

Date : 7 janvier 2018
Auteur : Vincent CHAMBRIN
Julien WANTZ

Méthodes numériques déterministes

Projet 4 : Interpolations

1 Interpolation newtonienne

1.1 Différences divisées et calcul du polynôme d'interpolation

Dans toute cette partie, on notera f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} que l'on souhaite interpoler aux points x_0, \dots, x_n (tous distincts).

On souhaite ici mettre en place un algorithme permettant de calculer le polynôme d'interpolation $p_n(x)$ de Lagrange de manière plus efficace qu'avec la base de Lagrange des polynômes $(L_j)_{0 \leq j \leq n}$.

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$
$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) L_j(x)$$

Ce formulation a le mérite d'être très simple, mais elle présente un inconvénient majeur : il faut recalculer toute la base des polynômes lorsque l'on veut rajouter un point à notre interpolation. On souhaite développer une méthode qui n'oblige pas à recalculer entièrement le polynôme d'interpolation lorsqu'on ajoute un point mais qui permette plutôt de calculer le nouveau polynôme à partir de celui de degré inférieur.

Définition 1 (Différences divisées). Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et x_0, \dots, x_n $n+1$ points d'interpolations. On appelle différence divisée d'ordre n la quantité notée $f[x_0, \dots, x_n]$ définie par

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

avec $\forall i \in \{1, \dots, n\}, f[x_i] = f(x_i)$.

Proposition 1.1.1. La quantité $f[x_0, \dots, x_n]$ est égale au terme de degré n dans le polynôme d'interpolation de Lagrange p_n de f aux points x_0, \dots, x_n .

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence. Pour $n = 0$, la quantité $f[x_0]$ vaut $f(x_0)$ et correspond bien au polynôme d'interpolation de Lagrange. Supposons la propriété vraie pour n points x_0, \dots, x_{n-1} . Notons P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux n premiers points (x_0, \dots, x_{n-1}) et Q celui associé aux n derniers points (x_1, \dots, x_n) . On pose

$$L(x) = \frac{(x - x_0)Q(x) - (x - x_n)P(x)}{x_n - x_0}$$

On a $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$L(x_i) = \frac{(x_i - x_0)f(x_i) - (x_i - x_n)f(x_i)}{x_n - x_0} = f(x_i)$$

et

$$L(x_0) = \frac{(x_0 - x_0)Q(x_0) - (x_0 - x_n)f(x_0)}{x_n - x_0} = f(x_0)$$
$$L(x_n) = \frac{(x_n - x_0)f(x_n) - (x_n - x_n)P(x_n)}{x_n - x_0} = f(x_n)$$

Il y a donc correspondance entre $L(x)$ et le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n sur x_0, \dots, x_n . On en déduit que L est exactement le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points x_0, \dots, x_n . Enfin, on constate que le terme de plus haut degré de L vaut

$$\frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} = f[x_0, \dots, x_n]$$

d'où le résultat. □

Proposition 1.1.2. *Le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points x_0, \dots, x_n peut s'écrire :*

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]$$

Démonstration. On démontre à nouveau le résultat par récurrence. Pour 1 points, le résultat est immédiat. Supposons la propriété vraie pour n points et notons p_{n-1} le polynôme d'interpolations de Lagrange associé. Le polynôme $p_n - p_{n-1}$ s'annule en x_0, \dots, x_{n-1} et son terme de plus haut degré vaut $f[x_0, \dots, x_n]$, on a donc

$$p_n(x) - p_{n-1}(x) = f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

Soit

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) + p_{n-1}(x) \\ &= f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) + f[x_0, \dots, x_{n-1}](x - x_0) \dots (x - x_{n-2}) + \dots + f[x_0] \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. □

Cette formulation est intéressante car elle montre qu'il est possible de calculer les polynômes d'interpolations de manière récursive, en réutilisant le polynôme de degré inférieur.

Remarque 1. *La famille de polynômes n_j définie par*

$$n_j(x) = \prod_{0 \leq i < j} (x - x_i)$$

forme une base de l'ensemble des polynômes appelée base de Newton. La formule donnée dans la proposition 1.1.2 est l'écriture du polynôme d'interpolation dans la base de Newton (d'où le nom d'interpolation newtonienne).

