

3º Trabalho de Laboratório:

Bola Saltitante



Curso: Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

UC: Modelação e Simulação

1º Semestre 2021/2022 (P2)

Docente: Alberto Vale

Autores: Grupo nº 20

- (96170) Daniel Alexandre Mendes Pacheco daniel.pacheco@tecnico.ulisboa.pt

- (96258) José Miguel Valério Antunes jose.m.valerio.antunes@tecnico.ulisboa.pt

- (96265) Luís Das Neves Alves Maçorano luis.macorano@tecnico.ulisboa.pt

- (96317) Rui Pedro Canário Daniel ruipcdaniel@tecnico.ulisboa.pt

Compromisso de Ética de Originalidade

O grupo de alunos acima identificado garante que o texto deste relatório e todo o software e resultados entregues foram inteiramente realizados pelos elementos do grupo, com uma participação significativa de todos eles, e que nenhuma parte do trabalho ou do software e resultados apresentados foi obtida a partir de outras pessoas ou fontes.

Data: 4/02/2022

 ndice

Introdução	2
P1.	2
P2.	6
P3.	7
P4.	9
Conclusão.....	10
Bibliografia	10

Introdução

O objetivo deste trabalho é simular um sistema dinâmico híbrido, ou seja, em que o sistema   constituído por estados contínuos e estados discretos. Este estudo é feito através da simulação de uma bola, assumindo que esta é um ponto material que se desloca por ação da força da gravidade.

P1.

Em primeiro lugar, iremos estudar o movimento da bola num referencial vertical, definido pelo eixo z , com o sentido positivo para cima e com o zero ao nível de uma superfície plana em que a bola vai impactar.

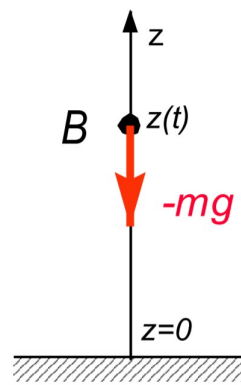


Figura 1: Bola que cai na vertical

Desprezando o atrito, pela segunda Lei de Newton, temos a seguinte expressão para caracterizar o movimento livre da bola:

$$m\ddot{z} = -mg \Leftrightarrow \ddot{z} = -g \quad (1)$$

Utilizando como variáveis de estado a posição z , e a sua derivada, v_z , temos o modelo híbrido da figura 2 que caracteriza o sistema.

Existe um estado discreto que define qual o modelo dinâmico do estado contínuo que está ativo em cada momento, bem como as condições iniciais a aplicar. A transição do estado discreto é sempre para ele próprio, alterando apenas a condição inicial. Esta ocorre quando se verifica $z \leq 0$ e provoca uma alteração de sinal em v_z .

Sempre que a bola embate no pavimento, o seu movimento descendente $v_z < 0$ passa para um movimento ascendente $v_z > 0$. O módulo da velocidade imediatamente após o choque é obtido pelo produto do módulo da velocidade imediatamente antes do choque por um fator de atenuação α , que verifica $0 \leq \alpha \leq 1$. Este traduz a perda de energia (mecânica) ocorrida durante o choque, devida a dissipação.

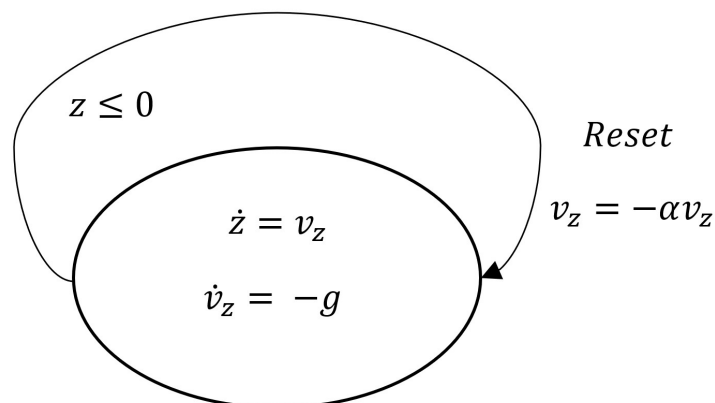


Figura 2: Modelo híbrido do movimento vertical da bola considerando um impacto

Considerando que $U = 0$ para $z = 0$, a energia mecânica da bola é dada por:

$$E_M = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \quad (2)$$

$$E_{M \text{ inicial}} = E_{M0} = \frac{1}{2}mv_{0z}^2 + mgz_0 \quad (3)$$

Criámos um diagrama de blocos no SIMULINK que permite simular o movimento vertical da bola quando esta colide com o solo, apresentado na figura 3. Considerámos um fator de atenuação $\alpha = 0,8$; uma altura inicial $z_0 = 10$ m, uma velocidade inicial v_{0z} nula e obtemos os resultados apresentados na figura 4.

