Rechner**U**nterstütztes**Z**eichnen RUZ
Technische Spezifikationen

Ansgar Rütten

09. März 2024
Stand:7. Juli 2024

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Elemente der Zeichnung

Zeichnungen sind in verschiedene Layer unterteilt, welche die Zeichnungsobjekte enthalten, die angezeigt, manipuliert und auf deren Grundlage Berechnungen angestellt werden können.

Folgende Zeichnungsobjekte stehen derzeit zur Verfügung:

Punkt:	eindimensionaler Ort im drei-dimensionalen Raum
Linie:	Verbindung zweier Punkte
Dreieck:	drei-dimensionale Ebene, umgrenzt von drei Linien
Viereck:	hyperboles Paraboloid, definiert und umgrenzt von 4 Linien
Zeichnerische Hilfsobjekte	
Kreis:	zwei-dimensionaler Kreis mit Mittelpunkt und Radius
Fangpunkt:	Hilfspunkt, der zur Markierung z. B. von Schnittpunkten zweier Zeichnungsobjekte dient
Höhenmarke:	Punkt in der Zeichnung, der die Höhe eines Zeichenobjekts an dieser Stelle anzeigt
Gefällemarke:	Punkt in der Zeichnung, der das Gefälle einer Fläche an dieser Stelle anzeigt
Höhenlinie:	Programmatisch erzeugt Linie, die den Verlauf der Isohypsen einer Fläche nachzeichnet, im Falle eines Vierecks näherungsweise
Elemente die z. B. der Darstellung von Hintergrundzeichnungen dienen	
Strich:	Linie, die nicht vom Benutzer erzeugt und verändert werden kann. Ein Strich kann ggf. in eine Linie umgewandelt werden, wenn Punkte in der Nähe des Anfangs und des Endes des Striches liegen.
Bogen:	Teilkreis, der nicht vom Benutzer erzeugt und verändert werden kann.

Punkt, Linie und Dreiecke bzw. Vierecke bauen aufeinander auf. Linien werden von Punkten, Flächen werden von Linien begrenzt. Werden begrenzende Elemente verändert, ändern sich die darauf aufbauenden Elemente mit. Eine Linie enthält (programmatisch) keine Informationen über Ihre Anfangs- und Endkoordinaten, außer über den Verweis auf die begrenzenden Punkte. Analoges gilt für die Flächen; die Eckpunkte der Flächen sind dabei nur als indirekte Verweise - über die begrenzenden Linien - Teil der Fläche.

Die Grundgleichungen und Eigenschaften der einzelnen Elemente werden im Folgenden beschrieben.

1.1 Punkte

Ein Punkt ist ein dreidimensionaler Vektor.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

1.2 Linien

Linien ($\vec{L}$) haben jeweils einen Anfangs- und einen Endpunkt, $\vec{p}_0$ und $\vec{p}_1$. Die Linie wird durch die Menge aller Punkte $\vec{q}$ beschrieben, die folgender Gleichung genügen:

$$\vec{q} = \vec{p}_0 + \lambda(\vec{p}_1 - \vec{p}_0)$$

Durch Einsetzen der verkürzten Schreibweise $\vec{p}_i - \vec{p}_k = \vec{p}_{ik}$ ergibt sich:

$$\boxed{\vec{q} = \vec{p}_0 + \lambda \cdot \vec{p}_{10}} \quad \lambda \in [0;1] \tag{1.2}$$

1.3 Flächen

Flächen unterteilen sich in Dreiecke und Vierecke. Vierecke müssen konvex angelegt sein, damit die zugrundeliegenden Berechnungen zu vorhersehbaren Ergebnissen führen.

