleunigt. Aus $\vec{F} = 0$ (äußere Kraft) folgt also in die- sem Fall nicht $p = const.$

6. Systematischer Aufbau der Quantenmechanik

6.1. Postulate der Quantenmechanik

6.1.1. Korpuskularstatistische Deutung

- Im Felde vorgegebener äußerer Kräfte bewegt sich ein quantenmechanisches Teilchen unter Wirkung zusätzlicher stochastischer Kräfte des Vakuums stets so, daß seine Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho_{(r,t)}$ und das Scharmittel $v_{(r,t)}$ seiner Geschwindigkeit zu jeder Zeit als stetige und differentierbare Funktionen existieren.
- Durch Wirkung der stochastischen Kräfte (Vakuumkräfte) überlagert sich der klassischen Bewegung des Teilchens eine diffusive Bewegung mit der Diffusionskonstanten (kinematische Viskosität) $\nu = \frac{\hbar}{2m_0}$ mit m_0 = Ruhemasse des Teilchens, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ mit h = PLANCKSches Wirkungsquantum.
- Die diffusive Zusatzbewegung besteht aus Prozessen reversibler Streuung, d.h. die Vakuumkräfte übertragen im Mittel über hinreichend viele Einzelprozesse keinen Impuls auf das Teilchen.
- Die durch die Vakuumkräfte bewirkte *unregelmäßige* Bewegung des Teilchens hat keine Ausstrahlung elektromagnetischer Strahlung zur Folge¹.
Emission bzw. Absorption elektromagnetischer Strahlung kann nur durch eine zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeits-Verteilung, d. h. durch $\rho_{(r,t)}$ bzw. $v_{(r,t)}$ bewirkt werden.
Die Emission bzw. Absorption ist dann wie in der klassischen Elektrodynamik zu berechnen, wobei $\rho_{(r,t)}$ wie eine kontinuirliche Ladungsverteilung bzw. $\vec{v}_{(r,t)}$ wie ein Strömungsfeld zu behandeln ist.

¹(Vorsicht !!!)

To Do 13 (Abbildung einfügen):

Abbildung 6.1.: Stetigkeit

Man kann $\hat{\psi}_{(x)}$ an der Stelle x_l in einer TAYLOR-Reihe entwickeln:

$$\hat{\psi}_{(x)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{dx^\nu} \hat{\psi}_{(x)} \Big|_{x_l} (x - x_l)^\nu \quad (6.1)$$

Schließt man diese Entwicklung stetig und differentierbar an $\hat{\psi}_{(x)}$ für $x \leq x_l$ an, so sind in der TAYLOR-Entwicklung $\hat{\psi}_{(x_l)}$ und $\hat{\psi}'_{(x_l)}$ gegeben. Da $\hat{\psi}_{(x)}$ aber im Intervall (x_l, x_r) die Schrödinger-Gleichung erfüllt, liegt mit $\hat{\psi}_{(x_l)}$ auch $\hat{\psi}''_{(x_l)}$ fest. Differenziert man ??, so wird:

$$\frac{d^3}{dx^3} \hat{\psi}_{(x)} \Big|_{x_l} = -\frac{2m_0}{\hbar^2} \left[(\mathbf{E} - \mathbf{U}_{(x_l)}) \frac{d\hat{\psi}}{dx} \Big|_{x_l} - \hat{\psi}_{(x_l)} \frac{d\mathbf{U}}{dx} \Big|_{x_l} \right] \quad (6.2)$$

Die dritte Ableitung lässt sich also auf die nullte und die erste zurückführen. Entsprechende Beziehungen lassen sich für alle höheren Ableitungen herleiten, d. h.

Anmerkung 14:

Sind $\hat{\psi}_{(x_l)}$ und $\hat{\psi}'_{(x_l)}$ festgelegt, dann sind sämtliche Ableitungen in der TAYLOR-Entwicklung bestimmt. Für beliebige Werte von \mathbf{E} sind aber (vgl. 6.1) an der Stelle $x = x_r$ nicht die Eigenschaften, in die für $x \geq x_r$ monoton abnehmende Funktion glatt überzugehen.

Anmerkung 15 (Nebenbetrachtung):

Nach Postulat ?? muss $\rho_{(x)} = |\hat{\psi}_{(x)}|^2$ überall stetig und differentierbar sein. Dies bedeutet, dass $\hat{\psi}_{(x)}$ überall stetig sein muss.

Ausnahme:

Im allgemeinen folgt dann auch die Differentierbarkeit von $\rho_{(x)}$, dass auch $\hat{\psi}_{(x)}$ überall differenzierbar sein muss.

Wenn x_0 nicht 0 ist, bleibt bei $\rho_{(x)}$ immer ein Knick. Ausnahme: $\hat{\psi}_{(x_0)}$ ist Null.

Stromdichte: $j_d = \frac{\hbar}{2m_0} \rho \vec{\nabla} \rho = \rho \vec{u}$.

Verlangt man, daß [6.1](#) an der Stelle $x = x_0$ differntierbar in die für $x > x_r$ monoton abfallende Funktion übergeht, dann ist dies nur für eine bestimmte Wahl von \mathbf{E} zu erreichen. Insgesamt ergibt sich für alle Zustände, deren Energie zu Paaren (x_l, x_r) von Umkehrpunkten führt, im allgemeinen daß man mehrere solche Energien findet. Zustände, d.h. Lösungsfunktionen der Schrödinger-Gleichung, die zu solchen Energien gehören, heißen „Eigenzustände“, speziell „gebundene Eigenzustände“, weil sie außerhalb eines bestimmten Intervalls (in drei Dimensionen außerhalb einer bestimmten geschlossenen Fläche) monoton abnehmen.

Solche „Eigenschaften“ der [Schrödinger-Gleichung](#) (oder auch „Eigenzustände“) können experimentell (d.h. in der Wirklichkeit) nicht realisiert werden mit Ausnahme des Zustandes mit niedrigster Energie, der als *Grundzustand* bezeichnet wird.

Anmerkung 16 (Begründung):

Jeder Anregungsvorgang findet experimentell in einer endlichen Zeit statt. Ein stationärer braucht aber seiner Natur gemäß eine unendlich lange Präparationszeit. (Dies gilt auch für klassische Systeme ohne Dämpfung).

In der Wirklichkeit werden immer nur **Linearkombinationen** von Zuständen realisiert:

$$\psi_{n(\vec{r},t)} = \hat{\psi}_{n(\vec{r})} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{E}_n t}$$

$$\psi_{(\vec{r},t)} = \sum_n c_n \hat{\psi}_{n(\vec{r})} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{E}_n t}$$

Denn offenbar gilt:

$$\mathbf{H}\psi_{(\vec{r},t)} = \sum_n c_n \mathbf{E}_n \hat{\psi}_{n(\vec{r})} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{E}_n t}$$

Andererseits ist:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{(\vec{r},t)} = \sum_n c_n \mathbf{E}_n \hat{\psi}_{n(\vec{r})} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{E}_n t} = \mathbb{H}\psi_{(\vec{r},t)}$$

D. h.: $\psi_{(\vec{r},t)}$ erfüllt demnach die zeitabhängige SCHRÖDINGERgleichung und nur diese Eigenschaft ist i.a. von $\psi_{(\vec{r},t)}$ zu verlangen. Eine weitere physikalische Konsequenz der obigen Zustandsmischung ist das Zeitverhalten der zugehörigen Ladungsdichte:

$$\begin{aligned} \rho_l(\vec{r},t) &= e \cdot \psi_{(\vec{r},t)}^* \cdot \psi_{(\vec{r},t)} \\ &= e \cdot \sum_n c_{n'}^* \cdot c_n \hat{\psi}_{n'(\vec{r})}^* \hat{\psi}_{n(\vec{r})} e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{E}_{n'} - \mathbf{E}_n) \cdot t} \end{aligned}$$

oder

$$\rho_l(\vec{r},t) = 2e \sum_{n'>n} |c_{n'}^* c_n \hat{\psi}_{n'(\vec{r})}^* \hat{\psi}_{n(\vec{r})}| \cos \left[\frac{1}{\hbar} (\mathbf{E}_{n'} - \mathbf{E}_n) t + \varphi_{nn'(\vec{r})} \right] + \bar{\rho}_l(\vec{r}) \quad (6.3)$$

mit

$$\frac{1}{\hbar} (\mathbf{E}_{n'} - \mathbf{E}_n) = w_{nn'}$$

und

$$\bar{\rho}_{l(\vec{r})} = \sum_n |c_n|^2 \cdot |\hat{\psi}_{n(\vec{r})}|^2$$

Dabei ist $\psi_{nn'(\vec{r})}$ definiert durch:

$$c_{n'}^* c_n \hat{\psi}_{n'(\vec{r})}^* \hat{\psi}_{n(\vec{r})} = \left| c_{n'}^* c_n \hat{\psi}_{n'(\vec{r})}^* \hat{\psi}_{n(\vec{r})} \right| e^{i\varphi_{n'n(\vec{r})}}$$

Nach Postulat ?? strahlt ein geladenes Teilchen in einem solchen Zustand in dem $\rho_{l(\vec{r},t)}$ zeitabhängig ist, elektromagnetische Energie ab. In einem späteren Abschnitt wird gezeigt werden, daß die $\hat{\psi}_{n(\vec{r})}$ zueinander orthogonal sind:

$$\int \hat{\psi}_{n'(\vec{r})}^* \hat{\psi}_{n(\vec{r})} d^3r = \delta_{n'n}$$

Damit ergibt sich für den Erwartungswert der Energie des Teilchens in der betrachteten Zustandsmischung:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int \psi_{(\vec{r},t)}^* \mathbb{H} \psi_{(\vec{r},t)} d^3r \\ &= \sum_{n',n} c_{n'}^* c_n \mathbf{E}_n \left[\int \hat{\psi}_{n'(\vec{r})}^* \hat{\psi}_{n(\vec{r})} d^3r \right] \cdot e \frac{i}{\hbar} (\mathbf{E}_{n'} - \mathbf{E}_n) t \end{aligned}$$

Also

$$\mathbf{E} = \sum_n |c_n|^2 \mathbf{E}_n$$

Wenn \mathbf{E} aufgrund der Abstrahlung elektromagnetischer Energie abnimmt, dann müssen jene Koeffizienten c_n dem Betrage nach zunehmen, die zu niedrigeren Energiewerten \mathbf{E}_n gehören. Der Prozeß ist beendet, wenn $c_n = \delta_{n0}$ ist, sofern $\mathbf{E}_0 < \mathbf{E}_1 < \mathbf{E}_2 < \dots$.

Anmerkung 17 (Beachte):

$$\int |\psi_{(\vec{r},t)}|^2 d^3r = 1 = \sum_n |c_n|^2$$

To Do 14 (Abbildung einfügen): Abbildung: 21.11.95

Abbildung 6.2.: Abbildungen zur Gleichung

To Do 15 (Abbildung einfügen):

Abbildung 6.3.: Abbildung zur Präparationszeit

wegen

$$\sum_{n',n} c_{n'}^* c_n \int \hat{\psi}_{n'(\vec{r})}^* \hat{\psi}_{n(\vec{r})} d^3 r = \sum_{n',n} c_{n'}^* c_n \cdot \delta_{n',n}$$

Umgekehrt verbleibt ein Teilchen in einer Zustandsmischung besonders lange dann, wenn es einem gelingt einen *Quasi-Eigenzustand* zu realisieren, d. h.

$$c_n \approx \begin{cases} 1 & \text{für } n = n_0 \\ 0 & \text{für } n \neq n_0 \end{cases}$$

$\Delta E \Delta t \approx \hbar$ Präparationszeit für den Anregungszustand $E \approx E_n 0$.

6.2. Das Prinzip extremer Gesamtenergie und die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

Man betrachte den Erwartungswert der Gesamtenergie für ein abgeschlossenes konservatives Einteilchensystem:

$$E = \langle H \rangle = \int |c_{(\vec{k})}|^2 \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} d^3 k + \int |\hat{\psi}_{(r)}|^2 \mathbf{U}_{(\vec{k})} d^3 r \quad (6.4)$$

$$= \int \hat{\psi}_{(r)}^* \left[\frac{\mathbb{P}^2}{2m_0} + \mathbf{U}_{(r)} \right] \hat{\psi}_{(r)} d^3 r \quad (6.5)$$

$c_{(\vec{k})}$ ist die **Fourier-Transformierte** der Wellenfunktion im **Ortsraum**.

Welcher Bedingung muß $\hat{\psi}_{(r)}$ genügen, damit \mathbb{H} ein Extremum annimmt? Sei $\hat{\psi}_{0(\vec{k})}$ die Funktion, für welche $\langle \mathbb{H} \rangle$ ein Extremum einnimmt. Man bilde jetzt eine Hilfsfunktion:

$$\hat{\psi}_{(r)} = \hat{\psi}_{0(\vec{r})} + \epsilon \tilde{\psi}_{(r)} \quad \text{wobei } \epsilon \in \mathbb{R} \quad (6.6)$$

wobei $\hat{\psi}_{(r)}$ irgendeine stetige und zweifach differentierbare Funktion sei, mit der Eigenschaft, daß neben der Bedingung

$$\int |\hat{\psi}_{0(\vec{r})}|^2 d^3\vec{r} = 1 \quad (6.7)$$

auch gilt:

$$\int |\hat{\psi}_{(r)}|^2 d^3\vec{r} = 1 \quad (6.8)$$

$$|\hat{\psi}_{(r)}|^2 = |\hat{\psi}_{0(\vec{r})}|^2 + \epsilon (\hat{\psi}_{0(\vec{r})}^* \tilde{\psi}_{(r)} + \text{C.C.}) + \epsilon^2 |\tilde{\psi}_{(r)}|^2 \quad (6.9)$$

mit der Bezeichnung „C.C.” für *conjugiert complex*. Deshalb ist $\tilde{\psi} \neq 0$. Also muß gelten:

$$\epsilon \int |\tilde{\psi}_{(r)}|^2 d^3r \int [\hat{\psi}_{0(\vec{r})}^* \tilde{\psi}_{(r)} + \text{C.C.}] d^3r = 0 \quad (6.10)$$

Wenn $\langle \mathbb{H} \rangle$ für $\hat{\psi}_{(r)} \rightarrow \hat{\psi}_{0(\vec{r})}$ ein Extremum annimmt, dann heißt dies:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \langle \mathbb{H}_{(\epsilon)} \rangle \Big|_{\epsilon=0} = 0 \quad (6.11)$$

Wobei die Nebenbedingung 6.8 eingehalten werden muß. Man schwäche diese Nebenbedingung an in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} N_{(\epsilon)} \Big|_{\epsilon=0} = 0 \quad (6.12)$$

mit der Definition:

$$N_{(\epsilon)} = \int \hat{\psi}_{(r)}^* \hat{\psi}_{(r)} d^3r$$

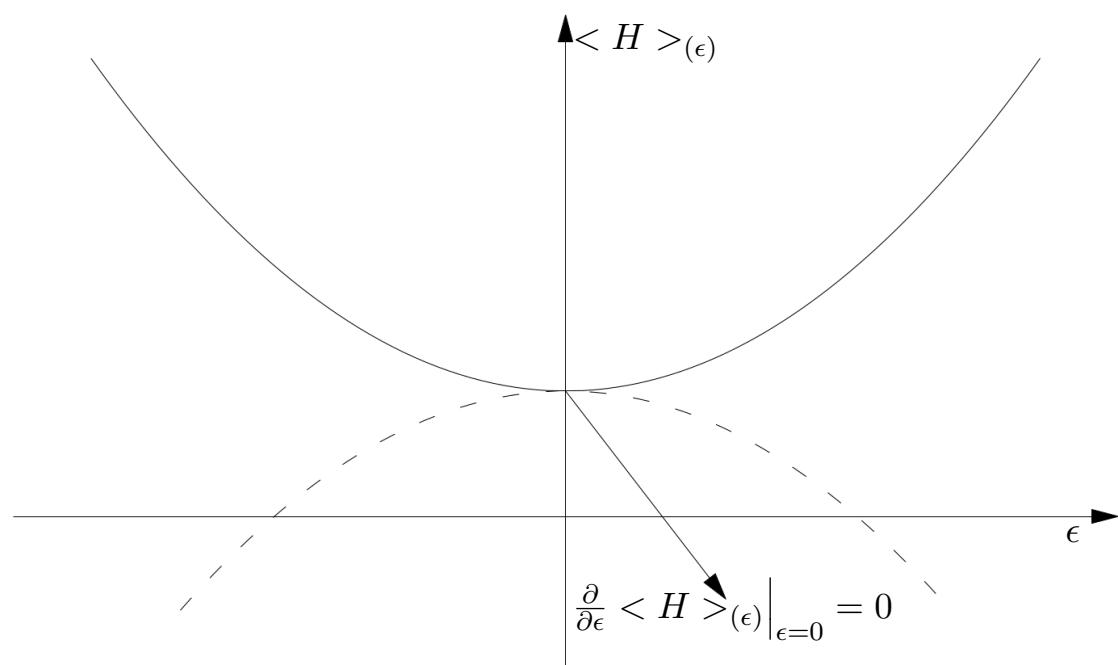


Abbildung 6.4.: Extremum, diese beiden Möglichkeiten können nur sein.

Setzt man 6.12 in den Ansatz 6.6 ein, so folgt:

$$\int \left(\underbrace{\tilde{\psi}_{(\vec{r})}^* \hat{\psi}_0(\vec{r})}_{= I_1} + \underbrace{\tilde{\psi}_{(\vec{r})} \hat{\psi}_0^*(\vec{r})}_{= I_2} = I_1 + I_2 \right) d^3 r = 0 \quad (6.13)$$

Man setzte $I_1 = a + ib$ und $I_2 = a - ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

$$I_1 + I_2 = 2a \xrightarrow{6.13} a = 0$$

Würde man zulassen, daß I_1 und I_2 einzeln endlich sind (von Null verschieden) und nach 6.13 $I_1 + I_2$ verschwindet, dann müßten I_1 und I_2 stets rein imaginär sein. Man kann aber $\tilde{\psi}_{(\vec{r})}$ willkürlich vorgeben, so daß 6.13 im allgemeinen nur erfüllt wird, wenn I_1 und I_2 einzeln verschwinden:

$$\int \tilde{\psi}_{(\vec{r})}^* \hat{\psi}_0(\vec{r}) d^3 \vec{r} = 0 \quad (6.14)$$

Setzt man den Ansatz 6.6 in 6.4 ein und bildet

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0$$

so folgt aufgrund völlig analoger Argumente, daß

$$\int \tilde{\psi}_{(\vec{r})}^* \mathcal{H} \hat{\psi}_0(\vec{r}) d^3 \vec{r} = 0 \quad (6.15)$$

Die Gleichungen 6.14, 6.15 sind bei beliebig vergebbarer Funktion $\tilde{\psi}_{(\vec{r})}^*$ nur dann miteinander verträglich, wenn

$$\mathcal{H} \hat{\psi}_0(\vec{r}) = \lambda \hat{\psi}_0(\vec{r}) \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C} \quad (6.16)$$

Bildet man

$$\begin{aligned} \int \hat{\psi}_0^*(\vec{r}) \lambda \hat{\psi}_0(\vec{r}) d^3 r &= \int \hat{\psi}_{(\vec{r})}^* \mathcal{H} \hat{\psi}_0(\vec{r}) d^3 \vec{r} = 0 \\ &= \lambda \cdot \int \tilde{\psi}_{(\vec{r})}^* \hat{\psi}_0(\vec{r}) d^3 \vec{r} = 0 \\ &= \langle \mathcal{H} \rangle = \mathbf{E} = \text{reell} \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\lambda = \langle \hat{\psi}_0 | \mathbb{H} | \hat{\psi}_{(0)} \rangle = \text{reell}$$

d.h. λ stellt den Extremalwert des Erwartungswertes von \mathbb{H} dar.

Man kommt also zu dem Schluß, daß die $\langle \mathbb{H} \rangle$ extremierende Funktion $\hat{\psi}_{0(\vec{r})}$ die Gleichung

$$\mathbb{H}\hat{\psi}_{0(\vec{r})} = \mathbf{E}\hat{\psi}_{0(\vec{r})}$$

erfüllen muß, und dies ist die zeitunabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung. Die SCHRÖDINGER-Gleichung stellt also die EULERSche Differentialgleichung für das Extremalproblem

$$\langle \mathbb{H} \rangle = \text{Extremum}$$

dar.

6.3. Die Impulsdarstellung der Schrödinger-Gleichung

Wesentlicher Punkt der obigen Herleitung, der sogenannten Ortsdarstellung der zeitunabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung war die Anwendung der Identität:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\mathbb{P}^2}{2m_0} \right\rangle &= \int_{\hat{(\vec{k})}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} d^3k \\ &= \int c_{(\vec{k})}^* \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} c_{(\vec{k})} d^3k \\ &= \int \hat{\psi}_{(\vec{k})}^* \frac{(-i\hbar\vec{\nabla})^2}{2m_0} \hat{\psi}_{(\vec{k})} d^3k \end{aligned}$$

Dieses Vorgehen ist nicht zwingend. Man könnte ebenso $\langle \mathbf{U} \rangle$ in Form eines Erwartungswertes über den \vec{k} -Raum ausdrücken und die Extremalwertaufgabe für $\langle \mathbb{H} \rangle$ auf eine Differentialgleichung für $c_{(\vec{k})}$ zurückführen. Man betrachte hierzu als Beispiel den dreidimensionalen harmonischen Oszillator:

Ein Teilchen der Masse m_0 bewege sich im Potential

$$\mathbf{U}_{(r)} = \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 |\vec{r}|^2$$

(Kraftzentrum im Ursprung, d.h. in $\vec{r} = 0$, ω_0 = Oszillatorkoeffizient)

Offenbar ist

$$\langle \mathbf{U} \rangle = \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 \int \hat{\psi}_{(r)}^* r^2 \hat{\psi}_{(r)} d^3r$$

ganz analog zu

$$\left\langle \frac{\mathbb{P}^2}{2m_0} \right\rangle = \frac{\hbar^2}{2m_0} \int c_{(\vec{k})}^* k^2 c_{(\vec{k})} dk$$

aufgebaut und kann daher auf ganz entsprechende Weise überführt werden in:

$$\langle \mathbf{U} \rangle = \frac{m_0 \omega_0^2}{2} c_{(\vec{k})}^* (i \vec{\nabla}_k)^2 c_{(\vec{k})} dk$$

mit

$$\vec{\nabla}_k = \left(\frac{\partial}{\partial k_x}, \frac{\partial}{\partial k_y}, \frac{\partial}{\partial k_z} \right)$$

Anmerkung 18 (Nebenberechnung):

Für die Umwandlung braucht man nur zu ersetzen:

$$\psi_{(r)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int c_{(\vec{k})} e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k$$

und beachte:

$$i \vec{\nabla}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} = -\vec{r} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$(i \vec{\nabla}_k)^2 e^{-i\vec{k}\vec{r}} = r^2 e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\vec{k}' - \vec{k})\vec{r}} = \delta_{(\vec{k}' - \vec{k})}$$

(Deltafunktion)

Man erhält also:

$$\langle \mathbb{H} \rangle = \int c_{(\vec{k})}^* \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} + \mathbf{U}_{(\vec{r})} \right] c_{(\vec{k})} d^3k \quad (6.17)$$

mit $\vec{r} = i\vec{\nabla}\vec{r}$

Die Extremalaufgabe für $\langle \mathbb{H} \rangle$ liefert jetzt eine Differentialgleichung für $c_{\vec{k}}$:

$$\hat{\mathbb{H}} c_{(\vec{k})} = \mathbf{E} c_{(\vec{k})} \quad (6.18)$$

mit

$$\hat{\mathbb{H}}_{(\vec{k})} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} + \mathbf{U}_{(\vec{r})} \quad (6.19)$$

und $\vec{r} = i\vec{\nabla}\vec{r}$ als der „Impulsdarstellung des Ortsoperators“.

Die Gleichung 6.18 heißt einsprechend *Impulsdarstellung der SCHRÖDINGER-Gleichung*.

In dem hier vorliegenden Spezialfall sind also Orts- und Impusldarstellung formal äquivalent. Im allgemeinen wenn u.B. $\mathbf{U}_{(\vec{r})}$ ein Polynom n-ter Ordnung ist, wird die SCHRÖDINGER-Gleichung in Impulsdarstellung eine Differentialgleichung n-ter Ordnung. In der Ortsdarsetzung bleibt die **Schrödinger-Gleichung** (im nichtrelativistischen Fall) für jedes Potential dagegen stets eine Differentialgleichung 2-ter Ordnung.

6.4. Das Wasserstoffatom

6.4.1. Gebundene Zustände des Wasserstoffatoms

Man behandle das **Wasserstoffatom** in der Näherung:

- punktförmiger, schwerer Kerne
- mit der Ladung e
- ein Elektron mit der Ladung e^- und der Masse m_0 im Felde des Kerns.

Der zugehörige Quantenoperator lautet:

$$\mathbb{H} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \vec{\nabla}^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|} \quad (6.20)$$

$r = 0$ ist der Ursprung des Koordinatensystems und der Ort des Kerns.

Wegen der Zentralsymmetrie des Potentials empfiehlt sich die Einführung von sphärischen Polarkoordinaten r, θ, φ . Zur Schreibvereinfachung empfiehlt sich weiterhin r durch die dimensionslose Größe $\hat{r} = \frac{r}{a_0}$ zu ersetzen wobei

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_0} \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} = 0,5291 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \quad (6.21)$$

eine für das Elektron im Kernpotential charakteristische Länge ist, die als **Bohrscher Radius** bezeichnet wird.

Dann lässt sich die **Schrödinger-Gleichung**

$$\mathbb{H}\psi_{(\vec{r})} = E\psi_{(\vec{r})}$$

in diesen Koordinaten schreiben:

$$\left(\hat{\vec{\nabla}}^2 + \frac{2}{\hat{r}} + \epsilon \right) \hat{\psi}_{(\hat{r})} = 0$$

mit

$$\epsilon = \frac{E}{1\text{Ryd}} \quad (\text{Ryd} = \text{Rydberg}) \quad (6.22)$$

$$1\text{Ryd} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{a_0} \right)^2 = \frac{e^4 m_0}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} = 13.604 \text{eV} \quad (6.23)$$

Beachte:

$$\hat{\vec{\nabla}} = \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial}{\partial \hat{y}}, \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right)$$

Wegen $\int |\hat{\psi}_{(\hat{r})}|^2 d^3\hat{r} = 1$ ist jetzt auch $\hat{\psi}_{(\hat{r})}$ eine dreidimensionale Funktion.

Anmerkung:

Im folgenden wird zur Schreibvereinfachung die Kennzeichnung der dreidimensionalen Größen durch ein $\hat{\cdot}$ -symbolisiert, wieder fortgelassen.

Kommentar:

Häufig wird anstelle der Energieeinheit 1 Hartee = 2 Ryd verwendet, aber nach wie vor a_0 als Längeneinheit beibehalten. Man unterscheidet daher in der Literatur zwischen atomaren (RYDBERG-) bzw. atomaren (HARTREE-) Einheiten, im englischen mit a_U (ATOMIC UNITS) abgekürzt.

Der Vorteil der HARTREE-Einheit: Die **Schrödinger-Gleichung** erhält die Form:

$$\left[-\frac{1}{2} \vec{\nabla}^2 + \frac{1}{r} + e \right] \psi_{(\hat{r})} = 0 \quad (6.24)$$

Zur weiteren Behandlung der Differentialgleichung ?? beachte man:

$$\underline{\Delta} = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

mit

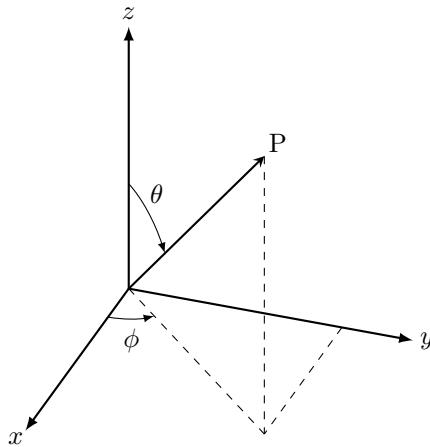


Abbildung 6.5.: Graphische Darstellung der Polarkoordinaten.

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta \\y &= r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta \\z &= r \cdot \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &\leq r \leq \infty \\0 &\leq \theta \leq \pi \\0 &\leq \varphi \leq 2\pi\end{aligned}$$

Die Umrechnung von $\underline{\Delta}$ auf sphärische Polarkoordinaten liefert:

$$\underline{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (6.25)$$

Dieses Resultat kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\underline{\Delta} = \underline{\Delta}_r + \frac{1}{r^2} \underline{\Delta}_{\theta, \varphi} \quad (6.26)$$

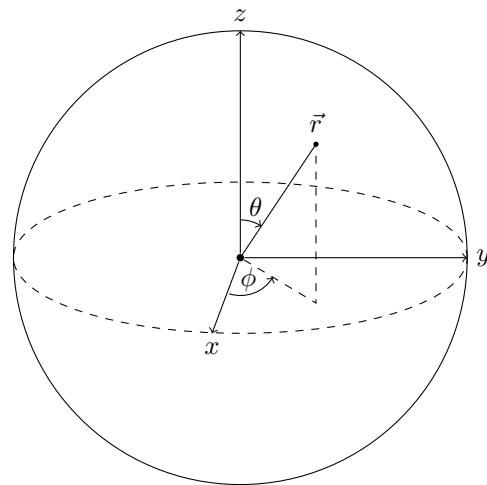


Abbildung 6.6.: Graphische Darstellung der Polarkoordinaten.

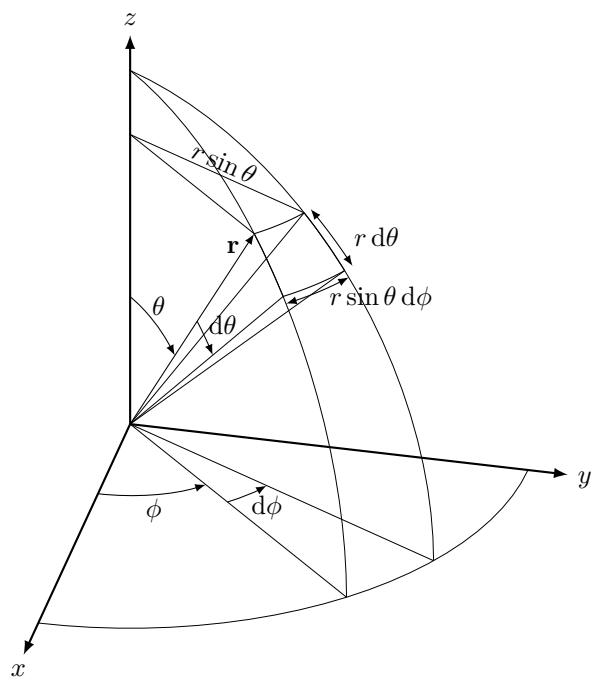


Abbildung 6.7.: Graphische Darstellung der differentiellen Polarkoordinaten.

mit

$$\underline{\Delta}_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (6.27)$$

$$\underline{\Delta}_{\theta,\varphi} = \underline{\Delta}_\theta \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (6.28)$$

$$\underline{\Delta}_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (6.29)$$

Man mache für die Funktion $\psi_{(r,\theta,\varphi)}$ den Ansatz:

$$\psi_{(r,\theta,\varphi)} = \mathcal{R}_{(r)} \Theta_{(\theta)} \varphi_{(\varphi)} \quad (6.30)$$

und führe dies in ?? ein. Dann wird mit Verwendung von 6.25, 6.27-6.29:

$$r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{R} \Delta_\nu R + \epsilon + \frac{2}{r} \right) + \frac{\sin^2 \theta}{\Theta} \underline{\Delta}_\theta \Theta = -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2}$$

$$F_{(r,\varphi)} = G_{(\varphi)}$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von r, φ , die rechte nur von φ ab. Also müssen beide Seiten gleich einer Konstanten sein, die man mit m^2 bezeichnet kann:

$$-\frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{d\varphi^2} = m^2$$

oder

$$\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + m^2 \right) \varphi_{(\varphi)} = 0 \quad (6.31)$$

Die beiden Fundamentalgleichungen dieser Gleichung lauten:

$$e^{\pm im\varphi} \quad \text{mit } m \in \mathbb{Z}$$

da

$$\varphi_{allgemein(\varphi)} = c_1 e^{im\varphi} + c_2 e^{-im\varphi}$$

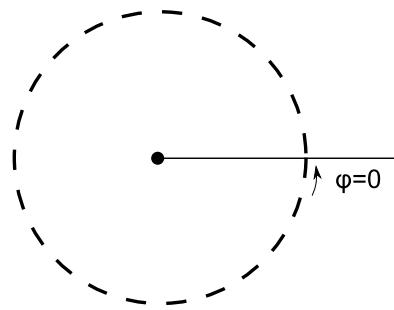


Abbildung 6.8.: Abbildung zur Gleichung

für alle φ stetig sein muß, d.h. es muß gelten:

$$\varphi_{allgemein}(\varphi + 2\pi) = \varphi_{allgemein}(\varphi)$$

$$e^{im(\varphi + 2\pi)} = e^{im\varphi}$$

$$e^{im2\pi} = 1 \text{ und mit } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Man erhält jetzt, wenn man die obige (r, θ) -abhängige Seite gleich m^2 setzt:

$$\frac{1}{\Theta} \Delta_\theta \Theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -r^2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \Delta_r \mathcal{R} + \epsilon + \frac{2}{r} \right)$$

$$f(\theta) = g_{(r)}$$

Hier gilt wieder das oben benutzte Argument. Man kann die hier auftretende Konstante λ nennen und erhält:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon + \frac{2}{r} - \frac{\lambda}{r^2} \right) \mathcal{R}_{(r)} = 0 \quad (6.32)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} + \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta_{(\theta)} = 0 \quad (6.33)$$

Wenn man in 6.33 einführt²:

$$x = \cos \theta \quad (6.34)$$

dann lässt sich diese in der Form schreiben:

$$\left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta_{(x)} = 0 \quad (6.35)$$

Diese Gleichung lässt sich für $x \approx 1$, ($\theta \approx 0$) näherungsgweise schreiben als

$$(1-x^2)^2 \Theta'' - 2x(1-x^2)\Theta' - m^2\Theta = 0$$

Diese Gleichung wird gelöst durch

$$\Theta = (1-x^2)^{|m|/2}$$

Denn es ist

$$\Theta' = -|m|x \frac{\Theta}{1-x^2}$$

und

$$\Theta'' = -|m| \frac{\Theta}{1-x^2} - |m| \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} \Theta - |m|x \frac{\Theta'}{1-x^2}$$

bzw.

$$\Theta'' = m^2 \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \Theta - |m| \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} \left(1 + \frac{1-x^2}{2x^2} \right) \Theta$$

²Beachte: x hat hier nicht die Bedeutung einer kartesischen x -Koordinate, sondern stellt nur eine Abkürzung dar

Da $\frac{1-x^2}{2x^2} \ll 1$ kann dieser Term in dieser Näherung vernachlässigt werden.

Also wird:

$$\begin{aligned}(1-x^2)^2 \Theta'' &= m^2 x^2 \Theta - |m| 2x^2 \Theta \\ &= m^2 \left[1 - \underbrace{(1-x^2)}_{\ll 1} \right] \Theta - |m| 2x^2 \Theta\end{aligned}$$

und ferner

$$-2x(1-x^2) \Theta' = |m| 2x^2 \Theta$$

Man setzte daher allgemein für $\Theta_{(x)}$ an:

$$\Theta_{(x)} = (1-x^2)^{|m|/2} \cdot f_{m(x)} \quad (6.36)$$

Dies ins 6.35 eingesetzt, liefert eine Differentialgleichung für $f_{m(x)}$:

$$(1-x^2) f_m'' - 2(m+1)x f_m' + [\lambda - m(m+1)] f_m = 0 \quad (6.37)$$

Differentiert man diese Gleichung nach x , so wird:

$$(1-x^2) (f_m')'' - 2(m+2)x (f_m')' + [\lambda - (m+1)(m+2)] (f_m') = 0 \quad (6.38)$$

Man kann also verschiedene Lösungen zu 6.37 unterscheiden, die m -indizierbar sind und die Eigenschaft haben:

$$f_{m+1(x)} = \frac{d}{dx} f_m$$

Allgemein:

$$f_{m(x)} = \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} f_{0(x)} \quad (6.39)$$

wo $f_{0(x)}$ der Differentialgleichung genügt:

$$(1 - x^2) f''_{0(x)} - 2x f'_{0(x)} + \lambda f_{0(x)} = 0 \quad (6.40)$$

Man macht für $f_{0(x)}$ den Ansatz:

$$f_{0(x)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}$$

und erhält:

$$\begin{aligned} f'_{0(x)} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_{\nu} x^{\nu-1} \\ f''_{0(x)} &= \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu-1) a_{\nu} x^{\nu-2} \end{aligned}$$

Also wird:

$$\begin{aligned} -2x f'_{0(x)} &= -2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_{\nu} x^{\nu-1} \\ -x^2 f''_{0(x)} &= - \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1) a_{\nu} x^{\nu} \end{aligned}$$

Damit folgt aus der Differentialgleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [(\nu+1) \cdot (\nu+2) a_{\nu+2} - ((\nu+1)\nu - \lambda) a_{\nu}] x^{\nu} = 0 \quad \forall x \quad (6.41)$$

Daraus folgt, daß

$$a_{\nu+2} = \frac{\nu(\nu+1) - \lambda}{(\nu+1) \cdot (\nu+2)} a_{\nu} \quad (6.42)$$

Für $x = 1$ wird:

$$f_{0(1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$$

Für hinreichend großes ν gilt:

$$a_{\nu+2} \approx a_\nu \quad \forall \nu > \nu_{gru}$$

d. h. die Reihe würde divergieren.

Dieser Fall ist aber aus physikalischen Gründen auszuschließen. Die Divergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ ist zu vermeiden, wenn einer der Koeffizienten gleich Null wird. Dies ist gewährleistet, wenn der zu diesen Koeffizienten gehörige Index z. B. den Wert annimmt:

$$\begin{aligned}\nu_{max} &= l \geq 0 \\ \longrightarrow \lambda &= l(l+1)\end{aligned}$$

Wenn l gerade ist, dann muß $a_1 = 0$ sein, und es folgt $a_{2\nu+1} = 0$ für alle $\nu \geq 1$ aufgrund der Rekursionsformel 6.42. Andernfalls (d. h. wenn $a_1 \neq 0$) gilt $a_{2\nu+1} \neq 0 \quad \forall \nu$ und die Summe für $f_{0(1)}$ würde aufgrund der obigen Überlegungen divergieren. Entsprechend gilt für ungerades l , daß $a_0 = 0$ sein muß, woraus $a_{2\nu} = 0$ für alle $\nu > 1$ folgt.

$f_{0(x)}$ ist also ein Polynom des l -ten Grades, das entweder gerade oder ungerade Potenzen von x enthält. Man bezeichnet im folgenden diese Polynome $f_{0(x)}$ als **Legendre-Polynome** und benutze ab jetzt dafür das Symbol $P_{l(x)}$.

Es läßt sich einfach zeigen, daß $P_{l(x)}$ mit der folgenden Bildungsvorschrift erzeugt werden kann :

$$P_{l(x)} = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^2}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (6.43)$$

(Rodrigues-Formel)

Der Vorfaktor ist (willkürlich) so gewählt, daß

$$P_{l(1)} = 1 \quad \text{und} \quad P_{l(-1)} = (-1)^l$$

Aus 6.36 folgt dann mit Verwendung von 6.39 :

$$\Theta_{(x)} = (1 - x^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_{l(x)} \quad (6.44)$$

Mit 6.43 kann man diese Beziehung in der Forme schreiben:

$$\Theta_{(x)} = P_{l(x)}^{|m|} (1 - x^2)^{|m|/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}} (x^2 - 1)^l \quad (6.45)$$

Hieraus folgt sofort:

$$|m| \leq l \quad (6.46)$$

Wäre $|m| > l$ dann ergibt sich automatisch $\Theta_{(x)} = 0$. Die Polynome $P_{l(x)}^{|m|}$ sind also (vom Vorfaktor $(1-x^2)^{|m|/2}$ abgesehen) Polynome $(l-|m|)$ -ten Grades und heißen **zugeordnete Legendre-Polynome**.

Man kann übrigens 6.46 auch in der Form schreiben:

$$-l \leq m \leq +l \quad (6.47)$$

Geht man mit $\lambda = l(l+1)$ in die Differentialgleichung 6.32 ein, so erhält man:

$$R''_{(r)} + \frac{2}{r} R'_{(r)} + \left[\epsilon + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{(r)} = 0 \quad (6.48)$$

Für $r \gg 1$ gilt näherungsweise:

$$R''_{(r)} + \epsilon R_{(r)} = 0 \quad (6.49)$$

Die Lösung dieser Gleichung kann man in der Form schreiben:

$$R_{(r)} = c \cdot e^{\alpha r}$$

mit

$$\alpha^2 = -\epsilon \quad (6.50)$$

Damit diese Funktion zu einem normierbaren $\psi_{r,\theta,\varphi}$ führt, d.h. zu

$$\int |\psi_{r,\theta,\varphi}|^2 d^3r = 1$$

muß ϵ in 6.50 negativ sein ($\epsilon < 0$).

In diesem Fall ist α reell und die Normierbarkeit von ψ verlangt zusätzlich $\alpha > 0$.

Die zweite Lösung der obigen Gleichung $R_{(r)}'' + \epsilon R_{(r)} = 0$ von der Form:

$$R_{(r)} = c \cdot e^{+\alpha r}$$

ist offensichtlich nicht normierbar und muß daher ausgeschlossen werden.

Für $r \ll 1$ kann [6.48](#) approximativ ersetzt werden durch:

$$R_{(r)}'' + \frac{2}{r} R_{(r)}' - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{(r)} = 0$$

Die beiden Lösungen lauten hier:

$$R_{(r)} = c \cdot \begin{cases} r^l \\ r^{-l-1} \end{cases} \quad (6.51)$$

Verifizierung durch Einsetzung :

Die untere Lösung muß aus physikalischen Gründen wieder ausgeschlossen werden, da die potentielle Energie (WW-Energie mit dem Kern) im Prinzip die Form hat:

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{r} |\psi|^2 d^3r &\approx 4\pi \int_0^\infty \underbrace{\frac{2}{r} R_{(r)}^2 r^2 dr}_{=d^3r} \\ &\approx \int_0^\infty r \cdot R_{(r)}^2 dr = \frac{1}{r^{2l+2}} \end{aligned}$$

Das Integral $\int_0^\infty \frac{1}{r^{2l+2}} dr$ divergiert selbst für $l = 0$ immer noch logarithmisch.

Man macht also nach diesen Vorüberlegungen den Ansatz:

$$R_{(r)} = c \cdot r^l e^{-\sqrt{|\epsilon|} f_{(r)}} \quad (6.52)$$

Man erhält durch Einsetzen von [6.52](#) in [6.48](#):

$$f_{(r)}'' + 2 \cdot \left(\frac{l+1}{r} - \alpha \right) f_{(r)}' - 2 \frac{(l+1)\alpha - 1}{r} f_{(r)} = 0 \quad (6.53)$$

mit $\alpha = \sqrt{|\epsilon|}$.

Man macht für $f_{(r)}$ wieder einen Potenzreihenansatz:

$$f_{(r)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} r^{\nu}$$

$$f'_{(r)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_{\nu} r^{\nu-1} = \sum_{\nu=-1}^{\infty} a_{\nu+1} (\nu + 1) r^{\nu}$$

$$f''_{(r)} = \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu - 1) a_{\nu} r^{\nu-2} = \sum_{\nu=-1}^{\infty} \nu a_{\nu+2} (\nu + 1) \cdot (\nu + 2) r^{\nu}$$

Ferner gilt:

$$\frac{1}{r} f'_{(r)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_{\nu} r^{\nu-2} = \sum_{\nu=-1}^{\infty} (\nu + 2) a_{\nu+2} r^{\nu}$$

$$\frac{1}{r} f_{(r)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} r^{\nu-1} = \sum_{\nu=-1}^{\infty} a_{\nu+1} r^{\nu}$$

Damit folgt:

$$\sum_{\nu=-1}^{\infty} \{a_{\nu+2} [(\nu + 2) \cdot (\nu + 1) + 2(l + 1) \cdot (\nu + 2)] - 2a_{\nu+1} [(\nu + 1) \alpha - 1 + (l + 1) \alpha]\} r^{\nu} = 0 \quad (6.54)$$

Fehler: Formel überprüfen.

Diese Reihe kann für alle ν verschwinden, wenn alle Koeffizienten $\{\dots\}$ verschwinden.

Dies heißt:

$$a_{\nu+1} = 2 \frac{(\nu + l + 1) \cdot \alpha - 1}{(\nu + 1) \cdot (\nu + 2l + 2)} a_{\nu} \quad (6.55)$$

Fehler: Formel überprüfen.

Bricht die Potenzreihe ?? nicht ab, so ergibt sich eine transzendente Funktionm für die gilt:

$$a_\nu \approx 2\alpha \cdot \frac{1}{\nu + 1} a_\nu$$

für hinreichend großes ν , d. h.

$$a_\nu \approx \frac{1}{\nu!} (2\alpha)^\nu$$

Dieses Koeffizientenverhalten entspricht der Reihe:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (2\alpha\nu)^\nu = e^{2\alpha r}$$

Nebenrechnungen :

$$\begin{aligned} \alpha(n + l + 1 &= 1 \\ \alpha &= \frac{1}{n + l + 1} \\ \alpha^2 = -\epsilon &= \frac{1}{(n + l + 1)^2} \end{aligned}$$

Die Gesamtfunktion $R_{(r)}$ würde also in diesem Fall wie $\exp(\alpha r)$ divergieren, d.h. nicht normierbar sein.

Man muß demnach das Abbrechen der Potenzreihe für $f_{(r)}$ verlangen. Diese Abbrechen ist gewährleistet, wenn der Zähler verschwindet

$$(\nu_0 + l + 1) \alpha = 1$$

für ein bestimmtes $\nu = \nu_0$. Alle Koeffizienten a_ν für $\nu > \nu_0$ verschwinden dann. Aus der obigen Abbruchsbedingung folgt:

$$\alpha = \frac{1}{\nu_0 + l + 1}$$

Dieses Ergebnis läßt sich wegen **6.50** schreiben als:

$$\epsilon = -\frac{1}{n^2} \quad (6.56)$$

To Do 16 (Abbildung einfügen):

Abbildung 6.9.: Oszillierende Funktion

Wobei $n = \nu_0 + l + 1$ ($n \geq 1$) gesetzt worden ist. Das Ergebnis 6.56 kann man auch mit Verwendung von 6.23 schreiben als:

$$E = -\frac{1 \text{ Ryd}}{n^2} \quad (6.57)$$

Virialsatz :

$$2 \langle E_{kin} \rangle = - \langle V_{pot} \rangle$$

$$E = \langle E_{kin} \rangle + \langle V_{pot} \rangle = \frac{1}{2} \langle V_{pot} \rangle$$

Aus 6.50 folgt, daß man α schreiben kann in der Form:

$$\alpha = \frac{1}{n}$$

Man setzt dies in die Rekursionsformel 6.55 ein und bekommt:

$$f_{(r)} = \sum_{\nu=0}^{n-l-1} c_\nu \left(\frac{2r}{n} \right)^\nu$$

wobei anstelle der ursprünglichen Koeffizienten a_ν neue Koeffizienten c_ν eingeführt worden sind, die der Rekursionsformel genügen:

$$c_{\nu+1} = -\frac{(n+l) - (2l+1) - \nu}{(\nu+1)[(\nu+1) + (2l+1)]} \cdot c_\nu$$

Fehler: Formel überprüfen.

Wegen des alternierenden Vorzeichens, das sich aus dieser Formel für aufeinanderfolgende Potenzen von $\frac{2r}{n}$ ergibt, stellt $f_{(r)}$ eine oszillatorische Funktion dar.

Zugeordnete LAGUERRE-Polynome $L_{N(r)}^M$ sind definiert durch die Rekursionsformel

$$d_{\nu+1} = -d_\nu \frac{(N-M) - \nu}{(\nu + 1) \cdot (\nu + 1 + M)}$$

Ferner ist gesetzt:

$$d_0 = \frac{(N!)^2}{M!(N-M)!}$$

Demnach kann man schreiben:

$$f_{(r)} = L_{n+1(r)}^{2l+1}$$

mit

$$c_0 = \frac{((n+l)!)^2}{(n-l-1)!(2l+1)!}$$

Zusammenfassend erhält man also für $\psi_{(r,\theta,\varphi)}$:

$$\psi_{n,l,m(r,\theta,\varphi)} = c_{n,l} \left(\frac{2r}{n}\right)^2 e^{-\frac{r}{n}} L_{n+l(r)}^{2l+1} Y_{l,m(\theta,\varphi)} \quad (6.58)$$

mit

$$Y_{l,m(\theta,\varphi)} = c_{l|m|} P_{l(\cos\theta)}^{|m|} e^{im\varphi}$$

der **Kugelflächenfunktion**

Dabei sein die Konstanten $c_{l|m|}$ so festgelegt, daß

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm(\theta,\varphi)}^* Y_{lm(\theta,\varphi)} \sin\theta d\theta d\varphi = 1 \quad (6.59)$$

$\sin\theta d\theta d\varphi = d\Omega$ (räumlicher Winkel).

Ebenso ist c_{nl} in 6.58 festgelegt durch die Forderung:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\psi_{(r,\theta,\varphi)}|^2 r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 1 \quad (6.60)$$

Dies liefert (Rechnung wird nicht ausgeführt)

$$c_{nl} = \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n-l)]^3}} \quad (6.61)$$

Ferner gilt:

$$l \leq n-1 \longrightarrow l = 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (6.62)$$

$$|m| \leq l \longrightarrow m = -l, \dots, +l \quad (6.63)$$

Zu festem l gibt es also $(2l+1)$ verschiedene Zustände, die sich durch m unterscheiden. Also hat man zu festem n

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) &= 2 \cdot \sum_{l=0}^{n-1} l + n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

³

verschiedene Zustände (Wellenfunktionen zur zeitabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung für feste Energien $\epsilon = -\frac{1}{n^2}$, die gleiche Energien besitzen).

Die Zahl g_n , die angibt wieviele Zustände gleiche Energie haben heißt „*Entartungszustand*“. (Man sagt auch, diese Zustände seien miteinander entartet → Eigenschaft der Symmetrie des Potentials).

Energien welche zu normierbaren Lösungen der zeitunabhängigen SCHRÖDINGERgleichung heißen „*Entartungseigenwerte*“. Es ist üblich, diese Eigenwerte als „*Energieniveaus*“ in Form einer Folge paralleler Linien zu zeichnen.

³Ähnlich dem **Kepler-Problem** ; nur gleiche Hauptachse.

To Do 17 (Abbildung einfügen):

Abbildung 6.10.: Energieniveaus beim Wasserstoff

Zur Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen

Die **Kugelflächenfunktionen** waren definiert als:

$$Y_{lm(\theta,\varphi)} = c_{l|m|} P_{l(\cos\theta)}^{|m|} e^{im\varphi}$$

Die $P_{l(x)}^{|m|}$ genügten der Differentialgleichung

$$\left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \right] \cdot P_{l(x)}^{|m|} = 0$$

Diese schreiben wir um mit Hilfe des Operators

$$\mathbb{D} = \frac{d}{dx}$$

und erhalten dann

$$\mathbb{D} \left[(1-x^2) \mathbb{D} P_{l(x)}^{|m|} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \cdot P_{l(x)}^{|m|} = 0$$

Ebenso gilt, wenn man l durch l' ersetzt:

$$\mathbb{D} \left[(1-x^2) \mathbb{D} P_{l'(x)}^{|m|} \right] + \left[l'(l'+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \cdot P_{l'(x)}^{|m|} = 0$$

Man bildet jetzt

1. $P_{l'}^{|m|}$ bzw.
2. $P_l^{|m|}$

und erhält die Ausdrücke:

$$P_{l'}^{|m|} \mathbb{D} \left\{ (1 - x^2) \mathbb{D} P_l^{|m|} \right\}$$

und

$$P_l^{|m|} \mathbb{D} \left\{ (1 - x^2) \mathbb{D} P_{l'}^{|m|} \right\}$$

Man beachte:

$$\begin{aligned} P_{l'}^{|m|} \mathbb{D} \left\{ (1 - x^2) \mathbb{D} P_l^{|m|} \right\} &= \mathbb{D} \left\{ P_{l'}^{|m|} (1 - x^2) \mathbb{D} P_l^{|m|} \right\} \\ &\quad - (1 - x^2) (\mathbb{D} P_l^{|m|}) \cdot (\mathbb{D} P_{l'}^{|m|}) \end{aligned}$$

Daher wird

$$\mathbb{D} \left\{ (1 - x^2) \left[P_{l'}^{|m|} (\mathbb{D} P_l^{|m|}) - P_l^{|m|} (\mathbb{D} P_{l'}^{|m|}) \right] \right\} + \underbrace{(l - l') \cdot (l + l' + 1)}_{=l(l+1)-l'(l'+1)-ll'-l'l} P_{l'}^{|m|} P_l^{|m|} = 0$$

Diese Gleichung integriert man bezüglich x von -1 bis $+1$. Der erste Term liefert wegen des Faktors $(1 - x^2)$ keinen Beitrag. Also wird:

$$\int_{-1}^{+1} P_{l'}^{|m|} \cdot P_l^{|m|} dx = 0 \quad \text{für } l' \neq l$$

Wegen $\left[P_{l(x)}^{|m|} \right]^2 \geq 0$ folgt dann:

$$\int_{-1}^{+1} P_{l'(x)}^{|m|} P_{l(x)}^{|m|} dx = \delta_{ll'} \cdot \frac{2}{2l + 1} \cdot \frac{(l + |m|)!}{(l - |m|)!}$$

Damit wird (mit $x = \cos \theta$ und $dx = -\sin \theta d\theta$):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l'm'(\theta,\varphi)}^* Y_{lm(\theta,\varphi)} \sin \theta d\theta d\varphi &= c_{l'm'} c_{lm} \int_{-1}^{+1} P_{l'(x)}^{|m'|} P_{l(x)}^{|m|} dx \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} d\varphi}_{=2\pi \delta_{mm'}} \\ &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} \cdot \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \cdot c_{l'm'} c_{lm} \end{aligned}$$

Für die Normierungsfaktoren $c_{l|m|}$ wählt man nun (Konvention):

$$c_{l|m|} = (-1)^{\frac{|m|-m}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)}}$$

Dann gilt:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l'm'(\theta,\varphi)}^* Y_{lm(\theta,\varphi)} \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (6.64)$$

Die **Kugelflächenfunktion** $Y_{lm(\theta,\varphi)}$ bilden also einen Satz orthonormaler Funktionen. Mit der obigen Wahl der c_{lm} sind die Y_{lm} dann:

$$Y_{lm(\theta,\varphi)} = (-1)^{\frac{|m|-m}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_{l(\cos\theta)}^{|m|} e^{im\varphi} \quad (6.65)$$

mit $l = 1, 2, 3, \dots$ und $m = -l, -l+1, \dots, l$

Man kann nun zeigen, daß die Y_{lm} einen sog. vollständigen Satz orthonormaler Funktionen bilden, d.h. jede stetige Funktion $f_{(\theta,\varphi)}$, deren Ableitungen noch gewisse Stetigkeitseigenschaften haben läßt sich in einer Reihe entwickeln:

$$f_{(\theta,\varphi)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} B_{lm} Y_{lm(\theta,\varphi)}$$

Wobei die Koeffizienten B_{lm} durch

$$B_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm(\theta,\varphi)}^* \cdot f_{(\theta,\varphi)} \sin \theta d\theta d\varphi$$

gegeben sind.

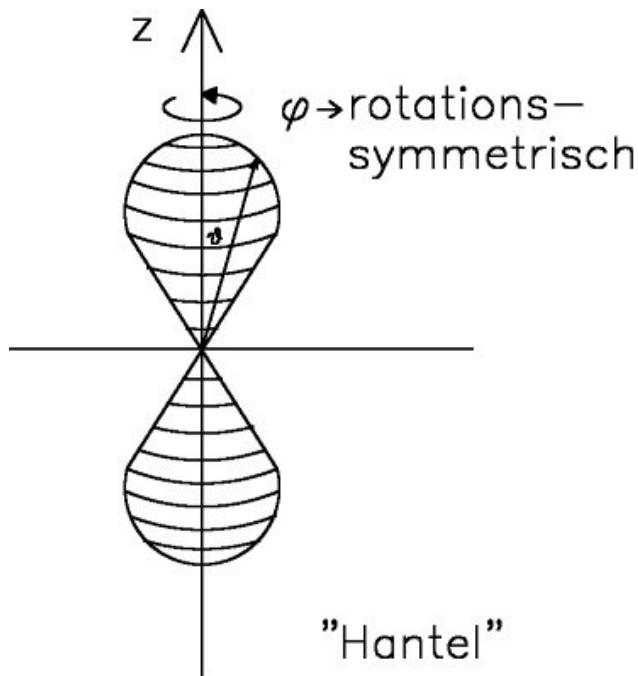


Abbildung 6.11.: Winkelabhängige Aufenthaltswahrscheinlichkeit.

6.4.2. Zur Entartung der Wasserstoff-Eigenzusände

Die l-Entartung

Die l -Entartung oder „zufällige“ Entartung (nur bei H-Atomen \rightarrow COULOMB-Potential). Diese Entartung ist charakteristisch für ein Potential der Form

$$U_{(r)} = -\frac{\lambda}{r}$$

(im vorangegangenem $\lambda = 2$) und sie tritt auch schon beim klassischen **Kepler-Problem** in folgender Weise auf:

Alle Ellipsen mit gleicher großer Achse gehören zur gleichen Gesamtenergie.

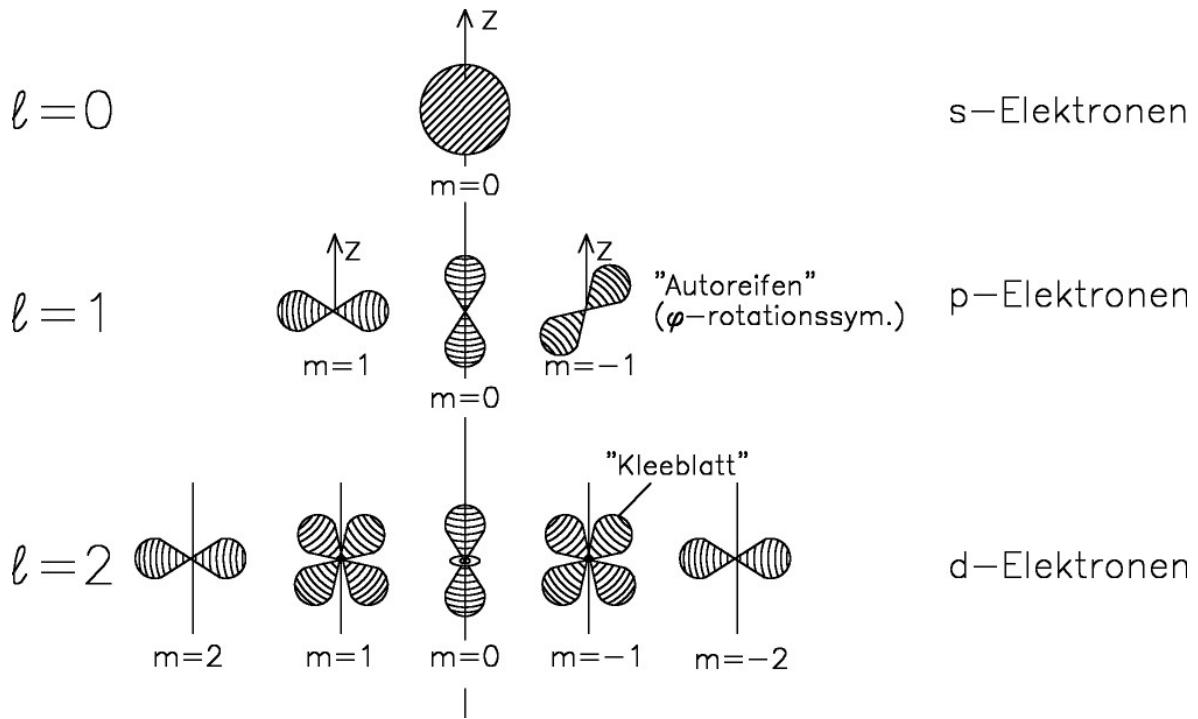


Abbildung 6.12.: Darstellung der winkelabhängigen Aufenthaltswahrscheinlichkeit.

Im folgenden wird gezeigt, daß bereits eine „kleine“ Abänderung des $-\frac{\lambda}{r}$ -Potentials zu einer Aufhebung der l -Entartung führt. Man ersetzt das Potential $\hat{U}_{(r)} = -\frac{2}{r}$ durch:

$$-\frac{2}{r} \left(1 - \frac{\delta}{2r}\right) = -\frac{2}{r} + \frac{\delta}{r^2}$$

(mit $\delta = \text{klein}$)

Man muß dann für $R_{(r)}$ im Radialanteil der SCHRÖDINGER-Gleichung ansetzen:

$$R_{(r)} = r^\beta e^{-\alpha r} f_{(r)}$$

wobei β gegeben ist durch:

$$\beta(\beta+1) = l(l+1) + \delta$$

Setzt man nun $\beta = l + \epsilon$ und $\epsilon = \text{Abweichung von } l$ und ϵ klein, so folgt:

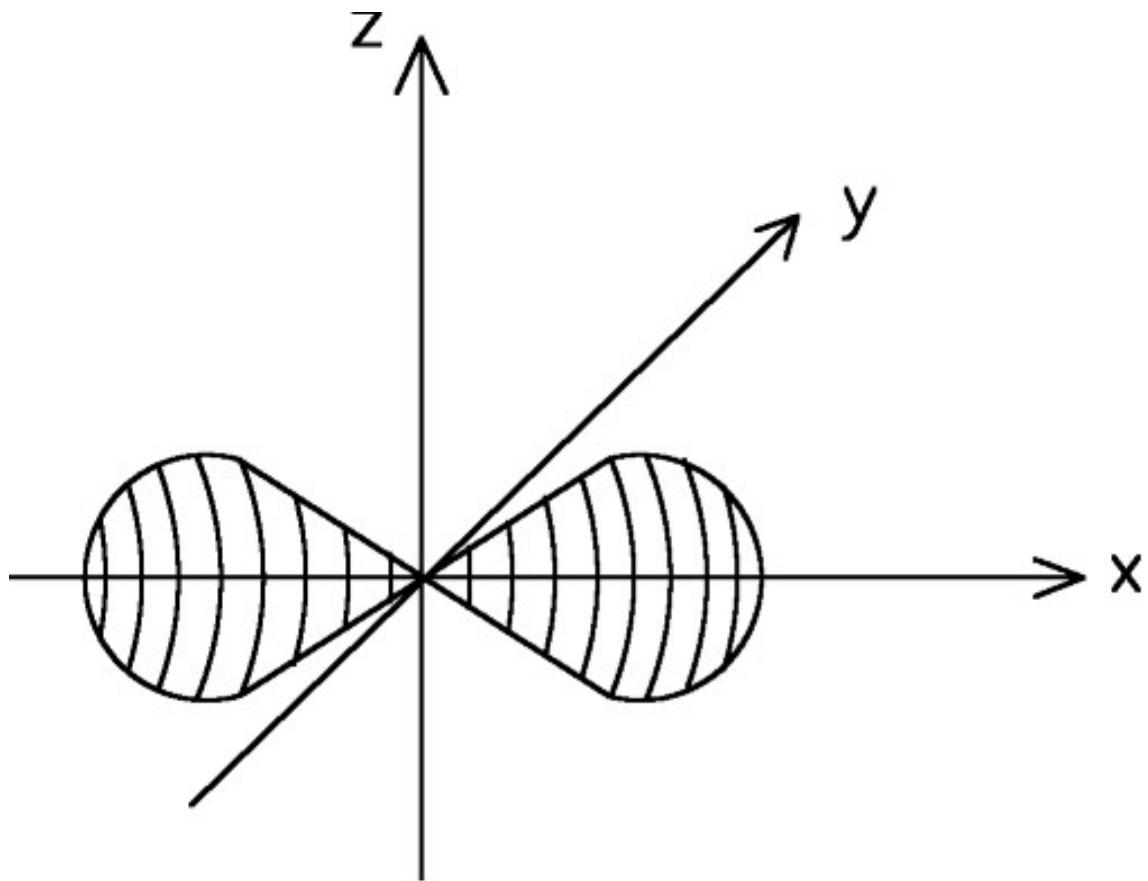


Abbildung 6.13.: Darstellung eines p_x -Orbitals.

$$\beta(\beta + 1) = (l + \epsilon)^2 + (\beta + \epsilon) = l^2 + l + \delta$$

bzw.

$$l^2 + l + 2\epsilon l + \epsilon + \epsilon^2 = l^2 + l + \delta$$

und wird nun ϵ^2 vernachlässigt, so ergibt sich:

$$\epsilon(2l + 1) = \delta$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{l + \frac{1}{2}}$$

Also gilt:

$$\beta \approx l + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{l + \frac{1}{2}} \quad (6.66)$$

Macht man wieder für $f_{(r)}$ eine Potenzreihenentwicklung, so liefert die wegen der Normierbarkeit von $R_{(r)}$ zu verlangende Abbruchbedingung in der Rekursionsformel:

$$a_{\nu+1} = a_\nu \cdot \frac{\alpha(\nu + \beta + 1) - 1}{(\nu + 1) \cdot (\nu + 2\beta + 2)} \quad (6.67)$$

mit $\alpha(\nu + \beta + 1) = 1$

$\alpha' = \frac{1}{n'}$ mit $n' = \nu + \beta + 1 = \nu + l + 1 + \epsilon_{(l)}$

mit

$$\epsilon_{(l)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{l + \frac{1}{2}}$$

Ist \mathcal{E} die Energie, so war $\alpha^2 = -2\mathcal{E}$

⁴

Also gilt:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2n'^2} = -\frac{1}{2(\nu + l + 1 + \epsilon_{(r)})^2} \quad (6.68)$$

Nun war $\nu + l + 1 = n$.

Also ist jetzt die Energie, wenn man statt \mathcal{E} genauer $\mathcal{E}_{l,n}$ schreibt:

$$\mathcal{E}_{l,n} = \frac{1}{2 \cdot (n + \epsilon_{(l)})^2} \quad (6.69)$$

⁴ Achtung: Überprüfen ob $\alpha^2 = -\mathcal{E}$ ist.

5

Die Energie hängt also jetzt außer von n auch noch von l ab. Zustände zu verschiedenen l gehören jetzt auch zu unterschiedlicher Energie.

Allgemein lässt sich zeigen, daß jede Art von zentralesymmetrischem Zusatzpotential zum Potential $-\lambda/r$ die l -Entartung aufhebt.

Die $|m|$ -Entartung

In jedem zentralesymmetrischen Potential, d.h. in jedem Potential, das nur von $|\vec{r}| = r$ abhängt, liegt die sog. „ m -Entartung“ vor. In jedem zentralesymmetrischen Potential lässt sich der Winkeleanteil der Wellenfunktion separieren:

$$\psi_{(r,\theta,\varphi)} = R_{(r)} \cdot Y_{l,m}(\theta,\varphi) \quad (6.70)$$

Nun ist der Erwartungswert der potentiellen Energie:

$$\langle U \rangle = \int \psi^* U \psi d^3r \quad (6.71)$$

Weil $U_{(\vec{r})}$ nur von r abhängt und nicht von θ bzw. φ wird $\langle U \rangle$:

$$\langle U \rangle = \int_0^\infty R_{nl(r)}^2 U_{(r)} r^2 dr \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}^* Y_{lm} \sin \theta d\theta d\varphi}_{=1} \quad (6.72)$$

Also hängt für ein festes n und l der Wert von $\langle U \rangle$ nicht von m an. Analog folgt wegen $\Delta_{\theta,\varphi} Y_{lm}(\theta,\varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta,\varphi)$ für den Erwartungswert der kinetischen Energie:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{p^2}{2m_0} \right\rangle &= - \int_0^\infty R_{nl(r)} \left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \right] \\ &\cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}^* Y_{lm} \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Auch dieser Erwartungswert hängt nicht von m ab. Also gilt für ein zentralesymmetrisches Potential:

⁵ Achtung: Hier die 2 korrigieren.

$$\langle \mathbb{H} \rangle = \left\langle \frac{\mathbb{P}^2}{2m_0} \right\rangle + \langle U \rangle \quad (6.73)$$

hängt nicht von m ab.

Für den „Grad“ der Entartung gilt das Folgende:

- Im zentralesymmetrischen Potential ist jeder Energiewert (Eigenwert von \mathbb{H}) zu festem n und l $(2l+1)$ -fach entartet. Denn zu ϵ_{nl} gehören die $(2l+1)$ linear unabhängigen Eigenfunktionen: $R_{nl}(r)Y_{nl}(\theta,\varphi)$
- Im $-\lambda/r$ -Potential fallen außerdem zu festem n jeweils n -Energiewerte zusammen, entsprechend $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$. In diesem Fall ist der Entartungsgrad n^2 .

