

Relatório de Projeto de Investigação Operacional

21 de Março de 2023

Diogo Cunha (a100481)

Rui Cerqueira (a100537)

João Valente (a100540)

Guilherme Rio (a100898)

Diogo Barros (a100751)

Licenciatura em Engenharia informática

Universidade do Minho

Parte 1

.0

O número utilizado foi 100898, correspondente ao mais elevado entre os elementos do grupo:

contentores	
comprimento	quantidade disponível
11	ilimitada
10	1
7	10

itens	
comprimento	quantidade
1	0
2	10
3	10
4	10
5	5

.1 Formulação do problema

Descrição do problema: O problema de empacotamento consiste em determinar como os itens devem ser empacotados em contentores de forma a minimizar o comprimento total dos contentores usados, tendo em conta as suas diferentes quantidades e comprimentos.

Objetivo: Minimizar o número total de contentores utilizados alocando todos os itens.

Variáveis de decisão:

x_i representa um método possível de empacotamento.

(i pertence a $\{1..32\}$)

y_i representa o número de contentores de comprimento i .

(i pertence a $\{7,10,11\}$)

Coerência global do modelo: O modelo deve garantir que todos os itens sejam atribuídos a contentores, sem exceder a capacidade dos mesmos. No mais, deve ser garantido que os contentores utilizados sejam mínimos. Isso pode ser feito através de restrições lineares que garantam que a soma do comprimento dos itens atribuídos a um contentor não exceda a sua capacidade. A função objetivo será a soma dos comprimentos dos contentores utilizados.

Justificação: O caso de empacotamento com restrição de tamanho e capacidade é um problema bastante comum. As restrições ajudam a que o empacotamento seja feito de forma correta de acordo com a capacidade de cada contentor, já as variáveis de decisão ajudam a representar a alocação dos itens.

.2 Modelo de programação linear

Variáveis de decisão:

x_i : Variável que representa o método de empacotamento i , $i = \{1..32\}$.

Métodos de empacotamento no contentor de comprimento 11	Itens colocados
x1	5, 5
x2	5, 4, 2
x3	5, 3, 3
x4	5, 3, 2
x5	5, 2, 2, 2
x6	4, 4, 3
x7	4, 4, 2
x8	4, 3, 3
x9	4, 3, 2
x10	4, 2, 2, 2
x11	3, 3, 3, 2
x12	3, 3, 2, 2
x13	3, 2, 2, 2, 2
x14	2, 2, 2, 2, 2

Métodos de empacotamento no contentor de comprimento 7	Itens colocados
x27	5, 2
x28	4, 3
x29	4, 2
x30	3, 3
x31	3, 2, 2
x32	2, 2, 2

Métodos de empacotamento no contentor de comprimento 11	Itens colocados
x15	5, 5
x16	5, 4
x17	5, 3, 2
x18	5, 2, 2
x19	4, 4, 2
x20	4, 3, 3
x21	4, 3, 2
x22	4, 2, 2, 2
x23	3, 3, 3
x24	3, 3, 2, 2
x25	3, 2, 2, 2
x26	2, 2, 2, 2, 2

y_i : Número de contentores de comprimento i , $i = \{7,10,11\}$.

$y_i \geq 0$ e inteiro.

Parâmetros:

- Número de contentores de comprimento i disponíveis, $i = \{7,10,11\}$.
 - Para $i = 11$, temos contentores ilimitados disponíveis.
 - Para $i = 10$, apenas temos 1 contentor disponível.
 - Para $i = 7$, temos 10 contentores disponíveis.
- Número de itens de comprimento j disponíveis, $j = \{2..5\}$.
 - Para $j = 2$ temos 10 itens.
 - Para $j = 3$ temos 10 itens.
 - Para $j = 4$ temos 10 itens.
 - Para $j = 5$ temos 5 itens.

Função objetivo: Consiste na soma dos comprimentos dos contentores utilizados.

min: $11 y_{11} + 10 y_{10} + 7 y_7$

Isto trata-se de um problema de minimização pois pretende-se minimizar a soma dos comprimentos dos contentores utilizados.