1.3.1 Dreieck

Ein Dreieck ($\vec{D}$) entspricht einer Ebene, definiert durch die drei Eckpunkt $\vec{p}_0$, $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$. Das Dreieck ist die Menge aller Punkte $\vec{q}$, die folgender Gleichung genügen:

$$\vec{q} = \vec{p}_0 + \lambda(\vec{p}_1 - \vec{p}_0) + \mu(\vec{p}_2 - \vec{p}_0);$$

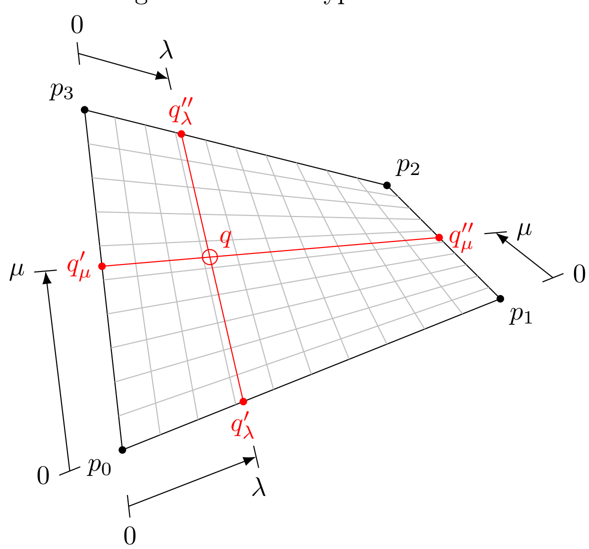
Die Wahl des Startpunktes erfolgt dabei beliebig. Zur Verkürzung der Schreibweise setzen wir $\vec{p}_1 - \vec{p}_0 = \vec{p}_{10}$ und $\vec{p}_2 - \vec{p}_0 = \vec{p}_{20}$:

$$\boxed{\vec{q} = \vec{p}_0 + \lambda \cdot \vec{p}_{10} + \mu \cdot \vec{p}_{20}} \quad \lambda \in [0;1]; \mu \in [0;(1-\lambda)] \tag{1.3}$$

1.3.2 Viereck

Ein Viereck ($\vec{V}$) wird als hyperboles Paraboloid modelliert. Alle Punkte $\vec{q}$ der Fläche liegen auf der Verbindunglinie zweier Punkte auf sich gegenüberliegenden Seiten des Vierecks, die zum jeweiligen Anfangspunkt den gleichen relativen Abstand ($\lambda\, bzw.\, \mu$) haben. Abb. 1.1 veranschaulicht dies.

Abbildung 1.1: Viereck: hyperboles Paraboloid



$$\vec{q} = \vec{q}'_\lambda + \mu(\vec{q}''_\lambda - \vec{q}'_\lambda)$$

$$mit \begin{cases} \vec{q}'_\lambda & = \vec{p}_0 + \lambda(\vec{p}_1 - \vec{p}_0); \\ \vec{q}''_\lambda & = \vec{p}_3 + \lambda(\vec{p}_2 - \vec{p}_3); \end{cases}$$

$$=> \vec{q} = \vec{p}_0 + \lambda(\vec{p}_1 - \vec{p}_0) + \mu\{\vec{p}_3 + \lambda(\vec{p}_2 - \vec{p}_3) - [\vec{p}_0 + \lambda(\vec{p}_1 - \vec{p}_0)]\}$$

Durch Umstellen und Einsetzen der verkürzten Schreibweise $\vec{p}_i - \vec{p}_k = \vec{p}_{ik}$ ergibt sich:

$$\boxed{\vec{q} = \vec{p}_0 + \lambda \cdot \vec{p}_{10} + \mu \cdot \vec{p}_{30} + \lambda\mu \cdot (\vec{p}_{01} + \vec{p}_{23})} \quad \lambda, \mu \in [0;1] \tag{1.4}$$

1.3.3 Lage eines Punktes auf einer Fläche

Ist die Lage eines Punktes in zwei Dimensionen, z. B. q_x und q_y bekannt, kann die dritte Koordinate q_z so ermittelt werden, dass der Punkt in einer betrachteten Fläche zu liegen kommt. Das Problem beinhaltet die drei unbekannte Größen λ, $\mu\, und\, q_z$. Die Flächengleichungen Gleichung (1.3) und Gleichung (1.4) sind tatsächlich eine verkürzte Schreibweise für drei Gleichungen, für jede Raumdimension eine. Daraus lässt sich eine Gleichungssystem aufstellen, das es erlaubt die *Unbekannten* zu ermitteln.