Anmerkung 19 (Die Ganzzahligkeit des Bahndrehimpulses):

^aIn vielen Lehrbüchern der Quantenmechanik wird die Ganzzahligkeit des Bahndrehimpulses damit begründet, dass die Wellenfunktion stetig und eindeutig sein müsse. Da die Abhängigkeit vom Azimuthalwinkel φ durch $\exp(im\varphi)$ gegeben ist, wobei m die magnetische Quantenzahl ist, müsste also m ganzzahlig sein. Dieses Argument geht fehl, wie schon Wolfgang Pauli gezeigt hat. Zwar muss das Betragsquadrat der Wellenfunktion stetig und eindeutig sein, nicht aber notwendigerweise die Wellenfunktion selbst. Man benötigt weitere Voraussetzungen über die Wellenfunktionen, um die Ganzzahligkeit des Bahndrehimpulses zu begründen. [376], [229]

^aQuelle: [Quelle:Quelle:\[https://www.uni-muenster.de/Physik.TP/~munsteg/physik_irrtuemer.html\]\(https://www.uni-muenster.de/Physik.TP/~munsteg/physik_irrtuemer.html\)](https://www.uni-muenster.de/Physik.TP/~munsteg/physik_irrtuemer.html)

Zusammenhang zwischen Bahnreihimpuls und atomaren Kreisstrom – Das Bohrsche Magneton

Bohrsches Magneton

Die Impulsstromdichte eines Teilchens war

$$\begin{aligned}\vec{j}_p &= m_0 \rho \vec{v} \\ \text{mit } \rho &= |\psi|^2 \\ \text{und } \vec{v} &= \frac{\hbar}{2m_0} \vec{\nabla} \tilde{\varphi}(\vec{r})\end{aligned}$$

und

$$\psi_{(\vec{r})} = |\psi_{(\vec{r})}| \cdot e^{i\tilde{\varphi}_{(\vec{r})}}$$

Damit ist:

$$\vec{j}_p = \hbar \cdot |\psi|^2 \vec{\nabla} \tilde{\varphi}$$

Dies lässt sich auch in der folgenden Form schreiben:

$$\vec{j}_p = \frac{\hbar}{2i} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

Man definiert nun als Drehimpulsstromdicht:

$$\vec{r} \times \vec{j}_p = \frac{\hbar}{2i} (\psi^* \vec{r} \times \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{r} \vec{\nabla} \psi^*) \quad (6.74)$$

Damit wird der Drehimpuls:

$$\langle \vec{L} \rangle = \int \vec{r} \times \vec{j}_p d^3r$$

also:

$$\langle \vec{L} \rangle = \frac{\hbar}{2i} \int \psi^* r \times \vec{\nabla} \psi d^3r - \frac{\hbar}{2i} \int \psi r \times \vec{\nabla} \psi^* d^3r \quad (6.75)$$

Durch Anwendung des **Gaußschen Satzes** unter Beachtung der Randbedingungen (Normierbarkeit) für $\psi_{(\vec{r})}$ lässt sich zeigen:

$$\int \psi \vec{r} \times \vec{\nabla} \psi^* d^3r = - \int \psi^* \vec{r} \times \vec{\nabla} \psi d^3r$$

Damit wird

$$\langle \mathbb{L} \rangle = \int \psi_{(\vec{r})}^* \vec{\mathbb{L}} \psi_{(\vec{r})} d^3r \quad (6.76)$$

Mit dem **Drehimpulsoperator**

$$\vec{\mathbb{L}} = \vec{r} \times \vec{\mathbb{P}} = \frac{\hbar}{i} (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \quad (6.77)$$

$$\langle \vec{L} \rangle = \int \vec{r} \times \vec{j}_{p(\vec{r})} d^3r$$

$$j_p = \frac{\hbar}{2i} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

$$\langle \vec{L} \rangle = \int \psi_{(\vec{r})}^* \vec{\mathbb{L}} \psi_{(r)} d^3r \quad (6.78)$$

mit

$$\vec{\mathbb{L}} = \vec{r} \times \vec{\mathbb{P}} \quad (6.79)$$

$$\vec{\mathbb{P}} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (6.80)$$

$$(6.81)$$

Wegen $\vec{j}_p = \hbar |\psi_{(\vec{r})}|^2 \vec{\nabla} \tilde{\varphi}_{(\vec{r})}$ folgt sofort für Zustände im **zentralsymmetrischen Potential** wegen der generellen Form:

$$\psi_{(r,\theta,\varphi)} = R_{(r)} \cdot \underbrace{Y_{lm(\theta,\varphi)}}_{P_{l(\cos \theta)}^{|m|} e^{im\varphi}} \quad (6.82)$$

dass $\tilde{\varphi}_{(\vec{r})} = \tilde{\varphi}_{(\varphi)} = 0$ für Zustände zu $m = 0$. Also ist in diesen Zuständen zu $m = 0 : j_p = 0$ und daher auch:

$$\vec{r} \times \vec{j}_p = 0 \longrightarrow \vec{\mathbb{L}} = \int \vec{r} \times \vec{j}_p d^3r = 0 \quad (6.83)$$

Der Nablaoperator hat in **sphärischen Polarkoordinaten** die Form:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (6.84)$$

Damit folgt aus:

To Do 18 (Abbildung einfügen):

Abbildung 6.14.: Abbildung zu 4.56

To Do 19 (Abbildung einfügen):

Abbildung 6.15.: zweite Abbildung zu 4.56

$$\psi_{(r,\theta,\varphi)} = C_{nl} R_{nl(r)} P_{l(\cos\theta)}^{|m|} e^{i \widehat{m\varphi}}$$

$$\vec{\nabla} \tilde{\varphi}_{(\vec{r})} = \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta}$$

Fehler: Formel überprüfen

$$\vec{r} \times \vec{j}_p = m\hbar |\psi|^2 \frac{1}{\sin \theta} (\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi)$$

Dabei wurde verwendet:

$$\vec{r} = \vec{e}_r \cdot r \quad (6.85)$$

$$\vec{j}_p = m\hbar |\psi|^2 \frac{1}{r \sin \theta} e_\varphi \quad (6.86)$$

Weiterhin gilt:

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_z + \cos \theta \vec{e}_{\perp z}$$

$$\vec{e}_{\perp z} \perp \vec{e}_z$$

\vec{e}_θ ist der Einheitsvektor in Richtung der Winkelvergrößerung.

Daher wird:

$$\vec{r} \times \vec{j}_p = m\hbar |\psi|^2 (\vec{e}_z - \cot \theta \cdot \vec{e}_{\perp z})$$

und weiter

$$\langle \vec{L} \rangle = \int \vec{r} \times \vec{j}_p d^3r = m\hbar \vec{e}_z \int |\psi|^2 d^3r - \vec{e}_{\perp z} m\hbar \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty |\psi_{(r,\theta,\varphi)}|^2 r^2 dr \cot \theta \sin \theta d\theta dr$$

$$\langle \vec{L} \rangle = \vec{e}_z m\hbar - m\hbar \vec{e}_{\perp z} \int \int \int |\psi|^2 r^2 dr \cos \theta d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty |\psi|^2 r^2 dr \cos \theta d\theta d\varphi &= 2\pi \int_0^\infty C_{nl}^2 R_{nl(r)} r^2 dr \cdot \underbrace{\int_0^\pi P_{l(\cos \theta)}^{|m|} {}^2 \cdot \cos \theta d\theta}_{= \int_{-1}^{+1} P_{l(x)}^{|m|} {}^2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx} \\ &= 0 \quad (\text{Symmetrie}) \end{aligned}$$

wegen

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

und

$$\begin{aligned} dx &= -d(\cos \theta) \\ &= \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

als Integral über eine ungerade Funktion.

Es ergibt sich also:

$$\langle L_z \rangle = m\hbar \quad (6.87)$$

$$\langle L_{\perp z} \rangle = 0 \quad (6.88)$$

Man beachte

$$\vec{r} \times \vec{\nabla} = -\vec{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta}$$

und ferner:

$$-\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \sin \theta - \vec{e}_{\perp z} \cos \theta$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} [\vec{r} \times \vec{\nabla}]_z &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ [\vec{r} \times \vec{\nabla}]_{\perp z} &= -\cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_{\perp z} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathbb{L}_z = \frac{\hbar}{i} [\vec{r} \times \vec{\nabla}]_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (6.89)$$

und daher wird

$$\mathbb{L}_z \psi_{nlm(r,\theta,\varphi)} = m\hbar \psi_{nlm(r,\theta,\varphi)}$$

Funktionen ψ_n des Typs

$$\mathbb{A} \psi_n = a_n \psi_n$$

befriedigen (und natürlich normierbar sein müssen) heißen „*Eigenfunktionen*“ des Operators \mathbb{A} . Die a_n werden als „*Eigenwerte*“ von \mathbb{A} bezeichnet. Ist \mathbb{A} HERMITETISCH, dann sind die a_n reell. Im Eigenzuständen verschwindet die quadratische Schwankung von \mathbb{A} :

$$\langle \mathbb{A}^2 \rangle - \langle \mathbb{A} \rangle^2 = \langle \Delta \mathbb{A}^2 \rangle = 0 \quad (6.90)$$

Man beachte:

$$\delta \mathbb{A} = \mathbb{A} - \langle \mathbb{A} \rangle \quad (6.91)$$

bzw.

$$\begin{aligned}\langle \delta A^2 \rangle &= \langle [A - \langle A \rangle]^2 \rangle \\ &= \langle A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \rangle \\ &= \langle A^2 - 2\langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \rangle \\ &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2\end{aligned}$$

Formel überprüfen.

Beispiel:

$$\langle a \rangle = \int a \cdot \omega(a) da \quad (6.92)$$

Hier ist $a = \text{const.} = b$ und somit folgt:

$$\langle a \rangle = b \cdot \int \omega(a) da = b$$

Es gilt somit

$$A^2 \psi_n = a_n \psi$$

und

$$A^2 \psi_n = a_n^2 \psi$$

und somit:

$$\langle A \rangle = \int \psi_n^* A \psi_n d^3r = a_n^2 \cdot \underbrace{\int \psi_n^* \psi_n d^3r}_{=1} \quad (6.93)$$

Andererseits ist

$$\langle A \rangle = \int \psi_n^* A \psi_n d^3r = a_n \cdot \underbrace{\int \psi_n^* \psi_n d^3r}_{=1} \quad (6.94)$$

To Do 20 (Abbildung einfügen):

Abbildung 6.16.: 13.12.95

d. h.

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= a_n \\ \langle \mathbb{A} \rangle &= a_n^2 = \langle \mathbb{A}^2 \rangle\end{aligned}$$

Man berechne jetzt das magnetische Moment in einem Zustand $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$, das durch die zugehörige Stromdichte

$$J_e = \frac{l}{m_0} \cdot \vec{j}_p$$

erzeugt wird.

Man berechne dazu den Teilstrom, der in einem Kreisring endlichen Querschnitts (Torus) dF um die z -Achse (*Quantisierungsachse*) fließt.

Die Fläche, die der Torus dabei umschließt sei F_z .

Der durch das Flächenelement fließende Strom ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}dI &= \vec{e}_\varphi \cdot \vec{j}_p(r, \theta, \varphi) \cdot dF \frac{e}{m_0} \\ dJ &= \frac{e}{m_0} m \hbar \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot |\psi_{nlm}|^2 dF\end{aligned}\tag{6.95}$$

dabei ist $j_p \cdot \frac{\Omega}{m}$ die Ladungsstromdichte.

Das von dJ erzeugte magnetische Moment ist gegeben durch

$$dM = F_z \cdot dJ$$

Als wird:

$$dM = m \cdot \frac{e \cdot \hbar}{2m_0} \cdot 2\pi r \cdot |\psi_{nlm}|^2 \sin \theta \cdot d\theta dr \quad (6.96)$$

Das magnetische Gesamtmoment wird demnach

$$\begin{aligned} \int dM = \langle M \rangle &= m\mu_b 2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\psi_{nlm}|^2 r^2 dr \sin \theta \cdot d\theta \\ &= m\mu_b 2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\psi_{nlm}|^2 r^2 dr \sin \theta \cdot d\theta \\ &= m\mu_b 2\pi \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty |\psi_{nlm}|^2 r^2 dr \sin \theta \cdot d\theta d\varphi}_{=1} \\ &= m\mu_b 2\pi \end{aligned}$$

Achtung Fehler in obiger Formel!

Dabei wurde die Konstante

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_0} \quad (6.97)$$

eingeführt. Sie wird auch als Bohrsches Magenton bezeichnet. Man erhält demnach

$$\langle M \rangle = m \cdot \mu_B \quad (6.98)$$

Da \vec{j}_e nun senkrecht zur z -Achse fließt, verschwinden die Komponenten von \vec{M} senkrecht zur z -Achse.

$$\langle M_z \rangle = m \cdot \mu_B \quad (6.99)$$

$$\langle M_{\perp z} \rangle = 0 \quad (6.100)$$

Diese Beziehung gilt so für jedes **zentralsymmetrisches Potential**.

Aus dem Vergleich von 6.99 mit 6.87 folgt:

$$\langle M_z \rangle = \frac{e}{2m_0} \cdot \langle \mathbb{L}_z \rangle \quad (6.101)$$

Zu diesem Ergebnis gelangt man auch in der klassischen Mechanik für die zeitlichen Mittelwerte von L_z und M_z .

Dies folgt aus:

$$\vec{M} = \vec{j} \cdot \vec{F} = e \frac{v}{L} F \quad (6.102)$$

L : Kreisumfang / Bahnumfang der Teilchen der Ladung e
 $\frac{v}{L} = \frac{1}{T}$: T ist die Umlaufzeit

und

$$L_z = m_0 (\vec{r} \times \vec{v})_z = 2m_0 \frac{dF}{dt} \quad (6.103)$$

(Flächensatz)

Somit folgt

$$\bar{L}_z = \frac{1}{T} \int_0^T L_z \cdot dt = \frac{2m_0}{T} \int_0^T \frac{df}{dt} dt \quad (6.104)$$

d. h. wegen

$$\bar{v} = v = \frac{L}{T} \rightarrow \frac{1}{T} = \frac{v}{L}$$

Achtung: Drehimpuls L bold setzen.

$$\frac{e}{2m_0} \bar{L}_z = e \frac{v}{L} F = \bar{M}_z$$

und somit:

$$\bar{M} = \frac{e}{2m_0} \bar{L}_z \quad (6.105)$$

Dieser quantenmechanisch wie klassisch bestehende Zusammenhang zwischen der z -Komponente des Bahndrehimpulses eines geladenen, umlaufenden Teilchens und der z -Komponente der erzeugten magnetischen Momenteb heißt *magnetomechanischer Parallelismus*.

Diskussion allgemeiner Eigenschaften in WKB-Näherung

WKB-Näherung

Im folgenden werden allgemeine Eigenschaften von $R_e(r)$ und $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ in der WKB-Näherung erläutert.⁶

Man betrachte den Radialanteil (siehe Gl. 6.50) der Schrödinger-Gleichung für den Fall eines zentraalsymmetrischen Potentials

$$\mathbf{R}_{(r)}'' + \frac{2}{r} \mathbf{R}_{(r)}' + \left[\epsilon - U_{(r)} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \cdot \mathbf{R}_{(r)} = 0$$

Man führt hier anstelle $\mathbf{R}_{(r)}$ ein:

$$\hat{\mathbf{R}}_{(r)} = r \cdot \mathbf{R}_{(r)}$$

Dann ergibt sich für $\hat{\mathbf{R}}_{(r)}$

$$\left[\frac{d}{dr^2} - \epsilon - \tilde{U}_{(r)} \right] \cdot \hat{\mathbf{R}}_{(r)} = 0 \quad (6.106)$$

mit

$$\tilde{U}_{(r)} + \underbrace{\frac{l(l+1)}{r^2}}_{\text{„Zentrifugalpotential“}}$$

Zur Bezeichnungsweise „Zentrifugalpotential“ :

Es ist:

$$\frac{i}{\hbar} \cdot (\vec{r} \times \vec{\mathbb{P}}) = \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \vec{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (6.107)$$

Daraus folgt:

⁶WKB-Näherung: Wentzel-Kramer-Brillion-Näherung

$$\frac{i}{\hbar} \cdot (\vec{r} \times \vec{P}) = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (6.108)$$

Diese Beziehung kann man in der folgenden Form schreiben:

$$\mathbb{L}^2 = \hbar \left[\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (6.109)$$

Wegen Gl. ?? gilt also:

$$\frac{1}{\hbar^2} (\vec{r} \times \vec{P})^2 \mathbf{Y}_{lm(\theta,\varphi)} = l(l+1) \cdot \mathbf{Y}_{lm(\theta,\varphi)} \quad (6.110)$$

d. h.

$$\mathbb{L}^2 \psi_{nlm}(\vec{r}) = \hbar^2 \cdot l(l+1) \cdot \psi_{nlm}(\vec{r}) \quad (6.111)$$

Die Eigenwerte des Operators \mathbb{L}^2 sind also: $l \cdot (l+1)$.

Der Drehimpuls ist $\hbar \cdot m$.

Anmerkung: Bei einem mathematischen Pendel gibt es keinen Impuls über das zeitliche Mittel, aber $p^2 < 0$.

Daraus folgt:

$$\langle \mathbb{L}^2 \rangle = \hbar \cdot l(l+1) \quad (6.112)$$

Die mittlere Rotationsenergie des Teilchens im Potential $U_{(r)}$ ist somit gegeben durch:

$$E_{rot} = \frac{\langle \mathbb{L}^2 \rangle}{2 \cdot \langle \Theta \rangle} = \frac{\hbar \cdot l(l+1)}{2m_0 \cdot \langle r^3 \rangle} \quad (6.113)$$

Dabei ist $\langle \Theta \rangle$ der Erwartungswert des Drehmoments.

Demnach ist $l(l+1)$ ein Maß für die Rotationsenergie, die für $l=0$ verschwindet. In diesem Fall ist dann auch die auf das Teilchen wirkende Zentrifugalkraft gleich Null.

Man behandelt jetzt die Differentialgleichung **6.106** und schreibt sie in eine genäherte Form um:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \kappa_{(r)}^2 \right] \cdot \hat{R}_{(r)} \approx \underbrace{\left(\frac{d}{dr} + i\kappa_{(r)} \right) \cdot \left(\frac{d}{dr} - i\kappa_{(r)} \right)}_{= \frac{d^2}{dr^2} + \kappa \cdot \left(1 - \frac{i}{\kappa_{(r)}^2} \cdot \frac{d\kappa_{(r)}}{dr} \right)} \cdot \hat{R}_{(r)} = 0 \quad (6.114)$$

mit

$$\kappa_{(r)} = \sqrt{\epsilon - \tilde{U}_{(r)}}$$

Die Zerlegung des Operators

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \kappa_{(r)}^2 \right]$$

in

$$\frac{d^2}{dr^2} + \kappa \cdot \left(1 - \frac{i}{\kappa_{(r)}^2} \cdot \frac{d\kappa_{(r)}}{dr} \right)$$

ist näherungsweise zulässig, wenn

To Do 21 (Formel überprüfen):

$$\frac{1}{\kappa_{(r)}^2} \cdot \left| \frac{d\kappa_{(r)}}{dr} \right| \leq 1 \quad (6.115)$$

Ist diese Voraussetzung erfüllt, dann sind die Lösungen Vorlesung

$$\left[\frac{d}{dr} \pm i\kappa_{(r)} \right] \cdot \hat{R}_{(r)} = 0$$

auch Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung(**6.106**).

Man erhält dann

$$\mp i\kappa_{(r)} = \frac{1}{\hat{R}_{(r)}} \cdot \frac{d\hat{R}_{(r)}}{dr} \\ = \frac{d}{dr} \ln \hat{R}_{(r)}$$

$$\ln \left(\frac{\hat{R}_{(r)}}{\hat{R}_{(r_0)}} \right) = \mp \int_{r_0}^r \kappa_{(r')} \cdot dr'$$

Durch Antilogarithmieren ergibt sich:

$$\hat{R}_{(r)} = \hat{R}_{(r_0)} = e^{\mp \int_{r_0}^r \kappa_{(r')} \cdot dr'} \quad (6.116)$$

Diese Lösung steht mit der Erhaltung der (Gesamt)-Wahrscheinlichkeit

$$\int_0^1 \hat{R}_{(r)} \cdot dr = 1$$

im Konflikt. Dies sieht man auf folgende Weise ein:

Man betrachte Gl. 6.106 als Schrödinger-Gleichung eines eindimensionalen Problems:

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dr^2} + E - \tilde{U}_{(r)} \right] \cdot \hat{R}_{(r)} = 0$$

7

Aus dieser Differentialgleichung lässt sich auf die übliche Weise eine Kontinuitätsgleichung herleiten:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \rho}_{=0 \text{ für zeitunabhängige Zustände}} + \frac{\partial}{\partial r} j = 0$$

Für eine eindimensionale Bewegung ergibt sich als Stromdichte:

⁷Hier benannte Einheiten.

$$j = \frac{1}{2i} \left(\hat{\mathbf{R}}_{(r)}^* \cdot \frac{d}{dr} \hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{R}} \frac{d}{dr} \hat{\mathbf{R}}^* \right) = \mp (\hat{\mathbf{R}}_0)^2 \cdot \kappa_{(r)}$$

Da

$$\hat{\mathbf{R}}_0 \approx \frac{1}{\sqrt{\kappa_{(r)}}}$$

wird die Ableitung Null, wie zu erwarten ist \rightarrow darf hier konstant sein.

$$\tilde{U}_{(r)} = 0 \rightarrow \kappa = \sqrt{e}$$

$$\epsilon = \kappa^2$$

$$E = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m_0}$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{(r)} = \hat{\mathbf{R}}_0 \cdot e^{\pm i \kappa r}$$

oder als Stromdichte

$$j = \frac{1}{2i} \left(\hat{\mathbf{R}}^* \frac{d}{dr} \hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{R}} \frac{d}{dr} \hat{\mathbf{R}}^* \right) \stackrel{6.116}{=} \mp (\hat{\mathbf{R}}_o)^2 \kappa_{(r)}$$

Danach wäre

$$\frac{dj}{dr} = 0$$

To Do 22 (Abbildung einfügen): Hier fehlt eine Abbildung.

Randbemerkung : Herkömmlich:

$$\langle p \rangle = \int \psi^* \vec{P} \psi \, d\tau^3$$

Hier:

$$\langle p \rangle = \int \vec{j}_{p(r)} \cdot d\tau^3$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{j}_p &= |\phi| \vec{\nabla} \phi_{(r)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \psi^* \underbrace{\vec{P}}_{=i\hbar\vec{\nabla}} \psi + \psi \vec{P} \psi^* \right| \end{aligned}$$

Hier fällt der imaginäre Anteil des Integrals fort, wenn periodische Randbedingungen gegeben sind.

Ebene Welle:

$$\vec{j} = \frac{1}{r} \cdot \hbar \vec{k}$$

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = C_{nl} \cdot \mathbf{R}_l(\epsilon_{nl}(r)) \cdot \mathbf{Y}_{lm}(\theta, \phi)$$

$$\underbrace{n_{\theta, \text{phi}}}_{\text{Anzahl der Knoten in } \theta \text{ und } \phi} = n_\theta + n_\phi = l$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{\langle \mathbb{L}^2 \rangle}{2\Theta} = \frac{\hbar^2 \cdot l(l+1)}{2\Theta} \quad (6.117)$$

Hieraus ergeben sich folgende Konsequenzen:

- Wenige Knoten bedeuten geringe Energie.
- Die Energie kann auf θ und ψ verteilt werden.
- $l = 0$ bedeutet keine Rotationsenergie.

To Do 23 (Abbildung einfügen): Hier fehlt eine Abbildung.

Kommentar: Dass bei $l = 0$ keine Rotationsenergie vorhanden ist, ist eine direkte Konsequenz der Vakuumfluktuationen.

Beispiel: Gasmoleküle in der Atmosphäre.

Beispiel: Bei einem Übergang von 3s \rightarrow 3p. Hier wird die Energie in Rotationsenergie gesteckt.

Zur Anzahl der radialen Knoten: Der Oszillatatorische Anteil der Radialfunktion wird durch das LAGURRE-Polynom bestimmt. Dies ist ein Polynom $(n - l - 1)$ tem Grades und hat $n - l - 1$ Nullstellen. Diesen Nullstellen entsprechen konzentrische Knotenkugeln um $\vec{r} = 0$. Ihre Anzahl ist also:

$$n_r = n - l - 1$$

$$n_\theta + n_\phi = l$$

Für mindestens zufällig entartete Zustände zu verschiedenen l gilt:

$$n = n_r + l + 1 = \text{const.}$$

Demnach ist die Gesamtknotenzahl aller n^2 -Zustände, die miteinander entartet sind, d. h. zur gleichen Energie $\epsilon = \frac{1}{n^2}$ gehören:

$$n_{r\theta\phi} = n_r + n_\theta + n_\phi = n - 1 = \text{const.}$$

Eigenzustände und klassische Bahnen

Eigenzustände

In diesem Abschnitt wird zur Erläuterung des Zusammenhangs zwischen $\psi_{nlm(r,\theta,\phi)}$ und den klassischen Bahnen zur gleichen Energie $\epsilon = -\frac{1}{n^2}$ der Spezialfall $n_r = 0$ und $m = l \gg 1$, ($n = m + 1$) diskutiert.

Nach 6.119 haben diese Zustände die folgende Form:

$$\psi_{m+1,m,m(r,\theta,\phi)} = \mathbf{B}_m \xi^m e^{-\xi} (\sin \theta)^m e^{im\phi}$$

mit

$$\xi = \frac{r}{n} = \frac{r}{m+1} \quad (6.118)$$

\mathbf{B} ist so zu wählen, dass

$$\int |\psi_{r,\theta,\phi}|^2 \cdot d^3r = 1$$

Das Quadrat des Radialanteils, d. h. die Funktion

$$\mathbf{R}_{m(\xi)}^2 = \mathbf{B}_m^2 \xi^{2m} \cdot e^{-2\xi}$$

hat ein Maximum an der Stelle ξ_m , definiert durch

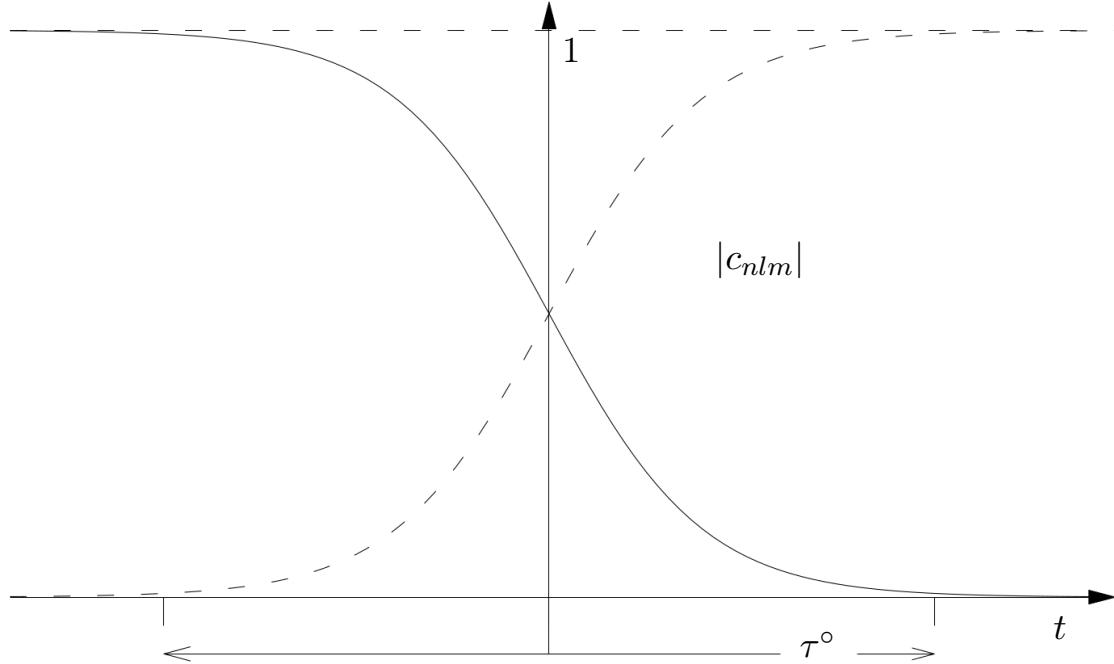
$$\frac{d}{d\xi} \mathbf{R}_{m(\xi)}^2 = \mathbf{B}_m^2 \cdot \left(\frac{2m}{\xi} - 2 \right) \cdot \xi^{2m} e^{-2\xi} = 0$$

Also ist $\xi_m = m$, da die restliche Gleichung monoton fallend ist.

Setzt man nun aus „Schönheitsgründen“

$$\mathbf{B}_m^2 = \frac{e^{2m}}{m^{2m}}$$

anstelle des aus $\int |\psi|^2 \cdot dr^3 = 1$ folgenden Wertes, so ergibt sich als Verlauf von $\mathbf{R}_{m(\xi)}^2$ für $m = 10$ bzw. $m = 40$ die in ?? dargestellte Funktion.



Die beiden Kurven sind für so große m praktisch kongruent. Man ersetze $\mathbf{R}_{m(\xi)}$ durch ein TAYLOR-Polynom zweiten Grades und beachte:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} \mathbf{R}_{(m(\xi))} \Big|_{\xi_m} &= \mathbf{B}_m^2 \cdot \left(\frac{d}{d\xi} \left(\frac{m}{\xi} - 1 \right) \cdot \xi^{2m} e^{-2\xi} \right) \Big|_{\xi_m} \\
 &= -\mathbf{B}_m^2 \frac{m}{\xi} \xi^{2m} e^{-2\xi} \Big|_{\xi_m} \\
 &= -\frac{1}{m}
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{\mathbf{B}_m^2} \cdot \mathbf{R}_{m(\xi)}^2 = 1 - \frac{1}{m} (\xi - xi_m)^2$$

Hier fällt die erste Ableitung aufgrund des Minimums heraus.

Die Halbbergsbreite δ_m dieser Kurve ist gegeben durch:

To Do 24 (Hier Abbildung einfügen.):

$$\frac{1}{\mathbf{B}_m^2} \cdot \mathbf{R}_{(\xi_m \pm \delta_{m/2})}^2 = \frac{1}{2}$$

bzw.

$$1 - \frac{1}{m} \cdot \frac{\delta_m^2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\delta_m = \sqrt{2m} \quad (6.119)$$

oder

$$\frac{\delta_m}{\xi_m} = \sqrt{\frac{2}{m}} \quad (6.120)$$

Die relative Halbwertsbreite nimmt also mit wachsendem m wie $m^{-\frac{3}{2}}$ ab. Der Radius maximaler Aufenthaltswahrscheinlichkeit ergibt sich zu

$$\hat{r}_m = r_m a_0 = (m+1) \xi_m a_0 = m(m+1) a_0 \quad (6.121)$$

Analog zu $\mathbf{R}_{m(\xi)}^2$ verhält sich der Winkelanteil von $\psi_{(r,\theta,\phi)}$ (siehe Abb. ??).

Das entsprechende **Taylor-Polynom** zweiten Grades lautet hier:

$$\sin^{2m} \theta = 1 - m \cdot \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^2$$

Daraus ergibt sich die Halbwertsbreite $\delta_m^{(\theta)}$ zu:

$$\delta_m^{(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

Demnach zieht sich die **Aufenthaltswahrscheinlichkeit** mit wachsendem m immer schärfer auf einen äquatorialen Kreis vom Radius \hat{r}_m zusammen.

Andererseits gehört zu einer kreisförmigen KEPPLER-Bahn vom Radius \hat{r}_m die Gesamtenergie:

⁸

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0\hat{r}_m} \quad (6.122)$$

Anmerkung :

$$\begin{aligned} 2 < T > &= - < v > \\ < v > + < T > &= \frac{1}{2} < v > = E \end{aligned}$$

(daher die 8)

was sich mit ??

$$\begin{aligned} 1 \text{Ryd} &= \frac{\hbar^2}{2m_0} \cdot \frac{1}{a_0} \\ &\stackrel{??}{=} \frac{\hbar^2}{2m_0} \cdot \frac{1}{a_0} \cdot \frac{e^2 m_0}{\hbar^2 4\pi\epsilon_0} \\ &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \end{aligned}$$

in folgender Form schreiben lässt:

$$E = -1 \text{Ryd} \cdot \frac{a_0}{\hat{r}_m} \quad (6.123)$$

Setzt man diese Energie gleich der des Zustandes $\psi_{m+1,m,m(r,\theta,\phi)}$

$$E_{m+1} = -\frac{1}{(m+1)^2} \cdot 1 \text{Ryd}$$

so ergibt sich für den Radius der klassischen **Keplerbahn** für diese Energie:

$$\hat{r}_m^{klassisch} = (m+1)^2 a_0 \stackrel{m \gg 1}{\approx} m(m+1)a_0 \quad (6.124)$$

der also für $m \gg 1$ mit dem Radius der Mittellinie des *Fokussierungsschlauches* überbestimmt.

⁸Achtung bei der Unterscheidung zwischen der **Eulerschen Zahl** e und der **Elementarladung** e

Hier Abbildung einfügen.

Anmerkung 20:

Der Grundzustand ist ein rein quantenmechanischer Zustand und deshalb knotenlos.

Die Orthogonalität von Eigenzuständen

Man betrachte ein Einteilchensystem, beschrieben durch die **Schrödinger-Gleichung**

$$\mathbb{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

mit

$$\mathbb{H} = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}^2 + \mathbf{U}(\vec{r})$$

Zur Vereinfachung kann man annehmen, dass $\mathbf{U}(\vec{r})$ keinerlei Symmetrie besitzen soll. Bei Systemen, z. B. mit Zentralsymmetrie, kann man für die folgenden Überlegungen annehmen, dass man durch Einschalten einer sehr schwachen unsymmetrischen Störung die ursprüngliche Zentralsymmetrie aufhebt („bricken“). Man betrachte nun zwei Eigenzustände $\psi_{n'}$ und ψ_n , deren Energien wegen der gemachten Voraussetzungen jedenfalls voneinander verschieden sind:

$$E_{n'} \neq E_n$$

Anmerkung 21:

Zufällige Entartung bei $1/r$. Die Entartung ist immer mit einer Symmetrie bedingt.

Dann gilt

Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{H}\psi_n &= E_n\psi \\ \mathbb{H}\psi_{n'} &= E_{n'}\psi_{n'}\end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbb{H}P\psi_{n'}^* = E_{n'}\psi_{n'}^*$$

Hieraus folgt

$$\int \psi_{n'}^* \mathbb{H} \psi_n d^3r - \int \psi_n \mathbb{H} \psi_{n'}^* d^3r = (E_n - E_{n'}) \cdot \int \psi_{n'}^* \psi_n d^3r$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int \psi_{n'}^* \mathbb{H} \psi_n d^3r &= \underbrace{-\frac{1}{2} \int \psi_{n'}^* \Delta \psi_n d^3r}_{\substack{\text{(Greenscher Satz)} \\ = \int \psi_n \Delta \psi_{n'}^* d^2r}} + \underbrace{\int \psi_{n'}^* \mathbf{U}(\vec{r}) \psi_{n'}^* d^3r}_{\int \psi_n \mathbf{U}(\vec{r}) \psi_n^* d^3r} \\ &= \int \psi \mathbb{H} \psi_{(n')}^* d^3r \end{aligned}$$

Dies resultiert aus der Hermitizität des Operators. Also verschwindet die linke Seite in der obigen Gleichung:

$$(E_n - E_{n'}) \cdot \int \psi_{(\vec{r})}^* \psi_{(\vec{r})} d^3r = 0$$

für $n' \neq n$. Wegen der getroffenen Voraussetzungen gilt also:

$$\int \psi_{n'(\vec{r})}^* \psi_{n(\vec{r})} d^3r = 0$$

für $n' \neq n$.

Diese Gleichung fasst man üblicherweise mit der Normierungsbedingung für die Eigenzustände zusammen in der Form:

$$\int \psi_{n'(\vec{r})}^* \psi_{n(\vec{r})} d^3r = \delta_{nn'} \quad (6.125)$$

To Do 25 (Formel einrahmen.):

Man sagt, die Funktionen $\psi_{n'(\vec{r})}$ und $\psi_{n(\vec{r})}$ (für $n' \neq n$) sind zueinander *orthogonal*.

Beachte:

Bei Vektoren gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{\nu=1}^3 a_\nu \cdot b_\nu = 0$$

wenn \vec{a} und \vec{b} zueinander orthogonal sind.

Es stellt sich heraus, dass zu gleichem **Hamiltonoperator** im allgemeinen ein abzählbar unendlicher Satz von Eigenfunktionen existiert, der *vollständig* ist in dem Sinne, dass sich jede *nicht-pathologische* Funktion $F(\vec{r})$ in Fourierscher Weise nach folgenden Faktoren entwickeln lässt:

$$\int \left| F(\vec{r}) - \sum_{n=1}^{n_{max}} c_n \cdot \psi_n(\vec{r}) \right|^2 \cdot d^r r = \epsilon_{n_{max}}$$

mit der Eigenschaft: $\epsilon_{n_{max}} \rightarrow 0$, wenn $n_{max} \rightarrow \infty$ gegen Unendlich strebt.

Es gilt als:

$$F(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(\vec{r})$$

To Do 26 (Formel einrahmen.):

Die Koeffizienten c_n bestimmen sich auf folgende Weise:

$$F(\vec{r}) \psi_{n'(\vec{r})} d^3 r = \sum_{n=1}^{n_{max}} c_n \underbrace{\int \psi_{n'(\vec{r})}^* \psi_n(\vec{r}) d^3 r}_{\delta_{n'n}}$$

To Do 27 (Text überprüfen.): Prinzip der endgültigen Koeffizienten bei Entwicklung der Orthogonalitäten

$$\Rightarrow c_n = \int F(\vec{r}) \psi_{n'(\vec{r})}^* d^3 r$$

Diese Entwicklung von Funktionen $F(\vec{r})$ nach vollständigen orthonormierten Funktionssätzen $\{\psi_n(\vec{r})\}$ liefert ein Verfahren endgültiger Koeffizientenbestimmung. Schon bestimmte Koeffizienten werden durch die Bestimmung weiterer Koeffizienten nicht mehr verändert.

Die Serienspektren des Wasserstoffatoms

Man betrachte ein einzelnes Wasserstoffatom in einem angeregten Zustand $\psi_{n'l'm'}$ zu Energie $E_{n'}$ mit $n' > 1$. Ein Übergang in eine Zustand niedrigerer Energie ist nur möglich, wenn es die Energie in ein anderes System abgeben kann. Bei einem einzelnen H-Atom kommt als Partnersystem nur das Vakuum infrage, das von einem Teilchen endlicher Masse m_0 und endlicher Ladung seine Energie nur in Form elektromagnetischer Strahlung aufnehmen kann⁹

Die Frage, die sich hier stellt, ist welcher Mechanismus den Übergang $E_{n'} \rightarrow E_n$ bewirkt.

Grundsätzlich erfolgen alle Anregungen primär aus dem Grundzustand und zwar innerhalb einer endlichen Zeitspanne.

Als Konsequenz hieraus ergeben sich stationäre Zustände:

$$\psi_{nml}(\vec{r},t) = \hat{\psi}_{nml}(\vec{r}) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

Stationäre Zustände können bei solchen Anregungen nicht sauber parapariert werden. Der in Wirklichkeit auftretende (präparierte) Zustand $\psi(\vec{r},t)$ lässt sich aber stets in der folgenden Form entwickeln:

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_{n,l,m} c_{nlm} \hat{\psi}_{nml}(\vec{r}) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \quad (6.126)$$

Dabei nutzt man aus, dass die Eigenfunktionen $\hat{\psi}_{nml}(\vec{r})$ im Allgemeinen ein vollständiges Orthogonalsystem bilden.

Man beachte:

$$\mathbb{H}\hat{\psi}(\vec{r},t) = \sum_{nlm} c_{nlm} \underbrace{\left[\mathbb{H}\hat{\psi}_{nml}(\vec{r}) \right]}_{E_n \hat{\psi}_{nml}(\vec{r})} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

Andererseit gilt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r},t) = \sum_{nlm} c_{nlm} E_n \hat{\psi}_{nml}(\vec{r}) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

Die Koeffizienten c_{nlm} in Gl. 6.126 erhält man in „Fourierscher Weise“. Multipliziert man auf beiden Seiten mit $\hat{\psi}_{n'l'm'(\vec{r})}^*$ und integriert man über den Definitionsbereich der Eigenlösungen, so erhält man:

⁹Gravitationsstrahlung ist hier ein vernachlässigbares Phänomen.

To Do 28 (Formel falsch.): Achtung Formel falsch

$$c_{nlm} = \int \hat{\psi}_{nlm}^*(\vec{r}) \psi_{nlm}(\vec{r}) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} d^3 r$$

Da die Koeffizienten c_{nlm} nicht von der Zeit abhängen, darf in dieser Beziehung $t = 0$ gesetzt werden. Nimmt man der Einfachheit halber an, dass in der Summe ?? nur zwei, wesentlich von Null verschiedene Koeffizienten auftreten ($c_{n'l'm'}$ und c_{nlm}), so ergibt sich:

$$\psi_{(\vec{r},t)} = c_{n'l'm'} \cdot \hat{\psi}_{n'l'm'}(\vec{r}) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n'} t} + c_{nlm} \cdot \hat{\psi}_{nlm}(\vec{r}) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \quad (6.127)$$

Man kann nun der Frage nachgehen, ob in einem solchen „unreinen“ Zustand des Elektrons ein zeitabhängiges **Dipolmoment** auftritt, das nach dem Axiom ?? zu einer Strahlungsemission führt. Ist das der Fall, dann müsste die Energie des Elektrons sukzessiv abgeben, bis es den Zustand geringerer Energie exakt eingestellt hat. Der **Erwartungswert** der Energie im Zustand 6.138 ist gegeben durch:

$$\langle \mathbb{H} \rangle = E = |c_{n'l'm'}|^2 E_{n'} + |c_{nlm}|^2 E_n$$

aus $\int \psi_{(\vec{r},t)}^* \mathbb{H} \psi_{(\vec{r},t)} d^3 r \dots$ ¹⁰

oder wegen

$$\int |\psi_{(\vec{r},t)}|^2 d^3 r = |c_{n'l'm'}|^2 + |c_{nlm}|^2 = 1 \quad (6.128)$$

$$E = E_{n'} - (E_{n'} - E_n) \cdot |c_{nlm}|^2$$

Eine Energieabnahme im **Wasserstoffatom** ist somit nur möglich, wenn

$$\begin{aligned} c_{n'l'm'} &= c_{nlm}(t) \\ c_{nlm} &= c_{nlm}(t) \end{aligned}$$

Man kann jetzt zeigen, dass im Zustand 6.138 tatsächlich ein oszillierendes Dipolmoment auftritt, also Strahlung emittiert wird. Das entstehende Strahlungsfeld wird durch die Felder $\vec{A}_{(\vec{r},t)}$ und

¹⁰Jede beliebige Energie zwischen $E_{n'}$ und E_n ist beim Übergang realisierbar, die Natur macht keine Sprünge.

$\varphi_{(\vec{r},t)}$ beschrieben (siehe folgender Abschnitt ??). Diese wirken auf das Elektron zurück, so dass der **Hamiltonoperator** die folgende Form hat:

$$\mathbb{H}' = \frac{(\vec{\mathbb{P}} - e\vec{A}_{(\vec{r},t)})^2}{2m_0} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \varphi_{(\vec{r},t)}$$

Anmerkung: Die besondere Form in der $\vec{A}_{(\vec{r},t)}$ hier auftritt, wird in Kapitel ?? hergeleitet.

Der Zustand $\psi_{(\vec{r},t)}$ hat jetzt der modifizierten, zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung zu genügen:

$$\mathbb{H}'\psi_{(\vec{r},t)} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{(\vec{r},t)}$$

Es ist zu beachten, dass die Schrödinger-Gleichung jetzt eine *nichtlineare* partielle Differentialgleichung darstellt, da $\vec{A}_{(\vec{r},t)}$ und $\varphi_{(\vec{r},t)}$ von $\psi_{(\vec{r},t)}$ abhängen.

Wegen des Auftretens von $\vec{A}_{(\vec{r},t)}$ und $\varphi_{(\vec{r},t)}$ in \mathbb{H}' sind $\hat{\psi}'_{n'l'm'(\vec{r})} e^{-\frac{i}{m}E_n t}$ und $\hat{\psi}_{nlm(\vec{r})} e^{-\frac{i}{m}E_n t}$ nicht mehr einzelne Lösungen der **Schrödinger-Gleichung**, sondern nur noch in der **Linearkombination** mit *zeitabhängigen* Koeffizienten.

Da die Strahlungsemision mit einer sukzessiven Energieabnahme des **Wasserstoffatoms** verbunden ist, bietet sich als physikalischer Ansatz für die Zeitabhängigkeit der Koeffizienten an:

$$\begin{aligned} |c_{n'l'm'(t)}|^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \left(2 \cdot \frac{t}{\tau} \right) \right) \\ |c_{nlm(t)}|^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(2 \cdot \frac{t}{\tau} \right) \right) \end{aligned}$$

Dieser Ansatz garantiert die Gültigkeit von **6.128**:

$$|c_{n'l'm'(t)}|^2 + |c_{nlm(t)}|^2 = 1$$

To Do 29 (Abbildung einfügen.):

Außerdem gewährleistet der Ansatz

$$\begin{aligned} c_{n'l'm'(t)} &= \begin{cases} \approx 1 & \text{für } t \ll -\tau/2 \\ = 0 & \text{für } t \gg +\tau/2 \end{cases} \\ c_{nlm(t)} &= \begin{cases} \approx 1 & \text{für } t \gg -\tau/2 \\ = 0 & \text{für } t \ll +\tau/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Man bilde zunächst:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r},t) &= w(\vec{r},t) \\ &= \psi_{(\vec{r},t)}^* \psi_{(\vec{r},t)} \\ &= |c_{n'l'm'(t)}|^2 \cdot |\hat{\psi}_{n'l'm'(\vec{r},t)}|^2 + |c_{nlm(t)}|^2 \cdot |\hat{\psi}_{nlm(\vec{r},t)}|^2 \\ &\quad + 2 \cdot |c_{n'l'm'(t)}^* c_{nlm(\vec{r})}| \cdot |\hat{\psi}_{n'l'm'(\vec{r})} \hat{\psi}_{nlm(\vec{r})}^*| \cdot \cos(\varphi \Delta_m + wt) \end{aligned}$$

To Do 30 (Formel unvollständig.):

mit

$$\begin{aligned} w_{nn'} &= \frac{1}{\hbar} \cdot (E_{n'} - E_n) \\ \Delta m &= m' - m \\ \alpha &= \arg(c_{n'l'm'(t)} c_{nlm(t)} c) \end{aligned}$$

Anmerkung: $E_{n'} - E_n$ ist die BOHRsche Bedingung. Sie kommt hier heraus, ist aber keine Bedingung die hier vorausgesetzt wird.

Da der positive Kern des Wasserstoffatoms bei $r = 0$ liegt, folgt für das Dipolmoment im Zustand $\psi_{(\vec{r},t)}$:

$$\vec{P}_0 = \int e \vec{r} \rho_{(\vec{r},t)} d^3 r \quad (6.129)$$

To Do 31 (Formel überprüfeb.):

Hierbei ist

$$\begin{aligned}\vec{P}_0 &= \text{Dipolmoment} \\ \vec{r} &= \text{Verbindungsvektor Elektron-Proton}\end{aligned}$$

$$\vec{P}_0 = 2 \cdot \left| c_{n'l'm'(t)}^* c_{nlm(t)} \right| \cdot \vec{P}_{n'n} \cdot \cos(\varphi \Delta m - w_{n'n} t - \alpha)$$

mit

$$\vec{P}_{n'n} = \int \hat{\psi}_{n'l'm'(r)}^* \hat{\psi}_{nlm(r)} d^3 r \quad (6.130)$$

Dies ist das sog. *Dipolmatrixelement*. Jeder Zustand in einem zentraalsymmetrischen Potential hat ein Dipolmoment.

Der Zeitverlauf von $\left| c_{n'l'm'(t)}^* c_{nlm(t)} \right|$ hat die Form:

$$2 \left| c_{n'l'm'(t)}^* c_{nlm(t)} \right| = \frac{1}{\cosh \frac{2t}{\tau}}$$

To Do 32 (Abbildung einfügen.):

Man stellt somit fest, dass während der Übergangszeit τ ein **Dipolmoment** auftritt, das mit der Frequenz

$$\omega_{n'n} = \frac{1}{\hbar} \cdot (E_{n'} - E_n) \quad (6.131)$$

To Do 33 (Formel falsch.): w durch omega ersetzen

oszilliert und zwar in der z-Achse wenn $\Delta m = 0$.

Man beachte hierzu:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z &= r \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

$$\vec{P}_D = P_x \vec{e}_x \cdot P_y \vec{e}_y \cdot P_z \vec{e}_z$$

und weiterhin gilt $P_x = P_y = 0$ wenn $\Delta m = 0$, da

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$

To Do 34 (Anmerkung einfügen.):

wegen

$$\begin{aligned} P_x &= e \iiint x \cdot \rho(r) r^2 dr \cdot \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= e \int_0^{2\pi} \varphi \left[\int_0^\pi \int_0^\infty \underbrace{\rho(r,\theta)}_{\text{Axialsymmetrie}} r^3 dr \cdot \sin^2 \theta d\theta \right] d\varphi \\ P_y &= e \int_0^{2\pi} \sin \varphi [\dots] d\varphi \end{aligned}$$

Ist $\Delta m = \pm 1$, so stellt \vec{P}_D einen mit der Frequenz $\omega_{n'n}$ linksherum kreisenden Dipol dar. Demzufolge muss das emittierte Licht bezüglich der z-Achse linkszirkular polarisiert sein.

Für $\Delta m = -1$ ist es entsprechend rechtszirkular polarisiert.

$$\Delta m = \begin{cases} +1 & \text{linkszirkular polarisiert} & \text{keine Emission } \perp z \\ 0 & \text{linear polarisiert} & \text{keine Emission } \parallel z \\ -1 & \text{rechtszirkular polarisiert} & \text{keine Emission } \perp z \end{cases}$$

Die Intensität der Strahlung wird im Abschnitt **6.4.2** behandelt.

To Do 35 (Bearbeiten.): Das Dipolmoment entsteht auch durch Beimengungen.

Elektrische Dipolstrahlung

Dipolstrahlung

Aus der **Maxwellschen-Gleichung**

$$\dot{\vec{B}} = -\operatorname{rot} \vec{E}$$

folgt nach der Einführung des **Vektorpotentials A**:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

die Beziehung

$$\operatorname{rot} (\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0$$

bzw.

$$\vec{E} + \dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\phi$$

Dies ergibt zusammen mit der 2. Maxwellschen-Gleichung:

$$\frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} \mu_0 \vec{j} = \operatorname{rot} \vec{B}$$

mit $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ führt dies auf die inhomogenen Wellengleichungen:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\phi} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_{(\vec{r},t)}$$

$$\Delta\vec{a} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{a}} = -\mu_0 \vec{j}_{(\vec{r},t)}$$

sofern gilt:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{c^2} \dot{\phi} \quad (6.132)$$

Die Lösung von Gl. 6.4.2 hat die Form eines *retadierten Poisson-Integrals*.

$$\vec{A}_{(\vec{r},t)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_{(\vec{r},t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d^3 r'$$

Für den ins Auge gefassten Anwendungsfall ist j nur innerhalb des Atomvolumens vom Durchmesser $\approx 10^{-8}\text{m}$ wesentlich von Null verschieden.

Man kann die abgestrahlte Energie in hinreichend großer Entfernung vom Atom zu berechnen. Dann gilt:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx |\vec{r}| = r$$

Also wird:

$$\vec{A}_{(\vec{r},t)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \cdot \int \vec{j}_{(r',t-\frac{r}{c})} \dot{d}^2 r \quad (6.133)$$

Man kann nun nach HERTZ zur Vereinfachung folgende Abkürzung einführen:

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{A}_{(\vec{r},t)}$$

und

$$\vec{j}_{(t-\frac{r}{c})} = \int \vec{j}_{(r',t-\frac{r}{c})} d^3 r' \quad (6.134)$$

Damit geht Gl. 6.133 über in

$$4\pi \cdot \dot{\vec{\Pi}} = \frac{1}{r} \vec{J}_{(t-\frac{r}{c})} \quad (6.135)$$

und Gl. 6.132 nimmt die folgende Form an:

$$\epsilon_0 \dot{\phi} = -\operatorname{div} \dot{\vec{\Pi}}$$

Also wird

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \operatorname{rot} \dot{\vec{\Pi}} \\ D &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{\Pi}} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{\Pi}} \end{aligned}$$

Da \vec{j} symmetrisch in t und $\frac{r}{c}$ ist, gilt:

$$\frac{\partial}{\partial r} \vec{j} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{j}}$$

Setzt man jetzt in die Gleichung für \vec{D} , $\vec{\Pi}$ bzw. $\dot{\vec{\Pi}}$ aus Gl. 6.135 ein, so wird unter Vernachlässigung aller Terme vom Typ r^κ mit $\kappa > 1$ in einem sphärischen Polarkoordinatensystem mit $\vec{j} \parallel \vec{e}_z$:

$$4\pi\epsilon E_\theta = -\frac{\sin\theta}{c^2 r} \cdot j_{t-\frac{r}{c}}$$

$$E_r \approx 0$$

$$4\pi E_\phi = -\frac{\sin\theta}{cr} \cdot j_{t-\frac{r}{c}}$$

$$H_r = H_\theta = H_\phi = 0$$

Der Poyntingvektor hat dann nur eine nicht verschwindende r -Komponente.

$$\begin{aligned} S_r &= (\vec{E} \times \vec{H}) = E_\theta H_\phi \vec{e}_r \\ &= \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} j_{(t-\frac{r}{c})}^2 \vec{e}_r \end{aligned}$$

Die aus einer Kugel vom Radius R um $r = 0$ autretende Energie pro Zeiteinheit ist demnach gegeben durch:

$$\begin{aligned} S_{tot} &= \int_0^\pi S_{r(\theta)} \underbrace{2\pi r^2 \sin \theta d\theta}_{=dF=R^2 d\Omega} \\ &= \frac{j^2}{8\pi\epsilon_0 c^3} \cdot \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}_{=4/3} \end{aligned}$$

$$S_{tot} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cdot j^2 \quad (6.136)$$

Nun gilt nach Gl. ??

$$(\vec{r}\Delta - \Delta \vec{r}) \psi_{(\vec{r},t)} = -2\vec{\nabla} \psi_{(\vec{r},t)} \quad (6.137)$$

Diese Beziehung kann man auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{1}{\hbar} (\vec{r}\mathbb{H} - \mathbb{H}\vec{r}) \cdot \psi_{(\vec{r},t)} = i \frac{-i\hbar}{m_0} \vec{\nabla} \psi_{(\vec{r},t)}$$

oder

To Do 36 (Doppelungen korrigieren.):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} (\vec{r}\mathbb{H} - \mathbb{H}\vec{r}) \cdot \psi_{(\vec{r},t)} &= \frac{\hbar}{m_0} \vec{\mathbb{P}} \psi_{(\vec{r},t)} \\ \frac{1}{\hbar} (\vec{r}\mathbb{H} - \mathbb{H}\vec{r}) \cdot \psi_{(\vec{r},t)} &= \frac{\hbar}{m_0} \vec{\mathbb{P}} \end{aligned}$$

Damit nimmt wegen

$$\vec{j}_e = \frac{e\hbar}{2im_0} \cdot (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

die Stromdichte \vec{J} die folgende Form an:

$$\vec{J} = \int \vec{j}_e d^3r = \frac{e\hbar}{im_0} \int \psi^* d^3r$$

bzw.

To Do 37 (Doppelungen korrigieren.):

$$\frac{1}{\hbar} (\vec{r}\mathbb{H} - \mathbb{H}\vec{r}) \psi_{(\vec{r},t)} = i \cdot \frac{-i\hbar}{m_0} \vec{\nabla} \psi_{(\vec{r},t)}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} (\vec{r}\mathbb{H} - \mathbb{H}\vec{r}) \psi_{(\vec{r},t)} &= \frac{i\hbar}{m_0} \mathbb{P} \psi_{(\vec{r},t)} \\ \frac{1}{\hbar} (\vec{r}\mathbb{H} - \mathbb{H}\vec{r}) &= \frac{i\hbar}{m_0} \mathbb{P} \end{aligned}$$

Damit nimmt wegen

$$\vec{j}_e = \frac{e\hbar}{i2m_0} \cdot (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

$\dot{\vec{J}}$ die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \int \vec{j}_e d^3r \\ &= \frac{e\hbar}{im_0} \int \psi^* \vec{\nabla} \psi d^3r \\ &= \frac{e\hbar}{im_0} \left[\int \psi^* \vec{r} \mathbb{H} \psi d^3r - \int \psi^* \vec{r} \mathbb{H} \vec{r} \psi d^3r \right] \\ &= \frac{e\hbar}{im_0} \left[\int \psi^* \vec{r} \mathbb{H} \psi d^3r - \int (\mathbb{H} \psi^*) \vec{r} \vec{r} \psi d^3r \right] \end{aligned}$$

und somit

$$\vec{J} = 2 \left| C_{n'l'm'(t)}^* C_{nlm(t)} \right| \cdot \frac{E_n}{\hbar} \int \hat{\psi}_{n'l'm'}^* e \vec{r} \hat{\psi}_{nlm} d^3 - \left| \frac{E_n}{\hbar} \int \hat{\psi}_{n'l'm'}^* e \vec{r} \hat{\psi}_{nlm} d^3 \right| \cdot \cos(\omega_{n'n} \cdot t - \alpha) \quad (6.138)$$

Mit Verwendung von 6.129 und 6.131 kann man das Ergebnis in folgender Weise schreiben:

$$\vec{J}_{(t)} = -2\omega_{n'n} \cdot \left| C_{n'l'm'(t)}^* C_{nlm(t)} \right| \cdot |P_{n'n}| \cdot \cos(\omega_{n'n} \cdot t - \alpha')$$

To Do 38 (Hier fehlt noch was.):

Man kann hier im folgenden die zeitveränderlichkeit des Vorfaktors:

$$2 \cdot \left| C_{n'l'm'(t)}^* C_{nlm(t)} \right| = \frac{1}{\cosh(\frac{2t}{\tau})}$$

gegenüber dem Faktor $\cos(\omega_{n'n} \cdot t - \alpha')$ vernachlässigen.

Man verlangt demnach

$$\omega_{n'n}\tau \gg 1 \quad (6.139)$$

Anmerkung 22:

Optische Übergänge finden etwa in folgenden Bereichen statt:

$$\begin{aligned} \omega_{n'n} &\approx 10^{15} \dots 10^{16} \text{Hz} \\ 1/\tau &\approx 10^9 \text{s}^{-1} \\ \omega_{n'n}\tau &\approx 10^6 \dots 10^7 \end{aligned}$$

Dann wird

$$\mathbf{S}_{tot(t)} = \frac{\omega_{n'n}^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \cdot \frac{|P_{n'n}|^2}{\cosh(\frac{2t}{\tau})} \cdot [1 - \cos(2\omega_{n'n} \cdot t + 2\alpha')] \quad (6.140)$$

Man integriert jetzt diesen Ausdruck über eine Schwingungsperiode

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{n'n}}$$

und erhält

$$\bar{\mathbf{S}}_{tot(\bar{t})} = \frac{\omega_{n'n}^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \cdot \frac{|P_{n'n}|^2}{\cosh\left(\frac{2\bar{t}}{\tau}\right)}$$

mit $\bar{t} \in (t, t + \tau)$.

Daraus ergibt sich durch Integration bezüglich \bar{t} von $-\infty$ bis $+\infty$ wegen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh\left(\frac{2\bar{t}}{\tau}\right)} d\bar{t} = \tau$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathbf{S}}_{tot(\bar{t})} d\bar{t} = \frac{\omega_{n'n}^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \cdot |P_{n'n}|^2 \cdot \tau \stackrel{!}{=} E_{n'} - E_n \stackrel{6.131}{=} \hbar\omega_{n'n} \quad (6.141)$$

Daraus ergibt sich für die Zeitdauer τ des Übergangs:

$$??\tau = \frac{12\pi\epsilon_0 c^3 \hbar}{|P_{n'n}|^2 \cdot \omega_{n'n}^3} \quad (6.142)$$

Es ist üblich die Größe

$$??W_{n'n} = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_{n'n}^3}{12\pi\epsilon_0 c^3 \hbar} \cdot |P_{n'n}|^2 \quad (6.143)$$

als *Übergangswahrscheinlichkeit* (genauer: *Übergangsrate*) für den Übergang $E_{n'} \rightarrow E_n$ zu bezeichnen. Der berechnete Übergang kommt offensichtlich ohne Einwirkung von außen, also von sich aus, zustande und wird daher als *Spontanübergang* oder *spontane Emission* bezeichnet.

Anmerkung 23 (Klassische Herleitung):

Eine klassische Herleitung erfolgt durch EINSTEIN schon vor der Quantentheorie.

To Do 39 (Hier fehlt noch was.):

Die natürliche Linienbreite der Spektrallinien

Zur Berechnung der natürlichen **Linienbreite** der **Spektrallinien** wird auf folgende beiden Formel zurückgegriffen:

$$4\pi\epsilon_0 E_\nu = -\frac{\sin \theta}{c^2 r} \dot{J}_{(t-\frac{|r|}{c})}$$

und

$$\dot{J}_{(t)} = \frac{\omega_{n'n}^2}{\cosh(\frac{2t}{\tau})} \cdot |P_{n'n}|^2 \cdot \sin(\omega_{n'n} t + \alpha')$$

Also wir die Feldstärke E im Kollimatorspalt eines Spektralapparates an der Stelle $\vec{r} = \vec{r}_0$:

$$E_{(t,r_0)} = \text{const.} \cdot \frac{1}{\cosh(\frac{2t}{\tau})} \cdot \cos(\omega_{n'n} t)$$

Wobei hier folgende Vereinfachung getroffen wurde:

$$\alpha' = \frac{\pi}{2} - \frac{|\vec{r}_0|}{c}$$

Eine Skizze des Prinzips für den Nachweis und die Wellenlängenbestimmung des emittierten Lichtes findet sich in Abb. 6.4.2.

Anmerkung 24:

Übergänge in sichtbare Licht sind keine Übergänge in den Grundzustand (für das H-Atom). Wegen des Vorfaktors $\sinh^{-1}(2t/\tau)$ ist $E_{\theta(t,r_0)}$ *keine* harmonische Zeitfunktion mehr, d. h. das FOURIER-Spektrum von $E_{\theta(t,r_0)}$ hat eine endliche Breite. Da nun der Spektralapparat verschiedene Lichtfrequenzen in der Schirmebene verschiedene Orte zuweist, muss die zu $E_{n'} \rightarrow E_n$ gehörende Spektrallinie darf mit einer endlichen Breite um den Schwerpunkt $\omega_{n'n}$ erscheinen.

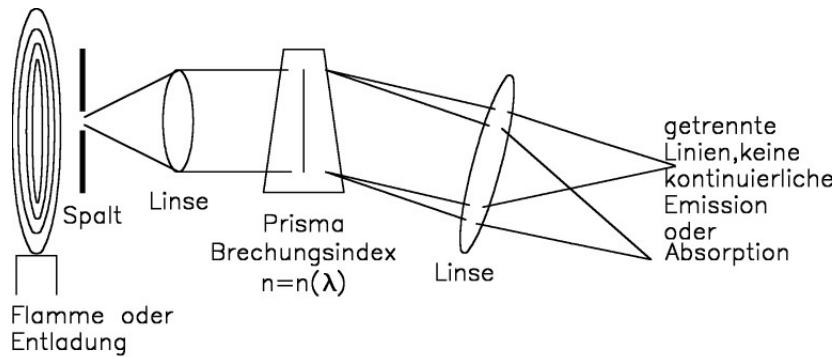


Abbildung 6.17.: Prinzipieller Aufbau eines einfachen Spektrometers.

Sei $A_{(\omega)}$ die Fouriertransformierte von $E_{\theta(t,r_0)}$ also:

$$E_{\theta(t,r_0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{(\omega)} \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

so wird

$$A_{(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} E_{(\theta(t',r_0))} \cdot e^{i\omega t'} dt'$$

Da $E_{(\theta(t',r_0))}$ eine reellwertige Zeitfunktion ist, gilt:

$$\begin{aligned} A_{(\omega)} &= \mathcal{R}A_{(\omega)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} E_{(\theta(t',r_0))} \cdot \cos(\omega t') dt' \end{aligned}$$

also ergibt sich mit Kombination von Gl. ??:

$$A_{1(\omega)} = \frac{\text{const.}}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos((\omega_{n'n} - \omega) t')}{\cosh(\frac{2t}{\tau})} \cdot dt' + \frac{\text{const.}}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos((\omega_{n'n} - \omega) t')}{\cosh(\frac{2t}{\tau})} \cdot dt'$$

To Do 40 (Formel überprüfen):

Also wird wegen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos((\omega_{n'n} - \omega)t')}{\cosh(\frac{2t}{\tau})} \cdot dt' = \frac{\pi\tau}{\cosh[(\omega_{n'n} \pm \omega) \cdot \frac{\pi\tau}{4}]}$$

Man beachte jetzt Gl. 6.139: $\omega_{n'n}\tau \gg 1$ und dass

$$\frac{\pi}{\cosh[(\omega_{n'n} \pm \omega) \cdot \frac{\pi\tau}{4}]} \ll 1$$

für alle ω .

Daher gilt:

$$A_{1(\omega)} \approx \text{const.} \cdot \frac{\tau}{\cosh[(\omega_{n'n} + \omega) \cdot \frac{\pi\tau}{4}]} \ll 1$$

und damit wird die Lichtintensität im Kollimatorspalt:

$$\begin{aligned} I_\omega &\approx |A_{1(\omega)}|^2 \\ &\approx \text{const.}^2 \frac{\tau^2}{\cosh^2[(\omega_{n'n} - \omega) \cdot \frac{\pi\tau}{4}]} \end{aligned}$$

To Do 41 (Abbildung fehlt.):

Entwickelt man diese Funktion von ω um die Stelle $\omega_{n'n}$ nach TAYLOR bis zum Glied zweiter Ordnung, so ergibt sich:

$$I_\omega = 4 \cdot \text{const.} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2\tau'} - (\omega - \omega_{n'n})^2\right)^2} \quad (6.144)$$

mit $\tau' = \pi/4 \cdot \tau$.

Dieser charakteristische Verlauf wird als LORENTZ-Kurve bezeichnet. Die Halbwertsbreite dieser Kurve beträgt:

$$\Delta\omega_H = \frac{1}{\tau'} \quad (6.145)$$

Daraus folgt für die relative Halbwertsbreite:

$$\frac{\Delta\omega_H}{\omega_{n'n}} = \frac{1}{\omega_{n'n}\tau'} \approx 10^{-5} \dots 10^{-6} \quad (6.146)$$

To Do 42 (Hier fehlt noch etwas.):

Unterschied natürliche Linienbreite und Dopplerverbreiterung

Es gibt hier einen Unterschied zwischen der **natürlichen Linienbreite** und der **Dopplerverbreiterung**. Man muss beachten, dass Photonen auf geraden Bahnen laufen und nicht „verwackelt“ sind.

To Do 43 (Abschnitt überarbeiten): Dieser Abschnitt muss noch überarbeitet werden.

Anmerkung 25:

Die im allgemeinen immer auftretende **Dopplerverbreiterung** der Spektrallinien ist wesentlich größer als die natürliche Linienbreite, kann aber in der sog. dopplerfreien Spektroskopie experimentell unterdrückt werden.

Auswahlregeln für Dipolübergänge

Auswahlregel

Die Komponenten des Dipolmatrixelements (??):

$$P_{n'n}^{(i)} = e \cdot \int \psi_{n'l'm'}^*(\vec{r}) \xi_i \psi_{nlm}(\vec{r}) d^3r \quad (6.147)$$

¹¹ sind nur für bestimmte Übergänge von Null verschieden. Um das einzusehen, kann man schreiben:

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = C_{nlm} \mathbf{R}_{nl(r)} \mathbf{P}_{l(\cos\theta)}^{|m|} \cdot e^{im\varphi}$$

¹¹ $i = 1, 2, 3$ zählt die Koordinantenrichtungen durch.

und man kann $\psi_{nlm}(\vec{r})$ in Gl. ?? einsetzen:

$$P_{n'n}^{(i)} = C_{n'l'm'}C_{nlm} \cdot \int_0^\infty \mathbf{R}_{n'l'(\vec{r})} \mathbf{R}_{nl(\vec{r})} r^3 dr \cdot \sum_{n=1}^2 a_n^{(i)} \int_0^{2\pi} e^{-i[(m'-m)+M_n^{(i)}]} d\varphi$$

wegen

$$d^3r = r^2 dr \cdot \sin \theta d\theta d\varphi \cdot \int_{-1}^{+1} \mathbf{P}_{l'(\cos \theta)}^{|m'|} \mathbf{P}_{l(\cos \theta)}^{|m|} \cdot (b_i \sin \theta + c_i \cos \theta) d\cos \theta$$

mit

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= a_2^{(2)} = 1/2 \\ a_1^{(2)} &= -a_2^{(1)} = 1/2i \\ a_1^{(3)} &= a_2^{(3)} = 1/2 \\ b_3 &= 0 \\ c_1 &= c_2 = 0 \\ c_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1^{(1)} &= -M_2^{(1)} = 1 \\ M_1^{(2)} &= -M_2^{(2)} = 1 \\ M_1^{(3)} &= +M_2^{(3)} = 0 \end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cdot \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 &= r \cdot \cos \theta \cos \varphi \\ x_3 &= r \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

Für das Integral über r gilt generell:

$$\int_0^\infty \mathbf{R}_{(n'l'(r))} \mathbf{R}_{nl} r^3 dr \neq 0$$

für alle $n'l'$, nl . ¹²

Andererseits ist:

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm i(m' - m \pm 1)\varphi} d\varphi = 0$$

für $\Delta m = \pm 1$ und $\Delta m = m' - n$.

Also wird für $\Delta m = 0$

$$\mathbf{P}_{n'n}^{(1)} = \mathbf{P}_{n'n}^{(2)} = 0 \quad (6.148)$$

für $m' = m$.

Dass die z -Komponente von $\vec{\mathbf{P}}_{n'n}$ nicht verschwindet folgt aus der Rekursionsformel:

$$(2l + 1) \cos \theta \cdot \mathbf{P}_{l(\cos \theta)}^{|m|} = (l + |m|) \mathbf{P}_{l-1(\cos \theta)}^{|m|} + (l + |m| + 1) \mathbf{P}_{l+1(\cos \theta)}^{|m|} + \quad (6.149)$$

und aus

$$\int \mathbf{P}_{l'(\cos \theta)}^{|m|} \mathbf{P}_{l(\cos \theta)}^{|m|} d \cos \theta = \begin{cases} \frac{2}{2l+1} \cdot \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} & \text{für } l' = l \\ 0 & \text{für } l' \neq l \end{cases}$$

Es ist also

$$\int \mathbf{P}_{l'(\cos \theta)}^{|m|} \mathbf{P}_{l(\cos \theta)}^{|m|} \cos \theta d \cos \theta \neq 0$$

für $m' = m$ und $l' - l = \pm 1$.

Hieraus folgt:

$$\mathbf{P}_{n'n}^{(3)} \neq 0$$

für $m' = m$ und $\Delta l = \pm 1$.

Zur Auswertung der anderen Integrale über θ benutzt man die Rekursionsformel

¹²Wenn r^2 nicht unbedingt $\neq 0 \rightarrow$ Orthogonalität.

$$\mathbf{P}_{l(\cos\theta)}^{|m|} \sin\theta = \frac{1}{2l+1} \cdot \left(\mathbf{P}_{l+1(\cos\theta)}^{|m|+1} - \mathbf{P}_{l(\cos\theta)}^{|m|} + 1_{l-1(\cos\theta)} \right) \quad (6.150)$$

aus der wiederum folgt:

$$\int_{-1}^{+1} \mathbf{P}_{l'(\cos\theta)}^{|m'|} \mathbf{P}_{l(\cos\theta)}^{|m|} \sin\theta d\cos\theta \neq 0$$

falls $\Delta l = \pm 1$.

Man findet dann:

$$\mathbf{P}_{n'n}^1 = \pm i \mathbf{P}_{n'n}^2 = \pm e^{i\frac{\pi}{2}} \mathbf{P}_{n'n}^3$$

Die x - und die y -Komponenten schwingen also mit einer Phasenverschiebung von $\pi/2$ gegeneinander, d. h. das Dipolmoment führt in der xy-Ebene eine zirkulare Bewegung aus.

Allgemein kann man feststellen, dass Dipolübergänge nur zwischen Zuständen auftreten können für die gilt:

$$\Delta l = \pm 1$$

und

$$\Delta m = \pm 1, 0$$

Klassifikation der Linien des Wasserstoffatoms

BALMER¹³ hatte für die vier sichtbaren Linien des H-Spektrums die folgende Formel aufgestellt:

$$\lambda_m = B \frac{n^2}{n^2 - 4}$$

mit $n = 3, 4, 5, 6$, wobei die Konstante

¹³Schullehrer in Basel.

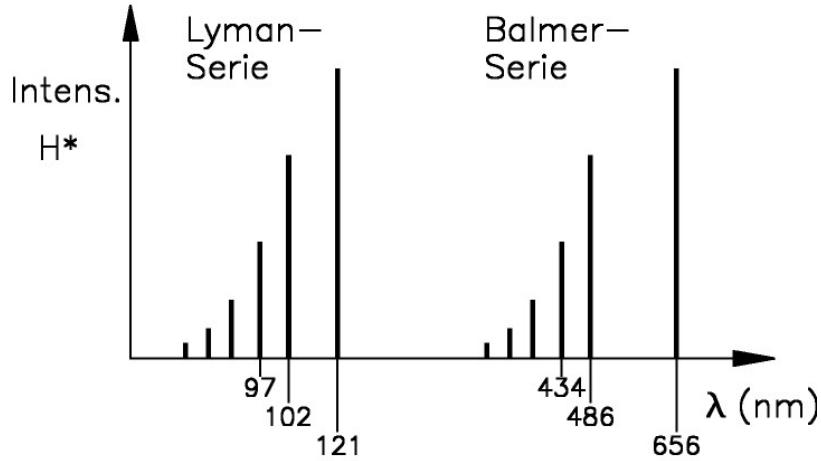


Abbildung 6.18.: Vereinfachtes Spektrum des Wassersoffs.

$$B = 3645,81 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

bezeichnet und $\lambda : m$ die zu den beobachteten Linie gehörige Wellenlänge.

