

chapitre 4 : ARITHMÉTIQUE (2)

I. Rappels et application

1. Décomposition en facteurs premiers

Définition : Décomposer un nombre non premier **en produit de facteurs premiers** c'est l'écrire comme le produit de nombres premiers.

Exemples : Décompose les nombres suivants en produit de facteurs premiers.

Méthode 1 :

$$\begin{aligned}198 &= 2 \times 99 \\ &= 2 \times 3 \times 33 \\ &= 2 \times 3 \times 3 \times 11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{donc } 198 &= 2 \times 3 \times 3 \times 11 \\ &= 2 \times 3^2 \times 11\end{aligned}$$

Méthode 2 :

198	2
99	3
33	3
11	11
1	

On peut s'arrêter ! →

$$\begin{aligned}\text{donc } 198 &= 2 \times 3 \times 3 \times 11 \\ &= 2 \times 3^2 \times 11\end{aligned}$$

2. Application : simplifier des fractions

Avec un exemple :

1. Décomposer 36 en produit de facteurs premiers.
2. Même consigne pour 22.
3. En se servant de ce qui précède, simplifier $\frac{36}{22}$

Correction :

$$\begin{aligned}1. \quad 36 &= 2 \times 18 \\ &= 2 \times 2 \times 9 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3\end{aligned}$$

et

$$2. \quad 22 = 2 \times 11$$

$$3. \quad \text{Donc on obtient } \frac{36}{22} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times 3 \times 3}{\cancel{2} \times 11} = \frac{2 \times 3 \times 3}{11} = \frac{18}{11}$$

II. PGCD de deux nombres

Définition : Un **diviseur commun** à deux nombres entiers est **un nombre qui divise ces deux entiers**.

Le **PGCD** (plus grand commun diviseur) de deux nombres est **le plus grand diviseur en commun** de ces deux nombres.

Exemple:

La décomposition en produit de facteur premier de 660 est :

$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$

De même :

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

EN THEORIE :

Diviseurs de 660 : **1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 11 ; 12 ; 15 ; 20 ; 22 ; 30 ; 33 ; 44 ; 55 ; 60 ; 66 ; 110 ; 132 ; 165 ; 220 ; 330 ; 660.**

Diviseurs de 90 : **1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 15 ; 18 ; 30 ; 45 ; 90.**

Le PGCD de 660 et de 90 est 30 et on note : **PGDC (660 ; 90) = 30**

EN PRATIQUE :

On ne liste pas les diviseurs des deux nombres !

On se sert directement des décompositions en produit de facteurs premiers des deux nombres et on prend les puissances en commun avec l'exposant le plus petit !

$$\text{PGDC (660 ; 90)} = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

Remarque importante : S'il n'y a rien en commun dans les décompositions en produit de facteurs premiers des deux nombres alors, **le seul diviseur commun est ... 1 !**

Et on dit que **les deux nombres sont premiers entre eux**.

Par exemple :

$$26 = 2 \times 13 \text{ et } 51 = 3 \times 17.$$

Dans ce cas, **PGCG (26 ; 51) = 1** et on dit que **26 et 51 sont premiers entre eux**.

III. PPCM de deux nombres

Définition : Un **multiple commun** à deux nombres entiers est un nombre qui est divisible par ces deux nombres !

Le **PPCM** (plus petit commun multiple) de deux nombres est **le plus petit multiple en commun** de ces deux nombres.

Exemple:

La décomposition en produit de facteur premier de 12 est :

$$12 = 2^2 \times 3$$

De même :

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

EN THEORIE :

Multiples de 12 : 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; **60** ; 72 ; 84 ; 96 ; 108 ; **120** ; 132 ...

Multiples de 30 : 30 ; **60** ; 90 ; **120** ; 150 ...

Le PPCM de 12 et de 30 est 60 et on note : **PPCM (12 ; 30) = 60**

EN PRATIQUE :

On ne liste pas les multiples des deux nombres jusqu'à en trouver un en commun !

On se sert directement des décompositions en produit de facteurs premiers des deux nombres et on prend toutes les puissances qui apparaissent avec l'exposant le plus grand !

$$\text{PPCM (12 ; 30)} = 2^2 \times 3 = 60$$

À la fin du chapitre, JE SAIS :

- Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers et s'en servir dans certaines applications
- Calculer le PGCD de deux nombres
- Calculer le PPCM de deux nombres