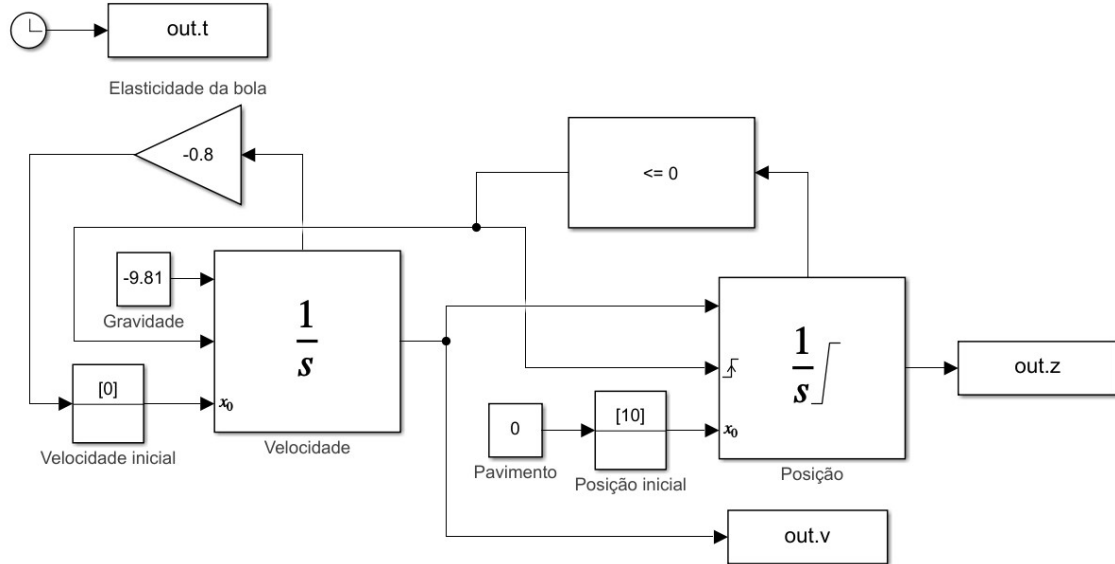


Figura 3: Diagrama de blocos do SIMULINK para a simulação da bola saltitante num referencial vertical

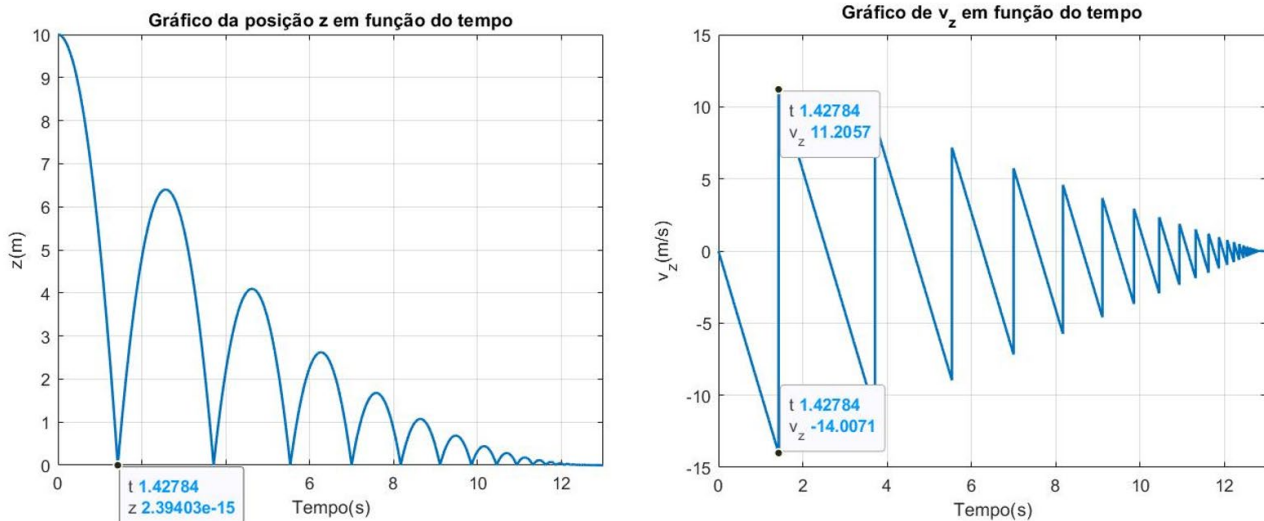


Figura 4: Gráficos de z em função do tempo (esquerda) e de v_z em função do tempo (direita)

Verificamos que a bola apresenta o movimento expectável. Quando $z = 0$ e $v_z \leq 0$ a bola colide com o solo e ressalt, causando uma troca de sinal em v_z . Após o impacto, o módulo de v_z é menor do que era imediatamente antes do impacto, pois admitimos que há uma perda de energia. A evolução do estado é então retomada de acordo com o modelo contínuo, e assim sucessivamente.