Punkt in Dreieck

Das Gleichungssystem für einen Punkt im Dreieck lautet (Unbekannte sind fett gedruckt):

$$q_x = p_{0x} + \boldsymbol{\lambda} \cdot p_{10x} + \boldsymbol{\mu} \cdot p_{20x} \tag{1.5}$$

$$q_y = p_{0y} + \boldsymbol{\lambda} \cdot p_{10y} + \boldsymbol{\mu} \cdot p_{20y} \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{q_z} = p_{0z} + \boldsymbol{\lambda} \cdot p_{10z} + \boldsymbol{\mu} \cdot p_{20z} \tag{1.7}$$

Die Gleichungen 1.5 und 1.6 sind unabhängig von q_z

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} p_{10x} & p_{20x} \\ p_{10y} & p_{20y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qp_{0x} \\ qp_{0y} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

wobei $\vec{qp}_0 = \vec{q} - \vec{p}_0$.

Durch Lösen der Gleichung (1.8) ergeben sich die Flächenparameter λ_q und μ_q bei Punkt $\vec{q}$.

$$\lambda_q = \frac{p_{20x} \cdot qp_{0y} - p_{20y} \cdot qp_{0x}}{p_{20x} \cdot p_{10y} - p_{20y} \cdot p_{10x}} = \frac{(\vec{p}_{20} \times \vec{qp}_0)_z}{(\vec{p}_{20} \times \vec{p}_{10})_z} \tag{1.9}$$

$$\mu_q = \frac{p_{10x} \cdot qp_{0y} - p_{10y} \cdot qp_{0x}}{p_{10x} \cdot p_{20y} - p_{10y} \cdot p_{20x}} = \frac{(\vec{p}_{10} \times \vec{qp}_0)_z}{(\vec{p}_{10} \times \vec{p}_{20})_z} \tag{1.10}$$

Einsetzen von Gleichung (1.9) und Gleichung (1.10) in Gleichung (1.7) liefert die Lösung für q_z.

$$\boxed{q_z = p_{0z} + \lambda_q \cdot p_{10z} + \mu_q \cdot p_{20z}} \tag{1.11}$$

Punkt in Viereck

Das Gleichungssystem für einen Punkt im Viereck lautet (Unbekannte sind fett gedruckt), mit $\vec{p}_\varnothing = \vec{p}_0 - \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3$:

$$q_x = p_{0x} + \boldsymbol{\lambda} \cdot p_{10x} + \boldsymbol{\mu} \cdot p_{30x} + \boldsymbol{\lambda\mu} \cdot p_{\varnothing x} \tag{1.12}$$

$$q_y = p_{0y} + \boldsymbol{\lambda} \cdot p_{10y} + \boldsymbol{\mu} \cdot p_{30y} + \boldsymbol{\lambda\mu} \cdot p_{\varnothing y} \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{q_z} = p_{0z} + \boldsymbol{\lambda} \cdot p_{10z} + \boldsymbol{\mu} \cdot p_{30z} + \boldsymbol{\lambda\mu} \cdot p_{\varnothing z} \tag{1.14}$$

Auflösen von Gleichung (1.12) nach μ ergibt, mit $q_x - p_{0x} = qp_{0x}$:

$$\mu = \frac{qp_{0x} - \lambda \cdot p_{10x}}{p_{30x} + \lambda \cdot p_{\varnothing x}} \tag{1.15}$$

Gleichung (1.15) wird in Gleichung (1.13) eingesetzt und die Gleichung nach λ aufgelöst.

