# Konspekt
## pracownia 1 zadanie 11

Mateusz Basiak
nr indeksu 300487

**Opis**

Moim celem będzie jak najdokładniejsze przybliżenie wartości funkcji sinus oraz cosinus. W tym celu posłużę się powszechnie znanymi wzorami obliczania tychże funkcji oraz ich drobnymi modyfikacjami, mającymi na celu minimalizację błędów numerycznych. Następnie porównam wyniki otrzymane dla różnych wzorów i różnych precyzji arytmetyki. Porównam je również z funkcjami bibliotecznymi, których użyję jako wartości dokładnych, które będę starał się przybliżać.

Wartości funkcji będę obliczał dla różnych argumentów. Wśród punktów, dla których bedę wykonywał eksperyment znajdą się zarówno takie, w których funkcje przyjmują charakterystyczne wartości, jak i losowe punkty. Będą to 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, losowy punkt z przedziału $(0, \frac{\pi}{2})$, oraz wartość argumentu znacznie większa od $2\pi$ [1].

**Wzory**

**1. Wzór Taylora**[1]

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ [2]

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Jako, że funkcja $n!$ rośnie bardzo szybko, kolejne elementy szeregu szybko stają się coraz mniej istotne. Wstępną hipotezą jest, że dla n=20 uzyskamy już przybliżenie wystarczające, by lepsze nie zmieniało wyniku nawet dla podwójnej precyzji, ale aby się upewnić wykonam odpowiednie obliczenia.
Rozważmy następującą modyfikację powyższych wzorów:

$$sin(x) = x\Big(1 - \frac{x^2}{2\cdot 3}\Big(1 - \frac{x^2}{4\cdot 5}\Big(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\Big(\dots\Big(1 - \frac{x^2}{(2n)\cdot(2n+1)}\Big)\dots\Big)$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2}\Big(1 - \frac{x^2}{3\cdot 4}\Big(1 - \frac{x^2}{5\cdot 6}\Big(\dots\Big(1 - \frac{x^2}{(2n-1)\cdot(2n)}\Big)\dots\Big)$$

Oczywiście nadal są to te same wzory Taylora. Zmieniła się jednak liczba i kolejność operacji, jakie wykonuję, co może mieć znaczny wpływ na straty w dokładności, zwłaszcza dla dalekich elementów szeregu. Zbadam i przeanalizuję różnice w wynikach między wersjami tego wzoru.

**2. Ułamki łańcuchowe**

Funkcję sinus da się przedstawić w postaci ułamka łańcuchowego:[2]

$$\sin x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{(2\cdot 3 - x^2) + \cfrac{2\cdot 3x^2}{(4\cdot 5 - x^2) + \cfrac{4\cdot 5x^2}{(6\cdot 7 - x^2) + \dots}}}}$$

W związku z dużą liczbą dzieleń można postawić hipotezę, że nie jest to zbyt precyzyjna metoda. Hipotezę tą zweryfikuję ekperymentalnie. Wadą tego rozwiązania jest również fakt, że nie da się w ten sposób wyznaczyć wartości cosinusa.

---

[1] Oczywiście wszystkie argumenty podane są w radianach. Wartość $\pi$ mam zamiar wprowadzić ręcznie z dokładnością sięgającą setek cyfr dziesiętnych.

[2] Uznaję potęgowanie za dozwoloną mi operację, gdyż $x^3 = x\cdot x\cdot x$ i w kodzie programu będę posługiwał się wyłącznie operacją mnożenia.

**3. Iloczyn nieskończony**

Uzyskałem już sinus z sumy za pomocą szeregu Taylora. Mogę go również uzyskać za pomocą iloczynu:[3]

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$$
$$\cos x = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 (k-\frac{1}{2})^2}\right)$$

W tej funkcji wartość bezwzględna kolejnych składników maleje znacznie wolniej niż we wzorze Taylora, co oznacza że do uzyskania dobrego przybliżenia potrzebnych będzie więcej czynników. Wartość n przy której dalsze jego zwiększanie nie ma wpływu na dokładność wyniku również wyznaczę eksperymentalnie.

Na koniec porównam wyniki otrzymanych pomiarów z wartościami funkcji $sin(x)$ i $cos(x)$ z biblioteki standardowej i omówię wyniki. Spróbuję też wyciągnąć wnioski co do optymalnego wyboru metody.

## Bibliografia

[1] M. Paluszyński "Analiza Matematyczna dla informatyków. Notatki z wykładu"
[2] C. Olds "Continued Fractions", wyd. 1963, str. 138
[3] Za Wikipedią: `https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcje_trygonometryczne#Definicja_za_pomoc%C4%85_iloczyn%C3%B3w_niesko%C5%84czonych`