Remarque 2 (Règle de Horner). *De la proposition 1.1.2, on déduit une écriture du polynôme d'interpolation permettant de réduire le nombre de multiplication (plus rapide numériquement) :*

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0) \left(f[x_0, x_1] + (x - x_1) \left(f[x_0, x_1] + (x - x_1) (f[x_0, x_1, x_2] + \dots) \right) \right)$$

On peut facilement déduire de ce qui précède un algorithme permettant de calculer efficacement le polynôme d'interpolation de Lagrange de f degré n à partir de celui de degré $n - 1$.

La figure 1 montre qu'il est possible de réutiliser certains calculs de différences divisées. Dans notre exemple, la quantité $f[x_1, x_2]$ est en effet utilisé deux fois. On peut donc en théorie réduire le temps de calcul lorsque n devient grand.

Le code Python donné en annexe fournit une classe `Interpolation` permettant de calculer les polynômes d'interpolations de Lagrange d'une fonction f . La base de Newton est utilisée pour calculer les polynômes, mais une méthode permettant d'effectuer le calcul en se servant de la base de Lagrange est également fournie à des fins de comparaisons. L'algorithme utilise un dictionnaire pour retenir les résultats de calculs des différences divisées.

$$\begin{array}{rcl}
f(x_0) & = & f[x_0] \\
f(x_1) & = & f[x_1] \quad f[x_0, x_1] \\
f(x_2) & = & f[x_2] \quad f[x_1, x_2] \quad f[x_0, x_1, x_2] \\
f(x_3) & = & f[x_3] \quad f[x_2, x_3] \quad f[x_1, x_2, x_3]
\end{array}$$

FIGURE 1 – Pyramide du calcul des différences divisées

```

## Exemple d'utilisation du code Python
a = Interpolation(f) # On construit un objet permettant d'interpoler la fonction f
# On ajoute trois points d'interpolations
a.addPoint(-1)
a.addPoint(0)
a.addPoint(1)
a.P(0) # On évalue le polynôme d'interpolation en 0
a.x(1) # On récupère le deuxième point d'interpolation, ici 0
a.lagrange() # Renvoie le polynôme calculé en utilisant la base de Lagrange

```

1.2 Interpolation de la fonction $f(t) = \frac{1}{(1+t^2)}$

On souhaite étudier le comportement de l'interpolation newtonienne sur $[-5, 5]$ de la fonction $f(t) = \frac{1}{(1+t^2)}$.

On commence dans un premier temps par utiliser des points d'interpolations équidistants.

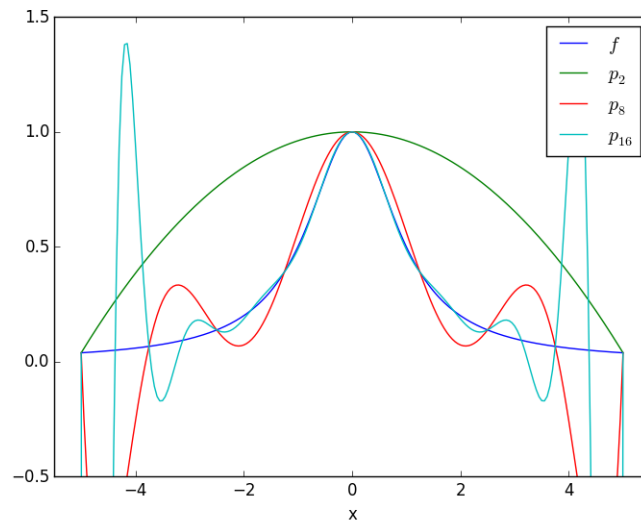


FIGURE 2 – Interpolation newtonienne avec des points équidistants

Comme on peut le voir dans la figure 2, l'interpolation avec des polynômes de degré élevé semble être ici instable : on observe des oscillations de plus en plus fortes près des bords.

