Chapitre 6 : CALCUL LITTÉRAL (1) : FACTORISER/DÉVELOPPER

I. Développement (ou Distribution)

1. Définition et méthode

Définition : Développer une expression, c'est **transformer un produit de facteurs en une somme (ou une différence) de termes.**

💡 **Méthode pratique** (utilisée dans les exemples ci-dessous) :

(1) On **développe.**
(2) On **simplifie** les termes.
(3) ***On* réduit** les termes semblables.

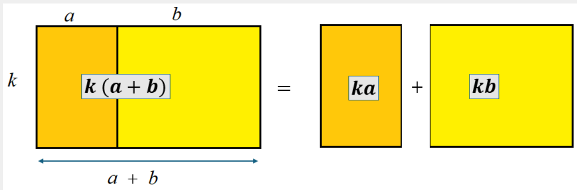
2. Développement simple (ou simple distributivité)

Propriété : Quels que soient les nombres **a**, **b** et **k**, on a **:**

$$k\,(a + b) = ka + kb$$

$$k\,(a - b) = ka - kb$$

Visuellement (aires) :



Exemples : Développer.

$$\begin{aligned} A &= 6(x - 4) \\ &= 6 \times x - 6 \times 4 \\ &= 6x - 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= -x(4x - 1) \\ &= -x \times 4x - (-x) \times 1 \\ &= -4x^2 + x \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} B &= -x(4x - 1) \\ &= -x \times 4x + x \times 1 \\ &= -4x^2 + x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (x + 5)2y \\ &= 2y \times x + 2y \times 5 \\ &= 2xy + 10y \end{aligned}$$

Remarque : $(a + b)\,k = ka + kb$ **et** $(a - b)\,k = ka - kb$

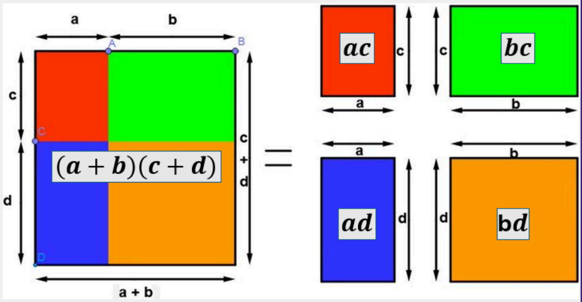
3. Développement double (ou double distributivité)

Propriété : Quels que soient les nombres **a**, **b**, **c** et **d**, on a :

(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd

(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd

Visuellement (aires) :



Exemples : Développer.

$$
\begin{aligned}
D &= (x+2)(x-3) \\
&= x \times x + x \times (-3) + 2 \times x + 2 \times (-3) \\
&= x^2 - 3x + 2x - 6 \\
&= x^2 - x - 6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E &= (2x-5)(7-4x) \\
&= 2x \times 7 + 2x \times (-4x) + (-5) \times 7 + (-5) \times (-4x) \\
&= 14x - 8x^2 - 35 + 20x \\
&= -8x^2 + 14x + 20x - 35 \\
&= -8x^2 + 34x - 35
\end{aligned}
$$

II. Factorisation

1. Définition et méthode

Définition : **Factoriser** une expression, c'est **transformer une somme (ou une différence) de termes en un produit de facteurs.**

💡 **Méthode pratique** (utilisée dans les exemples ci-dessous) :

(1) On **met en évidence un facteur commun**
(2) On **factorise.**
(3) On peut **développer** dans sa tête pour **vérifier**.

