Les Puissances

Exercice 1

$A = (-5)^2$
$= -5 \times (-5)$
$= 25$

$B = -1^2$
$= -1 \times 1$
$= -1$

$C = (-1)^2$
$= -1 \times (-1)$
$= 1$

$D = -3^3$
$= -3 \times 3$
$= -9$

$E = (-2)^2$
$= -2 \times (-2)$
$= 4$

$F = -7^2$
$= -7 \times 7$
$= -49$

$G = (-9)^0$
$= 1$

$H = -9^0$
$= -1$

$I = -3^2 \times (1-2)^2$
$= -3 \times 3 \times (-1)^2$
$= -9 \times 1$
$= -9$

$J = (-3+8)^2 \times (2-5)^2$
$= 5^2 \times (-3)^2$
$= 25 \times 9$
$= 225$

Calcul mental
25×9
$= 25 \times 10 - 25 \times 1$
$= 250 - 25$
$= 225$

Exercice 2

$A = \dfrac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10}$
$= \dfrac{1}{10^4}$
$= 10^{-4}$

$B = \dfrac{1}{(-6) \times (-6) \times (-6)}$
$= \dfrac{1}{(-6)^3}$
$= (-6)^{-3}$

$C = \dfrac{1}{(-6)^8 \times \underbrace{(-1)^8}_{1}}$ pair.
$= \dfrac{1}{(-6)^8}$
$= (-6)^{-8}$.

Exercice 3. *Calculer les puissances d'exposant négatif.*
Exprime ces puissances sous la forme d'une fraction et donner le résultat sous la forme d'un nombre décimal quand c'est possible :

a. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2\times2\times2} = \frac{1}{8}$

b. $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{(-5)\times(-5)\times(-5)} = -\frac{1}{125}$

c. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

d. $-7^{-1} = -\frac{1}{7^1} = (-)\frac{1}{7}$

e. $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

f. $10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000} = 0,00001$

g. $(\frac{1}{3})^{-3} = \left(\frac{3}{1}\right)^3 = 3^3 = 27$

h. $(\frac{2}{5})^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}\times\frac{5}{2} = \frac{25}{4}$

Exercice 4. *Ne pas confondre.*
Recopie chaque phrase en la complétant par le mot qui convient :

a. 7^{-5} est l'inverse de 7^5. $\frac{1}{7^5}$

b. -6^2 est l'opposé de 6^2.

c. $0,1$ est l'inverse de 10.
$= \frac{1}{10}$

d. 5^3 est l'inverse de 5^{-3}. $= \frac{1}{5^3}$

e. 3^{-4} est l'opposé de -3^{-4}.

f. $-0,5$ est l'inverse de -2.
$= -\frac{1}{2}$

Exercice 5.
Coche pour donner le signe des nombres suivants :

	Nombre	Positif	Négatif
a.	$(-3)^7$		X
b.	$(-5,4)^4$	X	
c.	-3^{126}		X
d.	$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-11}$		X
e.	$\left(-\frac{1}{9}\right)^{-14}$	X	
f.	$\left(\frac{22}{23}\right)^{-1}$	X	

	Nombre	Positif	Négatif
g.	$\left(\frac{-3}{4}\right)^5$		X
h.	$(-3)^{-78}$	X	
i.	$(-1)^{-1}$		X
j.	$5,4^{-4}$	X	
k.	$-\left(\frac{22}{23}\right)^{-2}$		X
l.	$\left(-\frac{5}{3}\right)^6$	X	

$= (-3)^{11}$

$= (-9)^{14}$

$= \frac{23}{22}$

$= \frac{1}{(-3)^{78}}$

Exercice 6 → $a^n \times a^p = a^{n+p}$

$A = 2^4 \times 2^{-3}$
$= 2^{4+(-3)}$
$= 2^{4-3}$
$= 2^1$

$B = (-3)^{-4} \times (-3)^{-1}$
$= (-3)^{-4+(-1)}$
$= (-3)^{-4-1}$
$= (-3)^{-5}$