On peut essayer de quantifier la gravité de la situation en estimant numériquement la norme infinie de l'erreur à partir des points échantillonnés pour tracer le graphe. Les résultats sont donnés dans la table 1¹.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_8	p_{16}	p_{32}
Erreur	0.962	0.646	0.707	0.438	1.045	14.32	4777.995

TABLE 1 – Norme infinie de $|p_n - f|$

Pour améliorer les résultats, on peut interpoler aux points de Tchebychev définis par

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, \dots, n$$

Ces points sont définis pour une interpolation sur l'intervalle $[-1, 1]$ mais il est facile de leur appliquer une transformation pour un intervalle quelconque $[a, b]$.

$$x_k = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, \dots, n$$

On obtient dans ce cas une interpolation plus stable que précédemment (c.f. figure 3).

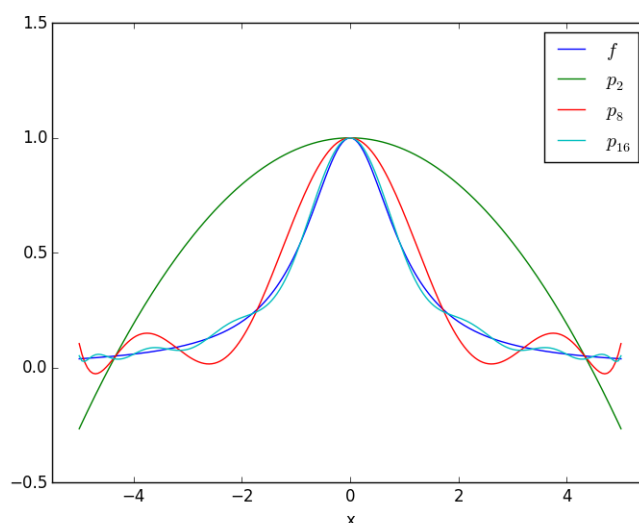


FIGURE 3 – Interpolation newtonienne avec les points de Tchebychev

1.3 Interpolation de la fonction $g(x) = 2(1 + \tanh(x)) - x/10$

On considère cette fois la fonction $g(x) = 2(1 + \tanh(x)) - \frac{x}{10}$ sur $[-6, 6]$.

Les figures 4 et 5 montrent le graphe de g et du polynôme d'interpolation de Lagrange avec des points d'interpolations équidistants et de Tchebychev.

On constate comme précédemment que les points de Tchebychev donnent de meilleurs résultats.

Un autre point intéressant est que la fonction que l'on interpole présente une anti-symétrie, i.e. $g(x) = -g(-x)$; et que nos deux polynômes d'interpolations présentent également cette même propriété. Ainsi, l'erreur commise