Entre cada colisão com o solo, a bola comporta-se segundo as equações do movimento:

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4)$$

$$v_z(t) = v_{0z} - gt \quad (5)$$

Podemos então determinar o tempo até ao primeiro choque, para a situação em estudo, na qual $v_{0z} = 0$:

$$z(t) = 0 \Rightarrow T_l = \sqrt{\frac{2z_0}{g}} \quad (6)$$

Neste caso, temos pela equação (6) que $T_l \approx 1,4278$ s, valor também obtido na simulação (ponto assinalado na parte esquerda da figura 4). Sendo v a velocidade imediatamente após o 1  choque, pela equação (5) obtemos:

$$v_{\text{antes da 1}^\text{a} \text{ colisão}} = v_z \left(\sqrt{\frac{2z_0}{g}} \right) = v_{0z} - g \sqrt{\frac{2z_0}{g}} \quad (7)$$

$$v = -\alpha v_{\text{antes da 1}^\text{a} \text{ colisão}} \quad (8)$$

Obtém-se então, pela equação (7), que $v_{\text{antes da 1}^\text{a} \text{ colisão}} = -14$ m/s, e pela equação (8) que $v = 11,2$ m/s, valores que se verificam na parte direita da figura 4.

A partir do contacto no primeiro choque, teríamos que o tempo de N choques seria:

$$T_N = \frac{2v}{g} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k + T_l \quad (9)$$

Logo o tempo de um número infinito de choques  :

$$T_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2v}{g} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k + T_l = \frac{2v}{g} \frac{1}{1 - \alpha} + T_l < \infty \quad (10)$$

Devido à equação (10), verifica-se que quando a simulação dura muito tempo, há um número infinito de choques (de transições do estado discreto) num intervalo de tempo finito. Este fen meno chama-se efeito de Zeno. Este é, de um modo geral, indesejável, pois o sistema híbrido é indefinido após a ocorrência do mesmo. Para  l m disto, ocorre o *crash* da simulação, que apresentamos na figura 5.

```

Simulation 1
03:13 PM Elapsed: 1 sec

An error occurred while running the simulation and the simulation was terminated
Caused by:
• Simulink will stop the simulation of model 'Msimlab3' because the 1 zero crossing signal(s)
  identified below caused 1000 consecutive zero crossing events in time interval between
  12.850588106390745 and 12.850588106985327.

-----
Number of consecutive zero-crossings : 1000
Zero-crossing signal name : RelopInput
Block type : RelationalOperator
Block path : 'Msimlab3/Compare To Zero/Compare'

```

Figura 5: Mensagem de erro quando ocorre o *crash* da simulação devido ao efeito de Zeno

A mensagem de erro indica que foi encontrado um intervalo de tempo reduzido e finito onde ocorrem 1000 choques consecutivos, ou seja, estamos a detetar o efeito de Zeno. Isto leva à interrupção da simulação.

De modo a garantir a viabilidade do programa, solucionamos este problema em “*Model Settings*→*zero-crossing detection*→*algorithm*” colocando em “*Adaptative*” e em “*Model Settings*→*Solver selection*→*Type*” colocado em “*Fixed-step*” com “*Solver*” igual a “*ode1(Euler)*” e “*Fixed-step size*” igual a 0,001 s, o qual aplicamos para todas as simulações realizadas neste relatório.

Pela equação (10), obtemos $T_\infty \approx 12,85$ s, valor que se verifica como limite de tempo da simulação computacional, na figura 5.

Iremos agora estudar o efeito da variação do fator de atenuação. Realizámos três simulações do sistema, utilizando para o fator de atenuação α os valores {0; 0,5; 1}, com $z_0 = 10$ m e $v_0 = 0$.