$C = 10^5 \times 10^{-2}$
$= 10^{5-2}$
$= 10^3$

$D = (-4)^{-3} \times (-4)^4$
$= (-4)^{-3+4}$
$= (-4)^1$
$= -4$

$E = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times 5^{-3}$
$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times 5^{-3}$
$= \frac{1}{5^2} \times 5^{-3}$
$= 5^{-2} \times 5^{-3}$
$= 5^{-2-3}$
5^{-5}

$$F = \frac{1}{4} \times 4^{-5}$$
$$= 4^{-1} \times 4^{-5}$$
$$= 4^{-1-5}$$
$$= 4^{-6}$$

$$G = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{-4+4}$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$$
$$= 1$$

$$H = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \times \left(\frac{5}{2}\right)^{3}$$
$$= \frac{5}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^{3}$$
$$= \left(\frac{5}{2}\right)^{1+3}$$
$$= \left(\frac{5}{2}\right)^{4}$$

$$C = \frac{(-4)^{-2}}{(-4)^{-6}}$$
$$= (-4)^{-2-(-6)}$$
$$= (-4)^{-2+6}$$
$$= (-4)^{4}$$

$$D = \frac{10^{-5}}{10^{-3}}$$
$$= 10^{-5-(-3)}$$
$$= 10^{-5+3}$$
$$= 10^{-2}$$

Exercice 7 $\longrightarrow$ $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$$A = \frac{5^{-4}}{5^{2}}$$
$$= 5^{-4-2}$$
$$= 5^{-6}$$

$$B = \frac{3^{3}}{3^{-5}}$$
$$= 3^{3-(-5)}$$
$$= 3^{3+5}$$
$$= 3^{8}$$

$$E = \frac{3^{-4}}{3^{3}}$$
$$= 3^{-4-3}$$
$$= 3^{-7}$$

$$F = \frac{(-5)}{(-5)^{-2}}$$
$$= (-5)^{1-(-2)}$$
$$= (-5)^{1+2}$$
$$= (-5)^{3}$$

$$G = \frac{-7^{2}}{7^{3}}$$
$$= -\frac{7^{2}}{7^{3}}$$
$$= -7^{2-3}$$
$$= -7^{-1}$$

$$H = \frac{b}{b^{-6}}$$
$$= b^{1-(-6)}$$
$$= b^{1+6}$$
$$= b^{7}$$

Exercice 8 $\longrightarrow$ $(a^n)^p = a^{n\times p}$

$A = (2^3)^7$
$= 2^{3\times 7}$
$= 2^{21}$

$B = ((-5)^6)^{-3}$
$= (-5)^{6\times(-3)}$
$= (-5)^{-21}$

$C = (4^{-3})^{-2}$
$= 4^{-3\times(-2)}$
$= 4^6.$

$D = (10^{-8})^2$
$= 10^{-16}.$

$E = (2^2)^{-1}$
$= 2^{2\times(-1)}$
$= 2^{-2}$
$=$

$F = (-10^2)^3$
$= (-10)^{2\times 3}$
$= (-10)^6.$

$G = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^2$
$= \left(\frac{2}{3}\right)^{-2\times 2}$
$= \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}.$

$H = -((5^2)^2)^2$
$= -(5^{2\times 2})^2$
$= -(5^4)^2$
$= -5^{4\times 2}$
$= -5^8.$

Exercice 9 $\longrightarrow$ Toutes les formules.

$A = 8^{13}\times \frac{8^{-8}}{8^7}$
$= 8^{13}\times 8^{-8-7}$
$= 8^{13}\times 8^{-15}$
$= 8^{13-15}$
$= 8^{-2}$

$B = 5^{-4}\times \frac{5^5\times 5^3}{(5^3)^2}$
$= 5^{-4}\times \frac{5^{5+3}}{5^{3\times 2}}$
$= 5^{-4}\times \frac{5^8}{5^6}$
$= 5^{-4}\times 5^{8-6}$
$= 5^{-4}\times 5^2$
$= 5^{-4+2}$
$= 5^{-2}$