1. Estimé sur la base de 240 points répartis uniformément sur $[-5, 5]$.

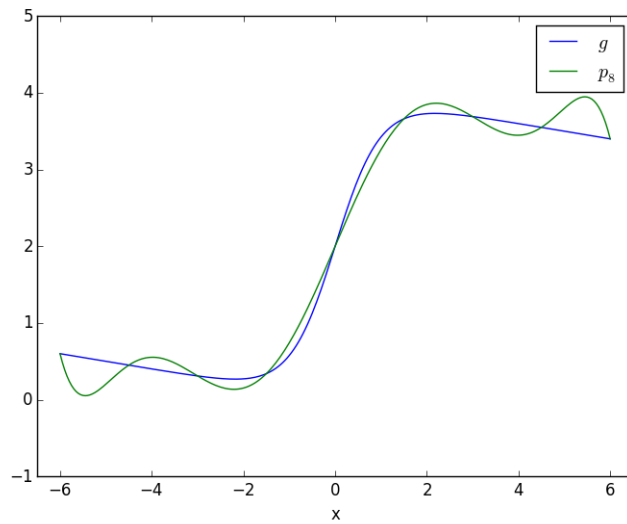


FIGURE 4 – Interpolation avec 9 points équidistants

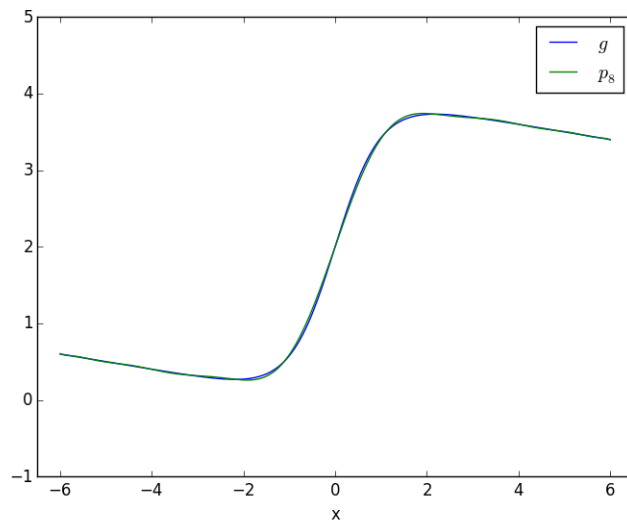


FIGURE 5 – Interpolation avec les 9 points de Tchebychev

au point x est égale à l'opposé de l'erreur commise en $-x$. Cela signifie que si l'on intègre sur l'intervalle complet, l'erreur est en moyenne nulle. Autrement dit, notre polynôme d'interpolation peut être utilisé pour calculer de manière exacte l'intégrale de g .

On peut constater cela avec le code suivant.

```
import scipy.integrate as integrate
i1 = integrate.quad(g, xmin, xmax)
P = a.P.integ() # a est notre objet de type Interpolation
i2 = P(xmax) - P(xmin)
```

```
print(i1, i2)
```

Une sortie possible de ce programme est :

```
(23.999999999999996, 2.664535259100375e-13) 24.0
```

Le couple correspond à un calcul numérique de l'intégrale et une borne pour l'erreur commise ; le dernier nombre correspond à la valeur de l'intégrale calculée à partir du polynôme d'interpolation.

1.4 Comparaison avec l'interpolation lagrangienne

On se propose dans cette partie d'effectuer quelques mesures pour comparer l'efficacité des différents algorithmes.

Un programme en Python a été écrit pour comparer le temps mis pour calculer le polynôme d'interpolation en utilisant la base de Newton et la base de Lagrange. La fonction à interpoler est le cosinus, et les points d'interpolations sont tirés au hasard dans l'intervalle $[-1, 1]$. On tire N points et l'on calcule le polynôme d'interpolation en utilisant une base puis l'autre. On mesure le temps mis pour faire le calcul dans chacune des bases.

Le tableau 2 montre les résultats pour différentes valeurs de N . On constate assez clairement un avantage pour la base de Newton. Attention cependant, cette avantage est dû à l'utilisation d'un cache pour le calcul des différences divisées : sans ce cache, le coût du calcul des différences divisées augmente de manière exponentielle et rend la méthode inutilisable. Enfin, ces mesures sont à prendre avec précaution, les algorithmes n'ayant pas été particulièrement optimisés.

N	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Lagrange (s)	0.032	0.113	0.246	0.423	0.654	0.953	1.286	1.716	2.142	2.640
Newton (s)	0.015	0.049	0.094	0.165	0.244	0.353	0.484	0.627	0.782	0.965

TABLE 2 – Efficacité des différentes méthodes de calculs

2 Interpolation polynomiale par morceau : splines

2.1 Définition d'une spline

Dans toute cette partie, on notera f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} que l'on souhaite interpoler aux points x_0, \dots, x_n (tous distincts).

On souhaite ici mettre en place un algorithme permettant de calculer une fonction d'interpolation s dite "spline".

Définition 2 (Fonction spline). *Soit s une fonction de $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} et x_0, \dots, x_n $n + 1$ points d'interpolations. s est une spline d'interpolation de f de degré m si elle respecte ces trois propriétés :*

1. Les fonctions f et s sont égales aux points x_0, \dots, x_n
2. La fonction s est continue et ses dérivées d -ièmes également pour d allant de 0 à $m - 1$
3. La fonction s est polynomiale de degré m sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour i allant de 0 à $n - 1$

On se place maintenant sur un intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ avec i fixé entre 0 et $n - 1$ et dans le cas d'une spline cubique ($m = 3$) En dérivant deux fois, on obtient avec la troisième propriété :

$$s''(x) = \frac{(x_{i+1} - x)M_i + (x - x_i)M_{i+1}}{h_i}$$

avec $h_i = x_{i+1} - x_i$, $M_i = s''(x_i)$. On connaît donc les $(h_i)_i$ mais les $(M_i)_i$ restent des inconnus