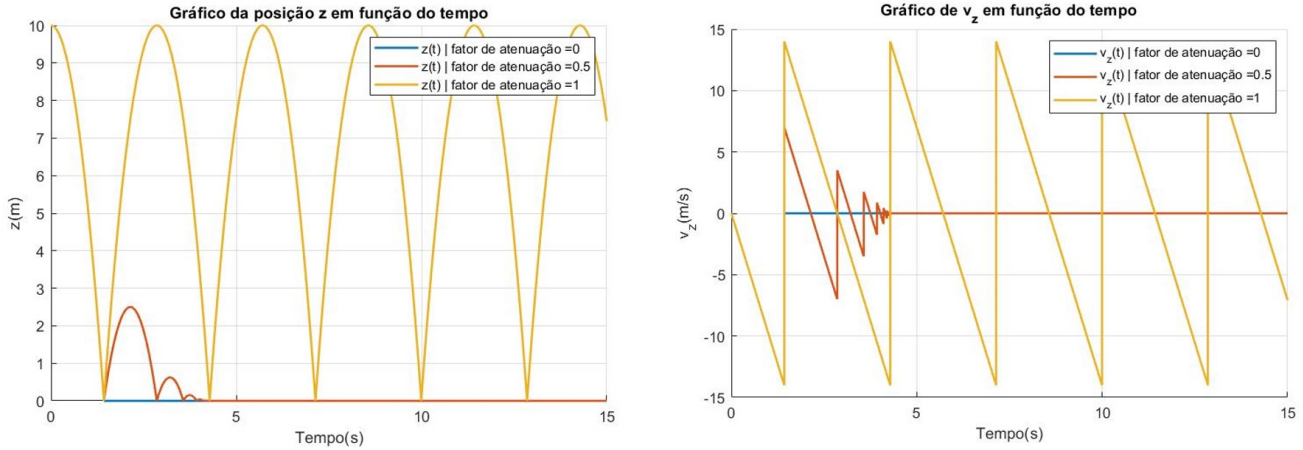


Figura 6: Gráfico da posição z em função do tempo (esquerda), e de v_z em função do tempo (direita), para diferentes valores de α

Através da análise da figura 6 verifica-se que para $\alpha = 0$, ocorre o anulamento de v_z após o primeiro choque com o pavimento. Por outro lado, para $\alpha = 1$, o módulo de v_z mantém-se constante após cada impacto. Isto leva à conservação da energia, logo pela equação (2) a altura máxima atingida após cada colisão é sempre igual a 10 m, sendo que neste ponto v_z se anula. Para $\alpha = 0,5$, temos a situação na qual após cada colisão, existe dissipação de 75% da energia mecânica da bola para o pavimento.

Isto ocorre dado que, pelas equações (2) e (8):

$$E_M \text{ depois do choque} = \alpha^2 E_M \text{ antes do choque} \quad (11)$$

$$E_{\text{dissipada relativa}} = \frac{E_M \text{ antes do choque} - E_M \text{ depois do choque}}{E_M \text{ antes do choque}} = (1 - \alpha^2) \quad (12)$$

Podemos então concluir que o parâmetro α traduz a perda de energia ocorrida durante o choque, devida à dissipação, sendo que quanto menor for α , maior será a energia dissipada em cada colisão. Logo, em cada choque quanto menor for α , menor será a altura máxima atingida após este, e menor será o tempo até à próxima colisão.

Iremos agora estudar o efeito da variação da velocidade inicial. Realizámos três simulações do sistema, utilizando para v_{0z} os valores $\{-10; 0; 10\}$ m/s, com $z_0 = 10$ m e $\alpha = 0,8$.

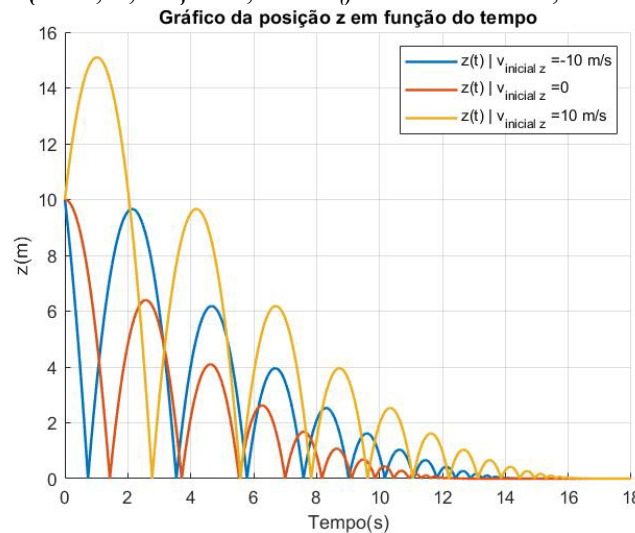


Figura 7: Gráfico da posição z em função do tempo, para diferentes valores de v_{0z}

Através da análise da figura 7 confirma-se que v_{0z} dita o sentido de lançamento da bola na direção vertical, sendo que o seu movimento respeita a equação (4).

Temos também que v_{0z} caracteriza a energia inicial da bola. Pela equação (3), quanto maior for v_{0z} , maior será E_{M0} , e maior será o número de choques que irá levar até que esta energia seja desprezável. Podemos então verificar que para $v_0 = 10$ m/s são necessários um maior nº de choques para que E_M fique aproximadamente nula, comparativamente com o caso em que $v_{0z} = 0$.

