

北京理工大学自动化学院

自动控制系统基础

黄 坤
2015/5/8

目录

一、引言.....	1
二、系统组成.....	1
三、系统描述.....	4
3.1 系统建模.....	4
3.2 一阶惯性环节.....	8
3.3 二阶系统.....	9
四、控制器设计.....	11
4.1 系统简化.....	11
4.2 抗扰性能分析.....	13
4.3 比例控制器.....	14
4.4 比例-积分控制器	15
4-5 比例-微分控制器	16
4.6 比例-积分-微分控制器	17
五、数字控制系统.....	18
六、后记.....	21

一、引言

自动控制 旨在设计控制器来自主调节机器、设备或者生产过程，使之按照预设的规矩运作。自动控制已经成为许多科技领域的基本组成部分，例如图 1-1 所示的航天器姿态镇定。与所有其他成熟的学科分支一样，自动控制原理建立在严格的数学基础上，并且与实际应用紧密联系。

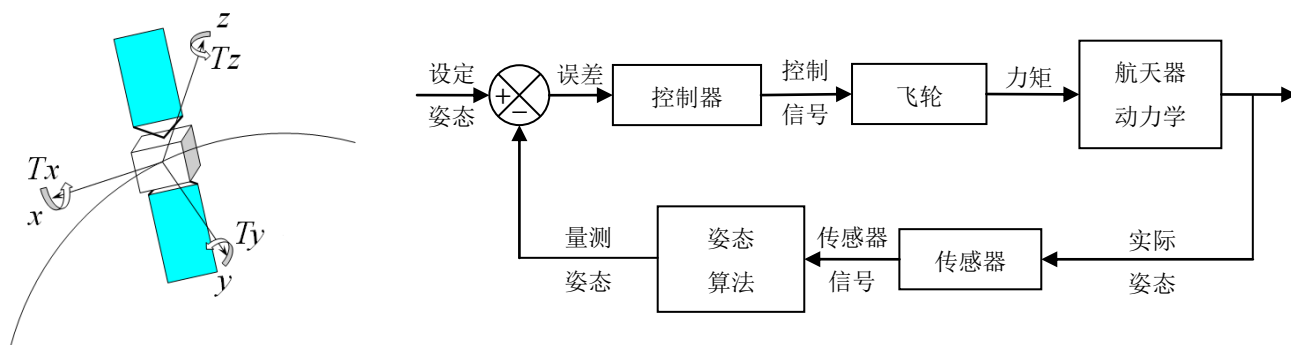


图 1-1 航天器姿态镇定

本文首先介绍自动控制系统的一般组成，然后给出系统的基本数学描述和分析方法；接下来介绍几种常见控制器的设计方法，并以直流电机的建模和控制为例介绍其应用；最后，阐述数字控制系统的设计与实现。

二、系统组成

完整的自动控制系统通常由以下几个部分组成：检测环节、控制器、执行器以及被控对象，如图 2-1 所示。检测环节（如传感器或变送器）检测系统的实际输出并将其转换为另外一种控制器可以读取的能量较低的信号，比如说弱电信号。控制器采集该信号并将它与参考输入（或设定输入）比较，计算出系统的动作误差。上述过程称为 **负反馈**。接下来，基于误差信号以及特定的控制算法，控制系向执行器输出控制信号。执行器根据控制信号（如电机）操作被控对象，使系统输出趋近参考输入。

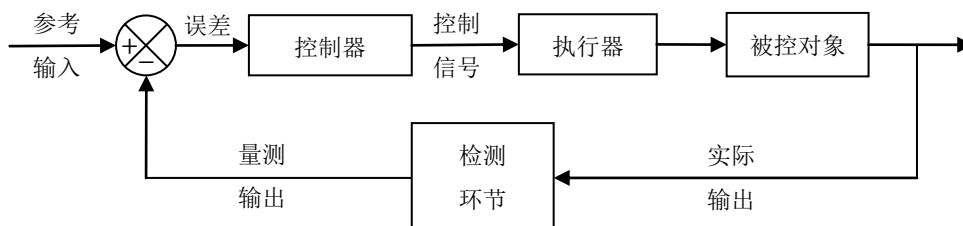


图 2-1 闭环控制系统组成

上述系统中，控制信号取决于系统输出的反馈，进而构成一个封闭的环，因而该系统常被称为 **反馈控制系统** 或 **闭环控制系统**。与之相对的，系统输出对控制信号没有影响的系统称为 **开环控制系**

统，亦即该系统中输出既没有被检测也没有被反馈以与输入相比较，如图 2-2 所示。



图 2-2 开环控制系统组成

以直流电机的转速控制系统为例。图 2-3 展示了一个开环的系统。为了通过能量较低的控制信号来控制功率较大的电机，这里将驱动电路作为执行器。驱动电路根据控制信号，如脉宽调制（Pulse Width Moderation, PWM）信号，改变电枢两端的电压，从而调整电机转速。而控制信号则根据电机的特性给出，该特性反映了不同电枢电压下实际的电机转速。

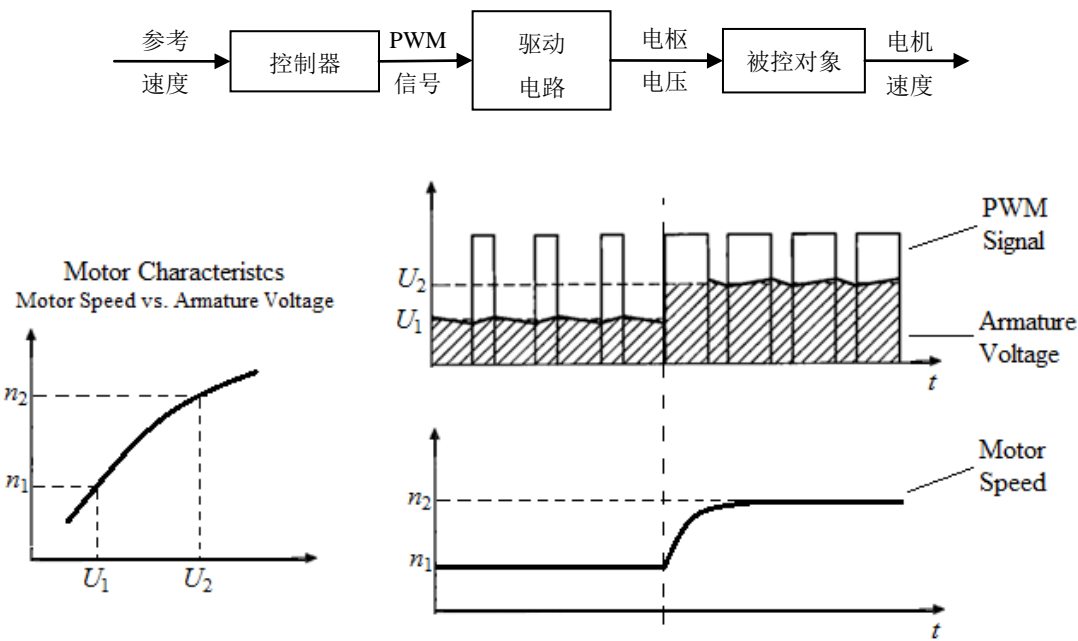


图 2-3 直流电机开环控制系统

显然，上述系统的输出将会随外界扰动及内部参数不确定性而变化。例如，当负载增加或者电力供给不足时，电机的转速将会减小。又如，由于运转时的发热，电机的内部参数将会发生变化，对控制器说来成为了不确定的系统，其输出也与之前电机特性给出的标定结果相异。

为了抑制扰动和不确定性对系统的影响，有必要构建一个闭环控制系统，从而实时根据系统输出来调整其控制量。如 2-4 所示，以光电码盘为检测环节，将速度信息转换为脉冲信号。每次采样周期内脉冲数的数量代表了电机在该段时间内转过的圈数。使用微控制器捕捉这些信号并转换为速度信息，然后与参考速度相对比，进而得到速度误差。接下来，控制器根据该误差和控制算法（如比例-积分-微分算法）输出一个控制信号，实现对电机转速的控制。

