Lektion 10

Hessematrix, Divergenz und Rotation

restart
with(*VectorCalculus*) :
SetCoordinates(*cartesian*[*x*, *y*, *z*])

$$cartesian_{x,\, y,\, z} \tag{1.1}$$

V := *VectorField*(⟨*v1*(*x*, *y*, *z*), *v2*(*x*, *y*, *z*), *v3*(*x*, *y*, *z*)⟩)

$$(v1(x, y, z))\bar{e}_x + (v2(x, y, z))\bar{e}_y + (v3(x, y, z))\bar{e}_z \tag{1.2}$$

BasisFormat(*false*) :
V

$$\begin{bmatrix} v1(x, y, z) \\ v2(x, y, z) \\ v3(x, y, z) \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Divergence(*V*)

$$\frac{\partial}{\partial x}\, v1(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y}\, v2(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z}\, v3(x, y, z) \tag{1.4}$$

c := *Curl*(*V*)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\, v3(x, y, z) - \left(\frac{\partial}{\partial z}\, v2(x, y, z)\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\, v1(x, y, z) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\, v3(x, y, z)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\, v2(x, y, z) - \left(\frac{\partial}{\partial y}\, v1(x, y, z)\right) \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

g := *Gradient*(*f*(*x*, *y*, *z*))

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\, f(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial y}\, f(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z}\, f(x, y, z) \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Curl(*g*)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

$Divergence(c)$

$$0 \tag{1.8}$$

$H := Hessian(f(x, y, z))$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f(x, y, z) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} f(x, y, z) \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, y, z) \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

$with(LinearAlgebra) :$
$Transpose(H) - H$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

$Jacobian(Gradient(f(x, y, z)))$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f(x, y, z) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} f(x, y, z) \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, y, z) \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

$Jacobian(Transpose(Gradient(f(x, y, z))))$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f(x, y, z) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} f(x, y, z) \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} f(x, y, z) & \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, y, z) \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

$Gradient(Gradient(f(x, y, z)))$

```
Error, invalid input: VectorCalculus:-Gradient expects its 1st
argument, f, to be of type algebraic, but received Vector(3, {
(1) = diff(f(x, y, z), x), (2) = diff(f(x, y, z), y), (3) =
diff(f(x, y, z), z)}, attributes = [vectorfield, coords =
```

cartesian[x, y, z]])

Definitheit

$restart$
$with(LinearAlgebra):$
$A := \langle\langle -7|2|3\rangle, \langle 2|-5|2\rangle, \langle 3|2|-5\rangle\rangle$

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Eine symmetrische Matrix A heißt "positiv definit", wenn
(1) sie nur positive Einträge hat
(2) alle Eigenwerte positiv sind
(3) kein Eigenwert negativ ist
(4) mindestens ein Eigenwert positiv ist

$IsDefinite(A, query = positive\_definite)$
$IsDefinite(A, query = negative\_definite)$

$$true \tag{2.2}$$

Böse Falle:
$IsDefinite(A)$

$$false \tag{2.3}$$

Eine symmetrische Matrix A heißt "positiv semidefinit", wenn
(1) sie nur positive Einträge hat
(2) alle Eigenwerte positiv sind
(3) kein Eigenwert negativ ist
(4) mindestens ein Eigenwert positiv ist

for n **to** 3 **do**
  $B := SubMatrix(A, 1..n, 1..n);$
  $Determinant(B);$
 end do

$$\begin{bmatrix} -7 \end{bmatrix}$$

$$-7$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$31$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$-58 \tag{2.4}$$

Das Hurwitz-Kriterium sagt, dass eine symmetrische Matrix genau dann positiv definit ist, wenn
(1) ihre Determinante positiv ist
(2) alle ihre Unterdeterminanten positiv sind
(3) die Determinante positiv und keine Unterdeterminante negativ ist