Relativamente ao caso em que $v_{0z} = \pm 10$ m/s, temos que são necessários o mesmo número de choques para que E_M fique aproximadamente nula. No entanto, no caso em que $v_{0z} > 0$, temos que o tempo até ao 1º choque é maior, o que faz com que demore mais tempo até que E_M fique aproximadamente nula.

Para além dos gráficos “estáticos”, também produzimos um gráfico animado de modo a verificar a evolução da posição da bola na coordenada z ao longo do tempo, que apresentamos na figura 8. Podemos confirmar visualmente que o módulo da velocidade da componente z atinge os seus máximos locais sempre que a bola atinge o chão, pois no trajeto entre 2 colisões a energia mecânica é constante, sendo que a energia cinética atinge o seu máximo quando a energia potencial gravítica atinge o seu mínimo.

Também verificamos que, de facto, a velocidade da componente z se anula nos máximos locais de $z(t)$, sendo que estes pontos correspondem à transição do movimento vertical ascendente para o movimento vertical descendente. Isto ocorre porque a energia potencial gravítica atinge o seu máximo quando a energia cinética atinge o seu mínimo.



Figura 8: Gráfico animado da posição z em função do tempo

P2.

Modificámos a situação considerada em P1 de modo a contabilizar as perdas por atrito viscoso, adicionando uma nova força ao sistema. Como se pretende que esta força seja resistiva, contrariando o movimento, e com módulo proporcional à velocidade, temos que, sendo β uma constante real positiva, no caso linear a força é dada por:

$$F_a = -\beta v \quad (13)$$

Utilizando a segunda Lei de Newton para a posição z , chega-se ainda à equação:

$$m\ddot{z} = -mg - \beta v_z \Leftrightarrow \ddot{z} = -g - \frac{\beta}{m} v_z \quad (14)$$

Denominamos $\frac{\beta}{m} = \mu$ de constante de atrito. Acrescentando ao diagrama da figura 3 a aplicação da equação (14) à entrada do primeiro integrador, resulta o modelo da figura 9.

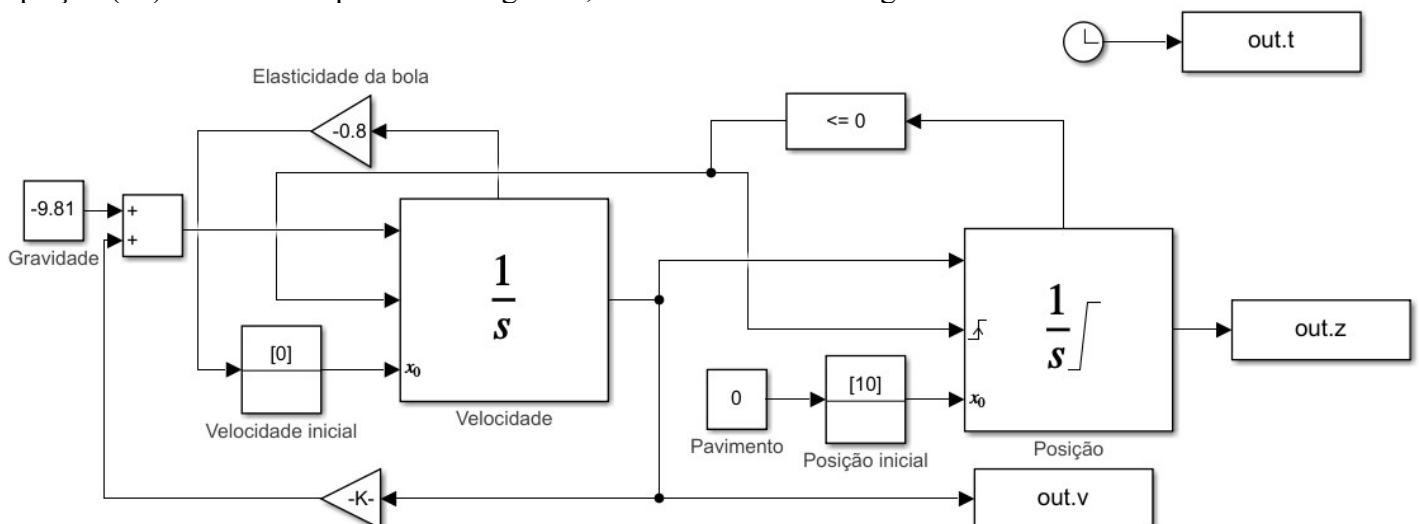


Figura 9: Diagrama de blocos do SIMULINK para a simulação da bola saltitante num referencial vertical, com atrito

Simulámos o sistema para diferentes valores de μ , considerando $\alpha = 0,8$; $z_0 = 10$ m; $v_{0z} = 0$ e obtemos os seguintes resultados.

