Introduction : vecteurs, bases, repères.

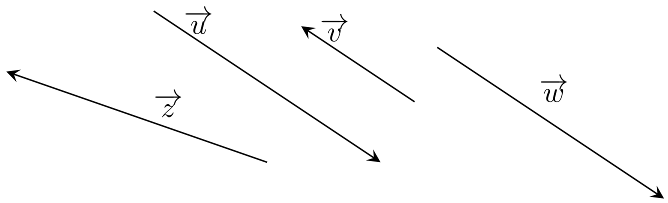
Les vecteurs représentent des grandeurs physiques comme des forces, des vitesses, des champs (magnétiques, gravitationnels ...), qui ont nécessité la mise en place des bases.

En mathématiques, ils sont le fondement de l'algèbre linéaire, qui étudie les espaces vectoriels que nous verrons au 2ème semestre. L'algèbre linéaire fait le lien entre des problèmes algébriques (systèmes d'équations par exemple) et des problèmes géométriques (intersections de droites, transformations du plan ...), grâce notamment aux bases et coordonnées.

I. Vecteurs.

Un ***vecteur*** traduit un déplacement, il est caractérisé par 3 éléments : sa direction, son sens, et sa longueur.

Exemple :



⋆ ils ont même direction : ....

⋆ ils ont même sens : ....

⋆ ils ont même longueur : ....

En particulier, ...

....

Remarques : Si A et B sont deux points distincts, on peut former un vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec pour caractéristiques : la direction de la droite (AB), le sens de A vers B, et la longueur AB.
La longueur d'un vecteur est aussi appelée sa ***norme***, et on note $\|\overrightarrow{u}\|$ la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé ***vecteur nul*** et aussi noté $\overrightarrow{0}$. Et $\|\overrightarrow{0}\| = 0$.

Propriété.

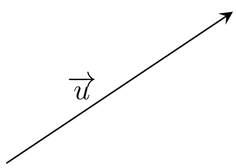
Pour tout point A et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

1) Opérations sur les vecteurs

Relation de Chasles : $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$

Définition.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et k un réel.
- si $k = 0$, alors $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;
- si $k > 0$, alors $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur
  - ⋆ de même direction que $\overrightarrow{u}$
  - ⋆ de même sens que $\overrightarrow{u}$
  - ⋆ de norme $k\|\overrightarrow{u}\|$;
- si $k < 0$, alors $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur
  - ⋆ de même direction que $\overrightarrow{u}$
  - ⋆ de sens opposé à $\overrightarrow{u}$
  - ⋆ de norme $-k\|\overrightarrow{u}\|$ (ou $|k|\,\|\overrightarrow{u}\|$).



Remarque : si A et B sont deux points du plan, alors $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Exemple : simplifier les expressions suivantes : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$ et $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$

2) Colinéarité, coplanarité, familles libres, liées

Définition.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont ***colinéaires*** si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.
Autrement dit, soit l'un des deux vecteurs est nul, soit ils ont la même direction.

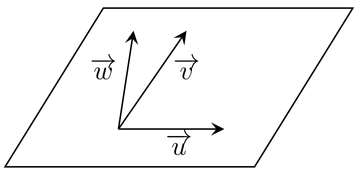
Exemples :

Remarques :

- le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur $\overrightarrow{u}$, en effet : …
- deux vecteurs sont colinéaires lorsque leurs coordonnées sont proportionnelles, par exemple :
  on note $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$:

Définition.
Dans l'espace, trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont ***coplanaires*** si et seulement si il existe deux réels k et k' tels que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v} + k'\overrightarrow{w}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{w} + k'\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{w} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{v}$.

Illustration :



Propriété.

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe deux réels α et β non nuls simultanément tels que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
- $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

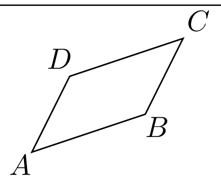
Exemples : dans l'illustration ci-dessus, ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Définition (complément).
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une ***famille libre*** si et seulement si ils ne sont pas colinéaires, autrement dit : ……………………………………………………………………………
Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace forment une ***famille libre*** si et seulement si ils ne sont pas coplanaires : ……………………………………………………………………………

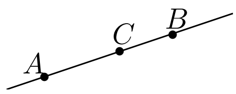
Remarque : une famille qui n'est pas libre est dite ***liée***.



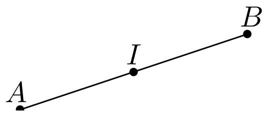
Propriété.

Soient A, B, C et D des points distincts :

- $\star$ $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$:
- $\star$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si (AB) et (CD) sont parallèles.
- $\star$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si et seulement si les points A, B et C sont alignés.



- $\star$ I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



II. Bases et repères

1) Orientation

Le plan est en général orienté suivant le sens trigonométrique (sens anti-horaire) :‘

Dans l'espace, on peut orienter un plan $\mathcal{P}$ suivant un vecteur $\overrightarrow{u}$ qui n'est pas dans le plan : le vecteur $\overrightarrow{u}$ pointe vers le demi-espace d'observation de $\mathcal{P}$, et vu de ce demi-espace, on oriente $\mathcal{P}$ dans le sens trigonométrique.