Schreibt man diese Beziehung für die Frequenz

$$\omega_n = \frac{2\pi c}{\lambda_n}$$

um, so nimmt die Formel folgende Form an:

$$\omega_n = \frac{1}{\hbar} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{Ryd.}$$

Die Formel nach BALMER stimmt somit genau mit der Beziehung für die Übergangsfrequenz $\omega_{n'n}$ überein,

$$\omega_n = \frac{1}{\hbar} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{Ryd.}$$

wenn man hierin $n' = 2$ setzt.

Zusätzlich müssen auch die Linien zu $n' = 1, 3, 4, 5$ auftreten, aber diese liegen sämtlich außerhalb des sichtbaren Spektralbereichs und zwar für $n' = 1$ im Ultravioletten und für $n' > 2$ im Infraroten. Die durch n' gekennzeichneten Linien werden nach ihren Entdeckern benannt.

$n' = 1$	Lyman	(1906)	UV Lyman-Serie
$n' = 2$	Balmer	(1885)	vis Balmer-Serie
$n' = 3$	Ritz, Paschen	(1908)	IR Ritz-Serie , Paschen-Serie
$n' = 4$	Brackett, Pickery	(1922), (1897)	IR Brackett-Serie Pickery-Serie
$n' = 5$	Pfund	(1924)	IR Pfund-Serie

Üblicherweise gibt man die Übergänge nach dem in Abb. ?? gezeigten Schema an.

$$\begin{aligned}\langle \vec{L}_2 \rangle &= m_2 \hbar \vec{e}_z \\ \langle \vec{L}_1 \rangle &= m_1 \hbar \vec{e}_z \\ \langle \vec{L} \rangle &= \Delta m \hbar \vec{e}_z\end{aligned}$$

Das Photon muss demnach $\pm \hbar$ an Drehimpuls aufnehmen.

Anmerkung 26 (Achtung):

Linear polarisierte Photonen haben keinen Drehimpuls.

6.5. Das quantenmechanische Einteilchensystem bei Anwesenheit eines Magnetfeldes

Verfolgt man die Herleitung unserer quantenmechanischen Bewegungsgleichung ?? zurück, so erkennt man, dass nirgendwo davon Gebrauch gemacht worden ist, dass das äußere Kraftfeld nicht von der Zeit abhängt. Wir kann dher die Gültigkeit von ?? auch für ein zeitabhängiges Feldannehmen, wenn seine Darstellbarkeit in der Form

$$\vec{F}_e = -\vec{\nabla}U_{(r,t)}$$

gewährleistet ist.¹⁴

Diese Tatsache erlaubt es die Erweiterung der bisherigen Herleitungen auf den Fall, dass neben dem Feld \vec{F}_e noch ein zeitabhängiges magnetisches Feld $\vec{B}_{(r,t)}$ auftritt, in dem das Teilchen die

¹⁴Hier wurde \vec{F} mit dem Index e versehen, um anzudeuten, dass dieses Kraftfeld im allgemeinen nur Teil eines Gesamtkraftfeldes ist.

zusätzliche Kraft $e\vec{v} \times \vec{B}$ erfährt, wenn es die Ladung e trägt. Die Gesamtkraft, welche ein Teilchen in einem zeitabhängigen elektrischen Feld $\vec{E}_{(r,t)}$ und einem magnetischen Feld $\vec{B}_{(r,t)}$ erfährt, ist gegeben durch:

$$\vec{F} = e\vec{E}_{(r,t)} + e\vec{v}_{(r,t)} \times \vec{B}_{(r,t)} \quad (6.151)$$

Damit nimmt die Bewegungsgleichung ??) die Form an:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \nu \Delta \vec{u} = \frac{e}{m_0} \vec{E}_{(r,t)} + \frac{e}{m_0} \vec{v}_{(r,t)} \times \vec{B}_{(r,t)} \quad (6.152)$$

Es hat sich als zweckmäßig erweisen, anstelle von \vec{B} das zugehörige Vektorpotential \vec{A} , definiert durch:

$$\vec{B}_{(r,t)} \text{rot } \vec{A}_{(r,t)} \quad (6.153)$$

Wegen der allgemeinen Gültigkeit der Maxwellschen Gleichung

$$\text{rot } \vec{E}_{(r,t)} = -\dot{\vec{B}}_{(r,t)}$$

folgt mit Verwendung von 6.153:

$$\text{rot } (\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = \vec{0}$$

Nach Gl. ?? war das elektrische Feld gegeben durch das Induktionsgesetz;

$$\vec{E}_{(r,t)} = -\dot{\vec{A}}_{(r,t)} - \vec{\nabla}\phi_{(r,t)} \quad (6.154)$$

Man betrachte ein System mit einem Teilchen der Ladung e in einem elektrostatischen Potential $\phi_{(r,t)}$. Zur Zeit $t = 0$ werde ein Magentfeld eingeschaltet, das nach der Zeit τ die Stärke $\vec{B}_{(r,t)}$ angenommen hat.

Bei Anwesenheit des Magnetfeldes $\vec{B}_{(r,t)}$ gilt für die Gesamtkraft auf ein Teilchen der Ladung e (LORENTZ-Kraft):

$$\vec{F}_{(r,t)} = e \cdot \vec{E}_{(r,t)} + e \cdot \vec{v}_{(r,t)} \times \vec{B}_{(r,t)} \quad (6.155)$$

Die Bewegungsgleichung ?? nimmt daher die folgende Form an:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{U} \vec{\nabla}) \vec{U} + \nu \delta \vec{U} = \frac{e}{m_0} \vec{E} - \frac{e}{m_0} \vec{v} \times \vec{B} \quad (6.156)$$

15

Bei Abwesenheit eines Magnetfeldes galt allgemein wegen $\text{rot } \vec{v}_{(\vec{r},t)} = 0$ für jedes Integral über

$$\vec{P}_{(\vec{r},t)} = m_0 \vec{v}_{(\vec{r},t)}$$

das keine Wirbellinie von $\vec{v}_{(\vec{r},t)}$ umschließt:

$$\oint \vec{P}_{(\vec{r},t)} d\vec{r} = 0 \quad (6.157)$$

Unabhängig von der Impulsänderung, welche das Teilchen durch die Wirkung von \vec{F} erfährt, bleibt also jedes Ringintegral über \vec{p} , das keine Wirbellinie umschließt, in jedem Augenblick gleich Null.

Schaltet man das Magnetfeld ein, so entsteht wegen des Induktionsgesetzes längs des Integrationsweges eine elektrische Ringspannung:

$$\oint \vec{E}_{(\vec{r}',t)} dr' = -\frac{\partial}{\partial t} \int_F \vec{B}_{(\vec{r}',t)} dr' \quad (6.158)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{A}_{(\vec{r}',t)} dr' \quad (6.159)$$

$$(6.160)$$

Die links stehende Kraft $e\vec{E}$ greift während des Einschaltens zusätzlich zur Kraft $\vec{F}_e = -\vec{\nabla}e\varphi$ an. Sie muss zu einer zeitlichen Änderung des Impulses führen, die zusätzlich zu der von \vec{F}_e bewirkten auftritt:

$$\dot{\vec{P}}_{add} = e\vec{E}$$

bzw.

¹⁵Früher: $= 1/m_0 \cdot F$.

$$\oint \dot{\vec{P}}_{add(\vec{r}',t)} dr' = e \oint \vec{E}_{(\vec{r}',t)} dr'$$

6.157

$$\oint \dot{\vec{P}}_{(\vec{r},t)} dr'$$

Dieser Beziehung gibt man mit Hilfe von **6.158** die folgende Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{P}_{(\vec{r},t)} dr' = -\frac{\partial}{\partial t} \oint e \vec{A}_{(\vec{r},t)} dr'$$

Integriert man diese Gleichung über t von 0 bis τ und nimmt an, dass $\vec{B}_{(\vec{r},t=0)} = 0$ und damit auch $\vec{A}_{(\vec{r},t=0)} = 0$, so bekommt man wegen **6.157**:

$$\oint \vec{P}_{(\vec{r},t)} dr' = - \oint e \vec{A}_{(\vec{r},t)} dr'$$

oder mit $P = m_0 v$

$$\oint \left(\vec{v}_{(\vec{r},t)} + \frac{e}{m_0} \vec{A}_{(\vec{r},t)} \right) dr' = 0$$

Zieht man diese Ringintegrale auf eine Punkt \vec{r} zusammen, so folgt mit Hilfe des **Stokeschen Satzes**:

$$\text{rot} \left[\vec{v}_{(\vec{r},t)} + \frac{e}{m_0} \vec{A}_{(\vec{r},t)} \right] dr' = \vec{0}$$

bzw.¹⁶

$$\text{rot} \vec{v}_{(\vec{r},t)} = -\frac{e}{m_0} \text{rot} \underbrace{\vec{A}_{(\vec{r},t)}}_{=\vec{B}_{(\vec{r},t)}} \quad (6.161)$$

Also muss sich das Feld $\vec{v} + e/m_0 \cdot \vec{A}$ als Gradient einer skalaren Funktion darstellen lassen, die man mit $frm-e\nu\varphi_{(\vec{r},t)}$ bezeichnen kann:

$$\vec{v} + \frac{e}{m_0} \vec{A}_{(\vec{r},t)} = 2\nu \vec{\nabla} \varphi \quad (6.162)$$

¹⁶Mit Ausnahme von Punkten auf Wirbellinien (Quantisierungsachse, aber integrable Unendlichkeit)

Diese Beziehung steht jetzt anstelle der früheren (??):

$$\vec{v} = 2\nu \vec{\nabla} \varphi \quad (\text{siehe } ??) \quad (6.163)$$

Die Gleichung ??

$$\vec{u} = -\nu \vec{\nabla} \ln \rho \quad (6.164)$$

bleibt dagegen von der Anwesenheit des Magnetfeldes unbeeinflusst, da sie als Definitionsgleichung der Diffusionsgeschwindigkeit \vec{u} anzusehen ist. Daher gilt auch unverändert

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \nu \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{v} - \vec{\nabla} (\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (6.165)$$

Ebenso gilt wegen 6.164 unverändert:

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} u^2 \quad (6.166)$$

Anstelle der entsprechenden Beziehung für $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ erhält man in der allgemein gültigen Beziehung

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v}$$

jetzt

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \stackrel{??}{=} \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 + \frac{e}{m_0} (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.167)$$

Führt man die Gleichungen 6.166 und 6.167 in 6.156 ein und deminiert \vec{E} mit Hilfe von 6.154, so ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{v} + \frac{e}{m_0} \vec{A} \right) = -\frac{1}{m_0} \vec{\nabla} \underbrace{U}_{U=e\phi} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 + \frac{1}{2} \vec{\nabla} u^2 - \nu \Delta \vec{u} \quad (6.168)$$

Multipliziert man ?? und subtrahiert 6.165, so ergibt sich die zu den früheren Ergebnis (ohne Magnetfeld) analoge *komplexe Bewegungsgleichung*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{u} + i \left(\vec{v} + \frac{e}{m_0} \vec{A} \right) \right) = \frac{i}{2} \vec{\nabla} (-\vec{u} + i\vec{v})^2 + i\nu \vec{\nabla} (\operatorname{div} (-\vec{u} + i\vec{v})) - \frac{i}{m_0} \vec{\nabla} U \quad (6.169)$$

Man beachte, dass wegen Gl. 6.163 und 6.164 gilt

$$2\nu \vec{\nabla} \ln \psi = -\vec{u} + i \left(\vec{v} + \frac{e}{m_0} \vec{A} \right) \quad (6.170)$$

wenn man wie in ?? setzt, dass

$$\psi(\vec{r},t) = \sqrt{\rho_{(\vec{r},t)}} \cdot e^{i\varphi_{(\vec{r},t)}}$$

Mit Hilfe von 6.170 lässt sich die linke Seite von 6.169 schreiben:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial}{\partial t} 2\nu \ln \psi \right) = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{m_0 \psi} 2m_0 \nu \frac{\partial}{\partial t} \psi \right) \quad (6.171)$$

Für die rechte Seite von 6.169 verwendet man 6.170 in der Form:

$$-\vec{u} + i\vec{v} = 2\nu \ln \psi - z \frac{e}{m_0} \vec{A}$$

bzw.

$$(-\vec{u} + i\vec{v})^2 = 4\nu^2 (\vec{\nabla} \ln \psi)^2 - 4\nu i \frac{e}{m_0} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \ln \psi - \left(\frac{e}{m_0} \vec{A} \right)^2$$

Also wird:

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} (-\vec{u} + i\vec{v})^2 = 2\nu^2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \ln \psi)^2 - 2i\nu \frac{e}{m_0} \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \ln \psi) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left(\frac{2}{m_0} \vec{A} \right)^2$$

wegen

$$\operatorname{div} (\vec{\nabla} \ln \psi) = \frac{1}{\psi} \delta \psi - (\vec{\nabla} \ln \psi)^2$$

kann man für den zweiten Term auf der rechten Seite von 6.169 schreiben:

$$\nu \cdot \vec{\nabla} (-\vec{u} - iv)^2 + i\nu \cdot \vec{\nabla} (\operatorname{div} (-\vec{u} - iv))^2 + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\psi} 2\nu^2 \Delta \psi - i\nu \frac{e}{m_0} \psi \Delta \vec{A} \right)$$

Also wird

$$\frac{i}{2} \vec{\nabla} (-\vec{u} - iv)^2 + i\nu \cdot \vec{\nabla} (\operatorname{div} (-\vec{u} - iv)) = -i\vec{\nabla} \left[\frac{1}{m_0 \psi} \left(2\nu^2 m_0 \Delta + i\nu e (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) i2\nu r (\vec{A} \vec{\nabla}) + \frac{1}{2m_0} (e\vec{A})^2 \right) \psi \right]$$

Dieser Ausdruck lässt sich mit Verwendung von

$$\vec{P} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

und

$$\nu = \frac{\hbar}{2m_0}$$

in folgende Form schreiben:

$$\frac{i}{2} \vec{\nabla} (-\vec{u} - iv)^2 + i \frac{\hbar}{2m_0} \vec{\nabla} (\operatorname{div} (-\vec{u} - iv)) = -i\vec{\nabla} \left[\frac{1}{\psi} \frac{(\vec{P} - e\vec{A})^2}{2m_0} \psi \right]$$

¹⁷

Also sind die linke und die rechte Seite von 6.169 als Gradient einer skalaren Funktion darstellbar und man erhält aufgrund der gleichen Schlussfolgerung wie in Abschnitt ?? nach Fortlassen des Gradienten und Multiplikation mit ψ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{(\vec{r},t)} = \left\{ \frac{(\vec{P} - e\vec{A}_{(\vec{r},t)})^2}{2m_0} + \mathbf{U}_{(\vec{r},t)} \right\} \psi_{(\vec{r},t)}$$

Dies ist die SCHRÖDINGER-Gleichung bei Anwesenheit eines Magnetfeldes. Die wird üblicherweise in folgender Form geschrieben:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{(\vec{r},t)} = \mathbb{H} \psi_{(\vec{r},t)} \quad (6.172)$$

¹⁷Dies ist die rechte Seite von 6.169 bis auf den Term $-\frac{i}{m_0} \vec{\nabla} \mathbf{U}$.

mit

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2m_0} \vec{\mathbb{P}}'^2 + \mathbf{U}_{(\vec{r},t)} \quad (6.173)$$

und

$$\vec{\mathbb{P}}' = \vec{\mathbb{P}} - e\vec{A}_{(\vec{r},t)} \quad (6.174)$$

To Do 44 (Formel falsch):

Die elektrischen Stromdichte nimmt mit Verwendung von 6.163 und $2\nu = \frac{\hbar}{2m_0}$ die Form an:

$$\vec{j}_e = e\rho_{(\vec{r},t)}\vec{v}_{(\vec{r},t)} = \frac{e}{m_0} \cdot |\psi_{(\vec{r},t)}|^2 \cdot \left(\underbrace{\hbar\vec{\nabla}\varphi_{(\vec{r},t)} - e\vec{A}_{(\vec{r},t)}}_{\textcolor{red}{6.163=}_0\nu} \right)$$

Wegen

$$\nabla\psi = \psi i\vec{\nabla}\varphi + \psi \frac{1}{|\psi|} \vec{\nabla}\psi$$

mit

$$\psi = |\psi| e^{i\varphi}$$

ist also

$$\psi^* (-i\hbar\vec{\nabla}) \psi = |\psi|^2 \hbar\vec{\nabla}\varphi - i\hbar|\psi|\vec{\nabla}|\psi|$$

To Do 45 (Formel falsch): Formel überprüfen.

und entsprechend:

$$\psi(i\hbar\vec{\nabla})\psi^* = |\psi|^2 \hbar\vec{\nabla}\varphi + i\hbar|\psi|$$

Demnach ist

$$|\psi|^2 \hbar\vec{\nabla}\varphi = \frac{\hbar}{2i} (\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*)$$

Man kann damit der elektrischen Stromdichte die folgende Form geben:

$$\vec{j}_e = \frac{e\hbar}{2im_0} (\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) - \underbrace{\frac{e^2}{m_0}}_{\text{dielektrischer Anteil der Stromdichte}} \underbrace{|\psi|^2 \vec{A}}_{(6.175)}$$

oder auch

$$\vec{j}_e = \frac{e}{2m_0} (\psi^*\vec{P}\psi + \psi\vec{P}\psi^*) \quad (6.176)$$

18

6.5.1. Das Wasserstoffatom im homogenen Magentfeld

Der normale Zeeman-Effekt

Das Vektorpotential eines homogenen Magnetfeldes kann in folgender Form dargestellt werden:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B}_0 \times \vec{r}$$

wobei \vec{B}_0 für das magentische Feld steht. In Kugelkoordinaten nimmt dieser Ausdruck die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \vec{A}_\varphi &= \frac{1}{2} \vec{B}_0 r \sin \theta d\vec{e}_\theta \\ \vec{A}_r &= 0 \\ \vec{A}_\theta &= 0 \end{aligned}$$

¹⁸Rayleigh-Streuung : $S \propto |\vec{p}| \propto \omega^4$

sofern die z-Achse mit der Richtung von \vec{B}_0 zusammenfällt.

Also wird:

$$-\frac{e}{m_0} \vec{A} \vec{\mathbb{P}} = i \frac{e\hbar}{2m_0} B_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} \stackrel{??}{=} i\mu_b B_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (6.177)$$

Für hinreichend schwache Magnetfelder ($B_0 < 10$ T) darf näherungsweise $(\mathbb{P} - eA)^2 = \mathbb{P} - 2eA\mathbb{P}$ gesetzt werden. Daher hat man für $\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ benutzt. Im Rahmen dieser Näherung tritt dann in der SCHRÖDINGER-Gleichung des H-Atoms nur der Term **6.177** zusätzlich auf.

Aus dem Ansatz

$$\psi_{(r,\theta,\varphi)} = \mathbf{R}_{(r)} \Theta_{(\theta)} e^{im\varphi}$$

nimmt dieser Zusatzterm die folgende Form an:

$$-\frac{e}{m_0} \vec{A} \vec{\mathbb{P}} \psi_{(r,\theta,\varphi)} = -m\mu_B B_0 \psi_{(r,\theta,\varphi)}$$

Er liefert also zur Radialgleichung ?? nur einen Beitrag der additiv zum Term $-E\mathbf{R}_{(r)}$ hinzukommt, so dass beide Ausdrücke zu

$$-E\mathbf{R}_{(r)} = -(E - m\mu_B B_0) \mathbf{R}_{(r)}$$

zusammengefasst werden können. Die übrige Rechnung läuft dann wie zuvor ohne Magnetfeld und man das Ergebnis sofort hinschreiben:

$$E'_n = -\frac{1}{n} \cdot 1\text{Ryd.} + m\mu_B B_0 \quad (6.178)$$

Die m-Entartung aller Niveaus wird also aufgehoben. Da die Lösungen der Schrödinger-Gleichung mit dem Störterm **6.177** identisch mit sind mit denen des ungestörten Systems, bleiben die im Abschnitt ?? hergeleiteten Auswahlregeln für optische Dipolübergänge erhalten. Demnach sind für den Übergang $4p \rightarrow 3d$ ¹⁹ die in Abb. ?? gezeigten Interkombinationen möglich.

To Do 46 (Abbildung fehlt):

¹⁹ 1. Linie der RITZ-PASCHEN-Serie

Anmerkung 27:

Man beachte: Von jedem der $3p$ -Niveaus sind drei entsprechende Übergänge zu $\Delta m = -1$ möglich.

Für die Frequenzen des ausgestrahlten Lichtes gilt für $\Delta m = 0$:

$$\omega_{n'n} = \frac{1}{\hbar} (E'_n - E'_{n'}) = \frac{1}{\hbar} [(E_{n'} + m\mu_B B_0) - (E_n + m\mu_B B_0)] - \omega_{n'n}^0$$

wobei $\omega_{n'n}^0$ die Frequenz ohne Magnetfeld ist.

Emissionslinien zu $\Delta m = +1$ verschieben sich einheitlich um $+\frac{1}{\hbar}\mu_B B_0$ und solche zu $\Delta m = -1$ um $-\frac{1}{\hbar}\mu_B B_0$.

Dies bedeutet, dass jeder der Linien im **Wasserstoffspektrum** in drei Linien aufspaltet, wobei zwei Linien symmetrisch zu einer unverschobenen Linie sind. Diese drei Linien werden *normales ZEEMANNsches Triplett* genannt.

To Do 47 (Fehlender Text): Hier fehlt noch die Anmerkung aus dem Skript.

Quantisierungsachse

Es stellt sich nun die Frage, was dafür spricht – wie bisher geschehen – die Quantisierungsachse des betrachteten Atoms parallel zu \vec{B}_0 anzunehmen.

Das magnetische Moment eines Elektrons in einem Zustand $\psi_{nlm}(\vec{r})$ war nach ?? gegeben durch:

$$\langle \vec{M} \rangle = m\mu_B \cdot \vec{e}_z$$

Die Orientierungsenergie dieses Moments im Feld \vec{B}_0 berechnet sich zu

$$E_{m\mu} = -\langle \vec{M} \rangle \vec{B}_0 = -|m|\mu_B B_0 \cos \gamma$$

wobei $\gamma \angle (\langle \vec{M} \rangle, \vec{B}_0)$. Die Gesamtenergie in diesem Zustand ist also:

$$\tilde{E}_n = -\frac{1}{n^2} \text{Ryd} - |m|\mu_B B_0 \cos \gamma$$

Nun sind Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung solche, die den Erwartungswert von \mathbb{H}

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2m_0} (\vec{\mathbb{P}} - e\vec{A})^2 + U_{(r)}$$

zum Extremum machen.

Wegen

$$\mathbb{H} = \vec{E}_n \xrightarrow{\text{Extremum}} E_n^{extr.} = -\frac{1}{n^2} \text{Ryd} + m\mu_B B_0$$

Wegen $m < 0$ einer Orientierung von $\langle \vec{M} \rangle$ parallel zu \vec{B}_0 entspricht und $m > 0$ einer Orientierung antiparallel zu \vec{B}_0 .

Die mit den Übergängen zu $\Delta m = 0$ bzw. $\delta m \pm 1$ verbinden Linien des LORENTZSchen Tripletts zeigen bei Beobachtung in verschiedenen Richtungen zum magnetischen Feld bestimmte Polarisierungen

To Do 48 (Abbildungen fehlen.): Bild 1, Bild 2, Bild 3

Nach den bisher gemachten Näherungen hat man den Term $\frac{e^2}{m_0} \vec{A}^2$, der sich aus $\frac{\vec{\mathbb{P}}}{e\vec{A}} 2m_0$ als quadratischer Form ergibt, bisher vernachlässigt. Dies gilt für Felder > 10 Tesla nicht mehr. Nach **6.175** gilt:

$$\vec{\alpha}_e = \frac{e\hbar}{2im_0} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) - \frac{e^2}{m_0} \vec{A}_{(r)} \cdot |\psi_{(r)}|^2$$

Im homogenen Magnetfeld ($\vec{B}_0 \parallel \vec{e}_z$) war

$$\begin{aligned} \vec{A}_{(r)} &= \vec{A}_{(\theta)} = 0 \\ \vec{A}_{\varphi} &= \frac{1}{2} B_0 r \sin \varphi \vec{e}_{\varphi} \end{aligned}$$

Betrachtet man einen Zustand mit $m = 0$, so verschwindet der obige Klammerausdruck für $\vec{\alpha}_e$, weil ψ in diesem Fall reellwertig wird.

Man erhält also:

$$\vec{\alpha}_e = -\frac{e}{\hbar} \mu_B B_0 r \sin \theta |\psi_{nl0(r)}|^2 \vec{e}_{\varphi} = \vec{J}_{\varphi}$$

Bildet man wie im Abschnitt ?? aus \vec{J}_φ das magnetische Moment, so wird:

$$\langle \vec{M} \rangle = \mu_B B_0 \frac{e}{\hbar} G_{nl0} \vec{e}_z$$

mit

$$G_{nl0} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\psi_{nl0(r,\theta,\varphi)}|^2 r^4 dr \cdot \sin^2 \theta d\theta \cdot d\varphi$$

und daher ergibt sich für die Gesamtenergie:

$$\begin{aligned} E_{nl0} &= E_{nl0}^{\text{ungeb.}} - \langle M \rangle \cdot B_0 \\ &= E_{nl0}^{\text{ungeb.}} + \frac{e}{\hbar} \mu_B B_0^1 G_{nl0} \end{aligned}$$

To Do 49 (Abbildung fehlt):

Ein entsprechender Effekt (Zusatzeffekt) tritt auch bei den Zuständen zu $m \neq 0$ auf, so dass sich der oben eingezeichnete, resultierende Verlauf als Funktion von B_0 ergibt.

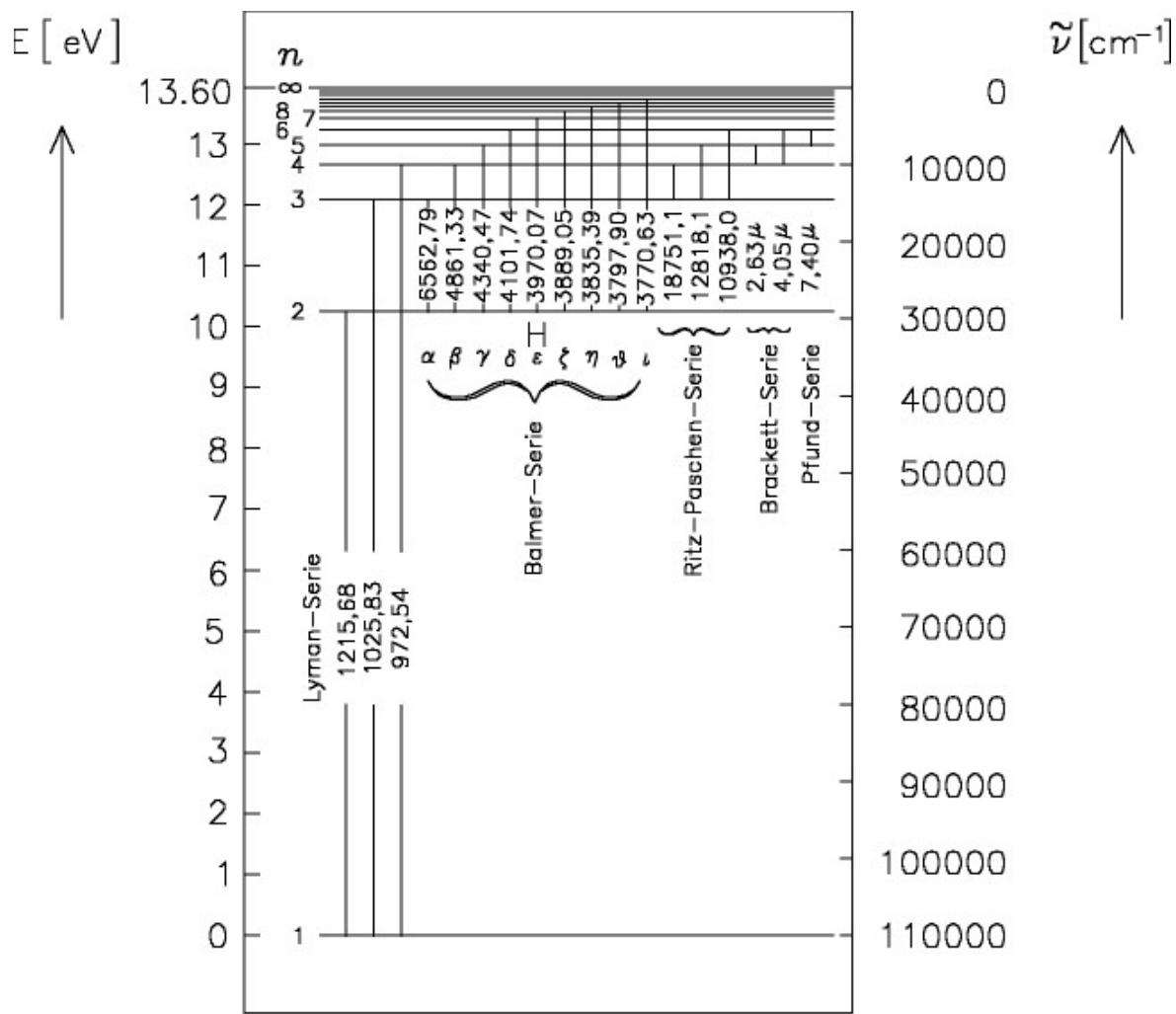


Abbildung 6.19.: Termschema des Wasserstoffatoms.

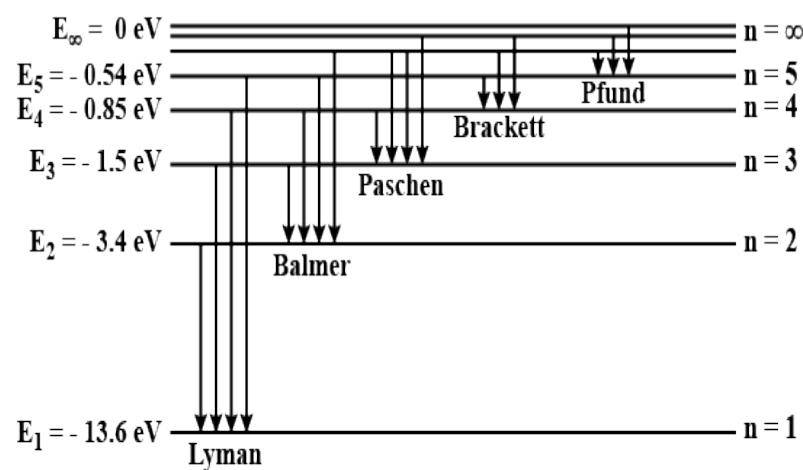


Abbildung 6.20.: Energieschema des Wasserstoffatoms.

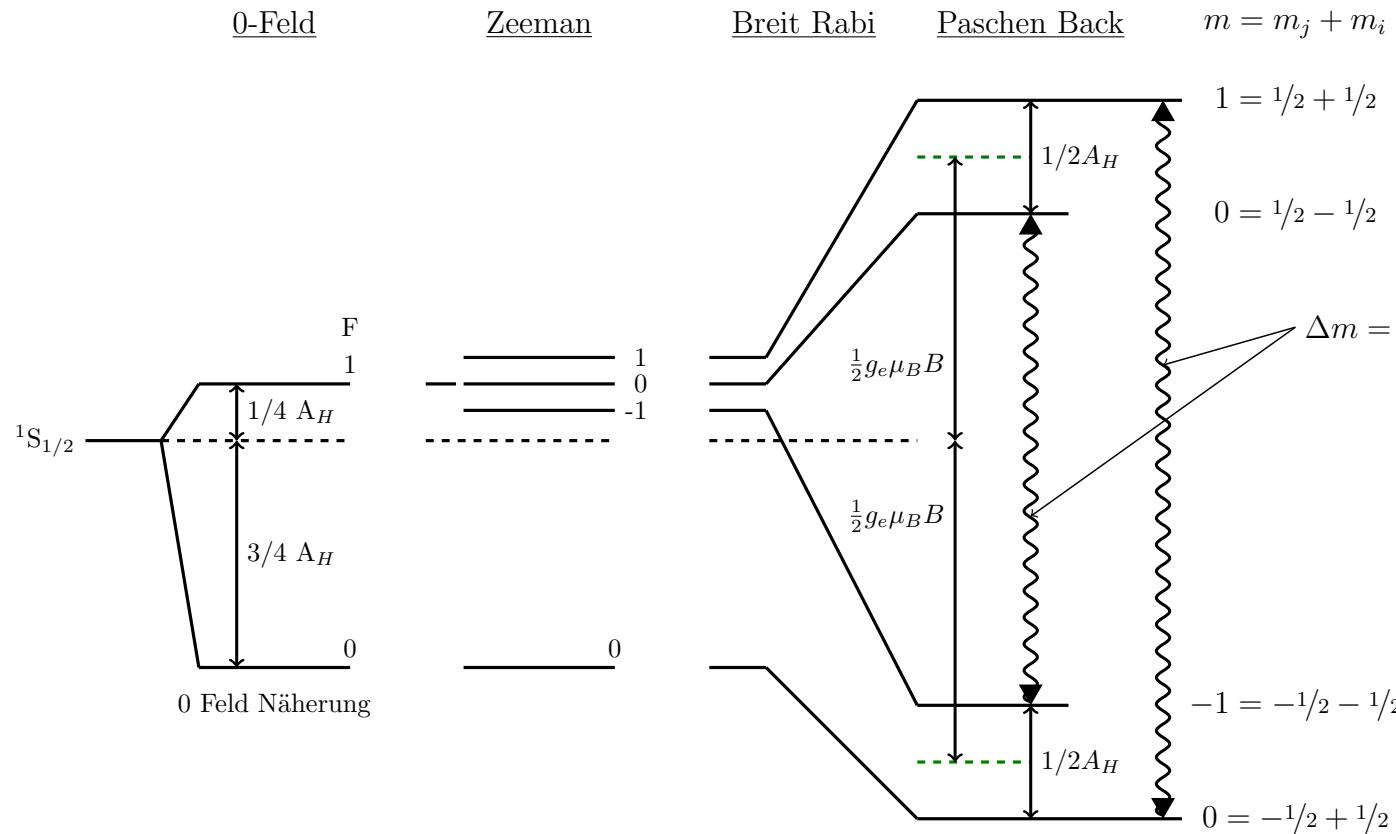


Abbildung 6.21.: Aufspaltung der Wasserstofflinien im magnetischen Feld.

?? Abb. fehlt noch

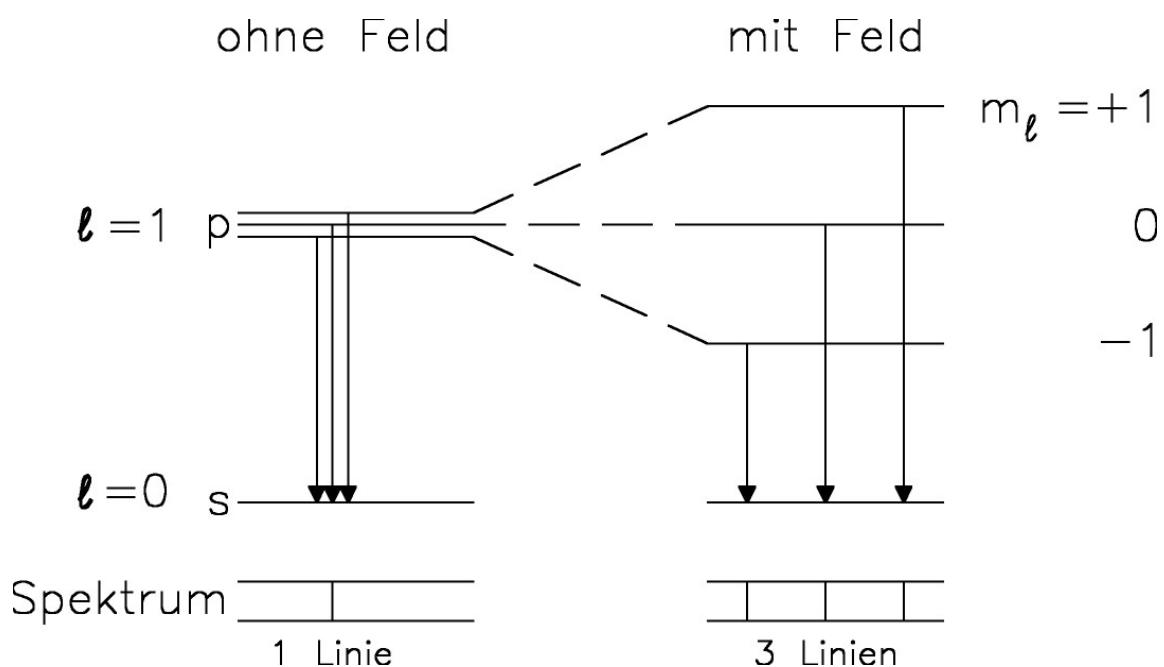


Abbildung 6.22.: Der *normale* Zeeman-Effekt entsteht durch Wechselwirkung mit dem Magnetfeld des Elektronenbahndrehimpulses des Elektrons. Die Aufspaltung sehr klein: $\mu_B = 0,4669 \text{ cm}^{-1} T^{-1}$ ($1T = 10.000$ Gauß), z. B.: $2T$ entsprechend etwa 1 cm^{-1} Aufspaltung.

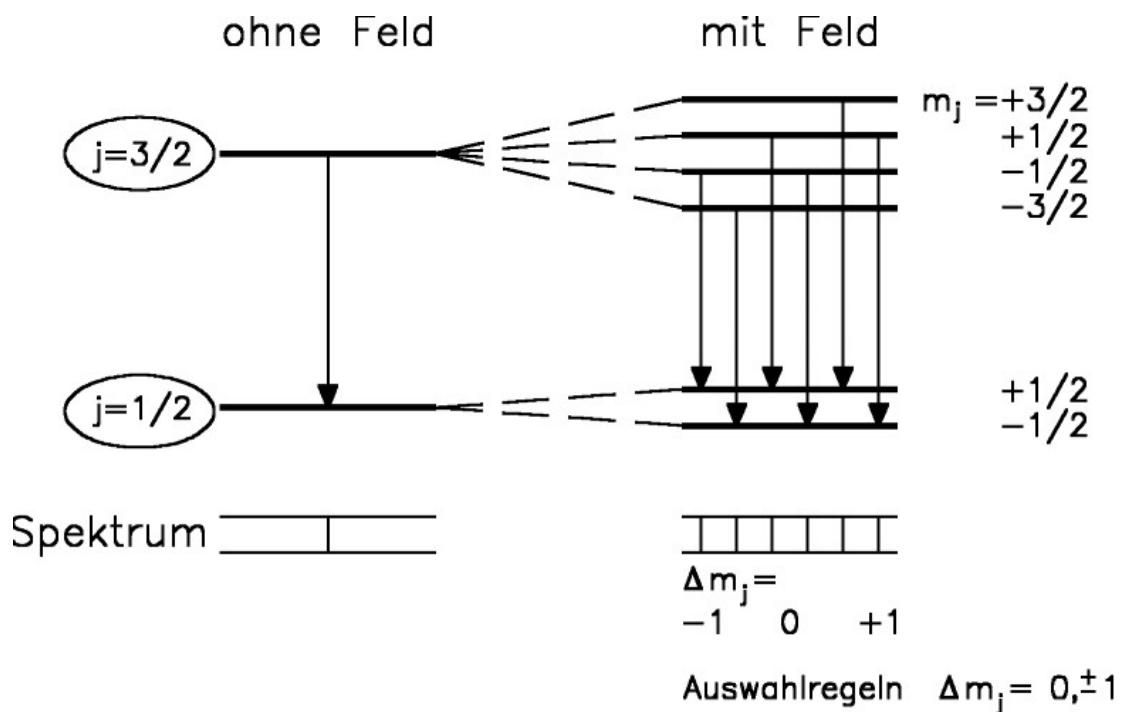


Abbildung 6.23.: Anormeler Zeemann-Effekt: Der Zustand mit dem höheren Gesamtdrehimpuls j ist bei Spin-Bahn-Kopplung auf Grund der Orientierung der magnetischen Momente immer der Zustand mit der höheren Energie. Die Abbildung zeigt den Übergang zwischen dem energieärmsten oberen ($j = 3/2$) und unteren ($j = 1/2$) Zustand und die Aufspaltung im Magnetfeld. Die beobachteten spektralen Übergänge sind durch Pfeile gekennzeichnet.

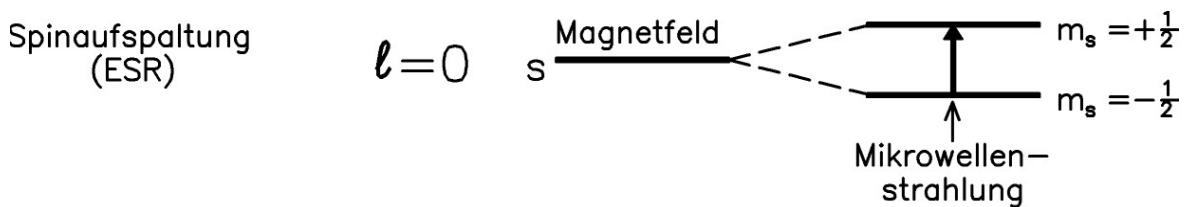


Abbildung 6.24.: Wenn das äußere magnetische Feld sehr stark ist, dann entkoppeln die magnetischen Momente von Bahndrehimpuls und Spin und orientieren sich unabhängig voneinander zum äußeren Feld: Absorptionen zwischen den Spin- und Bahndrehimpulsniveaus bei unterschiedlichen Wellenlängen. Die Absorption zwischen den Spinniveaus liegt im Mikrowellenbereich für Magnetfeldstärken im Kilogaußbereich. Die Elektronenspinresonanz (ESR-)Spektroskopie dient zum Nachweis von Teilchen mit ungepaartem Spin (Radikale).

7. Der Teilchenspin

In diesem Abschnitt wird eine Herleitung des Teilchenstocks im Rahmen der Stochastischen Mechanik gegeben. Die allgemeinen Aspekte wird im Abschnitt ?? beschrieben ebenso wie der experimentelle Nachweis (siehe Abb.?? und ??).

Man betrachte ein Teilchen der Ruhemasse m_0 in einem zentralesymmetrischen Potential und beschränke sich zunächst auf Zustände mit $l = 0$. Es sei also:

$$Psi_{(\vec{r})} = \psi_{n00(\vec{r})}$$

Man denke sich willkürlich eine Achse durch das Potentialzentrum gelegt und identifiziere diese mit der z-Achse. Wenn das Teilchen an eine Stelle \vec{r} gelangt ist, besitzt es dort einen bestimmten, wenn auch nicht angebbaren Impuls \vec{p} . Die φ -Komponente von \vec{p} sei p_φ ¹

Man sammelt aus der $\psi_{(\vec{r})}$ definierenden Schar alle diejenigen Scharelemente aus, bei denen man das Teilchen an verschiedenen Stellen des Raumes mit positivem p_φ hat. Diese Elemente sollen die Menge M_\uparrow definieren. Entsprechend sei M_\downarrow gebildet. Die relative Anzahl der Elemente zu gleichem \vec{r} ist die Wahrscheinlichkeit $W_{(\vec{r})} = w_{(\vec{r})} d^3r$ mit der das Teilchen im Volumenelement d^3r um \vec{r} herum angetroffen wird.

Es gilt dann also:

$$w_{(\vec{r})} = w_{\uparrow(\vec{r})} + w_{\downarrow(\vec{r})} \quad (7.1)$$

Daraus folgt *nicht*:

$$\psi_{(\vec{r})} = \psi_{\uparrow(\vec{r})} + \psi_{\downarrow(\vec{r})} \quad (\text{gilt nicht!})$$

denn es ist

¹Man hat hier, wie zuvor, ein spezifisches Polarkoordinatensystem mit dem Ursprung im Potentialzentrum und mit der Achse $\varphi = 0$ parallel zur z-Achse eingeführt.

$$\psi_{(\vec{r})}^* \psi_{(\vec{r})} = \underbrace{\psi_{\uparrow(\vec{r})}^* \psi_{\uparrow(\vec{r})}}_{w_{\uparrow(\vec{r})}} + \underbrace{\psi_{\downarrow(\vec{r})}^* \psi_{\downarrow(\vec{r})}}_{w_{\downarrow(\vec{r})}} + \psi_{\uparrow(\vec{r})}^* \psi_{\downarrow(\vec{r})} + \psi_{\downarrow(\vec{r})}^* \psi_{\uparrow(\vec{r})}$$

Andererseits wurde $\vec{\psi}_{\uparrow(\downarrow)(\vec{r})}$ gerade als ein Zustand konstruiert zu dem ein positiver (bzw. negativer) Drehimpuls gehört. Diesen von $\langle \mathbb{L} \rangle$ verschiedenen Drehimpuls des Teilchens im Zustand $\vec{\psi}_{\uparrow(\downarrow)(\vec{r})}$, des als Eigenzustand realisiert werden kann, wird als *Spin* des Teilchens bezeichnet. Aufgrund des magnetomechanischen Parallelismus ist zu erwarten, dass mi diesem Spin ein elektromagnetisches Moment verbunden ist.

Später wird gezeigt, dass dies gleich dem **Bohrsches Magneton** ist:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_0} \quad (7.2)$$

Ohne äußeres Magnetfeld sind diese beiden Zustände $\psi_{\uparrow(\downarrow)(\vec{r})}$ miteinander entartet, d. h. jede Linearkombination aus ihnen ist wieder eine Lösung der Schrödinger-Gleichung. Bei Anwesenheit eines Magnetfeldes $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$ ergibt mit 7.2 für die Dichte $U_{mag(\vec{r})}$ der *Spinentartungsenergie*:

$$U_{mag(\vec{r})} = \mu_B B_z \left(\psi_{\uparrow(\vec{r})}^* \cdots \psi_{\uparrow(\vec{r})} - \psi_{\downarrow(\vec{r})}^* \cdots \psi_{\downarrow(\vec{r})} \right) \quad (7.3)$$

Dieser Ausdruck lässt sich mit der Matrix

$$\bar{\bar{B}} = \begin{pmatrix} B_z & 0 \\ 0 & -B_z \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

in die folgende Form schreiben

$$U_{mag(\vec{r})} = \mu_B B_z \left(\vec{\psi}_{(\vec{r})}^* \bar{\bar{B}} \vec{\psi}_{(\vec{r})} \right) \quad (7.5)$$

Entsprechend kann

$$\psi_{\uparrow(\vec{r})}^* \mathbb{H} \psi_{\uparrow(\vec{r})} + \psi_{\downarrow(\vec{r})}^* \mathbb{H} \psi_{\downarrow(\vec{r})}$$

in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\vec{\psi}_{(\vec{r})}^* \mathbb{H} \vec{\psi}_{(\vec{r})}$$

mit

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2m_0} (\vec{\mathbb{P}} - e\vec{\mathbb{A}})^2 + U_{(\vec{r})}$$

Also wird der Erwartungswert der Gesamtenergie bei Anwesenheit eines Magnetfeldes:

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{H}' \rangle &= \int U_{mag(\vec{r})} d^3r \\ \rightarrow \langle \mathbb{H}' \rangle &= \int \vec{\psi}_{(\vec{r})}^* \{ \mathbb{H} \bar{1} - \mu_B \bar{B} \} \cdot \vec{\psi}_{(\vec{r})} d^3r\end{aligned}$$

Die Minimierung von $\langle \mathbb{H}' \rangle$ unter Konstanthaltung von

$$\int \vec{\psi}_{(\vec{r})}^* \vec{\psi}_{(\vec{r})} d^3r = \int (|\vec{\psi}_{\uparrow(\vec{r})}|^2 + |\vec{\psi}_{\downarrow(\vec{r})}|^2) d^3r = 1 \quad (7.6)$$

liefert

$$(\mathbb{H} \bar{1} - \mu_B \bar{B}) \vec{\psi}_{(\vec{r})} = E \vec{\psi}_{(\vec{r})} \quad (7.7)$$

mit

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2m_0} (\vec{\mathbb{P}} - e\vec{A}_{(\vec{r})})^2 + U_{(\vec{r})}$$

To Do 50 (Abbildung fehlt): Abbildung Spin fehlt Link zitieren: <http://www7b.biglobe.ne.jp/kcy05t/spin.html>

1. Widerspruch: Es gibt Ströme, aber keine bewegten Ladungen.
2. Widerspruch: Das Elektron dreht sich nicht, hat aber trotzdem einen Spin.
3. Widerspruch: Spin wird in Einheiten des Drehimpulses, ist aber kein Spin-Drehimpuls.

Wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ definiert sind durch:

$$\begin{aligned}\alpha &= e^{\frac{i}{2}(\psi+\varphi)} \\ \beta &= ie^{\frac{i}{2}(\psi-\varphi)} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ \gamma &= ie^{\frac{i}{2}(\psi+\varphi)} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ \delta &= e^{-\frac{i}{2}(\psi+\varphi)} \cdot \cos \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

Dann gilt hier zunächst einmal:

$$\overline{\bar{Q}}\overline{\bar{Q}}^+ = \overline{\bar{Q}}\overline{\bar{Q}} = 1$$

und es stellt sich heraus, dass

$$\overline{\bar{P}}'_{(x',y',z')} = \overline{\bar{Q}}\overline{\bar{P}}\overline{\bar{Q}}^+$$

genau die gleiche Transformation $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$ beschreibt wie

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \overline{\bar{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ferner: Beschreiben $\overline{\bar{A}}_1$ und $\overline{\bar{A}}_2$ bzw. $\overline{\bar{Q}}_1$ und $\overline{\bar{Q}}_2$ nacheinander ausgeführte Koordinatendrehungen und ist

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \overline{\bar{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

so gilt

$$\overline{\bar{A}} = \overline{\bar{A}}_1 \cdot \overline{\bar{A}}_2$$

und entsprechend

$$\bar{\bar{Q}} = \bar{\bar{Q}}_1 \cdot \bar{\bar{Q}}_2$$

Die Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ heißen

CAYLEY-KLEINSche Parameter.

Nach 7.4 war

$$\bar{\bar{B}} = B_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_z & 0 \\ 0 & -B_z \end{pmatrix}$$

Entsprechend gilt für den Punkt $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

7.0.1. Die Cayley-Kleinschen Parameter und die Paulischen Spinmatrizen

Die modifizierte Schrödinger-Gleichung (7.7) ist in ihrer Form spezialisiert durch die Annahme:

$$\vec{B} = B_z \vec{e}_z$$

wobei \vec{e}_b gleichzeitig die Richtung des Spins bezeichnet. Man kann im folgenden von dieser Spezialisierung befreien. Dazu denke man sich das Koordinatensystem gedreht. Diese Drehung kann durch die drei sog. Euler-Winkel beschrieben werden. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \bar{\bar{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}} \bar{\bar{C}} \bar{\bar{D}}$

Dabei ist

$$\bar{\bar{D}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Drehung um die ursprüngliche z-Achse.

Ferner

$$\bar{\bar{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

das Verkippen der z-Achse längs der neuen x-Achse um den Winkel θ .

Und schließlich

$$\bar{\bar{B}} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Drehung der neuen (ξ', η') -Achsen in ihrer durch θ festgelegten Ebene um den Winkel ψ .

Von FELIX KLEIN stammt nun folgende Überlegung:

Wenn

$$\bar{\bar{P}} := \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

und

$$\bar{\bar{Q}}_{(\theta, \varphi, \psi)} := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

und

$$\bar{\bar{Q}}_{(\theta, \varphi, \psi)}^+ := \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

ist.²

$$\bar{\bar{P}} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

²Transponent und Konjugent

Man kann jetzt fordern, dass sich $\bar{\bar{B}}$ unter Drehung des Koordinatensystems wie der Vektor \vec{B} transformieren soll, d. h. analog zu $\bar{\bar{P}}$:

$$\bar{\bar{B}}' = \bar{\bar{Q}} \bar{\bar{B}} \bar{\bar{Q}}^+$$

Entsprechend muss bei dieser Koordinatendrehung $\vec{\psi}_{(r)} \rightarrow \vec{\psi}'_{(r)}$ übergehen, so dass

$$\vec{\psi}^+ \bar{\bar{B}} \vec{\psi} = \vec{\psi}'^+ \bar{\bar{B}}' \vec{\psi}'$$

³ gilt, d. h. es muss natürlich verlagt werden, dass sich die magnetische Wechselwirkung zwischen Spinnmoment und dem magnetischen Feld \vec{B} nicht ändert, wenn man die Lage des Koordinatensystems durch Drehung verändert. Man kann nun behaupten, dass folgender Zusammenhang gilt:

$$\vec{\psi}' = \bar{\bar{Q}} \vec{\psi}_{(r)}$$

⁴

und

$$\vec{\psi}'^+ = [\bar{\bar{Q}} \vec{\psi}_{(r)}]^+ = \vec{\psi}^+ \bar{\bar{Q}}^+$$

dann wird

$$\vec{\psi}^+ \bar{\bar{Q}}' \vec{\psi}' = \vec{\psi}^+ \bar{\bar{Q}}' \bar{\bar{B}}' \bar{\bar{Q}} \vec{\psi}$$

To Do 51 (Formel falsch): Formel falsch (Indices)

Da nun

$$\bar{\bar{B}} = \bar{\bar{Q}}^+ \bar{\bar{B}}' \bar{\bar{Q}}$$

gelten sollte, folgt hieraus:

³Die Wechselwirkungsenergie darf sich nicht durch die Koordinatentransformation ändern (Invarianz).

⁴Transponent und kongruent.

$$\bar{\bar{Q}} \bar{\bar{B}} \bar{\bar{Q}}^+ = \underbrace{\bar{\bar{Q}} \bar{\bar{Q}}^+}_{\bar{1}} \bar{\bar{B}}' \underbrace{\bar{\bar{Q}} \bar{\bar{Q}}^+}_{\bar{1}}$$

Da nun nach den obigen Gleichungen

$$\psi^+ \bar{\bar{B}}' \psi' = \bar{\psi}^+ \bar{\bar{B}} \bar{\psi}$$

zu verlangen ist, muss gelten:

$$\bar{\bar{Q}}^+ \bar{\bar{B}}' \bar{\bar{Q}} = \bar{\bar{B}}$$

bzw.

$$\bar{\bar{Q}} \bar{\bar{Q}}^+ \bar{\bar{B}}' \bar{\bar{Q}} \bar{\bar{Q}}^+ = \bar{\bar{Q}} \bar{\bar{B}} \bar{\bar{Q}}'$$

Wenn sich also $\bar{\bar{B}}$ wie der Vektor \vec{B} unter Koordinatendrehung transformieren soll und die magnetische Wechselwirkungsenergie unter dieser Drehung invariant bleiben soll, dann muss sich $\vec{\psi}_{(r)}$ in der Form

$$\vec{\psi}'_{(r)} \bar{\bar{Q}} \vec{\psi}_{(r)} \tag{7.11}$$

transformieren.

Für eine allgemeine Lage des Koordinatensystems hat $\bar{\bar{B}}$ die zu (7.8) analoge Form

$$\bar{\bar{B}} = \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_z \\ B_x + iB_z & -B_z \end{pmatrix}$$

Diese Matrix lässt sich in die entsprechende Summe zerlegen:

$$\bar{\bar{B}} = B_x \bar{\sigma}_x + B_y \bar{\sigma}_y + B_z \bar{\sigma}_z$$

mit

$$\bar{\bar{\sigma}}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

(7.15)

Diese Matrizen werden in der Quantenmechanik als PAULISCHE-Spinmatrizen bezeichnet.

Formal kann man ?? auch in der Form schreiben:

$$\bar{\bar{B}} = \vec{B} \cdot \vec{\sigma}$$

Wobei $\vec{\sigma}$ ein Vector ist, dessen Komponente die **Pauli-Matrizen** sind.

Danach kann man **7.7** in der folgenden Form schreiben:

$$\left(\mathbb{H}\bar{1} - \mu_B \vec{B} \vec{\sigma} \right) \vec{\psi}_{(r)} = E \vec{\psi}_{(r)} \quad (7.16)$$

Diese Gleichung wird als *nichtrelativistische Pauli-Gleichung* bezeichnet.

$$\mathbb{J} = \mathbb{L} + \mathbb{S} \quad (7.17)$$

mit

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{s}}_1 \\ \bar{\bar{s}}_2 \\ \bar{\bar{s}}_3 \end{pmatrix}$$

und

$$\bar{\bar{s}}_i = \frac{\hbar}{2} \hat{\bar{\bar{\sigma}}}_i$$

Man beachte nun folgenden Zusammenhang:

Sei \mathbb{A} ein Operator in der nichtrelativistischen Quantenmechanik (z. B. $\vec{\mathbb{L}}$, $\vec{\mathbb{P}}$), so folgt für die Zeitabhängigkeit seines Erwartungswertes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbb{A}_{(\vec{r},t)} \rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \int \psi_{(\vec{r},t)}^* \mathbb{A}_{(\vec{r},t)} \psi_{(\vec{r},t)} d^3 r \\ &= \underbrace{\left\langle \frac{\partial \mathbb{A}_{(\vec{r},t)}}{\partial t} \right\rangle}_{i\hbar} + \int \dot{\psi}_{(\vec{r},t)}^* \mathbb{A}_{(\vec{r},t)} \psi_{(\vec{r},t)} d^3 r + \int \psi_{(\vec{r},t)}^* \mathbb{A}_{(\vec{r},t)} \dot{\psi}_{(\vec{r},t)} d^3 r\end{aligned}$$

In den letzten beiden Integralen ersetze man die Zeitableitung der Wellenfunktion mit Hilfe der Schrödingergleichung:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbb{A} \rangle = \underbrace{\left\langle \frac{\partial \mathbb{A}_{(\vec{r},t)}}{\partial t} \right\rangle}_{i\hbar} + \int \psi_{(\vec{r},t)}^* [\mathbb{H}, \mathbb{A}] \psi_{(\vec{r},t)} d^3 r$$

mit $[\mathbb{H}, \mathbb{A}] = \mathbb{H}\mathbb{A} - \mathbb{A}\mathbb{H}$ und wegen

$$\begin{aligned}-i\hbar\psi &= \mathbb{H}\psi^* \\ -i\hbar\dot{\psi} &= \mathbb{H}\psi\end{aligned}$$

Dabei wurde folgender Zusammenhang benutzt:

$$\int (\mathbb{H}\psi^*) \mathbb{A}\psi d^3 r = \int \psi^* \mathbb{H}(\mathbb{A}\psi) d^3 r$$

wegen

$$\mathbb{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + \mathbf{U}_{(r)}$$

gilt:

$$\begin{aligned}\int \Delta\psi^* \mathbb{A}\psi d^3 r &= \int \psi^* \Delta \mathbb{A}\psi d^3 r \\ \int (\Delta u) v d^3 r &= \int u \Delta v d^3 r + \int [u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u] d^3 r\end{aligned}$$

To Do 52 (Formel falsch): groÙe oder kleine u,v?

Und ist somit zeitabhängig, somit gilt:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbb{A} \rangle = \int \psi_{(\vec{r},t)}^* [\mathbb{H}, \mathbb{A}] \psi_{(\vec{r},t)} d^3r$$

Dieser Zusammenhang wird oft in der folgenden Kurzform geschrieben:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathbb{A}} = [\mathbb{H}, \mathbb{A}]$$

Dies ist die sog. Bewegungsgleichung von \mathbb{A} . Wenn \mathbb{H} und \mathbb{A} vertauschbar sind handelt es sich um eine Erhaltungsgröße.

Verschwindet die linke Seite, vertauscht \mathbb{A} also mit \mathbb{H} , so sagt man, dass \mathbb{A} in diesem Falle eine Erhaltungsgröße des Systems beschreibt.

Beispiel $[\mathbb{H}, \mathbb{L}_z]$:⁵

Die Drehimpulskomponente in z-Richtung ist hier¹ eine Erhaltungsgröße.

Im relativistischen Fall gilt die obige Gleichung nur für die z-Komponente des Gesamtdrehimpulsoperators.

$$\vec{\mathbb{J}} = \vec{\mathbb{L}} + \vec{\mathbb{S}}$$

Im folgenden betrachte man ein freies Teilchen, das sich im Potential $\mathbf{U}_{(r)} = 0$, d. h. kräftefrei in z-Richtung bewegt.

Man kann nun die Dirac-Gleichung in diesem Falle mit folgendem Ansatz lösen:

$$\vec{\psi}_{(r)} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikz} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikz} \right]$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ wegen

$$V \vec{\psi}_{(r)} d^3r = 1$$

⁵Wenn $\mathbf{U}_{(r)}$ zentra尔斯ymmetrisch ist.

To Do 53 (Formel falsch): Formel überprüfen.

Die Dirac-Gleichung vereinfacht sich im vorliegenden Falle:

$$\mathbf{H}_D \vec{\psi}_{(r)} = (c\bar{a}_3 \mathbf{P}_z + m_0 c^2 \bar{a}_0) \vec{\psi}_{(r)} = \mathbf{E} \vec{\psi}_{(r)}$$

da $\vec{\psi}_{(r)}$ nicht von x und y abhängt.

Hieraus folgt dann

$$\mathbf{H}_D \vec{\psi}_{(r)} = \left[c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \mathbf{P}_z + \left[m_0 c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \vec{\psi}_{(r)} = \mathbf{E} \vec{\psi}_{(r)}$$

mit c = Lichtgeschwindigkeit. Mit diesem Ansatz ergibt sich hieraus: ⁶

$$\frac{c\hbar k}{\sqrt{v}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P}_z \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} e^{ikz} + m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{v}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} e^{ikz} = \mathbf{E} \vec{\psi}_{(r)}$$

$(\mathbb{P}_z = e^{ikz} = \hbar k e^{ikz} \text{ wegen } \mathbb{P}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z})$

mit $\sqrt{V} e^{ikz} \rightarrow$

$$c\hbar k \left[c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + m_0 c^2 \left[c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \mathbf{E} \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Man erhält hieraus zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} c\hbar c_2 + m_0 c^2 c_1 &= \mathbf{E}_{c1} \\ c\hbar c_1 + m_0 c^2 c_2 &= \mathbf{E}_{c2} \end{aligned}$$

⁶ Anthroposophischer Ansatz!

Oder anders geschrieben:

$$\begin{aligned} c_1(\mathbf{E}m_0c^2) + c_2(-c\hbar k) &= 0 \\ c_1(-c\hbar k) + c_2(\mathbf{E}m_0c^2) &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat nur dann eine nichtverschwindende Lösung, wenn die Determinante verschwindet, d. h.:

$$\mathbf{E}^2 - m_0^2 c^4 - \hbar^2 k^2 c^2 = 0$$

oder

$$\mathbf{E}^2 = m_0^2 c^4 + \hbar^2 k^2 c^2$$

Dies ist aber gerade der relativistische Energie-Impuls-Zusammenhang von dem man in der Herleitung der DIRAC-Gleichung ausgegangen war. Man berechne jetzt c_1 und c_2 als Funktion von $\hbar k$. Aus der ersten der beiden obigen Gleichungen folgt:

$$\underbrace{c_1^2 \mathbf{E}_{kin}^2}_{=(\mathbf{E}-m_0c^2)^2} = c_2^2 c_2^2 p^2$$

Aus der Normierungsbedingung folgt:

$$c_1^2 = 1 - c_2^2$$

wenn $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} E_{kin}^2 &= c_2^2 (E^2 - m_0^2 c^4 + E_{kin}^2) \\ &= c_2^2 \left[\underbrace{(E - m_0 c^2)}_{=K_{kin}} \cdot (E + m_0 c^2) + E_{kin}^2 \right] \\ &= c_2^2 E_{kin} \left[E + \underbrace{E_{kin} m_0 c^2}_{=E} \right] \\ &= c_2^2 E_{kin} 2E \end{aligned}$$

oder

$$c_2 = \sqrt{\frac{E_{kin}}{2E}}$$

Wenn also $E_{kin} \gg m_0 c^2$, dann wird $E \approx E_{kin}$

$$\lim_{\substack{E_{kin} \rightarrow E \\ \hbar k \gg m_0 c}} c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Für große Impulse werden die Komponenten gleich.

Andererseits erhält man im nichtrelativistischen Grenzfall

$$\hbar k \ll m_0 c$$

bzw.

$$E \approx m_0 c^2$$

oder

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Abbildung 7.1.: Photoelektrischer Effekt in GaAs mit zirkular-polarisiertem Licht

wegen

$$c_2 = \sqrt{\frac{E_{kin}}{2E}} = \sqrt{\frac{\frac{m_0}{2}v}{2m_0c^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{c}$$

Polarisierte Elektronen

To Do 54 (Abbildung fehlt):

Man kann jetzt den Erwartungswert des Gesamtdrehimpulses in diesem Zustand eines freien Teilchens untersuchen. Dazu wird der folgende Ausdruck gebildet:

$$\begin{aligned}\langle \vec{J} \rangle &= \int \vec{\psi}_{(r)}^+ \mathbb{J} \vec{\psi}_{(r)} dr^3 \\ &= \underbrace{\int \vec{\psi}_{(r)}^+ \underbrace{\mathbb{L}}_{\mathbb{L}_z = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}} \underbrace{\vec{\psi}_{(r)}}_{\text{Ortsanteil: } e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta}} dr^3}_{=0} + \int \vec{\psi}_{(r)}^+ \mathbb{S} \vec{\psi}_{(r)} dr^3\end{aligned}$$

To Do 55 (Text überprüfen): Text hier unleserlich, überprüfen.

d. h.

$$\langle \mathbb{J} \rangle = \frac{\hbar}{2} \vec{e}_z \quad (7.18)$$

Hätte man anstelle des obigen Ansatz den folgenden gewählt:

$$\vec{\psi}_{(r)} = \frac{1}{v} \left[c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikz} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikz} \right]$$

mit $c_1^2 + c_2^2 = 1$ und unverändert $c_2 = \sqrt{\frac{E_{kin}}{2E}}$, so stellt auch dieser Zustand eine Lösung der **Dirac-Gleichung** zu $\mathbf{U}_{(r)} = 0$ dar, aber es ergibt sich

$$\langle \mathbb{J} \rangle = -\frac{\hbar}{2} \vec{e}_z$$

Der Gesamtdrehimpuls eines *freien* Teilchens ist also dem Betrag nach immer gleich $\hbar/2$.

Die Dirac-Gleichung in Näherungsform

Man schreibe zunächst die Gleichung ?? in ihren Komponenten aus:

$$(\mathbf{E} - m_0 c^2 - \mathbb{U}_{(r)}) \psi_1 - c (\mathbb{P}_x - i \mathbb{P}_y) \psi_4 - (\mathbb{P}_z \psi_3) = 0 \quad (7.19)$$

$$(\mathbf{E} - m_0 c^2 - \mathbb{U}_{(r)}) \psi_2 - c (\mathbb{P}_x - i \mathbb{P}_y) \psi_3 - (\mathbb{P}_z \psi_4) = 0 \quad (7.20)$$

$$(\mathbf{E} + m_0 c^2 - \mathbb{U}_{(r)}) \psi_3 - c (\mathbb{P}_x - i \mathbb{P}_y) \psi_2 - (\mathbb{P}_z \psi_3) = 0 \quad (7.21)$$

$$(\mathbf{E} + m_0 c^2 - \mathbb{U}_{(r)}) \psi_4 - c (\mathbb{P}_x - i \mathbb{P}_y) \psi_1 - (\mathbb{P}_z \psi_2) = 0 \quad (7.22)$$

Man führt jetzt zur Abkürzung $\mathbf{E}' = \mathbf{E} - m_0 c^2$ ein und fasst die obigen vier Gleichungen zusammen:

$$(\mathbf{E}' \mathbf{U}_{(r)}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = c \vec{\sigma} \vec{\mathbb{P}} \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

$$(2m_0 c^2 + \mathbf{E}' \mathbf{U}_{(r)}) \begin{pmatrix} P s i_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = c \vec{\sigma} \vec{\mathbb{P}} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

(7.25)

Man kann nun folgendes voraussetzen:

$$2m_0 c^2 + \mathbf{E}' \mathbf{U}_{(r)} \approx 2m_0 c^2$$

wegen $\mathbf{E}' = \mathbf{E} - m_0 c^2$ und $2m_0 c^2 \gg E' \mathbf{U}_{(r)}$.

Man beachte hierbei, dass für Elektronen gilt:

$$2m_0^2 \approx 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$$

Die obige Voraussetzung ist bei Atomen nur für Abstände des betreffenden Elektrons $< 10^{-3} r_b$ ⁷ vom Atomkern *nicht* mehr erfüllt.

⁷ r_b : Bohrscher-Radius

Unter dieser Voraussetzung kann dann Gl. 7.25 in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2m_0c} \sigma \mathbb{P} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Dabei wurde bereits \mathbb{P} durch $\vec{\mathbb{P}} = \mathbb{P} - e\vec{A}_{(o)}$ ersetzt, um den allgemeinen Fall bei Anwesenheit eines Magnetfeldes schon mit erfassen zu können. Man eliminierte mit Hilfe der obigen Gleichung $\begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ aus Gl. 7.24:

$$(\mathbf{E}' - \mathbf{U}_{(r)}) \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2m_0} (\vec{\sigma} \vec{\mathbb{P}}) (\vec{\sigma} \vec{\mathbb{P}})}_{= \frac{e\hbar}{2m_0} \sigma B} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

Dabei ist $\frac{e\hbar}{2m_0}$ das BOHRsche Magneton.

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \bar{\bar{1}} (\vec{a} \cdot \vec{b}) + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

Dabei sind \vec{a} und \vec{b} zwei beliebige Vektoren, die eine ebene Fläche aufspannen. In diese kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit die x/y -Ebene legen und außerdem die z -Achse mit der Richtung von \vec{a} identifizieren.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_z \end{pmatrix}$$

und

$$b_y = 0$$

Man erhält dann

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) &= \bar{\bar{\sigma}}_z a_z (\bar{\bar{\sigma}}_z b_z + \bar{\bar{\sigma}}_x b_x) \\ &= \bar{\bar{1}} \underbrace{(a_z b_z)}_{\text{hier speziell } (\vec{a} \cdot \vec{b})} + i \bar{\bar{\sigma}}_y \underbrace{a_z b_x}_{= (\vec{a} \times \vec{b})_y} \\ &\quad \text{hier speziell: } = i \vec{\sigma} (\vec{a} \times \vec{b}) \end{aligned}$$

wegen $\bar{\sigma}_z \bar{\sigma}_x = i\bar{\sigma}_y$.