Exercice 10.* *Utiliser les formules sur les puissances.*
Complète les égalités suivantes :

a. $3^{10} \times 3^{-5} = 3^5$

b. $7^{3} \times 7^8 = 7^{11}$

c. $\frac{5^{-3}}{5^{10}} = 5^{-13}$

d. $(5^{-2})^{-4} = 5^8$

e. $6^{-8} \times 6^{17} \times 6 = 6^{10}$

f. $(3^7)^{-3} = 3^{-21}$

g. $((-2)^{4})^3 = (-2)^{12}$

h. $\frac{-7^{14}}{-7^{10}} = \frac{7^{14}}{7^{10}} = 7^4$

Exercice 11.
Précise si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
Justifie ta réponse.

a. L'inverse de 2^3 est -2^3.

FAUX, c'est l'opposé
L'inverse de 2^3 est 2^{-3} $\left(= \frac{1}{2^3}\right)$

b. L'inverse de $(-5)^{-4}$ est un nombre positif

VRAI, $(-5)^{-4} = \frac{1}{(-5)^4}$ est déjà
un nombre positif. Or deux
nombres inverses sont de même signe !

c. 8^{-3} est un nombre négatif

FAUX, $8^{-3} = \frac{1}{8^3} > 0$

d. 10^{-6} est le double de 10^{-3}

FAUX, le double de 10^{-3} est 2×10^{-3}
$10^{-6} = (10^{-3})^2$, c'est le carré
de 10^{-3} !

Exercice 14. *Utiliser les puissances de 10.*
Complète :

Puissance	Définition	Écriture fractionnaire	Écriture décimale
10^{-4}	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10\,000}$	0,0001
10^{-2}	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{100}$	0,01
10^{-5}	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{100\,000}$	0,00001
10^{-7}	$\frac{1}{10^7}$	$\frac{1}{10\,000\,000}$	0,000 000 1
10^{-6}	$\frac{1}{10^6}$	$\frac{1}{1\,000\,000}$	0,000001

Exo 12 et 13 plus bas

Exercice 12

$A = 2 - \underbrace{3^2}$

$= 2 - 9$

$= -7$

$B = 5^2 - 7 \times 3^0 - 3 \times (-2)^3$

$= 25 \underbrace{- 7 \times 1} \underbrace{- 3 \times (-8)}$

$= 25 - 7 + 24$

$= 18 + 24$

$= 42$

$C = \dfrac{-2^2 + 8}{-1} \times 2^{-1}$

$= \dfrac{-4+8}{-1} \times \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{4}{-1} \times \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{4}{-2}$

$= -2$

$D = \dfrac{2^2 + 4^0}{3^{-2}}$

$= \dfrac{4+1}{3^{-2}}$

$= \dfrac{5}{3^{-2}}$ ← Diviser par un nombre, revient à multiplier par son inverse !

$= 5 \times 3^2$ ou $\dfrac{1}{3^{-2}} = 3^2$ simplement.

$= 5 \times 9$

$= 45$

$E = 10^3 + 10^2$

$= 1\,000 + 100$

$= 1\,100$

(on remarque que $\underbrace{10^3 + 10^2}_{1100} \neq \underbrace{10^5}_{100000}$!
$1100 \neq 100000$)

$F = 2^3 - 2^{-1}$

$= 8 - \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{16}{2} - \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{15}{2}$

(= 7,5 en décimal, logique !)

Exercice 13 → Bonus (autres formules)

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$A = 3^2 \times 2^2$
$= (3 \times 2)^2$
$= 6^2$

$C = \frac{7^3}{13^3}$
$= \left(\frac{7}{13}\right)^3$

$B = (-2)^{-1} \times 5^{-1}$
$= (-2 \times 5)^{-1}$
$= (-10)^{-1}$

$D = \frac{(-6)^{-2}}{10^{-2}}$
$= \left(\frac{-6}{10}\right)^{-2}$
$= \left(-\frac{\cancel{2} \times 3}{\cancel{2} \times 5}\right)^{-2}$
$= \left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$