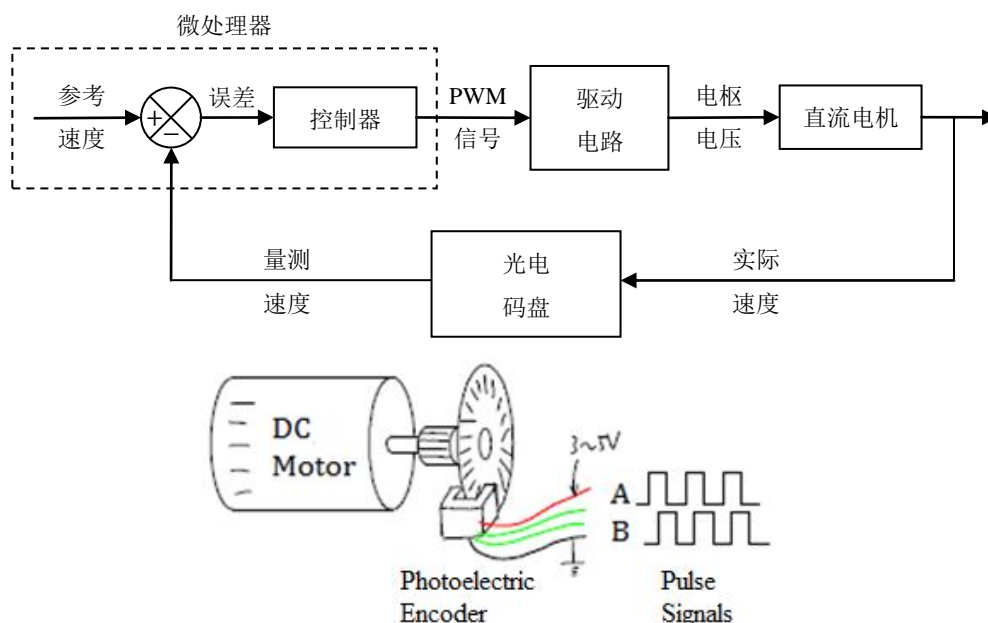


图 2-4 直流电机闭环控制系统

上述两个系统的控制信号和输出如图 2-5 所示。考察两者的启动阶段。开环系统的控制信号保持恒定，这是因为它由一个预设的控制率和标定的电机特性给出。而闭环系统的控制信号随当时的输出不断变化：一开始它达到较高的值，然后当输出趋近于设定值时，它收敛至一个稳定的值。显然后者在相同的参考输入具有更快的响应速度。

在 $t = 3 \text{ sec}$ 时刻向两个系统施加扰动。一旦扰动发生，闭环系统马上调节其控制信号来消除扰动的影响，从而使系统输出再次达到设定值。而开环系统由于既不检测输出也不调整控制信号，因而不能对外部扰动做出响应。

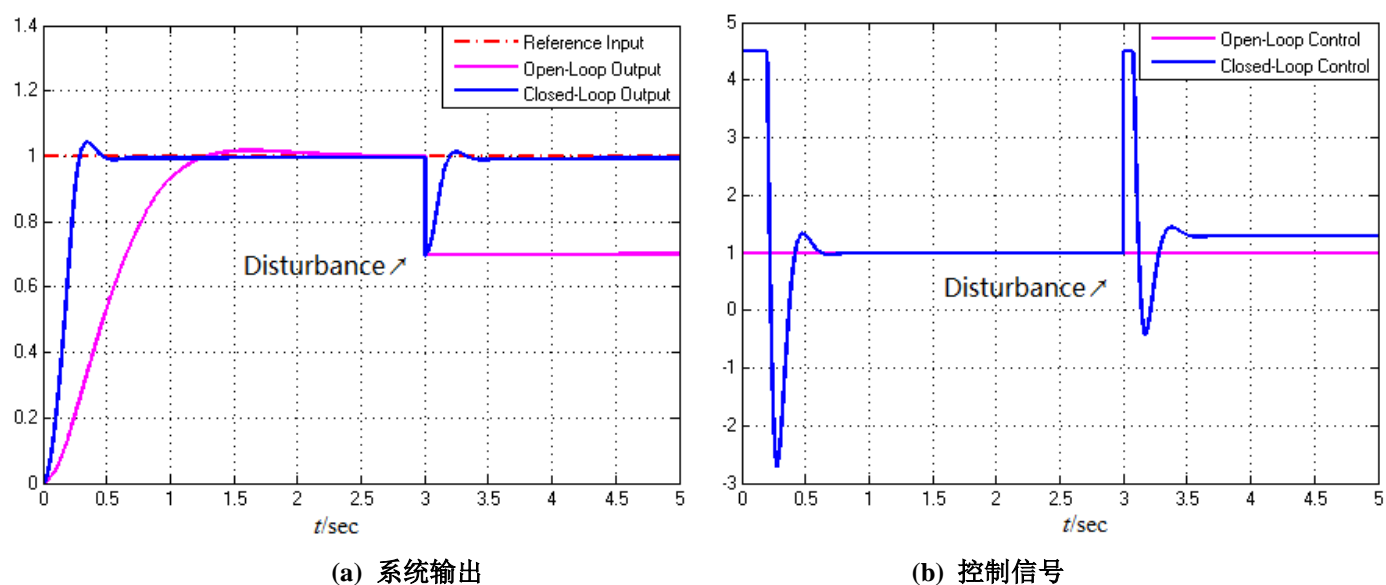


图 2-5 开环与闭环控制系统的比较

作为总结，一个闭环控制系统可以根据系统的输出自动调节其控制量，从而提高系统的

- (1) 动态特性;
- (2) 对于扰动、不确定性以及非线性的稳定性。

有鉴于此，自动控制系统一般都指的是闭环控制系统。

三、系统描述

如前所述，系统控制依照调节执行器的控制信号来实现。因此控制器采用的控制算法在系统中尤为重要。事实上，根据动态系统的数学模型来设计控制算法是构建自动控制系统核心任务。而该模型则由一系列方程来确定。这些方程对系统动态进行了准确的或者至少可以接受的描述。需要注意的是，一个给定的系统可以通过不同的方式表述，因而它可以有多种数学模型。本文主要介绍一种广泛使用的模型：**传递函数**。

3.1 系统建模

无论是机械、电子还是热学系统的动态，都可以通过微分方程的形式来描述，而这些方程可以由物理学定律得到。例如，机械系统的运动学与动力学定律，电子系统的电路原理等。

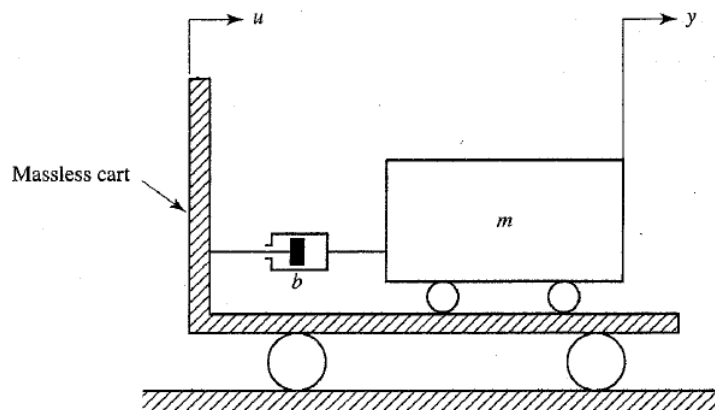


图 3-1 阻尼-质块系统

考虑图 3-1 所示的一个在轻质小车上的阻尼-质块系统。将小车的位移作为系统输入 $u(t)$ ，质块的位移作为系统输出 $y(t)$ 。现假设小车和质块在 $t < 0$ 内静止于原点，即有 $u(t) = y(t) = 0$ ， $\dot{u}(t) = \dot{y}(t) = 0$ ；并且阻尼器的阻力与相对速度 $\dot{y} - \dot{u}$ 成正比。

根据牛顿第二定律，易得系统动态

$$m\ddot{y} = -b(\dot{y} - \dot{u}) \quad (1)$$

或写作

$$\begin{cases} m\dot{y} + by = bu \\ t < 0: u(t) = 0, y(t) = 0 \\ t < 0: \dot{u}(t) = 0, \dot{y}(t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