Das Hurwitz-Kriterium sagt, dass eine symmetrische Matrix genau dann negativ definit ist, wenn
(1) ihre Determinante negativ ist
(2) alle ihre Unterdeterminanten negativ sind
(3) die geraden Unterdeterminanten positiv und die ungeraden negativ sind
(4) die geraden Unterdeterminanten negativ und die ungeraden positiv sind
(5) es gibt kein Hurwitz-Kriterium für negativ definite Matrizen

$Eigenvalues(A)$

$$\begin{aligned}&\Bigg[\Bigg[\frac{1}{3}\left(271+3\,\mathrm{I}\sqrt{10326}\right)^{1/3}+\frac{55}{3\left(271+3\,\mathrm{I}\sqrt{10326}\right)^{1/3}}-\frac{17}{3}\Bigg],\\
&\quad\Bigg[-\frac{1}{6}\left(271+3\,\mathrm{I}\sqrt{10326}\right)^{1/3}-\frac{55}{6\left(271+3\,\mathrm{I}\sqrt{10326}\right)^{1/3}}-\frac{17}{3}\\
&\quad+\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\left(271+3\,\mathrm{I}\sqrt{10326}\right)^{1/3}-\frac{55}{3\left(271+3\,\mathrm{I}\sqrt{10326}\right)^{1/3}}\right)\Bigg],\\
&\quad\Bigg[-\frac{1}{6}\left(271+3\,\mathrm{I}\sqrt{10326}\right)^{1/3}-\frac{55}{6\left(271+3\,\mathrm{I}\sqrt{10326}\right)^{1/3}}-\frac{17}{3}\\
&\quad-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\left(271+3\,\mathrm{I}\sqrt{10326}\right)^{1/3}-\frac{55}{3\left(271+3\,\mathrm{I}\sqrt{10326}\right)^{1/3}}\right)\Bigg]\Bigg]\end{aligned} \tag{2.5}$$

$map(evalc, Eigenvalues(A))$

$$\begin{aligned}&\Bigg[\Bigg[\frac{2}{3}\sqrt{55}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{3}{271}\sqrt{10326}\right)\right)-\frac{17}{3}\Bigg],\\
&\quad\Bigg[-\frac{1}{3}\sqrt{55}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{3}{271}\sqrt{10326}\right)\right)-\frac{17}{3}\\
&\quad-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{55}\sin\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{3}{271}\sqrt{10326}\right)\right)\Bigg],\\
&\quad\Bigg[-\frac{1}{3}\sqrt{55}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{3}{271}\sqrt{10326}\right)\right)-\frac{17}{3}\\
&\quad+\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{55}\sin\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{3}{271}\sqrt{10326}\right)\right)\Bigg]\Bigg]\end{aligned} \tag{2.6}$$

$evalf((\mathbf{2.6}))$

$$\begin{bmatrix} -0.916959829 \\ -9.230446935 \\ -6.852593235 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$f := \langle x|y|z\rangle . A . \langle x, y, z\rangle$

$$(-7\,x+2\,y+3\,z)\,x+(2\,x-5\,y+2\,z)\,y+(3\,x+2\,y-5\,z)\,z \tag{2.8}$$

$f := expand(f)$

$$-7\,x^2+4\,x\,y+6\,x\,z-5\,y^2+4\,y\,z-5\,z^2 \tag{2.9}$$

(2.10)

(2.11)