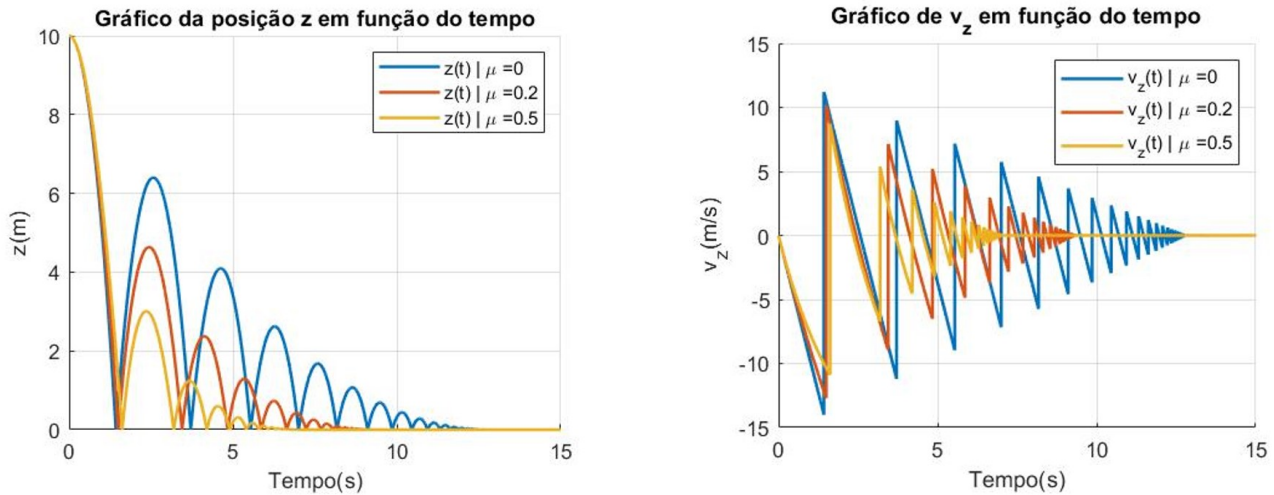


Figura 10: Gráfico da posição z em função do tempo (esquerda) e de v_z em função do tempo (direita)

Podemos observar pela parte esquerda da figura 10 que, até ao momento em que a bola atinge o chão pela primeira vez, o efeito do atrito não é muito visível, aumentando apenas ligeiramente o tempo de queda. No entanto, no primeiro ressalto, esta diferença torna-se muito mais notável, dado que a bola prossegue com uma energia mecânica nitidamente menor quanto maior for μ . Isto acontece porque é quando a bola se encontra próxima do chão que atinge o seu máximo de velocidade, o que significa que irá atingir também o máximo de intensidade da força de atrito, pois esta tem módulo proporcional à velocidade.

Assim, na situação com atrito ($\mu > 0$), não só a velocidade de ressalto será bastante inferior à situação sem atrito ($\mu = 0$), como também o atrito sofrido no início do momento de subida será muito intenso, explicando assim as diferenças encontradas na energia dissipada na proximidade de cada um dos ressaltos. Concluindo, no caso em que não existe atrito, a energia é apenas dissipada a cada ressalto. No caso com atrito, para além dessa dissipação, ainda existe dissipação de energia por parte do efeito da força de atrito, que é tanto mais severa quanto maior for μ e v_z .

A parte direita da figura 10 comprova o raciocínio anterior, verificando-se que as velocidades apenas começam a divergir perto do primeiro ressalto, afetando a velocidade de ressalto e, conseqüentemente, a subida da bola no mesmo.

P3.

Iremos agora estudar a situação em que a bola também possui uma velocidade constante segundo a horizontal, tendo um movimento a duas dimensões, representado na figura 11.

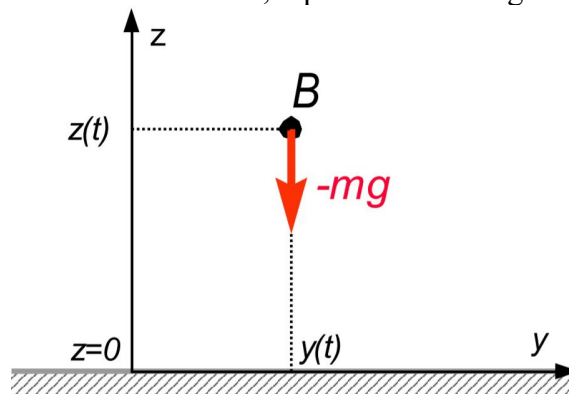


Figura 11: Movimento da esfera em duas dimensões

Nesta alínea assume-se que existem duas zonas de impacto, nas quais o fator de atenuação α difere da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \alpha = 0,8 & \text{para } y \leq 30 \text{ m} \\ \alpha = 0,4 & \text{para } y > 30 \text{ m} \end{cases} \quad (15)$$