上述方程与初始条件即可描述系统动态，亦即，系统在某给定输入 $u(t)$ 下的输出 $y(t)$ 可以由式(2) 预测。考虑如图 3-2 所示的单位阶跃输入

$$u(t) = 1(t), t \geq 0 \quad (3)$$

系统在该输入下的输出 y 由式(2)的解给出

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{m}{b}t} \quad (4)$$

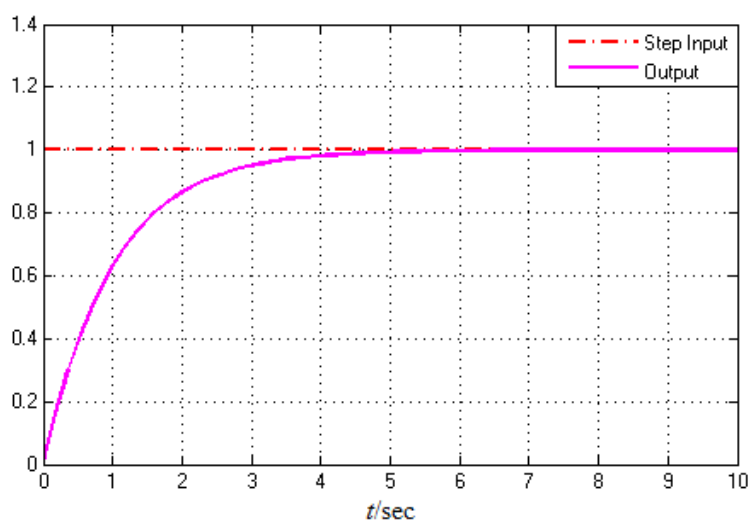


图 3-2 阻尼-质块系统响应

上述结果表明，由于阻尼的作用，系统在输入和输出之间有一个过渡过程。具有这种过渡过程的系统被称为 **惯性环节**。

尽管微分方程可以描述系统动态，但是在很多情况下这些方程过于复杂，难以得到它们的解。考虑图 3-3 所示的弹簧-质块-阻尼系统。现假设弹簧是线性的，亦即，弹簧的弹力与相对位移 $y - u$ 成正比。进而，系统动态可以描述为

$$m\ddot{y} = -b(\dot{y} - \dot{u}) - k(y - u) \quad (5)$$

或写作

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = b\dot{u} + ku \quad (6)$$

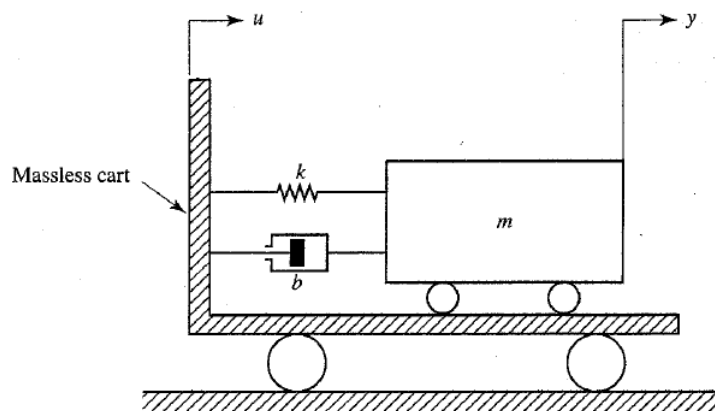


图 3-3 弹簧-质块-阻尼系统

直接求解上式比较困难。因此使用积分变换 **拉普拉斯变换** 来简化表述形式和求解过程。事实上，拉普拉斯变换将时域中的微分和积分运算转换为频域中的代数运算，如图 3-4 所示。本文仅简要介绍拉普拉斯变换的定义和性质。

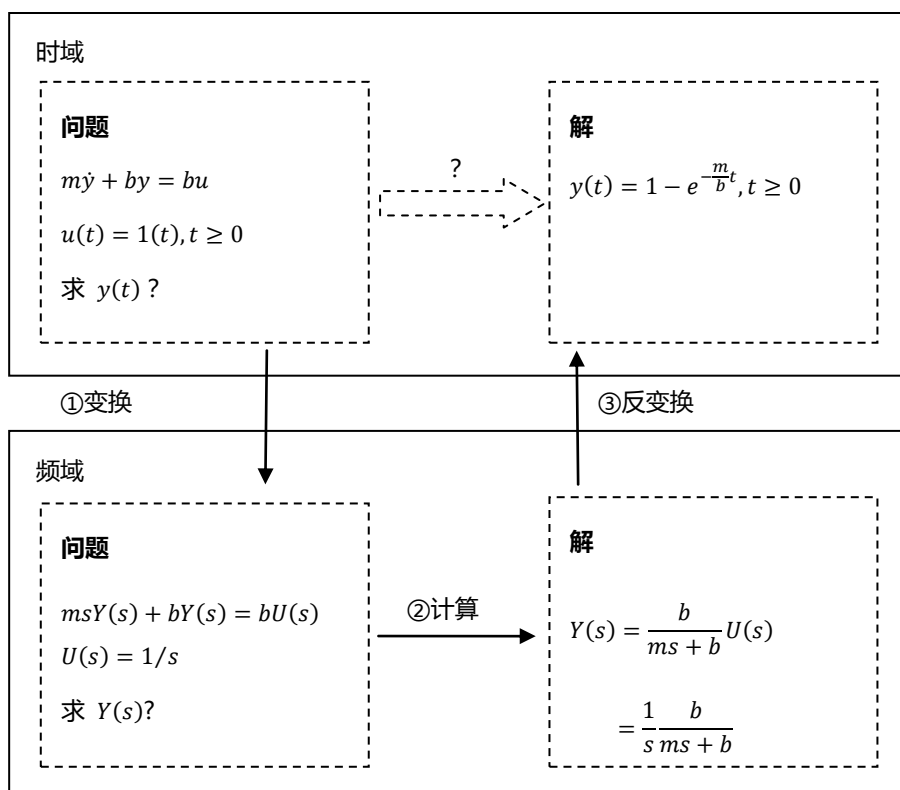


图 3-4 拉普拉斯变换

定义 3-1 函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (7)$$

其中 $f(t)$ 是时间 t 的函数并且对 $t < 0$ 有 $f(t) = 0$ ； \mathcal{L} 是拉普拉斯变换的运算记号； s 是一个复变量，而 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换。

考虑式(3)给出的单位阶跃函数的拉普拉斯变换

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} = \frac{1}{s} \quad (8)$$

其他常用函数的拉普拉斯变换可以通过相似方法推出，现列于下表。

表 3-1 常用拉普拉斯变换

	描述	$f(t)$	$F(s)$
1	单位冲击	$\delta(t)$	1
2	单位阶跃	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	单位斜坡	t	$\frac{1}{s^2}$
4	一阶惯性环节	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	三角函数	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6	三角函数	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

根据拉普拉斯变换的定义，可以得到变换的以下一些常用性质。

表 3-2 拉普拉斯变换常用性质

1	线性性质	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$ $\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$
2	积分定理	$\mathcal{L}\left[\int \cdots \int f(t) (dt)^n\right] = \frac{1}{s^n} F(s) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[\int \cdots \int f(t) (dt)^k\right]_{t=0}$ <p>特别的，倘若 $[\int \cdots \int f(t) (dt)^k]_{t=0} = 0$,</p> $\mathcal{L}\left[\int \cdots \int f(t) (dt)^n\right] = \frac{1}{s^n} F(s)$
3	微分定理	$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \frac{d^{k-1} f(0)}{dt^{k-1}}$ <p>特别的，倘若 $d^{k-1} f(0)/dt^{k-1} = 0$,</p> $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s)$
4	初值定理	$f(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
5	终值定理	$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

3.2 一阶惯性环节

以式(2)描述的阻尼-质块系统为例。注意到零初始条件以及微分定理，式(2)的拉普拉斯变换为

$$msY(s) + bY(s) = bU(s) \quad (9)$$

或写作

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{ms + b} \triangleq \frac{1}{Ts + 1} \quad (10)$$

其中 $T = m/b$ 。称上式为系统的 传递函数，它表示了输出 $Y(s)$ 与 输入 $U(s)$ 的比例。考虑式(8)表示的输入，则系统相应输出

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s} \frac{b}{ms + b} = \frac{1}{s} \frac{1}{Ts + 1} \quad (11)$$

上式表示了在频域下的系统输出。为了得到时域中的结果，还需要运用拉普拉斯变换的逆向过程来得到变换 $F(s)$ 在时域中的函数 $f(t)$ ，如图 4-3 所示。该过程称为 **拉普拉斯反变换**，可以由下述反向积分得到