Identifiziert man \vec{a} , \vec{b} mit \mathbb{P} so folgt aus Gl. ??:

$$(\vec{\sigma}\mathbb{P})(\vec{\sigma}\mathbb{P}) = \bar{\mathbb{1}}\vec{\mathbb{P}}^2 + i\vec{\sigma}(\mathbb{P} \times \mathbb{P})$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (\vec{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}) &= (\vec{\mathbb{P}} - e\vec{A}) \times (\vec{\mathbb{P}} e\vec{A}) \\ &= \vec{\mathbb{P}} \times \vec{\mathbb{P}} - ee\vec{A} \times \vec{\mathbb{P}} - e \times \vec{\mathbb{P}} \times \vec{A}e^2 \underbrace{(\vec{A} \times \vec{A})}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$(\vec{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}) \vec{\psi} = (-i\hbar) \cdot (-i\hbar) \underbrace{[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}]}_{=\text{rot } \vec{\psi} = 0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wegen $\vec{\nabla}(\vec{a}) = \text{rot } \vec{a}$

Man beachte ferner:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{P}} \times \vec{A} \vec{\psi} &= \underbrace{(\mathbb{P} \times \vec{A}) \psi}_{=-i\hbar \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{=\text{rot } \vec{A} = \vec{B}}} + \underbrace{(\vec{\mathbb{P}} \vec{\psi}) \times \vec{A}}_{=-\vec{A} \times \vec{\mathbb{P}} \vec{\psi}} \\ &= -i\hbar \begin{pmatrix} \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also wird

$$\frac{1}{2m_0} (\vec{\sigma} \vec{\mathbb{P}}') \cdot (\vec{\sigma} \mathbb{P}') = \bar{\mathbb{1}} \cdot \frac{\mathbb{P}'^2}{2m_0} - \frac{e\hbar}{2m_0} \vec{\sigma} \vec{B}$$

Führt man diesen Ausdruck in 7.26 ein, so lässt sich das Ergebnis wie folgt schreiben:

$$(\mathbb{H} - \mu_B \vec{\sigma} \vec{B}) \vec{\psi}_{(r)} = \mathbf{E}' \vec{\psi}_{(r)} \quad (7.27)$$

mit

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2m_0} \mathbb{P}'^2 + \mathbf{U}_{(r)}$$

und

$$\vec{\mathbb{P}}' = \mathbb{P} - e\vec{A}_{(r)}$$

Ferner wurde Gl. ?? übernommen:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_0} \quad (\text{Bohrsche-Magneton})$$

Die Gleichung 7.27 ist offensichtlich indentisch mit der PAULI-Gleichung (7.16). Dort musste die Größe des magnetischen Momentes allerdings als bekannt vorausgesetzt werden.

Man kann die bisherige Näherungsform

$$2m_0c^2 + \mathbf{E}' - \mathbf{U}_{(r)} \approx 2m_0c^2$$

etwas weitertreiben in der Form

$$2m_0c^2 + \mathbf{E}' - \mathbf{U}_{(r)} = 2m_0c^2 \left(1 + \frac{\mathbf{E}' - \mathbf{U}_{(r)}}{2m_0c^2} \right)$$

unter der Voraussetzung

$$\frac{\mathbf{E}' - \mathbf{U}_{(r)}}{2m_0c^2} \ll 1$$

was in einem Atom wiederum bis auf einen Abstand $< 10^{-3}r_B$ vom Kernort gewährleistet ist.

Man erhält dann für Gl. 7.25:

$$\begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2m_0c} \left(1 + \frac{\mathbf{E}' - \mathbf{U}_{(r)}}{2m_0c^2} \right) (\vec{\sigma} \vec{\mathbb{P}}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

8

Dies in Gl. 7.24 eingesetzt liefert gegenüber dem zuvor berachteten Ausdruck auf der rechten Seite einen Zusatzterm.

$$(\mathbf{E}' - \mathbf{U}_{(r)}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2m_0c} \left[(\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}}')(\mathbb{P}'\vec{\sigma}) - (\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}}') \frac{\mathbf{E}' - \mathbf{U}_{(r)}}{2m_0c^2} (\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}}') \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

Nun war

$$(\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}}')(\mathbb{P}'\vec{\sigma}) = \bar{1} \frac{\mathbb{P}^2}{2m_0} - \mu_B \vec{\sigma} \vec{B}$$

Da der Gesamtausdruck $(\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}}') \frac{\mathbf{E}' - \mathbf{U}_{(r)}}{2m_0c^2} (\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}}')$ nur in Kernnähe merklich von Null verschieden sein kann und dort der Effekt von $\mathbf{U}_{(r)}$ viel größer ist als der von $A_{(r)}$ ⁹, so kann man in guter Näherung \mathbb{P}' durch \mathbb{P} ersetzen. Dann wird:

$$(\vec{\sigma}\mathbb{P}) \frac{\mathbf{E}' - \mathbf{U}_{(r)}}{2m_0c^2} (\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}}) = \frac{\mathbf{E}'}{2m_0c^2} \underbrace{(\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}})(\vec{\sigma}\mathbb{P})}_{=\mathbb{P}^2} - \frac{1}{2m_0c^2} (\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}}) \mathbf{U}_{(r)} (\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}})$$

Nebenrechnung 1 (Nebenrechnung):

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}}) \mathbf{U}_{(r)} (\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}}) &= -i\hbar (\vec{\sigma}\vec{\nabla} \mathbf{U}_{(r)}) (\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}}) \\ &= -i\hbar \bar{1} \vec{\nabla} \mathbf{U} \mathbb{P} - i^2 \sigma \hbar (\vec{\nabla} \mathbf{U} \times \mathbb{P}) \end{aligned}$$

Wegen $\vec{\nabla} \mathbf{U} = -e\vec{\mathbf{E}}$ ergibt sich somit

$$(\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}}) \mathbf{U}_{(r)} (\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}}) = -\vec{\sigma} e \hbar (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbb{P}}) - i \hbar (\vec{\nabla} \mathbf{U} \mathbb{P})$$

Die Gleichung 7.28 kann dann auf die folgende Form gebracht werden

$$\mathbf{E}' \left(1 + \frac{\mathbb{P}^2}{4m_0^2 c^2} \right) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{2m_0} \vec{\mathbb{P}}^2 + \mathbf{U}_{(r)} - \mu_B \vec{\sigma} \vec{B} + \frac{(\vec{\sigma}\mathbb{P}) \mathbf{U}_{(r)} (\vec{\sigma}\vec{\mathbb{P}})}{4m_0^2 c^2} \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

⁸Wegen $\frac{1}{1+q} \approx 1 - q$ für $q \ll 1$.

⁹Wenn das zugehörige Magentfeld ein durch $A_{(r)}$ realisiertes äußeres Feld darstellt.

Auf diese Gleichung wende man den Operator $\left(1 - \frac{\mathbb{P}}{4m_0^2 c^2}\right)$ an und vernachlässige alle Terme die $1/c^2$ in höherer als 1. Ordnung enthalten.

$$\mathbf{E}' \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \left[\left(1 - \frac{\mathbb{P}}{4m_0^2 c^2}\right) \left(\frac{1}{2m_0} \vec{\mathbb{P}}^2 + \mathbf{U}_{\text{(r)}} - \mu_b \vec{\sigma} \vec{B} + \frac{(\vec{\sigma} \mathbb{P}) \mathbf{U}_{\text{(r)}} (\vec{\sigma} \vec{\mathbb{P}})}{4m_0^2 c^2} \right) \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

Diese Gleichung hat die Bauweise

$$\mathbb{H} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}' \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

Es ist jetzt zu beachten, dass der **Bispinor (Weyl-Gleichung)**

$$\vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

auf 1 normiert ist.

$$\sum_{i=1}^4 \int |\psi_{i\text{(r)}}|^2 d^3r = 1$$

Für die in Gl. 7.30 auftretenden Komponenten ψ_1 und ψ_2 gilt demnach *nicht*:

$$\int [|\psi_i|^2 + |\psi_i|^2] d^3r = 1$$

Man führt deshalb einen renormierten **Spinor**

$$\vec{\psi}_0 = \begin{pmatrix} \psi_{1\text{(r)}}^0 \\ \psi_{2\text{(r)}}^0 \end{pmatrix}$$

mit folgender Eigenschaft ein:

$$\int \vec{\psi}_0^+ \vec{\psi}_0 d^3r = 0 = \sum_{i=1}^2 |\psi_{i\text{(r)}}^0|^2$$

Man führe $\psi_{(r)}^0$ versuchsweise über folgende Vorschrift ein:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^0 \\ \psi_2^0 \end{pmatrix} = \underbrace{\mathbb{O} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}_{\vec{\psi} = \mathbb{O}^{-1} \vec{\psi}_0}$$

mit

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{O} = 1 + \frac{\mathbb{P}^2}{8m_0^2 c^2} \\ \mathbb{O}^{-1} \approx 1 - \frac{\mathbb{P}^2}{8m_0^2 c^2} \end{array} \right\} \text{hermitesche Operatoren}$$

Damit bekommt man

$$\begin{aligned} \int \vec{\psi}^+ \vec{\psi} d^3 r &= \int (\mathbb{O}^{-1} \vec{\psi}_0^+) \cdot (\mathbb{O}^{-1} \vec{\psi}_0) dr^3 \\ &= \int \vec{\psi}_0^+ \mathbb{O}^{-2} \vec{\psi}_0 dr^3 \\ &\approx \int \vec{\psi}_0^+ \left(1 - \frac{\mathbb{P}}{2m_0 c^2} \right) \vec{\psi}_0 dr^3 \Rightarrow \left(\frac{\mathbb{P}}{2m_0 c^2} \rightarrow \text{vernachlässigt} \right) \end{aligned}$$

To Do 56 (Formel falsch): Hier fehlt noch etwas in der Formel

$$1 - \frac{\langle \mathbb{P} \rangle}{2m_0 c^2} = N \quad (\text{Norm des Spinors})$$

$$= \int (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) dr^3$$

Nebenrechnung 2 (Zur Rechtfertigung des Renormierungsansatzes):

Sei $\vec{\psi}_{12} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ und entsprechend $\vec{\psi}_{34} = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

dann soll sein:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \sqrt{N} \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1^0 \\ \psi_2^0 \end{pmatrix}}_{=\psi_0}$$

mit

$$\int \left(|\psi_{1(r)}^0|^2 + |\psi_{2(r)}^0|^2 \right) dr^3 = 1$$

In der ursprünglichen Näherung

$$2m_0c^2 + \mathbf{E}' - \mathbf{U}_{(r)} \approx 2m_0c^2$$

galt

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{34} &= \frac{1}{2m_0c} (\vec{\sigma} \vec{\mathbb{P}}) \psi_{12} \\ &= \frac{1}{2m_0c} (\vec{\sigma} \vec{\mathbb{P}}) \sqrt{N} \psi_{12} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\vec{\psi}^+ \vec{\psi} = \left(\underbrace{\sqrt{N} \psi_{12}^{+0}}_{=\vec{\psi}_{12}^+}, \underbrace{\sqrt{N} \vec{\mathbb{P}}^* \vec{\psi}_{12}^{0+} \frac{\bar{\sigma}^+}{2m_0c}}_{\vec{\psi}_{34}^+} \right) \begin{pmatrix} \sqrt{N} \vec{\psi}_{12}^0 \\ \sqrt{N} \bar{\vec{f}} \vec{\psi}_{12}^0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\vec{\psi}^+ \vec{\psi} = (\vec{\psi}_{12}^+, \vec{\psi}_{34}^+) \begin{pmatrix} \vec{\psi}_{12}^0 \\ \vec{\psi}_{34}^0 \end{pmatrix}$$

und

$$\bar{\vec{f}} = \frac{1}{2m_0c} (\textit{sigma} \vec{\mathbb{P}})$$

Dabei wurde berücksichtigt: $(\bar{a}\vec{c})^+ = \vec{c})^+ \bar{a}^+$

Also wird

8. Quantenmechanik nichtrelativistischer Mehrteilchensysteme

To Do 57 (Kapitel / Section fehlt noch.):

8.1. Die Schrödinger-Gleichung für N wechselwirkende nichtrelativistische Teilchen

To Do 58 (Kapitel / Section fehlt noch.):

8.2. N nichtwechselwirkende Teilchen

To Do 59 (Kapitel / Section fehlt noch.):

8.3. Das Pauli-Prinzip

To Do 60 (Kapitel / Section fehlt noch.):

8.4. Das Hartreesche Näherungsverfahren zur Bestimmung der N-Teilchen-Wellenfunktion

To Do 61 (Kapitel / Section fehlt noch.):

8.5. Antisymmetrisierung der Wellenfunktion. Slater-Determinante und Entwicklungen nach Slater-Determinanten (CI-Entwicklung)

To Do 62 (Kapitel / Section fehlt noch.):

8.6. Das Näherungsverfahren von Hartree und Fock

To Do 63 (Kapitel / Section fehlt noch.):

8.7. Zusammenhang zwischen der Gesamtenergie und den Einteilchenenergien

To Do 64 (Kapitel / Section fehlt noch.):

8.8. Das Theorem von Koopmans

To Do 65 (Kapitel / Section fehlt noch.):

9. Störungstheorie

To Do 66 (Kapitel / Section fehlt noch.):

9.1. Diracsche Störungstheorie. Fermis „Goldene Regel“ der Quantenmechanik

To Do 67 (Kapitel / Section fehlt noch.):

9.2. Zeitabhängige Störungsrechnung 2. Ordnung

To Do 68 (Kapitel / Section fehlt noch.):

9.3. Schrödingersche (zeitunabhängige) Störungstheorie

To Do 69 (Kapitel / Section fehlt noch.):

9.4. Zeitunabhängige Störungstheorie bei Anwesenheit von Entartungen

To Do 70 (Kapitel / Section fehlt noch.):

9.5. Aufspaltung von zwei miteinander entarteten Zuständen in einem Störpotential

To Do 71 (Kapitel / Section fehlt noch.):

10. Das statistische Atommodell von Thomas und Fermi

To Do 72 (Kapitel / Section fehlt noch.):

10.1. Die Thomas-Fermi-Dirac-Methode

To Do 73 (Kapitel / Section fehlt noch.):

11. Das Periodensystem der Elemente

To Do 74 (Kapitel / Section fehlt noch.):

11.1. Die Greensche-Funktion einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung und das Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen

To Do 75 (Kapitel / Section fehlt noch.):

11.2. Der Schalenaufbau der Atome

To Do 76 (Kapitel / Section fehlt noch.):

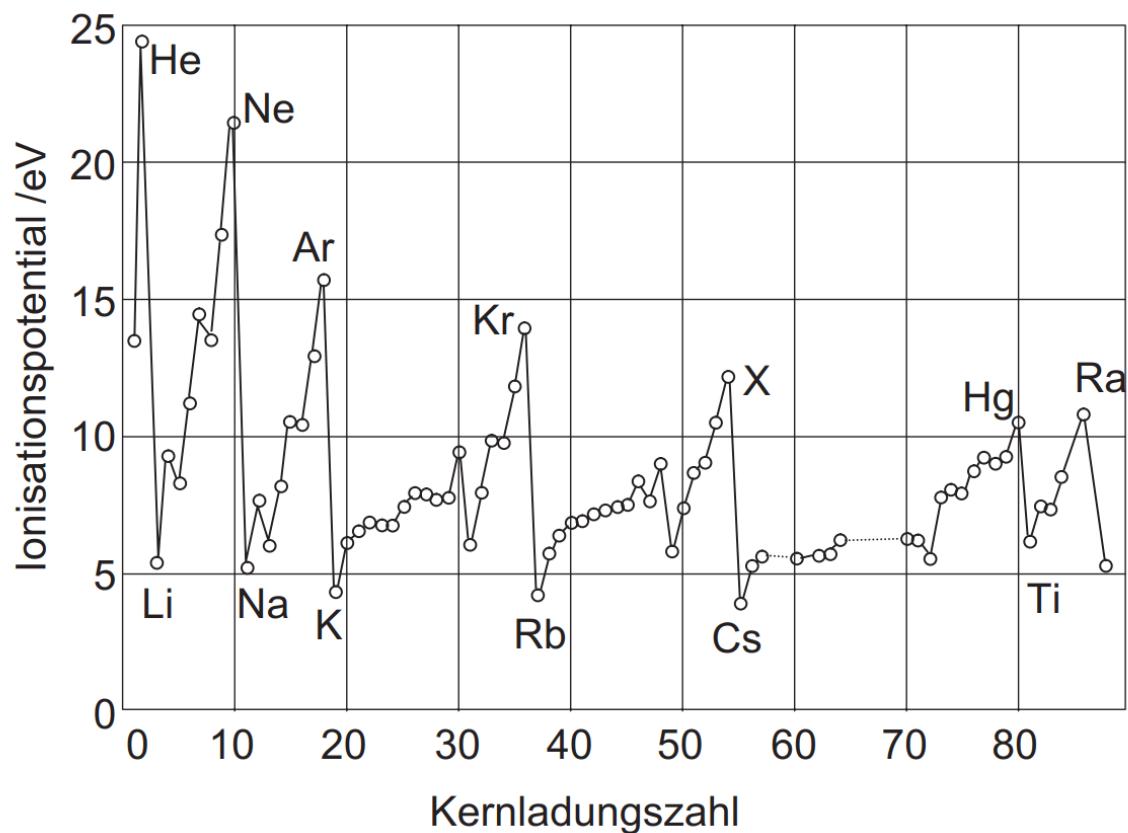


Abbildung 11.1.: Ionisierungsenergien.

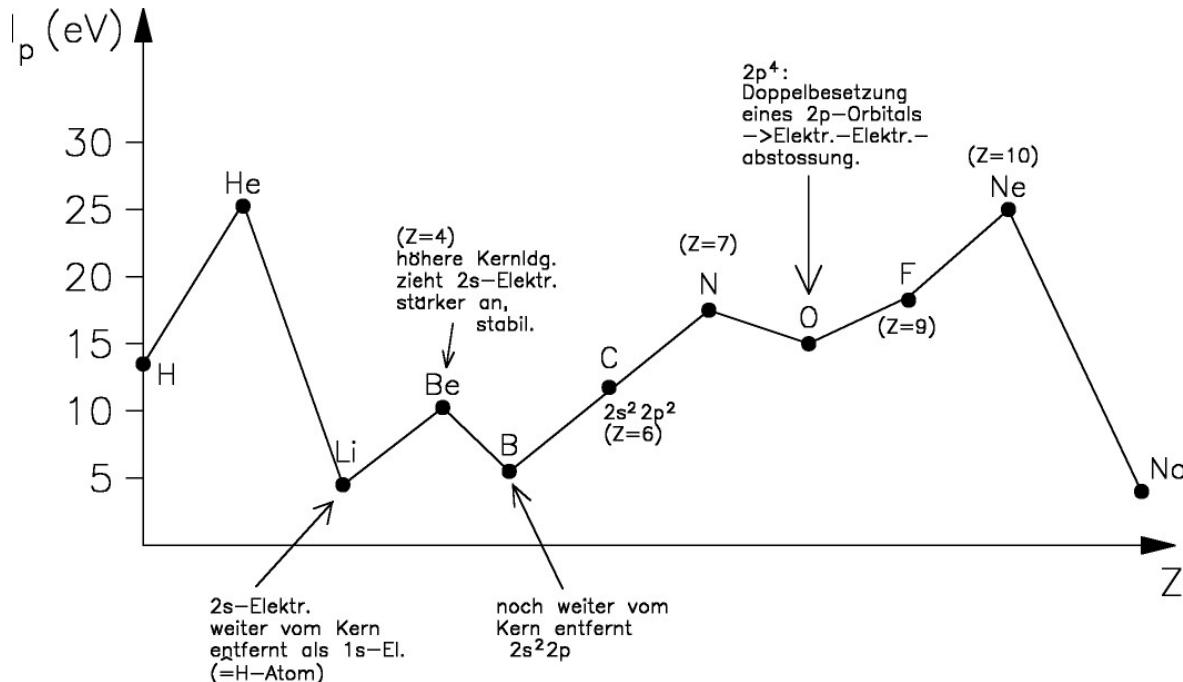


Abbildung 11.2.: Die Ionisationspotentiale I_p hängen stark von der Elektronenanzahl und ihrer Konfiguration bzw. der Kernladungszahl Z (*Ordnungszahl*) ab.

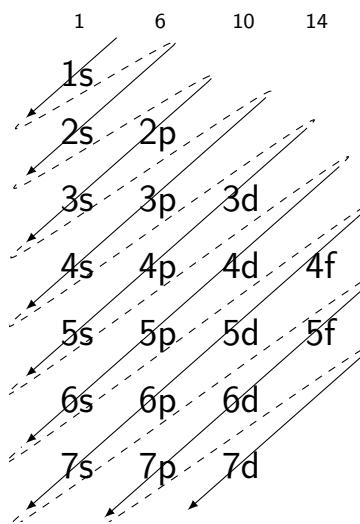


Abbildung 11.3.: Schema zur Bestimmung der Elektronenkonfiguration der Elemente.

12. Elastische Streuung (Potentialstreuung) von Teilchen an Streuzentren

To Do 77 (Kapitel / Section fehlt noch.):

12.1. Die Bornsche Reihe

To Do 78 (Kapitel / Section fehlt noch.):

12.2. Entwicklung einer ebenen Welle nach Kugelwellen steigender Ordnung

To Do 79 (Kapitel / Section fehlt noch.):

12.3. Die Faxen-Holtsmark-Formel für die Streuung eines Teilchens an einem Potential endlicher Reichweite

To Do 80 (Kapitel / Section fehlt noch.):

12.4. Totaler und differentieller Wirkungsquerschnitt eines Streupotentials

To Do 81 (Kapitel / Section fehlt noch.):

12.5. Streuphasen

To Do 82 (Kapitel / Section fehlt noch.):

12.6. Streuung am Yukawa-Potential — Die Rutherford-Formel

To Do 83 (Kapitel / Section fehlt noch.):

13. Die Feinstruktur der optischen Spektren

To Do 84 (Kapitel / Section fehlt noch.):

13.1. Der Effekt der Spin-Bahnkopplung — Optische Dubletts

To Do 85 (Kapitel / Section fehlt noch.):

13.2. Der anormale Zeeman-Effekt

To Do 86 (Kapitel / Section fehlt noch.):

13.3. Der Paschen-Back-Effekt

To Do 87 (Kapitel / Section fehlt noch.):

14. Phänoeologische Physik des Vakuums

14.1. Einleitung

Die Begriffe *Nichts*, *Leere* und *Vakuum* lassen gewöhnlich an einen absolut leeren Raum denken. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass das Vakuum ein komplexes und unerwartetes Verhalten aufweist. Es stellt als einen Zustand minimaler Energie vor, in dem es Fluktuationen des elektromagnetischen Feldes gibt.

Um den Begriff des Vakuums näher zu definieren, muss man zunächst zwischen folgenden Definitionen unterscheiden:

- *technische Vakuum*
- *klassische Vakuum*
- *physikalische Vakuum*

Technisches Vakuum Klassisches Vakuum	Physikalisches Vakuum
Alles entfernt, was machbar ist.	Alles entfernt, was physikalisch machbar ist.
Alles kann aus einem Raum entfernt werden.	Unter der modernen Auffassung ist eine Region des Vakuums jedoch alles andere als leer oder eigenschaftslos. Es hat eine komplexe Struktur, die mit keinem denkbaren Mittel beseitigt werden kann.

Es gibt hier einen subtilen Unterschied zwischen den beiden Definitionen. Im weiteren wird hier auf die physikalische Definition des Vakuum eingegangen. Das physikalische Vakuum wird durch den *Vakuumfluktuationen* beschränkt, die aus Sicht der Stochastischen Mechanik die Ursache für die Quanteneigenschaften sind.

14.2. Exkurs — Klassisches Vakuum

Aristoteles und seine Anhänger glaubten, dass keine Region des Raums völlig leer sein kann leer sein. Diese Vorstellung, dass *die Natur ein Vakuum verabscheut*, wurde in der wissenschaftlichen Revolution des 17. Jahrhunderts verworfen; ironischerweise hat die moderne Physik zu einer ähnlichen Auffassung gelangt. Heute besteht kein Zweifel daran, dass ein Region des Raums von gewöhnlicher Materie entleert werden kann, zumindest im Prinzip.¹

14.2.1. Die Entdeckung des Vakuums

Die Lehre des Aristoteles, wonach ein Vakuum physikalisch unmöglich ist, wurde im 17. Jahrhundert überwunden. Die entscheidende Entwicklung war die Erfindung des Barometers im Jahr 1644 durch Evangelista Torricelli, der Sekretär von Galilei gewesen war. Torricelli füllte Quecksilber in ein Glasrohr, das an einem Ende verschlossen war, und drehte das Rohr dann um, wobei das offene Ende in einem mit Quecksilber gefüllten Gefäß stand.

Die Flüssigkeitssäule fiel bis zu einer Höhe von etwa 30 Zoll über dem Quecksilberspiegel im Gefäß und hinterließ am oberen Ende des Rohrs einen Raum. Der Raum war eindeutig leer von sichtbarer Materie; Torricelli schlug vor, dass er auch frei von Gas war und somit eine Vakuumregion darstellte. Es entbrannte eine lebhafte Kontroverse zwischen den Anhängern der aristotelischen Auffassung und denjenigen, die glaubten, Torricelli habe tatsächlich ein Vakuum erzeugt. Einige Jahre später leitete Blaise Pascal eine Reihe von genialen Experimenten, die alle darauf abzielten, Torricellis Hypothese zu bestätigen.

In den folgenden Jahrzehnten hatten Experimente mit dem Vakuum eine große Konjunktur. Am bekanntesten ist der Versuch des Magdeburger Bürgermeisters Otto von Guericke, der aus zwei kupfernen Halbkugeln eine Weltkugel baute und den Raum darin evakuierte. Zwei Gespanne mit acht Zugpferden waren nicht in der Lage, die Halbkugeln zu trennen. Andere Experimente dieser Zeit waren weniger spektakulär, aber vielleicht aufschlussreicher. Sie führten zum Beispiel zu der Entdeckung, dass ein Vakuum zwar Licht, aber keinen Schall überträgt.

Die Magdeburger Halbkugeln

Die Magdeburger Halbkugeln, die 1654 von Otto von Guericke gebaut wurde, bewiesen die Existenz des Vakuums. Als die Halbkugeln zusammengesetzt wurden und die Luft herausgezogen wurde, konnten zwei Gespanne mit acht Zugpferden sie nicht trennen. Der Apparat befindet sich heute im Deutschen Museum in München.

¹aus: Scientific American Magazine, Aug. 1985, pp70-78 by Timothy H. Boyer

14.3. Physikalisches Vakuum

Das physikalischen Vakuum ist, zumindest auf der Ebene der Elementarteilchen, nicht leer. Selbst wenn alle Materie und Wärmestrahlung aus einer Region des Raumes entfernt wurden aus einer Region des Raums entfernt wurden, bleibt das Vakuum der klassischen Physik gefüllt mit einem ausgeprägten Muster von elektromagnetischen Feldern.

Die Quantenfluktuationen sind hierin ein Werden und Vergehen von Elementarteilchen und Energiequanten – solange Energie und Lebensdauer dieser *virtuellen Teilchen* ein bestimmtes Maß nicht überschreiten. So können sich beispielsweise Photonen oder Paare aus einem Elektron und dessen Antiteilchen, dem Positron, kurzzeitig bilden und anschließend wieder verschwinden.

Heutzutage definieren Physiker das Vakuum als das, was in einer Region des Raums übrig bleibt, wenn sie von allem befreit wurde, was mit experimentellen Mitteln entfernt werden kann. Das Vakuum ist die experimentell erreichbare Leere. Ein erster Schritt zur Schaffung eines Vakuumbereichs besteht natürlich darin, alle sichtbare Materie, wie Feststoffe und Flüssigkeiten, zu entfernen.

Auch Gase müssen entfernt werden. Wenn alle Materie entfernt wurde, ist der Raum jedoch nicht leer, sondern bleibt mit elektromagnetischer Strahlung gefüllt. Ein Teil der Strahlung ist thermisch und kann durch Abkühlung entfernt werden, aber ein anderer Teil der Strahlung hat einen subtileren Ursprung. Selbst wenn die Temperatur des Vakuums auf den absoluten Nullpunkt gesenkt werden könnte, würde ein Muster fluktuierender elektromagnetischer Wellen bestehen bleiben. Diese Reststrahlung ist ein inhärentes Merkmal des Vakuums, das kann nicht unterdrückt werden.

Zur grundlegenden Erläuterung des Vakumbegriffs in der Stochastischen Mechanik werden im folgenden das technische Vakuum und das physikalische Vakuum erläutert.

14.3.1. Vakuumfluktuationen

Das (quantenmechanische) Vakuum kann formal auch als Grundzustand des elektromagnetischen Feldes aufgefasst werden (siehe auch Abschnitt ??). In Zuständen des elektrischen Feldes mit keinem Photon (Photonenzahl $N = 0$) ist der Erwartungswert der elektrischen Feldstärke:

$$\langle E \rangle = 0$$

Allerdings sind mit diesem Mittelwert immer Schwankungen des elektrischen Feldes verbunden, so dass für den gilt:

$$\langle E^2 \rangle \neq 0$$

Experimentelle Nachweise und Vorhersagen

Vakuumfluktuationen haben eine Reihe von nachweisbaren Effekten, die auch experimentell nachgewiesen werden konnten:

Spontane Emission : Sie sind für spontane Emission von Photonen bei angeregten Zuständen von Atomen verantwortlich.

Casimir-Effekt : Dieser sorgt dafür, dass sich gegenüberstehende Metallplatten gegenseitig anziehen (CASIMIR-Effekt, [?]). Das zwischen den Metallplatten eingeschlossene Vakuum kann Energie verlieren, indem es die beiden Platten einander annähert.

Sie sind die Ursache für Van-der-Waals-Kräfte in Molekülen und zwischen Resonator- Wänden.

Lamb-Verschiebung : Es gibt bestimmte, sehr kleine Verschiebungen von Energieniveaus in Atomen gegenüber mit einem einfacheren Modell gerechneten Werten, die so genannte Lamb-Shift. Sie lässt sich qualitativ auf Vakuumfluktuationen zurückführen. Zusammen mit verwandten Erscheinungen, wie der "Vakuumpolarisation", können sie die Lamb-Shift quantitativ mit sehr hoher Präzision erklären. Ein Modell für die Vakuumpolarisation besagt, dass ein Photon kurzzeitig („virtuell“) ein Elektron-Positron-Paar erzeugen kann, das sofort wieder vernichtet wird unter Erzeugung eines Photons. Auch hier fluktuiert also das elektromagnetische Feld durch die Photonenzahl. Siehe hierzu auch Abb. 14.3.1.

Nullpunktsenergie : (Tbd)

Delbrück-Streuung : (Tbd)

Noch nicht bestätigte Effekte:

Hawking-Strahlung : Am Ereignishorizont eines schwarzen Loches entstehen durch Vakuumfluktuationen virtuelle Teilchen, die durch das starke Gravitationsfeld getrennt werden. Dadurch kommt es zur sogenannten Hawkingstrahlung, die thermischer Natur ist und zu einer langfristigen Verdampfung von schwarzen Löchern führt.

Unruh-Effekt : (Tbd)

Scharnhorst-Effekt : (tbd)

Schwinger-Effekt : (tbd)

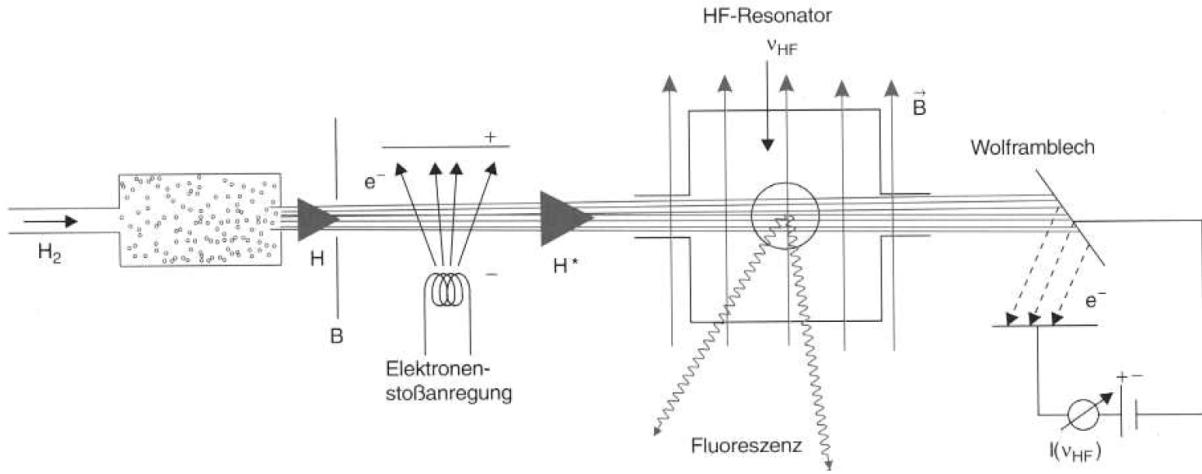


Abbildung 14.1.: Experimentelle Anordnung zur Bestimmung der Lamb-Verschiebung.

Dunkle Materie und Vakuumfluktuationen

Eine Frage, die sich im Zusammenhang sofort aufdringt ist, ob die Vakuumfluktuationen und die in diesem Zusammenhang postulierten virtuellen Partikel für die sog. Dunkle Materie ursächlich sein können. Diese Idee ist zunächst sehr verlockend, führt aber bisher in eine Sackgasse.

Die Energiedichte nach der Quantenfeldtheorie berechnet sich nach:

$$\langle \mathbf{E} \rangle_{QFT} = - \int_0^{M_{pl}} \frac{1}{2} \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2} dk \approx -1,4 \cdot 10^{128} \text{ GeV/m}^3$$

Aus kosmologischen Untersuchungen ergibt sich hingegen:

$$\langle \mathbf{E} \rangle_{COSM} \approx (-4,1 \pm 0,5) \text{ GeV/m}^3 \quad (14.1)$$

$$\langle \mathbf{E} \rangle_{QFT} = 10^{128} \cdot \langle \mathbf{E} \rangle_{COSM} \quad (14.2)$$

Diese Werte weichen derart voneinander ab, so dass die Vakuumfluktuationen als Ursache für die dunkle Materie auszuschließen sind.

Nullpunktstrahlung

Die Vakuumerzeugung vollzog sich historisch geschen in Etappen, die der historischen Entwicklung der Ideen über das Vakuum entsprechen. Im 17. Jahrhundert dachte man, man könne ein völlig leeres Raumvolumen schaffen, indem man alle Materie und insbesondere alle Gase entfernt. Im späten 19. Jahrhundert wurde deutlich, dass eine solche Region immer noch Wärmestrahlung enthält, aber es schien die Strahlung durch Abkühlung beseitigt werden könnte. Seitdem haben sowohl Theorie als auch Theorie und Experiment gezeigt, dass es im Vakuum nicht-thermische Strahlung gibt, und sie würde selbst dann bestehen bleiben, wenn die Temperatur auf den absoluten Nullpunkt gesenkt werden könnte. Sie wird als Nullpunktsstrahlung bezeichnet.

14.3.2. Klassische Theorie der Hohlkörperstrahlung

Die zur Beschreibung des thermischen Spektrums erforderliche mathematische Funktion wurde von Max Planck im Jahr 1900 vorgeschlagen. Planck betonte, dass ein Verständnis der Wärmestrahlung die Einführung einer neuen fundamentalen Konstante erfordere, die heute als Plancksche Konstante bezeichnet wird, mit einem Wert von:

$$6,26 \times 10^{-27} \text{Erg-Sekunde}$$

Im Zuge seiner Bemühungen um die Erklärung seiner Funktion für das thermische Spektrum zu erklären, begründete Planck die Quantentheorie. Der Beginn der Quantenphysik, markierte jedoch nicht das Ende der Geschichte der klassischen Physik.

Der Vorschlag von Stefan und Boltzmann, dass die Gesamtenergiedichte der Wärmestrahlung proportional zur vierten Potenz der Temperatur ist Potenz der Temperatur proportional ist, bedeutet, dass die Energiedichte bei einer Temperatur von absolutem Null fällt. Die Wärmestrahlung verschwindet einfach bei einer Temperatur von Null. Die Möglichkeit, jegliche Wärmestrahlung zu eliminieren, führte zu einer Konzeption des klassischen Vakuums, das eine Erweiterung der Auffassung des 17. Jahrhunderts war. Ein perfektes Vakuum war immer noch eine völlig leere Region des Raums, aber um diesen Zustand zu erreichen musste man nicht nur alle sichtbare Materie und alles Gas, sondern auch alle elektromagnetische Strahlung. Die letzte Anforderung konnte im Prinzip erfüllt werden, indem Abkühlung der Region auf den absoluten Nullpunkt.

Diese Konzeption des Vakuums in der klassischen Physik wurde in der fundamentalen physikalischen Theorie der damaligen Zeit, die heute als klassische Elektronentheorie. Sie betrachtet Elektronen als punktförmige Teilchen, deren einzige Eigenschaften Masse und elektrische Ladung sind. Sie können in Bewegung gesetzt werden durch elektrischen und magnetischen Feldern in Bewegung gesetzt werden, und ihre Bewegung führt wiederum zu solchen Feldern. (Ein Elektron in ständiger Schwingung strahlt z. B. elektromagnetische Wellen mit der Frequenz der

Schwingung aus.) Die Wechselwirkungen zwischen Teilchen und Feldern werden Newtons Bewegungsgesetzen und James Clerk Maxwells Gleichungen des Elektromagnetismus. Darüber hinaus müssen bestimmte Randbedingungen festgelegt werden wenn die Theorie eindeutige Vorhersagen machen soll. Die Maxwellschen Gleichungen beschreiben wie sich ein elektromagnetisches Feld von Ort zu Ort und von Augenblick zu Augenblick verändert. Moment, aber um den tatsächlichen Wert des Feldes zu berechnen, muss man die Anfangs- oder Grenzwerte des Feldes kennen, die eine Grundlage für alle nachfolgenden nachfolgenden Änderungen.

Durch die Wahl der Anfangsbedingungen wird die Natur des Vakuums in die klassische Elektronentheorie ein. Da nach der Auffassung des 19. Jahrhunderts das Vakuum leer von jeglicher Strahlung war, waren die Ausgangsbedingungen für Maxwells Gleichungen die Abwesenheit von elektrischer und magnetischer Strahlung. Grob gesagt Grob gesagt, ging die klassische Elektronentheorie des 19. dass das Universum irgendwann in der fernen Vergangenheit Materie (Elektronen) enthielt aber keine Strahlung. Alle elektromagnetische Strahlung entstand durch die Beschleunigung der elektrischen Ladungen.

15. Einführung in die Stochastik

15.1. Physikalische Messungen

Zwischen quantenmechanischen Messungen und klassischen Messungen gibt es grundsätzliche Unterschiede. Allerdings wird oft der falsche Eindruck erweckt, dass man einen Messwert z. B. in der klassischen Physik beliebig genau erhalten kann. Dies ist eine grundlegend falsche Annahme.
¹

Jeder Messwert weist eine gewisse Unsicherheit auf.

Definition einer Messung

Zunächst muss definiert werden, was unter einer physikalischen Messung zu verstehen ist. Eine gute Definition findet sich in [?]:

Eine Messung ist der Akt der experimentellen Bestimmung einer physikalischen Größe unter Verwendung spezialisierter Ausrüstung.

Diese Definition umfasst vier Merkmale:

1. Es können nur physikalische Größen (d. h. Eigenschaften physikalischer Objekte, Phänomene oder Prozesse) gemessen werden. So bleiben soziologische, ökonomische, psychologische, philologische und andere quantitative Bewertungen nicht-physikalischer Größen außerhalb der Grenzen der Metrologie.
2. Messung ist die experimentelle Schätzung von Parametern, d.h., sie beinhaltet immer ein Experiment. Somit kann die Bestimmung einer Berechnung durch Berechnung mit einer Formel und bekannten Eingangsdaten, die statistische Bewertung von Produktqualitätsindikatoren durch eine Meinungsumfrage und andere ähnliche Verfahren nicht als *Messung* bezeichnet werden.

¹Dieser Abschnitt greift Ideen zur Messunsicherheit von John Denker auf (siehe [Uncertainty as Applied to Measurements and Calculations](#)).

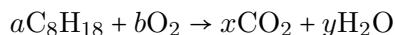
-
3. Messung wird mit speziellen technischen Geräten durchgeführt, die als Messinstrumente bezeichnet werden. Daher umfasst diese Definition keine anderen Bestimmungsmethoden, die keine technischen Geräte verwenden (insbesondere organoleptische Bestimmungen und Bestimmungen durch Expertenbewertung).

Es ist das Charakteristikum physikalischer Experimente, dass ein *hinreichend einfaches* System von seiner Umwelt so gut wie möglich isoliert und in einem wohldefinierten Zustand präpariert einer Messprozedur unterzogen wird. In der klassischen Physik geht man dabei davon aus, dass die Messprozedur die zu messenden Eigenschaften des Systems nicht beeinflusst, d. h. die Wechselwirkung des Systems mit dem Messapparat kann beliebig klein gemacht werden, wobei gleichzeitig die Messung beliebig genau erfolgen kann. Die Messung stellt also nur Fakten das System betreffend fest, die ihm bereits vor der Messung zukommen, ohne das System zu stören.

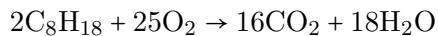
Dabei wird die Analyse der Messunsicherheit häufig vernachlässigt und häufig wird so verfahren, als ob ein Messwert beliebig genau bestimmt werden kann. Häufig wird fälschlicherweise angenommen, dass das Ziel einer Messung darin besteht, eine Unsicherheit anzugeben, welche die Differenz zwischen dem gemessenen Wert und einem *richtigen Wert* widerspiegelt. Diese naive Vorstellung falsch: Wenn man den *richtigen Wert* kennen würde, bräuchte man keine Messungen durchzuführen.

Beispiel 1: Nehmen man an, dass eine digitale Stoppuhr verwendet wird, um ein Ereignis zu messen, und das Ergebnis ist 1,234 Sekunden. Man nennt diese Zahl die angezeigte Zeit und unterscheiden sie von der tatsächlichen Zeit des Ereignisses. Im Prinzip besteht keine Chance, dass die angezeigte Zeit genau mit der wahren Zeit übereinstimmt (da die wahre Zeit eine kontinuierliche Variable ist, während die angezeigte Zeit quantisiert ist). In vielen Fällen wird man jedoch zu dem Schluss kommen, dass sie nahe genug ist.

Beispiel 2: Wie in [?] dargestellt, ist ein anschauliches Beispiel die Verbrennung von Octan (Benzin). Diese Verläuft nach folgender chemischen Gleichung $(a, b, x, y) = (2, 25, 16, 18)$:



Stöchiometrisch sollte diese Reaktion nach folgendem Schema ablaufen:



Es ist aber offensichtlich, dass das Ergebnis der realen Reaktion muss mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sein, da es im Allgemeinen einige Nicht-Idealitäten gibt, einschließlich der Anwesenheit anderer Moleküle wie *CO* oder *C₆O*, ganz zu schweigen von *NO₂* oder weiterer. Das heißt nicht, dass diese Nichtidealitäten irrelevant sind. Trotzdem kann man sehr wohl die

idealisierte Lösung für die idealisierte Gleichung finden und sich über die Nicht-Idealitäten und Unsicherheiten erst viel, viel später Gedanken machen.

Angegebener Wert versus wahre Werte

Es ist hilfreich, zwischen einem angegebenen Wert und den wahren Werten zu unterscheiden. Hierzu kann man folgende Szenarien betrachten:

Szenario A: Man schließt ein digitales Voltmeter an eine gleichmäßige Spannung an. Hier könnte man z. B. feststellen, dass das Messgerät 1,23 V anzeigt. Dies ist die angezeigte Spannung. Dies bedeuten: *Es gibt irgendeine echte Spannung am Eingang.* Den genauen Wert der Spannung wird man allerdings nie erfahren. Aufgrund der Unzulänglichkeiten des Messgerätes und weiteren Einflüsse auf die Messunsicherheit (vgl. Tabelle S. 15.1.1) wird man den genauen Wert nicht ermitteln können. Dies wird schon sofort ersichtlich, wenn man sich klarmacht, dass z. B. digitales Messgerät verwendet wurde und die erhaltenen Werte diskret sind. Die wahre Spannung ist eine kontinuierliche Variable.

Im Allgemeinen entspricht jeder angezeigte Wert einem Bereich von wahren Werten oder einer ähnlichen Verteilung über wahre Werte. Der angegebene Wert wird nie genau gleich dem wahren Wert sein. Dennoch sagt der angegebene Wert etwas über den wahren Wert aus. Er entspricht einem Bereich von wahren Werten, auch wenn er unmöglich dem wahren Wert entsprechen kann.

Weiterhin werden häufig die Begriffe *Messfehler* und *Messunsicherheit* synonym verwendet. Der Begriff *Messfehler* und auch *Fehlerfortpflanzung* suggerieren dabei fälschlicherweise, dass sie Messung falsch ist. Andere Begriffe wie Genauigkeit, Präzision, experimenteller Fehler, Ablesbarkeit, Toleranz usw. werden oft als nicht-technische Begriffe verwendet.

Ziel einer Messung ist es, den Wert einer Messgröße zu ermitteln. Aus dem bisher gesagten ist offensichtlich, keine Messung absolut genau ist. Hierfür gibt es drei grundsätzliche Gründe:

1. Unvollständige Kenntnis darüber, wie Einflussgrößen auf das Messergebnis einwirken.
2. Unzureichende Erfassung und Kontrolle der Einflussgrößen.
3. Unzulänglichkeiten der Messinstrumente (beschränkte Auflösung der Messinstrumente, fehlerhafte Kalibrierung, etc.).

Beobachtungen versus Verteilungen

Wie in ?? beschreiben, gibt es einen entscheidenden Unterschied zwischen einer *Verteilung* und einer *Beobachtung*, die aus dieser Verteilung gezogen wird.² Ein Ausdruck in der Form $12,3 \pm 0,5$ bezieht sich eindeutig auf eine Verteilung. Dem gegenüber kann man bei einem Ausdruck der Form $x = 12,3$ nicht sagen kann, ob er eine bestimmte Beobachtung oder eine ganze Verteilung über die Beobachtungen beschreiben handelt.

15.1.1. Messunsicherheiten

Messunsicherheiten lassen sich ausschließlich Hilfe von *Wahrscheinlichkeitsverteilungen* verstehen. Die Idee der Wahrscheinlichkeit ist dabei eng mit der Idee der *Zufälligkeit* verbunden. Die Zusammenhänge werden im folgendem an einer fiktiven Messung durchgespielt.

Für die weiteren Betrachtungen wird die Bestimmung der Masse eines fiktiven Probekörpers herangezogen. Aus den bisherigen Betrachtungen und der praktischen Erfahrung folgt, dass eine Wiederholte Messung in der Regel zu unterschiedlichen Zahlenwerten führen wird, da die Messungen mit einer Unsicherheit behaftet sind. Die wiederholten Messungen führen dabei zu den in Abb. ?? dargestellten Einzelwerten.

Diese können in das in Abb. ?? dargestellte Histogramm überführt werden. An dieses Histogramm kann eine Verteilungsfunktion oder Wahrscheinlichkeitsdichte angepasst werden (Abb. ??). Diese kann empirischer oder theoretischer Herkunft sein.

An dieser Stelle ist noch wichtig zu erwähnen, dass sie keinesfalls symmetrisch oder gaußförmig sein muss.³ Insbesondere vor dem Hintergrund der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten von Elektronen im elektrischen Zentralpotential hat man es mit komplexeren Wahrscheinlichkeitsdichten zu tun (vgl. Abschnitt ??).

Messunsicherheit ≠ Fehler

An dieser Stelle muss noch einmal darauf hingewiesen werden, die Unsicherheit verwendet wird, um die Breite einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zu bezeichnen⁴. Häufig fällt in diesem Zusammenhang auch der Begriff *Fehleranalyse*. Dieser Begriff ist grundsätzlich zu vermeiden, da das Wort *Fehler* im Zusammenhang mit der Unsicherheit falsch verstanden werden kann. Wenn

²Eine *Beobachtung* entspricht einer Zahl, welche zu einer bestimmten (*Zufalls*)-Variable gesammelt wird.

³Dies wird in Abb. ?? durch die Bimodalität angedeutet.

⁴... nicht mehr und nicht weniger.

das Wort *Fehler* im Zusammenhang mit Messungen verwendet wird, darf es nicht synonym mit *falsch* zu verwendet werden.⁵

In diesem Zusammenhang bedeutet Fehler das Gleiche wie Unsicherheit. Er bezieht sich auf die Breite der Verteilung und nicht auf einen Irrtum. In der Tat verwendet man den Begriff der Unsicherheit, um Fehler zu vermeiden. Es wäre immer ein Fehler zu sagen, die Spannung sei genau gleich 1,23 V, aber man kann sicher sein, dass die Spannung im Intervall $1,23 \pm 0,05$ V liegt.

Beiträge zur Unsicherheit

Die moderne Definition des Sammelbegriff *Gesamtunsicherheit* beinhaltet die einzelnen Beträge unterschiedlicher Ursache.⁶ Zur weiteren Diskussion werden sie in drei Kategorien unterteilt:

Systemfehler bedingt durch das physikalische System:

- Thermisches Rauschen.
- Statistische Fluktuationen, z. B. Schrotrauschen, etc.

Experimentelle Fehler bedingt durch unzureichende bzw. fehlerhafte Messeinrichtungen:

- Kalibrierungsfehler.
- Ablesbarkeit.
- Rundungsfehler.
- Fehler beim Abschneiden der Serie.

Quanteneffekte die eine grundsätzliche Grenze für die Messunsicherheit darstellen:

- Quantenrauschen.

Die ersten beiden Punkte auf dieser Liste kommen bei realen Messungen häufig vor. Ihr Einfluss ist abhängig von der jeweilig durchgeführten Messung. Durch eine Veränderung bzw. eine Verbesserung des Messaufbaus kann die entsprechende Messunsicherheit verringert werden. Grundsätzlich basierend diese Beiträge zur Unsicherheit auf dem jeweiligen physikalischen System.

Diese Beiträge zur Messunsicherheit können durch eine Umgestaltung des Experiments reduziert werden.

⁵Es kann hier noch erwähnt werden, dass der Begriff *Fehlerbalken* als idiomatischer Ausdruck in den Sprachgebrauch eingegangen ist. Konsequenterweise müsste er *Unsicherheitsbalken* heißen.

⁶Es wird bewusst auf den Terminus *experimentelle Fehler* verzichtet. Dieser ist grundsätzlich durch *Quellen der Unsicherheit* zu ersetzen.

Die Beiträge vier bis sieben stehen exemplarisch für Beiträge zur Messunsicherheit, die durch einen unzureichenden Messablauf entstehen. Diese werden nicht durch das zu untersuchende physikalische System hervorgerufen und sind somit nicht weiter Bestandteil der weiteren Be- trachtungen.⁷

Diese Beiträge zur Messunsicherheit können durch eine Umgestaltung der Organisa- tion des Experiments reduziert werden.

Der letzte Beitrag zum Konzept der stochastischen Mechanik. Wie die ersten Punkte hat auch dieser Beitrag fundamentale physikalische Ursachen. Grundsätzlich kann gesagt werden, dass Quantenfluktuationen bzw. quantenmechanische Unschärfereaktionen eine Grenze für die Messgenauigkeit darstellen. Diese Grenzen können, im Gegensatz zu den ersten Punkten der Liste, nicht durch einen veränderten oder verbesserten Messaufbau verschoben werden. Die Begrün- dung für diese Unsicherheiten hängt von der Interpretation der Quantenmechanik ab. So zeigt die Quantentheorie im Gegensatz zur klassischen Mechanik, dass es prinzipiell unmöglich ist, den Einfluss der Messapparatur auf das System beliebig klein zu machen, so dass dem System gleichzeitig alle möglichen, durch Observablen zuordenbaren Eigenschaften zukommen können, weil eben die Messung einer Observablen das System so beeinflusst, dass es genau die Eigenschaf- ten dieser gemessenen Observablen besitzt, nicht aber die Eigenschaften, die zu einer anderen, mit dieser nicht kompatiblen Observablen gehören (vgl. {WLQuantenmechanische Messung}). Die Messung der letztgenannten Eigenschaften ist damit aber nicht festgelegt, da das System aufgrund der vorhergehenden Messung die durch sie beschriebenen Eigenschaften gar nicht be- sitzt. Die Bestimmung von Eigenschaften durch die Messung von Observablen bezeichnen wir als Präparation des Systems. Die Observablen, die durch diese Präparation bestimmt werden, d.h. die aufgrund der Präparation des Systems definierte Werte besitzen, nennen wir objektive Ob- servablen. Die obigen Ausführungen lassen sich also dahingehend zusammenfassen, dass nur die Messung einer objektiven Observablen durch die Präparation determiniert ist. Über die Messung nicht-objektiver Observablen liegen aufgrund der Präparation nicht die vollständigen Informatio- nen vor, die für eine determinierte Bestimmung des Wertes dieser Observablen erforderlich wären, und die Quantentheorie liefert daher nur Wahrscheinlichkeitsaussagen über das Auftreten eines bestimmten Messwertes. Es ist von grundlegender erkenntnistheoretischer Bedeutung, dass diese Unvollständigkeit prinzipieller Natur ist, d. h. nicht durch eine genauere Messung von Systemeigenschaften beseitigt werden kann. Während bei vielen Interpretationen der Quantenmechanik die Ursachen für diese Grenzen häufig ohne weitere Erklärungen angenommen werden, bietet die Stochastische Mechanik über den phänomenologischen Ansatz der Vakuumfluktuationen hier einen eleganten Erklärungsansatz (vgl. Abschnitte ?? und ??).

In jedem Fall ist es *nicht* empfehlenswert, die Messunsicherheit in Form von *Zufallszahlen* oder *ungewissen Größen* zu beschreiben. Diese Begriffe müssen als idiomatische Ausdrücke und falsche

⁷Vielfach werden diese Beiträge zur Messunsicherheit auch als *Messfehler* klassifiziert. Der Begriff ist, wie schon gesagt zu vermeiden, ist aber an dieser Stelle insofern hervorzuheben, da es sich um (vermeidbare) Ursachen handelt oder zumindest um Ursachen, die beim Experimentator liegen und ihre Ursprünge nicht in der hinter dem Experiment liegenden Physik haben.

Bezeichnungen betrachtet werden. Wie John von Neumann und andere hervorgehoben haben, gibt es so etwas nicht:

There is no such thing as a random number.

If it's a number, it's not random.

If it's random, it's not a number.

Anmerkung 28:

Die Unsicherheit liegt in der Verteilung, nicht in einem bestimmten Punkt, der aus der Verteilung gezogen wird. Dieser subtile Unterschied zwischen einer Zahl und einer Verteilung verstehen, muss verstanden werden, bevor mit Unsicherheit argumentiert wird.

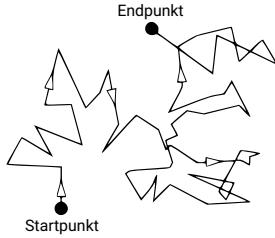


Abbildung 15.1.: Schematische Darstellung der Brownschen Molekularbewegung.

15.2. Brownsche Molekularbewegung

Teilchensysteme in der statistischen Mechanik

Es zeigt sich erwartungsgemäß, daß bei Abwesenheit äußerer Kräfte jede der drei Geschwindigkeitskomponenten v_ν , ($\nu = 1, 2, 3$). eines Teilchens nach einer **Gauß-Funktion** verteilt ist:

$$\omega_{(\nu)} \propto e^{-\frac{m_0 v_\nu^2}{2k_B T}} \quad (15.1)$$

Dieselbe Verteilung ergäbe sich für ein herausgegriffenes Teilchen, wenn es als einzelner Massenpunkt in dem vorgegebenen Volumen Kräften unterwerfen wäre, die Zufallsgesetzen unterliegen und die für $\frac{m_0}{2} \bar{v}_\nu^2$ den Gleichverteilungswert liefern:

$$\frac{m_0}{2} \bar{v}_\nu^2 = \frac{k_B T}{2} \quad (15.2)$$

In diesem Sinne kann also ein System von wechselwirkenden identischen Massenpunkten in der klassischen Mechanik durch ein herausgegriffenes Teilchen, das Zufallskräften unterworfen ist, beschrieben werden. Bei Anwesenheit äußerer Kräfte ist zu fordern, daß sich diese den Zufallskräften ungestört überlagern. Wir werden in allen folgenden Abschnitten diese äquivalente Beschreibung benutzen. Wo immer Zeitmittelwerte über Größen des Teilchens zu bilden wären, die seine Bewegung kennzeichnen, werden wir das einfacher handzuhabende Scharmittel benutzen, das bereits in Abschnitt ?? diskutiert wird.

15.2.1. Beschreibung der Diffusion nach Einstein

Stochastische- oder Zufallsprozesse wurden erstmals im Jahre 1905 durch EINSTEIN durch seine Arbeiten zur BROWNSchen Molekularbewegung auf eine solide theoretische Grundlage gestellt. Die BROWNSche-Molekularbewegung ist die unregelmäßige Bewegung von kleinen Teilchen (wie z.B. Blütenpollen oder ähnlichem) in einer Flüssigkeit. Diese physikalische Beschreibung geht auf Arbeiten von ROBERT BROWN im Jahre 1827 zurück. EINSTEINS Erklärung war, daß die Pollen sich bewegen, weil sie permanent von den sie umgebenden Wassermolekülen gestoßen werden. EINSTEIN realisierte, daß eine deterministische Beschreibung dieser Bewegung nicht möglich ist, weil man die thermische Bewegung der vielen Wassermoleküle nicht beobachtet bzw. beschreiben kann. Deshalb entwickelte er eine statische Beschreibung. Die quantitative Größe, die er bestimmen wollte war die Varianz in der Partikelposition, die linear mit der Zeit anwächst. Es ist ganz hilfreich sich die Originalarbeit anzusehen, da viele der verwendeten mathematischen und physikalischen Konzepte fundamental für die Theorie der stochastischen Prozesse sind. Ein wichtiger Punkt in EINSTEINS Arbeit war das Konzept der grobkörnigen Zeitdiskretisierung.

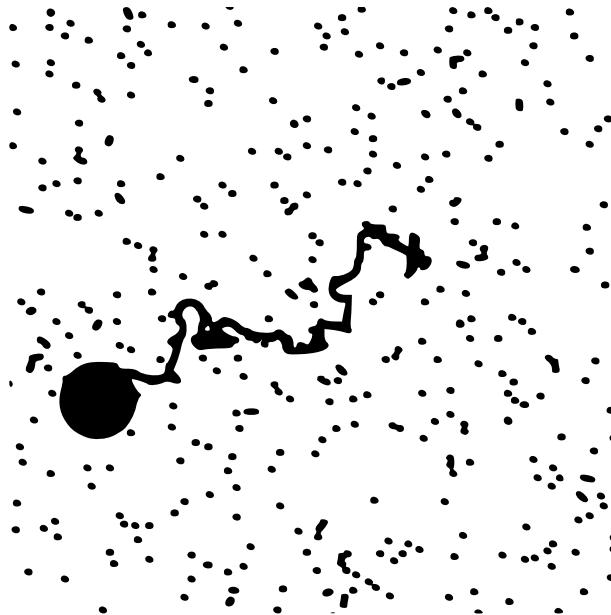


Abbildung 15.2.: Beispiel einer Brownschen Bewegung: Gasmolekül.

Dies bedeutet, daß der Zustand eines Systems durch diskrete Zeiten t beschrieben werden kann, die ein Vielfaches einer Zeiteinheit τ sind. Diese Zeiteinheit τ soll klein sein im Vergleich mit der Zeitskala der Beobachtung/Messung, aber lang im Vergleich zur Zeitdauer eines molekularen Stoßprozesse.

Die zweite Annahme rechtfertigt die Beschreibung durch MARKOV-Prozesse. In diesem Zusam-

menhang ist dann die Bewegung eines Partikels innerhalb eines Zeitintervalls unabhängig von der Bewegung in den vorherigen Zeitintervallen. Mathematisch kann ein solcher MARKOV-Prozeß wie folgt beschrieben werden:

In einem Zeitintervall $[t, t + \tau)$ ändert sich die Position des Teilchen um den Betrag⁸ Δ mit einer Wahrscheinlichkeitfunktion $\phi_{(\Delta)}$. Diese ist derart normiert, daß gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{(\Delta)} d\Delta = 1 \quad (15.3)$$

Weil τ eine mikroskopische Größe ist, wird $\phi_{(\Delta)}$ nur für mikroskopische Intervalle nahe 0 von Null verschieden sein. Weiterhin gilt die Symmetrievereinigung:

$$\phi_{(\Delta)} = \phi_{(-\Delta)} \quad (15.4)$$

Wenn man die Wahrscheinlichkeit, mit der man ein Teilchen an der Position x zur Zeit t antreffen kann, mit $p_{(x,t)}$ bezeichnet, so ergibt sich nach Einsteins Hypothese für die Änderung:

$$p_{(x,t+\tau)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{(\Delta)} p_{(x-\Delta,t)} d\Delta \quad (15.5)$$

Weil τ klein ist, kann in einer TAYLOR-Reihe $p_{(x,t+\tau)}$ in τ bzw $p_{(x-\Delta,t)}$ in Δ entwickelt werden. Als Resultat ergibt sich dann:

$$p + \tau \frac{\partial p}{\partial t} = p \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{(\Delta)} d\Delta - \frac{\partial p}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \phi_{(\Delta)} d\Delta + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \phi_{(\Delta)} d\Delta \quad (15.6)$$

Mittels 15.3 und 15.4 erhält man:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (15.7)$$

wobei die Konstante D geschrieben werden kann als:

$$D = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \phi_{(\Delta)} d\Delta \quad (15.8)$$

Durch einfaches Einsetzen kann man sich davon überzeugen, daß die folgende Gleichung eine Lösung der Differentialgleichung (für ein Teilchen, daß bei $x = 0$ und $t = 0$ startet) darstellt:

⁸Die Beschreibung wird zur Vereinfachung nur eindimensional durchgeführt.

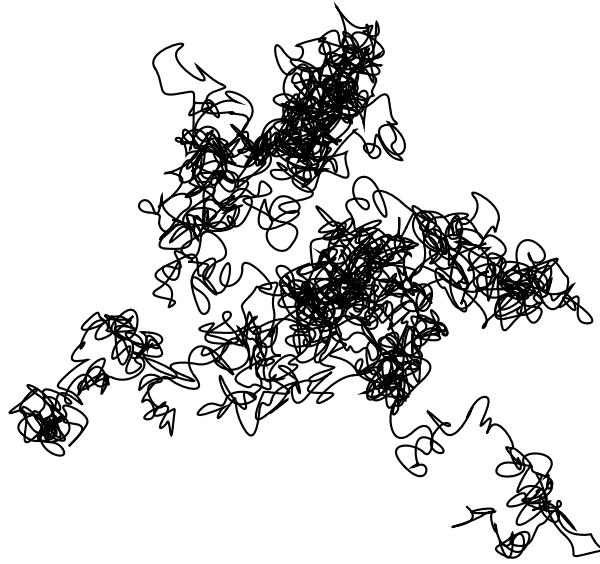


Abbildung 15.3.: Simulation einer Brownschen Bewegung in zwei Dimensionen.

$$p_{(x,t+\tau)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (15.9)$$

Hieraus kann man leicht ableiten:

$$\langle x^2 \rangle_t = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{(x,t+\tau)} x^2 dt = 2Dt \quad (15.10)$$

15.2.2. Beschreibung der Diffusion nach Langevin

Die dynamische Diffusionsgleichung 15.7, die EINSTEIN benutzte ist eins der ersten Beispiele für die Anwendung der FOKKER-PLANCK-Gleichung in der Physik. Diese wird in einem späteren Kapitel hergeleitet (siehe Abschnitte ?? und 5.1.3). Es sei hier nur angemerkt, daß diese Gleichung die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion für die Systemparameter (in diesem Fall für die Partikelposition x) beschreibt. Ein alternativer Weg zur Behandlung von stochastischen Prozessen ist die Beschreibung über die Differentialgleichung der Systemparameter selber. Dies kann jedoch keine der gewöhnlichen Differentialgleichungen sein, weil sie nicht zu einer Verbreiterung der Wahrscheinlichkeitverteilungsfunktionen führen. Deshalb werden hier *stochastische Differentialgleichungen* verwendet (engl. *stochastic differential equations*, SDE).

Erstmalig wurden stochastische Differentialgleichungen in der Physik von LANGEVIN eingesetzt, der eine alternative (und in gewisser Weise elegantere) Herleitung der Ergebnisse EINSTEINS erzielte.

Als Ausgangspunkt kann die Differentialgleichung, die die Geschwindigkeit v eines Teilchens beschreibt, benutzt werden:

$$\dot{v} = -\gamma v + \frac{1}{m_0} F_{(t)} \quad (15.11)$$

In dieser Gleichung ist γ eine Konstante die den Widerstand durch das viskose Medium beschreibt. Es gilt:

$$\gamma = \frac{6\pi\eta a}{m_0}$$

η ist die Viskosität des Mediums, a der Durchmesser des Teilchens und m_0 seine Masse. Die Kraft $F_{(t)}$ ist eine stochastisch fluktuierende Kraft, die auf Stoßen auf molekularer Ebene beruht. Die einzigen Annahmen, die noch zu dieser Kraft gemacht werden müssen sind:

1. Der Mittelwert ist Null.
2. Die Kraft ist nicht in Richtung bzw. Stärke von einem Zeitintervall zu mächen vorhersehbar.
3. Im stationären Zustand soll gelten:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{k_b T}{m_0} \quad (15.12)$$

Die letzte Annahme wird notwendig durch den Gleichverteilungssatz der Thermodynamik welches besagt, daß $\langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \frac{1}{2}k_b T$ ist.

In Termen von x kann die Gleichung 15.11 umgeschrieben werden in:

$$\ddot{x} = -\gamma \dot{x} + \frac{1}{m_0} F_{(t)} \quad (15.13)$$

Multipliziert man beide Seiten mit $2x$ so erhält man:

$$\frac{\partial^2 x^2}{\partial t^2} - 2\dot{x}^2 = -\gamma \frac{\partial x^2}{\partial t} - \frac{2x}{m_0} F_{(t)} \quad (15.14)$$

Werden nun die Mittelwerte beider Seiten gebildet, so erhält man unter Verwendung von **15.12**:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle x^2 \rangle + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \langle x^2 \rangle = \frac{2k_b T}{m_0} + \frac{2}{m_0} \langle F_{(t)} \rangle \quad (15.15)$$

Mit den geforderten Eigenschaften (1) und (2) der Kraft $F_{(t)}$ wird somit $\langle F_{(t)} \rangle = 0$. Dieses Argument wird später noch ausführlicher behandelt. Schließlich gelangt man zu:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle x^2 \rangle + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \langle x^2 \rangle = \frac{2k_b T}{m_0} \quad (15.16)$$

Durch Einsetzen kann einfach gezeigt werden, daß die folgende Gleichung eine Lösung dieser Differentialgleichung darstellt.

$$\langle x^2 \rangle_t = \langle x^2 \rangle_0 = \frac{2k_b T}{m_0 \gamma} t + c (1 - e^{-\gamma t}) \quad (15.17)$$

Für große Zeiten geht diese Gleichung in die Gleichung **15.10** von EINSTEIN über.

$$D = \frac{k_b T}{\gamma} = \frac{k_b T}{6\pi\eta a}$$

Diese Gleichung hat viele Anwendungen in der Physik und Chemie erfahren.

15.3. Einige Begriffe und Definitionen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Stochastische Teilchensysteme, Zufallsgesetze, Markoffsche Kette

To Do 88 (In separates Kapitel im Anhang schieben.):

Der im Zusammenhang mit dem Scharmittel benutzte Begriff *statistisch unabhängig* enthält einen wichtigen Grundgedanken der Wahrscheinlichkeitsrechnung, auf den sich alle Überlegungen der folgenden Abschnitte direkt oder indirekt stützen. Er soll deshalb hier genauer erläutert werden.

Sei a eine physikalische Größe, die nur diskrete Werte annehmen kann. Wird in einer Reihe von N Versuchen der Wert a_ν insgesamt n_ν -mal gefunden, so heißt der Ausdruck

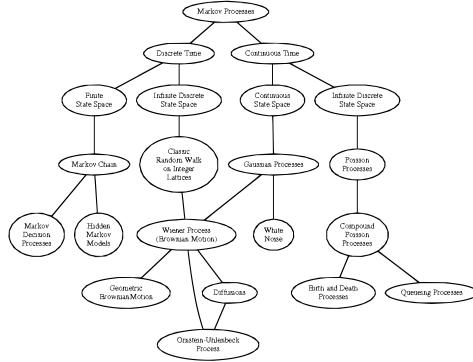


Abbildung 15.4.: Aufbau der Stochastik.

$$r_N = \frac{n_\nu}{N} = \frac{n_{(a_\nu)}}{N} \quad (15.18)$$

die *relative Häufigkeit* für den Wert a_ν der Größe a . Man schreibt statt r_n auch ausführlicher $r_{N_{(a_\nu)}}$.

Man beachte:

$$0 \leq r_{N_{(a_\nu)}} \leq 1 \quad (15.19)$$

und wegen $\sum_\nu n_\nu = 1$:

$$\sum_\nu r_{N_{(a_\nu)}} = 1 \quad (15.20)$$

To Do 89 (Formel falsch): In der Anmerkung: Fehlendes Symbol V- N nachtragen

Anmerkung 29 (Anmerkung):

Gilt:

$$r_{N(a_\nu)} = \delta_{a_\nu, a_{\nu 0}}$$

wo $\delta_{a_\nu, a_{\nu 0}}$ das Kronecker-Symbol ist, so haben offenbar alle Versuche denselben Wert $a_{\nu 0}$ geliefert. Hat $r_{N(a_{\nu 0})}$ dagegen nicht die obige Form, so folgt daraus, dass die Bedingungen bei den N Versuchen nicht identisch gewesen sein können.

Sei $r_{(a_{\nu}0)} = \{r_{N(a_{\nu}0)}\}$ die Menge der $r_{N(a_{\nu}0)}$, die man (für festes a_{ν}) erhält, wenn N die Folge der natürlichen Zahlen durchläuft, und $r'_{(a_{\nu}0)}$ eine durch *blinde Auswahl* von Elementen gebildete unendliche Untermenge von $r_{(a_{\nu}0)}$. Haben die Mengen r und r' genau einen Häufungspunkt und ist dieser beiden Mengen gemeinsam, so sagt man, die Abweichungen der Versuchsbedingungen untereinander seien *Zufallsgesetzen* unterworfen oder die Ursachen für die Abweichungen der Versuchsbedingungen seien *statistisch unabhängig*. Dieser Sachverhalt wird oft in der Kurzform ausgesprochen,

die Versuche seien voneinander statistisch unabhängig.

Das obige Kriterium für *zufällig* oder *statistisch unabhängig* kann in praxi natürlich nur in extrapolatorischer Form bei einer hinreichend großen Anzahl von Versuchen benutzt werden.

Die Erfahrungen sind jedenfalls konsistent mit der Annahme, dass für jedes a_{ν} ein solcher Häufungspunkt der Menge $\{r_{N(a_{\nu})}\}$ existiert. Dieser Häufungspunkt, den man mit $W_{(a_{\nu})}$ bezeichnet, heißt *Wahrscheinlichkeit für den Wert a_{ν} der Größe a* .

Aus ?? folgt:

$$\sum_{\nu} W_{(a_{\nu})} = 1 \quad (15.21)$$

Ist $r_{N(a_{\nu})} = \delta_{a_{\nu}, a_{\nu}0}$, so haben alle N -Versuch den Wert a_{ν} geliefert. Ist aber $r_N \neq \delta_{a_{\nu}, a_{\nu}0}$ für alle N , dann können die Versuchsbedingungen bei den N -Versuchenn nicht identisch gewesen sein.

Sei $R_{0(a_{\nu})} = \{r_{N(a_{\nu})}\}$ die Menge derjenigen $r_{N(a_{\nu})}$, die man für ein festes a_{ν} erhält, wenn N die Folge der natürlichen Zahlen durchläuft ($N = 1, 2, 3 \dots$). $R_{0(a_{\nu})}$ ist eine unendliche Mengen, die aber wegen 15.19 beschränkt ist.

Nach dem Satz von *Bolzano-Weierstraß* muß dann $R_{0(a_{\nu})}$ mindestens einen *Häufungspunkt* haben.

Sei $R_{\alpha(a_{\nu})}$ mit $\alpha : \text{natürliche Zahl}$, irgendeine unendliche Untermenge von $R_{0(a_{\nu})}$. Hat $R_{0(a_{\nu})}$ genau einen Häufungspunkt, dann haben auch alle $R_{\alpha(a_{\nu})}$ nur einen Häufungspunkt und zwar denselben wie $R_{0(a_{\nu})}$.