Além disso, também se assume que a bola tem uma velocidade constante segundo a componente y . Nas simulações realizadas, consideramos $v_y = 10$ m/s e $y_0 = 0$. Sendo v_y constante, a aceleração da bola na

componente y será nula. Entre cada colisão com o solo, a bola comporta-se segundo a equação do movimento para a coordenada y :

$$y(t) = y_0 + v_y t \quad (16)$$

Simulou-se a evolução do movimento ao longo do tempo através do diagrama de blocos representado na figura 12, considerando $z_0 = 10$ m; $v_{0z} = 0$; $v_y = 10$ m/s e $y_0 = 0$, apresentando-se os resultados na figura 13.

Para implementar esta alteração no diagrama de blocos no SIMULINK, foi feito o seguinte raciocínio:

- Adicionou-se um novo integrador que, recebendo como condição inicial y_0 e como valor a integrar v_y , calcula a posição em y a cada instante.
- Colocou-se um bloco comparador à saída do integrador para se obter informação acerca de qual a zona de impacto em que a bola se encontra.
- À saída do comparador ter-se-á '1' se $y \leq 30$ m ou '0' se $y > 30$ m.
- Para obter α da zona em que a bola se encontra, basta realizar o produto entre a saída do comparador ou o seu inverso e a velocidade de ressalto v_z para os α pretendidos em cada uma das zonas.
- Somando os resultados de ambos estes produtos, ir-se-á obter a velocidade de ressalto v_z desejada.

É de notar ainda que, para fazer as operações matemáticas referidas, foi necessário converter os valores lógicos à saída do comparador e do inversor para "double".

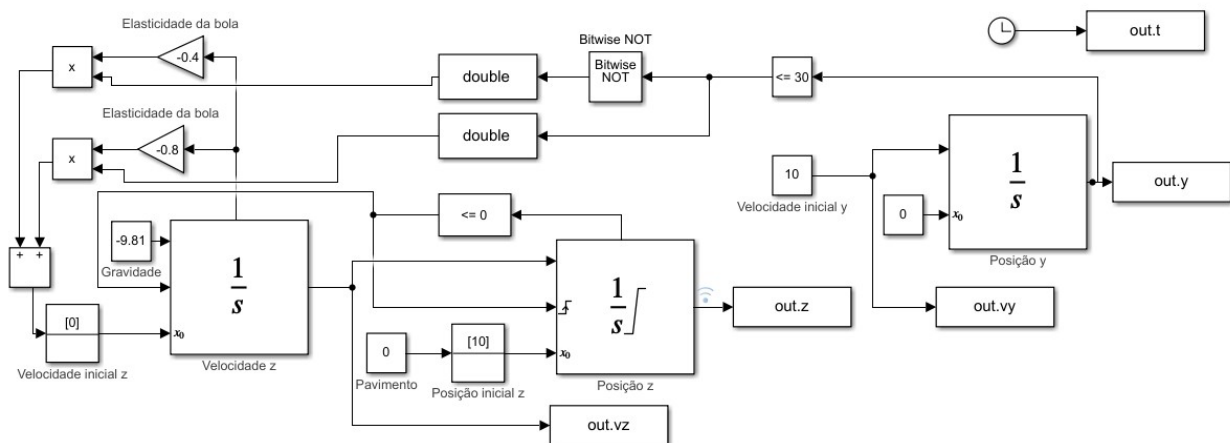


Figura 12: Diagrama de blocos do SIMULINK para a simulação da bola saltitante num plano

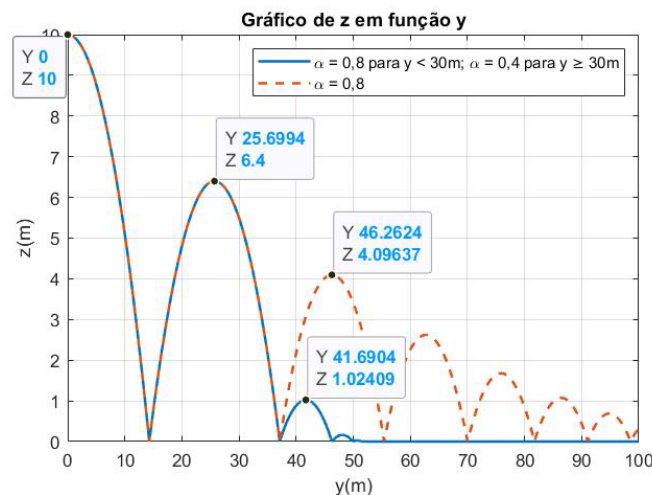


Figura 13: Gráfico de z em função de y , para o caso de um plano com duas zonas de impacto (azul) e de um plano de impacto uniforme (vermelho)

Desta forma, podemos verificar que numa primeira zona do plano de embate, para ressalto em $y \leq 30$ m, temos um maior α do que no caso em que $y > 30$ m (segunda zona).

