Lektion 07

Vektoren und Matrizen

$x := \langle 1\ , 2, 3\rangle$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

$y := \langle 4|5|6\rangle$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

$y \cdot x$

Error, (in rtable/Product) invalid arguments

$y.x$

$$32 \tag{1.3}$$

Was ist x.y ?
(A) Ein Skalar
(B) Ein Vektor mit 3 Elementen
(C) Eine Matrix mit 3x3 Elementen
(D) Ein Syntaxfehler

$x.y$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

$G := Matrix(3, 3, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

$$A := \langle \langle 1\ |2\ |3\rangle,\\ \langle 4\ |5\ |6\rangle,\\ \langle 7\ |\ 8\ |\ 9\rangle\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

$A.x$

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

$y.A$

$$\begin{bmatrix} 66 & 81 & 96 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

$B := \langle \langle -1, 1, -1 \rangle \mid$
$\quad \langle a, -1, 1 \rangle \mid$
$\quad \langle -1, 1, -1 \rangle \rangle$

$$\begin{bmatrix} -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

$\langle A | B \rangle$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & a & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

$\langle A, B \rangle$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

$Matrix(3, shape = identity)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

$C := A + 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

C^{-1}

$$\begin{bmatrix} -6 & -2 & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

Welches Produkt ist gleich der 3x3-Einheitsmatrix?
(A) $C.C^{-1}$
(B) $C^{-1}.C$
(C) beide
(D) keins von beiden
$C.C^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

$C^{-1}.C$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

A^{-1}

Error, (in rtable/Power) singular matrix

$hilbert := Matrix\left(120, (i, j) \rightarrow \frac{1}{i+j-1}\right)$

$$\begin{bmatrix} \textit{120 x 120 Matrix} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

$inv\_hilbert := hilbert^{-1}$

$$\left[\begin{array}{c} \textit{120 x 120 Matrix} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{array}\right] \qquad (1.19)$$

$inv\_hilbert[30, 41]$

$$-3708677336057052787372383365918132771173062300354196432166011229558574424031178446404302193322219129563737282150921789\backslash 7484820480000 \qquad (1.20)$$

$hilbert\_f := Matrix\left(120, (i, j) \rightarrow \frac{1}{i+j-1}, datatype = float[8]\right)$

$$\left[\begin{array}{c} \textit{120 x 120 Matrix} \\ \textit{Data Type: } float_8 \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{array}\right] \qquad (1.21)$$

$inv\_hilbert\_f := hilbert\_f^{-1}$

$$\left[\begin{array}{c} \textit{120 x 120 Matrix} \\ \textit{Data Type: } float_8 \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{array}\right] \qquad (1.22)$$

$evalf(inv\_hilbert\_f[30, 41])$

$$3.84625033655381\ 10^{16} \qquad (1.23)$$

$evalf(inv\_hilbert[30, 41])$

$$-3.708677336\ 10^{130} \qquad (1.24)$$

Was halten Sie für die Ursache dieser Diskrepanz?
(A) Ungenügende Rechengenauigkeit bei der Fließkommarechnung
(B) Fehler in Maple
(C) Hilbertmatrix ist nicht invertierbar
(D) Beide Ergebnisse sind richtig