$E = 5^4 \times 3^{-4}$
$= (5 \times 3)^{-4}$
$= 15^{-4}$

$F = (-4)^2 \times (-3)^{-2}$
$= \frac{(-4)^2}{(-3)^2}$
$= \left(\frac{-4}{-3}\right)^2$
$= \left(\frac{4}{3}\right)^2$

$G = 4^2 \times 6^{-2}$
$= \frac{4^2}{6^2}$
$= \left(\frac{4}{6}\right)^2$
$= \left(\frac{\cancel{2} \times 2}{\cancel{2} \times 3}\right)^2$
$= \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$H = \frac{-2^{-2}}{5^2}$
$= -2^{-2} \times 5^{-2}$
$= -(2 \times 5)^{-2}$
$= -10^{-2}$

Exercice 15

1. $A = 1\,000$
$= 10 \times 10 \times 10$
$= 10^3$

$B = 0{,}001$
$= 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1$
$= 10^{-3}$

$C = 0{,}00001$
$= 10^{-5}$

2. $D = 10^6$
$= 1\,000\,000$

$E = 10^{-4}$
$= 0{,}0001$

$F = 10^2 \times 10^5$
$= 10^7$
$= 10\,000\,000$

Exercice 16 → Écriture scientifique : $a \times 10^{n}$ — entier !
compris entre 1 et 10 (non compris)

$A = 8\,300\,000$
$= 8,3 \times 10^{6}$

$B = 0,0000004561$
$= 4,561 \times 10^{-7}$

$C = 0,00231$
$= 2,31 \times 10^{-3}$

$D = 147,3 \times 10^{5}$
$= 1,473 \times 10^{2} \times 10^{5}$
$= 1,473 \times 10^{7}$

$E = 0,0125 \times 10^{-2}$
$= 1,25 \times 10^{-2} \times 10^{-2}$
$= 1,25 \times 10^{-4}$

$F = 133,25$
$= 1,3325 \times 10^{2}$

Exercice 17

$A = 4,5 \times 10^{-1}$
$= 0,45$

$B = 1,342 \times 10^{2}$
$= 134,2$

$C = 9,01 \times 10^{-4}$
$= 0,000901$

$D = 5,32 \times 10^{3}$
$= 5\,320$

Exercice 18

$A = \frac{250 \times 10^{3}}{10^{-2} \times 5} = \frac{250}{5} \times \frac{10^{3}}{10^{-2}} = \frac{\cancel{5} \times 50}{\cancel{5}} \times 10^{3-(-2)} = 50 \times 10^{3+2}$
$= 50 \times 10^{5} = 5 \times 10 \times 10^{5} = 5 \times 10^{6}$

$B = \frac{49 \times 10^{6} \times 6 \times 10^{5}}{3 \times 10^{4} \times 7 \times 10^{-2}}$
$= \frac{49 \times 6}{3 \times 7} \times \frac{10^{6} \times 10^{5}}{10^{4} \times 10^{-2}}$
$= \frac{\cancel{7} \times 7 \times \cancel{3} \times 2}{\cancel{3} \times \cancel{7}} \times \frac{10^{11}}{10^{2}}$
$= 14 \times 10^{9}$
$= 1,4 \times 10 \times 10^{9}$
$= 1,4 \times 10^{10}$

Exercice 19.

1. Relie les préfixes des unités à la bonne puissance de 10 :

kilo (k)	10^{9}
déca (da)	10^{-2}
giga (G)	10^{3}
nano (n)	10^{-3}
micro (µ)	10^{-9}
méga (M)	10^{6}
centi (c)	10^{-1}
milli (m)	10^{1}
hecto (h)	10^{2}
déci (d)	10^{-6}

2. Compléter :

1 nanomètre = 1 nm = 10^{-9} m

12 kilogramme = 12 kg = 12×10^{3} g

5 mégavolt = 5 MV = 5×10^{6} V

120 microseconde = 120 µs = 120×10^{-6} s

Exercice 20

Proportionnalité

Le nombre d'atome de cuivre est proportionnel à la masse de cuivre

nbre d'atome	1	x
masse (en g)	$1,05 \times 10^{-30}$	$1,47 \times 10^{3}$

⚠ Conversion en g !