$expand\left(eval\left(f, x = a+\frac{2}{7}\cdot y\right)\right)$

$$-7\,a^2-\frac{31}{7}\,y^2+6\,z\,a+\frac{40}{7}\,y\,z-5\,z^2 \tag{2.12}$$

$expand\left(eval\left((\mathbf{2.12}), y = b+\frac{20}{31}\cdot z\right)\right)$

$$-7\,a^2-\frac{31}{7}\,b^2-\frac{685}{217}\,z^2+6\,z\,a \tag{2.13}$$

$expand\left(eval\left((\mathbf{2.13}), z = c+\frac{3\cdot 217}{685}\cdot a\right)\right)$

$$-\frac{2842}{685}\,a^2-\frac{31}{7}\,b^2-\frac{685}{217}\,c^2 \tag{2.14}$$

Polarkoordinaten

$restart$

$with(VectorCalculus):$

$SetCoordinates(\mathrm{polar}[r, \mathrm{phi}])$

$$\mathrm{polar}_{r,\,\phi} \tag{3.1}$$

$f := r^2\cdot\cos(\mathrm{phi})\cdot\sin(\mathrm{phi})$

$$r^2\cos(\phi)\,\sin(\phi) \tag{3.2}$$

$Gradient(f)$

$$2\,r\cos(\phi)\,\sin(\phi)\,\bar{e}_r+\left(\frac{-r^2\sin(\phi)^2+r^2\cos(\phi)^2}{r}\right)\bar{e}_\phi \tag{3.3}$$

$g := simplify((\mathbf{3.3}))$

$$2\,r\cos(\phi)\,\sin(\phi)\,\bar{e}_r+\left(r\left(2\cos(\phi)^2-1\right)\right)\bar{e}_\phi \tag{3.4}$$

$MapToBasis(g, cartesian[x, y])$

$$\left(\frac{2\,x^2\,y}{x^2+y^2}-\left(\frac{2\,x^2}{x^2+y^2}-1\right)y\right)\bar{e}_x+\left(\frac{2\,x\,y^2}{x^2+y^2}+\left(\frac{2\,x^2}{x^2+y^2}-1\right)x\right)\bar{e}_y \tag{3.5}$$

$simplify((\mathbf{3.5}))$

$$(y)\bar{e}_x+(x)\bar{e}_y \tag{3.6}$$

$fc := eval(f, \{r=\mathrm{sqrt}(x^2+y^2), \mathrm{phi}=\arctan(y, x)\})$

$$x\,y \tag{3.7}$$

$Gradient(fc, cartesian[x, y])$

$$(y)\bar{e}_x+(x)\bar{e}_y \tag{3.8}$$

$Laplacian(f)$

$$0 \tag{3.9}$$

$Laplacian(f^2)$

$$\frac{16\,r^3\cos(\phi)^2\sin(\phi)^2+\frac{2\,r^4\sin(\phi)^4-12\,r^4\cos(\phi)^2\sin(\phi)^2+2\,r^4\cos(\phi)^4}{r}}{r} \tag{3.10}$$

$simplify(Laplacian(f^2))$

$$2\,r^2 \tag{3.11}$$

$expand(Laplacian(F(r, \mathrm{phi})))$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial r}F(r,\phi)}{r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}F(r,\phi)+\frac{\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}F(r,\phi)}{r^2} \tag{3.12}$$