$with(LinearAlgebra):$
$evalf(Determinant(hilbert))$

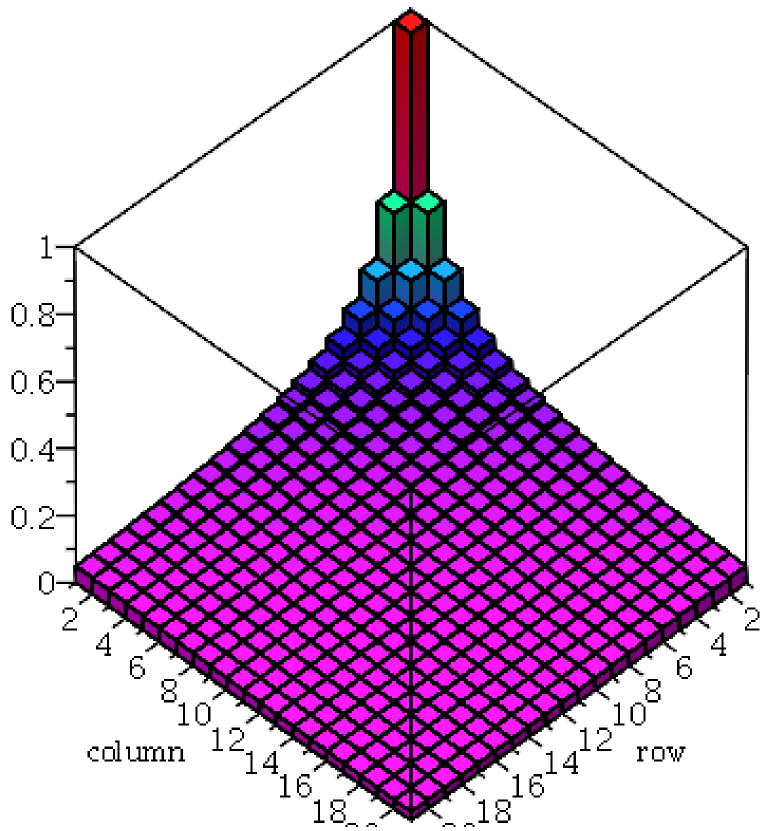
$$2.555492795\ 10^{-8575} \qquad (1.25)$$

Matrixplots

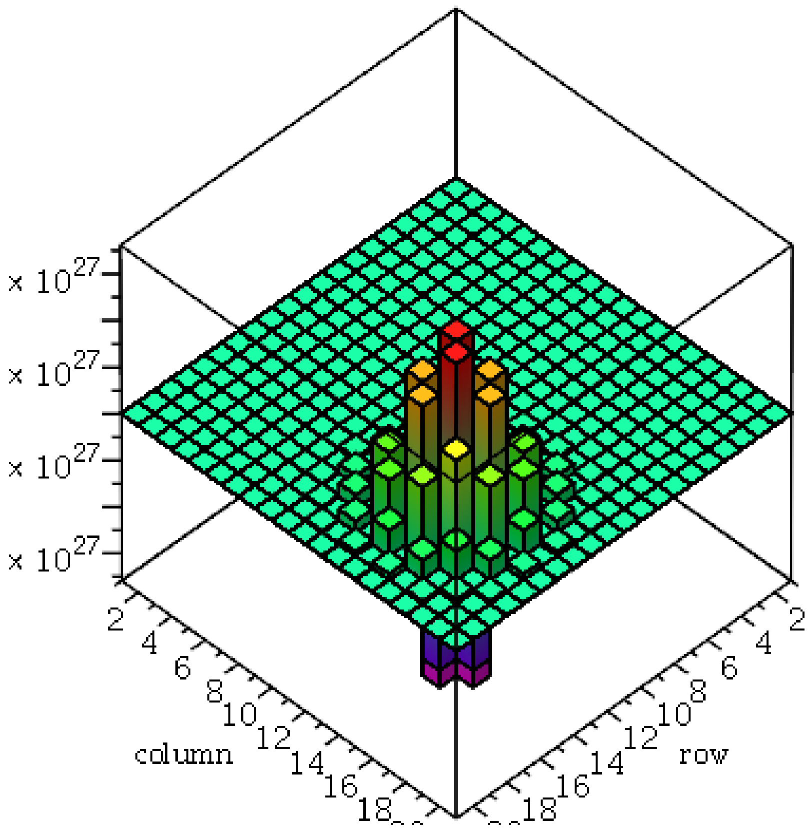
$$H := Matrix\left(20, (i, j) \rightarrow \frac{1}{i+j-1}\right)$$

$$\left[\begin{array}{c} \textit{20 x 20 Matrix} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{array}\right] \quad \textbf{(2.1)}$$