Restrições:

- Definir a quantidade de contentores.
 - Contentores de 11: $\sum_{\{0 \leq i \leq 14\}} x_i$
 - Contentores de 10: $\sum_{\{15 \leq i \leq 26\}} x_i$
 - Contentores de 7: $\sum_{\{27 \leq i \leq 32\}} x_i$
- Garantir a alocação de todos os itens.
 - $\sum_{\{0 \leq i \leq 32\}} m_j$, em que m representa o número de itens do comprimento j, no método xi ($j \in \{2, 3, 4, 5\}$).
- Garantir que os itens armazenados num dado contentor não excedam o comprimento do mesmo.

.3

- Ficheiro de input:

```
/* Função objectivo: minimizar o número de contentores a usar */

min: 11 y11 + 10 y10 + 7 y7;

/* min: 11 x1 + 11 x2 + 11 x3 + 11 x4 + 11 x5 + 11 x6 + 11 x7 + 11 x8 + 11 x9 + 11 x10 + 11 x11 + 11 x12 + 11 x13 + 11 x14
+ 10 x15 + 10 x16 + 10 x17 + 10 x18 + 10 x19 + 10 x20 + 10 x21 + 10 x22 + 10 x23 + 10 x24 + 10 x25 + 10 x26
+ 7 x27 + 7 x28 + 7 x29 + 7 x30 + 7 x31 + 7 x32; */

/* Tabelas */

//Contentor de comprimento 11:

ITEM11.5: 2 x1 + 1 x2 + 1 x3 + 1 x4 + 1 x5                                     <= 5;
ITEM11.4:      1 x2                                     + 2 x6 + 2 x7 + 1 x8 + 1 x9 + 1 x10      <= 10;
ITEM11.3:      2 x3 + 1 x4                                     + 1 x6 + 2 x8 + 1 x9 + 3 x11 + 2 x12 + 1 x13 <= 10;
ITEM11.2:      1 x2 + 1 x4 + 3 x5 + 1 x7 + 2 x9 + 3 x10 + 1 x11 + 2 x12 + 4 x13 + 5 x14 <= 10;

//Contentor de comprimento 10:

ITEM10.5: 2 x15 + 1 x16 + 1 x17 + 1 x18                                     <=5;
ITEM10.4:      1 x16 + 2 x19 + 1 x20 + 1 x21 + 1 x22 + 3 x23 + 2 x24 + 1 x25 + 5 x26 <=10;
ITEM10.3:      1 x17 + 2 x20 + 1 x21 + 3 x23 + 2 x24 + 1 x25 + 5 x26 <=10;
ITEM10.2:      1 x17 + 2 x18 + 1 x19 + 1 x21 + 3 x22 + 2 x24 + 3 x25 + 5 x26 <=10;

//Contentor de comprimento 7:

ITEM7.5: 1 x27                                     <=5;
ITEM7.4:      1 x28 + 1 x29 + 2 x30 + 1 x31 + 3 x32 <=10;
ITEM7.3:      1 x28 + 2 x30 + 1 x31 + 3 x32 <=10;
ITEM7.2: 1 x27 + 1 x29 + 2 x31 + 3 x32 <=10;

/* Restrições */

//Garantir o uso de todos os itens
2 x1 + 1 x2 + 1 x3 + 1 x4 + 1 x5 + 2 x15 + 1 x16 + 1 x17 + 1 x18 + 1 x27 = 5;
1 x2 + 2 x6 + 2 x7 + 1 x8 + 1 x9 + 1 x10 + 1 x16 + 2 x19 + 1 x20 + 1 x21 + 1 x22 = 10;
2 x3 + 1 x4 + 1 x6 + 2 x8 + 1 x9 + 3 x11 + 2 x12 + 1 x13 + 1 x17 + 2 x20 + 1 x21 + 3 x23 + 2 x24 + 1 x25 + 1 x28 + 2 x30 + 1 x31 = 10;
1 x2 + 1 x4 + 3 x5 + 1 x7 + 2 x9 + 3 x10 + 1 x11 + 2 x12 + 4 x13 + 5 x14 + 1 x17 + 2 x18 + 1 x19 + 1 x21 + 3 x22 + 2 x24 + 3 x25 + 5 x26 + 1 x27 + 1 x29 + 2 x31 + 3 x32 = 10;

/* Definir a quantidade de contentores */

//Contentores de 11
y11 = 1 x1 + 1 x2 + 1 x3 + 1 x4 + 1 x5 + 1 x6 + 1 x7 + 1 x8 + 1 x9 + 1 x10 + 1 x11 + 1 x12 + 1 x13 + 1 x14 ;
y11 >= 0;

//Contentores de 10
y10 = 1 x15 + 1 x16 + 1 x17 + 1 x18 + 1 x19 + 1 x20 + 1 x21 + 1 x22 + 1 x23 + 1 x24 + 1 x25 + 1 x26;
y10 <= 1;

//Contentores de 7
y7 = 1 x27 + 1 x28 + 1 x29 + 1 x30 + 1 x31 + 1 x32;
y7 <= 10;

/* Definição de variáveis */
int y11 y10 y7 x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10 x11 x12 x13 x14 x15 x16 x17 x18 x19 x20 x21 x22 x23 x24 x25 x26 x27 x28 x29 x30 x31 x32;
```