$Laplacian(fc^2, cartesian[x, y])$

$$2\,x^2+2\,y^2 \tag{3.13}$$

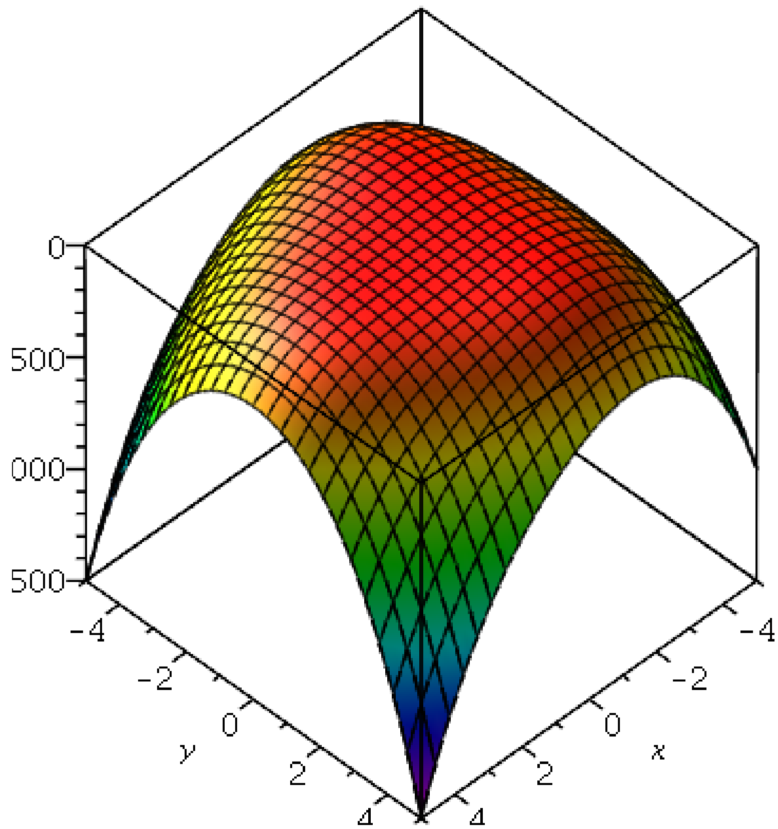
Lokale Extrema

restart

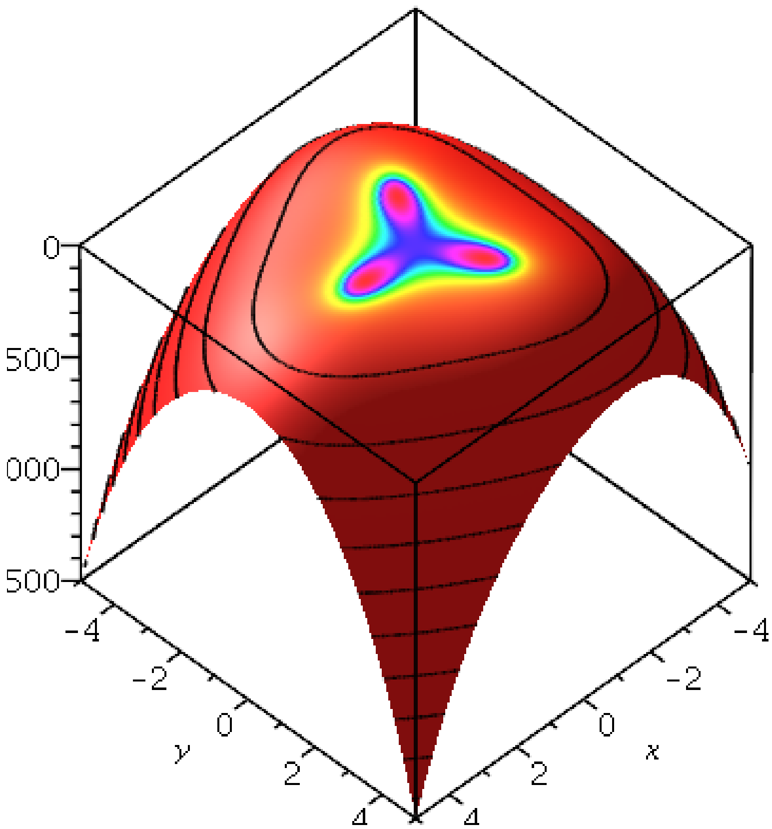
$f := -\frac{1}{2}\cdot x^4 - x^2\cdot y^2 - \frac{1}{2}\cdot y^4 + x^3 - 3\cdot x\cdot y^2$