$1,47 kg = 1,47 \times 10^{3} g$

$$x = \frac{1,47 \times 10^{3}}{1,05 \times 10^{-30}}$$

$$= 1,4 \times 10^{33}$$

ou

Calcul direct

⚠ mêmes unités

$$\frac{m_{totale}}{m_{atome}} = \frac{1,47 \times 10^{3}}{1,05 \times 10^{-30}}$$

$$= 1,4 \times 10^{33}$$

Dans 1,47 kg de cuivre, il y a $1,4 \times 10^{33}$ atomes de cuivre, soit $14\underbrace{000 \ldots 0}_{32 \text{ zéros}}$ atomes de cuivre !!!

allez je te montre, il y a :

140 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 atomes de Cu !

(tu comprends pourquoi les puissances de 10 et en particulier l'écriture scientifique devient très utile dans les calculs ?).

Exercice 21

Prop.

S'inspirer du 20

(1 vidéo ⟷ 8 Go

? vidéo ⟷ 1 To)

ou

Calcul direct

$1 To = 10^{3} Go$

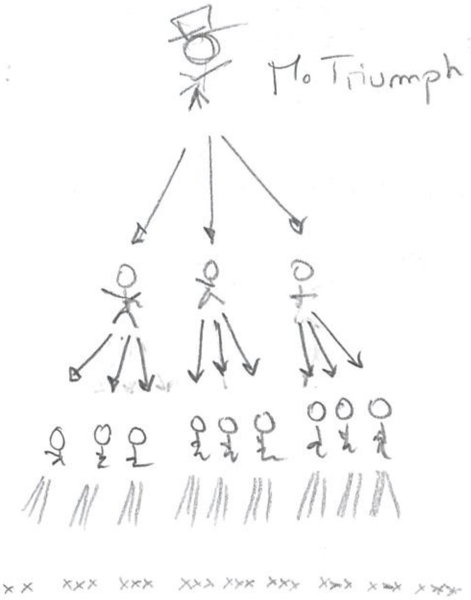
$\frac{10^{3}}{8} = 125$ vidéos

To			Go
1	0	0	0

Dans 1 To, on peut stocker 125 vidéos

Exercice 22

Commençons par un schéma :



		Apprenne l'info :
J+0	1er avril :	1 personne $= 3^0$
J+1	2 avril :	$3 = 3^1$ autres
J+2	3 avril :	$9 = 3^2$ autres
J+3	4 avril :	$27 = 3^3$ autres

⋮

On observe une relation entre le Jour $J+n$ et la puissance de 3 : 3^n (nombre de personnes qui apprennent l'info !)

1. 2 avril $(J+1)$: $3 = 3^1$ apprennent l'info.
   3 avril $(J+2)$: $9 = 3^2$ ——
   4 avril $(J+3)$: $27 = 3^3$ ——

2. 15 avril $(J+14)$: 3^{14} apprennent l'info.

3. Le 15 avril, en tout : $1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{13} + 3^{14}$ ont eu l'information !

Exercice 23

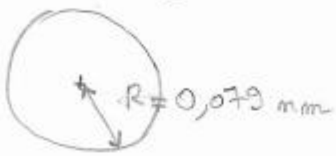
1er chiffre　2em　3em　4em

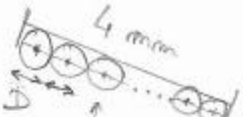
0　1 2 3 ⋮
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Il y a $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000$ combinaisons possibles avec un cadenas à 4 chiffres !

Exercice 24

Atome d'azote :





Nombre d'atomes d'azote ?

On sait que :

$$1\,nm = \frac{1\,mm}{1\,000\,000}$$

$$1\,nm = \frac{1}{1\,000\,000}\,mm$$

$$1\,nm = \frac{1}{10^6}\,mm$$

$$1\,nm = 10^{-6}\,mm.$$

* Diamètre d'un atome d'azote :

$$D = 2 \times R$$
$$= 2 \times 0{,}079\,nm$$
$$= 0{,}158\,nm$$

Or $1\,nm = 10^{-6}\,mm$

donc $\underline{D = 0{,}158 \times 10^{-6}\,mm}$

* Nombre d'atomes dans une file de 4 mm :

$$\frac{\text{Longueur de la file}}{D} = \frac{4}{0{,}158 \times 10^{-6}}$$

$$= \frac{4}{0{,}158} \times 10^6$$

$$\approx 25 \times 10^6$$

Il faut 25×10^6 atomes d'azotes, soit 25 millions d'atomes d'azotes mis bout à bout pour faire une file de 4 mm.