Liegt dieser Fall vor, so sagt man:

- die Abweichungen der Versuchbedingungen untereinander sind Zufallsgesetzen unterworfen.

Oder auch:

- diese Abweichungen sind voneinander statistisch unabhängig.

Der Häufungspunkt $R_{0(a_{\nu})}$ heißt in diesem Fall:

- Wahrscheinlichkeit für den Wert a_ν der Größe a

Man bezeichnet diese mit $\mathcal{W}_{(a_\nu)}$. In Analogie zu 15.20 gilt:

$$\sum_\nu \mathcal{W}_{(a_\nu)} = 1 \quad (15.22)$$

Sei b eine zu a analoge Größe, für die in N Versuchen der Wert b_μ n_μ -mal gefunden wurde. Für die relative Häufigkeit, daß in N Versuchen für b der Wert b_μ und gleichzeitig für a der Wert a_μ gefunden wird, gilt:

$$r_{N(a_\nu, b_\mu)}^p = r_{N(a_\nu)} \cdot r_{N(b_\mu)} \quad (15.23)$$

Für die relative Häufigkeit, daß in N -Versuchen für a entweder der Wert a_ν oder der Wert a_μ gefunden wird, gilt:

$$r_{N(a_\nu, b_\mu)}^s = r_{N(a_\nu)} + r_{N(b_\mu)} \quad (a_\nu \neq a_\mu) \quad (15.24)$$

und daher ist:

$$\mathcal{W}_{p(a_\nu, b_\mu)} = \mathcal{W}_{(a_\nu)} \cdot \mathcal{W}_{(b_\mu)} \quad (15.25)$$

$$\mathcal{W}_{s(a_\nu, b_\mu)} = \mathcal{W}_{(a_\nu)} + \mathcal{W}_{(b_\mu)} \quad (15.26)$$

Der **Mittelwert** von a (oder **Erwartungswert**) ist definiert durch:

$$\langle a \rangle = \text{Häufungspunkt von } \left\{ \sum_\nu r_{n(a_\nu)} \cdot a_\nu \right\} \quad (15.27)$$

also:

$$\langle a \rangle = \sum_\nu \mathcal{W}_{(a_\nu)} \cdot a_\nu \quad (15.28)$$

Dabei ist \mathcal{W} die **Wahrscheinlichkeit** oder das *statistische Gewicht*. Der **Erwartungswert** einer Größe f , die als Funktion von a gegeben ist $f(a)$ wird analog definiert:

$$\langle f \rangle = \sum_{\nu} \mathcal{W}_{(a_{\nu})} \cdot f(a_{\nu}) \quad (15.29)$$

Wenn die Größe a kontinuierlich Werte annehmen kann, so lassen sich alle vorhergehenden Begriffsbildungen übertragen, indem man jeden Wert a_{ν} ein *Toleranzintervall* Δa_{ν} zuordnet, derart, daß sich alle diese Intervalle lückenlos zum Definitionsintervall von a zusammenfügen. Der Ausdruck:

$$r_N(a_{\nu}) = \frac{n_{\nu}}{N} \quad (15.30)$$

bedeutet dann die relative Häufigkeit dafür, die Größe a mit einem Wert zwischen a_{ν} und $a_{\nu} + \Delta a_{\nu}$ anzutreffen. Man führt nun die **Wahrscheinlichkeitsdichte** $\mathfrak{w}_{(a_{\nu})}$ ein, indem man setzt:

$$\mathcal{W}_{(a_{\nu})} = \mathfrak{w}_{(a_{\nu})} \Delta a_{\nu} \quad (15.31)$$

Für genügend kleine Δa_{ν} (exakt $\lim_{\Delta a_{\nu} \rightarrow 0}$) lauten die Formeln 15.22, 15.28 und 15.29:

$$\int \mathfrak{w}_{(a)} da = 1 \quad (15.32)$$

$$\langle a \rangle = \int \mathfrak{w}_{(a)} a da \quad (15.33)$$

$$\langle f \rangle = \int \mathfrak{w}_{(a)} f(a) da \quad (15.34)$$

Sei speziell

$$f_{(a)} = (a - \langle a \rangle)^2 \quad (15.35)$$

ein Maß für die Abweichung vom **Mittelwert**. Dann heißt der Ausdruck:

$$\langle f_{(a)} \rangle = \langle (a - \langle a \rangle)^2 \rangle \quad (15.36)$$

$$= \int \mathfrak{w}_{(a)} (a - \langle a \rangle)^2 da \quad (15.37)$$

mittlere quadratische Abweichung oder *mittlere quadratische Schwankung*.

Wegen

$$(a - \langle a \rangle)^2 = a^2 + \langle a \rangle^2 - 2\langle a \rangle a \quad (15.38)$$

gilt:

$$\langle (a - \langle a \rangle)^2 \rangle = \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2 \quad (15.39)$$

Das stochastische System

Man kann nach diesen Vorbemerkungen nun auf den Begriff des **stochastischen Systems** eingehen:

Ein physikalisches System heißt stochastisch, wenn seine Zustandsänderungen von Zufallsgesetzen beeinflusst werden derart, dass sein Zustand zu irgendeiner Zeit t nicht eindeutig aus dem Zustand zum benachbarten früheren Zeitpunkt berechnet werden kann, sondern nur Wahrscheinlichkeitsaussagen für die auftretenden Änderungen möglich sind.

In praxi ist häufig in guter Näherung eine spezielle Klasse von stochastischen Systemen realisiert:

Wenn die Wahrscheinlichkeit für die Zustandsänderung des betrachteten Systems im Zeitintervall $(t+|\Delta t|, t)$ für $\Delta t \rightarrow 0$ nur vom Zustand des Systems zur Zeit t und dem Zeitintervall Δt abhängt, dagegen nicht vom Systemzustand vor diesem Zeitpunkt, dann nennt man ein solches System eine **Markowsche Kette**.

Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten stochastischen Systeme werden als **Markoffsche Ketten** angenommen. Diese Annahme lässt sich nur indirekt damit rechtfertigen, dass die resultierenden Theorien der Brownschen Molekularbewegung bzw. der quantenmechanischen Teilchenbewegung in Übereinstimmung mit der Erfahrung sind.

15.4. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bevor ein tiefereres und allgemeineres Verständnis für die Ergebnisse von EINSTEIN und LANGEVIN erlangt werden können, ist es notwendig sich mit den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auseinanderzusetzen.

15.4.1. Axiome der wahrscheinlichkeitsrechnung

Auf einer sehr formalen Basis liefert die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Funktion p die sog. Wahrscheinlichkeit für eine Menge Ω von ω Ereignissen. Diese funktion genügt für alle $A \subseteq \Omega$ folgenden Bedingungen

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(i)$ wenn $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$

Ein wichtiges Konzept ist die Unterscheidung zwischen Bestimmtheit/sicherheit und der Wahrscheinlichkeit = 1. Es kann eine Untermenge von Ω z.B. Ω' bestehen für die gilt $P(\Omega') = 1$. Dies heißt jedoch nicht, daß Ereignisse, die nicht in Ω' erhalten sind nicht auftreten können. Lediglich die Wahrscheinlichkeit ihrers Auftretens ist Null.

Beispiel :

Zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein bestimmter Körper eine Masse besitzt, die eine ganzzahliges Vielfaches in Kg ist Null. Dennoch ist dieser Wert nicht weniger wahrscheinlich als alle anderen Zahlenwerte. Trotzdem wäre es sicherlich falsch zu sagen, daß die Masse keine ganzzahligen Wert hat, weil das implizieren würde, daß es unmöglich wäre, daß die Masse überhaupt einen Zahlenwert besitzt.

15.4.2. Zufallsvariablen

Wenn ein stochastischer Prozeß in einem physikalischen System beschrieben wird, sind die zugrundeliegenden Prozesse verborgen. Zum Beispiel in der Beschreibung der BROWNSchen Bewegung nach LANGEVIN würde das zugrundeliegende Ereignis ω eine komplette Beschreibung der Kraft $F_{(t)}$ zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ liefern. Nun ist die position X des Teilchens zu einer bestimmten Zeit t_1 offensichtlich eine Funktion seiner Anfangsbedingungen, Geschwindigkeit und Kraft $F_{(t)}$ bis zu Zeit t_1 . Dies ist dann die Funktion $X_{(\omega)}$ zum Ereignis ω . Es ist anzumerken, daß verschiedene Ereignisse ω zur gleichen Position X führen können.

Im weiteren wird oft die ω -Abhängigkeit von $X_{(\omega)}$ durch die Schreibweise X weggelassen. Dann heißt X *Zufallsvariable*. Es ist eine reine Konvention $\langle f_{(x)} \rangle$ anstelle von $\sum_{\omega \in \Omega} f_{(\omega)} P_{(\omega)}$ zu schreiben.

Manchmal wird auch die Notation $E[f_{(x)}]$ benutzt, wobei E für „expectation value“ steht.

Ein besonderer Mittelwert gilt für die δ -Funktion

$$f_{(x)} = \delta_{(x-X)}$$

Dieser wird verwendet zu Definition von $p_{(x)}$, der Wahrscheinlichkeitsdichte (für eine kontinuierliche Variable X) für eine Zufallsvariable $X_{(\omega)}$, die den Wert x annehmen?? soll:

$$p_{(x)} = \langle \delta_{(x-X)} \rangle = \sum_{\omega \in \Omega} \delta_{(x-X_{(\omega)})} P_{(\omega)}$$

Um zu veranschaulichen, daß es sich hier um eine Wahrscheinlichkeitsdichte (nicht um eine Wahrscheinlichkeit) handelt, wird mit $p_{(x)} dx$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet mit der X im Intervall $(x, x + dx)$ liegt.

An einigen Stellen wo keine Verwechslungsgefahr besteht, wird die Zufallsvariable x als Abkürzung von $X_{(\omega)}$ verwendet (vgl. ??)

15.4.3. Multivariate und bedingte Wahrscheinlichkeiten

Die multivariate Wahrscheinlichkeit von zwei Ereignissen A und B wird geschrieben als $P(A \cap B)$. Dabei können die Ereignisse A und B zu verschiedenen Variablen gehören. Zum Beispiel könnte A zu dem Ereignis gehören, daß $x > 0$ ist, und B zu dem für $v > 0$. Trotzdem können für stochastische Prozesse die gleichen Variablen für unterschiedliche Zeiten angenommen werden. Z.B. könnte A das Ereignis $x > 0$ zur Zeit 0 und B $x > 0$ für die Zeit t sein.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A aus B ist definiert durch:

$$P_{(A|B)} = \frac{P_{(A \cap B)}}{P_{(B)}}$$

Wenn $\Omega = \cup_i B_i$ und $B_i \cap B_j = \emptyset \forall i \neq j$ folgt:

$$P_{(A)} = \sum_i P_{(A|B)} P_{(B)}$$

Die beiden Ereignisse A und B sind unabhängig wenn

$$P_{(A \cap B)} = P_{(A)} P_{(B)}$$

oder anders geschrieben

$$P_{(A|B)} = P_{(A)} \text{ und } P_{(B|A)} = P_{(B)}$$

Dies bedeutet, daß man über die Kenntnis von B nichts über A erfahren kann bzw. umgekehrt.

15.4.4. Momente und momente-erzeugende Funktionen

Die Momente einer Zufallsvariablen X sind die Mittelwerte in der Form $\langle X^n \rangle$ mit n einer natürlichen Zahl. Die wichtigsten Momente sind das erste, das auch *Median* (Mittelwert) genannt wird

$$E[X] = \langle X \rangle \quad (15.40)$$

und das zweite Moment, das mit der Varianz verknüpft ist

$$V[x] = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \quad (15.41)$$

Für viele Variablen wird die *Covarianz-Matrix* definiert als:

$$V_{ij} = \langle X_i X_j \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle = \langle X_i, X_j \rangle$$

oder in Vektorschreibweise:

$$\mathbf{V} = \langle \vec{X} \vec{X}^T \rangle - \langle \vec{X} \rangle \langle \vec{X}^T \rangle$$

mit $\vec{X}^T = (X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Die Momente können über eine *momente-erzeugende Funktion* oder eine *charakteristische Funktion* gebildet werden:

$$\phi_{(\vec{s})} = \left\langle e^{i\vec{s}\vec{X}} \right\rangle = \int p_{(\vec{x})} e^{-i\vec{x}^T \vec{s}} d^n \vec{x} \quad (15.42)$$

Diese Gleichung genügt folgenden Bedingungen:

$$\phi_{(\vec{0})}=1$$

und

$$\phi_{(\vec{s})} \leq 1$$

Mit der Gleichung können nun die Momente (sofern sie existieren) nach folgender Formel generiert werden:

$$\left\langle \prod_j X_j^{m_j} \right\rangle = \left[\prod_j \left(-i \frac{\partial}{\partial s_j} \right)^{m_j} \phi_{(\vec{s})} \right]_{\vec{s}=\vec{0}}$$

Die charakteristische Funktion hat einige weiter nützliche Eigenschaften.:

1. Sie erzeugt $p_{(\vec{x})}$ mit der Wahrscheinlichkeit eins über

$$p_{(\vec{x})} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \vec{s} \cdot \phi_{(\vec{x})} \cdot e^{-i\vec{x}^T \vec{s}} d^n \vec{x}$$

2. Wenn es sich bei den X_j um unabhängige Variablen der Art

$$p_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} = p_{(x_1)} p_{(x_2)} \dots p_{(x_n)}$$

handelt, dann gilt

$$\phi_{(s_1, s_2, \dots, s_n)} = \phi_{(s_1)} \phi_{(s_2)} \dots \phi_{(s_n)}$$

3. Wenn

$$Y = \sum_{j=1}^n X_n$$

und

$$\phi_{j(s)} = \langle e^{isX_j} \rangle$$

ist, so ergibt sich für die Variable Y :

$$\phi_{(s)} = \langle e^{isY} \rangle = \prod_{j=1}^n \phi_{j(s)}$$

15.5. Einige wichtige Verteilungsfunktionen

15.5.1. Die Gaußsche Verteilung

Die am meisten benutzte Verteilungsfunktion ist die **Gaußsche-Verteilungsfunktion**. Für mehrere Variablen kann sie geschrieben werden als:

$$p(\vec{x}) = \sqrt{\frac{1}{\det(2\pi\mathbf{V})}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^T \mathbf{V}^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})\right] \quad (15.43)$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich somit:

$$\langle \vec{x} \rangle = \int \vec{x} p(\vec{x}) d^n \vec{x} = \vec{\mu}$$

$$\langle \vec{x} \vec{x}^T \rangle = \int \vec{x} \vec{x}^T p(\vec{x}) d^n \vec{x} = \vec{\mu} \vec{\mu}^T + \mathbf{V}$$

Dabei ist \mathbf{V} die Covarianz-Matrix. Weiterhin gilt:

$$\phi(\vec{s}) = \exp\left[i \vec{s}^T \vec{\mu} - \frac{1}{2} \vec{s}^T \mathbf{V} \vec{s}\right]$$

Wenn $\vec{\mu} = \vec{0}$ ist, verschwinden alle ungeraden Momente. Die geraden Momenten können dann nach folgender Formel entwickelt werden:

$$\langle X_i, X_j, X_k, X_l, \dots \rangle = \frac{(2N)!}{N! 2^N} (V_{ij} V_{kl} \dots)_{sym}$$

Von den Termen $\langle X_i, X_j, X_k, X_l, \dots \rangle$ gibt es insgesamt $2N$ -Stück. Der Index $_{sym}$ soll andeuten, daß es sich um die symmetrische Form des Produktes handelt. Zum Beispiel:

$$\langle X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle = \frac{4!}{2! \cdot 4} \left(\frac{V_{12}V_{34} + V_{13}V_{24} + V_{14}V_{23}}{3} \right)$$

und

$$\langle X_1^4 \rangle = \frac{4!}{2! \cdot 4} (V_{11}^2) = 3V_{11}^2$$

16. Antworten zu ausgewählten Themen

Zur Frage der Existenz verborgener Variablen in der Quantenmechanik

Eine Grundannahme der stochastischen Mechanik bzw. aus der entsprechenden Herleitung der Schrödinger-Gleichung bestand in der Annahme, dass für ein Teilchen auch in der Quantenmechanik eine Bahn existiert. Im Gegensatz zur klassischen Mechanik ist die unregelmäßig, da sie durch eine stochastische Komponente aufweist (Zitterbewegung)[187]. Zur Darstellung einer Schar solcher Bahnen, aus der man durch die Mittelung das Zeitverhalten der Geschwindigkeitsfelder $v_{(r,t)}$ und $u_{(r,t)}$ erhält, sind also wesentlich mehr freie Parameter notwendig als zum Schluss in Form unabhängiger Scharmittelwerte zur eindeutigen Kennzeichnung des Teilchenzustandes übrigbleiben. Die *überzähligen Koordinaten* oder zusätzliche Freiheitsgrade, die hier zunächst auftreten werden als **verborgene Variablen** bezeichnet.

Von Neumann beweist in seinem Buch [226], dass es solche *verborgenen Variablen* in der Quantenmechanik nicht geben kann. Die hier in Abschnitt 5 gemachte Herleitung der Schrödinger-Gleichung scheint dem zu widersprechen. Allerdings existiert dieser Widerspruch nicht, da sich von Neumann bei seinem Beweis explizit auf die Annahme gestützt, dass zwischen den Observablen des Systems und dem entsprechenden hermiteschen Operatoren eine bijektive Zuordnung besteht. Solange nur Observablen in Betracht gezogen werden, die sich auf systemeigene Kenngrößen des Systems beziehen, ist dieser Beweis uneingeschränkt gültig. Ein wesentliches Merkmal hier in Abschnitte 5 gemachten Herleitung besteht aber gerade darin, statistische Kräfte zuzulassen, die systemextern sind. Koordinaten, die als Folge solcher Größen zusätzlich auftreten, stehen daher nicht in Widerspruch zu von Neumanns Schlussfolgerungen. Auf diesen Zusammenhang wurde immer wieder hingewiesen [200], [201], [187], [538]. Eine fundierte Zusammenfassung dieses Zusammenhangs findet sich in [?].

Die Stochastische Mechanik ist *stochastisch* und nicht deterministisch. Die *versteckten Variablen* sind die zugrunde liegenden Wiener-Prozesse, aus denen sich die Wellenfunktion als statistisches Objekt ergibt.

Ein Widerspruch zum **GHZ-Experiment** ist nicht gegeben, da dies explizit *lokale versteckte Variablen ausschließt*, während die hier in der stochastischen Mechanik postulierten verborgenden Variablen *nicht-lokal* Natur sind.

Aus diesen Gründen kann die Stochastische Mechanik formal als eine *Hidden-Variable-Theorie* bezeichnen werden. Um die oben geschilderten Eigenschaften besser zu präzisieren sollte sie als *stochastische Hidden-Variable-Theorie* bezeichnet werden.

16.0.1. Lokalität

Die *Stochastische Mechanik* ist im Kern eine *lokale Theorie*, wird aber in der Literatur oft als *äußerlich lokal, aber effektiv nichtlokal* charakterisiert.

In der Stochastischen Mechanik [4]¹, [538] wird eine Brownsche Bewegung im Konfigurationsraum eingeführt, die durch eine lokale stochastische Differentialgleichung beschrieben wird. Somit ist die Dynamik lokal, da die Brownsche Bewegung durch Wiener-Prozesse mit lokalem Drift und Diffusion bestimmt wird. Die Schrödinger-Gleichung ergibt sich (wie in Abschnitt ?? beschrieben wird) als Konsistenzbedingung (aus der Newtonschen Bewegungsgleichung mit einem stochastischen Term).

Sobald man allerdings mehrteilige Systeme betrachtet, tritt ein *Nichtlokalitätsproblem* auf:

- In der stochastischen Mechanik hängt die Driftgeschwindigkeit eines Teilchens von der Wellenfunktion im Konfigurationsraum ab.
- Dadurch kann die Bewegung eines Teilchens sofort durch die Position anderer, weit entfernter Teilchen beeinflusst werden.
- Dies entspricht derselben Nichtlokalität wie in der Bohmschen Mechanik: Die Theorie ist lokal im dreidimensionalen Raum, aber nichtlokal im N-Teilchen-Konfigurationsraum.

Siehe auch hierzu die folgenden Literaturquellen:

- [177]²
- [681]³

Zusammenfassend kann gesagt werden:

Die Stochastische Mechanik nach Nelson ist lokal für Einteilchensysteme, aber nichtlokal für Vierteilchensysteme. Diese Nichtlokalität resultiert aus der Abhängigkeit der Driftfelder von der Konfigurationsraum-Wellenfunktion.

¹ „The construction is entirely local in character: the motion is a diffusion Markov process driven by Wiener noise.“

² „Nelson’s stochastic mechanics is not fundamentally local once many-body systems are considered, since the drift terms depend on the full configuration.“

³ „Although Nelson emphasized the local, Markovian nature of his stochastic dynamics, entangled states immediately reintroduce nonlocal correlations.“

16.0.2. Determinismus und Indeterminismus

Eine Grundlegende Frage, die im Rahmen der stochastischen Mechanik bzw. generell in der Quantenmechanik gestellt wird, ist, ob es einen **objektiven Zufall** gibt.

Mit dem Aufstieg der Naturwissenschaften in der frühen Neuzeit entstand die Ansicht, dass alle grundsätzlich Naturvorgänge berechenbar sind, sofern man alle Parameter kennt. Dies wird als **Determinismus** bezeichnet.⁴

Wenn ein Ereignis ohne erkennbaren Grund auftritt, bezeichnen wir es als zufällig. Zum Beispiel besitzen in einem idealen Gas die Atome zu einem bestimmten Zeitpunkt unterschiedliche Energien und Geschwindigkeiten. Wenn man die Temperatur kennen, kennen man auch den Mittelwert der kinetischen Energie und der Geschwindigkeit. Das ideale Gas folgt Gesetzen, aber man kennt die kinetische Energie eines einzelnen Gasmoleküls nicht, es sei denn, sie wird explizit gemessen. Angesichts der vielen Atome im Gas ist es theoretisch möglich, ihre Energien zu bestimmen, praktisch jedoch nicht umsetzbar. Ohne Messung können wir die kinetische Energie aller Moleküle im Gas und eines bestimmten Moleküls nie genau kennen. Erhält man durch eine Messung die kinetische Energie eines bestimmten Moleküls, handelt es sich um *subjektiven Zufall* aufgrund der Unkenntnis über die Dynamik aller Moleküle im Gas. Theoretisch könnte die Dynamik aller Gasmoleküle berechnet werden, was aber einer schieren Anzahl Molekülen in einer Größenordnung von 10^{23} Einzelteilchen de facto sinnlos ist.

Grundlegende Annahme der stochastischen Mechanik ist, dass die Vorgänge auf mikroskopischer Ebene durch die Wechselwirkung mit virtuellen Teilchen bestimmt werden. Da das Verhalten dieser virtuellen Teilchen (zumindest derzeit) nur durch stochastische Modelle beschrieben werden kann, macht es durchaus Sinn hier in der mikroskopischen Ebene einem **echten Zufall** zu postulieren. Allerdings ist es, wie schon in ?? dargelegt, auch möglich, dass das stochastische Modell lediglich – beim Würfeln, oder in der Thermodynamik – auf unserer Unkenntnis der genauen Rahmenbedingungen basiert.

Im Gegensatz zu ?? kann man die Meinung vertreten, dass für die Grundlegenden Aussagen der stochastischen Mechanik hier kein Unterschied zwischen einem objektiven Zufall und einem deterministischen Zufall existiert. Die grundlegende mathematische Beschreibung wäre in beiden Fällen gleich und wie schon gesagt sind die daraus resultierenden verborgenden Variablen ausschließlich *nicht-lokal* Natur. Hinsichtlich der in Abschnitt 16 getroffenen Aussagen ist jedoch ein objektiver Zufall zu bevorzugen.

⁴Die Frage, ob der Determinismus oder der Indeterminismus die Physik, insbesondere die Quantenmechanik beherrscht, mündet häufig in philosophischen Diskussionen zum **freier Wille**, die aber nicht Bestandteil dieses Kompendiums sind.

16.0.3. Observablen und Messungen

Observablen

In der Quantenmechanik entspricht jedem Observablen ein selbstadjungierter Operator A . Der quantenmechanische Erwartungswert des Observablen A in einem Zustand ψ ist gegeben durch

$$\langle \psi, A\psi \rangle.$$

In der stochastischen Mechanik entsprechen Observablen der Beobachtung des Diffusionsprozesses X_t . Die grundlegenden Beobachtungen werden durch sogenannte Zylinderfunktionen der Form

$$F_{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})}$$

beschrieben, wobei f eine reellwertige, beschränkte und messbare Funktion ist.

In dieser Theorie ist ein Observable also nichts anderes als eine Zufallsvariable⁵

17. Hydrodynamische Analoga der Quantenmechanik

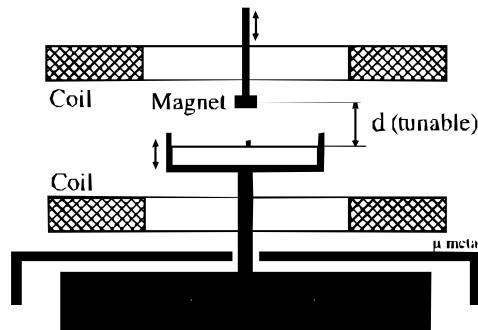


Abbildung 17.1.: Experimenteller Aufbau zur Untersuchung Hydrodynamische Analoga.

Als hydrodynamische Quantenanaloga¹ werden in der Physik experimentell beobachtete Phänomene bezeichnet, bei denen Flüssigkeitströpfchen auf einem vibrierenden Flüssigkeitsbad hüpfen und sich analog zu verschiedenen quantenmechanischen Systemen verhalten[1].[2][3] Der experimentelle Nachweis ist umstritten.

Ein Tröpfchen kann in einer stationären Position auf einer vibrierenden Flüssigkeitsoberfläche unendlich lange hin und her springen. Dies ist möglich, weil eine durchdringende Luftsicht verhindert, dass der Tropfen mit dem Bad verschmilzt.[4] Bei bestimmten Kombinationen von Beschleunigung der Badoberfläche, Tropfengröße und Vibrationsfrequenz bleibt ein hüpfender Tropfen nicht mehr in einer stationären Position, sondern "wandert in einer geradlinigen Bewegung auf dem Flüssigkeitsbad. [5] Es wurde festgestellt, dass wandernde Tröpfchensysteme verschiedene quantenmechanische Phänomene nachahmen, darunter Teilchenbeugung, Quantentunnellen, quantisierte Bahnen, den Zeeman-Effekt und das Quantenkorral[6][7][8][9][10].

Abgesehen davon, dass sie ein interessantes Mittel zur Veranschaulichung von Phänomenen sind, die für die quantenmechanische Welt typisch sind, weisen schwebende

¹Wiki: ([Link](#)), ([Link](#))

Tropfen auf einer vibrierenden Badewanne interessante Analogien zur Pilotwellentheorie auf, einer der vielen Interpretationen der Quantenmechanik in ihren frühen Stadien der Konzeption und Entwicklung. Diese Theorie wurde ursprünglich von Louis de Broglie im Jahr 1927 vorgeschlagen[11] und besagt, dass alle Teilchen, die sich bewegen, in Wirklichkeit von einer wellenartigen Bewegung getragen werden, ähnlich wie ein Objekt sich auf einer Flut bewegt. In dieser Theorie wird die Entwicklung der Trägerwelle durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben. Es handelt sich um eine deterministische Theorie, die vollständig nichtlokal ist. Sie ist ein Beispiel für eine Theorie der verborgenen Variablen, und die gesamte nichtrelativistische Quantenmechanik kann in dieser Theorie berücksichtigt werden. Die Theorie wurde 1932 von de Broglie aufgegeben, wich der Kopenhagener Deutung, wurde aber 1952 von David Bohm als De Broglie-Bohm-Theorie wiederbelebt. Die Kopenhagener Deutung verwendet weder das Konzept der Trägerwelle noch die Annahme, dass sich ein Teilchen auf bestimmten Bahnen bewegt, bis eine Messung durchgeführt wird. Physik der hüpfenden und wandernden Tröpfchen Geschichte

Schwebende Tröpfchen auf einem vibrierenden Bad wurden erstmals 1978 von Jearl Walker in einem Artikel in der Zeitschrift *Scientific American* schriftlich beschrieben.

Im Jahr 2005 untersuchten Yves Couder und sein Labor als Erste systematisch die Dynamik hüpfender Tröpfchen und entdeckten die meisten quantenmechanischen Entsprechungen.

John Bush und sein Labor bauten auf Couders Arbeit auf und untersuchten das System eingehender. Im Jahr 2015 versuchten drei verschiedene Gruppen, darunter auch John Bush, den Effekt zu reproduzieren, was ihnen nicht gelang.[12]/[13]/[14] Stationäres hüpfendes Tröpfchen

Ein Flüssigkeitstropfen kann über einem vibrierenden Flüssigkeitsbad schweben oder hüpfen, weil sich zwischen dem Tropfen und der Badoberfläche eine Luftsicht befindet. Das Verhalten des Tropfens hängt von der Beschleunigung der Badoberfläche ab. Unterhalb einer kritischen Beschleunigung wird das Tröpfchen immer kleinere Sprünge machen, bevor die dazwischen liegende Luftsicht schließlich abfließt und das Tröpfchen zusammenwächst. Oberhalb der Abprallschwelle füllt sich die dazwischenliegende Luftsicht bei jedem Abprall wieder auf, so dass das Tröpfchen die Badoberfläche nie berührt. In der Nähe der Badoberfläche steht das Tröpfchen im Gleichgewicht zwischen Trägheitskräften, Schwerkraft und einer Reaktionskraft, die durch die Wechselwirkung mit der Luftsicht über der Badoberfläche entsteht. Diese Reaktionskraft dient dazu, das Tröpfchen wie ein Trampolin wieder über die Luft zu schleudern. Molacek und Bush haben zwei verschiedene Modelle für die Reaktionskraft vorgeschlagen. Wanderndes Tröpfchen

Für einen kleinen Bereich von Frequenzen und Tropfengrößen kann ein Flüssigkeitstropfen auf einem vibrierenden Bad dazu gebracht werden, auf der Oberfläche zu

laufen", wenn die Oberflächenbeschleunigung ausreichend hoch ist (aber noch unterhalb der Faradayschen Instabilität). Das heißt, das Tröpfchen prallt nicht einfach an einer festen Stelle ab, sondern wandert in einer geraden Linie oder in einer chaotischen Bahn. Wenn ein Tröpfchen mit der Oberfläche interagiert, erzeugt es eine transiente Welle, die sich vom Aufprallpunkt ausbreitet. Diese Wellen klingen normalerweise ab, und stabilisierende Kräfte verhindern, dass das Tröpfchen abdriftet. Wenn die Oberflächenbeschleunigung jedoch hoch ist, klingen die beim Aufprall entstehenden transienten Wellen nicht so schnell ab und verformen die Oberfläche, so dass die Stabilisierungskräfte nicht ausreichen, um den Tropfen zu halten. So beginnt das Tröpfchen zu "wandern". Quantenphänomene auf makroskopischer Ebene

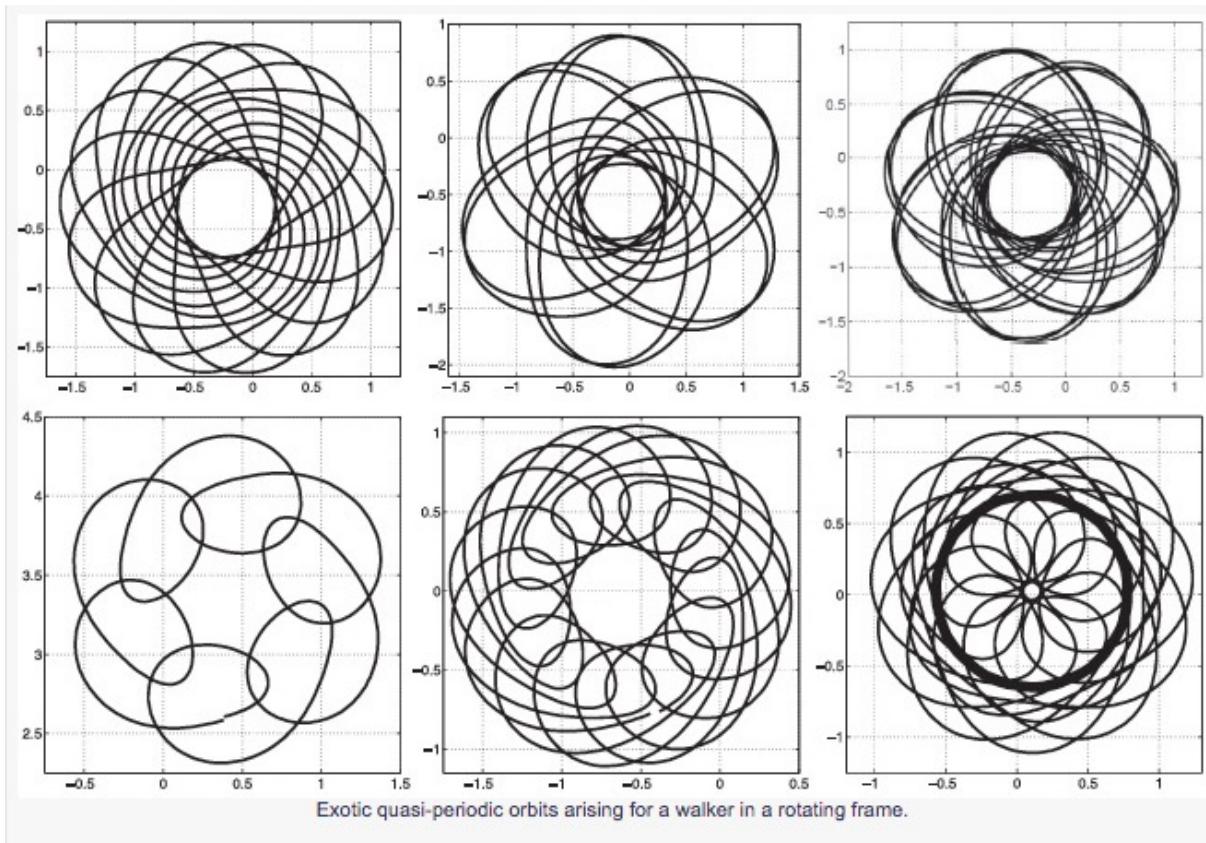


Abbildung 17.2.: Bewegungsmuster eines Tröpfchens auf einer vibrierenden Oberfläche (Quelle: [\(Link\)](#) .

Es wurde festgestellt, dass sich ein wanderndes Tröpfchen auf einem vibrierenden Flüssigkeitsbad analog zu mehreren verschiedenen quantenmechanischen Systemen verhält, nämlich zu Teilchenbeugung, Quantentunneln, quantisierten Umlaufbahnen, dem Zeeman-Effekt und dem Quantenkorral.

Einzel- und Doppelspaltbeugung

Seit dem frühen 19. Jahrhundert ist bekannt, dass sich auf einem weit von den Schlitzen entfernten Bildschirm ein Beugungsmuster zeigt, wenn Licht durch einen oder zwei kleine Schlitze fällt. Das Licht verhält sich wie eine Welle und interferiert mit sich selbst durch die Spaltöffnungen, wodurch ein Muster aus abwechselnd hoher und niedriger Intensität entsteht. Einzelne Elektronen zeigen ebenfalls wellenförmiges Verhalten als Ergebnis des Welle-Teilchen-Dualismus. Wenn Elektronen durch kleine Schlitze geschossen werden, zeigt die Wahrscheinlichkeit, dass das Elektron an einem bestimmten Punkt auf dem Schirm auftrifft, ebenfalls ein Interferenzmuster.

Im Jahr 2006 wiesen Couder und Fort nach, dass Tröpfchen, die durch einen oder zwei Schlitze laufen, ein ähnliches Interferenzverhalten zeigen.^[?] Sie verwendeten ein vibrierendes Flüssigkeitsbad in quadratischer Form mit konstanter Tiefe (abgesehen von den Wänden). Bei den "Wänden" handelte es sich um Bereiche mit viel geringerer Tiefe, in denen die Tröpfchen aufgehalten oder reflektiert wurden. Wenn die Tröpfchen an der gleichen Stelle platziert wurden, passierten sie die Schlitze und wurden scheinbar zufällig gestreut. Bei der Erstellung eines Histogramms der Tröpfchen auf der Grundlage des Streuwinkels stellten die Forscher jedoch fest, dass der Streuwinkel nicht zufällig war, sondern die Tröpfchen bevorzugte Richtungen hatten, die dem gleichen Muster folgten wie Licht oder Elektronen. Auf diese Weise kann das Tröpfchen das Verhalten eines Quantenteilchens beim Durchgang durch den Spalt imitieren.

Trotz dieser Forschungen wurden 2015 drei Teams gegründet: Die Gruppe von Bohr und Andersen in Dänemark, das Team von Bush am MIT und ein Team unter der Leitung des Quantenphysikers Herman Batelaan an der Universität von Nebraska machten sich daran, das Doppelspaltexperiment von Couder und Fort mit aufsprüngenden Tröpfchen zu wiederholen. Nachdem sie ihre Versuchsaufbauten perfektioniert hatten, konnte keines der Teams das von Couder und Fort berichtete interferenzähnliche Muster beobachten.^[?] Die Tröpfchen liefen in fast geraden Linien durch die Schlitze, und es erschienen keine Streifen.^[?]

Quantentunneln

Quantentunneln ist ein quantenmechanisches Phänomen, bei dem ein Quantenteilchen eine Potenzialbarriere durchquert. In der klassischen Mechanik kann ein klassisches Teilchen eine potentielle Barriere nicht durchdringen, wenn das Teilchen nicht genügend Energie hat, so dass der Tunneleffekt auf den Quantenbereich beschränkt ist. Ein rollender Ball würde zum Beispiel ohne ausreichende Energie nicht den Gipfel eines steilen Hügels erreichen. Ein Quantenteilchen, das sich wie eine Welle verhält, kann jedoch sowohl eine Reflexion als auch eine Transmission an einer potenziellen

Barriere erfahren. Dies kann als Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung gezeigt werden. Es besteht eine endliche, aber in der Regel geringe Wahrscheinlichkeit, das Elektron an einem Ort hinter der Barriere zu finden. Diese Wahrscheinlichkeit nimmt mit zunehmender Barrierenbreite exponentiell ab.

Die makroskopische Analogie mit Flüssigkeitströpfchen wurde erstmals 2009 demonstriert. Die Forscher richteten ein quadratisches Vibrationsbad ein, das an seinem Rand von Wänden umgeben war. Bei diesen "Wänden" handelte es sich um Bereiche mit geringerer Tiefe, an denen ein wanderndes Tröpfchen reflektiert werden kann. Wenn die wandernden Tröpfchen sich in dem Bereich bewegen durften, wurden sie in der Regel von den Wänden weg reflektiert. Überraschenderweise hüpfte das wandernde Tröpfchen jedoch manchmal an der Barriere vorbei, ähnlich wie ein Quantenteilchen, das einen Tunnel durchläuft. Tatsächlich wurde auch festgestellt, dass die Wahrscheinlichkeit, die Barriere zu passieren, mit zunehmender Breite der Barriere exponentiell abnimmt, genau wie bei einem Quantentunnelteilchen [?].

Quantisierte Bahnen

Wenn zwei atomare Teilchen miteinander wechselwirken und einen gebundenen Zustand bilden, wie z. B. beim Wasserstoffatom, ist das Energiespektrum diskret. Das heißt, die Energieniveaus des gebundenen Zustands sind nicht kontinuierlich, sondern existieren nur in diskreten Mengen und bilden "quantisierte Bahnen". Im Falle des Wasserstoffatoms sind die quantisierten Bahnen durch Atomorbitale gekennzeichnet, deren Form eine Funktion diskreter Quantenzahlen ist.

Auf makroskopischer Ebene können zwei wandernde Flüssigkeitströpfchen auf einer vibrierenden Oberfläche interagieren. Es wurde festgestellt, dass die Tröpfchen einander in einer stabilen Konfiguration mit einem festen Abstand umkreisen. Die stabilen Abstände wurden in diskreten Werten angegeben. Die stabilen kreisenden Tröpfchen stellen analog einen gebundenen Zustand in einem quantenmechanischen System dar. Die diskreten Werte des Abstands zwischen den Tröpfchen entsprechen auch den diskreten Energieniveaus [?].

Zeeman-Effekt

Wenn ein äußeres Magnetfeld an ein Wasserstoffatom angelegt wird, verschieben sich die Energieniveaus zu Werten, die leicht über oder unter dem ursprünglichen Niveau liegen. Die Richtung der Verschiebung hängt vom Vorzeichen der z-Komponente des Gesamtdrehimpulses ab. Dieses Phänomen ist als Zeeman-Effekt bekannt.

Im Zusammenhang mit wandernden Tröpfchen kann ein analoger Zeeman-Effekt durch die Beobachtung kreisender Tröpfchen in einem vibrierenden Flüssigkeitsbad demonstriert werden [?]. Das Bad wird ebenfalls mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in Rotation versetzt. In dem rotierenden Bad verschiebt sich der Gleichgewichtsabstand zwischen den Tröpfchen etwas weiter oder näher. Die Richtung der Verschiebung hängt davon ab, ob die umlaufenden Tropfen in der gleichen Richtung wie das Bad oder in entgegengesetzter Richtung rotieren. Die Analogie zum Quanteneffekt ist offensichtlich. Die Rotation des Bades entspricht einem von außen angelegten Magnetfeld, und der Abstand zwischen den Tröpfchen entspricht den Energieniveaus. Der Abstand verschiebt sich unter einer angelegten Badrotation, so wie sich die Energieniveaus unter einem angelegten Magnetfeld verschieben.

Quantenkorral

Im Rahmen der Experimente wurde herausgefunden, dass ein wanderndes Tröpfchen in einem kreisförmigen Bad nicht wahllos umherwandert, sondern dass es bestimmte Orte gibt, an denen das Tröpfchen mit größerer Wahrscheinlichkeit zu finden ist. Insbesondere ist die Wahrscheinlichkeit, das wandernde Tröpfchen zu finden, in Abhängigkeit von der Entfernung vom Zentrum ungleichmäßig und es gibt mehrere Spitzen mit höherer Wahrscheinlichkeit. Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung ähnelt der eines Elektrons, das in einem Quantenkorral eingeschlossen ist.[?]

17.0.1. Observablen

In der Regel kommt man in Standardwerken zur Quantenmechanik nach dem Bekanntmachen der Schrödinger-Gleichung recht schnell zum Korrespondenzprinzip. Dazu wird durch Erraten eine Regel aufgestellt, wie sogenannte Observablen, also messbare physikalische Größen, allgemeingültig auf mathematische Operatoren \hat{O} abgebildet werden. Mit Hilfe dieser Operatoren lässt sich aus der Wellenfunktion der Erwartungswert für die entsprechende physikalische Größe, das heißt die Observable, berechnen.

Etwas moderner wird diese Abbildung als POVM (Positive Operator Valued Measure) bezeichnet. Trotzdem bleibt dies ein rein mathematisches Konzept, dessen physikalische Begründung nicht einfach ersichtlich ist. Diese Situation kann mit einem Zitat von G. Ludwig illustriert werden [?]:

„In dieser Sachlage können wir also den Leser beruhigen, wenn er den Eindruck hat, rein gar nichts von der physikalischen Bedeutung der Struktur der Gesetze für das Rechnen mit Operatoren erkennen zu können; es ist

eben unmöglich, eine solche physikalische Bedeutung unmittelbar zu erkennen. Er muss sich zunächst damit zufrieden geben, dass es uns gelungen ist, mit Hilfe des Korrespondenzprinzips ein formales Schema für die gesuchte Quantentheorie zu erraten ...”

Ein weiteres Manko dieser Abbildungsregeln ist, dass einige der sogenannten Observablen selbst gar nicht messbar sind, beispielsweise die Energie. Messbar sind lediglich Energiedifferenzen in Form von Emissions- und Absorptionsspektren, die daneben auch eine natürliche Linienbreite aufweisen. Auf der anderen Seite gibt es experimentell sehr gut bestimmbarer Größen, wie die Bindungswinkel in Molekülen oder die Gitterkonstanten von Festkörpern, die keinem Hermiteschen Operator der Standard-Theorie entsprechen.

Diese Probleme tauchen bei der Stochastischen Mechanik nicht auf. Energie und Impuls lassen sich, wie im Abschnitt ?? gezeigt, konsequent aus ihrer physikalischen Bedeutung herleiten. Dazu bedarf es keines Korrespondenzprinzips oder anderer erratener Formalismen. Das Gleiche gilt auch für den Drehimpuls.

Das Problem einer Observable Bindungswinkel besteht bei der Stochastischen Mechanik nicht, da hier keine Operatoren abgebildet werden müssen. Den Bindungswinkel erhält man einfach, indem man für das entsprechende Molekül die Atomanordnung mit der niedrigsten Gesamtenergie sucht.

Ein weiterer Punkt sei hier nur kurz erwähnt. Im Standardzugang zur Quantenmechanik wird oft unterstellt, man könne den Erwartungswert eines Operators beliebig genau messen (oder die Erwartungswerte mehrerer Operatoren gleichzeitig, falls diese Vertauschungsregeln gehorchen). Es wird aber völlig offen gelassen, wie solche Messungen auszuführen sind. Messgeräte bestehen aus Atomen, die damit ebenfalls schon Unschärfe aufweisen. Die Spektrallinien von Atomen weisen eine natürliche Linienbreite auf. Es ist sehr aufschlussreich, wenn selbst Eugene Wigner, Physik-Nobelpreisträger des Jahres 1963 und einer der großen Mitwirkenden bei der Entstehung der Quantenmechanik, in einem Buch „Quantum Theory of Measurement“ schreibt:

„All these are concrete and clearly demonstrated limitations on the measurability of operators. They should not obscure the other, perhaps even more fundamental weakness of the Standard theory, that it postulates the measurability of operators but does not give directions as to how the measurement should be carried out.“

18. Kritik an der Stochastischen Mechanik und der Stochastischen Elektrodynamik

Beide Theorien die Stochastische Mechanik und die Stochastische Elektrodynamik (SED) versuchen, die Quantenmechanik als emergentes Phänomen aus einer zugrunde liegenden stochastischen Dynamik zu erklären. Beide stoßen jedoch auf wesentliche Kritik.

Ausgewählte Literatur: [10]

Gründe für die begrenzte Akzeptanz

Die Zurückhaltung hinsichtlich der Stochastischen Mechanik hat mehrere Ursachen:

Konzeptionell schwer zu motivieren: Nelson postuliert eine reale mikroskopische Brownsche Bewegung, deren physikalische Quelle unklar bleibt.

Mess- und Mehrteilchenprobleme: Schwierigkeiten bei der Beschreibung von Spin, Messprozessen und nichtlokalen Korrelationen (EPR/Bell).

Keine neuen experimentellen Vorhersagen: Die Theorie reproduziert die Quantenmechanik, erklärt sie aber nicht besser oder präziser in messbaren Punkten.

Mathematische Komplexität: Die Sprache der Diffusionsprozesse ist sehr anspruchsvoll – weniger zugänglich als der Standardformalismus.

Aktueller Stand und Kritik

Heutige Forschung behandelt Nelsons stochastische Mechanik meist:

- als historische und mathematische Brücke zwischen klassischer Stochastik und Quantenmechanik,
- oder als vergleichsweise saubere Form eines hidden-variable-Modells ohne deterministische Bahnen.

Einige Quanteninformationstheoretiker nutzen ähnliche Diffusionsgleichungen in quantum trajectories und continuous measurement theory – allerdings meist ohne direkten Bezug zur Stochastischen Mechanik.

Aspekt	Bewertung	
Mathematische Strenge	Hoch	Nelsons Formalismus ist konsistent und elegant.
Physikalische Akzeptanz	Niedrig	Kein Bestandteil der Standardtheorie.
Konzeptionelle Bedeutung	Mittel	Interessante Alternative zu Bohm und zur stochastischen Quantisierung.
Aktuelle Forschung	Niedrig	Nischengebiet in mathematischer Physik und Quantenfundamenten.

18.0.1. Stochastische Mechanik

Nelsons Idee [4] war, die Schrödinger-Gleichung als Bewegungsgleichung eines Brownschen Teilchens in einem geeigneten „oszillatorischen“ Rauschfeld zu rekonstruieren.

Kritikpunkte:

- **Ad-hoc-Annahmen:** Die stochastischen Rauschterme bzw. die Vakuumfluktuationen wurden ad-hoc, phänomenologisch eingeführt, um genau die Schrödinger-Gleichung zu erhalten.
- **Spin und Relativität:** Schwierigkeiten bei der Erweiterung auf Spin und relativistische Systeme.
- **Mathematische Probleme:** In Mehrteilchen-Systemen treten Inkonsistenzen auf.

18.0.2. Stochastische Elektrodynamik (SED)

Die Stochastische Elektrodynamik als eine verwandte Theorie postuliert, dass Quantenphänomene aus der Wechselwirkung klassischer Teilchen mit einem elektromagnetischen Nullpunktssfeld (ZPF) resultieren.

Kritikpunkte:

- Reproduktion nur spezieller Phänomene (z. B. harmonischer Oszillator, Casimir-Effekt).
- Konflikt mit Verletzungen der Bell-Ungleichungen.
- Divergentes Energieproblem durch unendliche ZPF-Energie.
- Fehlende Allgemeinheit und teilweise falsche experimentelle Vorhersagen.

Gemeinsame Kritik

- Formal interessante Rekonstruktionen, aber ohne neue, bestätigte Vorhersagen.
- Spezifische Rauschmodelle wirken willkürlich.

Unbegründete Kritik

- Keine experimentellen Hinweise auf zugrunde liegendes Rauschen oder Nullpunktssfeld.
Dieser Punkt wird häufig genannt. Allerdings ist er unbegründet (siehe hierzu Abschnitt ?? zur Physik des Vakuums). Stichhaltig bleibt lediglich, dass die Vakuumfluktuationen ad-hoc eingeführt werden (siehe Abschnitt 18.2).

18.1. Der Teilchenspim in der Stochastische Mechanik

In ihrer Ursprungsform [4] war die Stochastische Mechanik für spinlose Teilchen formuliert worden. Dies führte im Verlauf der Zeit zu einer massiven Kritik an der Stochastischen Mechanik.

Tabelle 18.1.: Tabellarische Übersicht der Stärken und Schwächen.

Theorie	Idee / Ansatz	Kritik / Schwächen
Stochastische Mechanik (SM)	Rekonstruktion der Schrödinger-Gleichung aus einer Brownschen Bewegung in einem hypothetischen Rauschfeld.	Ursprung des Rauschens unklar (ad-hoc); Probleme bei Spin und Relativität; Messproblem ungelöst; Schwierigkeiten bei Vielteilchen-Systemen; keine neuen, bestätigten Vorhersagen.
Stochastische Elektrodynamik (SED)	Klassische Teilchen in Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Nullpunktssfeld (ZPF) mit speziellem Spektrum.	Reproduktion nur bei Spezialfällen; Konflikt mit Bell-Experimenten; Energieproblem (Divergenzen); teilweise falsche Vorhersagen; keine konsistente Verallgemeinerung.

Mittlerweile gibt es Erweiterungen (siehe [?], [?], [?]), die Spin über zusätzliche stochastische Freiheitsgrade einführen. Allerdings wirken diese Erweiterungen wirken etwas ad-hoc. Weiterhin haben Sie nicht dieselbe Eleganz wie Bohms Theorie (wo Spin über die Pauli- oder Dirac-Gleichung direkt eingeht).

Ein weiterer Ansatzpunkt zur Einführung des Spins ist die Theorie nach Fritzsche (siehe [?], [?], [?]). Dieser Ansatz wird ausführlich in Abschnitt ?? behandelt.

18.2. Die Stochastische Mechanik als phänomenologische Theorie

Häufig wird der Stochastischen Mechanik vorgeworfen lediglich eine phänomenologische Theorie zu sein, die keine weiteren Erkenntnisse hinsichtlich der Quantenmechanik liefert. Dazu muss zunächst definiert werden, was man unter einer phänomenologischen Theorie versteht.

Als *phänomenologische Theorien* werden in der Physik solche Theorien bezeichnet, welche die Erscheinungen mitsamt ihren Konsequenzen nur fehlerfrei beschreiben, ohne ihre Ursachen zu erklären.

Die stochastische Mechanik ist eine Theorie, welche die Dynamik von Teilchen unter Berücksichtigung zufälliger Einflüsse zu beschreibt. Sie kann insofern als eine phänomenologische Theorie angesehen werden, da sie die Quantenmechanik zwar beschreibt, allerdings nicht auf die Ursachen oder die dort zugrundeliegenden Mechanismen einzugehen:

- Die Wirkung der Vakuumfluktuationen wird vorausgesetzt. Allerdings liefert die Stochastische Mechanik keine weiteren Erkenntnisse zur Ursache und Natur der Fluktuationen.
- Elementarteilchen werden mit ihren inhärenten Eigenschaften (Impuls, Energie, Ladung etc.) vorausgesetzt. Weitere Erkenntnisse über ihre Struktur liefert die Stochastische Mechanik hingegen nicht.

18.3. Die Stochastische Mechanik für relativistische Teilchen

Die Stochastische Mechanik ist stark auf die Bewegung klassischer Teilchen ausgerichtet. Wie schon beschrieben unterliegen sie einer brownschen Bewegung, jedoch mit einem zusätzlichen „zufälligen Rückwärts“Term (zeitlich reversibler Prozess). Die größte theoretische Herausforderung dieser Theorie war schon immer ihre Vereinbarkeit mit der Speziellen Relativitätstheorie, also der Lorentz-Invarianz.

Versuche, eine Lorentz-kovariante Version herzuleiten, haben große Schwierigkeiten, da stochastische Prozesse mit Wiener-Dynamik nicht Lorentz-invariant sind. Deshalb bleibt die Theorie im Kern nichtrelativistisch und kann nicht ohne weiteres auf Quantenfeldtheorie oder Dirac-Gleichung verallgemeinert werden.

Eine vollständig konsistente, etablierte und experimentell bestätigte lorentz-invariante Version der Stochastischen Mechanik existiert nicht. Es handelt sich um ein ungelöstes fundamentales Problem dieser Theorie.

Das grundlegende Problem: Die Rolle der Zeit

Der Kern des Problems liegt in der Behandlung der Zeit:

- **Präferierte Zeitkoordinate:** Die Beschreibung der stochastischen Dynamik erfordert eine besondere Zeitkoordinate für die Evolution des Prozesses. In der Relativitätstheorie gibt es jedoch keine universelle, für alle Beobachter gültige Zeit. Jeder inertialbeobachter hat seine eigene Zeit. Die Wahl einer bestimmten Zeit bricht die Lorentz-Invarianz explizit.
- **Hyperbolische vs. parabolische Differentialgleichungen:**
 - Die Schrödinger-Gleichung (Ziel der stochastischen Mechanik) ist parabolisch (erster Ordnung in der Zeit, zweiter Ordnung im Raum), ähnlich einer Diffusionsgleichung.

- Die fundamentalen Gleichungen der relativistischen Physik (Klein-Gordon-, Dirac-Gleichung) sind dagegen hyperbolisch (zweiter Ordnung in Raum und Zeit).
- Eine parabolische Gleichung impliziert eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Informationen (wenn auch stark gedämpft), was im Widerspruch zur Lichtgeschwindigkeit als Obergrenze steht.

18.3.1. Ansätze für eine Lorentz-invariante Stochastische Mechanik

Trotz dieser gewaltigen Hürden gab es verschiedene Versuche, das Problem anzugehen. Diese Ansätze können in zwei Hauptkategorien unterteilt werden:

Ansätze innerhalb der stochastischen Mechanik

Hier wird versucht, die Theorie direkt zu modifizieren.

Kovariante Verallgemeinerung der stochastischen Dynamik: Man versucht, die stochastischen Differentialgleichungen (SDEs) in einer kovarianten Weise auf der Raumzeit zu formulieren. Das bedeutet, den stochastischen Prozess nicht entlang einer präferierten Zeit, sondern entlang einer Eigenzeit τ (proper time) zu definieren.

Problem: Die Eigenzeit ist selbst eine dynamische Variable, die vom Pfad des Teilchens abhängt. Dies führt zu erheblichen mathematischen Komplikationen und einer viel komplexeren Theorie, die nicht mehr äquivalent zur Standard-Quantenmechanik ist.

Präferierter Rahmen (Preferred Frame): Man gibt die strikte Lorentz-Invarianz auf mikroskopischer Ebene auf und postuliert einen speziellen Bezugsrahmen (z. B. den des kosmischen Mikrowellenhintergrunds), in dem die stochastische Dynamik gilt. Auf makroskopischer Ebene und für Experimente mit niedrigen Energien würde die Lorentz-Invarianz dann als eine emergente Eigenschaft erscheinen, ähnlich wie in einigen Theorien der kondensierten Materie.

Nachteil: Dieser Ansatz ist philosophisch unbefriedigend, da er ein fundamentales Prinzip der modernen Physik opfert.

Ansätze, die von der Stochastische Mechanik inspiriert werden

Diese Ansätze sind eher als eigenständige relativistische Theorien zu verstehen, die von der Philosophie der stochastischen Mechanik beeinflusst sind.

Stochastische Quantenfeldtheorie (Stochastic Quantization): Dieser von PARISI und WU entwickelte Ansatz ist der vielversprechendste und am weitesten entwickelte. Die Idee ist hier wie folgt:

- Man führt eine fiktive zusätzliche Zeitdimension (oft Langevin-Zeit genannt) ein, die nicht mit der physikalischen Raumzeit-Zeit identisch ist.
- Die Felder der Quantenfeldtheorie (QFT) unterliegen in dieser fiktiven Zeit einem stochastischen Prozess (z. B. einer Langevin-Gleichung).
- Im thermischen Gleichgewicht bezüglich dieser fiktiven Zeit reproduziert die Theorie die korrekten Green-Funktionen der Lorentz-invarianten QFT.

Vorteil: Die physikalische Raumzeit bleibt lorentz-invariant. Die Stochastizität ist ein Hilfsmittel zur Quantisierung, nicht eine Eigenschaft der Teilchenbahnen.

Stochastische Elektrodynamik (SED): In dieser Theorie wird das Quantenverhalten auf eine klassische Wechselwirkung von Teilchen mit einem lorentz-invarianten stochastischen Hintergrundfeld (dem Zero-Point Field) zurückgeführt. Die Stochastische Elektrodynamik kann nicht-relativistisch einige quantenmechanische Ergebnisse reproduzieren, aber eine konsistente relativistische Verallgemeinerung steht auch hier aus.

18.3.2. Fazit

Die Frage, wie die Stochastische Mechanik lorentz-invariant werden kann, führt direkt zu den tiefsten Problemen der Interpretation der Quantenmechanik und ihrer Vereinigung mit der Relativitätstheorie.

Eine direkte Lorentzinvariante Erweiterung der Teilchentrajektorien-Interpretation scheint aufgrund der beschriebenen konzeptionellen Probleme (Nicht-Lokalität, präferierte Zeit) äußerst schwierig zu sein.

Der vielversprechendste Weg, den Geist der stochastischen Mechanik (Zufall als fundamental) mit der Relativitätstheorie zu vereinen, ist wahrscheinlich nicht die Modifikation von Teilchenbahnen, sondern die Anwendung stochastischer Prinzipien auf Felder im Rahmen der stochastischen Quantisierung¹

18.3.3. Die Geschwindigkeit von Elektronen in Wasserstoffatomen

Die Kritik, dass die Stochastische Mechanik nicht für relativistische Teilchen gilt ist grundsätzlich valide. Allerdings kann an dieser Stellen darauf hingewiesen werden, dass für viele praktische Anwendungen der Schrödinger-Gleichung eine relativistische Behandlung nicht notwendig ist.

Als einfachster Fall soll hier ein Elektron behan delt werden, das sich in einem einfachen Zentralpotential befindet (wasserstoff-ähnliche Ionen/Atome).

Die typische Elektronengeschwindigkeit im Grundzustand des Wasserstoffatoms ($Z = 1$, $n = 1$) ist

$$v_{\text{typ}} = \alpha c \approx 2.188 \times 10^6 \text{ m/s} \approx 0.0073 c \quad (18.1)$$

wobei α die Feinstrukturkonstante ist.

Im nachfolgenden werden die Berechnungen nochmals vertieft.

Methode A: Virialsatz

Für das Coulombpotential gilt der Virialsatz für gebundene Zustände:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle \quad (18.2)$$

Für den Grundzustand des Wasserstoffatoms ist $E_1 = -\frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2$, also

$$\langle T \rangle = -E_1 = \frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2 \quad (18.3)$$

$$\langle p^2 \rangle = 2m_e \langle T \rangle = m_e^2 \alpha^2 c^2 \quad (18.4)$$

Damit folgt

$$v_{\text{rms}} = \frac{\sqrt{\langle p^2 \rangle}}{m_e} = \alpha c \quad (18.5)$$

¹Siehe auch die Anmerkungen zu virtuellen Partikeln in Abschnitt ??.

Methode B: Explizite Berechnung mit der 1s-Wellenfunktion

Die 1s-Wellenfunktion lautet

$$\psi_{1s(r)} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \quad \text{und} \quad a_0 = \frac{\hbar}{m_e \alpha c} \quad (18.6)$$

Mit

$$\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int \psi_{(\vec{r})}^* \nabla^2 \psi_{(\vec{r})} d^3 \vec{r} \quad (18.7)$$

und der Identität

$$\nabla^2 \psi = \left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{2}{ra_0} \right) \psi \quad (18.8)$$

folgt (unter Verwendung von $\langle 1/r \rangle = 1/a_0$ für den 1s-Zustand)

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{a_0^2} = m_e^2 \alpha^2 c^2 \quad (18.9)$$

also wieder

$$v_{\text{rms}} = \alpha c \quad (18.10)$$

Numerische Werte und Skalierung mit Z

Für wasserstoffähnliche Systeme (ein Elektron am Kern mit Ladung $+Ze$) gilt

$$v_n \approx \frac{Z \alpha c}{n} \quad (18.11)$$

Einige Beispielwerte für $n = 1$ (mit $\alpha \approx 7.2973525693 \times 10^{-3}$):

Z	v (approx)	v/c
1	$2,188 \cdot 10^6 \text{ m/s}$	0.00730
2	$4,376 \cdot 10^6 \text{ m/s}$	0.0146
10	$2,188 \cdot 10^7 \text{ m/s}$	0.0730
29	$6,344 \cdot 10^7 \text{ m/s}$	0.2116
47	$1,028 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	0.3430
79	$1,728 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	0.5765
92	$2,013 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	0.6714

Anmerkung: Diese Werte sind für wasserstoffähnliche (Ein-Elektron)-Modelle; in Mehr-Elektronen-Atomen verringert Abschirmung das effektive Z für äußeren Elektronen.

Grenzbetrachtung für relativistische Effekte

Relativistische Korrekturen skalieren ungefähr wie $(v/c)^2 \sim (Z\alpha)^2$:

- Für $Z \lesssim 10$ sind die Korrekturen sehr klein.
- Bei $Z \sim 20\text{--}30$ treten prozentuale Effekte auf.
- Für $Z \gtrsim 50$ werden relativistische Effekte dominant und eine Dirac- bzw. Dirac-Fock-Betrachtung ist erforderlich.

Dirac-Lösung für wasserstoffähnliche Ionen

Die gebundenen Energieniveaus des Dirac-Atoms sind (kanonische Form):

$$E_{n,j} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n-j-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-(Z\alpha)^2}\right)^2}}} \quad (18.12)$$

Die Bindungsenergie ist $E_{\text{Bind}} = E_{n,j} - m_e c^2$ (negativ).

Nichtrelativistischer Grenzfall

Für kleine $Z\alpha$ expandiert man (18.12) und erhält

$$E_{n,j} = m_e c^2 - \frac{m_e c^2 (Z\alpha)^2}{2n^2} + \mathcal{O}((Z\alpha)^4) \quad (18.13)$$

woraus die bekannte Schrödinger-Bindungsenergie

$$E_{Schr} = -\frac{m_e c^2 (Z\alpha)^2}{2n^2} \quad (18.14)$$

folgt.

19. Quantencomputing

Quantencomputing wird oft als die nächste große Revolution in der Informatik gefeiert und verspricht, Berechnungen in einer Geschwindigkeit durchzuführen, die für klassische Computer unerreichbar scheint. Nach der orthodoxen Quantenmechanik nutzt er sogenannte Qubits, die sich in Zuständen befinden können, die nicht nur 0 oder 1 sind, sondern eine Überlagerung dieser Zustände darstellen. Diese Überlagerung und die Möglichkeit zur Verschränkung von Qubits sollen eine exponentielle Beschleunigung bei bestimmten Berechnungen ermöglichen.

Jedoch zeigt sich, dass sowohl die orthodoxe Sichtweise, als auch technologische Grenzen Quantencomputing in der Praxis limitieren.

*Im Folgenden wird auf ein Thema Quantencomputing unter besonderer Berücksichtigung der Stochastischen Mechanik eingegangen. Im Fokus steht dabei eine saubere **Ontologie**.*

- Quantencomputing
 - Quantenalgorithmen
 - Quantencomputer
 - * Quantengatter, Quantenregister
(mit massebehafteten Teilchen)
 - * Quantenannealer
 - * Photonische Quantenrechner
- (nicht Bestandteil dieses Kompendiums)

Grundsätzlich wird die Stochastische Mechanik im Zusammenhang mit dem Quantencomputing nur wenig erwähnt. Dies beruht zu einen darauf, dass sie nach wie vor eine Außenseiterinterpretation darstellt und viel ihrer Konzepte nicht mit der orthodoxen Interpretation kompatibel sind. Aus diesem Grund ist dieser Abschnitt eher als ein Essay, als eine wissenschaftliche Betrachtung anzusehen.

Als erstes müssen für eine sauber definierte Ontologie die folgenden Begrifflichkeiten definiert und voneinander abgegrenzt werden:

- Quantenalgorithmen
- Quantencomputing

Dies ist insbesondere essenziell wichtig, da diese Begriffe in populärwissenschaftlichen Veröffentlichungen fälschlicherweise durcheinandergebracht werden.

Quantenalgorithmen : Ein Quantenalgoritmus ist ein *Algorithmus*, der auf einem Quantencomputer oder der Simulation eines Quantencomputers ausgeführt werden kann. Die hier zugrundeliegenden Konzepte und Theorien sind dabei vom Standpunkt der Mathematik und theoretischen Informatik grundsätzlich funktionsfähig. Die Quantenalgorithmen treffen jedoch keine Aussagen über eine technische Umsetzung von Quantencomputern. Die wichtigsten Quantenalgorithmen sind:

Der Shor-Algorithmus Entwickelt von Peter Shor im Jahr 1994, dient dieser Algorithmus zur effizienten Faktorisierung großer Zahlen, ein Problem, das klassisch nur schwer lösbar ist. Der *Shor-Algorithmus* kann dieses Problem in polynomaler Zeit berechnen. Dabei ist der *Shor-Algorithmus* ein probabilistischer Algorithmus. In einigen, je nach Anzahl der Wiederholungen beliebig wenigen, Fällen führt er zu keinem Ergebnis; der Algorithmus zählt somit zur Klasse der *Monte-Carlo-Algorithmen*.

Der Grover-Algorithmus Der *Grover-Algorithmus*, entwickelt von Lov Grover 1996, bietet eine quadratische Beschleunigung für das Durchsuchen unsortierter Datenbanken. Während ein klassischer Algorithmus für ein unstrukturiertes Suchproblem $\mathcal{O}(N)$ Schritte benötigt, kann der *Grover-Algorithmus* dieses Problem in $\mathcal{O}(\sqrt{N})$ Schritten lösen.¹

Quanten-Simulationsalgorithmen Diese Algorithmen simulieren quantenmechanische Systeme, z. B. chemische Reaktionen oder Festkörperphysik-Probleme.

Quantencomputer : Sehr vereinfacht ausgedrückt ist ein Quantencomputer ein Gerät, das mittels Quantenalgorithmen Daten verarbeitet. Dabei können u. a. folgende Technologien verwendet werden.

Quantengatter, Quantenregister: Dies sind die momentan die Konzepte, die (zumindest in der populärwissenschaftlichen Literatur) am häufigsten synonym als Quantencomputer bezeichnet werden. Wichtig ist an dieser Stelle, dass sie mit massebehafteten Teilchen arbeiten und somit der Schrödinger-Gleichung bzw. der Stochastischen Mechanik genügen müssen.

¹Zur Nomenklatur: Siehe *Landau-Symbole*

Quantenannealer Dies ist eine besondere Form des Quantencomputers und vom Konzept her kompatibel mit der Stochastischen Mechanik (vgl. Abschnitt ??).

Photonische Quantenrechner Dies sind Quantenrechner und Quantenelektronik, deren Arbeitsweise auf Photonen beruhen. Da Photonen als relativistische Teilchen nicht der Schrödinger-Gleichung unterliegen (vgl. Abschnitt ??), werden sie hier im Weiteren nicht berücksichtigt. Die in Abschnitt 19.1 getroffen Aussagen sind ebenfalls nicht oder zumindest nur eingeschränkt auf Photonen zu übertragen.

Quantencomputing und Stochastische Mechanik

Nach der Stochastischen Mechanik werden die Quantenphänomene als stochastische Prozesse beschrieben. Hieraus ergeben sich für die Realisierung von Quantencomputern Paradigmenwechsel und Einschränkungen. Die Stochastische Mechanik postuliert, dass alle beobachtbaren Quanteneffekte, die normalerweise durch die Schrödinger-Gleichung erklärt werden, auch als zufällige Driftprozesse beschrieben werden können. Dieser stochastische Ansatz vermeidet einige der paradoxen Eigenschaften der Quantenmechanik und eliminiert die Notwendigkeit von Konzepten wie Superposition und Instantaneität bei Verschränkung.

Der Kern der Quantenalgorithmen und darauf aufbauender Quantencomputer besteht darin, dass **Qubits** sich in einer Superposition aus Zuständen befinden und somit gleichzeitig mehrere Werte annehmen können. Durch Quantenverschränkung und Quantenparallelität kann ein Quantencomputer potenziell mehrere Berechnungen gleichzeitig durchführen. Diese fundamentalen Konzepte der Quantenmechanik, die Quantencomputing leistungsstark machen, sind jedoch in der Stochastischen Mechanik nicht existent oder lassen sich nur eingeschränkt erklären. Es ergeben sich folgende Paradigmenwechsel und Probleme die im Weiteren erklärt werden.

19.1. Die Ontologie des Quantencomputings

Die **Ontologie** des Quantencomputings stellt grundlegende Fragen zur Realität und den zugrunde liegenden Strukturen, die Quantenberechnungen ermöglichen. Im Zentrum der konventionellen Interpretation stehen Phänomene wie **Superposition**, **Verschränkung** und **Nicht-Lokalität**, die sich aus der mathematischen Struktur der Quantenmechanik ableiten.

Ontologie des Quantencomputings in der orthodoxen Quantenmechanik In der konventionellen Quantenmechanik ist die Ontologie des Quantencomputings stark auf die Konzepte der Wellenfunktion, Superposition und Verschränkung angewiesen. Die Wellenfunktion repräsentiert den Zustand eines Systems und enthält alle Informationen, die zur Beschreibung von Quantenzuständen notwendig sind. Hierbei ist die Überlagerung von Zuständen zentral: Ein Qubit kann sowohl 0 als auch 1 sein und somit in einer Superposition existieren. Durch Verschränkung kann der Zustand eines Qubits sofort mit dem eines anderen Qubits verbunden sein, unabhängig von der Distanz. Diese Effekte sind durch die Schrödinger-Gleichung und das Kollabieren der Wellenfunktion bei der Messung theoretisch beschrieben. Die konventionelle Ontologie postuliert, dass Quantenzustände „real“ sind, auch wenn sie nicht direkt beobachtbar sind, sondern nur über Wahrscheinlichkeitsamplituden beschrieben werden. Die mathematischen Strukturen der Quantenmechanik spiegeln eine nicht-klassische Realität wider, die durch Wahrscheinlichkeiten und nicht durch deterministische Prozesse charakterisiert ist. In diesem Modell ermöglicht die Wellenfunktion Quantencomputern, Berechnungen parallel durchzuführen und Rechenprobleme effizienter zu lösen als klassische Computer.