$with(plots):$
$matrixplot(H, heights = histogram, shading = zhue)$



$matrixplot(H^{-1}, heights = histogram, shading = zhue)$



Lineare Gleichungssysteme

$restart$

$with(LinearAlgebra):$

$g1 := x + y - z = 1$

$$x + y - z = 1 \tag{3.1}$$

$g2 := 2 \cdot x + y - 3 \cdot z = 0$

$$2\,x + y - 3\,z = 0 \tag{3.2}$$

$g3 := x - 2 \cdot z = -1$

$$x - 2\,z = -1 \tag{3.3}$$

$Gls := [g1, g2, g3]$

$$[x + y - z = 1,\ 2\,x + y - 3\,z = 0,\ x - 2\,z = -1] \tag{3.4}$$

$vars := [x, y, z]$

$$[x, y, z] \tag{3.5}$$

$Lsg := solve(Gls, vars)$

$$[[x = -1 + 2\,z,\ y = 2 - z,\ z = z]] \tag{3.6}$$

eval(*Gls*, *Lsg*[1])

$$[1 = 1,\ 0 = 0,\ -1 = -1] \tag{3.7}$$

A, *b* := *GenerateMatrix*(*Gls*, *vars*)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

B := *GenerateMatrix*(*Gls*, *vars*, *augmented* = *true*)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Rank(*A*)

$$2 \tag{3.10}$$

Rank(*B*)

$$2 \tag{3.11}$$

LinearSolve(*A*, *b*)

$$\begin{bmatrix} -1 + 2\,\_t_3 \\ 2 - \_t_3 \\ \_t_3 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

ReducedRowEchelonForm(*B*)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Zeilenweise Manipulation

$A := Matrix(\langle\langle 2\cdot x + 2 \mid 2\cdot y - 2\rangle,$
$\langle 2\cdot x + 2 \mid -2\cdot y + 2\rangle,$
$\langle y - 1 \mid x + 1\rangle\rangle)$

$$\begin{bmatrix} 2\,x + 2 & 2\,y - 2 \\ 2\,x + 2 & -2\,y + 2 \\ y - 1 & x + 1 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Rank(*A*)

$$2 \tag{4.2}$$

$ReducedRowEchelonForm(A)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.3)$$

$A1 := RowOperation(A, [2, 1], -1)$

$$\begin{bmatrix} 2x+2 & 2y-2 \\ 0 & -4y+4 \\ y-1 & x+1 \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

$A2 := RowOperation\left(A1, [1, 2], \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{bmatrix} 2x+2 & 0 \\ 0 & -4y+4 \\ y-1 & x+1 \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

$eval(A2, x = -1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4y+4 \\ y-1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.6)$$

$eval(A2, \{x = -1, y = 1\})$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.7)$$

Normalformen

$A := \langle \langle 4 \mid -6 \mid 2 \rangle, \langle 2 \mid -4 \mid 2 \rangle, \langle 2 \mid -6 \mid 4 \rangle \rangle$

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \qquad (5.1)$$

$Eigenvalues(A)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (5.2)$$

$ew, T := Eigenvectors(A)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

$J := Matrix(ew, shape = diagonal)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

$T.J.T^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

$G := Matrix(2, [1, 1, 0, 1])$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

$Eigenvalues(G)$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

$Eigenvectors(G)$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

$M := \langle\langle -14 \mid -18 \mid 3 \mid 11 \mid -1 \mid 16 \rangle,$
$\langle -28 \mid -36 \mid 18 \mid 24 \mid -6 \mid 40 \rangle,$
$\langle -134 \mid -182 \mid 90 \mid 126 \mid -16 \mid 198 \rangle,$
$\langle -12 \mid -12 \mid 2 \mid 10 \mid -2 \mid 8 \rangle,$
$\langle 190 \mid 254 \mid -126 \mid -178 \mid 24 \mid -278 \rangle,$
$\langle 46 \mid 62 \mid -32 \mid -46 \mid 4 \mid -66 \rangle\rangle$

$$\begin{bmatrix} -14 & -18 & 3 & 11 & -1 & 16 \\ -28 & -36 & 18 & 24 & -6 & 40 \\ -134 & -182 & 90 & 126 & -16 & 198 \\ -12 & -12 & 2 & 10 & -2 & 8 \\ 190 & 254 & -126 & -178 & 24 & -278 \\ 46 & 62 & -32 & -46 & 4 & -66 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