$$-\frac{1}{2}\,x^4-x^2\,y^2-\frac{1}{2}\,y^4+x^3-3\,x\,y^2 \tag{4.1}$$

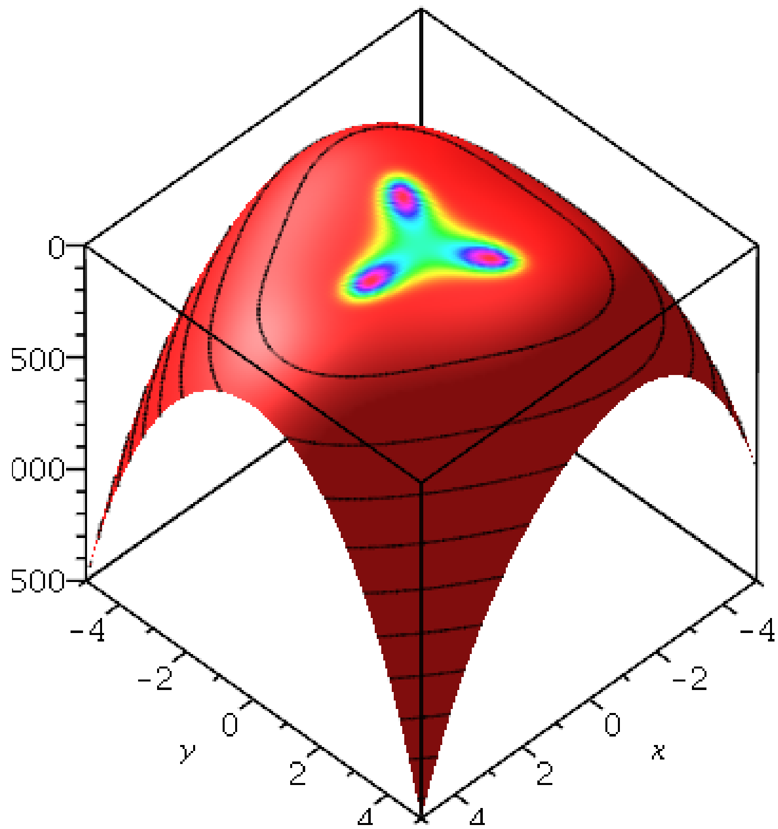
$plot3d(f, x=-5..5, y=-5..5, shading=zhue)$



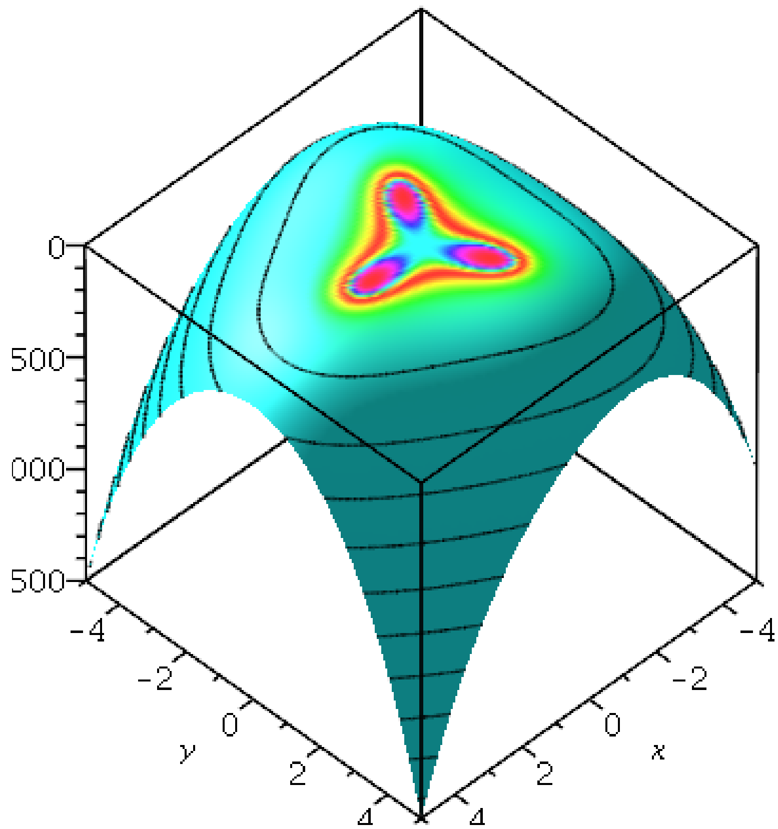
$\mathit{plot3d}(f, x = -5\,..5, y = -5\,..5, \mathit{color} = \arctan(f), \mathit{style} = \mathit{patchcontour}, \mathit{numpoints} = 30000)$



