Arithmétiques (2)

Exercice 1

Nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ....

1.

$$\begin{array}{r|l} 156 & 2 \\ 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

STOP !

donc $156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$
$= 2^2 \times 3 \times 13$

2.

$$\begin{array}{r|l} 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

donc $130 = 2 \times 5 \times 13$

3. $\dfrac{156}{130} = \dfrac{2 \times \cancel{2} \times 3 \times \cancel{13}}{\cancel{2} \times 5 \times \cancel{13}}$

$= \dfrac{2 \times 3}{5}$

$= \dfrac{6}{5}$ fraction irréductible

Exercice 2

1.

$$\begin{array}{r|l} 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ \boxed{1} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

$675 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$
$= 3^3 \times \underline{5^2}$

$375 = 3 \times 5 \times 5 \times 5$
$= \underline{3} \times 5^3$

$PGCD(675 ; 375) = 3 \times 5^2$
$= 3 \times 25$
$= 75$

(c'est le diviseur commun à 675 et 375 le plus grand !)

2.

$$\begin{array}{r|l} 3\,850 & 2 \\ 1\,925 & 5 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ \boxed{1} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4\,840 & 2 \\ 2\,420 & 2 \\ 1\,210 & 2 \\ 605 & 5 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

Si vous avez la calculatrice, profitez en !

$$3\,850 = 2\times5\times5\times7\times11 = \underbrace{2}\times5^2\times7\times\underbrace{11}$$

$$4\,840 = 2\times2\times2\times5\times11\times11 = 2^3\times\underbrace{5}\times11^2$$

$$\text{PGCD}(3\,850\,;4\,840) = 2\times5\times11 = 10\times11 = 110.$$

3.

$$\begin{array}{r|l} 34 & 2 \\ 17 & 17 \\ \boxed{1} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

$34 = 2\times17$ $\qquad$ $99 = 3\times3\times11$

$$\text{PGCD}(34\,;99) = 1$$

il n'y a pas d'autres diviseurs en commun à 34 et 99.

34 et 99 sont... premiers entre eux !

Exercice 3.

1. 682 et 352 ne sont pas premiers entre eux car ils sont pairs, ils ont au moins un diviseur commun autre que 1 $\longrightarrow$ 2 !

2. On peut donc simplifier $\frac{682}{352}$ (par 2) et la fraction n'est pas irréductible.

3.

$$\begin{array}{r|l} 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ \boxed{1} & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{r|l} 712 & 2 \\ 356 & 2 \\ 178 & 2 \\ 89 & 89 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

$$231 = 3 \times 7 \times 11 \qquad 712 = 2 \times 2 \times 2 \times 89 = 2^3 \times 89$$

$$PGCD\,(231\,;\,712) = 1.$$

Donc oui, la fraction $\frac{231}{712}$ est irréductible !

Exercice 4

"le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs."

 → PGCD !

1.

$$\begin{array}{r|l} 182 & 2 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ \boxed{1} & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{r|l} 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

$$182 = 2 \times 7 \times 13 \qquad 78 = 2 \times 3 \times 13$$

$$PGCD\,(182\,;\,78) = 2 \times 13 = 26$$

Elle pourra faire 26 bouquets identiques !

2. Or $182 = 2 \times 7 \times 13 = 26 \times 7$ → 7 brins de muguet

et $78 = 2 \times 3 \times 13 = 26 \times 3$ → 3 roses

Chaque bouquet contiendra 7 brins de muguet et 3 roses !

Exercice 5 ... Nbres premiers

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17 ...

$$\begin{array}{r|l} 3\,003 & 3 \\ 1\,001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

$$3\,003 = 3 \times 7 \times 11 \times 13$$

$$\begin{array}{r|l} 3\,731 & 7 \\ 533 & 13 \\ 41 & 41 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

$$3\,731 = 7 \times 13 \times 41$$

$$PGCD\,(3\,003\,;\,3\,731) = 7 \times 13$$
$$= 91$$

Il pourra faire 91 ballotins.

$3\,003 = 91 \times 33 \longrightarrow$ 33 dragées au chocolat

$3\,731 = 91 \times 41 \longrightarrow$ 41 dragées aux amandes.