$J,\ T := JordanForm(M, output = ['J','Q'])$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\,I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & -10-24\,I & -10+24\,I & -72 & 46 & 15 \\ 3 & -7+17\,I & -7-17\,I & 144 & -128 & 11 \\ 0 & \frac{41}{2}-\frac{3}{2}\,I & \frac{41}{2}+\frac{3}{2}\,I & 0 & 36 & -41 \\ 6 & -17-7\,I & -17+7\,I & 0 & -72 & 28 \\ 0 & -\frac{7}{2}+\frac{17}{2}\,I & -\frac{7}{2}-\frac{17}{2}\,I & -144 & 128 & 7 \\ 3 & -12+5\,I & -12-5\,I & 72 & -46 & 21 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.10)}$$

$T.J.T^{-1} - M$

Welcher der Spaltenvektoren sind Eigenvektoren von M?

(A) alle

(B) alle bis auf den vierten

(C) alle bis auf den vierten und den fünften

(D) alle bis auf den fünften und den sechsten

$e4 := SubMatrix(T, 1..6, 4..4)$

$$\begin{bmatrix} -72 \\ 144 \\ 0 \\ 0 \\ -144 \\ 72 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.11)}$$

$M.e4 - 4 \cdot e4$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.12)}$$

$e5 := SubMatrix(T, 1..6, 5..5)$

$$\begin{bmatrix} 46 \\ -128 \\ 36 \\ -72 \\ 128 \\ -46 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

$M.e5 - 4 \cdot e5$

$$\begin{bmatrix} -72 \\ 144 \\ 0 \\ 0 \\ -144 \\ 72 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

$e6 := SubMatrix(T, 1..6, 6..6)$

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 11 \\ -41 \\ 28 \\ 7 \\ 21 \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

$M.e6 - 4 \cdot e6$

$$\begin{bmatrix} 46 \\ -128 \\ 36 \\ -72 \\ 128 \\ -46 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

$M.e6 = 4 \cdot e6 + e5$

$$\begin{bmatrix} 106 \\ -84 \\ -128 \\ 40 \\ 156 \\ 38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106 \\ -84 \\ -128 \\ 40 \\ 156 \\ 38 \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

Andere Operationen mit Matrizen

$restart$
$with(LinearAlgebra):$
$A := Matrix(3, 3, [seq(j, j = 1..9)]):$
$A, Transpose(A)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

$a := \langle a\_1, a\_2, a\_3 \rangle$

$$\begin{bmatrix} a\_1 \\ a\_2 \\ a\_3 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

$b := \langle b\_1, b\_2, b\_3 \rangle$

$$\begin{bmatrix} b\_1 \\ b\_2 \\ b\_3 \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

$a.b$

$$\overline{a\_1}\, b\_1 + \overline{a\_2}\, b\_2 + \overline{a\_3}\, b\_3 \tag{6.4}$$

$DotProduct(a, b)$

$$\overline{a\_1}\, b\_1 + \overline{a\_2}\, b\_2 + \overline{a\_3}\, b\_3 \tag{6.5}$$

$DotProduct(a, b, conjugate = false)$

$$a\_1\, b\_1 + a\_2\, b\_2 + a\_3\, b\_3 \tag{6.6}$$

$a.b$ assuming $real$

$$a\_1\, b\_1 + a\_2\, b\_2 + a\_3\, b\_3 \tag{6.7}$$