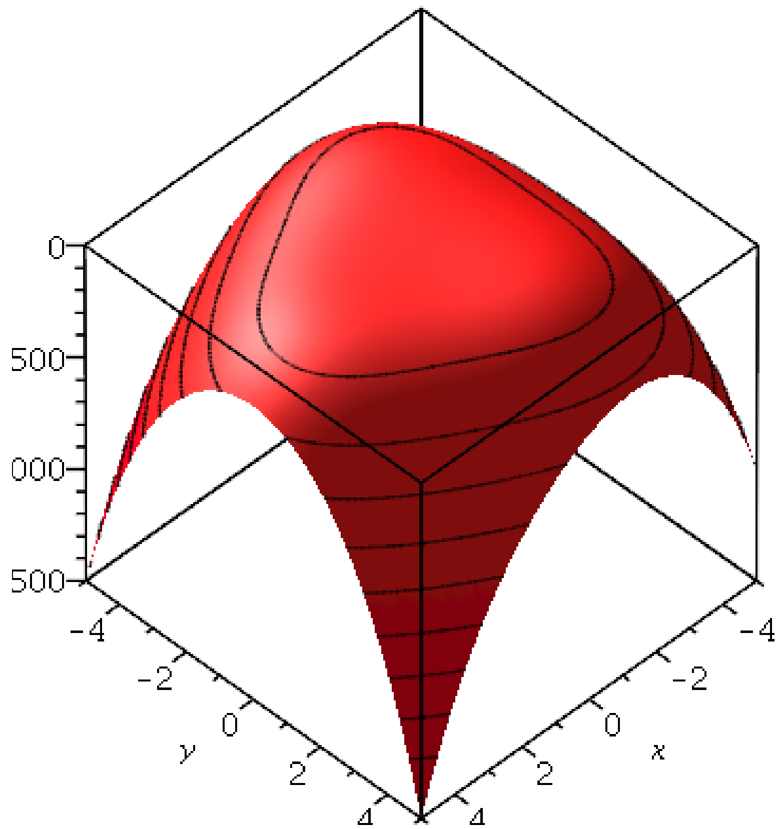
Welche der folgenden Funktionen hätte man anstelle des Arkustangens nicht wählen können?
(1) exp(x)
(2) x/(1+x*x)
(3) exp(-x)
(4) x/(1+|x|)
$plot3d(f, x = -5..5, y = -5..5, color = \exp(f), style = patchcontour, numpoints = 9000)$