En intégrant successivement deux fois on obtient les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} s''(x) &= \frac{(x_{i+1} - x)M_i + (x - x_i)M_{i+1}}{h_i} \\ s'(x) &= \frac{-(x_{i+1} - x)^2 M_i + (x - x_i)^2 M_{i+1}}{2h_i} + A_i \\ s(x) &= \frac{(x_{i+1} - x)^3 M_i + (x - x_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + C_i(x_{i+1} - x) + D_i(x - x_i) \end{aligned}$$

avec $A_i = D_i - C_i$, et on note de plus $y_i = f(x_i)$. Ainsi on obtient une expression des inconnues C_i et D_i en fonction des M_i à partir de la première propriété de la définition (les valeurs aux points de subdivision).

$$C_i = \frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i M_i}{6} \quad D_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i M_{i+1}}{6}$$

Il ne nous reste donc plus qu'à calculer les $(M_i)_i$ pour avoir une expression explicite de notre spline sur chacun des intervalles. Pour cela, on utilise la continuité de s' aux points de subdivision et on obtient pour le point x_i pour i allant de 1 à $n - 1$:

$$\frac{h_{i-1} M_i}{2} + A_{i-1} = \frac{h_i M_i}{2} + A_i$$

Soit

$$M_i = 2 \frac{A_i - A_{i-1}}{h_i - h_{i-1}}$$

En développant les A_{i-1} et A_i on obtient finalement

$$\frac{2}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{3(h_{i-1} + h_i)}M_{i+1} + \frac{h_i}{3(h_{i-1} + h_i)}M_{i-1} = \frac{2}{h_{i-1} + h_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right)$$

Ce qui nous donne $n - 1$ équations. Il nous manque alors deux équations pour pouvoir déterminer les $(M_i)_i$, ces dernières vont être données par les conditions limites aux points x_0 et x_n . Il ne restera plus alors qu'à résoudre un système linéaire que nous pouvons écrire sous forme d'un système matriciel $AM = B$ avec M le vecteur colonne des $(M_i)_i$, A une matrice carrée de taille $n - 1$ donc les coefficients sont donnés par l'équation ci-dessus et B un vecteur colonne partiellement donné par le terme de droite de la précédente équation et complété par les conditions limites. Au vu des équations, on remarque que le calcul est beaucoup plus simple avec des points équidistants (et donc égalité des $(h_i)_i$)

2.2 Cas d'une spline naturelle

Définition 3 (Spline naturelle). *On appelle une s une spline naturelle si s est une spline et que son accélération au bord de son intervalle de définition est nulle.*

Dans ce cas, la résolution du système linéaire évoqué précédemment est simple, les conditions nous donnent M_0 et M_n tous deux nuls et on obtient la matrice tridiagonale A suivante pour calculer les M_i aux points intérieurs :

$$\begin{bmatrix} 2/3 & h_1/3(h_0 + h_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_2/3(h_1 + h_2) & 2/3 & h_3/3(h_1 + h_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_3/3(h_2 + h_3) & 2/3 & h_4/3(h_2 + h_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-2}/3(h_{n-3} + h_{n-2}) & 2/3 & h_{n-1}/3(h_{n-3} + h_{n-2}) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & h_{n-1}/3(h_{n-2} + h_{n-1}) & 2/3 \end{bmatrix}$$

Et la matrice B défini par $b_i = \frac{2}{h_{i-1} + h_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right)$. On note par ailleurs que si les points sont équidistants, la matrice A est symétrique et de termes constants sur chacune de ses trois diagonales.

2.3 Convergence d'une spline

Proposition 2.3.1 (Convergence en norme infinie). *Soit f une fonction continue de $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} et $(X_n)_n$ une famille de subdivision de $[a, b]$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(X_n) = 0$. Alors on a convergence en norme infinie de la suite des splines $(s_n)_n$ interpolées pour les subdivisions X_n vers f . Avec $\delta(X_n)$ la distance maximale séparant deux points de la subdivision X_n*

Nous allons vérifier cette proposition en prenant pour exemple la fonction f définie par :

$$f(x) = 2(1 + \tanh(x)) - x/10 \text{ sur l'intervalle } [-6, +6].$$

L'avantage de la convergence en norme infinie est qu'elle est très visuelle. Et on voit bien à l'aide de la figure 6 que la convergence est très rapide. Avec 15 points, le résultat est déjà très satisfaisant et donne (visuellement) le même rendu qu'en le faisant avec 90 points. La courbe obtenue avec les 9 points d'interpolation nous permet de comprendre les limites de la méthode (pour un nombre faible de points en tout cas). On voit que sur l'intervalle $[-2, +2]$, la spline approche moins bien la fonction que sur le reste ; en dehors des points de subdivision facilement repérables car points sécants des courbes.