2) Bases et coordonnées de vecteurs

Définition.

$\star$ Une ***base*** du plan $\mathcal{P}$ est un couple de deux vecteurs non colinéaires.

$\star$ Dans l'espace $\mathcal{E}$, une ***base*** est un triplet de trois vecteurs non coplanaires.

En général une base du plan est notée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et une base de l'espace $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

Théorème.

$\star$ Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ une base du plan $\mathcal{P}$.

Alors pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{P}$, il existe deux réels x et y tels que $\boxed{\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}}$.

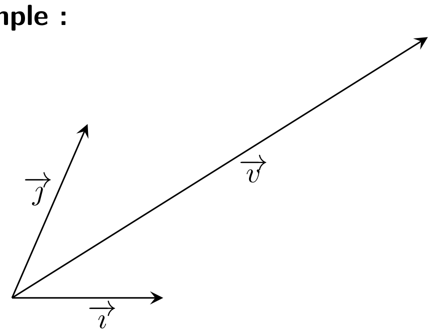
Le couple (x, y) est unique et est appelé ***couple de coordonnées cartésiennes*** de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$: on note en général $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ou $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ si besoin de précision sur la base).

$\star$ Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ une base de l'espace $\mathcal{E}$.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{E}$, il existe trois réels x, y et z tels que $\boxed{\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}}$.

Le triplet (x, y, z) est unique et est appelé ***triplet de coordonnées cartésiennes*** de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$: on note en général $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (ou $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ si besoin de précision sur la base).

Exemple :



Différents types de bases :

- ⋆ La base du plan est dite ***orthogonale*** si la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est $\pm\frac{\pi}{2}$.
  Dans l'espace, les trois angles non orientés $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, $(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k})$ doivent mesurer $\frac{\pi}{2}$.

- ⋆ La base est dite ***orthonormale*** (ou ***orthonormée***) si elle est orthogonale et que tous ses vecteurs sont de norme 1.

- ⋆ La base est dite ***directe*** si la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ (orienté par $\overrightarrow{k}$ dans l'espace) est positive (autrement dit, une mesure de l'angle orienté est entre 0 et π).

- ⋆ On essaie souvent de travailler dans une ***base orthonormée directe***.

Propriété.

- Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, et soit k dans $\mathbb{R}$, alors :
  - ⋆ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$;
  - ⋆ les coordonnées de $k\overrightarrow{u}$ sont $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.
- Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, et soit k dans $\mathbb{R}$, alors :
  - ⋆ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sont
  - ⋆ les coordonnées de $k\overrightarrow{u}$ sont

Exercice : Soient $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ une base du plan, et les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2} + 3\overrightarrow{u_3}$.

2. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ forment une base du plan. On note $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.

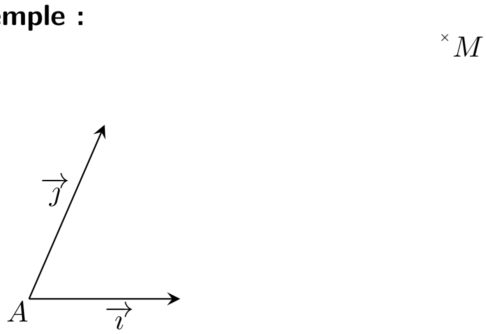
3. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{u_3}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

3) Repères cartésiens et coordonnées de points

Définition.
Un ***repère cartésien*** est la donnée d'un point et d'une base.
Un repère est qualifié de direct, orthogonal, orthonormal … si sa base l'est.

Définition.
Soit $\mathcal{R}$ un repère du plan (resp. de l'espace) $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ (resp. $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$).
Les ***coordonnées cartésiennes*** d'un point M dans le repère $\mathcal{R}$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ (respectivement $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$) :
⋆ si M est un point du plan, M a pour coordonnées (x, y) signifie que $\overrightarrow{OM} = \dots$
⋆ si M est un point de l'espace, M a pour coordonnées (x, y, z) signifie que $\overrightarrow{OM} = \dots$

Exemple :



coordonnées de M dans le repère $(A; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$:

Propriété.

- Soient deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B), alors :
  - ⋆ les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.
  - ⋆ les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- Soient deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B), alors :
  - ⋆ les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont
  - ⋆ les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont

Théorème.

Dans un repère orthonormé , la distance AB, qui correspond à la ***norme*** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est donnée par la formule :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ dans le plan ;}$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ dans l'espace.}$$

Illustration :

Exemple : soient $A(3; -1)$ et $B(2; 5)$ dans un repère orthonormé, on note I le milieu de $[AB]$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{pmatrix} =$

$-2\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{pmatrix}$

$\|\overrightarrow{AB}\| =$

coordonnées de I :

Remarque : dans une base orthonormée du plan, si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $\boxed{\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Dans une base orthonormée de l'espace, $\boxed{\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.