$$\begin{aligned}
0 = \quad & qp_{0y} - \lambda \cdot p_{10y} - p_{30y}\frac{qp_{0x} - \lambda \cdot p_{10x}}{p_{30x} + \lambda \cdot p_{\varnothing x}} - \lambda \cdot p_{\varnothing y}\frac{qp_{0x} - \lambda \cdot p_{10x}}{p_{30x} + \lambda \cdot p_{\varnothing x}} \\
\iff 0 = \quad & (\lambda \cdot p_{10x} - qp_{0x})(\lambda \cdot p_{\varnothing y} + p_{30y}) - (\lambda \cdot p_{10y} - qp_{0y})(\lambda \cdot p_{\varnothing x} + p_{30x}) \\
\iff 0 = \quad & \lambda^2 \cdot (p_{10x} \cdot p_{\varnothing y} - p_{10y} \cdot p_{\varnothing x}) + \\
& \lambda \cdot [p_{10x} \cdot p_{30y} - p_{10y} \cdot p_{30x} - (qp_{0x} \cdot p_{\varnothing y} - qp_{0y} \cdot p_{\varnothing x})] + \\
& p_{30x} \cdot qp_{0y} - p_{30y} \cdot qp_{0x}
\end{aligned}$$

λ ergibt sich damit zu:

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \frac{(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a}} \quad mit \begin{cases} a = (p_{10} \times p_{\varnothing})_z \\ b = (p_{10} \times p_{30})_z - (qp_0 \times p_{\varnothing})_z \\ c = (p_{30} \times qp_0)_z \end{cases} \tag{1.16}$$

bzw.

$$\boxed{\lambda = -\frac{c}{b}} \quad wenn \quad a = 0; b \neq 0; \tag{1.17}$$

1.3.4 Gefälle

Das Gefälle einer Ebene $\vec{E}$ definiert sich als Höhenänderung bezogen auf eine Grundlänge. Das Gefälle kann somit nur mit Bezug auf eine Grundebene definiert werden, in pratischer Anwendung ist dies üblicherweise die Horizontale, d. h. die Bezugsebene, deren Flächennormale, die Projektionsachse, mit der z-Achse colinear ist. Der Betrag des Gefälles ist weiter abhängig von der betrachteten Richtung im Grundriss. Es lässt sich durch Verschneidung der Ebene $\vec{E}$ mit der, durch die Richtung und die Flächennormale der Grundebene aufgespannten Ebene ermitteln.

Gefälle aus Flächennormale $\vec{n_0}$

Die Flächennormale steht senkrecht auf der Ebene $\vec{E}$; das Hauptgefälle[1] liegt auf der Schnittgeraden dieser Ebene $\vec{E}$ und der von der Projektionsachse und

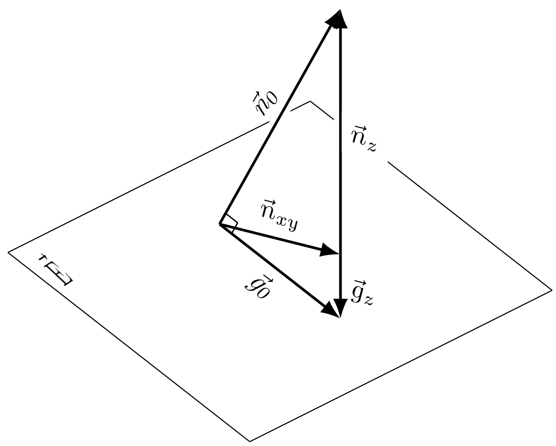
[1] Das Hauptgefälle liegt rechtwinklig zu der Richtung ohne Gefälle auf einer Ebene; die ist die Richtung der Schnittgeraden von Ebene unf Bezugs- / Projektionsebene

der Ebenennormalen aufgespannten Ebene. In Abb. 1.2 ist dies die z-Achse; der Übersichtlichkeit halber ist diese hier nicht dargestellt.