Chaque ballotin sera composé de 33 dragées au chocolat et 41 dragées aux amandes.

Exercice 6

1.

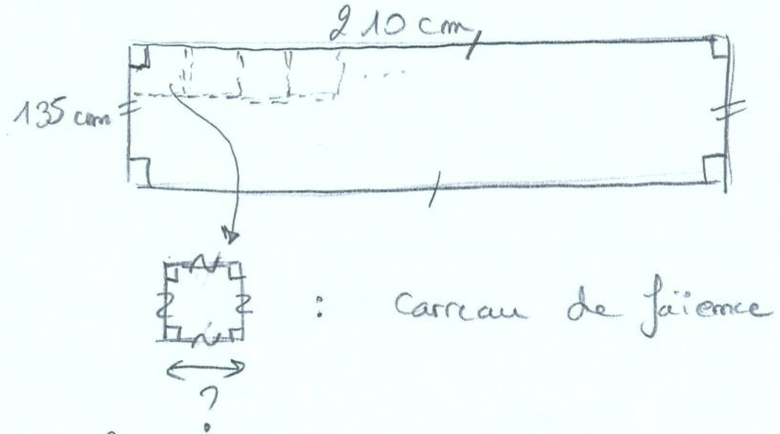
$$\begin{array}{r|l} 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \boxed{1} & \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$135 = 3 \times 3 \times 3 \times 5$$
$$= 3^3 \times 5$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$PGCD(135\,;210) = 3 \times 5$$
$$= 15.$$

2.



a) D'après la question 1, le carreau de faïence (carré) aura le plus grand côté possible si on choisit 15 cm !
En effet : 15 est le plus grand nombre qui divise 135 (largeur du mur) et 210 (longueur du mur).

b) $135 = 15 \times 9$ et $210 = 15 \times 14$ } Il y aura donc 9 carreaux en largeur et 14 carreaux en longueur

$$9 \times 14 = 126$$

Il faut alors 126 carreaux de faïence en tout !

Exercice 7

1.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ \boxed{1} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$= \underbrace{2^3} \times \underbrace{3}$

$15 = 3 \times \underbrace{5}$

donc $PPCM(24 ; 15) = 2^3 \times 3 \times 5$

$= 8 \times 3 \times 5$

$= 120$

2.

$$\begin{array}{r|l} 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ \boxed{1} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

$39 = 3 \times \underbrace{13}$

$45 = 3 \times 3 \times 5$

$= \underbrace{3^2} \times \underbrace{5}$

donc $PPCM(39 ; 45) = 3^2 \times 5 \times 13$

$= 9 \times 5 \times 13$

$= 585$

3.

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ \boxed{1} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$

$= 2^2 \times 3 \times \underbrace{5^2}$

$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$= \underbrace{2^3} \times \underbrace{3^2} \times 5$

donc $PPCM(300 ; 360) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 8 \times 9 \times 25 = 1\,800$

Exercice 8 1.

00h00 :  

clignotte toutes les 153 s. clignotte toutes les 187 s.

$$\begin{array}{r|l} 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ \boxed{1} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 187 & 11 \\ 17 & 17 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

$$153 = 3 \times 3 \times 17 = 3^2 \times 17$$

$$187 = 11 \times 17$$

$$PPCM(153 ; 187) = 3^2 \times 11 \times 17 = 1\,683$$

A partir de 00h00, les ampoules clignotteront ensemble au bout de 1683 secondes.

Or :

$$\begin{array}{r|l} 1\,683 & 60 \\ -1\,20 & 28 \\ 483 & \\ -480 & \\ 3 & \end{array}$$

1 683 secondes = 60 secondes × 28 + 3 secondes = 28 min 03 sec.