2. factorisation

Propriété : Quels que soient les nombres **a**, **b** et **k**, on a :

k a + k b = k (a + b)

k a - k b = k (a - b)

Exemples : Factoriser.

$$A = 2 + 2x = 2 \times 1 + 2 \times x = 2 \times (1 + x) = 2(1 + x)$$

$$B = 4x^2 - 4x = 4 \times x^2 - 4 \times x = 4(x^2 - x)$$

$$C = 5x^2 - 30x = 5x \times x - 5x \times 6 = 5x(x - 6)$$

$$D = 3x(x-4) + 6x^2 = 3x \times (x-4) + 3x \times 2x = 3x[(x-4) + 2x] = 3x(x-4 + 2x) = 3x(3x-4)$$

$$F = (x-1)^2 - (x-1) = (x-1) \times (x-1) - (x-1) \times 1 = (x-1)[(x-1) - 1] = (x-1)(x-1-1) = (x-1)(x-2)$$

$$E = (x-5)(2x+7) - (3x+5)(2x+7) = (2x+7)[(x-5) - (3x+5)] = (2x+7)(x-5-3x-5) = (2x+7)(-2x-10)$$

III. Identités remarquables

1. Développer avec les identités remarquables

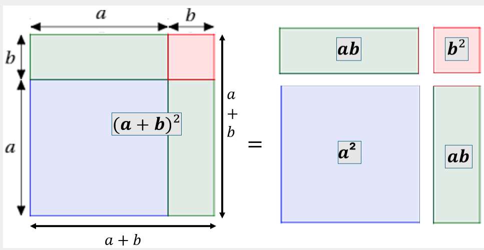
Propriété : Quels que soient les nombres **a, b** :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ « Carré d'une somme »

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ « Carré d'une différence »

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Visuellement (aires) :



Remarque : Ces formules ne sont ni plus ni moins que des **cas particuliers** du double développement (ou double distributivité) !

Exemples : En utilisant les identités remarquables, développer.

$$A = (5 + x)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times x + x^2 = 25 + 10x + x^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$B = (3x - 2)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$C = (8x - 4)(8x + 4) = (8x)^2 - 4^2 = 64x^2 - 16$$

🤖**Utilisation des identités remarquables pour calculer astucieusement :**

$$\begin{aligned} A &= 41^2 \\ &= (40+1)^2 \\ &= 40^2 + 2\times 40\times 1 + 1^2 \\ &= 1\,600 + 80 + 1 \\ &= 1\,681 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 69^2 \\ &= (70-1)^2 \\ &= 70^2 - 2\times 70\times 1 + 1^2 \\ &= 4\,900 - 140 + 1 \\ &= 4\,761 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 105\times 95 \\ &= (100+5)(100-5) \\ &= 100^2 - 5^2 \\ &= 10\,000 - 25 \\ &= 9\,975 \end{aligned}$$

2. Factoriser avec les identités remarquables

Propriété : Quels que soient les nombres **a, b** :

a² + 2ab + b² = (a + b)²

a² - 2ab + b² = (a – b)²

a² – b² = (a + b) (a – b) « Différence de deux carrés »

Exemples : En utilisant les identités remarquables, factoriser.

$$\begin{aligned} A &= x^2 - 8x + 16 \\ &= x^2 - 2\times x\times 4 + 4^2 \\ &= (x-4)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 4x^2 + 20x + 25 \\ &= (2x)^2 + 2\times x\times 5 + 5^2 \\ &= (2x+5)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 81x^2 - 49 \\ &= (9x)^2 - 7^2 \\ &= (9x-7)(9x+7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 9-(2x-5)^2 \\ &= 3^2 - (2x-5)^2 \\ &= [3-(2x-5)][3+(2x-5)] \\ &= (3-2x+5)(3+2x-5) \\ &= (-2x+8)(2x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= (3x-4)^2 - (5-2x)^2 \\ &= [(3x-4)-(5-2x)][(3x-4)+(5-2x)] \\ &= (3x-4-5+2x)(3x-4+5-2x) \\ &= (5x-9)(x+1) \end{aligned}$$

À la fin du chapitre, JE SAIS :

- Développer une expression littérale (développement simple et double)
- Factoriser une expression littérale
- Utiliser les 3 identités remarquables dans les deux sens (factoriser et développer)