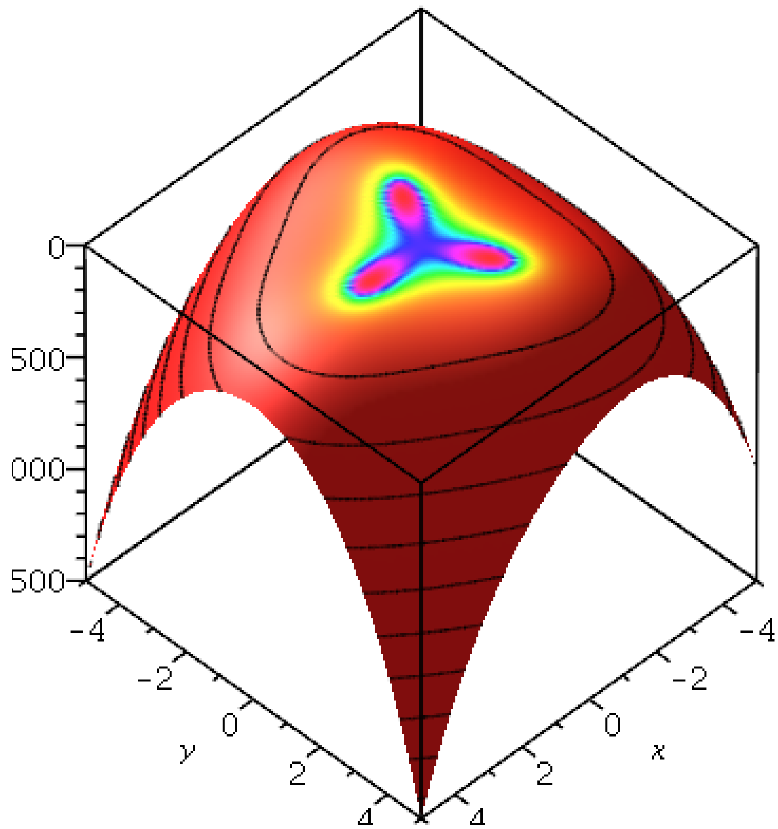
$$plot3d\left(f, x = -5..5, y = -5..5, color = \frac{f}{1+f^2}, style = patchcontour, numpoints = 9000\right)$$



$plot3d(f, x = -5 ..5, y = -5 ..5, color = \exp(-f), style = patchcontour, numpoints = 9000)$



$$plot3d\left(f, x=-5..5, y=-5..5, color=\frac{f}{1+\mathrm{abs}(f)}, style=patchcontour, numpoints=9000\right)$$



Das Verschwinden des Gradienten in (x,y)
(1) ist notwendig für die Existenz eines Extremums in (x,y)
(2) ist hinreichend für die Existenz eines Extremums in (x,y)
(3) ist notwendig und hinreichend für die Existenz eines Extremums in (x,y)

$with(VectorCalculus):$
$BasisFormat(false):$
$SetCoordinates(cartesian[x, y])$

$$cartesian_{x, y} \tag{4.2}$$

$g := Gradient(f)$

$$\begin{bmatrix} -2x^3 - 2xy^2 + 3x^2 - 3y^2 \\ -2x^2y - 2y^3 - 6xy \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$kritisch := solve(convert(g, set), Explicit)$

$$\{x = 0, y = 0\}, \left\{x = \frac{3}{2}, y = 0\right\}, \left\{x = -\frac{3}{4}, y = \frac{3}{4}\sqrt{3}\right\}, \left\{x = -\frac{3}{4}, y = -\frac{3}{4}\sqrt{3}\right\} \tag{4.4}$$

$H := Hessian(f)$

$$\begin{bmatrix} -6x^2-2y^2+6x & -4xy-6y \\ -4xy-6y & -2x^2-6y^2-6x \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Sei (x,y) ein kritischer Punkt von f. Welche Aussage ist richtig
(1) Wenn die Hessesche von f in (x,y) positiv definit ist, dann hat f in (x,y) ein striktes lokales Maximum
(2) Wenn die Hessesche von f in (x,y) negativ definit ist, dann hat f in (x,y) ein striktes lokales Maximum
(3) Wenn die Hessesche von f in (x,y) weder positiv noch negativ definit ist, dann hat f in (x,y) kein Extremum

$eval(H, kritisch[2])$

$$\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{27}{2} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$eval(H, kritisch[3])$

$$\begin{bmatrix} -\frac{45}{4} & -\frac{9}{4}\sqrt{3} \\ -\frac{9}{4}\sqrt{3} & -\frac{27}{4} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$with(LinearAlgebra) :$
$Determinant(\mathbf{(4.7)})$

$$\frac{243}{4} \quad (4.8)$$

$eval(H, kritisch[4])$

$$\begin{bmatrix} -\frac{45}{4} & \frac{9}{4}\sqrt{3} \\ \frac{9}{4}\sqrt{3} & -\frac{27}{4} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$Determinant(\mathbf{(4.9)})$

$$\frac{243}{4} \quad (4.10)$$

$Eigenvalues(\mathbf{(4.9)})$

$$\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} \\ -\frac{27}{2} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$eval(H, kritisch[1])$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