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad t > 0 \quad (12)$$

其中收敛域的横轴 c 为一实常数，其取值大于任意所有 $F(s)$ 极点的实部。

计算式(12)给出的反向积分一般比较复杂。在实际运用中，通常使用 **部分分式展开** 的方法。例如，式(11)中的分式可以展开为

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} \quad (13)$$

参考表 3-1 以及表 3-2 中的线性性质，可得 $Y(s)$ 的反变换，亦即时域中的系统输出

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (14)$$

显然，上式与式(4)的一样。另外，上述结果也可以通过积分定理得到

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{Ts + 1}\right] = \int_0^\infty \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{Ts + 1}\right] dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t/T}}{T} dt = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (15)$$

事实上，许多系统都可以表述为与式(10)相同的形式。该类型的系统称为 **一阶惯性环节**，因为式(10)中复变量 s 是一阶的。系统在单位阶跃输入激励下的输出称为 **阶跃响应**。如前所述，一阶惯性环节的输出包含了一个持续大约 $5T$ 的过渡过程。由式(14)及图 2-2 可知， T 较大的取值将导致系统更为滞后的响应。因此 T 作为系统过渡过程的量度，被称为一阶惯性环节的时间常数。

3.3 二阶系统

另外一个最为常见的系统类型是 **二阶系统**。许多高阶的系统通常都可简化为这种类型的系统。考虑图 3-5 所示的 LRC 电路。根据基尔霍夫电压定律，输入电压 $u_i(t)$ 和输出电压 $u_o(t)$ 的关系描述为

$$u_i = u_o + Ri + L \frac{di}{dt} = u_o + RC \frac{du_o}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(\frac{du_o}{dt} \right) = u_o + RC \dot{u}_o + LC \ddot{u}_o \quad (16)$$

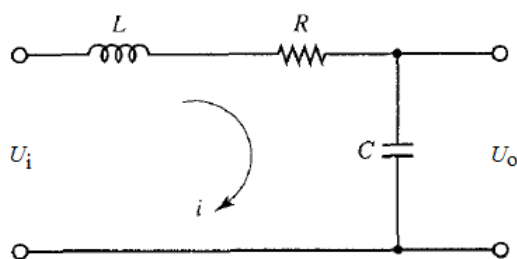


图 3-5 LRC 电路

进而，系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \triangleq \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (17)$$

其中 $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ 为阻尼率， $\omega_n = 1/\sqrt{LC}$ 为无阻尼自然频率。上述方程是二阶系统的标准形式。

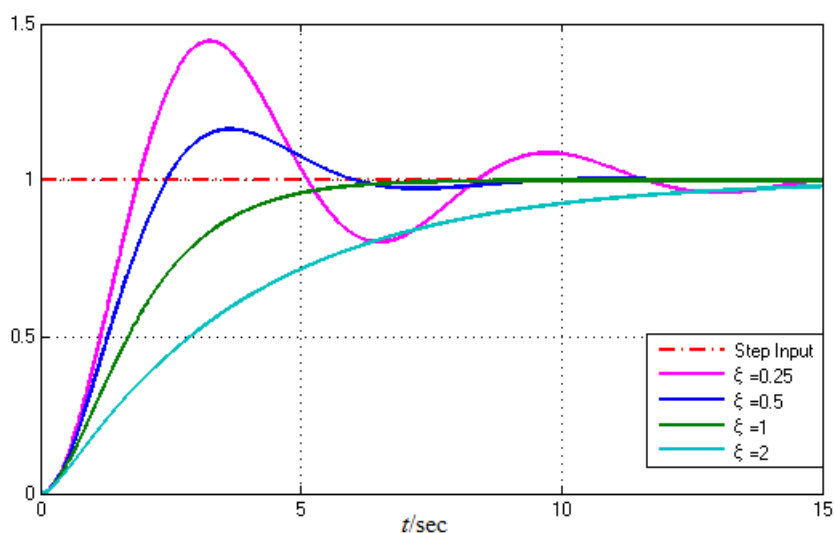


图 3-6 二阶系统响应曲线

顾名思义，阻尼率 ζ 决定了系统的不同阻尼类型：欠阻尼 ($0 < \zeta < 1$)、临界阻尼 ($\zeta = 1$) 和过阻尼 ($\zeta > 1$)。三种系统的阶跃响应曲线如图 3-6 所示。显然， ζ 的值越大，系统响应越滞后。

从图中可以看出，临界阻尼和过阻尼的系统的响应速度慢于欠阻尼系统，但是后者可能引起振荡和超调。在实际应用中，通常通过设计控制器来将 ζ 限制至 0.4 ~ 0.7 以内。

一般的，系统的性能可以通过图 3-7 所示的指标来描述：

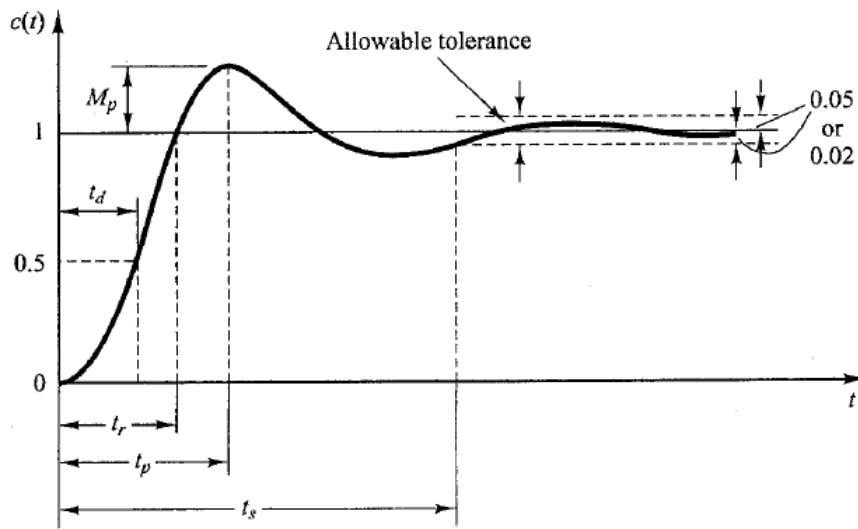


图 3-7 阶跃响应指标

(a)延迟时间 t_d ：响应至终值的一半需要的时间；

(b)上升时间 t_r ：响应从终值的 0% 至 100%，或者从终值的 10% 至 90% 需要的时间；

(c)峰值时间 t_p ：响应到达第一个超调峰值需要的时间；

(d)最大（百分比）超调量 M_p ：响应曲线的最大峰值，定义为

$$M_p \% = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% \quad (18)$$

(e)稳态时间 t_s ：响应曲线到达并保持在终值的一定范围内需要的时间，通常这个范围为 2% 或 5%。如前所述，稳态时间与控制系统最大的时间常数有关。

(f)稳态误差 e_{ss} ：输入信号与输出终值之差。根据中值定理有

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [u(t) - y(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} s[U(s) - Y(s)] \quad (19)$$

一个理想的系统阶跃响应大致与图 2-5 中的响应相似，不仅响应快速，超调量小，并且没有稳态误差。事实上，设计自动控制器的主要任务之一就是加速被控对象的响应速度，并且抑制其振荡与超调。

四、控制器设计

前面已经讨论了单个环节的性能。然而，大部分情况下系统都是由许多不同的部分组成的，因而需要首先将它们等效或者近似为一个整体。另外，为了得到满意的系统特性，如快速响应、零稳态误差以及抗扰性能，需要分析和设计不同的控制器。

4.1 系统简化

考虑图 2-2 所示的开环控制系统。分别记系统的参考输入和输出为 $R(s)$ 和 $Y(s)$ ，并记控制器、执行器和被控对象的传递函数为 $G_c(s)$ ， $G_a(s)$ 和 $G_p(s)$ 。进而，系统可以表述为图 4-1 所示的 **原理框图**。



图 4-1 开环控制系统原理框图

上述系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \triangleq G(s) = G_p(s)G_a(s)G_c(s) \quad (20)$$

下面考虑图 2-4 中闭环控制系统的原理框图，如图 4-2 所示。将传感器记作 $H(s)$ ，误差记作 $E(s)$ ，则系统输入和输出满足如下关系：

$$\begin{cases} Y(s) = G_c(s)G_a(s)G_p(s)E(s) \\ E(s) = R(s) - H(s)Y(s) \end{cases} \quad (21)$$