Si on se repenche sur les calculs de la section précédente, on constate que le vecteur B correspond à une approximation de la dérivée seconde aux points de subdivision. La matrice A est dans notre cas symétrique

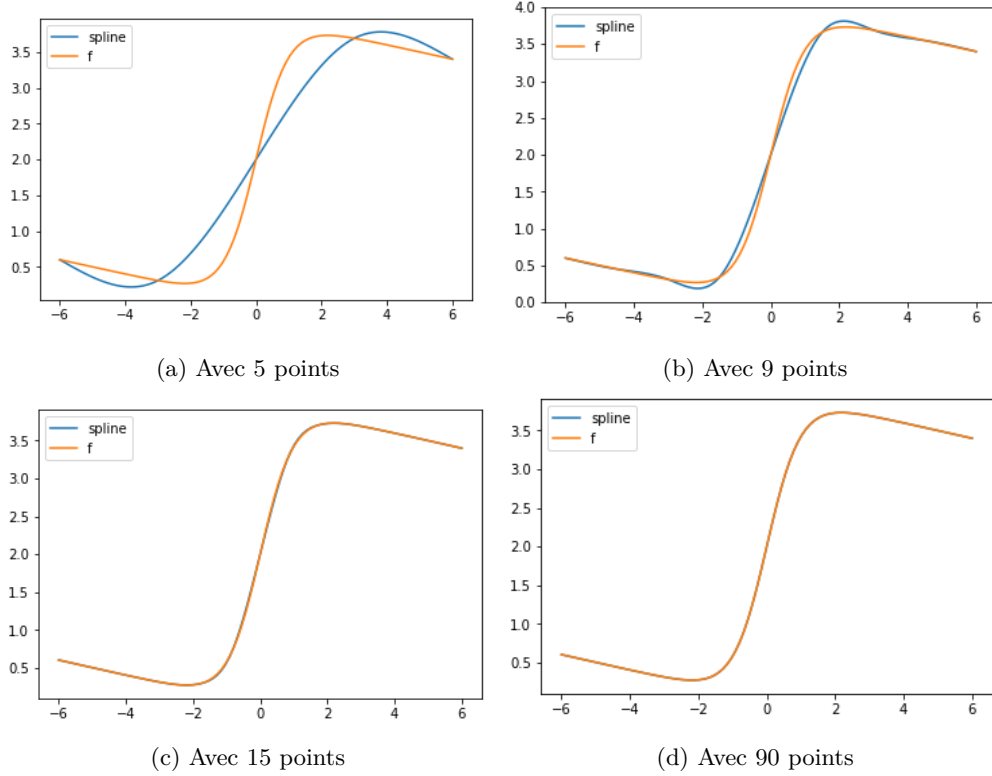


FIGURE 6 – Interpolation de la fonction par spline avec différents nombre de points équidistants

et le terme dominant sur chaque ligne est celui de la diagonale principale. On a donc une grande corrélation entre la dérivée seconde de la fonction f et les termes M_i . Ainsi si on prend la dérivée troisième de notre spline constante égale à $\frac{M_{i+1} - M_i}{h_i}$, cela nous donne grossièrement une approximation de la dérivée troisième de f . Ainsi, si la dérivée troisième de f varie, la non-continuité de la dérivée troisième de notre fonction spline sera de plus en plus importante alors que la fonction que nous souhaitons interpoler est ici infiniment dérivable (et de dérivées continues) sur tout l'intervalle. Les constantes apportées par continuité des premières dérivées (C_i et D_i) qui n'interviennent pas dans la dérivée troisième vont assurer les raccordements aux points de subdivision mais cela entraîne des mauvaises approximations de la dérivée première en ces points.