Exercice 25

- $v_{cheveu} = 0{,}000000016\ km/h$.

$v_{cheveu} = 1{,}6 \times 10^{-8}\ km/h$

$v_{cheveu} = 1{,}6 \times 10^{-8} \times 10^{3}\ m/h$ donc $\underline{v_{cheveu} = 1{,}6 \times 10^{-5}\ m/h}$

- $t = 1$ mois

$t = 30{,}5\ j$

$t = 30{,}5 \times 24\ h$ $(1\ j = 24\ h)$

$\underline{t = 732\ h}$.

A vitesse constante, la longueur de pousse est proportionnelle au temps.

Longueur de pousse (en m)	$1{,}6 \times 10^{-5}$	d
Temps (en h)	1	732

Produit en croix : $d = 1{,}6 \times 10^{-5} \times 732$

$d = 1{,}6 \times 732 \times 10^{-5}$

$d = 1171{,}2 \times 10^{-5}\ m$

$d = 1{,}1712 \times 10^{3} \times 10^{-5}\ m$

$d = 1{,}1712 \times 10^{-2}\ m$.

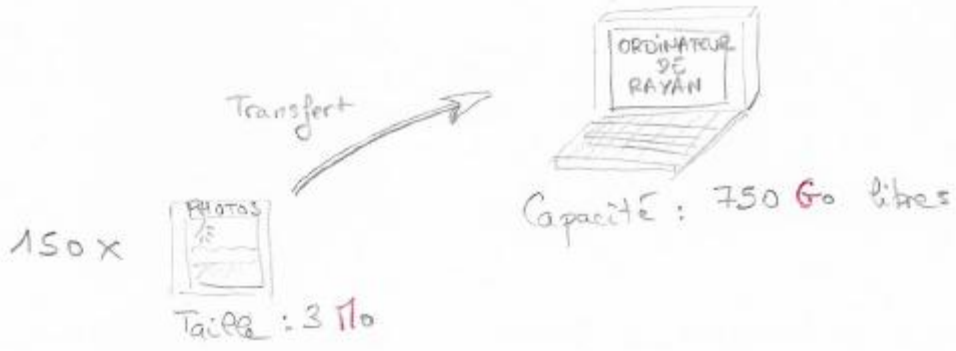
Or $10^{-2}\ m = 1\ cm$

donc $\underline{d \approx 1{,}2\ cm}$.

En 1 mois, un cheveu pousse environ $\underline{1{,}2\ cm}$.

Exercice 26

$1\,Go = 10^9$ octets ; $1\,ko = 10^3$ octets ; $1\,Mo = 10^6$ octets



* Quantité à transférer (150 photos) :

$$\begin{aligned} 150 \times 3\,Mo &= 450\,Mo \\ &= 450 \times 10^9 \text{ octets.} \\ &= 4{,}50 \times 10^2 \times 10^9 \text{ octets.} \\ &= 4{,}5 \times 10^{11} \text{ octets} \end{aligned}$$

* Capacité de l'ordinateur :

$$\begin{aligned} 750\,Go &= 750 \times 10^9 \text{ octets.} \\ &= 7{,}5 \times 10^2 \times 10^9 \text{ octets} \\ &= 7{,}5 \times 10^{11} \text{ octets} \end{aligned}$$

* Mémoire disponible après transfert :

$$\begin{aligned} 7{,}5 \times 10^{11} - 4{,}5 \times 10^{11} &= 3 \times 10^{11} \text{ octets.} \\ &= 300 \times 10^9 \text{ octets.} \\ &= 300\,Go. \end{aligned}$$

Il restera 300 Go de mémoire disponible.