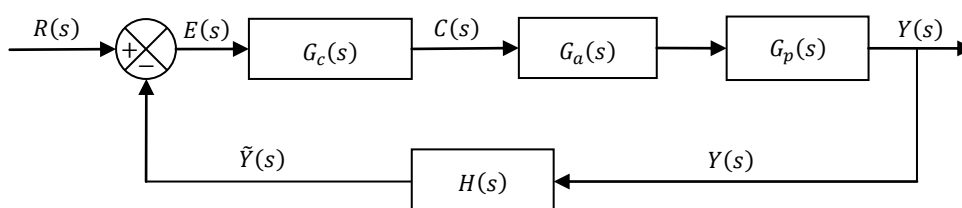


图 4-2 闭环控制系统原理框图

从上式中消去 $E(s)$ 可得系统传递函数

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \triangleq G(s) = \frac{G_c(s)G_a(s)G_p(s)}{1 + H(s)G_c(s)G_a(s)G_p(s)} \quad (22)$$

本文仅讨论闭环系统的控制器设计。现在，记系统的控制输出为 $C(s)$ ，合并执行器和被控对象为 $G_{ap}(s)$ ，并假设传感器的反馈信号与输入是同类型的，亦即 $H(s) = 1$ 。进而图 4-3 所示的该闭环系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \triangleq G(s) = \frac{G_c(s)G_{ap}(s)}{1 + G_c(s)G_{ap}(s)} \quad (23)$$

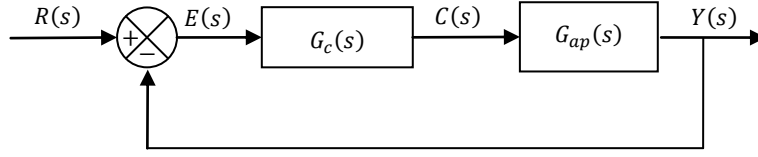


图 4-3 闭环控制系统原理框图

设计自动控制器的目标归结为调节该系统的输出，使之与图 2-5 中的输出一致。

如前所述，许多高阶系统通常简化为二阶或一阶系统。考虑下面的二阶系统

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (24)$$

其中

$$G_1(s) = \frac{1}{T_1s + 1}, G_2(s) = \frac{1}{T_2s + 1}$$

是两个时间常数不同的一阶系统，并且有 $T_1 \ll T_2$ ，亦即， $G_2(s)$ 是一个远滞后于 $G_1(s)$ 的惯性环节。

该系统的阶跃响应

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} = \frac{1}{T_1 - T_2} \frac{1}{s} \left(\frac{T_1}{T_1s + 1} - \frac{T_2}{T_2s + 1} \right) \quad (25)$$

或

$$y(t) = \frac{1}{T_1 - T_2} \left[T_1 \left(1 - e^{-t/T_1} \right) - T_2 \left(1 - e^{-t/T_2} \right) \right] = 1 - \frac{T_2 e^{-t/T_2} - T_1 e^{-t/T_1}}{T_2 - T_1} \quad (26)$$

注意到 $T_1 \ll T_2$ ，因此系统响应

$$y(t) \approx 1 - \frac{T_2 e^{-t/T_2}}{T_2} \quad (27)$$

与 $G_2(s)$ 的阶跃响应相同。作为进一步的推论，系统传递函数可以简化为

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \approx G_2(s) \quad (28)$$

上式表明最滞后的惯性环节在系统响应中占主要作用。相似的，下述近似也成立

$$G(s) = \frac{1}{T_1s^2 + T_2s + 1} \approx \frac{1}{T_2s + 1} \quad (29)$$

倘若 $T_1 \ll T_2$ 。

以直流电机为例。转速 $N(s)$ 与电枢电压 $U_d(s)$ 的传递函数为

$$G_p(s) = \frac{N(s)}{U_d(s)} = \frac{K_m}{T_m T_l s^2 + T_m s + 1} \quad (30)$$

其中 $T_l \ll T_m$ 。因而下述近似成立

$$G_p(s) \approx \frac{K_m}{T_m s + 1} \quad (31)$$

实际系统和近似系统的阶跃响应如图 4-4 所示。由图可知上述近似是可以接受的。

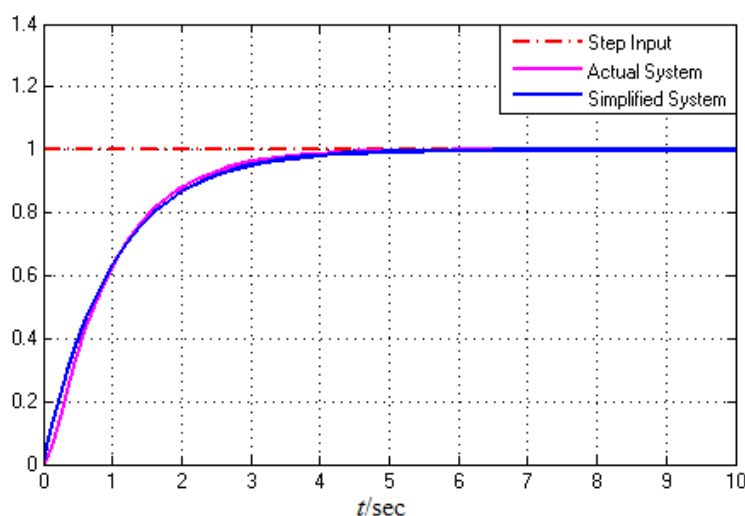


图 4-4 实际系统与简化系统的响应

考虑图 2-4 所示的直流电机的执行器（驱动电路）。其输入为脉宽调制（PWM）信号，信号频率为 f_a 。由于修改 PWM 信号的脉宽至多需要一个周期才能实现，该过渡过程可以视作一阶惯性环节。因此执行器可以表示为

$$G_a(s) = \frac{K_a}{T_a s + 1} \quad (32)$$

其中 $T_a = 1/5f_a$ 。由于频率 f_a 通常很高，如 16.7 KHz，因此时间常数 T_a 与直流电机的常数 T_m 相比非常小。进而，执行器和被控对象可以近似地表示为一阶惯性环节

$$G_{ap}(s) = G_a(s)G_p(s) = \frac{K_a}{T_a s + 1} \frac{K_m}{T_m T_I s^2 + T_m s + 1} \approx \frac{K_{ap}}{(T_a s + 1)(T_m s + 1)} \approx \frac{K_{ap}}{T_m s + 1} \quad (33)$$

其中 $K_{ap} = K_a K_m$ 是执行器和被控对象的增益。

4.2 抗扰性能分析

除了对输入的快速响应以外，系统的稳定性，特别是抗扰性是闭环控制系统的主要目标。

首先，考察直接影响系统输出的扰动，记为 $D(s)$ ，如图 4-5 所示。进而，参考输入 $R(s)$ 、扰动 $D(s)$ 以及输出 $Y(s)$ 的关系可以表述为

$$Y(s) = D(s) + G_{ap}(s)G_c(s)[R(s) - Y(s)] \quad (34)$$

或写作

$$Y(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G_{ap}(s)} D(s) + \frac{G_c(s)G_{ap}(s)}{1 + G_c(s)G_{ap}(s)} R(s) \triangleq Y_D(s) + Y_R(s) \quad (35)$$