Die Flächennormale wird normiert ($\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|n|}$), weil diese Form für viele Folgeberechnungen benötigt wird, und kann in zwei Vektoren aufgeteilt werden (siehe Abb. 1.2):

$$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n_z \end{pmatrix} = \vec{n}_{xy,0} + \vec{n}_{z,0}$$

Abbildung 1.2: Gefälle einer Ebene



Wie in der Abbildung Abb. 1.2 ersichtlich, ist der Gefällevektor $\vec{g}_0$ die Summe der Vektoren $\vec{n}_{x,y}$ und $\vec{g}_z$. Gleichzeitig ist das Skalarprodukt der Normalen $\vec{n}_0$ und des Gefällevektors $\vec{g}_0$ gleich Null, da die Vektoren rechtwinklig zueinander stehen - die Normale ist *per definitionem* rechtwinklig zur Ebene, der Gefällevektor liegt *in* der Ebene!

$$\vec{g}_0 = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ g_z \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

$$\vec{g}_0 \cdot \vec{n}_0 = n_x \cdot g_x + n_y \cdot g_y + n_z \cdot g_z = 0 \tag{1.19}$$

Durch Kombination von Gleichung (1.18) und Gleichung (1.19) ergibt sich:

$$n_x \cdot n_x + n_y \cdot n_y + n_z \cdot g_z = n_x^2 + n_y^2 + n_z \cdot g_z = 0$$

$$\boxed{g_z = -\frac{(n_x^2 + n_y^2)}{n_z}} \tag{1.20}$$

Der Betrag des Gefälles g ist:

$$g = \frac{g_z}{|\vec{n}_{xy}|} = -\frac{(n_x^2 + n_y^2)}{n_z} \cdot \frac{1}{\sqrt{(n_x^2 + n_y^2)}}$$

$$\boxed{g = -\frac{\sqrt{(n_x^2 + n_y^2)}}{n_z}} \tag{1.21}$$

Analoges ergibt sich für Projektion entlang der x- bzw. y-Achse.

Normale des Dreiecks

Weil das Dreieck eine Ebene darstellt, ist seine Normale in jedem Punkt $\vec{q}$ gleich. Die Normale errechnet sich aus dem Kreuzprodukt zweier voneinander linear unabhängiger Richtungsvektoren, die in der Fläche liegen. Setzt man für den ersten Richtungsvektor $\vec{r}_0$ $\lambda = 1$ und $\mu = 0$ und für den zweiten Vektor $\vec{r}_1$ $\lambda = 0$ und $\mu = 1$ erhält man zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= \vec{p}_{10} \\ \vec{r}_1 &= \vec{p}_{20} \end{aligned}$$

Daraus kann direkt die Normale errechnet werden:

$$\boxed{\vec{n} = \vec{r}_0 \times \vec{r}_1 = \vec{p}_{10} \times \vec{p}_{20}} \tag{1.22}$$

Normale eines Vierecks

Das Gefälle des Vierecks ist im allgemeinen nicht konstant über die Fläche hinweg. Entlang der *Gitterlinien* eines hyperbolen Paraboloids jedoch, bei denen je einer der Flächenparameter λ oder μ konstant ist, ist auch das Gefälle konstant. Bei gegebenem λ und μ ergibt sich die Flächennormale im Punkt $\vec{q}$ aus dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren $\vec{r}_\lambda$ und $\vec{r}_\mu$, wie aus Abb. 1.3 ersichtlich.

$$\vec{n} = \vec{r}_\lambda \times \vec{r}_\mu$$

$$mit \begin{cases} \vec{r}_\lambda & = \vec{q}_\lambda'' - \vec{q}_\lambda' \\ \vec{r}_\mu & = \vec{q}_\mu'' - \vec{q}_\mu' \end{cases}$$

Somit ergibt sich nach längerer Rechnung, mit $\vec{p}_\varnothing = \vec{p}_0 - \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3$

$$\boxed{\vec{n} = (\vec{p}_{10} + \mu \cdot \vec{p}_\varnothing) \times (\vec{p}_{30} + \lambda \cdot \vec{p}_\varnothing)} \tag{1.23}$$

Abbildung 1.3: Flächennormale des Vierecks im Punkt $\vec{q}$