N	5	6	7	9	10	12	15	20	25	30	45
Erreur	0.715	0.199	0.392	0.210	0.014	0.006	0.032	0.005	0.002	0.001	0.0001

TABLE 3 – Erreur en norme infinie en fonction du nombre de points d'interpolation

2.4 Autres exemples

Pour vérifier le bon fonctionnement de la méthode et de l'algorithme, on peut tester avec une fonction de dérivée troisième nulle, c'est-à-dire une fonction polynomiale de degré 2. Avec des points équidistants, le calcul littéral nous donne pour tout i allant de 1 à $n - 1$, $b_i = 2$ puis $M_i = 2a$. avec a le coefficient de degré 2 de la fonction f . On obtient alors $s''(x) = 2a$ donc s et f ont des dérivées secondes égales et les valeurs aux points x_i et x_{i+1} nous assurent que s et f sont égales.

On constate néanmoins que la spline déterminées par l'algorithme n'est pas strictement égale à la fonction f (figure 7). Néanmoins, si on compare avec l'interpolation obtenue avec le même nombre de points, le résultat

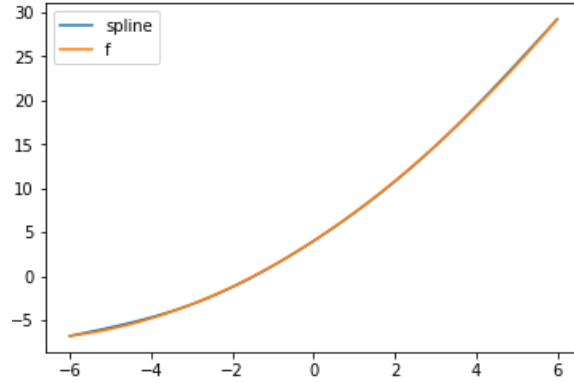


FIGURE 7 – Interpolation spline d'un polynôme de degré 2 avec 5 points

est bien meilleur. La légère erreur est peut être supputable à des approximations de calculs en base binaire ou à la méthode de résolution du système linéaire.

A l'inverse, on peut tester avec une autre fonction plus semblable au premier exemple où les dérivées sont importantes $f(x) = \arctan(x^3)$

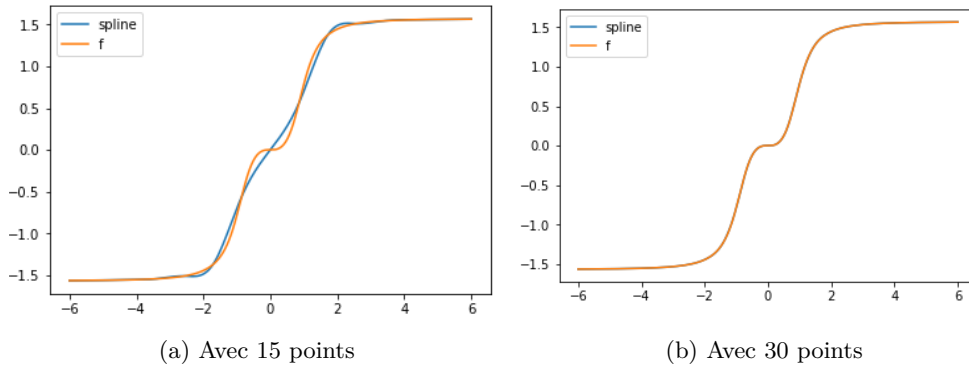


FIGURE 8 – Interpolation de la fonction par spline avec différents nombre de points équidistants

On retrouve bien les mêmes caractéristiques pour les erreurs que pour le premier exemple 6. Pour améliorer l'approximation, il y a deux possibilités :

1. Augmenter le nombre de points dans la subdivision
2. Augmenter le degré de la spline

Bien évidemment, la première solution rallonge le temps de calcul, notamment pour le système matriciel de taille $(n - 1)^2$ et nous assure la convergence uniforme. Pour la deuxième solution, de même qu'une spline cubique est limitée pour les fonctions à dérivée troisième importante, augmenter le degré n'est utile que si on finira par tomber sur une dérivée à faibles valeurs, d'autant plus qu'augmenter le nombre de degré sans augmenter le nombre de points diminue l'exactitude des termes dérivés approximés dans la matrice B . Et augmenter le degré de la matrice va alourdir la matrice (mais pas en taille comme la première méthode), diminuant son conditionnement et l'efficacité des méthodes de résolutions numériques.