上式表明系统输出是分别在两个输入下的线性叠加： $D(s)$ 和 $R(s)$ 。一个理想的系统中 $D(s)$ 的输出应该为零。

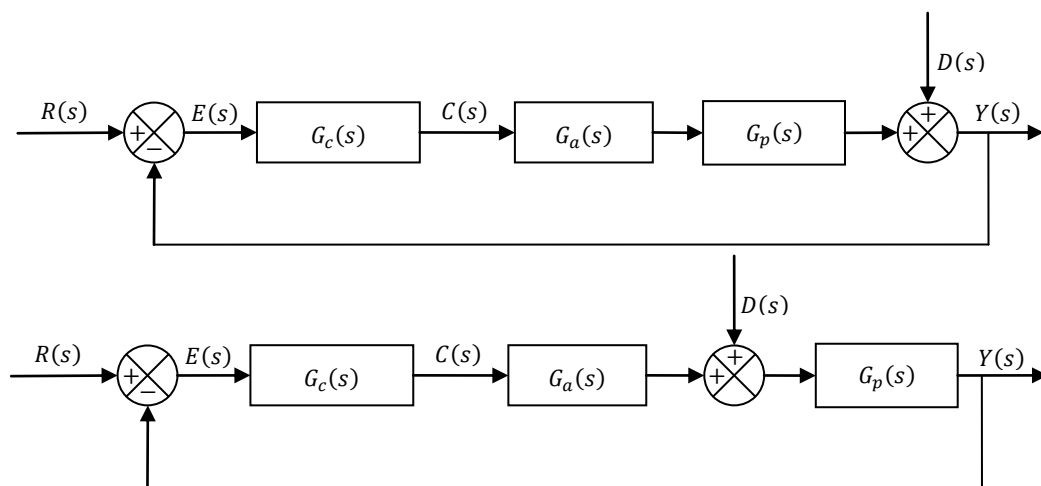


图 4-5 系统输出及执行器的扰动

现在，考虑施加在执行器输出的扰动，如图 1-1 中力矩的扰动或图 2-3 中驱动电路供电的波动。则系统输出为

$$Y(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_a(s)G_c(s)} D(s) + \frac{G_p(s)G_a(s)G_c(s)}{G_p(s)G_a(s)G_c(s) + 1} R(s) \quad (36)$$

其他类型扰动对系统的影响可通过相似方法分析。

4.3 比例控制器

比例（Proportional, P）控制器 输出的控制量与参考输入和实际输出的误差成正比，如图 4-6 所示。其中比例系数记作 K_p 。

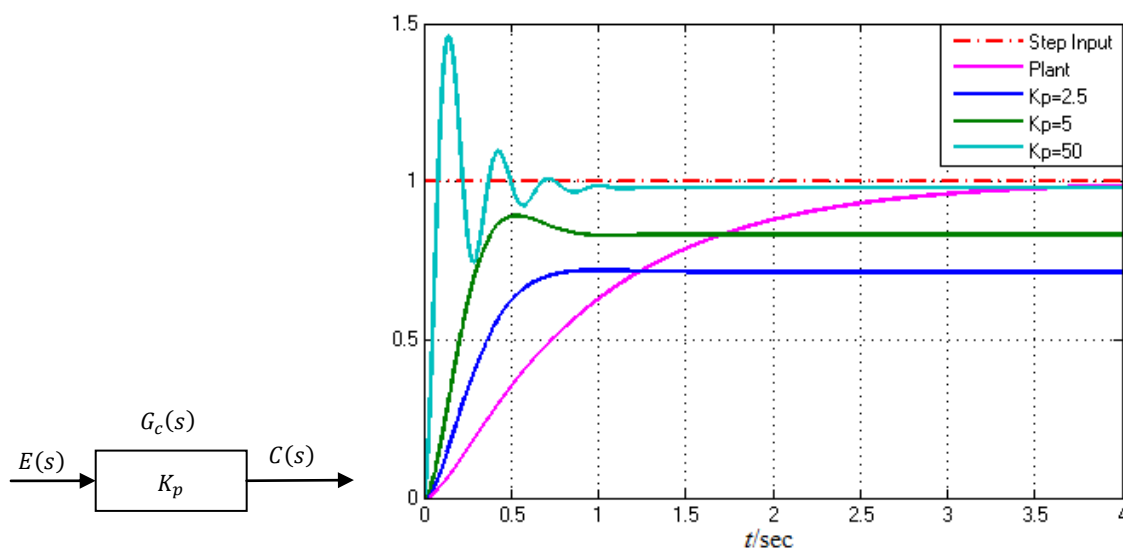


图 4-6 比例-积分控制器

图 4-7 不同比例控制器的响应

根据式(23)，直流电机(33)在比例控制器的控制下，系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{K_p \left(\frac{K_{ap}}{T_m s + 1} \right)}{1 + K_p \left(\frac{K_{ap}}{T_m s + 1} \right)} = \frac{K_p K_{ap}}{T_m s + (K_p K_{ap} + 1)} = \frac{K_p K_{ap}}{K_p K_{ap} + 1} \frac{1}{\left(\frac{T_m}{K_p K_{ap} + 1} \right) s + 1} \triangleq \frac{K}{Ts + 1} \quad (37)$$

控制系统的时间常数 T 变为了 $T_m / (K_p K_{ap} + 1)$ ，意味着控制系统比开环系统响应速度大大加快。

另外，考虑稳态误差

$$e_{ss} = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1 - \frac{K_p K_{ap}}{K_p K_{ap} + 1} = \frac{1}{K_p K_{ap} + 1} \quad (38)$$

由此可知比例控制器能够加速系统响应的过渡时间，但是会产生参考输入与输出之间的稳态误差。当控制器的增益 K_p 比较大时，系统响应更快，并且稳态误差更小。

然而，过大的比例会导致振荡。图 4-7 比较了不同 K_p 取值下的系统响应，其中被控对象是一个过阻尼的二阶系统。

现在来分析控制系统的抗扰性能。考虑施加于系统输出的阶跃扰动的影响，根据式(35)有

$$Y_D(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G_{ap}(s)} D(s) = \frac{1}{1 + K_p \left(\frac{K_{ap}}{T_m s + 1} \right)} \frac{1}{s} = \frac{T_m s + 1}{s(T_m s + K_p K_{ap} + 1)} \quad (39)$$

因此系统的稳态输出

$$y_{D\infty}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_m s + 1}{T_m s + K_p K_{ap} + 1} = \frac{1}{K_p K_{ap} + 1} \quad (40)$$

上式表明增加控制器增益可以减少外界扰动的影响，但是依旧不能完全消除它。

4.4 比例-积分控制器

比例-积分 (Proportional-Integral, PI) 控制器 的输出是误差的比例与积分之和，如图 4-8 所示。

进而，PI 控制器的传递函数表述为

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (41)$$

其中 T_i 为积分时间常数。

直流电机在该控制器下，系统传递函数为

$$G(s) = \frac{K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \left(\frac{K_{ap}}{T_m s + 1} \right)}{1 + K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \left(\frac{K_{ap}}{T_m s + 1} \right)} = \frac{K_p K_{ap} (T_i s + 1)}{T_m T_i s^2 + (K_p K_{ap} + 1) T_i s + K_p K_{ap}} \quad (42)$$

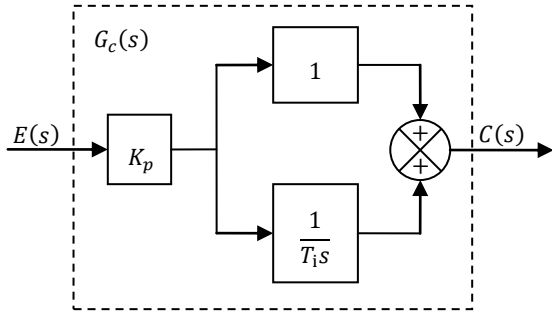


图 4-8 比例-积分控制器

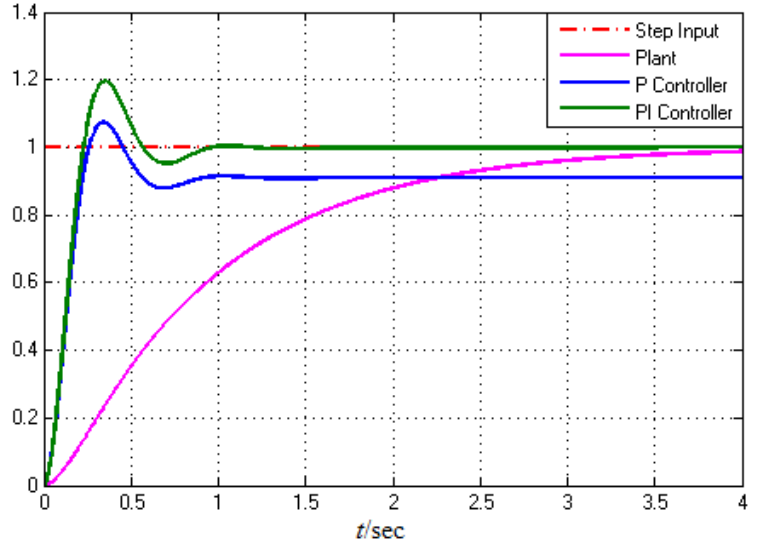


图 4-9 比例控制器及 PI 控制器的响应

控制系统的稳态误差

$$e_{ss} = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1 - \frac{K_p K_{ap}}{K_p K_{ap}} = 0 \quad (43)$$