Ontologie des Quantencomputings in der Stochastischen Mechanik Die ontologischen Unterschiede zwischen der konventionellen Quantenmechanik und der stochastischen Mechanik werfen grundlegende Fragen zur Funktionsweise und Realisierbarkeit von Quantencomputern auf. Im Folgenden werden einige dieser Unterschiede betrachtet und ihre Bedeutung für das Quantencomputing erläutert.

Superposition und Parallelität Die konventionelle Quantenmechanik besagt, dass ein Qubit mehrere Zustände gleichzeitig einnehmen kann und so Berechnungen parallelisiert. Die stochastische Mechanik sieht die Zustände eines Systems jedoch als Ergebnisse deterministischer und zufälliger Prozesse, ohne dass eine tatsächliche Überlagerung von Zuständen stattfindet. Ontologisch bedeutet dies, dass in der stochastischen Mechanik keine Parallelität existiert, wie sie für Quantenalgorithmen erforderlich wäre. Dies widerspricht dem Kernkonzept des Quantencomputings, das auf der gleichzeitigen Existenz mehrerer Zustände basiert, und lässt Zweifel daran auftreten, ob Quantenparallelität mittels der Stochastischen Mechanik überhaupt abbildbar ist.

Verschränkung und Nicht-Lokalität Verschränkung ermöglicht es Quantencomputern, Zustände miteinander zu verknüpfen und somit kohärente Systeme mit außergewöhnlichen Rechenfähigkeiten zu erzeugen. Die Stochastische Mechanik hingegen vermeidet Nicht-Lokalität und interpretiert die Korrelationen zwischen Teilchen als Ergebnis gemeinsamer stochastischer Prozesse, die auf einer gemeinsamen Drift- und Diffusionsquelle beruhen. Damit entfällt der nicht-lokal

Charakter der Verschränkung, was die Anwendung für das Quantencomputing unmöglich macht, da Verschränkung für den Aufbau von komplexen, kohärenten Quantensystemen unerlässlich ist.

Kollaps der Wellenfunktion und Messproblem Im Quantencomputing tritt beim Messen eines Qubits der Kollaps der Wellenfunktion auf, wodurch das System in einen klar definierten Zustand wechselt. In der Stochastischen Mechanik gibt es jedoch keinen solchen Kollapsmechanismus. Stattdessen bleibt das System in einer stochastischen Dynamik gefangen, die durch kontinuierliche Drift- und Diffusionsprozesse bestimmt ist. Dies wirft das Problem auf, wie ein definitives Ergebnis in der Stochastischen Mechanik erhalten werden kann, da kein klarer Kollapszustand erreicht wird.

Ontologische Realitätsfrage der Quantenlogik In der konventionellen Quantenmechanik wird die Quantenlogik als eine von der klassischen Logik abweichende Struktur angenommen, die die Grundlage für die Funktionsweise von Quantencomputern bildet. Diese Quantenlogik basiert auf Wahrscheinlichkeiten, Überlagerungen und Nicht-Lokalität. Die stochastische Mechanik hingegen bleibt innerhalb eines deterministischeren Rahmens und deutet darauf hin, dass das klassische logische Denken auf quantenmechanische Prozesse angewendet werden könnte, was die Notwendigkeit der speziellen Quantenlogik infrage stellt. Ontologisch betrachtet bedeutet dies, dass das logische Fundament des Quantencomputings in der Stochastischen Mechanik keinen Bestand hätte, da dort klassische Prinzipien ausreichen, um die Realität zu erklären.

Physikalische Realität von Qubits Ein zentrales Element der Quantencomputing-Ontologie ist das Qubit, das die kleinste Informationseinheit in einem Quantencomputer darstellt. In der konventionellen Quantenmechanik kann ein Qubit in einer Superposition aus 0 und 1 existieren und so Rechenoperationen effizienter gestalten. In der stochastischen Mechanik lässt sich diese Superposition jedoch nicht realistisch interpretieren, da die Zustände nur zufällig variieren und niemals tatsächlich überlagert sind. Dies untergräbt die ontologische Grundlage des Quantencomputing-Systems und lässt das Qubit als physikalisches Konzept problematisch erscheinen.

Fehlende Superposition: Der entscheidende Vorteil von Quantencomputern ist die Überlagerung (Superposition) von Zuständen, die es einem Qubit ermöglicht, gleichzeitig 0 und 1 zu sein. In der stochastischen Mechanik hingegen existiert das Konzept der Superposition nicht in der konventionellen Form. Stattdessen wird der Zustand eines Systems durch eine probabilistische Verteilung beschrieben, die keine gleichzeitige Existenz in mehreren Zuständen ermöglicht. Die Superposition ist somit nur eine scheinbare Erscheinung, die durch die stochastische

Bewegung zustande kommt, jedoch nicht den parallelen Zustand eines Qubits darstellt. Dadurch entfällt der Vorteil der simultanen Zustandsberechnung.

Kein direkter Zugang zur Quantenverschränkung: Quantenverschränkung, die es verschrankten Qubits ermöglicht, unabhängig von der Distanz sofortig aufeinander zu reagieren, spielt eine zentrale Rolle im Quantencomputing, insbesondere für die Implementierung von Algorithmen wie Shor oder Grover. Die Stochastische Mechanik erklärt Verschränkung jedoch nicht als reale Verbindung zwischen Teilchen, sondern als eine Korrelation, die auf gemeinsamen statistischen Hintergründen beruht. Es gibt keine Instantaneität oder spukhafte Fernwirkung, da die Korrelationen lediglich das Ergebnis von stochastischen Prozessen sind, die nicht die gleiche verbundene Dynamik ermöglichen wie die Quantenverschränkung.

Schwierigkeiten mit Quanteninterferenz: Quanteninterferenz ist ein weiteres entscheidendes Prinzip, das es Quantencomputern ermöglicht, bestimmte Pfade auszublenden und andere zu verstärken, wodurch die Berechnungszeit bei einigen komplexen Algorithmen reduziert wird. In der stochastischen Mechanik gibt es jedoch keine Quantenwellen, die konstruktiv oder destruktiv interferieren können. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die in der Stochastischen Mechanik verwendet werden, erlauben keine Interferenzeffekte, wie sie in der Schrödinger-Gleichung auftreten. Ohne Interferenz fällt einer der bedeutendsten Effekte für das Quantencomputing weg, was die Effizienz und Funktionsweise der Algorithmen stark beeinträchtigen würde.

Dekohärenz und klassische Interpretation: In der konventionellen Quantenmechanik stellt die Dekohärenz ein Problem dar, das die Zustände von Qubits kollabieren lässt, sobald sie mit der Umgebung in Kontakt kommen. Nach Nelsons Theorie wird die Verschwommenheit der Quantenzustände jedoch rein stochastisch interpretiert, und es gibt keinen Begriff eines kohärenten Superpositionszustands. Da sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung kontinuierlich entwickelt, anstatt in einen klassischen Zustand zu kollabieren, wird der Zustand des Systems immer diffus bleiben und kann nicht den fest definierten Zuständen eines Qubits in der Messung entsprechen.

Die Stochastische Mechanik bietet eine viel klarere Sichtweise auf die Quantenmechanik, die viele der Paradoxien und ontologischen Probleme der konventionellen Quantenmechanik vermeidet. Sie postuliert eine realistische, stochastische Basis. Da die Stochastische Mechanik keine Superposition, keine echte Verschränkung und keinen Kollaps der Wellenfunktion kennt, steht sie in einem fundamentalen Widerspruch zu den Prinzipien, die für Quantencomputer postuliert werden. Die ontologischen Annahmen der Stochastischen Mechanik das Konzept eines parallelen Rechnens sowie die Idee einer Nicht-Lokalität unmöglich. Für die Realisierbarkeit und das Verständnis des Quantencomputings könnte dies schwerwiegende Folgen haben, ebenso wie

für die Stochastische Mechanik an sich. Bei einem uneingeschränkten Nachweis der Funktionsfähigkeit eines Quantencomputers auf Basis der orthodoxen Quantenmechanik könnte dies zu einer Falsifizierung der Stochastischen Mechanik führen. Es wäre vermessen an dieser Stelle die grundsätzliche Funktion von Quantencomputern in Frage zu stellen.² Umgekehrt kann ein Scheitern der Quantencomputer zu einer Renaissance der Stochastischen Mechanik führen.

19.2. Quantencomputer auf Basis des „Quantum Annealing“

Quantum Annealing (deutsch: Quanten-Tempern) ist ein Optimierungsverfahren, das zur Lösung komplexer Optimierungsprobleme verwendet wird. Insbesondere bei Aufgaben, die im klassischen Computing extrem viel Rechenleistung benötigen, kann Quantum Annealing eine effizientere Alternative bieten. Ob das Geräte bzw. Rechner, die auf Basis des Quantum Annealing arbeiten zu Quantencomputern zählen ist strittig. Allerdings sind die zugrundeliegenden physikalischen Grundlagen kompatibel mit der Stochastischen Mechanik (siehe auch *Simulated Annealing*).

Grundprinzipien : Quantum Annealing basiert auf einem physikalischen Prozess, der als Adiabatischer Quanten-Computing (AQC) bezeichnet wird. Bei diesem Prozess wird ein System von einem leicht lösbar Anfangszustand (oder einer Konfiguration) in einen schwierigeren Zielzustand überführt, wobei das System das niedrigste Energieniveau - den sogenannten Grundzustand - erreichen soll. Während des Übergangs wird das System vorsichtig und langsam „abgekühlt“ oder modifiziert, um den Zielzustand zu erreichen, ohne in Zwischenzustände oder unerwünschte Energie-Level zu fallen. Die mathematische Grundlage für Quantum Annealing ist das sogenannte *Ising-Modell*, welches die Energiezustände eines Systems beschreibt. Das Ising-Modell repräsentiert dabei einzelne Elemente (oder Spins), die entweder in einem Zustand up oder down sein können und in einer bestimmten Wechselwirkung zueinander stehen. Ziel ist es, die Kombination der Spins zu finden, die die Gesamtenergie des Systems minimiert.

Funktionsweise und Ablauf eines Quantum-Annealing-Prozesses: Der Quantum-Annealing-Prozess verläuft in mehreren Schritten:

²Das würde höchstens zu Kuriositäten wie den folgenden führen:

„Ich denke, dass es weltweit einen Markt für vielleicht fünf Computer gibt.“ Thomas Watson, ehemaliger Vorstandsvorsitzender von IBM, im Jahr 1943.

„Der Mensch wird es in den nächsten 50 Jahren nicht schaffen, sich mit einem Metallflugzeug in die Luft zu erheben.“ Wilbur Wright, Luftfahrtionier, im Jahr 1901

Initialisierung des Systems Zunächst wird das Quanten-System in einen Anfangszustand gebracht, der einen leicht lösbarer Energiekonfigurationszustand darstellt. Dieser Zustand wird als Superposition verschiedener Möglichkeiten gestartet, was das Prinzip der Quantenmechanik nutzt, in dem ein System sich in mehreren Zuständen gleichzeitig befinden kann.

Evolution des Systems Das System wird im Verlauf der Zeit durch ein externes Feld gesteuert, das langsam verändert wird. Während dieser Temperung oder Annealing-Phase wird das System vom Anfangszustand in den Zielzustand überführt. Da es sich um einen adiabatischen Prozess handelt, bleibt das System mit großer Wahrscheinlichkeit im energetisch niedrigsten Zustand, wodurch die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers minimiert wird.

Erreichen des Grundzustands Wenn das Annealing-Feld korrekt moduliert wird, erreicht das System den optimalen Grundzustand für die spezifische Aufgabenstellung. Dieser Zustand entspricht der besten Lösung für das Optimierungsproblem.

Herausforderungen und Grenzen des Quantum Annealing: Wie alle Konzepte für Quantencomputer besitzt auch das Quantum Annealing die gleichen Schwierigkeiten, die gelöst werden müssen:

Störanfälligkeit: Quantencomputer sind empfindlich gegenüber Störungen, was zur Dekohärenz führen kann. Das bedeutet, dass das System seinen Quanten-Zustand verliert und damit möglicherweise aus dem optimalen Zustand herausfällt.

Temperatur und Stabilität: Quantum-Annealing-Systeme müssen meist bei extrem niedrigen Temperaturen betrieben werden, was technologisch aufwendig und kostspielig ist.

Eingeschränkte Problemlösungskompetenz: Quantum Annealing ist für Optimierungsprobleme geeignet, jedoch nicht für jede Art von Berechnung. Traditionelle Quantenalgorithmen wie der Shor-Algorithmus (Faktorisierung großer Zahlen) oder der Grover-Algorithmus (Suchprobleme) sind mit Quantum Annealing nicht effizient lösbar.

Skalierbarkeit: Derzeit ist die Anzahl der Qubits (quantisierten Einheiten, die Informationen in einem Quantencomputer tragen) limitiert, was die Anzahl der darstellbaren Lösungen einschränkt.

Quantum Annealing und die stochastische Mechanik: Das Ziel von Quantum Annealing ist es, das Energieminimum einer Funktion zu finden, was einer Optimierung gleichkommt. Der traditionelle Quantum-Annealing-Ansatz nutzt Quantenmechaniken und das Prinzip des Quanten-Tunneling, um das System in Richtung eines

globalen Energietiefs zu bewegen. Die stochastische Mechanik liefert hierfür eine alternative Sichtweise. Anstelle eines direkten Übergangs zum Energie-Minimum durch Quanten-Tunneling können wir die Bewegung des Systems als eine Art stochastischen Prozess betrachten. Der Quantum-Annealing-Prozess lässt sich in der stochastischen Mechanik nach Nelson durch folgende Schritte beschreiben:

Energie-Minimierung als stochastischer Drift: Die Suche nach dem optimalen Zustand kann als Drift eines Teilchens in einem Kraftfeld mit zufälligen Einflüssen modelliert werden. Hierbei bewegt sich das Teilchen gemäß eines stochastischen Prozesses hin zu energetisch günstigen Zuständen.

Thermische Fluktuationen und Brown'sche Bewegung: Die stochastische Mechanik beschreibt das Quanten-Annealing-System als eine Kombination aus deterministischen Kräften und zufälligen Fluktuationen. Während des Annealing-Prozesses unterliegt das System einer Rauschbewegung, die mit der Brown'schen Bewegung vergleichbar ist (vgl Abschnitt ??). Das System „erkundet“ durch diese zufällige Bewegung verschiedene Zustände und „zittert“ letztlich in Richtung des globalen Minimums.

Verhältnis von Drift und Diffusion: In der stochastischen Mechanik bewegt sich ein System durch eine Kombination von Drift (gerichtete Bewegung) und Diffusion (zufällige Streuung). Dieser Prozess entspricht dem Übergang von einem hochenergetischen Zustand hin zu einem niedrigeren Energiezustand. Durch die Drift bewegt sich das System auf ein optimales Minimum zu, während die Diffusion dafür sorgt, dass das System auch kleinere lokale Minima überspringt. Dies vermeidet das Risiko, dass das System in einem suboptimalen Zustand stecken bleibt.

Ausblick: Die Stochastische Mechanik bringt als stochastische Theorie spezifische Vorteile mit sich, die sich: zur Optimierung von Quantencomputern auf Basis des Quantum-Annealing nutzen lassen:

Verständnis des Rauschens und der Fehlertoleranz Die stochastische Beschreibung erlaubt es, die Rolle des Rauschens genauer zu modellieren und dessen Beitrag zur Lösung des Problems zu untersuchen. Dies könnte dabei helfen, Quantum Annealing so anzupassen, dass es weniger anfällig gegenüber Störgeräuschen wird.

Verbesserte Optimierungsprozesse Die Balance zwischen Drift und Diffusion erlaubt es, das Quantum Annealing für spezifische Probleme anzupassen und so das Risiko von lokalen Minima zu minimieren. Dies könnte besonders in Anwendungen nützlich sein, bei denen klassische Optimierungsverfahren oft scheitern.

19.3. Paradigmenwechsel

Die Stochastische Mechanik als eine Interpretation der Quantenmechanik erklärt alle relevanten Aspekte bzw. grundlegende Experimente zur Quantenmechanik (vgl. Abschnitt ??).

Allerdings gibt es aus der Perspektive der Stochastischen Mechanik erhebliche Hindernisse, die die Grundprinzipien des Quantencomputings unhaltbar machen. Konzepte wie Superposition, Verschränkung und Interferenz, die im Zentrum des Quantencomputings stehen, sind der Stochastischen Mechanik nicht vorhanden oder erscheinen in einer Form, die für Quantenberechnungen nicht nützlich ist. Stattdessen beschreibt die Stochastische Mechanik ein stochastisches System, das nur auf Wahrscheinlichkeiten beruht und keine parallele Zustandsentwicklung zulässt. Dieser Ansatz widerspricht daher den Prinzipien, die momentan für Quantencomputer postuliert werden.³

Die Realisierung von Quantencomputern basierend auf der Stochastischen Mechanik erfordert einen Paradigmenwechsel.

Darstellung der Qubits durch stochastische Prozesse: In der Stochastischen Mechanik müssen Qubits durch stochastische Zustandsdynamiken repräsentiert werden, die die Diffusionsprozesse und Driften der Wahrscheinlichkeiten modellieren. Ein einzelnes Qubit wäre dann durch die Wahrscheinlichkeiten seiner Zustände bestimmt, wobei die Wahrscheinlichkeitsdynamik stochastisch schwankt und dabei den klassischen Überlagerungszustand simuliert.

Algorithmisches Design auf Basis stochastischer Differentialgleichungen: Algorithmen im Quantencomputing basieren oft auf komplexen Manipulationen der Wellenfunktion. Mit einem stochastischen Ansatz könnte ein Algorithmus durch Differentialgleichungen modelliert werden, die die Drift- und Diffusionskräfte steuern. Dies kann eine interessante Analogie zu Quantenalgorithmen wie dem Shor-Algorithmus (zur Primfaktorzerlegung) oder dem Grover-Algorithmus (zur Suche in ungeordneten Listen) darstellen, indem der Berechnungsprozess durch gezielte stochastische Steuerung optimiert wird.

Thermisches Rauschen zur Simulation von Quantenfluktuationen: Ein wesentlicher Bestandteil der Quantenmechanik sind Quantenfluktuationen. Dies ist eine inhärente Eigenschaft der Stochastischen Mechanik. Diese Fluktuationen wären nicht zwangsläufig allein durch Quantenmechanik bestimmt, sondern können zusätzlich durch eine kontrollierte Einführung thermischer Rauschprozesse modelliert werden.

³For sale – Quantum computer. Never used. ([Link](#))

Neben vielen vermeitlichen Erfolgsmeldungen zu Quantencomputern gibt es auch zunehmend grundlegende Kritik an ihnen (siehe Veröffentlichung der IEEE: ([Link](#))). Grundsätzlich kann gesagt werden, dass ein funktionierender Quantencomputer zu einer Falsifizierung der Stochastischen Mechanik oder zumindest zu einer grundlegenden Überarbeitung führen wird. Das gleiche gilt allerdings auch in die andere Richtung. Sollte sich zeigen, dass die orthodoxe Interpretation nicht zur Lösung der momentanen Probleme, wie Fehlerquote und Rauschen, beitragen kann, wird dies zu einer Renaissance der Stochastischen Mechanik führen.⁴

19.4. Vergleich Quantencomputing: Orthodoxe Quantenmechanik vs. Stochastischen Mechanik

19.4.1. Grundidee der Nelsonschen Stochastischen Mechanik

Um Quantencomputing mittels der Stochastischen Mechanik beschreiben zu können, müssen als Erstes noch einmal die Grundannahmen der Stochastischen Mechanik aufgeführt werden:

Der Ansatz von Nelson [?, Edward Nelson (1966)] interpretiert die Quantenmechanik als eine emergente Theorie, die aus einer stochastischen Brownschen Bewegung resultiert. Anstelle deterministischer Bahnen werden die Teilchen durch stochastische Trajektorien

$$dx_{(t)} = b_{(x,t)} dt + \sqrt{2\nu} dW_t$$

beschrieben, wobei W_t ein Wiener-Prozess und $\nu = \frac{\hbar}{2m}$ die Diffusionskonstante ist.

Wird die Driftgeschwindigkeit $b_{(x,t)}$ geeignet gewählt, so folgt für die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho_{(x,t)}$ der Teilchenposition die Schrödingergleichung.

Die Wellenfunktion ergibt sich dabei als hydrodynamische Repräsentation der stochastischen Bewegung:

$$\psi(x, t) = \sqrt{\rho(x, t)} e^{iS_{(x,t)}/\hbar}.$$

⁴Eine sehr umfangreiche Link-Sammlung zu kritischen Artikeln zum Quantencomputing findet sich unter: ([Link](#)). (Die weiteren dort behandelten Themen gehören leider in den Abschnitt 20 - Giftschrenk.)

Quanteninformation als stochastische Felder

In der üblichen Quantenmechanik ist Information im Zustandsvektor $|\psi\rangle$ kodiert. Im Nelsonschen Formalismus verteilt sich dieselbe Information auf zwei Felder:

$$(\rho, S), \quad \text{mit} \quad v = \frac{1}{m} \nabla S.$$

Das Paar (ρ, S) enthält denselben Informationsgehalt wie ψ . Damit wird die Quanteninformationstheorie zu einer Theorie der stochastischen Flüsse auf dem Konfigurationsraum.

Quantenoperationen als Flüsse im Driftfeld

Ein Quantencomputer operiert mit unitären Operatoren auf einem Hilbertraumzustand. In der stochastischen Mechanik entsprechen diese Operationen Transformationen des Driftfeldes $b_{(x,t)}$ und der Dichte $\rho_{(x,t)}$, die die Diffusionskonstante ν invariant lassen.

$$\text{Quantenoperation: } (\rho, b) \longrightarrow (\rho', b'),$$

wobei die Transformation so gewählt ist, dass die resultierende Dynamik weiterhin die **Schrödingergleichung** erfüllt. Die Unitarität des Quantengatters wird so durch Wahrscheinlichkeitserhaltung und Reversibilität des Flusses ersetzt.

19.4.2. Superposition und Interferenz

In Nelsons Mechanik entsteht Interferenz nicht durch Überlagerung von Zuständen, sondern durch die Nichtlinearität in der Beziehung zwischen b und ψ . Wenn zwei Wahrscheinlichkeitsströme zusammentreffen, ergeben sich Kreuzterme in der Phase $S_{(x,t)}$, die das bekannte Interferenzmuster erzeugen.

Ein Qubit kann somit als stochastische Konfiguration zweier konkurrierender Driftfelder beschrieben werden, deren relative Phase die gespeicherte Information trägt. Die Messung entspricht einer Konditionierung des stochastischen Prozesses – einer Projektion auf eines der Driftfelder.

Formal lassen sich die zentralen Konzepte wie folgt zuordnen:

- **Zustände:** Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho_{\Gamma}(x, t)$ und Phasenfeld $S_{(x,t)}$.
- **Operationen:** Transformationen des Driftfeldes $b(x, t)$, die die Schrödingergleichung respektieren.
- **Dekohärenz:** Emergent durch zusätzliches Rauschen oder externe Potentiale, die die Diffusion stören.
- **Quantenparallelismus:** Entsteht aus der simultanen Repräsentation vieler Pfade in der stochastischen Dynamik.
- **Messung:** Konditionierte Erwartung über Trajektorien, die zu einem effektiven Kollaps führt.

Konzeptuelle Interpretation

Quantencomputing kann im Rahmen der Stochastischen Mechanik als Informationsverarbeitung auf stochastischer Ebene verstanden werden, wobei das zugrundeliegende Rauschen selbst die Quelle der Quanteneffekte bildet.

Während die Standardquantenmechanik unitär arbeitet, ist die Nelsonsche Mechanik eine deterministische Theorie über Wahrscheinlichkeitsfelder, die dieselbe Physik reproduziert. Ein hypothetischer Nelsonscher Quantencomputer wäre daher eine Maschine, die stochastische Flüsse so präzise steuert, dass sie den unitären Flüssen der Schrödingergleichung entsprechen.

Tabelle 19.1.: Vergleich zwischen Standard-Quantenmechanik und Nelsonscher Stochastischer Mechanik im Kontext des Quantencomputings.

Konzept	Standard-Quantenmechanik	Nelsonsche Mechanik
Zustand	Vektor $ \psi\rangle$ im Hilbertraum	Dichte ρ und Phase S
Dynamik	Unitär, Schrödingergleichung	Fokker-Planck-Formalismus mit Rückwärtsdrift
Gatter	Lineare unitäre Operatoren	Transformationen des Driftfeldes
Superposition	Linearkombination	Überlagerung von Driftfeldern / Phaseninterferenz
Messung	Projektion / Kollaps	Konditionierung des stochastischen Prozesses
Parallelismus	Amplitudeninterferenz	Korrelationen stochastischer Pfade

Quantencomputing lässt sich in der Nelsonschen Mechanik als kontrollierte Dynamik von stochastischen Flüssen auffassen, deren kollektive Statistik die Schrödingergleichung erfüllt. Unitäre Operationen entsprechen Transformationen des Driftfeldes, Superpositionen den Interferenzen von Phasenflüssen, und Messungen bedingen Erwartungen über stochastische Trajektorien.

Beispiel: Das Spin- $\frac{1}{2}$ -Qubit im Nelsonschen Formalismus

Ein Qubit kann im einfachsten Fall durch einen zweikomponentigen Spinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho_1} e^{iS_1/\hbar} \\ \sqrt{\rho_2} e^{iS_2/\hbar} \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. In der Nelsonschen Stochastischen Mechanik entspricht dies zwei gekoppelten stochastischen Prozessen mit Diffusionsgleichung

$$dx_i(t) = b_i(x, t) dt + \sqrt{2\nu} dW_t, \quad i = 1, 2,$$

wobei die Driftkomponenten b_i durch die jeweiligen Phasenfelder $S_i(x, t)$ bestimmt sind:

$$b_i = \frac{1}{m} \nabla S_i + u_i,$$

mit einem zusätzlichen diffusionsinduzierten Driftterm $u_i = \nu \nabla \ln \rho_i$.

Die gesamte Qubit-Information liegt somit in den Feldern (ρ_1, S_1) und (ρ_2, S_2) . Die relative Phase

$$\Delta S = S_1 - S_2$$

repräsentiert die interne Spinrichtung auf der Bloch-Sphäre.

Das Hadamard-Gatter als Driftfeldtransformation

Das Hadamard-Gatter ist durch die unitäre Matrix

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben und bewirkt auf den Spinor die Abbildung

$$\psi' = H\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_1 + \psi_2 \\ \psi_1 - \psi_2 \end{pmatrix}.$$

In der Nelsonschen Mechanik wird dadurch eine neue Wahrscheinlichkeits- und Phasenstruktur erzeugt:

$$\rho'_1 = \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2 + 2\sqrt{\rho_1\rho_2} \cos(\Delta S/\hbar)),$$

$$\rho'_2 = \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2 - 2\sqrt{\rho_1\rho_2} \cos(\Delta S/\hbar)),$$

$$S'_1 - S'_2 = \hbar \arctan \left(\frac{\sqrt{\rho_2} \sin(\Delta S/\hbar)}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2} \cos(\Delta S/\hbar)} \right).$$

Damit ist das Hadamard-Gatter im stochastischen Formalismus eine nichtlineare Transformation der Driftfelder

$$(b_1, b_2) \longrightarrow (b'_1, b'_2),$$

die Interferenz zwischen den beiden stochastischen Flüssen erzeugt und die Phasenrelation zwischen ihnen verändert.

Im Nelsonschen Rahmen entsteht der Effekt des Hadamard-Gatters nicht aus einer linearen Überlagerung im Hilbertraum, sondern aus der Überlagerung zweier stochastischer Strömungsfelder. Das Gatter mischt die Driftkomponenten so, dass die beiden Teilströme konstruktiv bzw. destruktiv interferieren.

Dies zeigt, dass selbst rein unitäre Operationen des Quantencomputings als Transformationen von stochastischen Flüssen mit festem Diffusionskoeffizienten $\nu = \frac{\hbar}{2m}$ dargestellt werden können.

Das Hadamard-Gatter im Nelsonschen Formalismus illustriert, wie unitäre Transformationen im Quantencomputing als stochastisch-dynamische Operationen verstanden werden können. Die zentrale Rolle spielt dabei die Interferenz zweier Driftfelder, deren relative Phase die Quanteninformation kodiert.

Anmerkung 30:

Bemerkung zur Messung

Eine Messung in der Basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ entspricht einer bedingten Erwartung über die Trajektorien:

$$\mathbb{E}[x(t) \mid \text{Ausgang } i] = \int x \rho'_i(x, t) dx.$$

Der Kollaps auf einen der beiden Zustände ist somit eine stochastische Selektion – eine Reduktion auf eine der beiden Driftpopulationen. Dekohärenz kann als Verlust der Phasenkorrelation ΔS durch zusätzliches Rauschen beschrieben werden.

19.5. Physikalische Probleme des Quantencomputings

19.5.1. Instabilität durch Dekohärenz

Orthodoxe Sichtweise: Quantencomputer sind extrem anfällig für äußere Einflüsse, was dazu führt, dass die Qubits ihre Quantenzustände schnell verlieren. Die Dekohärenz wird sofort auftreten, wenn Qubits mit ihrer Umgebung wechselwirken, sei

es durch Temperaturänderungen, elektromagnetische Felder etc. Diese Interferenzen verursachen das sofortige Kippen eines Qubits in einen klassischen Zustand. Solche Störungen können kaum vermieden werden, da es praktisch unmöglich ist, einen perfekten, isolierten Raum für Qubits zu schaffen.

Die Kohärenzzeit, also die Dauer, in der Qubits ihren Quantenzustand halten können, wird nach der orthodoxen Sichtweise oft im Mikrosekunden- bis Millisekundenbereich postuliert. Selbst für kleinste Berechnungen sind diese Zeitfenster zu kurz, da die benötigte Stabilität für komplexe Rechenprozesse schlüssig nicht erreicht werden kann. Die fundamentale Unstabilität der Qubits ist eine der größten Herausforderungen des Quantencomputings.

Sichtweise der Stochastischen Mechanik: Das Konzept der Kohärenz wird in der Stochastischen Mechanik nicht verwendet. Die zugrundeliegende Verschränkung von Zuständen kann hier allenfalls als ein Grenzfall bei der Präparation eines Zustandes angesehen werden. Hierzu kann auch auf die populärwissenschaftliche Monographie von Fritzsche [137] verwiesen werden (siehe auch Abschnitt ??). Die Dekohärenz in der orthodoxen Sichtweise wird auch als Verrauschen des Quantencomputers bezeichnet. Aus Sicht der Stochastischen Mechanik ist dies lediglich das Ergebnis der zugrundeliegenden Stochastischen Prozesse, die letztendlich auf den Vakuumfluktuationen beruhen.

19.5.2. Unlösbares Problem der Fehlerkorrektur

Orthodoxe Sichtweise: Die Quantenphysik verhindert eine effektive Fehlerkorrektur in Quantencomputern. Während klassische Computer Fehler über einfache Mechanismen beheben können, ist dies bei Quantencomputern nicht möglich, da Qubits durch die Quantenmechanik nur schwer kopiert oder dupliziert werden können? ein Prozess, der für klassische Fehlerkorrekturmethoden zentral ist. In der Quantenmechanik gilt das **No-Cloning-Theorem**, das besagt, dass es nicht möglich ist einen unbekannten Quantenzustand exakt zu kopieren.

Diese Unmöglichkeit macht eine Fehlerkorrektur in Quantencomputern komplex und resourcenintensiv, dass sie unpraktikabel wird. Die theoretischen Ansätze zur Fehlerkorrektur, die existieren, sind bislang auf wenige Qubits beschränkt und erfordern extrem viele zusätzliche Qubits zur Fehlerkorrektur selbst. Eine Skalierung dieser Methoden auf die für praktische Anwendungen erforderliche Qubit-Anzahl ist daher extrem schwierig. Ohne eine effektive Fehlerkorrektur ist es allerdings unmöglich, zuverlässige Quantenberechnungen durchzuführen.

Sichtweise der Stochastischen Mechanik: Aus der Sicht der Stochastischen Mechanik sind Fehler eine inhärente Eigenschaft von Quantencomputern. Daher werden aus der Sicht der Stochastischen Mechanik insbesondere solche Konzepte von Quantencomputern favorisiert, die eine große Menge an Zufallszahlen benötigen (vgl. Abschnitt 19.2).

19.5.3. Technologische Barrieren

Häufig werden mit Zusammenhang mit dem Quantumcomputing folgende Argumente angebracht, die eine grundsätzliche Realisierbarkeit in Frage stellen⁵:

- Skalierbarkeit
- Energieaufwand und Kühlbedarf
- Algorithmen und Anwendungen

Hier ist zu anzumerken, dass dies alles

Skalierbarkeit: Während klassische Computer in ihrer Architektur leicht zu skalieren sind, sind Quantencomputer extrem schwer skalierbar. Selbst wenn es gelingt, eine kleine Anzahl von Qubits für eine kurze Zeit zu stabilisieren, wird dies exponentiell schwieriger, je mehr Qubits hinzukommen. Die Anforderungen an Präzision und Stabilität steigen massiv mit der Anzahl der Qubits, und die Fehlerquote nimmt exponentiell zu. Dies ist ein inhärentes Problem der Quantenmechanik selbst und kein technologisches Problem, das durch bessere Hardware gelöst werden könnte.

Da die Berechnungen in Quantencomputern von der Interaktion mehrerer Qubits abhängen, führt jede zusätzliche Qubit-Anzahl zu einer erheblichen Erhöhung der Instabilität. Eine praktische, skalierbare Umsetzung von Quantencomputern mit Millionen oder Milliarden von Qubits [?] die nötig wären, um die Versprechen des Quantencomputings zu erfüllen [?] ist daher momentan sehr schwer zu realisieren.

Energieaufwand und Kühlbedarf: Heutige Quantencomputer benötigen extrem niedrige Temperaturen, oft nahe dem absoluten Nullpunkt, um ihre Qubits überhaupt in einem überlagerten Zustand zu halten. Das Erreichen und Aufrechterhalten dieser Temperaturen erfordert spezialisierte Kryotechnik und einen immensen Energieaufwand, was eine erhebliche Herausforderung darstellt. Eine solche Infrastruktur ist schwierig zu skalieren. Allerdings handelt es sich hier ebenfalls um ein rein technologisches Problem.

⁵Viele dieser Argumente hätten bei den ersten Computern auf Basis von Elektrorenöhren in ähnlicher Form gegolten. Durch die technologische Weiterentwicklung hin zur Mikroelektronik wurden diese Argumente obsolet.

Algorithmen und Anwendungen: Ein weiteres fundamentales Problem des Quantencomputings ist die begrenzte Anzahl von Algorithmen, die wirklich nützliche Vorteile bieten könnten. Während es einige wenige Quantenalgorithmen wie Shors Algorithmus zur Faktorisierung oder Grovers Algorithmus zur Datenbanksuche gibt, die eine theoretische Leistungssteigerung aufzeigen, sind diese nur für sehr spezifische Probleme nutzbar.

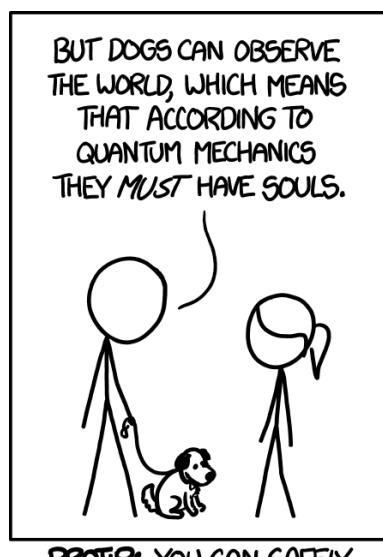
Wie bereits gesagt kann man Quantencomputer als hoch spezialisierte *Analogrechner* ansehen. Dies wirft dann sofort Fragen hinsichtlich der *Turing-Vollständigkeit* der verwendeten Programmiersprachen auf.

20. Giftschrank der Quantenmechanik

Es ist immer wieder kurios, wie die Quantenmechanik mit folgenden pseudowissenschaftlichen Themen in Verbindung gebracht wird:

- Freie Energie¹,
- Freie Energie Maschinen,
- Casimir-Energie²

Hier werden überall physikalische Gesetze mit Esoterik gemischt. Da diese Themen immer wieder in polärwissenschaftlichen Medien auftauchen, wurde diesem Komplex hier ein eigenes Kapitel gewidmet.



PROTIP: YOU CAN SAFELY IGNORE ANY SENTENCE THAT INCLUDES THE PHRASE "ACCORDING TO QUANTUM MECHANICS"

Und ein Tipp von xkcd (link).

¹Nicht zu verwechseln mit der freien Energie in der Thermodynamik.

²Im Sinne von technisch nutzbaren Energiemengen.

Eine gute Einführung findet sich bei der GWUP ([Link](#))

Die Zahl an populärwissenschaftlichen Büchern, in denen versucht wird, dem geneigten Leser die „fantastische“ Welt der Quantenmechanik (QM) näher zu bringen, ist in letzter Zeit so schnell gewachsen, dass jeder Versuch, den Überblick zu behalten, zwecklos wäre.

Wie die Relativitätstheorie scheint die Quantenmechanik interessanter, attraktiver als andere Gebiete der Physik (z.B. gibt es kaum Bücher über Festkörperphysik, die sich an ein breites Publikum wenden), weil sie

- fundamental ist,
- Phänomene behandelt, die dem gesunden Menschenverstand scheinbar widersprechen,
- daher bei der Suche nach Antworten auf wichtige Fragen der Philosophie nicht ignoriert werden darf.

Durch die Popularisierung der Quantenmechanik sind manche ihrer Fachausdrücke in die Alltagssprache übernommen worden; die ursprüngliche, mathematisch präzise definierte Bedeutung dieser Begriffe geht dabei zwangsläufig verloren. Auch die berühmten Paradoxien der Quantenmechanik (Schrödingers Katze, das Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon usw.) gehören heutzutage zum Grundwissen des eifrigen Konsumenten der populärwissenschaftlichen Literatur.

Trotz der Bedeutung und Erfolge der Quantenmechanik ist die klassische Physik, von manchen als reduktionistisch und materialistisch verschrien, aber nach wie vor das richtige Werkzeug, um Vorgänge aus dem Bereich des alltäglichen Lebens, der Biologie oder der Medizin zu beschreiben...

Eine gute Zusammenstellung zum Thema zur „Nutzung“ der Nullpunktenergie hat [Victor J. Stenger](#) gegeben³. Nachfolgend ist der in Deutsch übersetzte Text wiedergegeben:

Ein Jahrzehnt ist nun vergangen, seit Pons und Fleischmann auf ihrer berüchtigten Pressekonferenz die Entdeckung der „kalten Fusion“ verkündeten. Die meisten Physiker waren sofort skeptisch, aber nicht nur, weil man erstaunlichen Behauptungen immer verblüffenden Behauptungen immer skeptisch sein sollte. Und sie waren nicht skeptisch, weil sie die kalte Fusion für unmöglich hielten. Tatsächlich war das Phänomen bereits im Labor beobachtet worden. Neu war hier die Behauptung, dass die kalte Fusion eine

³aus: Skeptical Briefs June 1999; Victor J. Stenger

praktische Quelle für unbegrenzte und im Wesentlichen kostenlose Energie sein könnte.

Die kalte Fusion der Pons-Fleischmann-Variante ist durch einen Prozess möglich, der als Quantentunnelung bekannt. Zwei Wasserstoffkerne in einem Palladium-Gitter können durch die abstoßende elektrische Barriere tunneln, die sich aus ihrer gegenseitigen positiven Veränderung ergibt. Eine Berechnung mit Formeln, die in jedem Physiklehrbuch der unteren Klassenstufen zu finden sind, bestätigt jedoch schnell, dass die Wahrscheinlichkeit für ein solches Tunneln bei den betreffenden Entferungen verschwindend gering ist, etwa fünfzig Größenordnungen kleiner als eins. Es wurden andere Mechanismen vorgeschlagen, die ebenso unwahrscheinlich sind. Und natürlich wurde in keinem einzigen Experiment jemals ein positiver Nettoenergieertrag nachgewiesen. Jeder, über den Sie gelesen haben, war noch an die Steckdose angeschlossen.

Dennoch wird die Forschung an der kalten Fusion in einigen kleinen Labors auf der ganzen Welt weitergeführt. Verfechter behaupten weiterhin Effekte, die von der Physik und der Chemie weitgehend ignoriert werden. Das Versprechen von unendlich viel freier Energie ist verführerisch, mit unsagbaren Reichtümern, die denjenigen erwarten, der sie erreichen kann - ähnlich wie das Versprechen des ewigen Lebens.

Zu den Verfechtern der kalten Fusion gesellten sich andere, die in den Bann des Phantoms der freien Energie geraten sind dem Phantom der freien Energie verfallen sind, auf der Ersten Internationalen Konferenz über freie Energie, die vom 29. bis 30. April in Bethesda, MD, stattfand. Gesponsert von der Zeitschrift Infinite Energy gesponsert und vom Integrity Research Institute ausgerichtet, sollte die Konferenz ursprünglich vom US-Außenministerium mitgesponsert werden. Als sich das Außenministerium nach eingehender Prüfung zurückzog, übernahm das Handelsministerium Co-Sponschaft. Schließlich zog sich das Handelsministerium zurück, so dass es sich um eine private Veranstaltung handelte.

Neben der kalten Fusion war eines der anderen zentralen Themen der Konferenz eine andere Quelle „freier Energie“, die in den letzten Jahren in den Medien große Beachtung gefunden hat. Der Vorschlag besteht darin, die Nullpunktenergie zu nutzen, die in dem Bereich existiert, den wir uns normalerweise als leeren Raum vorstellen.

Ein wichtiger Befürworter der Nullpunktenergie ist der Physiker Harold Puthoff, der vielen Lesern von Skeptical Briefs gut bekannt ist. (Siehe Martin Gardners Kolumne im Skeptical Inquirer Mai/Juni 1998 und Puthoffs Antwort in der folgenden Ausgabe).

Wir wissen aus der Quantenfeldtheorie, dass das Vakuum nicht wirklich leer ist, sondern von „virtuellen Teilchen-Antiteilchen-Paaren wimmelt, die ständig durch Quantenfluktuationen erzeugt und zerstört werden. Im Jahr 1948 zeigte der niederländische Physiker Hendrick Casimir, dass bei zwei in einem Vakuum Platten eine Nettokraft existiert, die die beiden Platten zusammenzieht. Diese Kraft resultiert aus der Tatsache, dass den virtuellen Teilchen zwischen den Platten weniger Zustände zur Verfügung stehen zwischen den Platten zur Verfügung stehen als die außerhalb. Ein Energieungleichgewicht führt dazu, dass die Platten zusammengedrückt werden.

Die Realität der Casimir-Kraft wurde 1996 von Steven Lamoreaux bestätigt, und zwar auf genau dem quantitativen Niveau, das in den Casimir-Gleichungen vorhergesagt wurde. Die Gewinnung dieser Energie ist prinzipiell möglich, und Puthoff propagiert sie als eine praktische Möglichkeit. Aber auch hier haben wir eine nicht unmögliche Idee die mit ein paar einfachen Berechnungen, die ein Schüler durchführen kann, schnell als unpraktisch verworfen werden kann die auch ein Schüler durchführen kann.

Ich habe Casimirs Formeln genommen, die in Puthoffs Arbeiten zu finden sind, und berechnet, dass zwei hochglanzpolierte Metallplatten, die 200 Kilometer mal 200 Kilometer auf einer Seite durch ein Mikron (ein Millionstel eines Meters) getrennt sind genug potenzielle Energie haben, um eine 100-Watt-Glühbirne eine Sekunde lang zum Leuchten zu bringen. Wenn wir 30 Millionen solcher Strukturen im Weltraum stoßen würden, könnten wir sie an unsere könnten wir sie an unsere Glühbirne anschließen und sie ein Jahr lang leuchten lassen.

Nun ist Puthoff kein Dummkopf. Er kennt diese Zahlen und argumentiert, dass wir vielleicht einige Mikrostrukturen entdecken werden, die sich nutzen lassen. Aber die Chancen dafür sind in der Tat gering. Im Grunde müssten diese Mikrostrukturen schon bereits in einer Form existieren, aus der diese Energie gewonnen werden kann. Die Energie ist nicht wirklich frei. Wenn zwei Platten durch eine gewisse Distanz getrennt sind, muss die Energie, die die Energie, die beim Zusammenprall entsteht, in das System eingebracht werden in das System eingebracht werden, um die Platten in dieser Entfernung zusammenzufügen.

Das ist wie die Energie, die wir aus fallendem Wasser gewinnen. Wir finden dies in der Natur, also ist sie in diesem Sinne frei". Aber die Sonne lieferte die ursprüngliche Energie die das Wasser verdampft und in die Luft gehoben hat, wo es dann als Regen und Schnee wieder herabfallen konnte. Es nützt nichts, wenn wir vorschlagen, dass wir eine Sklaven zu beschäftigen,

die Eimer mit Wasser auf die Spitze eines Staudamms, der in einer flachen Ebene gebaut wurde, zu tragen. Wir müssen die Sklaven immer noch Sklaven füttern, damit sie die Energie für die Arbeit aufbringen können.

In ähnlicher Weise können wir nicht erwarten, dass wir irgendwelche Mikrostrukturen herstellen können, die eine Nullpunktenergiegewinnung ermöglichen. Sie müssten bereits in der Natur existieren, von natürlichen Kräften aufgebaut und für unsere Nutzung vorbereitet sein. Und welche Art von Objekten könnten wir uns vorstellen zu finden? Mit den gleichen Formeln können wir uns zwei flache Platten aus reiner Kernmaterie vorstellen, wie das Innere eines Neutronensterns, getrennt durch einen Kerdurchmesser. Um unsere 100-Watt-Glühbirne ein Jahr lang leuchten zu lassen, bräuchten wir eine solche Struktur, die etwa ein Mikrometer mal ein Mikrometer groß ist.

Wenn diese oder andere Mikrostrukturen, die praktische Energie liefern können, in der Natur Energie liefern könnten, hätten wir sie sicher schon gefunden. Ich empfehle Ihnen nicht, Ihre Ruhestandsgelder in Unternehmen zu investieren, die die versprechen, diese Technologie zu entwickeln.

Wie man Quantenunsinn erkennt

Der nachfolgende Abschnitt beruht aus Ideen der folgenden beiden Artikel: ([Link](#))
([Link](#))

Terminologie : In der pseudowissenschaftlichen Literatur wird die physikalische Terminologie verwendet um falsche Behauptungen zu kaschieren. Die falsch angewandte Terminologie soll explizit dazu verwendet werden dem Laien das kritische Hinterfragen zu erschweren. Das Problem ist, dass auch die echte Wissenschaft viele Fachbegriffe verwendet, und wenn man kein Experte auf diesem Gebiet ist, ist der Unterschied vielleicht nur schwer zu erkennen.

Als Faustregel hierzu kann man sich fragen, an wen sich die Aussagen richten:

- Wenn Wissenschaftler mit anderen Wissenschaftlern sprechen, brauchen sie eine bestimmte Terminologie, um präzise kommunizieren zu können.
- Im Gegensatz dazu sprechen Pseudowissenschaftler fast immer in der Öffentlichkeit und verwenden absichtlich wissenschaftliche Terminologie. Es ist nicht so, dass sie keine klareren Formulierungen kennen, sie wollen nur nicht von Laien kritisch hinterfragt werden.

Maßstäbe ignorieren : Häufig wird versäumt zu erklären, dass die Quantenmechanik nur auf sehr kleinen Skalen geschieht. Der geeignete Maßstab hierfür ist der atomare Maßstab. Wenn man Elektronen in einem Atom hat, weiß man nicht, wo sich das Elektron befindet, aber es besteht eine extrem hohe Wahrscheinlichkeit, dass es nicht sehr weit vom Kern entfernt ist. Diese Unbestimmtheit auf makroskopische Objekte, wie z. B. einen Fußball zu übertragen ist grundsätzlich falsch. Weiterhin ist zu berücksichtigen, dass die quantenmechanische Beschreibung von Systemen, die aus mehr als nur ein paar Teilchen bestehen, sehr kompliziert.

Beobachter : Häufig wird in der pseudowissenschaftlichen Literatur behauptet, dass die Quantenmechanik bewusste Beobachter benötigt. Dies wird häufig mit Begriffen wie Quantenbewusstsein umschrieben.

Fakt ist, dass es in der Quantenmechanik nichts gibt, was bewusste Beobachter erfordert.

Interpretationen der Quantenmechanik : Die verschiedenen Interpretationen der Quantenmechanik werden in ?? ausführlich beschrieben. Im pseudowissenschaftlichen Kontext werden diese durcheinander gewürfelt und einzelne Aspekte aus diesem Zusammenhang gerissen.

Diese verschiedenen Interpretationen die in Abschnitt ?? beschrieben werden sind, zumindest experimentell, gleichwertig, da sie alle auf der Schrödinger-Gleichung beruhen.

Pseudowissenschaftliche Interpretationen, die den experimentellen Ergebnissen widersprechen, können als falsifiziert und damit als widerlegt angesehen werden.

20.1. Schrödinger Katze

When I hear of Schrödinger's cat, I reach for my pistol.

(Stephen Hawking)

Anmerkung 31 (Lebt Schrödingers Katze noch?):Keine Ahnung, schau halt nach!

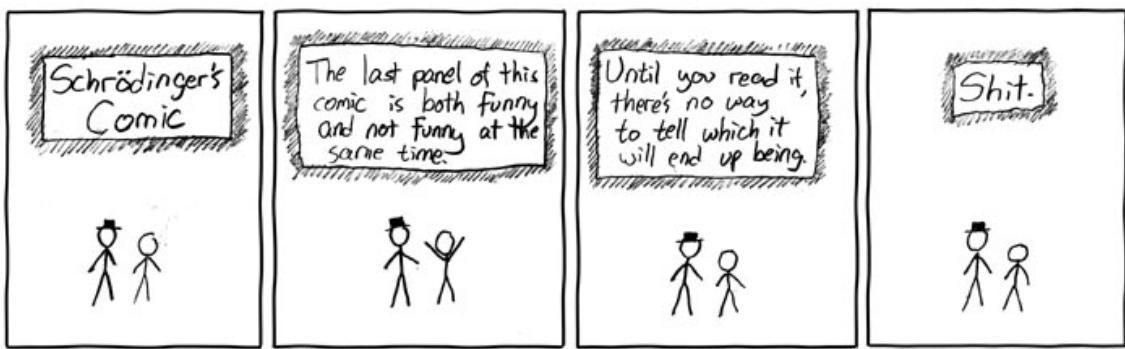
In einer statistischen Gesamtheit von Schrödingerkatzen leben nach der Zeit t noch

$$100 * \exp\left(-t \frac{\ln 2}{T_{1/2}}\right)$$

Prozent, wobei $T_{1/2}$ die Halbwertszeit des Radioisotops ist. ^a

^aDies ist nur eine grobe Näherung, da Katzen 7 Leben (im englischsprachigen Raum 9 Leben) haben.

Das Gedankenexperiment mit Schrödingers Katze ist eines der bekanntesten Beispiele in der Quantenphysik und wirft wichtige Fragen zur Interpretation der Quantenmechanik auf. In diesem Abschnitt wird eine kritische Perspektive auf Schrödingers Katze einnehmen und die zugrunde liegenden Probleme sowie die kontroversen Diskussionen um das Experiment beleuchten.



Der obligatorische xkcd [\(Link\)](#).

Die Frage ob Schrödingers Katze lebendig oder tot ist, wurde eigentlich schon endgültig geklärt:

Allerdings führt CERN hierzu aktuelle Forschungen durch:

→ [\(Link\)](#) ←

→ [\(Link\)](#) ←

ERWIN SCHRÖDINGER führte das Gedankenexperiment 1935 ein, um die Schwierigkeiten der Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik zu verdeutlichen [194]. Das

Experiment stellt eine Katze in einen verschlossenen Raum mit einem radioaktiven Material, das eine 50/50-Chance hat, zu zerfallen und ein tödliches Gift freizusetzen. Gemäß der Kopenhagener Deutung existiert die Katze in einer Überlagerungszustand, in dem sie gleichzeitig lebendig und tot ist.

Schrödinger selbst kritisierte die Missinterpretation der Quantenmechanik und die Verharmlosung ihrer Konsequenzen. Er argumentierte, dass die Bewegungsgleichungen der Quantenmechanik dieselbe Klarheit und Bestimmtheit wie klassische Modelle besitzen. Die Idee, dass ein makroskopisches Objekt wie eine Katze in einem Superpositionszustand sein könnte, erschien ihm unplausibel und absurd.

Es muss hier sehr deutlich angeführt werden, dass das Gedankenexperiment mit Schrödingers Katze nicht angemessen ist, um die Quantenmechanik zu erklären, da es sich um ein vereinfachtes und unrealistisches Szenario handelt. Die Vermengung von makroskopischen und mikroskopischen Phänomene führt zu keinem tieferen Verständnis der Quantenmechanik.

Anmerkung 32 (Hat Schrödinger selber behauptet, dass die Katze gleichzeitig lebendig und tot ist?):

Diese Aussage wurde von Schrödinger niemals getätigt. Hier kann nur auf die Originalarbeit verwiesen werden [?], in der er selber diesen Zustand als „burlesk“ bezeichnete. Beim Studium dieses Artikels kommt man zu Schluss, dass das Experiment allesfalls als eine Metapher für den Unterschied zwischen der Klassischen Physik und der Quantenmechanik zu betrachten ist.

20.2. Vakuumenergiemaschinen

Die Existenz der Nullpunktenergie nachzuweisen ist eine Sache, nützliche Mengen zu extrahieren eine andere. Bisher wurden keine derartigen Geräte gebaut, die funktional sind.

A. Software-Simulationen

Doppelspaltexperiment:

Eine sehr gute Software zur Simulation des Doppelspaltexperimentes findet sich unter:
¹

<http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/usr/lafferty/www/>

und

<http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/usr/lafferty/www/QF/TwoSlit.java>

Diese Simulation ist leider unter aktuellen Java-Umgebungen nicht mehr lauffähig.
Aus diesem Grund wurde sie mit Tcl/Tk neu aufgesetzt.

Das entsprechende GitHub-Repository findet sich unter: ²

<https://github.com/Rudschuck/Stochastic-Mechanics-and-Quantum-Mechanics/tree/main/double-slit-simulation>

Sonstige Simulationen:

Weitere Simulationen basierend auf der Stochastischen Mechanik finden sich unter:

<https://github.com/vasil-yordanov>

und

<https://github.com/elena-orlova>

¹©John Lafferty 1998

²Der ursprüngliche Java-Quellcode wurde von John Lafferty zur Konvertierung in Tcl/TK freigegeben.

B. Periodensystem

H 1 1.008 2.20																			He 2 4.003
Li 3 6.94 0.98	Be 4 9.01 1.57																		Ne 10 20.18
Na 11 22.99 0.93	Mg 12 24.31 1.31																		Ar 18 39.95
K 19 39.102 0.82	Ca 20 44.96 1.00	Sc 21 47.90 1.36	Ti 22 50.94 1.54	V 23 52.00 1.63	Cr 24 54.94 1.66	Mn 25 55.85 1.55	Fe 26 58.93 1.83	Co 27 58.71 1.88	Ni 28 63.55 1.91	Cu 29 65.37 1.90	Zn 30 69.72 1.65	Ga 31 72.59 1.81	Ge 32 74.92 2.01	As 33 78.96 2.18	Se 34 79.90 2.55	Br 35 83.80 2.96	Kr 36 3.00		
Rb 37 85.47 0.82	Sr 38 87.62 0.95	Y 39 88.91 1.22	Zr 40 91.22 1.33	Nb 41 92.91 1.6	Mo 42 95.94 2.16	Tc 43 101.07 1.9	Ru 44 102.91 2.2	Rh 45 106.4 2.28	Pd 46 107.87 2.20	Ag 47 112.40 1.93	Cd 48 114.82 1.69	In 49 118.69 1.78	Sn 50 121.75 1.96	Sb 51 127.60 2.05	Te 52 126.90 2.1	I 53 131.30 2.66			
Cs 55 132.91 0.79	Ba 56 137.34 0.89	La * 57 138.91 1.1	Hf 72 178.49 1.3	Ta 73 180.95 1.5	W 74 183.85 2.36	Re 75 186.2 1.9	Os 76 190.2 2.2	Ir 77 192.2 2.20	Pt 78 195.09 2.28	Au 79 196.97 2.54	Hg 80 200.59 2.00	Tl 81 204.37 1.62	Pb 82 207.2 2.33	Bi 83 (208.98) 2.02	Po 84 2.0 2.2	At 85 Rn 86			
Fr 87 0.7	Ra 88 0.9	Ac ‡ 89 1.1	Rf 104 1.12	Db 105 1.13	Sg 106 1.14	Bh 107 1.13	Hs 108 1.17	Mt 109 1.2	Ds 110 1.2	Rg 111 1.1	Cn 112 1.1	Nh 113 1.22	Fl 114 1.23	Mc 115 1.24	Lv 116 1.25	Ts 117 1.1	Og 118 1.27		
* Lanthanoide		La 57 138.91 1.1	Ce 58 140.12 1.12	Pr 59 140.91 1.13	Nd 60 144.24 1.14	Pm 61 150.4 1.13	Sm 62 151.96 1.17	Eu 63 157.25 1.2	Gd 64 158.93 1.2	Tb 65 162.50 1.1	Dy 66 164.93 1.22	Ho 67 167.26 1.23	Er 68 168.93 1.24	Tm 69 173.93 1.25	Yb 70 174.97 1.1	Lu 71 1.27			
‡ Aktinoide		Ac 89 1.1	Th 90 (232.01) 1.3	Pa 91 (283.03) 1.5	U 92 1.38	Np 93 1.36	Pu 94 1.28	Am 95 1.13	Cm 96 1.28	Bk 97 1.13	Cf 98 1.28	Es 99 1.3	Fm 100 1.3	Md 101 1.3	No 102 1.3	Lr 103 1.3			

rev. 0.0

B-2/B-8

Nr.	Symbol	Name	Hauptisotop	Elektronenkonfiguration
1	<i>H</i>	<i>Wasserstoff</i>	1	1s ¹
2	<i>He</i>	<i>Helium</i>	4	1s ²
3	<i>Li</i>	<i>Lithium</i>	7	1s ² 2s ¹
4	<i>Be</i>	<i>Beryllium</i>	9	1s ² 2s ²
5	<i>B</i>	<i>Bor</i>	11	1s ² 2s ² 2p ¹
6	<i>C</i>	<i>Kohlenstoff</i>	12	1s ² 2s ² 2p ²
7	<i>N</i>	<i>Stickstoff</i>	14	1s ² 2s ² 2p ³
8	<i>O</i>	<i>Sauerstoff</i>	16	1s ² 2s ² 2p ⁴
9	<i>F</i>	<i>Fluor</i>	19	1s ² 2s ² 2p ⁵
10	<i>Ne</i>	<i>Neon</i>	20	1s ² 2s ² 2p ⁶
11	<i>Na</i>	<i>Natrium</i>	23	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ¹
12	<i>Mg</i>	<i>Magnesium</i>	24	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ²
13	<i>Al</i>	<i>Aluminium</i>	27	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ¹
14	<i>Si</i>	<i>Silicium</i>	28	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ²
15	<i>P</i>	<i>Phosphor</i>	31	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ³
16	<i>S</i>	<i>Schwefel</i>	32	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁴
17	<i>Cl</i>	<i>Chlor</i>	35	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁵
18	<i>Ar</i>	<i>Argon</i>	40	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁶
19	<i>K</i>	<i>Kalium</i>	39	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁶ 4s ¹
20	<i>Ca</i>	<i>Calcium</i>	40	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁶ 4s ²
21	<i>Sc</i>	<i>Scandium</i>	45	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁶ 3d ¹ 4s ²
22	<i>Ti</i>	<i>Titan</i>	48	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁶ 3d ² 4s ²
23	<i>V</i>	<i>Vanadium</i>	51	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁶ 3d ³ 4s ²
24	<i>Cr</i>	<i>Chrom</i>	52	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁶ 3d ⁵ 4s ¹
25	<i>Mn</i>	<i>Mangan</i>	55	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁶ 3d ⁵ 4s ²
26	<i>Fe</i>	<i>Eisen</i>	56	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁶ 3d ⁶ 4s ²
27	<i>Co</i>	<i>Cobalt</i>	59	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁶ 3d ⁷ 4s ²
28	<i>Ni</i>	<i>Nickel</i>	58	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁶ 3d ⁸ 4s ²
29	<i>Cu</i>	<i>Kupfer</i>	63	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁶ 3d ¹⁰ 4s ¹
30	<i>Zn</i>	<i>Zink</i>	64	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁶ 3d ¹⁰ 4s ²

Weiter auf der nächsten Seite.

31	<i>Ga</i>	<i>Gallium</i>	69	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^1$
32	<i>Ge</i>	<i>Germanium</i>	74	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^2$
33	<i>As</i>	<i>Arsen</i>	75	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^3$
34	<i>Se</i>	<i>Selen</i>	80	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^4$
35	<i>Br</i>	<i>Brom</i>	79	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^5$
36	<i>Kr</i>	<i>Krypton</i>	84	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6$
37	<i>Rb</i>	<i>Rubidium</i>	85	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 5s^1$
38	<i>Sr</i>	<i>Strontium</i>	88	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 5s^2$
39	<i>Y</i>	<i>Yttrium</i>	89	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^1 5s^2$
40	<i>Zr</i>	<i>Zirconium</i>	90	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^2 5s^2$
41	<i>Nb</i>	<i>Niobium</i>	93	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^4 5s^1$
42	<i>Mo</i>	<i>Molybdän</i>	98	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^5 5s^1$
43	<i>Tc</i>	<i>Technetium</i>	99	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^6 5s^1$
44	<i>Ru</i>	<i>Ruthenium</i>	102	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^7 5s^1$
45	<i>Rh</i>	<i>Rhodium</i>	103	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^8 5s^1$
46	<i>Pd</i>	<i>Palladium</i>	106	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10}$
47	<i>Ag</i>	<i>Silber</i>	107	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^1$
48	<i>Cd</i>	<i>Cadmium</i>	114	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2$
49	<i>In</i>	<i>Indium</i>	115	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^1$
50	<i>Sn</i>	<i>Zinn</i>	120	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^2$
51	<i>Sb</i>	<i>Antimon</i>	121	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^3$
52	<i>Te</i>	<i>Tellur</i>	130	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^4$
53	<i>I</i>	<i>Iod</i>	127	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^5$
54	<i>Xe</i>	<i>Xenon</i>	132	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6$
55	<i>Cs</i>	<i>Cäsium</i>	133	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6 6s^1$
56	<i>Ba</i>	<i>Barium</i>	138	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6 6s^2$
57	<i>La</i>	<i>Lanthan</i>	139	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6 5d^1 6s^2$
58	<i>Ce</i>	<i>Cer</i>	140	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^2 5s^2 5p^6 6s^2$
59	<i>Pr</i>	<i>Praseodym</i>	141	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^3 5s^2 5p^6 6s^2$
60	<i>Nd</i>	<i>Neodym</i>	142	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^4 5s^2 5p^6 6s^2$

Weiter auf der nächsten Seite.

61	<i>Pm</i>	<i>Promethium</i>	147	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^5 5s^2 5p^6 6s^2$
62	<i>Sm</i>	<i>Samarium</i>	152	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^6 5s^2 5p^6 6s^2$
63	<i>Eu</i>	<i>Europium</i>	153	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^7 5s^2 5p^6 6s^2$
64	<i>Gd</i>	<i>Gadolinium</i>	158	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^7 5s^2 5p^6 5d^1 6s^2$
65	<i>Tb</i>	<i>Terbium</i>	159	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^9 5s^2 5p^6 6s^2$
66	<i>Dy</i>	<i>Dysprosium</i>	164	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{10} 5s^2 5p^6 6s^2$
67	<i>Ho</i>	<i>Holmium</i>	165	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{11} 5s^2 5p^6 6s^2$
68	<i>Er</i>	<i>Erbium</i>	166	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{12} 5s^2 5p^6 6s^2$
69	<i>Tm</i>	<i>Thulium</i>	169	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{13} 5s^2 5p^6 6s^2$
70	<i>Yb</i>	<i>Ytterbium</i>	174	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 6s^2$
71	<i>Lu</i>	<i>Lutetium</i>	175	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^1 6s^2$
72	<i>Hf</i>	<i>Hafnium</i>	180	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^2 6s^2$
73	<i>Ta</i>	<i>Tantal</i>	181	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^3 6s^2$
74	<i>W</i>	<i>Wolfram</i>	184	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^4 6s^2$
75	<i>Re</i>	<i>Rhenium</i>	187	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^5 6s^2$
76	<i>Os</i>	<i>Osmium</i>	192	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^6 6s^2$
77	<i>Ir</i>	<i>Iridium</i>	193	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^7 6s^2$
78	<i>Pt</i>	<i>Platin</i>	195	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^9 6s^1$
79	<i>Au</i>	<i>Gold</i>	197	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 6s^1$
80	<i>Hg</i>	<i>Quecksilber</i>	202	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 6s^2$
81	<i>Tl</i>	<i>Thallium</i>	205	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 6s^2 6p^1$
82	<i>Pb</i>	<i>Blei</i>	208	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 6s^2 6p^2$
83	<i>Bi</i>	<i>Bismut</i>	209	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 6s^2 6p^3$
84	<i>Po</i>	<i>Polonium</i>	210	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 6s^2 6p^4$
85	<i>At</i>	<i>Astat</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 6s^2 6p^5$
86	<i>Rn</i>	<i>Radon</i>	222	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 6s^2 6p^6$
87	<i>Fr</i>	<i>Francium</i>	223	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 6s^2 6p^6 7s^1$
88	<i>Ra</i>	<i>Radium</i>	226	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 6s^2 6p^6 7s^2$
89	<i>Ac</i>	<i>Actinium</i>	227	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 6s^2 6p^6 6d^1 7s^2$
90	<i>Th</i>	<i>Thorium</i>	232	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 6s^2 6p^6 6d^2 7s^2$

Weiter auf der nächsten Seite.

91	<i>Pa</i>	<i>Protactinium</i>	231	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^2 6s^2 6p^6 6d^{17} s^2$
92	<i>U</i>	<i>Uran</i>	238	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^3 6s^2 6p^6 6d^{17} s^2$
93	<i>Np</i>	<i>Neptunium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^4 6s^2 6p^6 6d^{17} s^2$
94	<i>Pu</i>	<i>Plutonium</i>	244	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^6 6s^2 6p^6 7s^2$
95	<i>Am</i>	<i>Americium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^7 6s^2 6p^6 7s^2$
96	<i>Cm</i>	<i>Curium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^7 6s^2 6p^6 6d^{17} s^2$
97	<i>Bk</i>	<i>Berkelium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^9 6s^2 6p^6 7s^2$
98	<i>Cf</i>	<i>Californium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{10} 6s^2 6p^6 7s^2$
99	<i>Es</i>	<i>Einsteinium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{11} 6s^2 6p^6 7s^2$
100	<i>Fm</i>	<i>Fermium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{12} 6s^2 6p^6 7s^2$
101	<i>Md</i>	<i>Mendelevium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{13} 6s^2 6p^6 7s^2$
102	<i>No</i>	<i>Nobelium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 7s^2$
103	<i>Lr</i>	<i>Lawrencium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{17} s^2$
104	<i>Rf</i>	<i>Rutherfordium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{27} s^2$
105	<i>Db</i>	<i>Dubnium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{37} s^2$
106	<i>Sg</i>	<i>Seaborgium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{47} s^2$
107	<i>Bh</i>	<i>Bohrium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{57} s^2$
108	<i>Hs</i>	<i>Hassium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{67} s^2$
109	<i>Mt</i>	<i>Meitnerium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{77} s^2$
110	<i>Ds</i>	<i>Darmstadtium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{97} s^1$
111	<i>Rg</i>	<i>Roentgenium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{107} s^1$
112	<i>Cn</i>	<i>Copernicium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{107} s^2$
113	<i>Nh</i>	<i>Nihonium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{107s^2} 7p^1$
114	<i>Fl</i>	<i>Flerovium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{107s^2} 7p^2$
115	<i>Mc</i>	<i>Moscovium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{107s^2} 7p^3$
116	<i>Lv</i>	<i>Livermorium</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{107s^2} 7p^4$
117	<i>Ts</i>	<i>Tenness</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{107s^2} 7p^5$
118	<i>Og</i>	<i>Oganesson</i>		$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14} 6s^2 6p^6 6d^{107s^2} 7p^6$

B.1. Atomare Einheiten

Atomare Einheiten sind besonders zweckmäßig bei der Berechnung von atomaren und molekularen Problemen. Sie wurden von HARTREE eingeführt. Drei Basisgrößen (die man alle gleich **EINS** setzt) legen dieses Maßsystem fest:

1. Das Plancksche Wirkungsquantum, \hbar
2. Die Elektronenmasse, m_e
3. Die Elementarladung, e

Mit der Wahl der Dielektrizitätskonstante des Vakuums $4\pi\epsilon_0 = 1$ lassen sich dann alle Maße im Sinn der atomaren (Bohrschen) Einheiten ausdrücken.

Präzisere Zahlenwerte findet man z.B. in *Atomic, Molecular, and Optical Physics Handbook*, AIP (1996), Seite 4. In der letzten Spalte sind die atomaren Einheiten in den Größen der SI-Einheiten dargestellt:

Größe	Atomare Einheit	Zahlenwert (SI)
Wirkung	$\hbar = 1$	$1.0545726 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Masse	$m_e = 1$	$0.9109389 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$
Ladung	$e = 1$	$1.6021773 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Zeit	$\tau_0 = \frac{\hbar^3}{m_e e^4}$	$2.4188843 \cdot 10^{-17} \text{ s}, 0.024 \text{ fs}$
Länge	$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$	$5.2917724 \cdot 10^{-11} \text{ m}, 1 \text{ bohr}$
Geschwindigkeit	$v_B = \frac{\hbar e^2}{m_e e^2}$	$2.1876914 \cdot 10^6 \text{ m/s}, \frac{c}{137}$
Energie	$E_H = \frac{\hbar^2 m_e e^4}{\hbar^2}$	$4.3597482 \cdot 10^{-18} \text{ J}, 27.211 \text{ eV}$
Kraft	$\frac{E_H}{a_0^2}$	$8.2387295 \cdot 10^{-8} \text{ N}$
Leistung	$\frac{E_H^2}{\hbar}$	$1.8023798 \cdot 10^{-1} \text{ W}$
Elektrische Feldstärke	$\frac{E_H}{ea_0}$	$5.142208 \cdot 10^{11} \text{ V/m}$
Intensität	$\frac{E_H^2}{\hbar a_0^2}$	$6.43641 \cdot 10^{19} \text{ W/m}^2$

Tabelle B.2.: Atomare Einheiten und ihre SI-Zahlenwerte

Die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{\hbar e^2}{c} = \frac{1}{137}$ und die Compton-Wellenlänge $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c}$ ausgedrückt. Für die atomare Energieeinheit E_H wird manchmal die Größe **1 Hartree** = 27.211 eV verwendet.

C. Literatur

(*BIBTEX-MASTERDATEI*)

(Öffnet das Literaturverzeichnis mit dem voreingestellten BibTeX-Editor, z. B.
KBibTeX unter Linux.)