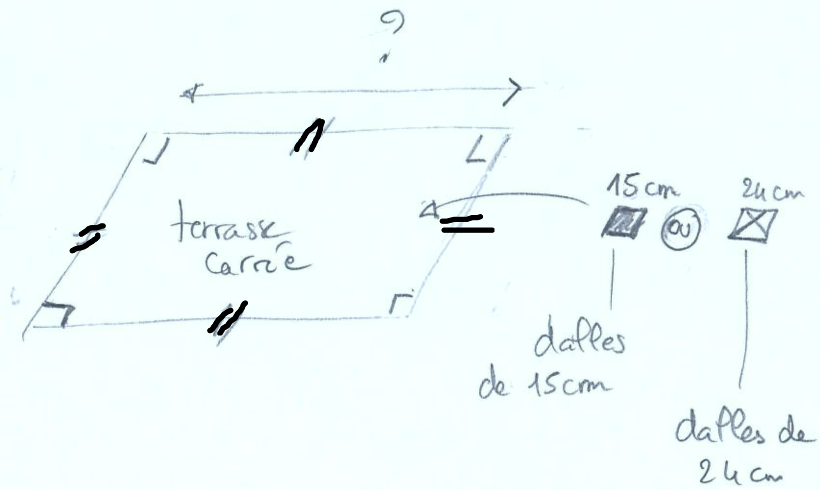
Conclusion : Les ampoules clignotteront encore ensemble à 00h28min03 sec

2. Entre 00h00min et 00h28min03sec :

1 683 = 153 x 11, donc la première ampoule cignottera 11 fois !

1 683 = 187 x 9, donc la deuxième ampoule cignottera 9 fois !

Exercice 9



1.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$15 = \underbrace{3}_{1} \times \underbrace{5}_{1}$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$
$$= \underbrace{2^3}_{1} \times 3$$

$$PPCM(15 ; 24) = 2^3 \times 3 \times 5$$
$$= 8 \times 3 \times 5$$
$$= 120$$

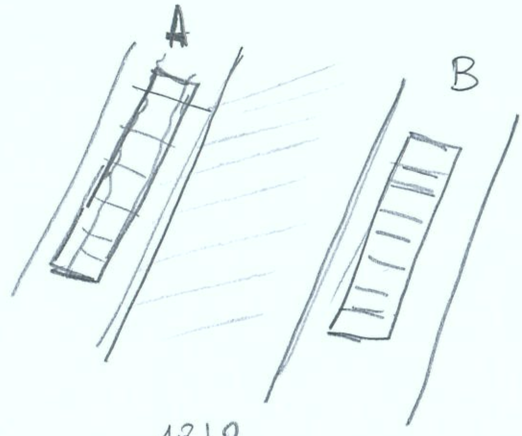
2. La longueur minimale de la terrasse carrée capable d'accueillir des dalles de 15 cm ou bien des dalles de 24 cm sera de <u>120 cm</u> soit <u>1,20m</u> !

Exercice 10

Ligne A passe toutes les 12 min.

Ligne B passe toutes les 18 min.

à 8h00 :



1.

12	2
6	2
3	3
$\boxed{1}$	

18	2
9	3
3	3
$\boxed{1}$	

$12 = 2 \times 2 \times 3$
$= \underbrace{2^2}_{\uparrow} \times 3$

$18 = 2 \times 3 \times 3$
$= 2 \times \underbrace{3^2}_{\uparrow}$

$PPCM(12 ; 18) = 2^2 \times 3^2$
$= 4 \times 9$
$= 36.$

2. Les deux lignes repasseront à nouveau au même moment sur le quai à 8h36min !

3. Voici les horaires où les lignes passent simultanément entre 8h00 et 20h00 :

8h00 ; 8h36min ; 9h12min ; 9h48min ; 10h24min ;
11h00 ; 11h36min ; 12h12min ; 12h48min ; 13h24min ;
14h00 ; 14h36min ; 15h12min ; 15h48min ; 16h24min ;
17h00 ; 17h36min ; 18h12min ; 18h48min ; 19h24min
20h00

Autrement dit, elles passeront simultanément <u>21 fois</u> !!

OU

8h00 à 20h00 $\longrightarrow$ 12 h = 12 × 60 min

= 720 min.

Or 720 ÷ 36 = 20 fois ! (+ 1 fois à 8h00 !)

Les lignes passeront bien <u>21 fois</u> simultanément.