$kritisch[1]$

$$\{x = 0,\ y = 0\} \tag{4.13}$$

$mtaylor(f, \{x = 0, y = 0\})$

$$-\frac{1}{2}\, x^4 - x^2\, y^2 - \frac{1}{2}\, y^4 + x^3 - 3\, x\, y^2 \tag{4.14}$$

$factor(mtaylor(f, \{x = 0, y = 0\}, 4))$

$$x\,(x^2 - 3\, y^2) \tag{4.15}$$

$eval(f,\ y = 0)$

$$-\frac{1}{2}\, x^4 + x^3 \tag{4.16}$$

for p **in** $kritisch$ **do**
  $evalf(p[1]),\ evalf(p[2]),\ evalf(eval(f,\ p))$
 end do

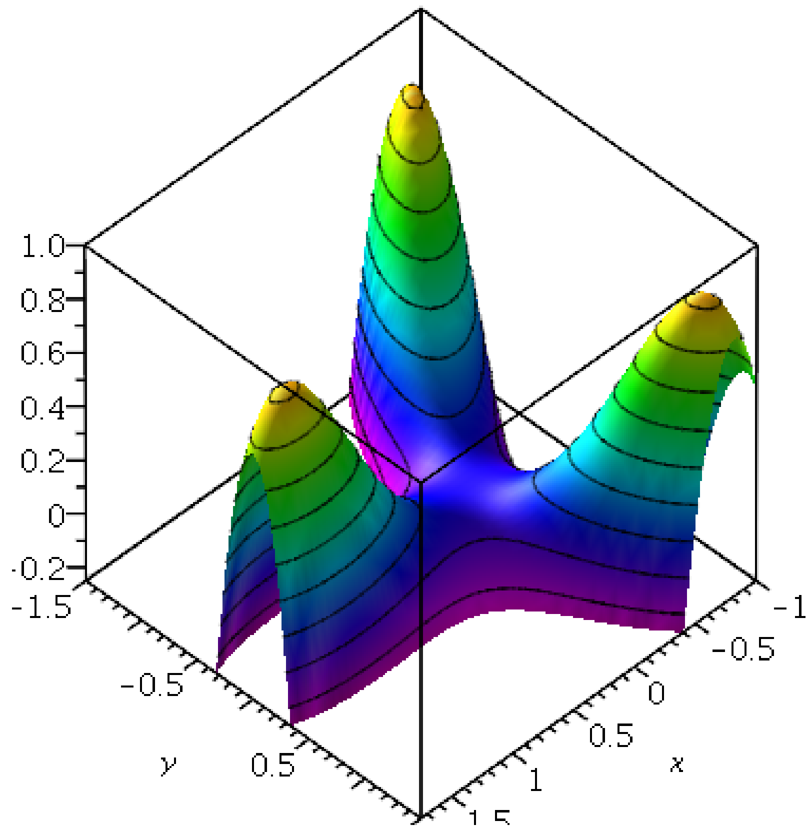
$$x = 0.,\ y = 0.,\ 0.$$

$$x = 1.500000000,\ y = 0.,\ 0.8437500000$$

$$x = -0.7500000000,\ y = 1.299038106,\ 0.8437500000$$

$$x = -0.7500000000,\ y = -1.299038106,\ 0.8437500000 \tag{4.17}$$

$plot3d(f, x = -1\,..1.75, y = -1.5\,..1.5, view = -.25\,..\,1, shading = zhue, style = patchcontour)$


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-1.5
-0.5
y
0.5
-1
-0.5
0
0.5
x
1