上式表明 PI 控制器能够完全消除稳态误差，因为无论在任何时刻产生的误差，都将通过误差的积分产生一个控制量。图 4-9 对比了比例控制器与 PI 控制器下系统的输出。

考虑施加于系统输出的阶跃扰动的影响

$$Y_D(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G_{ap}(s)} D(s) = \frac{1}{1 + K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \left(\frac{K_{ap}}{T_m s + 1}\right)} \frac{1}{s} = \frac{T_i s (T_m s + 1)}{s [T_m T_i s^2 + (K_p K_{ap} + 1) T_i s + K_p K_{ap}]}$$

因而扰动的稳态输出

$$y_D(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_i s (T_m s + 1)}{T_m T_i s^2 + (K_p K_{ap} + 1) T_i s + K_p K_{ap}} = 0 \quad (44)$$

上式表明 PI 控制器能够消除外界扰动对输出的影响。

4-5 比例-微分控制器

比例-微分 (Proportional-Derivative, PD) 控制器 的输出是误差的比例及微分之和，如图 4-10 所示。PD 控制器的传递函数为

$$G_c(s) = K_p (1 + T_d s) \quad (45)$$

其中 T_d 为微分时间常数。

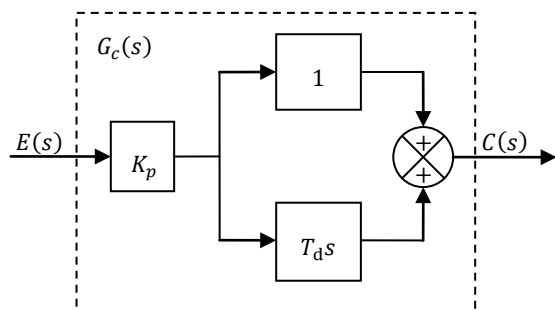


图 4-10 比例-微分控制器

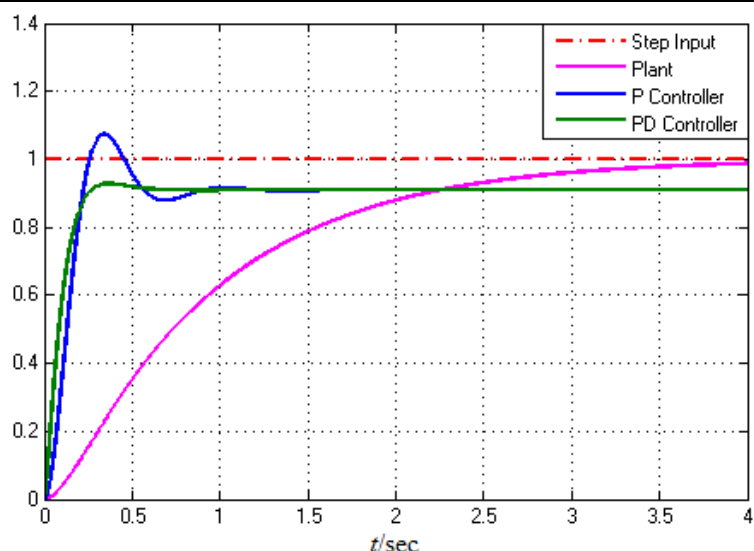


图 4-11 比例控制器及 PD 控制器的响应

直流电机在该控制器下，系统传递函数为

$$G(s) = \frac{K_p(1 + T_d s) \left(\frac{K_{ap}}{T_m s + 1} \right)}{1 + K_p(1 + T_d s) \left(\frac{K_{ap}}{T_m s + 1} \right)} = \frac{K_p K_{ap} (T_d s + 1)}{(K_p K_{ap} T_d + T_m) s + K_p K_{ap} + 1} \quad (46)$$

图 4-11 对比了比例控制器与 PD 控制器下系统的输出。

与比例控制器相似，PD 控制器也会产生稳态误差，并且不能完全消除外部扰动的影响。然而，PD 控制器可以极大地提高系统动态性能，并且抑制振荡，因为微分环节体现了误差的变化趋势，从而可以提前调整控制量。

4.6 比例-积分-微分控制器

如前所述，误差的积分代表了所有之前产生的误差，误差的比例代表了当前的误差，二误差的微分代表了将来误差的变化趋势。因此，比例控制器能够加速响应速度，PI 控制器能够消除稳态误差，而 PD 控制器可以极大提高系统动态性能。

为了得到理想的系统特性，例如快速响应、零稳态误差、强抗扰性能、轻微的振荡与超调，通常使用包含了上述三个环节的 **比例-积分-微分 (Proportional-Integral-Derivative, PID) 控制器**，如图 4-12 所示。

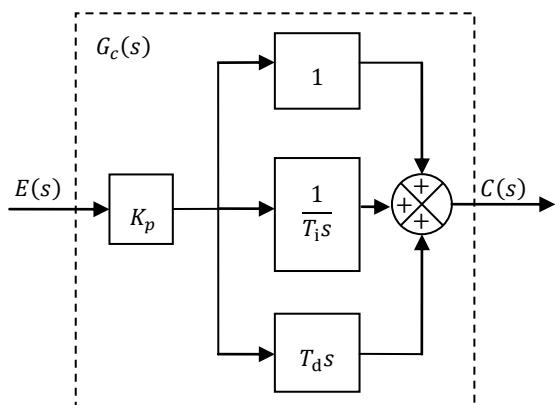


图 4-12 比例-积分-微分控制器

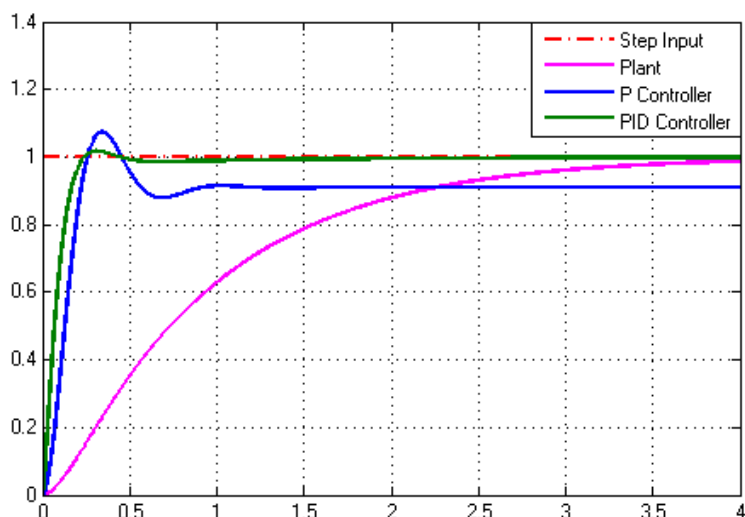


图 4-13 比例控制器及 PID 控制器的响应

PID 控制器的传递函数表述为

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \triangleq K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s \quad (47)$$

在实际应用中，尽管被控对象可能是未知的，PID 控制器依旧得以广泛运用。控制器的参数 K_p 、 K_i 和 K_d 可以通过试凑法得到，其过程一般依照下述原则。

- (1) 令积分和微分增益 K_i 、 $K_d = 0$ ，然后逐渐加大比例增益 K_p 直至稳态时间 t_s 满足要求；同时应避免过大的系统振荡；
- (2) 减少比例增益 K_p 20%，然后调整积分增益 K_i 直至稳态误差 e_{ss} 在可接受时间内减少至零；
- (3) 稍微增大比例增益 K_p 10%，然后从零开始小心地增大微分增益 K_d 直至系统动态特性满足要求。

五、数字控制系统

PID 控制器可以通过运算放大器来数显。然而，随着计算机及嵌入式系统的飞跃发展，如今许多控制系统都变为 **数字控制系统** 的形式。与连续控制器不断地处理信号不同，数字控制器间断地调节系统，并通常遵循固定的频率。

数字控制系统通过采样器和模拟/数字转换器来获取检测环节的信号，并遵循某个采样周期，记作 T_s ，如图 5-1 所示。数字控制器也计算系统运作误差，并向执行器输出数字控制信号，但是该信号在每个控制周期内仅可改变一次，因为采样的系统输出信号没有变化。