C.0.1. Weiterführende Literatur

Es gibt bereits umfangreiche Literatur über Versuche die nichtrelativistische Quantenmechanik aus einem Konzept der dissipationsfreien stochastischen Punktmechanik abzuleiten. Ein Vorläufer der Idee, den probabilistischen Charakter der Quantenmechanik mit der Wirkung eines stochastischen Hintergrundfeldes zu korrelieren, findet sich in der Arbeit von Bohm und Vigier [206].

Die in diesem Kompendium hauptsächlich zur Herleitung der Stochastischen Mechanik referenzierten Arbeiten beziehen überwiegend auf spätere Arbeiten zu diesem Thema und ermeiden bestimmte Implikationen, die in den letzten 30 Jahren häufig kritisiert wurden. Man vergleiche hierzu zu die Arbeiten von Weizel [200], E. Nelson [4], [8], Guerra und Morato [591], M. Baublitz [416], L. de la Pena und A. H. Cetto [?], Petroni und Morato [90], T. C. Wallstrom [287] und zahlreiche Verweise darin. Eine ausführliche Übersicht findet sich bei R. F. Streater [286].

Eine frühere Übersicht über die Arbeiten bis 1986 ist in einem Buch von Namsrai [66] enthalten). Neuere Beiträge stammen von Fritsche und Haugk [134] und Xiao-Song Wang [418].

Ein anderer Ansatz, der sich ebenfalls auf Vakuumfluktuationen bezieht, sich aber auf die Nichtgleichgewichtsthermodynamik stützt, wurde von Grössing vorgeschlagen [419], [420].

Bücherschrank

Tabelle C.1.: Spezielle Literatur nach Themen

Thema	Literatur	Kommentar
Allgemeines:		
<i>Links / noch nicht bearbeitet:</i>		
Noether	(0) (Link)	
Random Walk	(0) (Link)	(für Abbildungen)
Random Walk	(0) (Link)	(für Simulationen)
Random Walk	(0) (Link)	
Random Walk	(0) (Link)	
Literatur	(0) (Link)	
<i>Skripte / Quantenmechanik:</i>		
	(0) [100]	
	(0) [101]	(Tabelle 4.1)
	(0) [109]	
	(0) [110]	
	(0) [114]	(Zeichnungen)
	(0) [131]	
	(0) [148]	
	(0) [149]	
<i>Skripte / Stochastik:</i>		
	(0) [120]	
	(0) [121]	
	(0) [150]	
<i>Lehrbuch / Allgemein:</i>		
	(0) [73]	gutes Lehrbuch
	(0) [84]	gutes Lehrbuch
<i>Lehrbuch / Stochastik:</i>		
	(0) [140]	
	(0) [118]	
<i>Thema / Lokalität:</i>		
<i>Thema / Zitterbewegung:</i>		

Videos

Tabelle C.2.: Videos zur Stochastischen Mechanik und Quantenmechanik

Edward Nelson	Stochastic Mechanics Applied to Relativistic Fields	(Video)
Jacob Barandes	A New Formulation of Quantum Theory	(Video)
Guido Bacciagaluppi	On Multi-Time Correlations in Stochastic Mechanics	(Video)
Ana Maria Cetto	Origin and nature of the wave element in quantum mechanics	(Video)
N.N.	3 Different Interpretations of Quantum Mechanics	(Video)
Yuval Dagan	A Hydrodynamically-inspired relativistic pilot-wave theory	(Video)
Augusto Garuccio	John Bell's unpublished notes about de Broglie's Pilot Wave	(Video)
Olavo Leopoldino da Silva Filho	Foundations of Quantum Mechanics: the stochastic derivation	(Video)
Florian Marquardt	Foundations of Quantum Mechanics (12): Bohm's theory is nonlocal. Nelson's Stochastic Quantization.	(Video)
T. Mikami	Schrödinger's and Nelson's problems and stochastic optimal transport	(Video)
Andrea Carosso	Simulating Ontologies in QFT: Bohm and Nelson	(Video)

Literaturverzeichnis

- [1] NELSON, Edward: The Mystery of Stochastic Mechanics. *Princeton Univeristy, Department of Mathematics.* – ([Local](#))
- [2] NELSON, Edward: Stochastic Mechanics of Particles and Fields. *Princeton Univeristy, Department of Mathematics.* – ([Local](#))
- [3] E., Nelson: In: J. Math. Phys. 5 (1964), 332–343 S. [3-24](#)
- [4] NELSON, E.: *Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics.* In: Phys. Rev. 150 (1966), S. 1079–1085 [3-2](#), [3-24](#), [16-2](#), [18-2](#), [18-3](#), [C-1](#)
- [5] NELSON, Edward: Dynamical Theories of Brownian Motion. NY : Princeton Univeristy Press, 1967. – ([Local](#))
- [6] NELSON, E.: *Connection Between Brownian Motion and Quantum Mechanics.* In: Mathematical Problem in Theoretical Physics, Proceedings of the VIth International Conference in Mathematical Physics, Berlin (West), 1981 Bd. 153. Springer Verlag, 1982, S. 168–179
- [7] NELSON, E.: *Quantum Fluctuations.* In: Physica 124A (1984), S. 509–519
- [8] NELSON, Edward: Quantum Fluctuation. Princeton, New Jersey : Princeton Univeristy Press, 1985. – ([Local](#)) [C-1](#)
- [9] NELSON, E.: *Field Theory and the Future of Stochastic Mechanics.* In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; CASATI, G. (Hrsg.) ; MERLINI, D. (Hrsg.): Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems Bd. 262. Springer Verlag, 1986, S. 438–469
- [10] NELSON, Edward: *Review of stochastic mechanics.* In: Journal of Physics: Conference Series 361 (2012), S. 1–4. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/361/1/012011>. – DOI 10.1088/1742-6596/361/1/012011. – ([Local](#)) [18-1](#)
- [11] PAVON, Michele: A stochastic control problem connected to the measurement process in stochastic mechanics. – ([Local](#))

- [12] PAVON, Michele: Hamilton's principle in stochastic mechanics. In: J. Math. Phys. 36 (1995), S. 6774. – ([Link](#)), ([Local](#))
- [13] PAVON, Michele ; TICOZZI, Francesco: Controlling the desity evolution of classical, thermodynamic and quantum systems. In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005, S. 1800–1805. – ([Local](#))
- [14] PAVON, Michele: Derivation of the wave function collapse in the context of Nelson's stochastic mechanics. In: Journal of Mathematical Physics 40 (1999), November, Nr. 11, 5565-5577. <http://dx.doi.org/10.1063/1.533046>. – DOI 10.1063/1.533046. – ISSN 1089–7658
- [15] PAVON, Michele: A footnote to Nelson's interpretation of the two-slit experiment. In: Preprint (2003). – ([Local](#))
- [16] PAVON, Michele: Quantum Schroedinger bridges. <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0306052>. Version: 2003
- [17] PAVON, M.: Quantum Schrödinger Bridges. In: Dedicated to Anders Lindquist on the occasion of his 60th birthday (2011), June. – ([Local](#))
- [18] DAVIDSON, Mark P.: Stochastic Models of Quantum Mechanics - A Perspective. In: Spectel Research Corp.. – ([Local](#))
- [19] G.N., Ord: Quantum Mechanics in a Two Dimensional Spacetime - What is a wavefunction? 2009. – ([Local](#))
- [20] NOTTALE, Laurent: Scale Relativity: First Steps toward a Field Theory. In: ALONSO, J. D. (Hrsg.) ; LORENTE, Paramo M. (Hrsg.): Proceedings of Spanish Relativity Meetings. Salas, 1993, S. 121–132. – ([Local](#))
- [21] HAMILTON, L. P.: Quantum-classical correspondence for teh kinetic energy. In: Lecture Series on Computer and Computational Sciences Bd. 1. Waterloo, Canada : Brill Academic Publishers, 2006, S. 1–4. – ([Local](#))
- [22] OHBA, Ichiro: Some stochastic aspects of quantization. In: Prama journal of physics (2002)
- [23] PETRONI, Nicola C. ; VIGIER, J. P.: Stochastic derivation of the Dirac equation in terms of a fluid spinning tops endowed with random fluctuations at the vелеocity of light. In: Physics Letters 81 A (1981), Nr. 1, S. 12–14. – ([Local](#))
- [24] PETRONI, Nicola C.: Asymptotic behaviour of densities for Nelson processes. – ([Local](#))

-
- [25] PETRONI, Nicola C. ; GUERRA, Francesco: *Quantum Mechanical States as Attractors for Nelson Processes*. In: Foundations of Physics 25 (1995), Nr. 2, S. 297–315. – ([Local](#))
- [26] PETRONI, N. C. ; MARTINO, S. de ; SIENA, S. de ; F., Illuminati: Controlled Stochastic Collective Dynamics of Particle Beams. – ([Local](#))
- [27] W., Petersen ; C., Perret: Numerical integration of complex SDEs. Seminar for Applied Mathematics, March 2012. – ([Local](#))
- [28] BACCIAGALUPPI, Guido: Nelsonian Mechanics Revisited. – ([Local](#))
- [29] BACCIAGALUPPI, Guido: A Conceptual Introduction to Nelson’s Mechanics. 2005. – ([Local](#))
- [30] HARANAS, Ioanis I.: A Different Derivation of the Calogero Conjecture. – ([Local](#))
- [31] HARANAS, Ioanis I.: *A Different Derivation of the Calogero Conjecture*. In: Journal of Theoretics 4 (2002), Nr. 1, S. 1–7. – ([Local](#))
- [32] SUPPES, Patrick: *Probabilistic Causality in Quantum Mechanics*. In: Journal of Statistical Planning and Inference 258 (1990), S. 293–303. – ([Local](#))
- [33] KHRENNIKOV, A.: *An attempt to go beyond quantum-mechanics: a classical field model of quantum averages and correlations*. In: Quantum Computers and Computing 9 (2009), S. 65–80. – ([Local](#))
- [34] GARBARCZEWSKI, Peter: *Derivation of the quantum potential from realistic Brownian particle motions*. In: Physics Letters A 162 (1992), S. 129–136. – ([Local](#))
- [35] KOBAYASHI, Keita ; YAMANAKA, Yoshiya: Extension of Nelson’s Stochastic Quantization to Thermal Situation in Thermo Field Dynamics. 2010. – ([Local](#))
- [36] FLIESS, Michel: An intrinsic approach to the quantum fluctuations in stochastic mechanics. 2006. – ([Local](#))
- [37] FLIESS, Michel: *Probabilités et fluctuations quantiques (Probabilities and quantum fluctuations)*. In: Mathématique, Série I 344 (2007), pp.663-668. <http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/>. – ([Link](#)), ([Local](#))
- [38] PUTHOFF, H. E.: *Ground state of hydrogen as a zero-point-fluctuation-determined state*. In: Physical Review D 35 (1987), May, Nr. 10, S. 3266–3269. – ([Local](#))

-
- [39] PUTHOFF, H. E.: Quantum Vacuum Fluctuations: A New Rosetta Stone of Physics? 2003. – ([Local](#))
- [40] IMAFUKU, Kentaro ; OHBA, Ichiro: Tunneling time and Nelson's Quantum Mechanics. In: NN 982 (1997), S. 30–40. – ([Local](#))
- [41] NN: Review of Stochastic Mechanics. – ([Local](#))
- [42] WISEMAN, Howard M.: Stochastic Processes in Physics / Centre of Laser Science, The University of Queensland. 1998. – Forschungsbericht. – ([Local](#))
- [43] DERAKHSHANI, Maaneli: A Suggested Answer To Wallstrom's Criticism: Zitterbewegung Stochastic Mechanics II. Institute for History and Foundations of Science, University Utrecht, 2016. – ([Local](#))
- [44] A Suggested Answer To Wallstrom's Criticism: Zitterbewegung Stochastic Mechanics I. Institute for History and Foundations of Science, University Utrecht, 2016. – ([Local](#))
- [45] DERAKHSHANI, Maaneli: Stochastic Mechanics Without Ad Hoc Quantization: Theory And Application To Semiclassical Gravity. Utrecht, University Utrecht, Proefschrift, 2017. – ([Local](#))
- [46] DERAKHSHANI, Maaneli: Stochastic Mechanics Without Ad Hoc Quantization: Theory And Applications To Semiclassical Gravity, Universiteit Utrecht, Proefschrift, 2017. – ([Local](#))
- [47] DERAKHSHANI, Maaneli: Stochastic Mechanics Without Ad Hoc Quantization: Theory And Applications To Semiclassical Gravity. <https://arxiv.org/abs/1804.01394>. Version: 2018
- [48] DERAKHSHANI, Maaneli: A Suggested Answer To Wallstrom's Criticism: Zitterbewegung Stochastic Mechanics I. Utrecht, The Netherland, April 2019. – ([Local](#))
- [49] DERAKHSHANI, Maaneli ; BACCIAGALUPPI, Guido: On Multi-Time Correlations in Stochastic Mechanics. (2022), August 31. – ([Local](#)), ([Link](#))
- [50] ROWLANDS, Peter: Are there alternatives to our present theories of physical reality? Department of Physics, University of Liverpool, 2006. – ([Local](#))
- [51] HESTENES, David: The Zitterbewegung Interpretation of Quantum Mechanics. In: Found. Physics 20 (1990), Nr. 10, S. 1213–1232. – ([Local](#))
- [52] KRACKLAUER, A. F.: An Intuitive Paradigm For Quantum Mechanics. In: Physics Essays 5 (1992), Nr. 2, S. 226–234. – ([Local](#))

-
- [53] GRABERT, Hermann ; HÄNGGI, Peter ; TALKNER, Peter: *Is quantum mechanics equivalent to a classical stochastic process?* In: Phys. Rev. A 19 (1979), Nr. 6, S. 2440–2445. – ([Local](#))
- [54] GRABERT, Hermann ; HÄNGGI, Peter ; TALKNER, Peter: *Is quantum mechanics a statistical mechanics of classical trajectories?* In: Physics Letters A 88 (1980)
- [55] VATSYA, SR: *Current State of Quantum Theory.* In: Physics & Astronomy International Journal 1 (2017), Nr. 4. – ([Local](#))
- [56] WANG, Xiao-Song: Derivation of the Schrödinger equation from Newton's Second Law Based on a Fluidic Continuum Model of Vacuum and a Sink Model of Particles. *Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080, China, 10 2006.* – ([Local](#))
- [57] WANG, Xiao-Song ; XIONG, Cai-Dong: Zitterbewegung at the level of quantum field theory. *Chengdu 610054, China, .* – ([Local](#))
- [58] GRÖSSING, Gerhard: Quantum Cybernetics: A New Perspective for Nelson's Stochastic Theory, Nonlocality and the Klein-Gordon Equation. – ([Local](#))
- [59] GRÖSSING, Gerhard: Kontinuum – Die Geschichte einer Verdrängung mit besonderem Augenmerk auf die Quantentheorie. 2005. – ([Local](#))
- [60] GRÖSSING, Gerhard ; MESA PASCASIO, Johannes ; SCHWABL, Herbert: *A classical explanation of quantization.* In: arXiv preprint arXiv:0812.3561 (2011). – ([Link](#)) ([Local](#))
- [61] FLAMM, Dieter: Neueres zum Weltbild der Quantenmechanik. – ([Local](#))
- [62] FLAMM, Dieter: Neueres zur Interpretation der Quantenmechanik. <https://bibliothek.univie.ac.at/>. Version: April 1991. – ([Local](#))
- [63] DRAGON, Norbert: Anmerkungen zur Quantenmechanik. *Skript, 2017.* – ([Link](#)), ([Local](#))
- [64] PAVLIOTIS, Grigoris A.: *Stochastic Processes and Applications — Diffusion Processes, the Fokker-Planck and Langevin Equations.* In: Texts in Applied Mathematics Bd. 60. Springer, 2014. – ([Local](#))
- [65] BAEZ, John C. ; BIAMONTE, Jacob D.: Quantum Techniques for Stochastic Mechanics. *University of California, Riverside, CA 92521, USA, .* – ([Local](#))
- [66] NAMSRAI, Khavtgain: *Nonlocal Quantum Field Theory and Stochastic Quantum Mechanics.* In: MERWE, Alwyn van d. (Hrsg.): Fundamental Theories of Physics. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1986. – ([Local](#)) C-1

-
- [67] PRUGOVECKI, Eduard: *Stochastic Quantum Mechanics and Quantum Spacetime — A Consistent Unification of Relativity and Quantum Theory Based on Stochastic Spaces*. In: MERWE, Alwyn van d. (Hrsg.): Fundamental Theories of Physics. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1986. – ([Local](#))
- [68] GARBACZEWSKI, Piotr: *Relativistic problem of random flights and Nelson's stochastic mechanics*. In: PhysicsLetters A 164 (1991), S. 6–16. – ([Local](#))
- [69] HÜMMLER, Holm G.: Relativer Quantenquark — Kann die moderne Physik die Esoterik belegen? Springer, 2017. – ([Local](#))
- [70] WILLIAMS, Angharad: On Nelson's stochastic mechanics for a semiclassical parabolic state., Swansea University, Diss., 2012. – ([Link](#)), ([Local](#))
- [71] BACCIAGALUPPI, Guido: *Non-equilibrium in Stochastic Mechanics*. In: Journal of Physics: Conference Series 361 (2012), S. 1–12. – ([Link](#)), ([Local](#))
- [72] MITCHELL, John: Exploring Stochastic Quantum Mechanics and Emergent Gravity, Undergraduate Honors Theses – Paper 1338, 2019. – ([Link](#)), ([Local](#))
- [73] GRIFFITH, David ; SCHROETER, Darrell F.: Introduction to Quantum Mechanics. 3rd. edition. Reed College, Oregon : Cambridge University Press, 2017. – ([Local](#)) C-2
- [74] HUAN, Alfred: *Statistical Mechanics*. – Forschungsbericht. – ([Local](#))
- [75] STOHRER, Wolf-Dieter ; KOCH, O.: *Die Phänomene der Quantenmechanik / Universität Bremen*. 1999. – Forschungsbericht. – ([Local](#))
- [76] GLODDE, Martin ; PLIKAT, Martin ; STOHRER, wolf-Dieter: *Das qualitative Orbitalmodell in der Chemie / Universität Bremen*. 2001. – Forschungsbericht. – ([Local](#))
- [77] CVITANOVIC, Predrag ; ARTUSO, Roberto ; DAHLQVIST, Per ; MAINIERI, Ronnie ; TANNER, Gabor Gregor and V. Gregor and Vattay ; WHELAN, Niall ; WIRZBA, Andreas: *Classical and Quantum Chaos / nbi*. 2001. – Forschungsbericht. – ([Local](#))
- [78] KEYL, Michael: *Algebraische Methoden der Quantentheorie / Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin*, Berlin, 1997. – Forschungsbericht. – ([Local](#))
- [79] DEGENHART, Christof: *Quantenmechanik-Formelsammlung*. 1994. – Forschungsbericht. – ([Local](#))

- [80] KRAJEWSKI, Florian: New path integral simulation algorithms and their application to creep in the quantum sine-Gordon chain. *Mainz, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Diss., August 2003.* – ([Local](#))
- [81] MARSHALL, Trevor W. ; SANTOS, Emilio: The myth of the photon. *1997.* – ([Local](#))
- [82] MARSHALL, Trevor W.: The zeropoint field – no longer a ghost. *2001.* – ([Local](#))
- [83] MILTON, Kimball A.: The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy. *2001.* – ([Local](#))
- [84] RÖTH, Ernst-Peter: Einführung in die statistische Thermodynamik und Quantenmechanik. – ([Local](#)) **C-2**
- [85] GARRET, Ron: Quantum Mysteries Disentangled. *2008.* – ([Local](#))
- [86] JAIN, Khyati: *Quantum Tecgniques for Stochastic Mechanics / Birla Institute of Technology and Science.* *2019.* – *Forschungsbericht.* – ([Local](#))
- [87] CRESSION, Jacky ; DARSES, Sébastien: *Stochastic embedding of dynamical systems.* In: *Journal of Mathematical Physics* *48* (2007), S. 072703–1 – 072703–54. – ([Local](#))
- [88] BUSH, W. M. John ; OZA, Anand U.: *Hydrodynamic quantum analogs.* In: *Rep. Prog. Phys* *84* (2020), Nr. 017001, S. 41 pp.. – ([Local](#))
- [89] ARULDHAS, G.: Quantum Mechanics 500 Problems with Solutions. *PHI Learning.* – ([Local](#))
- [90] PETRONI, Nicola C. ; MORATO, Laura M.: *Entangled states in stochastic mechanics.* In: *J. Phys. A: Math. Gen.* *33* (2000), S. 5833–5848. – ([Local](#)) **C-1**
- [91] LINDGREN, J. ; LIUKKONEN, J.: *Quantum Mechanics can be understood through stochastic optimization on spacetimes.* In: *Scientific Reports* *9* (2019), Nr. 1. – ([Link](#)), ([Local](#))
- [92] BHATTACHARYA, Samyadeb ; SUMAN, Dutta ; ROY, Sisir: *Schrödinger-Langevin Equation and Ion Transport at Nano Scale.* In: *Journal of Modern Physics* *2* (2011), S. 231–235. – ([Local](#))
- [93] AGRAWAL, Shiv: A Stochastic View of Quantum Mechanics. *2020.* – ([Local](#))
- [94] TUMULKA, Roderich: Lecture Notes on Foundations of Quantum Mechanics – Winter semester 2017/18. *Lecture Notes,* . – ([Local](#))

-
- [95] TUMULKA, Roderich: Lecture Notes on Foundations of Quantum Mechanics – Winter semester 2019/20. *Lecture Notes*, . – ([Local](#))
- [96] LOMONACO, Samuel J.: A Rosetta stone for quantum mechanics with an introduction to quantum computation. *Lecture Notes*, 2000. – ([Local](#))
- [97] MUNKHAMMAR, Joakim: Quantum mechanics from a stochastic least action principle. *Foundational Questions Institute Essay*, 2019. – ([Local](#))
- [98] EBERHARD, P. H.: Bell's Theorem without Hidden Variables. In: Il Nuovo Cimento (1977), Nr. B1
- [99] SMITH, Jim: Modern Quantum Mechanics. 2. Boston : Addison-Wesley, 2011. – ([Local](#))
- [100] NATTERMANN, Thomas: Quantenmechanik. *Skript*, 2001. – ([Local](#)) C-2
- [101] MANTEL, Karl-Heinz: Einführung in die Quantenmechanik. München : Skript, 2011. – ([Local](#)) C-2
- [102] VAN BELLE, Jean L.: The Zitterbewegung Interpretation of Quantum Mechanics. March 2019. – ([Local](#))
- [103] BEYER, M. ; PAUL, W.: On the Stochastic Mechanics Foundation of Quantum Mechanics. In: Universe 7 (2021), S. 166. <http://dx.doi.org/10.3390/universe7060166>. – DOI 10.3390/universe7060166. – ([Link](#)), ([Local](#))
- [104] MARROCCO, Michele: Simple derivation of Schrödinger equation from Newtonian dynamics. Rome, Italy, . – ([Local](#))
- [105] GRÖSSING, G. ; FUSSY, S. ; PASCASIO, J. M. ; SCHWABL, H.: Elements of sub-quantum thermodynamics: quantum motion as ballistic diffusion. Vienna, Austria, . – ([Local](#))
- [106] BOHM, D.: Non-Locality in the Stochastic Interpretation of the Quantum Theory. In: Ann. Inst. Henri Poincaré 49 (1988), Nr. 3, 287-296. http://www.numdam.org/item/AIHPA_1988__49_3_287_0. – ([Link](#)), ([Local](#))
- [107] STEINSIEK, Annette ; SCHNEIDER, Ursula A.: Die perfekte Welle. Erwin Schrödinger On Zitterbewegung. Innsbruck, Austria : Begleittext zu Faksimiles aus dem Brenner-Archiv, 2019. – ([Local](#))
- [108] BRODY, Dorje C. ; HUGHSTON, Lane P.: Stochastic reduction in nonlinear quantum mechanics. In: Proc. R. Soc. Lond. A 458 (2002), S. 1117–1127. – ([Local](#))

-
- [109] BRANDES, T.: Quantenmechanik II. *Skript*, 2012. – ([Local](#)) C-2
- [110] G., Blatter: Quantenmechanik. *Skript*, 2015. – ([Local](#)) C-2
- [111] BOYER, Timothy H.: *Stochastic Electrodynamics: The Closest Classical Approximation to Quantum Theory*. In: Atoms 7 (2019), Nr. 29. – ([Local](#))
- [112] SCHMELZER, I.: Nelsonsche Stochastik - FAQ. 2. Version. November 2008. – ([Local](#))
- [113] ALBEVERIO, Sergio ; HOGH-KROHN, Raphael: A remark on the connection between stochastic mechanics and the heat equation. – ([Local](#))
- [114] DIEZEMANN, Gregor: PC II-Quantenmechanik. *Skript*, 2015. – ([Local](#)) C-2
- [115] HÖRHAMMER, Christian: Nicht-Markovsche Dynamik, Dekohärenz und Verkürzung in dissipativen Quantensystemen mit Anwendung in der Quanteninformationstheorie von Systemen kontinuierlicher Variablen, *Universität Bayreuth, Diss.*, 2007. – ([Local](#))
- [116] NOTTALE, Laurent: New Formulation of Stochastic Mechanics – Application to Chaos. – ([Local](#))
- [117] GODART, Maurice: Stochastic Theory of Quantum Mechanics. – ([Local](#))
- [118] KLYATSKIN, V. I.: Stochastic equations through the eye of the physicist basic concepts, exact results and asymptotic approximations. *Elsevier Science*, 2005. – ([Link](#)), ([Local](#)) C-2
- [119] MESSER, August: Das Realismus-Problem der Quantenmechanik angesichts der Dekohärenz-Interpretation, *Justus-Liebig-Universität Gießen, Diss.*, 2007. – ([Local](#))
- [120] KREE, Reiner: Stochastische Beschreibung physikalischer Systeme. *Skript*, 2015. – ([Local](#)) C-2
- [121] SANTEN, Ludger ; RIEGER, Heiko: Stochastische Prozesse in der statistischen Physik. *Skript*, 2015. – ([Local](#)) C-2
- [122] HAISCH, Bernhard ; RUEDA, Alfonso ; PUTHOFF, H. E.: *Physics of the Zero-Point Field - Implications for Interia, Gravitation and Mass*. In: *Speculations in Science and Technology* 20 (1997), S. 99–114. – ([Local](#))
- [123] MYRVOLD, Wayne C.: *On some early objections to Bohm's theory*. In: *International Studies in the Philosophy of Science* 17 (2003), Nr. 1, S. 7–24. – ([Local](#))

- [124] SIMON, Barry: Ed Nelson's Work in Quantum Theory. 2004. – ([Local](#))
- [125] ILLUMINATI, Fabrizio ; VIOLAS, Lorenza: *Stochastic variational approach to minimum uncertainty states*. In: J. Phys. A Math. Gen. 28 (1995), S. 2953–2961. – ([Local](#))
- [126] MITTER, Sanjoy K.: *Markov Random Field, Stochastic Quantization and Image Analysis*. In: SPIGLER, R. (Hrsg.): Applied and Industrial Mathematics. Kluwer Academic Press, 1991, S. 101–109. – ([Local](#))
- [127] GUIDA, Francesco: *On the relation between the Nelson stochastic derivative and the Feynman-Kac theorem*. In: International Journal of Pure and Applied Mathematics 112 (2017), Nr. 3, S. 445–455. – ([Local](#))
- [128] GARBACZEWSKI, Piotr: *Relativistic problem of random flights and Nelson's stochastic mechanics*. In: Physics Letters A 164 (1992), S. 6–16. – ([Local](#))
- [129] SIEDSCHLAG, Christian: Mechanismen der Ionisation atomarer Systeme in intensiven Laserpulsen, Universität Dresden, Diss., 2002. – ([Local](#))
- [130] WERNER, Patrick: Quanteneffekte in nanomechanischen Systemen, Ludwig Maximilians Universität München, Diss., 2002. – ([Local](#))
- [131] BURKARD, G.: Höhere Quantenmechanik und Elektrodynamik. Skript, 2012.
– ([Local](#)) C-2
- [132] MAGYAR, Rudolph J.: A Glance at the Fractional Quantum Hall Effect. 2001.
– ([Local](#))
- [133] WITTICH, Olaf: Eine Invarianzeigenschaft Brownscher Bewegung und Transformationen der Feynman-Kac-Formel, Universität Göttingen, Diss., 1997. – ([Local](#))
- [134] FRITSCH, Lothar ; HAUGK, Michael: *A new look at the derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics*. In: Annalen der Physik 12 (2003), Nr. 6, S. 371–403. <http://dx.doi.org/10.1002/andp.200310017>. – DOI 10.1002/andp.200310017. – ([Link](#)), ([Local](#)) C-1
- [135] FRITSCH, Lothar ; HAUGK, Michael: *Reexamining the Einstein-Podolsky-Rosen experiment, photon correlation and Bell's inequality*. In: ResearchGate (2007), August. <https://arxiv.org/abs/0705.2568>. – ([Link](#)), ([Local](#))
- [136] FRITSCH, Lothar ; HAUGK, Michael: *Stochastic Foundation of Quantum Mechanics and the Origin of Particle Spin*. In: ResearchGate (2009), Dezember, 1-47. <https://vixra.org/abs/002ceD71>. – ([Link](#)), ([Local](#))

- [137] FRITSCHE, Lothar ; HAUGK, Michael: Quantenmechanik für Ahnungslose. Stuttgart : S. Hirzel Verlag, 2012. – ISBN 978-3777621364. – (*Local*) 19-16
- [138] FRITSCHE, L. ; HAUGK, M.: *Stochastic Foundation of Quantum Mechanics and the Origin of Particle Spin*. In: LICATA, I. (Hrsg.): Space-Time Geometry and Quantum Events. Nova Science Publishers, Inc., 2014, S. 45–154
- [139] FRITSCHE, Lothar ; HAUGK, Michael: Quantum Mechanics without Observers. 2019. – (*Local*) 3-21
- [140] MAHNKE, Reinhard ; KAUPUZS, Jevgenijs ; LUBASHEVSKY, Ihor: Physics of Stochastic Processes – How Randomness Acts in Time. Wiley-VCH, 2009. – (*Local*) C-2
- [141] FRIEBE, Cord ; KUHLMANN, Meinard ; LYRE, Holger ; NÄGER, Paul ; PASSON, Oliver ; STÖCKLER, Manfred: Philosophie der Quantenphysik – Einführung und Diskussion der zentralen Begriffe und Problemstellungen der Quantentheorie für Physiker und Philosophen. Springer, 2015. – (*Local*)
- [142] BARROW, John D.: The Book of Nothing. Vintage Books, New York. – (*Local*)
- [143] CLOSE, Frank: Nothing – A Very Short Introduction. Oxford University Press. – (*Local*)
- [144] Light and Vacuum. 2. Edition. World Scientific, 2017. – (*Local*)
- [145] NISSEN-MEYER, Johannes: Zur Begründung des Bornschen statistischen Gesetzes. München, Ludwig-Maximilians-Universität, Bachelorarbeit, 2009. – (*Local*)
- [146] BOPP, Fritz: Quantenmechanische und stochastische Prozesse. In: Zeitschrift für Naturforschung 10a (1955), S. 789–793. – (*Local*)
- [147] BOPP, Fritz: Elementarvorgänge der Quantenmechanik in stochastischer Sicht. In: Annalen der Physik 17 (1966), Nr. 7-8, S. 407–414. – (*Local*)
- [148] HORNER, Heinz: Stochastische Dynamik klassischer und quantenmechanischer Systeme, WS 1994/95. Skript, 2002. – (*Local*) C-2
- [149] H., Fichtner: Manuskript zur Vorlesung Grundlagen der Quantenmechanik und Statistik. Skript, 2013. – (*Local*) C-2
- [150] PIVATO, Marcus: Stochastic Processes and Stochastic Integration. 1999. – (*Local*) C-2
- [151] REICHL, Linda E.: A Modern Course in Statistical Physics. Wiley-VCH, 2016. – (*Local*)

-
- [152] MILONNI, Peter W.: An Introduction to quantum optics and quantum fluctuations. *Oxford Graduate Texts*, 2019. – ([Local](#))
- [153] JONA-LASINIO, G.: *Stochastic processes and quantum mechanics*. In: Astérisque, tome 132 (1985), S. 203–216. – ([Local](#)), ([Link](#))
- [154] MEIS, Constantin: Light and Vacuum. The Wave–Particle Nature of the Light and the Quantum Vacuum through the Coupling of Electromagnetic Theory and Quantum Electrodynamics. *World Scientific*, 2015. – ([Local](#))
- [155] FLEMING, Ray: The 100 Greatest Lies in Physics. 2017. – ([Local](#))
- [156] MACDONALD, D. K. C.: Noise and Fluctuations. *John Wiley & Sons*, 1962. – ([Local](#))
- [157] SIDHARTH, B.G.: The Universe of Fluctuations. *Springer*, 2005. – ([Local](#))
- [158] PAPOULIS, Athanasios ; PILLAI, S. U.: Probability, Random Variables and Stochastic Processes. *McGraw-Hill*, 2002. – ([Local](#))
- [159] KNILL, Oliver: Probability Theory and Stochastic Processes with Applications. *Overseas Press*, 2009. – ([Local](#))
- [160] MICHEAS, Athanasios C.: Theory of stochastic objects probability, stochastic processes, and inference. *CRC Press*, 2018. – ([Local](#))
- [161] ARULDHAS, G.: Quantum Mechanics 500 Problems with Solutions. *PHI Learning*, 2011. – ([Local](#))
- [162] HUANG, Kerson: Introduction to Statistical Physics, Second Edition. *CRC Press*, 2010. – ([Local](#))
- [163] JAMMER, Max: The Philosophy of Quantum Mechanics – The Interpretations of Quantum Mechanics In Historical Perspective. *New York : John Wiley & Sons*, 1974. – ([Local](#))
- [164] LONGAIR, Malcolm: Quantum Concepts in Physics An Alternative Approach to the Understanding of Quantum Mechanics. *Cambridge Books*, 2013. – ([Local](#))
- [165] PHILLIPS, A. C.: Introduction to Quantum Mechanics. *Wiley*, 2003. – ([Local](#))
- [166] SHANKAR, R.: Principles of Quantum Mechanics. *Plenum Press*, 1994. – ([Local](#))
- [167] FANO, Guido ; M., Binder S.: Twenty-First Century Quantum Mechanics Hilbert Space to Quantum Computers Mathematical Methods and Conceptual Foundations. *Springer*, 2017. – ([Local](#))

-
- [168] MILLER, David A. B.: Quantum Mechanics for Scientists and Engineers. Cambridge University Press, 2008. – ([Local](#))
- [169] SUESKIND, Leonard ; FRIEDMANN, Art: Quantum mechanics. The theoretical minimum. Basic Books, 2014. – ([Local](#))
- [170] BES, Daniel R.: Quantum Mechanics A Modern and Concise Introductory Course. Springer, 2012. – ([Local](#))
- [171] NASSAR, Antonio ; MIRET-ARTÉS, Salvador: Bohmian Mechanics, Open Quantum Systems and Continuous Measurements. Springer, 2017. – ([Local](#))
- [172] MASUJIMA, Michio: Path Integral Quantization and Stochastic Quantization. Springer, 2009. – ([Local](#))
- [173] KLIEMANN, Wolfgang ; NAMACHCHIVAYA, N. S.: Nonlinear dynamics and stochastic mechanics. CRC Press, 2018. – ([Local](#))
- [174] CHAICHIAN, M. ; A., Demichev: Path Integrals in Physics. Stochastic Process & Quantum Mechanics. Bristol and Philadelphia : Institut of Physics Publishing, 2001. – ([Local](#))
- [175] PAUL, Wolfgang ; BASCHNAGEL, Jörg: Stochastic Processes – From Physics to Finance. Springer, 2013. – ([Local](#))
- [176] DÜRR, Detlef ; LAZAROVICI, Dustin: Verständliche Quantenmechanik: Drei mögliche Weltbilder der Quantenphysik. Springer Spektrum, 2008. – ([Local](#))
- [177] DÜRR, Detlef ; TEUFEL, S.: Bohmian Mechanics: The Physics and Mathematics of Quantum Theory. Springer, 2009 [16-2](#)
- [178] DÜRR, Detlef ; FROEMEL, Anne ; KOLB, Martin: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie als Theorie der Typizität Mit einer Analyse des Zufalls in Thermodynamik und Quantenmechanik. Springer Spektrum, 2017. – ([Local](#))
- [179] BRANDT, Siegmund ; DAHMEN, Hans D.: Quantenmechanik in Bildern: Eine Einführung mit vielen Computergrafiken. Springer Spektrum, 2015. – ([Local](#))
- [180] GYTHIEL, Anthony: An Introduction to Stochastic Processes in Physics. The Johns Hopkins University Press, 2002. – ([Local](#))
- [181] HEILBRON, John L. ; OSEEN, W. ; ALLY ; FRANK, Philipp: The Earliest Missionaries of the Copenhagen Spirit. In: ULLMANN-MARGALIT, E. (Hrsg.): Science in Reflection, S. 201–233,. – He understood Bohr to mean that complementarity characterized measuring procedures, not the things measured. Bohr acknowledged that that was indeed what he had had in mind. [3-15](#)

-
- [182] HEISENBERG, W. ; PAULI, W. (Hrsg.): The Development of the Interpretation of the Quantum Theory
- [183] BOHR, Niels: Quantum Physics and Philosophy—Causality and Complementarity, Essays 1958–1962 on Atomic Physics and Human Knowledge [3-15](#)
- [184] ELITZUR, Avshalom C. ; COHEN, Eliahu ; OKAMOTO, Ryo ; TAKEUCHI, Shigeki: Nonlocal Position Changes of a Photon Revealed by Quantum Routers. In: Scientific Reports 8, Nr. 1, 7730. <http://dx.doi.org/10.1038/s41598-018-26018-y..> – DOI 10.1038/s41598-018-26018-y.. – arXiv:1707.09483.
- [185] MARTIN-DUSSAUD, P. ; ROVELLI, C. ; ZALAMEA, F.: The Notion of Locality in Relational Quantum Mechanics. In: Foundations of Physics 49, Nr. 2, S. 96–106. <http://dx.doi.org/arXiv:1806.08150..> – DOI arXiv:1806.08150.
- [186] SMERLAK, Matteo ; ROVELLI, Carlo: Relational EPR. In: ISSN 0015-9018 37, Nr. 3, S. 427–445. <http://dx.doi.org/10.1007/s10701-007-9105-0..> – DOI 10.1007/s10701-007-9105-0.
- [187] ASCHENBACH, Jutta: Korpuskularstatistische Begründung der Quantenmechanik, TU Clausthal, Staatsexamenarbeit, 1978. – ([Local](#)) [2-4, 3-21, 16-1](#)
- [188] LUDWIG, G.: Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik. Bd. Band 3: Quantentheorie. Vieweg, Braunschweig, 1976. – 82 S.
- [189] DIRAC, P. A. M.: The principles of quantum mechanics. 3. Oxford : Clarendon Press, 2011. – ([Local](#))
- [190] DIRAC, P. A. M.: The Principle of Quantum Mechanics. IVth. Oxford : Clarendon Press, 1958. – 125 S.
- [191] WEIZSÄCKER, C. von: Zum Weltbild der Physik. 2. Aufl. Hirzel, Leipzig, 1944. – 30–31 S.
- [192] FRANZ, W.: Quantentheorie. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1970
- [193] SCHRÖDINGER, E.: In: Sitzungsber. Preuß. Akad. Wissenschr., Phys.-Mathem. Abt. 24 24 (1930), Nr. 418-431 [3-22](#)
- [194] SCHRODINGER, E.: Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. In: Naturwissenschaftern. 23 : pp. 807-812; 823-823, 844-849. (1935). English translation: John D. Trimmer, Proceedings of the American Philosophical Society 23 (1935), Nr. 124, S. 807–812; [20-7](#)

-
- [195] MESSIAH, A.: Quantum Mechanics. Bd. II. North Holland, Amsterdam, 1962.
– 950 ff. S. 3-22
- [196] FÜRTH, R.: In: Z. für Physik 91 (1933), 143–162 S. – (*link*), (*Local*), (*Local*)
3-22
- [197] FÜRTH, R.: Investigations on the Theory of the Brownian Movement. 1956. –
Translated by A.D. Cowper, New York, Dutton
- [198] FEYNMAN, R. P.: In: Rev. Mod. Phys. 20 (1948), 367–387 S. – (*abstract*)
3-22
- [199] FEYNMAN, R. P. ; HIBBS, A. R.: Quantum Mechanics and Path Integrals.
Mac Graw Hill, 1965
- [200] WEIZEL, W.: In: Z. für Physik 134 (1953), 264–285 S. 3-22, 16-1, C-1
- [201] WEIZEL, W.: In: Z. für Physik 135 (1954), Nr. 3, 270–273 S. 3-22, 16-1
- [202] WEIZEL, Walter: Ableitung der quantenmechanischen Wellengleichung des
Mehrteilchensystems aus einem klassischen Modell. In: Zeitschrift für Phy-
sik 136 (1953), Oct, Nr. 5, 582–604. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01338947>. – DOI 10.1007/BF01338947. – ISSN 0044-3328 3-22
- [203] FENYES, I.: Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung und Interpreta-
tion der Quantenmechanik. In: Z. für Physik 132 (1952), S. 81–106 3-22
- [204] BOHM, D.: In: Phys. Rev. 85 (1952), 166 –180 S. 3-24
- [205] BOHM, D.: In: Phys. Rev. 85 (1952), Nr. 2, 180–193 S.
- [206] BOHM, D. ; VIGIER, J. P.: In: Phys. Rev. 96 (1954), 208–216 S. 3-24, C-1
- [207] BROGLIE, L. de: The Current Interpretation of Wave Mechanics: a Critical
Study. Elsevier, 1964 3-24
- [208] LANDÈ, A.: New Foundations of Quantum Mechanics. Cambridge University
Press, 1965 3-24
- [209] COMISAR, G. G.: In: Phys. Rev. B 138 (1965), 1332 S. 3-24
- [210] SANTOS, E.: In: Nuovo Cimento 59b (1969), 65 S. 3-24
- [211] PEÑA-AUERBACH, L. de l.: In: J. Math. Phys. 10 (1969), 1620 S. 3-24
- [212] PEÑA-AUERBACH, L. de l.: J. Math. Phys. 12, 453 (1971). (1971). – (*abstract*)
- [213] BOPP, F.: In: Z. Naturforschung 9a (1954), 479 S. 3-24

-
- [214] H., Gebelein.: Turbulenz. Berlin : Springer, 1935. – 75 S. **5-23**
- [215] SOMMERFELD, A.: Vorlesungen über Theoretische Physik, Bd. II: Mechanik der deformierbaren Medien. 6. Leipzig : Akadem. Verlagsges., 1970. – 115 ff. S. **5-31**
- [216] RAHMAN, A.: In: Phys. Rev. A 136 (1969), 405 S.
- [217] LANGEVIN, P.: Sur la Théorie du Mouvement Brownien. In: C.R.A.S. Paris 146 (1908), S. 530–534
- [218] LANGEVIN, P.: Oeuvres Scientifiques de Paul Langevin. Paris : Édition du CNRS, 1950
- [219] EINSTEIN, A.: Über die von der Molekular-kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. In: Ann. der Physik 17 (1905), S. 549–560. – See also “Investigations on the Theory of Brownian Movement”, Edited by R. Fürth, Translated by A.D.Cowper, New York, Dutton (1956) **5-10**
- [220] EINSTEIN, A. ; PODOLSKY, B. ; ROSEN, N.: Can Quantum Mechanical Description of Reality be Considered Complete? In: Phys. Rev. 47 (1935), S. 777–780
- [221] FOKKER, A. D.: In: Ann. d. Physik 43 (1914), 812 S. **5-14**
- [222] FOKKER, A. ; PLANCK, M.: In: Ann. d. Physik 104 (1914), 312 S.
- [223] FOKKER, A. ; PLANCK, M.: In: Sitz. der Preuss. Akad. (1917), 324 S.
- [224] KOLMOGOROFF, A. N.: Math. Ann. 125, 415 (1931). (1931) **5-14**
- [225] KRAMERS, H. A.: North Holland, Amsterdam, 1957
- [226] NEUMANN, J. von: Springer, Berlin, 1932 **16-1**
- [227] GOLDSTEIN, Sheldon: Stochastic Mechanics and Quantum Theory. In: Journal of Statistical Physics 47 (1987), Nr. 5/6, S. 645 ff.. – (*Local*) **2-2, 3-11, 3-18, 3-19, 5-1**
- [228] BATANOV-GAUKHMAN, Mikhail: Development of the Stochastic Interpretation of Quantum Mechanics by E. Nelson. Derivation of the Schrödinger-Euler-Poisson Equations. In: Recent Progress in Materials 06 (2024), Juni, Nr. 02, 1–61. <http://dx.doi.org/10.21926/rpm.2402014>. – DOI 10.21926/rpm.2402014. – ISSN 2689–5846. – (*Link*), (*Local*)

-
- [229] NOACK, C.: *Bemerkungen zur Quantentheorie des Bahndrehimpulses*. In: *Physikalische Blätter* 41 (1985), S. 283 6-38
- [230] AERTS, Diederik (Hrsg.) ; RONDE, Christian de (Hrsg.) ; FREYTES, Hector (Hrsg.) ; AERTS, Sven (Hrsg.): *Probing the Meaning of Quantum Mechanics: Superpositions, Dynamics, Semantics and Identity*. New Jersey : World Scientific, 2016. – (Local)
- [231] WILLIAMS, Angharad: On Nelson's stochastic mechanics for a semiclassical parabolic state, *Swansea University, Diss.*, 2012. <http://cronfa.swan.ac.uk/Record/cronfa42359>. – (Local)
- [232] BAEZ, John C. ; BIAMONTE, Jacob D.: *Quantum Techniques in Stochastic Mechanics*. Singapore : World Scientific, 2018. <http://dx.doi.org/10.1142/10615>. <http://dx.doi.org/10.1142/10615>. – ISBN 9789813226937. – (Local)
- [233] BARONI, Stefano ; MORONI, Saverio: *Reptation Quantum Monte Carlo: A round-trip tour from classical diffusion to quantum mechanics*. In: *Physical Review E* 60 (1999), Nr. 1, 1-10. <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.60.1>. – (Local)
- [234] BECK, Christian ; MACKEY, Michael C.: *Measurability of Vacuum Fluctuations and Dark Energy*. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 379 (2007), 101-110. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2006.12.019>. – DOI 10.1016/j.physa.2006.12.019. – (Local)
- [235] BERCHE, B. ; CHATELAIN, C. ; DUFOUR, C. ; GOURIEUX, T. ; KAREVSKI, D.: *Historical and interpretative aspects of quantum mechanics: a physicists' naive approach*. In: *Condensed Matter Physics* 9 (2006), Nr. 2(46), S. 319-341. – (Local)
- [236] BURNS, Jean E.: *Vacuum Radiation, Entropy and the Arrow of Time*. In: AMOROSO, R. L. (Hrsg.) u. a.: *Gravitation and Cosmology: From the Hubble Radius to the Planck Scale*. Netherlands : Kluwer Academic Publishers, 2001, S. 491-498. – (Local)
- [237] CASATI, G. ; CHIRIKOV, B. V. ; IZRAELEV, F. M. ; FORD, Joseph: *Stochastic Behavior of a Quantum Pendulum Under a Periodic Perturbation*. In: *Physics Letters* (1978). – (Local)
- [238] COLE, Daniel C. ; RUEDA, Alfonso ; DANLEY, Konn: *Stochastic Nonrelativistic Approach to Gravity as Originating from Vacuum Zero-Point Field Van der Waals Forces*. In: *Physical Review A* 63 (2001), S. 054101. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.63.054101>. – DOI 10.1103/PhysRevA.63.054101. – (Local)

-
- [239] COLE, Daniel C.: *Simulation Results Related to Stochastic Electrodynamics.* In: Journal of Applied Physics (2006)
- [240] DAVIS, E. W. ; TEOFILO, V. L. ; HAISCH, B. ; PUTHOFF, H. E. ; NICKISCH, L. J. ; RUEDA, A. ; COLE, D. C.: *Review of Experimental Concepts for Studying the Quantum Vacuum Field.* In: Quantum Electrodynamics Journal (2004). – (Local)
- [241] DEMELE, Fabian: Analogie-Experimente zum Thema Quantenphysik in der Schule. Stuttgart, Germany, Universität Stuttgart, Diss., 2016. – (Local)
- [242] DILLARD, Jackson: Nonlocality in a Stochastic Approach to Quantum Mechanics and Quantum Field Theory. Williamsburg, Virginia, USA, 2021 (Local)
- [243] EVERTZ, H. G.: Fortgeschrittene Quantenmechanik. 2004. – (Local)
- [244] FILK, Thomas: Grundlagen und Probleme der Quantenmechanik. 1999-2008. – (Local)
- [245] GRANZOW, Claus M.: Quantenstochastik: Ein Modellvergleich. 1996 (Local)
- [246] GRÖSSING, Gerhard ; FUSSY, Siegfried ; PASCASIO, Johannes M. ; SCHWABL, Herbert: *Vacuum Landscaping: Cause of Nonlocal Influences without Signaling.* In: Austrian Institute for Nonlinear Studies (2018). – (Local)
- [247] HINTERHAUSER, Christopher: Delta Phi B: Quantenphysik und Esoterik. 2018. – (Local)
- [248] IBISON, Michael ; HAISCH, Bernhard: *Quantum and classical statistics of the electromagnetic zero-point field.* In: Physical Review A 54 (1996), October, Nr. 4. – (Local)
- [249] KLUS, Stefan ; NÜSKE, Feliks ; PEITZ, Sebastian: *Koopman analysis of quantum systems.* In: Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 55 (2022), Nr. 31, S. 314002. <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/ac7d22>. – DOI 10.1088/1751-8121/ac7d22. – ISSN 1751-8121. – (Local) , (Link)
- [250] KNILL, Oliver: Probability and Stochastic Processes with Applications. 2008. – (Local)
- [251] KUHN, Wilfried ; STRNAD, Janez: Quantenfeldtheorie: Photonen und ihre Deutung. Braunschweig/Wiesbaden : Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1995. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-322-90949-7>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-322-90949-7>. – ISBN 978-3-528-07275-9. – (Local)

-
- [252] KUIPERS, Folkert: *Stochastic quantization of relativistic theories*. In: Journal of Mathematical Physics 62 (2021), S. 122301. <http://dx.doi.org/10.1063/5.0057720>. – DOI 10.1063/5.0057720. – (Local)
- [253] KUIPERS, Folkert: Spacetime Stochasticity and Second Order Geometry. <https://arxiv.org/abs/2203.16399>. Version: 2022
- [254] KUIPERS, Folkert: *Analytic continuation of stochastic mechanics*. In: Journal of Mathematical Physics 63 (2022), April, Nr. 4. <http://dx.doi.org/10.1063/5.0073096>. – ISSN 1089-7658
- [255] KUIPERS, Folkert: *Quantum Mechanics from Stochastic Processes*. In: The European Physical Journal Plus 138 (2023), Juni, Nr. 6. <http://dx.doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-04184-x>. – ISSN 2190-5444. – (Local)
- [256] KUIPERS, Folkert: *Stochastic Mechanics and the Unification of Quantum Mechanics with Brownian Motion*. In: SpringerBriefs in Physics (2023), June 6. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-031-31448-3>. – DOI 10.1007/978-3-031-31448-3. – ISBN 9783031314483. – (Local)
- [257] MANSUY, Roger ; YOR, Marc: *Aspects of Brownian Motion*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. – ISBN 978-3-540-22347-4. – (Local)
- [258] MCCLENDON, Marvin ; RABITZ, Herschel: *Numerical Simulations in Stochastic Mechanics*. In: Physical Review A 37 (1988), Nr. 9, S. May 1. – (Local)
- [259] N.N.: *Deep Stochastic Mechanics*, 2024. – (Local)
- [260] OHL, Thorsten: *Feynman Diagrams for Beginners*. In: 40th Herbstschule Maria Laach. Maria Laach, Germany, 2008. – (Local)
- [261] PAVON, Michele: *A Footnote to Nelson's Interpretation of the Two-Slit Experiment*. In: Dedicated to Francesco Guerra's 60th birthday (2008). – (Local)
- [262] PAVON, Michele: *Stochastic Mechanics and the Feynman Integral*. In: Nelson's stochastic mechanics framework (2018). – (Local)
- [263] PEÑA-AUERBACH, Luis de l.: *Comparison between two formulations of stochastic quantum mechanics*. In: Revista Mexicana de Física XVIII (1969). – (Local)
- [264] PEÑA-AUERBACH, Luis de l.: *New formulation of stochastic theory and quantum mechanics: The relativistic spinless particle*. In: Revista Mexicana de Física 19 (1970), S. 133–145. – (Local)

-
- [265] PEÑA, L. de l. ; CETTO, A. M.: *The stochastic road to quantum mechanics: An experience.* In: Revista Mexicana de Física 31 (1985), Nr. 4, S. 551–574. – (Local)
- [266] PEÑA, L. de l. ; CETTO, A. M.: *Contribution from stochastic electrodynamics to the understanding of quantum mechanics.* In: Revista Mexicana de Física 37 (1991), Nr. Suplemento 1, S. 526–537. – (Local)
- [267] PEÑA, L. de l. ; CETTO, A. M.: *Contribution from stochastic electrodynamics to the understanding of quantum mechanics.* In: arXiv preprint quant-ph/0501011 (2005). <https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0501011.pdf>. – (Local)
- [268] PEÑA, Luis de l. ; CETTO, Ana M. ; VALDÉS HERNÁNDEZ, Andrea: *The Emerging Quantum: The Physics Behind Quantum Mechanics.* Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London : Springer, 2015. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-07893-9>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-07893-9>. – ISBN 978-3-319-07892-2. – (Local)
- [269] PEÑA, Luis de l. ; CETTO, Ana M. ; VALDÉS-HERNÁNDEZ, Andrea: *Connecting Two Stochastic Theories That Lead to Quantum Mechanics.* In: Frontiers in Physics 8 (2020), S. 162. <http://dx.doi.org/10.3389/fphy.2020.00162>. – DOI 10.3389/fphy.2020.00162. – (Local)
- [270] SUZUKI, Yasuyuki ; VARGA, Kalman: *Lecture Notes in Physics. Bd. 94: Stochastic Variational Approach to Quantum Mechanical Few-Body Problems.* Berlin Heidelberg New York : Springer, 1998. – ISBN 3-540-65152-7. – (Local)
- [271] VIGIER, Jean-Pierre ; JEFFERS, Stanley (Hrsg.) ; LEHNERT, Bo (Hrsg.) ; AB-RAMSON, Nils (Hrsg.) ; CHEBOTAREV, Lev (Hrsg.): *Jean-Pierre Vigier and the Stochastic Interpretation of Quantum Mechanics.* Montreal, Canada : Apeiron, 2000. – ISBN 0-9683689-5-6. – (Local)
- [272] MENDES, R. V.: *Stochastic Mechanics, Non-Local Potentials and Jump Processes.* In: Physics Letters 113A (1985), Nr. 4. – (Local)
- [273] ZINKERNAGEL, Henrik: *Niels Bohr on the wave function and the classical/quantum divide.* In: Studies in History and Philosophy of Modern Physics 53 (2016), S. 9–19. <http://dx.doi.org/10.1016/j.shpsb.2015.11.001>. – DOI 10.1016/j.shpsb.2015.11.001. – (Local) 3-15
- [274] GAMBETTA, Jay M.: *Non-Markovian Stochastic Schrödinger Equations and Interpretations of Quantum Mechanics,* Griffith University, School of Science, PhD Thesis, September 2003. – (Local)

-
- [275] ALBEVERIO, S. ; BLANCHARD, Ph. ; COMBE, Ph. ; RODRIGUEZ, R. ; SIRUGUE, M. ; SIRUGUE-COLLIN, M.: *Trapping in Stochastic Mechanics and Applications to Covers of Clouds and Radiation Belts.* In: ACCARDI, L. (Hrsg.) ; WALDENFELS, W. von (Hrsg.): *Quantum Probability and Applications II Bd. 1136 Centre de Physique Théorique CNRS - Luminy - Case 907, F-13288 MARSEILLE CEDEX 9 (France), Springer Verlag, 1985 (Lecture Notes in Mathematics), S. 24–39.* – ([Local](#))
- [276] BASS, Robert W.: *Evidence of an Electrostatic Mach's Principle?* . – ([Local](#))
- [277] BATANOV-GAUKHMAN, Mikhail: *Stochastic interpretation of QM: Development of a Stochastic Interpretation of Quantum Mechanics.* In: Schrödinger-Euler-Poisson Equations (2020). – ([Local](#))
- [278] DUNKEL, Jörn ; HILBERT, Stefan ; HÄNGGI, Peter: *Langevin-Gleichungen mit nichtlinearer Reibung.* . – ([Local](#))
- [279] GOKLER, Can: *Quantum behavior of a classical particle subject to a random force.* (2020). – ([Local](#))
- [280] KISHI, Yoshio ; UMEHARA, SeiIchiro: *Alternative method to solve the Schrödinger equation and its solution.* . – ([Local](#))
- [281] KOBRYN, A. E. ; HAYASHI, T. ; ARIMITSU, T.: *Quantum stochastic processes: boson and fermion Brownian motion.* In: Condensed Matter Physics 6 (2003), Nr. 4(36), S. 637–646. – ([Local](#))
- [282] NAWA, Hayato: *Nelson Diffusions and Nonlinear Schrödinger equations (Nelson ????????? Schrödinger ???).* (2013). – ([Local](#))
- [283] NELSON, Edward: *Stochastic Mechanics of Particles and Fields.* Department of Mathematics, Princeton University. – ([Local](#))
- [284] KIUKAS, J. ; WERNER, R. F.: *Maximal Violation of Bell Inequalities by Position Measurements.* In: Journal of Mathematical Physics 51 (2010), Nr. 072105. <http://dx.doi.org/10.1063/1.3447736>. – DOI 10.1063/1.3447736. – ([Local](#))
- [285] POPE, D. T. ; DRUMMOND, P. D. ; MUNRO, W. J.: *Disagreement Between Correlations of Quantum Mechanics and Stochastic Electrodynamics in the Damped Parametric Oscillator.* In: Physical Review A 62 (2000), Nr. 042108. – ([Local](#)), ([Local](#))
- [286] STREATER, Ray: *Lost Causes in and Beyond Physics.* King's College London : Springer, 2007. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-36582-2>. – ([Local](#)) C-1

-
- [287] WALLSTROM, Timothy C.: *Inequivalence Between the Schrödinger Equation and the Madelung Hydrodynamic Equations*. In: Physical Review A 49 (1994), Nr. 1613-1617. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.49.1613>. – DOI 10.1103/PhysRevA.49.1613. – (Local) C-1
- [288] EXNER, P. ; TRUMAN, A.: *Models of K-Capture Decay: Stochastic vs. Quantum Mechanics*. In: Theory Division, Nuclear Physics Institute, CSAS. – (Local)
- [289] BEYER, Michael ; PAUL, Wolfgang: *Stern-Gerlach, EPRB and Bell Inequalities: An Analysis Using the Quantum Hamilton Equations of Stochastic Mechanics*. In: Foundations of Physics 54 (2024), Nr. 20. <http://dx.doi.org/10.1007/s10701-024-00752-y>. – DOI 10.1007/s10701-024-00752-y. – (Local)
- [290] CHATURVEDI, S. ; DRUMMOND, Peter D.: *Macroscopic Test of Quantum Mechanics Versus Stochastic Electrodynamics*. In: Physical Review A 55 (1997), Nr. 2, S. n/a. – (Local)
- [291] KRACKLAUER, A. F.: *Second Entanglement and (Re)Born Wave Functions in Stochastic Electrodynamics*. In: Quantum Theory: Reconsideration of Foundations-3, Proceedings Bd. AIP Conference Proceedings 810. Växjö, Sweden : American Institute of Physics, January 15 2006, S. 343–352. – (Local)
- [292] WIESNER, Hartmut ; MÜLLER, Rainer: *Stabilität und Spektrum der Atome*. . – (Local)
- [293] GENOVESE, Marco: *Research on hidden variable theories: A review of recent progresses*. In: Physics Reports 413 (2005), 319–396. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0370157305000823>. – (Local)
- [294] DE MUYNCK, Willem M.: *Interpretations of quantum mechanics, and interpretations of violation of Bell's inequality*. In: Preprint on arXiv (2001). <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0102066>. – (Local)
- [295] MURALIDHAR, K.: *Classical Origin of Quantum Spin*. In: Apeiron 18 (2011), April, Nr. 2, 146. <https://www.apeiron-journal.org>. – (Local)
- [296] BLASONE, M. ; SRIVASTAVA, Y. N. ; VITIELLO, G. ; WIDOM, A.: *Phase Coherence in Quantum Brownian Motion*. In: Annals of Physics 267 (1998), S. 61–74. – (Local)
- [297] BRODY, T. A.: *The double slit revisited*. In: Revista Mexicana de Física 35 (1989), Nr. Suplemento, S. 51–518. – (Local)

-
- [298] GRÖSSING, Gerhard ; FUSSY, Siegfried ; MESA PASCASIO, Johannes ; SCHWABL, Herbert: *Vacuum Landscaping: Cause of Nonlocal Influences without Signaling*. In: Entropy 20 (2018), Nr. 6, S. 458. <http://dx.doi.org/10.3390/e20060458>. – DOI 10.3390/e20060458. – (Local)
- [299] JIN, Fengping ; YUAN, Shengjun ; DE RAEDT, Hans ; MICHELSSEN, Kristel ; MIYASHITA, Seiji: *Corpuscular Model of Two-Beam Interference and Double-Slit Experiments with Single Photons*. In: Journal of the Physical Society of Japan 79 (2010), Nr. 7, S. 074401. – (Local)
- [300] NITTA, Hideo ; KUDO, Tomoshige: *The Time of Arrival of Electrons in the Double-Slit Experiment*. In: Physical Review A 77 (2008), Nr. 1, 014102-1–014102-4. <http://hdl.handle.net/2309/90487>. – (Local)
- [301] RAFSANJANI, Ali A. ; KAZEMI, MohammadJavad ; BAHRAMPOUR, Alireza ; GOLSHANI, Mehdi: *Can the double-slit experiment distinguish between quantum interpretations?* In: Communications Physics 6 (2023), S. 195. <http://dx.doi.org/10.1038/s42005-023-01315-9>. – DOI 10.1038/s42005-023-01315-9. – (Local)
- [302] ZECCA, Antonio: *Double Slit Diffraction Pattern of Gaussian Wave Packet Interacting with the Wall*. In: Advances in Studies in Theoretical Physics 1 (2007), Nr. 11, S. 539–547. – (Local)
- [303] ZECCA, Antonio: *Contribution of Particle-Wall Interaction to Double Slit Diffraction Pattern*. In: Advances in Studies in Theoretical Physics 2 (2008), Nr. 8, S. 385–392. – (Local)
- [304] DANENHOWER, Peter: *There a connection between Planck's constant, Boltzmann's constant and the speed of light?* In: B.Sc. (Hons. First Class) (1977). – (Local)
- [305] COLE, Daniel C.: *Simulation Results Related to Stochastic Electrodynamics*. In: AIP Conference Proceedings Bd. 810. Brookline, MA, USA : American Institute of Physics, 2005, 99–105. – (Local)
- [306] CAROSSO, Andrea: *Simulating Nelsonian Quantum Field Theory*. In: Foundations of Physics 54 (2024), Nr. 3, 30. <http://dx.doi.org/10.1007/s10701-024-00612-3>. – DOI 10.1007/s10701-024-00612-3. – ISSN 1572-9516. – (Local) , (Link)
- [307] CAVALLERI, G. ; BARBERO, F. ; BERTAZZI, G. ; CESARONI, E. ; TONNI, E. ; BOSI, L. ; SPAVIERI, G. ; GILLIES, G. T.: *A quantitative assessment of stochastic electrodynamics with spin (SEDS): Physical principles and novel applications*. In: Frontiers of Physics in China 5 (2010), Nr. 1, S. 107–122. – (Local)

-
- [308] CAMPARO, J. C.: *Semiclassical random electrodynamics: Spontaneous emission and the Lamb shift / The Aerospace Corporation.* 1999 (SMC-TR-99-12). – *Forschungsbericht.* – ([Local](#))
- [309] RODRÍGUEZ, David: *Orbital stability and the quantum atomic spectrum from stochastic electrodynamics.* In: arXiv preprint arXiv:1105.3182 (2011). – ([Local](#))
- [310] FRANÇA, H. M. ; GOMES, G. G. ; PARRA, R. L.: *Stochastische Elektrodynamik.* In: Brazilian Journal of Physics 37 (2007), March, Nr. 1, 13. <https://journals.scholarsportal.info/browse/01039733/v41i4-6?lang=en>. – ISSN 0103-9733. – ([Local](#))
- [311] HARA, Koh'ichiro ; OHBA, Ichiro: *Tunneling Time Distribution by means of Nelson's Quantum Mechanics and Wave-Particle Duality.* In: arXiv preprint arXiv:quant-ph/0210119v3 (2003), February. – ([Link](#)) ([Local](#))
- [312] OHBA, Ichiro ; YAMANAKA, Yoshiya: *Tunneling time and Nelson's Quantum Mechanics.* In: ResearchGate (1997). – ([Link](#)) ([Local](#))
- [313] WICK, D.: *The Infamous Boundary.* Boston : Birkhäuser, 1995
- [314] BOHM, D.: *Wholeness and the Implicate Order.* London : Routledge Kegan Paul, 1980. – 84 S.
- [315] GOLDSTEIN, S.: In: Phys. Today 51 (1998), Nr. March, 42 S.
- [316] BROGLIE, L. de: In: Comptes Rendus 177 (1923), 507, 548, 630 S.
- [317] SCHRÖDINGER, E.: In: Ann. d. Phys. 79 (1926), 361–376 S.
- [318] BELL, J. S.: in *Sixty-Two Years of Uncertainty.* New York : Plenum, 1989, S. 17
- [319] HEISENBERG, W.: *Physics and Beyond.* New York : Harper and Row, 1971. – 62 S.
- [320] HEISENBERG, W.: *Physics and Philosophy.* New York : Harper and Row, 1958. – 129 S.
- [321] HEISENBERG, W.: *The Physicist's Conception of Nature.* New York : Harcourt Brace, 1958. – 15 S.
- [322] BESS, L.: In: Prog. Theor. Phys. 49 (1973), Nr. 6, 1889–1910 S.
- [323] PUTHOFF, H. E.: In: Phys. Rev. A 40 (1989), 4857–4862 S.

-
- [324] BOYER, H. E.: In: *Scientific American* 253 (1985), August, Nr. 2, 70–78 S.
- [325] CALOGERO, F.: In: *Phys. Lett. A* 228 (1997), 335–346 S.
- [326] CARATI, A. ; GALGANI, L.: In: *Nuovo Cimento B* 114 (1999), 489–500 S.
- [327] EIBENBERGER, S. ; GERLICH, S. ; ARNDT, M. ; MAYOR, M. ; TÜXEN, T.: In: *Phys. Chem. Chem. Phys.* 15 (2013), 14696 S.
- [328] BALLENTINE, L. E.: In: *Rev. Mod. Phys.* 42 (1970), 358–381 S.
- [329] GEBELEIN, H.: *Turbulenz*. Berlin : Springer, 1935. – 75 S.
- [330] BORN, M. ; JORDAN, P.: *Elementare Quantenmechanik*. Berlin : Springer, 1930. – 32 S.
- [331] MULLIKEN, R. S.: In: *Nature* 114 (1924), 349 S.
- [332] CLUSIUS, K.: In: *Die Chemie* 56 (1942), 241–247 S.
- [333] HEISENBERG, W.: Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. In: *Z. Phys.* 43 (1927), S. 172
- [334] FOWLER, R. H. ; NORDHEIM, L.: In: *Proc. Roy. Soc. Series A* 119 (1928), Nr. 781, 173 S.
- [335] EINSTEIN, A.: In: *Ann. d. Physik* 17 (1905), 132 S.
- [336] EINSTEIN, A.: In: *Ann. d. Physik* 17 (1905), 549–560 S.
- [337] EINSTEIN, A.: In: *Ann. Phys.* 19 (1906), 371–381 S.
- [338] BROGLIE, L. de: *Une Tentative d'Interprétation Causale et Non-Linéaire de la Mécanique Ondulatoire*. Paris : Gauthier-Villars, 1956
- [339] MIELNIK, B. ; TENGSTRAND, G.: In: *Intern. J. Theor. Phys.* 19 (1980), 239–250 S.
- [340] BADUREK, G. ; RAUCH, H. ; TUPPINGER, D.: In: *Phys. Rev. A* 34 (1986), 2600–2608 S.
- [341] THOMSON, W.: In: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh VI* (1867), 94–105 S.
- [342] MADELUNG, E.: *Quantentheorie in hydrodynamischer Form*. In: *Z. Physik* 40 (1926), Nr. 3-4, S. 322–326
- [343] HEISENBERG, W.: In: *Z. Physik* 43 (1927), Nr. 3-4, 172–198 S.