.4

- Ficheiro output:

Variables	MILP ...	MILP ...	MILP ...	result
	120	116	115	115
y11	9	9	7	7
y10	0	1	1	1
y7	3	1	4	4
x1	0	0	0	0
x2	0	0	1	1
x3	1	2	1	1
x4	0	0	0	0
x5	2	3	1	1
x6	5	4	4	4
x7	0	0	0	0
x8	0	0	0	0
x9	0	0	0	0
x10	0	0	0	0
x11	1	0	0	0
x12	0	0	0	0
x13	0	0	0	0
x14	0	0	0	0
x15	0	0	0	0
x16	0	0	0	0
x17	0	0	0	0
x18	0	0	0	0
x19	0	1	0	0
x20	0	0	1	1
x21	0	0	0	0
x22	0	0	0	0
x23	0	0	0	0
x24	0	0	0	0
x25	0	0	0	0
x26	0	0	0	0
x27	2	0	2	2
x28	0	0	0	0
x29	1	0	0	0
x30	0	1	0	0
x31	0	0	2	2
x32	0	0	0	0

.5

Esta é a solução ótima pois aloca todos os itens num conjunto de contentores no qual a soma do seu comprimento é igual a soma do comprimento dos itens na sua totalidade, logo não houve nenhum espaço vazio em nenhum dos contentores.

Plano de empacotamento:

Contentor de comprimento 11	Itens colocados
1 x2	5, 4, 2
1 x3	5, 3, 3
1 x5	5, 2, 2, 2
4 x6	4 * (4, 4, 3)

Contentor de comprimento 10	Itens colocados
1 x20	4, 3, 3

Contentor de comprimento 7	Itens colocados
2 x27	2 * (5, 2)
2 x31	2 * (3, 2, 2)

Soma do comprimento dos contentores usados:

- Foram usados 7 contentores de comprimento 11, 1 de comprimento 10 e 4 de comprimento 7, logo: $11 * 7 + 10 * 1 + 7 * 4 = 115$, ou seja o comprimento total dos contentores é igual ao comprimento total dos itens.

.6

Validação do modelo:

Conteitor de 11

$$\left. \begin{array}{l} 1x_2: 5+4+2 \\ 1x_3: 5+3+3 \\ 1x_5: 5+2+2+2 \\ 4x_6: 4 \times (4+4+3) \end{array} \right\} = 77$$

Conteitor de 10

$$1x_{20}: 4+3+3 = 10$$

Conteitor de 7

$$\left. \begin{array}{l} 2x_{27}: 2 \times (5+2) \\ 2x_{37}: 2 \times (3+2+2) \end{array} \right\} = 28$$
$$\text{Conteitor de 11} + \text{Conteitor de 10} + \text{Conteitor de 7} = 77 + 10 + 28 = 115$$

nº de itens de comprimento 5: 3 usados no Conteitor 11 + 2 usados no Conteitor 7 = 5

nº de itens de comprimento 4: 9 usados no Conteitor 11 + 1 usado no Conteitor 10 = 10

nº de itens de comprimento 3: 6 usados no Conteitor 11 + 2 usados no Conteitor 10 + 2 usados no Conteitor 7 = 10

nº de itens de comprimento 2: 4 usados no Conteitor 11 + 6 usados no Conteitor 7 = 10