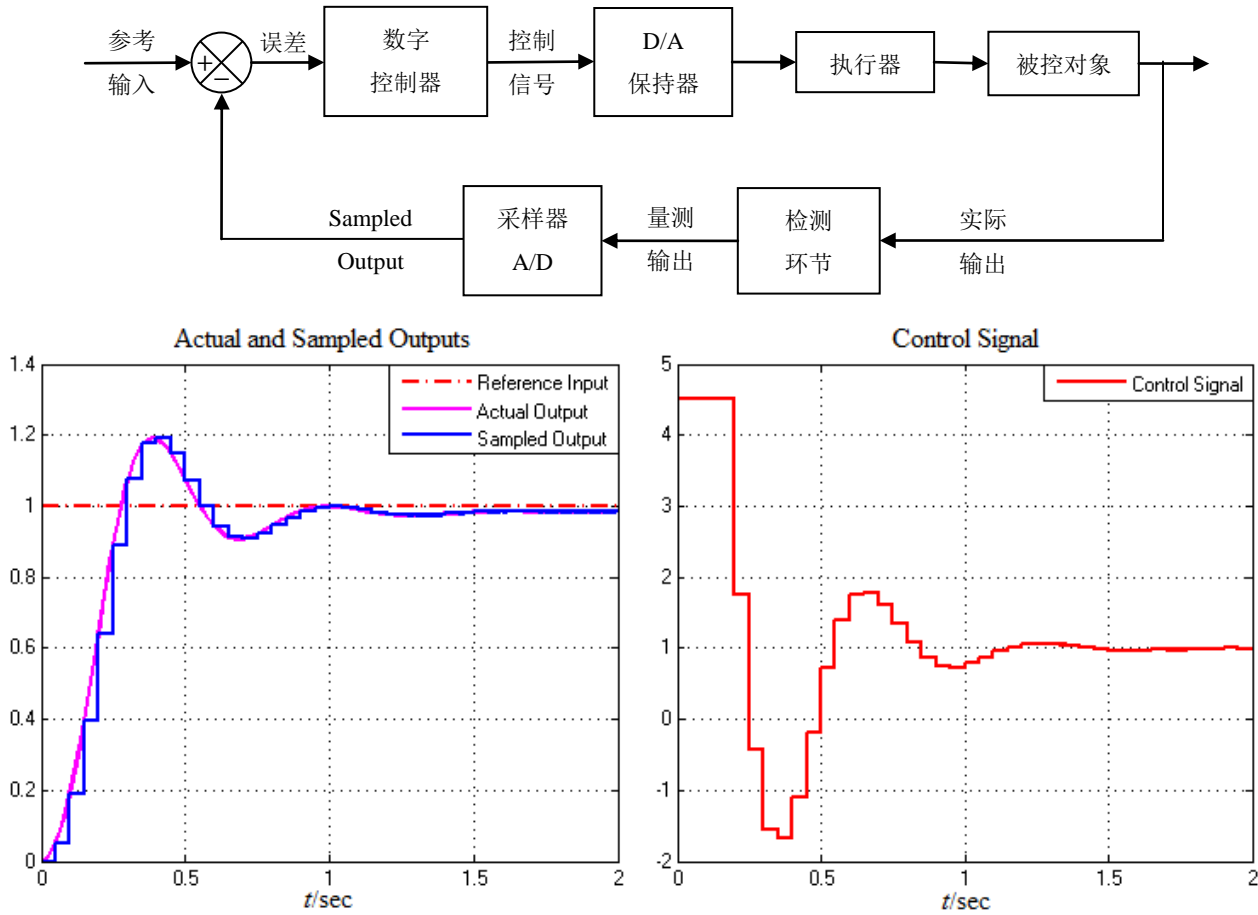


图 5-1 数字控制系统

考虑式(47)所示的 PID 控制器在数字控制系统中的表达式。由图 5-2 可知，在第 n 个采样周期时，误差的积分和微分为

$$\begin{cases} \int_0^{nT_s} e(t)dt \triangleq T_s \sum_{k=1}^n e(kT_s) = T_s \sum_{k=1}^n E(k) \\ \frac{d}{dt} e(nT_s) \triangleq \frac{e(nT_s) - e[(n-1)T_s]}{T_s} = \frac{E(n) - E(n-1)}{T_s} \end{cases} \quad (48)$$

其中 $E(k) = e(kT_s)$ 表示第 k 个采样周期时的误差，而 $de(nT_s)/dt$ 表示两个相邻采样周期内误差的平均变化率。

数字 PID 控制器在第 n 个采样周期的输出为

$$\begin{aligned} C(n) &= K_p E(n) + K_i T_s \sum_{k=1}^n E(k) + K_d \frac{E(n) - E(n-1)}{T_s} \\ &\triangleq K_p E(n) + \tilde{K}_i \sum_{k=1}^n E(k) + \tilde{K}_d [E(n) - E(n-1)] \end{aligned} \quad (49)$$

其中 $\tilde{K}_i = K_i T_s$ 为积分增益， $\tilde{K}_d = K_d / T_s$ 为微分增益。

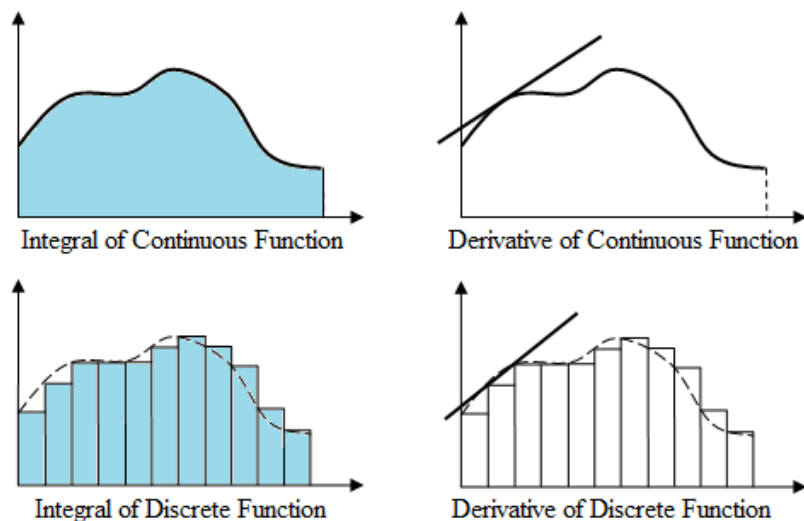


图 5-2 连续与离散函数的积分与微分

式(49)表示的直流电机的 PID 控制器可以通过以下代码实现：

```

Speed = MotorPulseSigma;      //当前电机转速为编码器脉冲计数值
SpeedError = SpeedSet - Speed  //计算当前速度误差，反馈极性为负

//替换之前记录的误差量
SpeedError1 = SpeedError0;    //E(n-1)
SpeedError0 = SpeedError;     //E(n)

//计算控制量的增量的比例、积分及微分项
SpeedOutP = Speed_KP * SpeedError0;
SpeedOutI = SpeedOutI + Speed_KI * SpeedError0;
SpeedOutD = Speed_Kd * (SpeedError0 - SpeedError1);

//计算当前控制量
SpeedOut = SpeedOutP + SpeedOutI + SpeedOutD;

```

六、后记

自动控制理论具有广阔的内容与深远的影响。本文仅介绍一些浅显的概念和理论，其中系统动态在传递函数形式下的表述，以及 PID 控制器的设计在实际运用中非常重要。在这里将简述一些其他常用的自动控制系统原理与方法。

稳定性亦是控制器设计的一项重要目标。**根轨迹方法** 通过研究不同的控制器增益下系统闭环极点的位置来分析系统的稳定性。同时，该方法也可以实现系统的超前或滞后补偿。**李雅普诺夫方法** 是另外一种判断系统稳定性的方法。

频率响应方法，包括 **波特图** 和 **奈奎斯特图**，研究在一定范围内变化的输入信号下的相应输出。上述方法也在稳定性分析及系统补偿中有广泛应用。

状态空间模型 在时域中表述系统动态。该模型能够深入地描述系统内部变量的关系，并且能够处理 **多输入多输出 (Multiple-Input Multiple-Output, MIMO)** 系统。同时该系统可以衍生出许多系统分析和控制器设计方法。

另外，在实际问题中经常会运用 **非线性系统** 的分析与控制。**最优控制** 旨在寻找控制率以使某个指标达到最优。**鲁棒控制** 研究系统在一系列摄动参数下的稳定性。