-
- [344] BELL, J.: In: Physics World 3 (1990), August, 33–40 S.
- [345] WIGNER, E. P.: *Quantum Theory of Measurement*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1983, S. 267
- [346] WIGNER, E. P.: *Quantum Theory of Measurement*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1983, S. 313
- [347] WIGNER, E. P. ; WHEELER, J. A. (Hrsg.) ; ZUREK, W. H. (Hrsg.): *Quantum Theory of Measurement*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1983. – 292 S.
- [348] EHRENFEST, P.: In: Z. Physik 45 (1927), Nr. 7-8, 455–457 S.
- [349] GARBACZEWSKI, P.: arXiv: cond-mat/0703147. 2007
- [350] SMOLUCHOWSKI, M. V.: In: Ann. d. Physik 21 (1906), 756–780 S.
- [351] SMOLUCHOWSKI, M. V.: In: Ann. d. Physik 48 (1915), 1103–1112 S.
- [352] SMOLUCHOWSKI, M. V.: Abhandlungen über die Brownische Bewegung und verwandte Erscheinungen. Leipzig : Akademische Verlagsgesellschaft, 1923
- [353] NEUMANN, J. v.: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. New York : Dover Publications, 1943
- [354] BOHR, N.: In: Phil. Mag. 26 (1913), 1–25, 476–502, 857–875 S.
- [355] NAGOURNEY, W. ; SANDBERG, J. ; DEHMELT, H.: In: Phys. Rev. Lett. 56 (1986), 2797–2799 S.
- [356] MERMIN, N. D.: In: Rev. Mod. Phys. 65 (1993), 803–815 S.
- [357] JAYNES, E. T. ; CUMMINGS, F.: In: Proc. IEEE 51 (1963), 89 S.
- [358] CRISPY, M. D. ; JAYNES, E. T.: In: Phys. Rev. 179 (1969), 1253–1261 S.
- [359] JAYNES, E. T.: In: Phys. Rev. A 2 (1970), 260–262 S.
- [360] WEISSKOPF, V. ; WIGNER, E.: In: Z. Physik 63 (1930), 54–73 S.
- [361] FERMI, E.: In: Atti della Reale Accademia nazionale dei Lincei 5 (1927), 795 S.
- [362] EINSTEIN, A.: In: Ann. Phys. (Germany) 17 (1905), 132 S.
- [363] LEWIS, G. N.: In: Nature (1926), December 18

-
- [364] BOHM, D.: Quantum Theory. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, 1951
- [365] HARTLE, J. B. ; GELL-MANN, M.: in Complexity, Entropy and the Physics of Information. Redwood City, CA : Addison-Wesley, 1990
- [366] KAMPEN, N. G.: In: Physica A 153 (1988), Nr. 1, 97–113 S.
- [367] EISENSCHITZ, E. ; LONDON, F.: In: Z. Physik 60 (1930), 491–527 S.
- [368] DZYALOSHINSKII, I. E. ; LIFSHITZ, E. M. ; PITAEVSKII, L. P.: In: Soviet Physics, Usp 4 (1961), Nr. 2, 153–176 S.
- [369] FEIBELMAN, Peter J.: Progr. Surf. Sci.. Bd. 12. Pergamon Press Ltd., 1982.
– 287–408 S.
- [370] HULT, E. ; RYDBERG, H. ; LUNDQVIST, B. I. ; LANGRETH, D. C.: In: Phys. Rev. B 59 (1999), 4708–4713 S.
- [371] KOHN, W. ; MEIR, Y. ; MAKAROV, D. E.: In: Phys. Rev. Lett. 80 (1998), 4153–4156 S.
- [372] SMITHSONIAN: Smithsonian Physical Tables. 9th. unknown
- [373] SCHRÖDINGER, E.: The present situation in quantum mechanics. In: WHEELER, J. A. (Hrsg.) ; ZUREK, W. H. (Hrsg.): Quantum Theory and Measurement. Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1983, S. 152–167
- [374] UHLENBECK, G. E. ; GOUDSMIT, S.: In: Die Naturwissenschaften 13 (1925), Nr. 47, 953–954 S.
- [375] UHLENBECK, G. E. ; GOUDSMIT, S.: In: Nature 127 (1926), 264–265 S.
- [376] PAULI, W.: Über ein Kriterium für Ein- oder Zweiwertigkeit der Eigenfunktionen in der Wellenmechanik. In: Helv. Phys. Acta 12 (1939), S. 147 6–38
- [377] PAULI, W.: Handbuch der Physik. Bd. XXIV/1. 2. Aufl. Berlin : Springer, 1933. – 126 S.
- [378] PAULI, W.: Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. In: Z. Physik 43 (1927), S. 601
- [379] PAULI, W.: In: Z. Physik 31 (1925), 373–385 S.
- [380] WAERDEN, B. L. d.: in Theoretical Physics in the Twentieth Century. A Memorial Volume to Wolfgang Pauli. New York : Interscience Publishers, 1960, S. 214

-
- [381] LANDAU, L. D. ; LIFSHITZ, E. M.: Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory), Third Edition. New York : Pergamon, 1977. – 198 S.
- [382] OHANIAN, H. C.: In: Am. J. Phys. 54 (1986), Nr. 6, 500–505 S.
- [383] GORDON, W.: In: Z. Phys. 50 (1928), 630 S.
- [384] HESTENES, D.: In: Am. J. Phys. 47 (1979), 399 S.
- [385] HESTENES, D.: In: Foundation of Physics 20 (1980), 1213–1232 S.
- [386] WEIZSÄCKER, C. F.: Zum Weltbild der Physik. Leipzig : S. Hirzel, 1945. – 32 S.
- [387] DANKEL, T.: In: Archiv. Rational Mech. Anal. 37 (1971), 192–221 S.
- [388] DOHRN, D. ; GUERRA, F. ; RUGGIERO, P.: Spinning Particles and Relativistic Particles in the Framework of Nelson's Stochastic Mechanics. In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; COMBE, Ph. (Hrsg.) ; HØEGH-KROHN, R. (Hrsg.) ; RIDEAU, G. (Hrsg.) ; SIRUGUE-COLLIN, M. (Hrsg.) ; SIRUGUE, M. (Hrsg.) ; STORA, R. (Hrsg.): Feynman Path Integrals Bd. 106. Springer Verlag, 1979, S. 165–181
- [389] DOHRN, D. ; GUERRA, F.: Nelson's Stochastic Mechanics on Riemannian Manifolds. In: Lett. Nuovo Cimento 22 (1978), S. 121–127
- [390] GOLDSTEIN, H.: Classical Mechanics. 2nd. Reading, MA : Addison-Wesley, 1980. – 148–158 S.
- [391] SLICHTER, C. P.: Principles of Magnetic Resonance. 3rd. Berlin, Heidelberg : Springer, 1990
- [392] BLOCH, F.: In: Phys. Rev. 70 (1946), Nr. 7-8, 460–474 S.
- [393] RAUCH, H.: In: Found. Phys. 23 (1993), Nr. 1, 7–36 S.
- [394] WERNER, S. A. ; COLELLA, R. ; OVERHAUSER, A. W. ; EAGEN, C. F.: In: Phys. Rev. Lett. 35 (1975), Nr. 16, 1053–1055 S.
- [395] BELL, J.: In: J. Phys. Colloques 42 (1981), C2–41–C2–62 S.
- [396] BELL, J. S.: On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox. In: Physics 1 (1964), S. 195–200
- [397] BELL, J. S.: The Theory of Local Beables. 1975. – CERN preprint TH-2053, reproduced in Epistemological Letters (Association Ferd. Gonseth CP 1081CH 205 Bienne) 9 (1976), 11

- [398] BELL, J. S.: *Bertlmann's Socks and the Nature of Reality*. In: Journal de Physique 42 (1981), S. 41–61. – Suppl. Colloque C2
- [399] STERN, Otto ; GERLACH, Walther: *Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld*. In: Zeitschrift für Physik 9 (1922), S. 349–352. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01326983>. – DOI 10.1007/BF01326983
- [400] GERLACH, W. ; STERN, O.: In: Ann. d. Physik 74 (1924), 673–699 S.
- [401] HOME, D. ; PAN, A. K. ; ALI, M. ; MAJUMDAR, A. S.: In: Phys. Rev. A 75 (2007), Nr. 4, 042110 S.
- [402] WREDE, E.: In: Z. Physik 41 (1927), 569–575 S.
- [403] MOTT, N. V. ; MASSEY, H. S. W.: *Quantum theory and Measurement*. In: WHEELER, J. A. (Hrsg.) ; ZUREK, W. H. (Hrsg.): Quantum theory and Measurement. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1983, S. 703
- [404] LEU, A.: In: Z. Physik 41 (1927), 551–562 S.
- [405] PHIPPS, T. E. ; STERN, O.: In: Z. Physik 73 (1932), 185–191 S.
- [406] ROSEN, N. ; ZENER, C.: In: Phys. Rev. 40 (1932), Nr. 4, 502–507 S.
- [407] ENGLERT, B.-G. ; SCHWINGER, J. ; SCULLY, M. O.: In: Found. Phys. 18 (1988), Nr. 10, 1045–1056 S.
- [408] WHEELER, J. A. ; ZUREK, W. H.: Quantum theory and measurement. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1983. – 699 S.
- [409] DIRAC, P. A. M.: Proc. Roy. Soc. (A). In: Proc. Roy. Soc. (A) 117 (1928), S. 610–624
- [410] LAMEHI-RACHTI, M. ; MITTIG, W.: Phys. Rev. D. In: Phys. Rev. D 14 (1976), S. 2543–2555
- [411] ASPECT, A. ; GRANGIER, Ph. ; ROGER, G.: Phys. Rev. Lett. In: Phys. Rev. Lett. 49 (1982), Nr. 1, S. 91
- [412] BELL, J. S.: Physics (N.Y.). In: Physics (N.Y.) 1 (1965), Nr. 3, S. 195–200
- [413] KOCHEN, S. ; SPECKER, E. P.: In: J. Math. Mech. 17 (1967), 59–87 S.
- [414] PLANCK, M.: In: Sitz. der preuß. Akademie (1917), 324 S.
- [415] KOLMOGOROV, A. N.: In: Math. Ann. 104 (1931), 415 S.

- [416] BAUBLITZ, M.: In: Prog. Theor. Phys. 80 (1988), Nr. 2, 232–244 S. C-1
- [417] PEÑA, L. de l. ; CETTO, A. H.: The quantum dice - An introduction to stochastic electrodynamics. Dordrecht : Kluwer, 1996
- [418] WANG, Xiao-Song: arXiv:physics/0610224v3. Apr. 2014 C-1
- [419] GRÖSSING, G.: In: Phys. Lett. A 372 (2008), 4556–4563 S. C-1
- [420] GRÖSSING, G.: In: Physica A 388 (2009), 811–823 S. C-1
- [421] ANTONAKOS, Charalampos: The Quantum Wave Function as a Complex Probability Distribution. <https://arxiv.org/abs/2502.10523>. Version: 2025
- [422] MACKAY, Noah M.: The Statistical Mechanics of Hawking Radiation. <https://arxiv.org/abs/2502.08816>. Version: 2025
- [423] CAI, Yifan ; WANG, Tao ; ZHAO, Liu: Fluctuation theorems in general relativistic stochastic thermodynamics. In: Physical Review E 111 (2025), Februar, Nr. 2. <http://dx.doi.org/10.1103/physreve.111.024102>. – DOI 10.1103/physreve.111.024102. – ISSN 2470-0053
- [424] CAI, Yifan ; WANG, Tao ; ZHAO, Liu: General Relativistic Fluctuation Theorems. <https://arxiv.org/abs/2407.09912>. Version: 2024
- [425] BEUMEE, Johan ; RABITZ, Herschel: Classical Elastic Two-Particle Collision Energy Conservation using Edward Nelson's Energy, Double Diffusion and Special Relativity. <https://arxiv.org/abs/2212.02637>. Version: 2022. – (Local)
- [426] ORLOVA, Elena ; USTIMENKO, Aleksei ; JIANG, Ruoxi ; LU, Peter Y. ; WILLETT, Rebecca: Deep Stochastic Mechanics. <https://arxiv.org/abs/2305.19685>. Version: 2024
- [427] REDDINGER, Maik ; POIRIER, Bill: Towards a mathematical theory of the Madelung equations: Takabayasi's quantization condition, quantum quasi-irrotationality, weak formulations, and the Wallstrom phenomenon. In: Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 56 (2023), April, Nr. 19, 193001. <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/acc7db>. – DOI 10.1088/1751-8121/acc7db. – ISSN 1751-8121
- [428] VASTOLA, John J. ; HOLMES, William R.: Stochastic path integrals can be derived like quantum mechanical path integrals. <https://arxiv.org/abs/1909.12990>. Version: 2019

-
- [429] CARRARA, Nicholas: Quantum Trajectories in Entropic Dynamics. <https://arxiv.org/abs/1907.00361>. Version: 2019
- [430] GOLUBJEVA, O. N. ; SIDOROV, S. V.: Quantum-thermal self-diffusion as a hydrodynamic mechanism for the fluctuation relaxation. <https://arxiv.org/abs/1404.3071>. Version: 2014
- [431] BAEZ, Jacob John C.and B. John C.and Biamonte: Quantum Techniques for Stochastic Mechanics. <https://arxiv.org/abs/1209.3632>. Version: 2019
- [432] ANDRISANI, Andrea ; PETRONI, Nicola C.: *Markov processes and generalized Schrödinger equations*. In: Journal of Mathematical Physics 52 (2011), November, Nr. 11. <http://dx.doi.org/10.1063/1.3663205>. – DOI 10.1063/1.3663205. – ISSN 1089-7658
- [433] RIGATOS, Gerasimos G.: Spin-Orbit Interaction in particles' motion as a model of quantum computation. <https://arxiv.org/abs/1102.2069>. Version: 2011
- [434] TRIFONOV, D. A. ; NIKOLOV, B. A. ; MLADENOV, I. M.: On the Uncertainty Relations in Stochastic Mechanics. <https://arxiv.org/abs/0902.3880>. Version: 2009
- [435] Annalen der Physik 521 (2009), April, Nr. 4, 187–188 S. <http://dx.doi.org/10.1002/andp.20095210402>. – DOI 10.1002/andp.20095210402. – ISSN 1521-3889. – WITHDRAWN
- [436] SCHULZ, Benjamin: A New Look at Bell's Inequalities and Nelson's Theorem. In: arXiv (2009), September 6. – ([Local](#)) – withdrawn
- [437] SCHULZ, Benjamin: Reply to a comment of I. Schmelzer. <https://arxiv.org/abs/0910.5660>. Version: 2013
- [438] SCHULZ, Benjamin: Review of Nelson's analysis of Bell's theorem. <https://arxiv.org/abs/1302.4180>. Version: 2014
- [439] DURRAN, Richard ; NEATE, Andrew ; TRUMAN, Aubrey: The divine clockwork: Bohr's correspondence principle and Nelson's stochastic mechanics for the atomic elliptic state. In: Journal of Mathematical Physics 49 (2008), März, Nr. 3. <http://dx.doi.org/10.1063/1.2837434>. – DOI 10.1063/1.2837434. – ISSN 1089-7658
- [440] VOLCHENKOV, D. ; LIMA, R.: Magnetohydrodynamics In The Context Of Nelson's Stochastic Mechanics. <https://arxiv.org/abs/0710.4744>. Version: 2007

-
- [441] BEUMEE, Johan: Energy and Momentum Conservation for Diffusion - A Stochastic Mechanics Approximation - Part I. <https://arxiv.org/abs/math-ph/0610042>. Version: 2006
- [442] SMOLIN, Lee: Could quantum mechanics be an approximation to another theory? <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0609109>. Version: 2006
- [443] GALVAN, Bruno: A Newtonian Hidden Variable Theory. <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0406134>. Version: 2004
- [444] SHEMI-ZADEH, V. E.: Does classical mechanics always adequately describe classical physical reality". <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0206194>. Version: 2002
- [445] CORREGGI, M. ; MORCHIO, G.: *Quantum Mechanics and Stochastic Mechanics for Compatible Observables at Different Times*. In: Annals of Physics 296 (2002), März, Nr. 2, 371-389. <http://dx.doi.org/10.1006/aphy.2002.6236>. – DOI 10.1006/aphy.2002.6236. – ISSN 0003-4916
- [446] PAVON, Michele: *Stochastic mechanics and the Feynman integral*. In: Journal of Mathematical Physics 41 (2000), September, Nr. 9, 6060-6078. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1286880>. – DOI 10.1063/1.1286880. – ISSN 1089-7658
- [447] PELITI, Luca ; MURATORE-GINANNESCHI, Paolo: *R. Fürth's 1933 paper "On certain relations between classical statistics and quantum mechanics"/"Über einige Beziehungen zwischen klassischer Statistik und Quantenmechanik"*, Zeitschrift für Physik, 81 143-162]. In: The European Physical Journal H 48 (2023), Mai, Nr. 1. <http://dx.doi.org/10.1140/epjh/s13129-023-00052-5>. – DOI 10.1140/epjh/s13129-023-00052-5. – ISSN 2102-6467
- [448] CHOW, Shui-Nee ; LI, Wuchen ; ZHOU, Haomin: A discrete Schrodinger equation via optimal transport on graphs. <https://arxiv.org/abs/1705.07583>. Version: 2017
- [449] AMMARI, Zied ; FALCONI, Marco: *Bohr's Correspondence Principle for the Renormalized Nelson Model*. In: SIAM Journal on Mathematical Analysis 49 (2017), Januar, Nr. 6, 5031-5095. <http://dx.doi.org/10.1137/17m1117598>. – DOI 10.1137/17m1117598. – ISSN 1095-7154
- [450] GRÖSSING, Gerhard: *Kontinuum: Die Geschichte einer Verdrängung, mit besonderem Augenmerk auf die Quantentheorie*. In: Österreichische Zeitschrift für Geschichtswissenschaften (ÖZG) 16 (2005), Nr. 1, S. 9–23. – ISSN 1016-765X. – (Local)

-
- [451] SCHMID, Christhard: Anhang: Geschichte und Deutung der Quantentheorie. *October 2006.* – (*Local*)
- [452] GÖLLER, André: Philosophische Aspekte des quantenmechanischen Messproblems. *Kassel, Germany, Universität Kassel, Staatsexamensarbeit, 2014.* – (*Local*)
- [453] ENDER, Manfred: Die Interpretation der Quantentheorie. *March 2013.* – (*Local*)
- [454] CAPONIGRO, Michele: *Interpretations of Quantum Mechanics: a critical survey.* (2015). – (*Local*)
- [455] GENOVESE, Marco: *Interpretations of Quantum Mechanics and the measurement problem.* In: Reports on Progress in Physics 73 (2010), Nr. 5, S. 056001. <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/73/5/056001>. – DOI 10.1088/0034-4885/73/5/056001. – (*Local*)
- [456] LEE, Ryan: On the Interpretation of Quantum Mechanics, *University of Washington, M.Sc. Thesis, 2008.* – (*Local*)
- [457] LILLIG, Joachim: Interpretationen und Quantenphilosophie. – (*Local*)
- [458] ZEH, Heinz-Dieter: Physik ohne Realität: Tiefsinn oder Wahnsinn? *Online Essay.* <http://www.zeh-hd.de/>. Version: 2011. – (*Local*)
- [459] WIEDER, Sol: The Foundations of Quantum Theory. *New York : Academic Press, 1973.* – ISBN 978-0127505500. – (*Local*)
- [460] GHIRARDI, GianCarlo: *The interpretation of quantum mechanics: where do we stand?* In: Journal of Physics: Conference Series 174 (2009), Nr. 1. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/174/1/012013>. – DOI 10.1088/1742-6596/174/1/012013. – (*Local*)
- [461] JOHNSON, Cory: Foundations and interpretations of quantum mechanics, *Colby College, Honours Thesis, 2008.* <https://digitalcommons.colby.edu/honortheses/129>. – (*Local*)
- [462] ORGLER, Filomena: Zur Interpretation der Quantenphysik. *Innsbruck, Austria, Universität Innsbruck, Diplomarbeit, 2020.* – (*Local*)
- [463] CHERNOV, Nikolai ; DOLGOPYAT, Dmitry: *Brownian Brownian Motion—I.* In: Memoirs of the American Mathematical Society 198 (2009), mar, Nr. 927. – ISSN 0065-9266. – (*Local*)

-
- [464] SCHILLING, René L. ; PARTZSCH, Lothar: Brownian Motion: An Introduction to Stochastic Processes. Berlin/Boston : De Gruyter, 2012. – ISBN 978-3-11-027889-7. – ([Local](#))
- [465] FREEDMAN, David: Brownian Motion and Diffusion. New York : Springer-Verlag, 1983. – ISBN 978-0-387-90739-8. – ([Local](#))
- [466] LE GALL, Jean-François: Graduate Texts in Mathematics. Bd. 274: Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus. Springer, 2016. – ISBN 978-3-319-31088-6. – ([Local](#))
- [467] HURTADO, P. I.: Physics of Complex Systems: Brownian Motion. Lecture Notes, Universidad de Granada. <https://onsager.ugr.es/>. Version: 2023. – ([Local](#))
- [468] GILLESPIE, Daniel T. ; SEITARIDOU, Effrosyni: Simple Brownian Diffusion: An Introduction to the Standard Theoretical Models. Oxford : Oxford University Press, 2013. – ISBN 978-0-19-966450-4. – ([Local](#))
- [469] KARATZAS, Ioannis ; SHREVE, Steven E.: Graduate Texts in Mathematics. Bd. 113: Brownian Motion and Stochastic Calculus. Second. New York : Springer-Verlag, 1991. – ISBN 0-387-97655-8. – ([Local](#))
- [470] LICHTENBERG, A. J. ; LIEBERMAN, M. A.: Applied Mathematical Sciences. Bd. 38: Regular and Stochastic Motion. New York : Springer-Verlag, 1983. – ISBN 978-0-387-97645-6. – ([Local](#))
- [471] AVIN, Shahar: A Philosopher's View of the Epistemic Interpretation of Quantum Mechanics. Trinity College, Cambridge, 2010. – ([Local](#))
- [472] NEUMAIER, Arnold: On a realistic interpretation of quantum mechanics. In: arXiv preprint quant-ph/9908071 (1999). – ([Link](#)) ([Local](#))
- [473] KLEINERT, Ernst: Mathematik und Determinismus / Universität Hamburg. 2009 (Hamburger Beiträge zur Mathematik 334). – Forschungsbericht. – ([Local](#))
- [474] WESTRA, Willem: A First Principles Derivation of Classical and Quantum Mechanics as the Natural Theories for Smooth Stochastic Paths. <https://arxiv.org/abs/2011.09181>. Version: 2020. – ([Local](#))
- [475] NIKOLIC, Hrvoje: Classical Mechanics Without Determinism. In: Foundations of Physics Letters 19 (2006), November, Nr. 6, 553–566. <http://dx.doi.org/10.1007/s10702-006-1009-2>. – DOI 10.1007/s10702-006-1009-2. – ISSN 1572-9524. – ([Local](#))

-
- [476] KIRKPATRICK, K. A.: "Quantal" behavior in classical probability. <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0106072>. Version: 2003. – (Local)
- [477] KIRKPATRICK, K. A.: Compatibility and probability. <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0403021>. Version: 2004. – (Local)
- [478] CRESSON, Jacky: Scale calculus and the Schrödinger equation. In: Journal of Mathematical Physics 44 (2003), November, Nr. 11, 4907–4938. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1618923>. – DOI 10.1063/1.1618923. – ISSN 1089–7658. – (Local)
- [479] BINIOK, Johannes C. G. ; BUSCH, Paul: Multislit interferometry and commuting functions of position and momentum. In: Physical Review A 87 (2013), Juni, Nr. 6. <http://dx.doi.org/10.1103/physreva.87.062116>. – DOI 10.1103/physreva.87.062116. – ISSN 1094–1622. – (Local)
- [480] BUSCH, P ; HEINOEN, T ; LAHTI, P: Heisenberg's uncertainty principle. In: Physics Reports 452 (2007), November, Nr. 6, 155–176. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2007.05.006>. – DOI 10.1016/j.physrep.2007.05.006. – ISSN 0370–1573. – (Local)
- [481] KUPCZYNSKI, Marian: Entanglement and quantum nonlocality demystified. In: AIP Conference Proceedings, AIP, 2012. – ISSN 0094–243X. – (Local)
- [482] BARANDES, Jacob A.: The Stochastic-Quantum Correspondence. <https://arxiv.org/abs/2302.10778>. Version: 2023. – (Local)
- [483] BARANDES, Jacob A.: The Stochastic-Quantum Theorem. <https://arxiv.org/abs/2309.03085>. Version: 2023. – (Local)
- [484] BARANDES, Jacob A.: New Prospects for a Causally Local Formulation of Quantum Theory. <https://arxiv.org/abs/2402.16935>. Version: 2024. – (Local)
- [485] CHAVANIS, Pierre-Henri: On the Connection between Nelson's Stochastic Quantum Mechanics and Nottale's Theory of Scale Relativity. In: Axioms 13 (2024), Nr. 9. <http://dx.doi.org/10.3390/axioms13090606>. – DOI 10.3390/axioms13090606. – ISSN 2075–1680. – (Local)
- [486] SHARLOW, Mark F.: Charge without Charge in the Stochastic Interpretation of Quantum Mechanics. – (Local)
- [487] HEES, Hendrik van: Elektrodynamik und Kausalität. Max-von-Laue-Str. 1, D-60438 Frankfurt am Main, Germany, Dezember 2000. – (Local)

-
- [488] CUGLIANDOLO, Leticia F.: Statistical Mechanics and Stochastic Processes. *Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies*, November 2009. – (*Local*)
- [489] HERRMANN, Friedrich ; JOB, Georg ; SCHWARZE, Heiner (Hrsg.): Altlasten der Physik. Gesamtband. Mainz : Hermann-Schmidt-Verlag, 2020. – ISBN 978-3-87439-718-7. – (*Local*)
- [490] FALK, Gottfried: Physik, Zahl und Realität: Die begrifflichen und mathematischen Grundlagen einer universellen quantitativen Naturbeschreibung. Basel : Birkhäuser Verlag, 1990. – ISBN 978-3-7643-2340-0. – (*Local*)
- [491] BUNGE, Mario: Survey of the Interpretations of Quantum Mechanics. In: American Journal of Physics 24 (1956), 272. <http://dx.doi.org/10.1119/1.1934204>. – DOI 10.1119/1.1934204. – (*Link*) (*Local*)
- [492] WALLSTROM, Timothy C.: The Stochastic Mechanics of the Pauli Equation. In: Transactions of the American Mathematical Society 318 (1990), April, Nr. 2, S. 747-771. – (*Local*)
- [493] DÜRR, Detlef ; LAZAROVICI, Dustin: Quantenphysik ohne Quantenphilosophie. Berlin : Springer, 2020. – ISBN 978-3-662-62224-5. – (*Local*)
- [494] SUTER, Dieter: Quantenmechanische Paradoxa. <https://www.e1.physik.tu-dortmund.de/cms/Medienpool/Downloads/paradoxa.pdf>. Version: 1999. – Vorlesungsskript, WS 1998/99
- [495] OHL, Thorsten: Quantenmechanik. https://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/11010500/_imported/fileadmin/11010500/Teaching/WS2019_SS2020/SS_2018/Quantenmechanik_SS18/. Version: 2018. – Vorlesungsskript, Universität Würzburg
- [496] JOHNS, Oliver D.: Analytical Mechanics for Relativity and Quantum Mechanics. Oxford University Press, 2005. – ISBN 978-0-19-856726-0. – (*Local*)
- [497] SAKURAI, J. J. ; NAPOLITANO, Jim J.: Modern Quantum Mechanics. 2. Cambridge University Press, 2017. – ISBN 978-1-108-42241-3. – (*Local*)
- [498] RAE, Alastair I. M.: Quantum Mechanics. 5. Taylor & Francis, 2008. – ISBN 978-1-58488-968-8. – (*Local*)
- [499] ACCARDI, Luigi ; LU, Yun G. ; VOLOVICH, Igor: Quantum Theory and Its Stochastic Limit. Springer, 2002. – ISBN 978-3-642-07543-8. – (*Local*)
- [500] IVANOV, Stefan: Theoretical and Quantum Mechanics: Fundamentals for Chemists. Springer, 2012. – ISBN 978-94-007-5541-7. – (*Local*)

-
- [501] EISBERG, Robert ; RESNICK, Robert: Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles. 2. Wiley, 1985. – ISBN 978-0-471-87373-0. – (Local)
- [502] KAWASHIMA, S. (Hrsg.) ; YANAGISAWA, T. (Hrsg.): Advances in Nonlinear Partial Differential Equations and Stochastics. 1998 (*Advances in Mathematics for Applied Sciences*). – (Local)
- [503] TAYLOR, John R.: An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements. 2. University Science Books, 1997. – ISBN 978-0-935702-75-0. – (Local)
- [504] GILL, Richard: Further comments on ‘Is the moon there if nobody looks? Bell inequalities and physical reality’. In: arXiv preprint (2023). – (Local)
- [505] BELL, John S.: Bertlmann’s Socks and the Nature of Reality. In: Journal de Physique Colloques 42 (1981), S. C2-41-C2-62. – (Local)
- [506] HOU, Zhenting (Hrsg.) ; FILAR, Jerzy A. (Hrsg.) ; CHEN, Anyue (Hrsg.): Markov Processes and Controlled Markov Chains. Kluwer Academic Publishers, 2002. – ISBN 978-1-4613-4755-6. – (Local)
- [507] BUB, Jeffrey: The University of Western Ontario Series in Philosophy of Science. Bd. 3: The Interpretation of Quantum Mechanics. D. Reidel, 1974. – ISBN 90-277-0465-1. – (Local)
- [508] N.N.: Probleme der Quantenmechanik. – (Local)
- [509] FARIS, William G. (Hrsg.): Mathematical Notes. Bd. 47: Diffusion, Quantum Theory, and Radically Elementary Mathematics. Princeton University Press, 2006. – ISBN 978-0-691-12545-9. – (Local)
- [510] KNIGHT, Frank B.: Essentials of Brownian Motion and Diffusion. American Mathematical Society, 1981 (*Mathematical Surveys 18*). – ISBN 0-8218-1518-0. – (Local)
- [511] SIMACIU, Ion ; BORSOS, Zoltan: The Planck Law in Quantum Physics and Stochastic Physics. In: Buletinul Universitatii Petrol-Gaze din Ploiesti 61 (2009), Nr. 1, S. 101–108. – (Local)
- [512] TESSMANN, Ingo: Zur Renaissance der klassischen Physik. In: Physik in unserer Zeit 32 (2001), Nr. 3, S. 106–111. – (Local)
- [513] GAMBETTA, Jay ; WISEMAN, Howard M.: Non-Markovian stochastic Schrödinger equations and interpretations of quantum mechanics. In: Physical Review A 66 (2002), S. 012108. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.66.012108>. – DOI 10.1103/PhysRevA.66.012108. – (Local)

-
- [514] ABBOTT, L. F. ; WISE, M. B.: *Dimension of a Quantum-Mechanical Path.* In: Am. J. Phys. 49 (1981), S. 37–39
- [515] ALBEVERIO, S. ; BLANCHARD, Ph. ; HØEGH-KROHN, R.: *Feynman Path Integrals and the Trace Formula for Schrödinger Operator.* In: Comm. Math. Phys. 83 (1982), S. 49–76
- [516] ALBEVERIO, S. ; BLANCHARD, Ph. ; HØEGH-KROHN, R.: *A Stochastic Model for the Orbits of Planets and Satellites: An Interpretation of Titius-Bode Law.* In: Expo. Math. 4 (1983), S. 365–373
- [517] ALBEVERIO, S. ; BLANCHARD, Ph. ; HØEGH-KROHN, R.: *Diffusions sur une variété riemannienne: Barrières infranchissables et applications.* In: Colloque en l'honneur de L. Schwartz Bd. 132. 1985, S. 181–201
- [518] ALBEVERIO, S. ; BLANCHARD, Ph. ; HØEGH-KROHN, R.: *Newtonian Diffusions and Planets with a Remark on Non-standard Dirichlet Forms and Polymers.* In: TRUMAN, A. (Hrsg.) ; WILLIAMS, D. (Hrsg.): Stochastic Analysis and Applications Bd. 1095. Springer Verlag, 1985, S. 1–24
- [519] ALBEVERIO, S. ; BLANCHARD, Ph. ; HØEGH-KROHN, R.: *Reduction of Non Linear Problems to Schrödinger or Heat Equations: Formation of Kepler Orbits, Singular Solutions of Hydrodynamical Equations.* In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; COMBE, Ph. (Hrsg.) ; SIRUGUE-COLLIN, M. (Hrsg.): Stochastic Aspects of Classical and Quantum Systems Bd. 1109. Springer Verlag, 1985, S. 189–206
- [520] ALBEVERIO, S. ; BLANCHARD, Ph. ; HØEGH-KROHN, R. ; MEBKHOUT, M.: *Strata and Voids in Galactic Structure.* In: The Astrophysical Journal (1987). – submitted
- [521] ALBEVERIO, S. ; BLANCHARD, Ph. ; HØEGH-KROHN, R. ; SCHNEIDER, W.: *Origin of Heterogenic Jet Streams in the Satellite Systems: A Stochastic Model.* 1987. – BiBoS preprint
- [522] ALBEVERIO, S. ; BLANCHARD, Ph. ; GESZTEY, F. ; STREIT, L.: *Quantum Mechanical Low Energy Scattering in Terms of Diffusion Processes.* In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; COMBE, Ph. (Hrsg.) ; SIRUGUE-COLLIN, M. (Hrsg.): Stochastic Aspects of Classical and Quantum Systems Bd. 1109. Springer Verlag, 1985, S. 207–227
- [523] ALBEVERIO, S. ; FUKUSHIMA, M. ; KARWOWSKI, W. ; STREIT, L.: *Capacity and Quantum Mechanical Tunneling.* In: Comm. Math. Phys. 81 (1981), S. 501–513

-
- [524] ALBEVERIO, S. ; HØEGH-KROHN, R.: *A Remark on the Connection Between Stochastic Mechanics and the Heat Equation.* In: J. Math. Phys. 15 (1974), S. 1745–1747
- [525] ALBEVERIO, S. ; HØEGH-KROHN, R.: Lecture Notes in Mathematics. Bd. 523: Mathematical Theory of Feynman Path Integrals. Springer Verlag, 1976
- [526] ALBEVERIO, S. ; HØEGH-KROHN, R. ; STREIT, L.: *Energy Form, Hamiltonians and Distorted Brownian Paths.* In: J. Math. Phys. 18 (1977), S. 907–917
- [527] ARNOLD, V. I.: Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer Verlag, 1978
- [528] BACHELIER, L.: *Théorie de la Spéculation.* In: Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 17 (1900), S. 21–86
- [529] BILER, P.: *Stochastic Interpretation of Potential Scattering in Quantum Mechanics.* In: Lett. Math. Phys. 8 (1984), S. 1–6
- [530] BLANCHARD, Ph.: *Trapping for Newtonian Diffusion Processes.* In: Stochastic Methods and Computer Technics in Quantum Dynamics. 1984 (Acta Physica Austriaca, Suppl. XXVI), S. 185–209
- [531] BLANCHARD, Ph. ; COMBE, Ph. ; SIRUGUE, M. ; SIRUGUE-COLLIN, M.: *Jump Processes in Quantum Theories.* In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; CASATI, G. (Hrsg.) ; MERLINI, D. (Hrsg.): Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems Bd. 262. Springer Verlag, 1986, S. 87–104
- [532] BLANCHARD, Ph. ; COMBE, Ph. ; SIRUGUE, M. ; SIRUGUE-COLLIN, M.: *Path Integral Representation for the Solution of the Dirac Equation in the Presence of an Electromagnetic Field.* In: GUTZWILLER, M. C. (Hrsg.) ; INONATA, M. (Hrsg.) ; KLAUDER, S. R. (Hrsg.) ; STREIT, L. (Hrsg.): Path Integrals from meV to MeV. Singapore : World Scientific, 1986, S. 396–413
- [533] BLANCHARD, Ph. ; COMBE, Ph. ; SIRUGUE, M. ; SIRUGUE-COLLIN, M.: *Stochastic Jump Processes Associated with Dirac Equation.* In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; CASATI, G. (Hrsg.) ; MERLINI, D. (Hrsg.): Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems Bd. 262. Springer-Verlag, 1986, S. 65–86
- [534] BLANCHARD, Ph. ; GOLIN, S. ; SERVA, M.: *On Repeated Measurements in Stochastic Mechanics.* In: Phys. Rev. D 34 (1986), S. 3732–3738
- [535] BLANCHARD, Ph. ; ZHENG, W.: *Pathwise Conservation Law for Stationary Diffusion Processes.* In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; CASATI, G. (Hrsg.) ; MERLINI, D. (Hrsg.): Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems Bd. 262. Springer Verlag, 1986, S. 105–108

-
- [536] BLANCHARD, Ph. ; ZHENG, W.: *Stochastic Variational Principles and Diffusion Processes*. In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; CASATI, G. (Hrsg.) ; MERLINI, D. (Hrsg.): Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems Bd. 262. Springer Verlag, 1986, S. 109–117
- [537] BLANCHARD, Ph. ; CARLEN, E. ; DELL'ANTONIO, G. F.: Particle Description in Stochastic Mechanics for Quantum Fields. 1987. – preprint BiBoS
- [538] BLANCHARD, Philippe ; COMBE, Philippe ; ZHENG, Weizhong: Mathematical and Physical Aspects of Stochastic Mechanics. Springer, 1987. – (Local) 16-1, 16-2
- [539] BLANCHARD, Ph. ; GOLIN, S.: *Diffusion Processes with Singular Drift Fields*. In: Comm. Math. Phys. 109 (1987), S. 421–435
- [540] BORN, M.: Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge. In: Z. für Physik 37 (1926), S. 863–867. – [71] ref. therein
- [541] BROWN, R.: *A Brief Account on Microscopical Observations made in the Months of June, July and August, 1827 on the Particles contained in the Pollen of Plants; on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies*. In: Philosophical Magazine 4 (1828), S. 161–173
- [542] BROWN, R.: *Additional Remarks on Active Molecule*. In: Philosophical Magazine 6 (1829), S. 161–166
- [543] CAMERON, R. H.: *A Family of Integrals Serving to Connect the Wiener and Feynman Integrals*. In: J. Math. and Phys. 39 (1960), S. 126–140
- [544] CAMERON, R. H. ; MARTIN, W. T.: *Transformations of Wiener Integrals by Non-Linear Transformations*. In: Trans. Amer. Math. Soc. 66 (1949), S. 252–283
- [545] CARLEN, Eric A.: *Conservative Diffusions*. In: Communications in Mathematical Physics (1984), S. 293–315. – (Local)
- [546] CARLEN, E.: Conservative Diffusions: A Constructive Approach to Nelson's Stochastic Mechanics, Princeton, Diss., June 1984
- [547] CARLEN, E.: *Potential Scattering in Stochastic Mechanics*. In: Ann. Inst. H. Poincaré 42 (1985), S. 407–418
- [548] CARLEN, E.: *Existence and Sample Path Properties of the Diffusions in Nelson's Stochastic Mechanics*. In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; BLANCHARD, Ph. (Hrsg.) ; STREIT, L. (Hrsg.): Stochastic Processes Mathematics and Physics Bd. 1158. Springer Verlag, 1986, S. 25–51

-
- [549] CARLEN, E.: Tail Fields of Some Diffusions with a Limiting Velocity. – MIT Preprint
- [550] CARLEN, E.: The Stochastic Mechanics of free Scalar Fields. 1987. – Princeton Preprint
- [551] CARMONA, R.: *Regularity Properties of Schrödinger and Dirichlet Semigroups.* In: J. Func. Anal. 33 (1979), S. 259–296
- [552] CHEBOTAREV, A. M. ; MASLOV, V. P.: *Processes de Sauts et leurs applications dans la Mécanique Quantique.* In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; COMBE, Ph. (Hrsg.) ; HØEGH-KROHN, R. (Hrsg.) ; RIDEAU, G. (Hrsg.) ; SIRUGUE-COLLIN, M. (Hrsg.) ; SIRUGUE, H. (Hrsg.) ; STORA, R. (Hrsg.): Feynman Path Integral; Marseille 1978 Bd. 106. Springer-Verlag, 1979, S. 58–72
- [553] CHUNG, K. L.: *On the Theory of Random Processes.* In: Ann. Math. 41 (1940), S. 215–230
- [554] CHUNG, K. L.: Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. second. N.Y. : Springer Verlag, 1967
- [555] CINI, M. ; SERVA, M.: *Stochastic Theory of Emission and Absorption of Quanta.* In: Journal of Physics A 19 (1986), S. 1163–1177
- [556] COMBE, Ph. ; GUERRA, F. ; RODRIGUEZ, R. ; SIRUGUE, M. ; SIRUGUE-COLLIN, M.: *Quantum Dynamical Time Evolution as Stochastic Flows on Phase Space.* In: Physica 124A (1984), S. 561–574
- [557] COMBE, Ph. ; HØEGH-KROHN, R. ; RODRIGUEZ, R. ; SIRUGUE, M. ; SIRUGUE-COLLIN, M.: *Poisson Processes on Groups and Feynman Path Integrals.* In: Comm. Math. Phys. 77 (1980), S. 269–298
- [558] COMBE, Ph. ; HØEGH-KROHN, R. ; RODRIGUEZ, R. ; SIRUGUE, M. ; SIRUGUE-COLLIN, M.: *Feynman Path Integral and Poisson Processes with Classical paths.* In: J. Math. Phys. 23 (1980), S. 405–411
- [559] DANKEL, T. G.: *Mechanics on Manifolds and the Incorporation of Spin into Nelson's Stochastic Mechanics.* In: Archive of Rational Mechanics and Analysis 37 (1970), S. 192–222
- [560] DANKEL, T. G.: *Higher States in the Stochastic Mechanics of the Bopp-Hagg Spin Model.* In: J. Math. Phys. 18 (1977), S. 253–255
- [561] DAVIDSON, M.: *A Generalisation of the Fenyes-Nelson Stochastical Model of Quantum Mechanics.* In: Lett. Math. Phys. 3 (1979), S. 271–277

-
- [562] DAVIDSON, M.: *Momentum in Stochastic Mechanics*. In: Lett. Math. Phys. 5 (1981), S. 523–529
- [563] DE ANGELIS, G. F. ; JONA-LASINIO, G.: *A Stochastic Description of a Spin-1/2 Particle in a Magnetic Field*. In: J. Phys. Math. Gen. A15 (1982), S. 2053–2061
- [564] DE ANGELIS, G. F.: *A Route to Stochastic Mechanics*. In: Stochastic Processes in Classical and Quantum System Bd. 262. Springer Verlag, 1986, S. 160–169
- [565] DE ANGELIS, G. F. ; JONA-LASINIO, G. ; SERVA, M. ; ZANGHI, N.: *Stochastic Mechanics of Dirac Particle in Two Space-Time Dimensions*. In: J. Phys. Math. Gen. A19 (1986), S. 865–971
- [566] DE ANGELIS, G. F. ; JONA-LASINIO, G. ; SIRUGUE, M.: *Probabilistic Solution of Pauli Type Equations*. In: J. Phys. A Math. Gen. 16 (1983), S. 2433–2444
- [567] DE FALCO, D. ; DE MARTINO, S. ; DE SIENA, S.: *Position-Momentum Uncertainty Relation in Stochastic Mechanics*. In: Phys. Rev. Lett. 49 (1982), S. 181–183
- [568] DE FALCO, D. ; DE MARTINO, S. ; DE SIENA, S.: *Momentum for Sample Paths in Stochastic Mechanics*. In: Lett. Nuovo Cimento 36 (1983), S. 457–460
- [569] DE LA PEÑA-AUERBACH, L. ; CETTO, M.: *Stronger Form for the Position-Momentum Uncertainty Relation*. In: Phys. Lett. 39A (1972), S. 65–66
- [570] DE WITT-MORETTE, C. ; MAHESHWARI, A. ; NELSON, B.: *Path Integration in Non-Relativistic Quantum Mechanics*. In: Phys. Reports 56 (1979), S. 255–372
- [571] DOOB, J. L.: Stochastic Processes. New York : Wiley, 1953
- [572] FARIS, W.: *Spin Correlation in Stochastic Mechanics*. In: Foundations of Physics 12 (1982), S. 1–26
- [573] FARIS, W.: *A Stochastic Picture of Spin*. In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; COMBE, Ph. (Hrsg.) ; SIRUGUE-COLLIN, M. (Hrsg.): Stochastic Processes in Quantum Theory and Statistical Physics Bd. 172. Springer Verlag, 1982, S. 154–168
- [574] FELLER, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications. New York : John Wiley, 1968. – I and II, 1971
- [575] FREIDLIN, M. I. ; WENTZELL, A. D.: Random Perturbations of Dynamical Systems. Springer Verlag, 1984

-
- [576] FUKUSHIMA, M.: Dirichlet Forms and Markov Processes. *Kodansha and North-Holland*, 1980
- [577] FUKUSHIMA, M.: Energy Forms and Diffusion Processes. In: STREIT, L. (Hrsg.): Mathematics and Physics, Lecture on Recent Results Bd. 1. *World Scientific*, 1985, S. 65–97
- [578] GANDOLFO, D.: I- Equilibre et Perturbation d'un Plasma Torodial avec Flot. VI-Modèle de Dynamique Stochastique, *Thèse de Doctorat de Troisième Cycle, Marseille, Diss.*, 1985
- [579] GANDOLFO, D. ; HØEGH-KROHN, R. ; RODRIGUEZ, R.: Stochastic Model for Plasma Dynamics. In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; BLANCHARD, Ph. (Hrsg.) ; STREIT, L. (Hrsg.): Processes, Geometry Fields, Proceedings of the 3rd BiBoS Conference. *Springer Verlag*, 1987 (*Lecture Notes in Mathematics*). – to appear
- [580] GARBACZEWSKI, P.: Classical and Quantum Field Theory of Exactly Soluble Nonlinear Systems. *World Scientific Publishing Co.*, 1985
- [581] GIHMAN, I. I. ; SKOROHOD, A. V.: The Theory of Stochastic Processes. *Springer Verlag*, 1974. – I, II and III, 1975-1979
- [582] GIHMAN, I. I. ; SKOROHOD, A. V.: Stochastic Differential Equations. *Springer Verlag*, 1972
- [583] GIRSANOV, I. V.: On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures. In: Theor. Prob. App. 5 (1960), S. 285–301
- [584] GLIMM, J. ; JAFFE, A.: Quantum Physics, a Functional Integral Point of View. *New York : Springer Verlag*, 1981
- [585] GOLIN, S.: Uncertainty Relation in Stochastic Mechanics. In: J. Math. Phys. 26 (1985), S. 2781–2783
- [586] GOLIN, S.: Comment on Momentum in Stochastic Mechanics. In: J. Math. Phys. 27 (1986), S. 1549–1555
- [587] GOLIN, S.: Indeterminacy Relations in Stochastic Mechanics. In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; CASATI, G. (Hrsg.) ; MERLINI, D. (Hrsg.): Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems Bd. 262. *Springer Verlag*, 1986, S. 296–305
- [588] GOLIN, S.: Two Remarks on the Physical Content of Stochastic Mechanics. In: GORINI, V. (Hrsg.) ; FRIGERIO, A. (Hrsg.): Fundamental Aspects of Quantum Theory. *Plenum*, 1986, S. 429–432

-
- [589] GUERRA, F. ; RUGGIERO, P.: *A New Interpretation of the Euclidean Markov Field in the Framework of Physical Minkowski Space Time.* In: Phys. Rev. Lett. 31 (1973), S. 1022–1025
- [590] GUERRA, F.: *Structural Aspects of Stochastic Mechanics and Stochastic Field Theory.* In: Phys. Rep. 77 (1981), S. 263–312. – in “*New Stochastics Methods in Physics*”, C. De Witt-Morette, D. Elworthy, Ed.
- [591] GUERRA, F. ; MORATO, L.: *Quantization of Dynamical Systems and Stochastic Control Theory.* In: Phys. Rev. D 27 (1983), S. 1774–1786 **C-1**
- [592] GUERRA, F.: *Probability and Quantum Mechanics. The Conceptual Foundation of Stochastic Mechanics.* In: ACCARDI, L. (Hrsg.) ; FRIGERIO, A. (Hrsg.) ; GORINI, V. (Hrsg.): *Quantum Probability and Application to the Quantum Theory of Irreversible Processes* Bd. 1055. Springer verlag, 1984
- [593] GUERRA, F. ; MARRA, R.: *Stochastic Mechanics of Spin 1/2 Particle.* In: Phys. Rev. D 30 (1984), S. 2579–2584
- [594] GUERRA, F. ; MARRA, R.: *Discrete Stochastic Variationnal Principles and Quantum Mechanics.* In: Phys. Rev. D 29 (1984), S. 1647–1655
- [595] GUERRA, F.: *Carlen Processes: A New Class of Diffusions with Singular Drifts.* In: ACCARDI, L. (Hrsg.) ; WALDENFELS, W. von (Hrsg.): *Quantum Probability and Applications III* Bd. 1136. Springer Verlag, 1985, S. 259–267
- [596] GUERRA, F.: *Quantum Field Theory and Probability Theory. Outlook on New Possible Developments.* In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; BLANCHARD, Ph. (Hrsg.): *Trends and Developments in the Eighties.* Singapore : World Scientific, 1985
- [597] GUERRA, F. ; MORATO, L.: *Momentum - Position Complementarity in Stochastic Mechanics.* In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; COMBE, Ph. (Hrsg.) ; SIRUGUE-COLLIN, M. (Hrsg.): *Stochastic Processes in Quantum Theory and Statistical Physics* Bd. 173. Springer Verlag, 1982, S. 208–215
- [598] GUERRA, Francesco: *Stochastic variational principles and quantum mechanics.* In: Ann. Inst. Henri Poincare 49 (1988), Nr. 3, S. 315–324. – ([Local](#))
- [599] HIDAKA, T.: *Canonical Representation of Gaussian Processes and their Applications.* In: Memoire of the College of Science University of Kyoto XXXIII (1960), Nr. Mathematics N ° 1
- [600] HIDAKA, T.: *Applications of Mathematics. Bd. II: Brownian Motion.* Springer Verlag, 1980

- [601] HIDA, T. ; KUO, H. H. ; POTTHOFF, J. ; STREIT, L.: White Noise: An Infinite Dimensional Calculus. 1987. – to appear
- [602] HUDSON, R. L. ; PARTHASARATY, K. R.: Construction of Quantum Diffusion. In: ACCARDI, L. (Hrsg.) ; FRIGERIO, A. (Hrsg.) ; GORINI, V. (Hrsg.): Quantum Probability and Applications to the Quantum Theory of Irreversible Processes Bd. 1055. Springer Verlag, 1984
- [603] HUDSON, R. L. ; PARTHASARATY, K. R.: Quantum Ito's Formula and Stochastic Evolution. In: Comm. Math. Phys. 93 (1984), S. 301–323
- [604] IKEDA, N. ; WATANABE, S.: Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North Holland Publ., 1981
- [605] ITÔ, K.: Stochastic Integral. In: Proc. Imp. Acad. Tokyo 2 (1944), S. 519–524
- [606] ITÔ, K.: On Stochastic Integral Equation. In: Proc. Jap. Acad. 20 (1946), S. 32–35
- [607] ITÔ, K.: On Stochastic Differential Equation in a Differentiable Manifold. In: Nagoya Math. J. 1 (1950), S. 35–47
- [608] ITÔ, K.: On a Formula Concerning Stochastic Differential. In: Nagoya Math. J. 3 (1951), S. 55–67
- [609] ITÔ, K.: On Stochastic Differential Equations. In: Memoires of the Am. Math. Soc. 4 (1951)
- [610] ITÔ, K.: The Brownian Motion and Tensor Fields on a Riemannian Manifold. In: Proc. Int. Congress Math., Stockholm. 1962, S. 536–539
- [611] ITÔ, K.: Stochastic Differentials. In: Applied Math. and Optimization 1 (1976), S. 374–381
- [612] ITÔ, K.: Generalized uniqueness complex measures in the Hilbertian metric space with their applications to the Feynman path integral. In: Proc. of the 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability Bd. II, part I. Berkeley : University of California Press, 1966, S. 145–161
- [613] JONA-LASINIO, G.: Stochastic Processes and Quantum Mechanics. In: Colloque en l'honneur de L. Schwartz 2 (1985), S. 203–216
- [614] JONA-LASINIO, G. ; MARTINELLI, F. ; SCOPPOLA, E.: New Approach to the Semi-Classical Limit of Quantum Mechanics I. In: Comm. Math. Phys. 80 (1981), S. 223–254

-
- [615] JONA-LASINIO, G. ; MARTINELLI, F. ; SCOPPOLA, E.: *The Semi Classical Limit of Quantum Mechanics: A Qualitative Theory via Stochastic Mechanics.* In: Phys. Rept. 77 (1981), S. 313–327
- [616] JONA-LASINIO, G. ; MARTINELLI, F. ; SCOPPOLA, E.: *Tunneling in One Dimension: General Theory, Instabilities, Rules of Calculation, Application.* In: STREIT, L. (Hrsg.): Mathematics + Physics, Lecture on Recent Results Bd. 2. World Scientific Publishing Co, 1986, S. 227–260
- [617] JORDAN, P.: *Über eine neue Begründung der Quantenmechanik.* In: Z. Physik 40 (1927), S. 809–838
- [618] KAC, M.: *On Some Connections Between Probability Theory and Differential and Integral Equations.* In: Proc. Sec. Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob. Berkeley, 1951, S. 185–215
- [619] KLAUDER, J.: *Continuous Representation and Path Integrals, Revised.* In: PA-PUDOPOLIS, G. S. (Hrsg.): Path Integrals and their Application in Quantum Statistical and Solid-State Physics. New York : Plenum, 1978, S. 5–38
- [620] KLAUDER, J.: *Path Integrals, Stationary Phase Approximation and Semiclassical Physics.* In: STREIT, L. (Hrsg.): Quantum Fields-Algebras, Processes. Springer Verlag, 1980, S. 65–90
- [621] KOLMOGOROV, A.: *Fondations of the Theory of Probability.* New York : Chelsea Publishing Company, 1956
- [622] LÉVY, P.: *Sur les Intégrales dont les Eléments sont des Variables Aléatoires Indépendantes.* In: Ann. Scuola Norm. Pisa 2 (1934), Nr. 3, S. 337–366
- [623] LÉVY, P.: *Sur Certains Processus Stochastiques Homogènes.* In: Comp. Math. 7 (1939), S. 283–339
- [624] LÉVY, P.: *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien.* Paris : Hermann, 1965
- [625] LEWIS, J. T.: *An Elementary Approach to Brownian Motion on Manifolds.* In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; BLANCHARD, Ph. (Hrsg.) ; STREIT, L. (Hrsg.): Stochastic Processes - Mathematics and Physics Bd. 1158. 1986, S. 158–167
- [626] LOFREDO, M.: *A Selfconsistent Hydrodynamical Model for the near the Absolute Zero in the Framework of Stochastic Mechanics.* In: Phys. Rev. B 35 (1987), S. 1742–1747
- [627] MCKEAN, H. P.: *Stochastic Integrals.* New York : Academic Press, 1969

-
- [628] MCKEAN, H. P.: *The Bessel Motion and a Singular Integral Equation.* In: Memoires of the College of Sciences, University of Kyoto 33 (1960), Nr. Mathematics N ° 2, S. 317–322
- [629] MASLOV, V. P. ; CHEBOTAREV, A. M.: *Jump Type Processes and their Application to Quantum Mechanics.* In: J. of Soviet Mathematics 13 (1980), S. 315–357
- [630] MEYER, P. A.: Publications de l’Institut Mathématique de l’Université de Strasbourg. Bd. XIV: Probabilités et Potentiels. Paris : Hermann, 1966
- [631] MEYER, P. A.: *A Differential Geometric Formalism for the Ito Calculus.* In: WILLIAMS, D. (Hrsg.): Stochastic Integrals, Proc. Durham Symp. 1980 Bd. 851. Springer Verlag, 1981, S. 256–270
- [632] MEYER, P. A.: Lecture Notes in Math.. Bd. 1204: Séminaire de Probabilité Strasbourg XX (1984-85). Springer Verlag, 1986
- [633] MEYER, P. A.: *Fock Space and Probability Theory.* In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; BLANCHARD, Ph. (Hrsg.) ; STREIT, L. (Hrsg.): Stochastic Processes Math. and Phys., Bielefeld 1985 Bd. 1250. Springer Verlag, 1986
- [634] MEYER, P. A.: *Éléments de Probabilités Quantiques.* In: Séminaire de Probabilité Strasbourg XX (1984-85) Bd. 1204. Springer Verlag, 1986, S. 186–312
- [635] MEYER, P. A.: *Géométrie Différentielle Stochastique (Bis).* In: Séminaire de Probabilité XVI, 1980/1981, Supplément: Géométrie Différentielle Stochastique Bd. 921. Springer Verlag, 1982
- [636] MEYER, P. A. ; YAN, J. A.: *À Propos des Distributions sur l’Espace de Wiener.* In: Séminaire de Probabilité XXI. Springer Verlag, 1986 (Lecture Notes in Math.)
- [637] MORATO, L. M.: *Path-Wise Stochastic Calculus of Variations with the Classical Action and Quantum Systems.* In: Phys. Rev. D 31 (1985), S. 1982–1987
- [638] MORATO, L. M.: *Path-Wise Calculus of Variations in Stochastic Mechanics.* In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; CASATI, G. (Hrsg.) ; MERLINI, D. (Hrsg.): Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems Bd. 262. Springer Verlag, 1986, S. 420–426
- [639] MOYAL, J. E.: *Quantum Mechanics as a Statistical Theory.* In: Proc. of Cambridge Phil. Soc. 45 (1949), S. 99–124
- [640] NAGASAWA, H.: *Segregation of a Population in an Environment.* In: J. Math. Biology 9 (1980), S. 213–235

-
- [641] NEUMANN, J. von.: Mathematical Foundation of Quantum Mechanics. *Princeton University Press, 1955*
- [642] PERRIN, J.: *Mouvement Brownien et Réalité Moléculaire*. In: Ann. de Chim. et de Phys. t XVIII (1909), S. 5–114
- [643] PERRIN, J.: Les Atoms. 4e. Paris : Librairie Aleoun., 1914. – English translation: “Atoms” Hammick D.T., van Nostrand N.Y. (1916)
- [644] RIESZ, F. ; NAGY, B. S.: Functional Analysis. 2nd. N.Y. : Federik Ungar Publishing Co., 1960. – with appendix: *Extension of Linear Transformations in Hilbert Space which extend beyond this Space by Nagy B.Sz.*
- [645] RÖCKNER, H. ; WIELENS, N.: *Dirichlet Forms Closability and Change of Speed Measures*. In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.): Infinite dimensional Analysis and Stochastic Processes. London : Pitman, 1985 (Lecture Notes in Mathematics), S. 119–144
- [646] SCHILPP, P. A.: the Library of Living Philosophers. Bd. VII: Albert Einstein: Philosopher Scientist. Evanston, Illinois, 1949
- [647] SCHRÖDINGER, E.: *Zum Heisenbergschen Unschärfeprinzip*. In: Sitzungsber. Pruss., Akad. Wiss. Phys. Math. Klasse (1930), S. 296–303
- [648] SCHRÖDINGER, E.: *Über die Umkehrung der Naturgesetze*. In: Berliner Sitzungsberichte (1931), S. 144–153
- [649] SCHRÖDINGER, E.: *Sur la Théorie Relativiste de l'Electron et l'Interprétation de la Mécanique Quantique*. In: Annales de l'Institut H. Poincaré 2 (1932), S. 289–295
- [650] SCHUCKER, D. S.: *Stochastic Mechanics of Systems with Zero Potential*. In: J. Funct. Anal. 38 (1980), S. 146
- [651] SEILER, E.: *Stochastic Quantization and Gauge Fixing in Gauge Theories*. In: Stochastic Methods and Computer Technic in Quantum Dynamics. 1984 (Acta Physica Austriaca Supp XXVI), S. 259–308
- [652] SERVA, M.: *Elastic Scattering in Stochastic Mechanics*. In: Lett. Nuovo cimento 41 (1984), S. 198–202
- [653] SIMON, B.: Functional Integration and Quantum Physics. Academic Press, 1979 (Pure and Applied Mathematics, A serie of monographs and textbooks)
- [654] SIMON, B.: Instantons, Double Wells and Large Deviations. 1983 (Publ. AMS Morels)

-
- [655] SIMON, B.: Quantum Mechanics for Hamiltonian Defined as Quadratic Forms.
Princeton University Press, 1971
- [656] SMOLUCHOWSKI, M. V.: *Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen.* In: Phys. Zeits. 17 (1916), S. 557–571
- [657] STREIT, L. ; HIDA, T.: *Generalized Brownian Functionals and the Feynman Integral.* In: Stochastic Process and their Application 16 (1983), S. 55–69
- [658] STREIT, L. ; HIDA, T.: *White Noise Analysis and its Application to Feynman Integral.* In: Measure Theory and its application Bd. 1032. 1983, S. 219–226
- [659] STROOCK, D. W.: An Introduction to the Theory of Large Deviations. *Springer Verlag, 1984*
- [660] STROOCK, D. W. ; VARADHAN, S. R. S.: Multidimensional diffusion Process. *Springer Verlag, 1979*
- [661] TRUMAN, A. ; LEWIS, J. T.: *The Stochastic Mechanics of the Ground-State of the Hydrogen Atom.* In: ALBEVERIO, S. (Hrsg.) ; BLANCHARD, Ph. (Hrsg.) ; STREIT, L. (Hrsg.): *Stochastic Processes Mathematics and Physics Bd. 1158.* Berlin, Heidelberg : Springer Verlag, 1986, S. 168–179
- [662] UHLENBECK, G. E. ; ORNSTEIN, L. S.: *On the Theory of the Brownian Motion.* In: Phys. Rev. 36 (1930), S. 823–841
- [663] VENTZEL, A. D.: *Rough Limit Theorem on Large Deviations for Markov Stochastic Processes.* In: Theory Prob. Applications 21 (1976), S. 227–242. – I
- [664] VENTZEL, A. D.: *Rough Limit Theorem on Large Deviations for Markov Stochastic Processes.* In: Theory Prob. Applications 21 (1976), S. 499–512. – II
- [665] VENTZEL, A. D.: *Rough Limit Theorem on Large Deviations for Markov Stochastic Processes.* In: Theory Prob. Applications 24 (1979), S. 675–692. – III
- [666] VENTZEL, A. D.: *Rough Limit Theorem on Large Deviations for Markov Stochastic Processes.* In: Theory Prob. Applications 27 (1982), S. 215–234. – IV,
See also [49]
- [667] WAX, N.: Selected Paper on Noise and Stochastic Processes. *Dover, 1954*
- [668] WERNER, Reinhard F.: *Quantum harmonic analysis on phase space.* In: Journal of Mathematical Physics 25 (1984), S. 1404–1411

-
- [669] WERNER, Reinhard F.: Screen Observables in Relativistic and Nonrelativistic Quantum Mechanics. 1985. – *Preprint, Osnabrück, FRG*
- [670] WIENER, N.: *Differential Space*. In: J. Math. Phys. 2 (1923), S. 131–174
- [671] WIGNER, E.: *On the Quantum Correction of Thermodynamic Equilibrium*. In: Phys. Rev. 40 (1932), S. 749–759
- [672] YASUE, K.: *Stochastic Calculus of Variations*. In: J. Func. Anal. 41 (1981), S. 327–340
- [673] YOR, M.: *Filtration de certaines Martingales du Mouvement Brownien*. In: Séminaire de Probabilité XIII Bd. 721. Springer Verlag, 1979, S. 425–440
- [674] ZAMBRINI, J. C.: *Stochastic Dynamics*. In: Intern. Journal of Theoretical Physics 24 (1985), S. 277–327. – *A review of Stochastic Calculus of Variations*
- [675] ZAMBRINI, J. C.: *Stochastic Mechanics According to E. Schrödinger*. In: Phys. Rev. A 33 (1986), S. 1532–1548
- [676] ZHENG, W. A. ; MEYER, P. A.: *Construction de Processus de Nelson Réversible*. In: Osaka J. of Mathematics
- [677] ZHENG, W. A.: Seminartingales dans les Variétés et Mécanique Stochastique de Nelson, *Thèse Strasbourg, Diss.*, 1984
- [678] ZHENG, W. A. ; MEYER, P. A.: *Quelques Résultats de Mécanique Stochastique*. In: Lecture Notes in Mathematics Bd. 1059. Springer Verlag, 1984, S. 223–244
- [679] ZHENG, W. A.: *Tightness Results for Laws of Diffusion Processes, Application to Stochastic Mechanics*. In: Ann. Inst. H. Poincaré 21 (1985), S. 103–124
- [680] ZHENG, W. A. ; MEYER, P. A.: *Sur la Construction de Certaines Diffusions*. In: Séminaire de Probabilité XX, (1984/85) Bd. 1204. Springer Verlag, 1986, S. 334–337
- [681] CUSHING, James T.: Quantum Mechanics: Historical Contingency and the Copenhagen Hegemony. Chicago : University of Chicago Press, 1994 16-2
- [682] DEOTTO, Ettore ; GHIRARDI, GianCarlo: *Bohmian Mechanics Revisited*. In: Foundations of Physics 28 (1998)

Stichwortverzeichnis

- Algorithmus, 19-2*
Analogrechner, 19-18
Arithmetisches Mittel, 5-30
Aufenthaltswahrscheinlichkeit, 3-3, 6-57
Auswahlregel, 6-78, 6-92
- Bahnen*
 klassische, 6-55
Balmer Serie, 6-81
Balmer-Serie, 6-83
Bohrscher Radius, 6-13
Bohrsches Magneton, 6-38, 7-2
Boltzmann-Konstante, 5-3
Bornsche Reihe, 12-1
Brackett-Serie, 6-83
Brownsche Bewegung, 5-26
Brownsche Schar, 5-26
- Casimir-Effekt, 14-4*
- Delbrück-Streuung, 14-4*
- Determinismus, 16-3*
- Dipolübergänge, 6-78*
- Dipolmoment, 6-63, 6-65, 6-66*
- Dirac-Gleichung, 7-11*
- Dirac-Gleichung, 7-15, 18-5*
- Dopplerverbreiterung, 6-78*
- Drehimpuls, 6-39*
- Drehimpulsoperator, 6-39*
- Dublets, 13-1*
- Duhamel-Integral, 5-7*
- Ehrenfest-Theorem, 5-36, 5-41, 5-42*
- Eigenwert, 3-24*
- Eigenzustand, 6-55*
- Einteilchenenergie, 8-2*
- Einteilchensystem, 6-83*
- Elektronen*
- polarisierte, 7-15*
- Elementarladung, 6-58*
- Entartung, 6-33, 6-37, örpotential9-1, 9-1*
- Entartung (Quantenmechanik), 6-38*
- Erwartungswert, 6-37*
- Erwartungswert, 6-63, 15-16*
- Eulersche Winkel, 7-5*
- Eulersche Zahl, 6-58*
- Faxen-Holtsmark-Formel, 12-1*
- Fokker-Planck-Gleichung, 5-11, 5-20*
- Fourier-Transformation, 6-6*
- Freier Wille, 16-3*
- Gaußscher Integralsatz, 5-15, 5-39, 6-39*
- Gesamtenergie, 8-2*
- GHZ-Experiment, 16-1*
- Grezsche Formel, 5-39, 5-40*
- Grezsche-Funktion, 11-1*
- Grover-Algorithmus, 19-2*
- Grundzustand, 6-62*
- Häufungspunkt, 15-15*
- Hamiltonoperator, 6-61, 6-64*
- Hartree-Fock-Verfahren, 8-2*
- Hawking-Strahlung, 14-4*
- Hermitescher Operator, 5-39, 5-41, 7-22*
- Hertzscher Dipol, 6-68*
- Impulsstromdichte, 6-38*
- Indeterminismus, 16-3*
- Interpretation*
 Interpretation
 Bayessche Quantenwahrscheinlichkeit, 3-20
 Interpretation
 Consistent histories, 3-19
 Interpretation
 de Broglie-Bohm-Theorie, 3-18

- Interpretation Ensemble, 3-17*
- Interpretation Kopenhagener Deutung, 3-17*
- Interpretation Many-minds, 3-19*
- Interpretation Objective-collapse theory, 3-20*
- Interpretation Quantenlogik, 3-18*
- Interpretation Relational quantum mechanics, 3-20*
- Interpretation Sonstige, 3-21*
- Interpretation Sonstige, 3-21*
- Interpretation Transactional, 3-20*
- Interpretation Viele-Welten-, 3-18*
- Ising-Modell, 19-7*
- Keplerbahn, 6-58*
- Kolmogoroffsche Differentialgleichung, 5-14*
- Kommutator (Mathematik), 5-1*
- Konvektions-Diffusions-Gleichung, 5-23*
- Kugelflächenfunktionen, 6-28, 6-30, 6-32*
- Kugelwellen, 12-1*
- Lamb-Verschiebung, 14-4*
- Landau-Symbole, 19-2*
- Langevin-Gleichung, 5-6*
- Langevin-Gleichungen, 5-26*
- Laplace-Operator, 5-14, 5-19*
- Legendre-Polynom, 6-22*
- Linearkombination, 6-4, 6-64*
- Linienbreite natürliche, 6-78*
- Linienbreite, 6-75, 6-78*
- Lokalität, 19-3*
- Lyman-Serie, 6-83*
- Magnetfeld, 6-83*
- Markow-Kette, 15-18*
- Maxwell-Gleichungen, 6-68*
- Mehrteilchensysteme, 8-1, 8-1, 8-1*
- Messfehler, 15-3*
- Messunsicherheit, 15-3*
- Mittelwert, 15-16, 15-17*
- mittlere quadratische Abweichung, 15-17*
- Monte-Carlo-Simulation, 19-2*
- Näherungsverfahren, -Verfahren, 8-1*
- Nachwirkungsintegral, 5-8*
- Navier-Stokes-Gleichungen, 5-14, 5-18, 5-23, 5-29*
- Newtonssche Gesetze, 5-23*
- No-Cloning-Theorem, 19-16*
- Normalverteilung, 15-8, 15-23*
- Nullpunktsenergie, 14-4*
- Ontologie, 19-1, 19-3*
- Ortsraum, 6-6*
- Paschen-Back-Effekt, 13-1*
- Paschen-Serie, 6-83*
- Pauli-Gleichung nichtrelativistisch, 7-9*
- Pauli-Matrizen, 7-9*
- Pauli-Prinzip, 8-1*
- Periodensystem, 11-1*
- Periodensystem, 11-1*
- Pfund-Serie, 6-83*
- Phänomenologie (Methodik), 18-4*
- Photoelektrischer Effekt, 7-15*
- Pickery-Serie, 6-83*
- Planck-Konstante, 5-32*
- Poisson-Klammer, 5-1*
- Poisson-Transformation, 6-69*
- Polarkoordinaten, 6-40*
- Poyntigvektor, 6-70*
- Quantenalgirthmus, 19-2*
- Quantencomputing, 19-1*
- Quantenfeldtheorie, 18-5*
- Quantenmechanik Geschichte, 4-1*
- Quantenmechanik Interpretationen, 3-1*
- Quantenmechanik Interpretationen, 3-6*
- Korpuskularstatistische Deutung, 6-1*
- Postulate, 6-1*
- systematischer Aufbau, 6-1*
- Quantenmechanik, 3-5*
- Quantenverschränkung, 19-3*
- Quantisierungsachse, 6-93*

- Qubit*, 19-3
- Rauschen*, 5-15
- Rayleigh-Streuung*, 6-91
- Ritz-Serie*, 6-83
- Rodrigues-Formel*, 6-22
- Rutherford-Formel*, 12-2
- Rydberg-Formel*, 6-93
- Satz von Bolzano-Weierstraß*, 15-15
- Satz von Stokes*, 6-86
- Scharmittel*, 5-9
- Scharnhorst-Effekt*, 14-4
- Schrödinger-Gleichung*, 6-3, 6-12–6-14, 6-59, 6-92
- Schrödingergleichung*, 6-48, 6-64, 19-12
- Schrödingergleichung*
- Impulsdarstellung*, 6-10
 - zeitabhängige*, 5-26
- Schwinger-Effekt*, 14-4
- Selbstadjungierter Operator*, 5-41
- Shor-Algorithmus*, 19-2
- Simulated Annealing*, 19-7
- Slater-Determinante*, 8-1
- Smoluchowski-Gleichung*, 5-11
- Spektrallinie*, 6-75
- Spektrallinien*
- Klassifikation*, 6-81
- Spektren*, 13-1
- Spin-Bahnkopplung*, 13-1
- Spinmatrizen*, 7-9
- Spinor*, 7-21
- Spontane Emission*, 6-74, 14-4
- Störungstheorie*, 9-1, Regel 9-1, ängig 9-1, 9-1
- Stochastik*, 15-13
- Stochastik*, 5-1, 15-18
- Streuphasen*, 12-1
- Streupotential*, 12-1
- Streuung*, 12-1
- Superposition*, 19-3
- Taylor-Formel*, 6-57
- Taylor-Polynom*, 5-19
- thermodynamische Temperatur*, 5-3
- Thomas-Fermi-Dirac-Methode*, 10-1
- Turing-Vollständigkeit*, 19-18
- Unbestimmtheit*, 3-3
- Unruh-Effekt*, 14-4
- Vakuum*, 6-62
- Vakuumfluktuation*, 6-1
- Vektorpotential*, 6-68
- Verborgene Variablen*, 16-1
- Victor J. Stenger*, 20-2
- Volumenkraft*, 5-19
- Wahrscheinlichkeit*, 15-16
- Wahrscheinlichkeitsdichte*, 5-2, 15-17
- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion*, 3-4
- Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 15-13
- Wasserstoffatom*, 6-13
- Energieniveaus*, 6-30
 - Entartung*, 6-33
 - gebundene Zustände*, 6-13
 - homogenes Magnetfeld*, 6-91
 - Linien*, 6-81
- Wasserstoffatom*, 6-13, 6-62–6-65
- Welle-Teilchen-Dualismus*, 3-2–3-4
- Wellenfunktion*, 3-3, 3-4
- Weyl-Gleichung*, 7-21
- WKB-Näherung*, 6-48
- Yukawa-Potential*, 12-2
- Zeeman-Effekt*, 13-1
- normaler*, 6-91
- Zentralkraft*, 6-40, 6-46
- Zufall*, 16-3
- Zugeordnete Legendrepolygone*, 6-23
- Zustandsfunktion*, 3-4
- Zweikörperproblem*, 6-29, 6-33