Desta forma, na primeira zona temos que há uma menor energia dissipada nas colisões com o solo, sendo que na segunda zona, essa energia dissipada por colisão é bastante maior.

Arbitramos z_i e z_{ii} como dois pontos consecutivos nos quais $v_z(t)$ se anula, ou seja, nos quais a altura $z(t)$ é um máximo local. Sendo v_z^- a velocidade da bola na componente z imediatamente antes do ressalto que separa z_i e z_{ii} e v_z^+ a velocidade da bola na componente z imediatamente após esse ressalto, a partir da equação (2) obtemos a seguinte relação:

$$\frac{z_i}{z_{ii}} = \left(\frac{v_z^-}{v_z^+} \right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} \quad (17)$$

Podemos afirmar que para choques nos quais $y \leq 30$ m, é de esperar que a bola, após o ressalto, atinja no seu máximo de altura apenas 64% da altura máxima a que tinha chegado no ressalto anterior. Já para choques em $y > 30$ m é expectável que z_{ii} seja igual a 16% de z_i . Confirmam-se estas relações através dos pontos assinalados na figura 13.

Podemos também comparar a trajetória obtida para o caso em estudo, com a obtida no caso de o plano de impacto ser uniforme com $\alpha = 0,8$. Verifica-se que as trajetórias se comportam de forma idêntica entre $y = 0$ e $y = 30$ m. Para $y > 30$ m, os choques para a superfície uniforme dissipam uma menor quantidade de energia, aumentando T_∞ para esse caso.

P4.

Iremos agora considerar a situação da alínea anterior, com a modificação de que a bola no seu movimento choca com uma parede vertical, como representamos na figura 14.

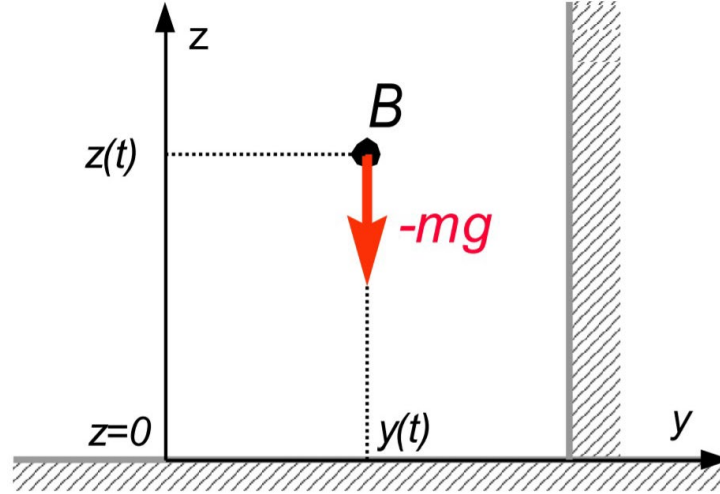


Figura 14: Choque com uma parede vertical

Desta forma, podemos utilizar um modelo híbrido que caracterize o movimento horizontal da bola, tomando como variáveis de estado a posição y , e a sua derivada, v_y .

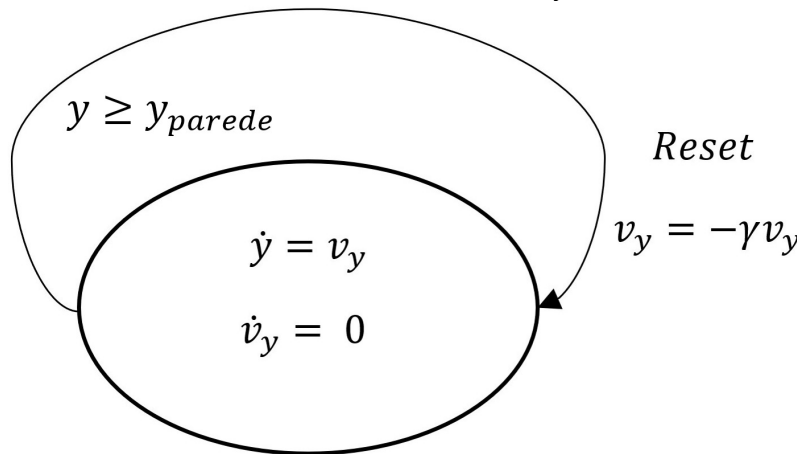


Figura 15: Modelo híbrido do movimento horizontal da bola considerando um impacto numa parede

Tal como para o modelo que dita o movimento da bola na direção vertical, para a direção horizontal existe um estado discreto cuja transição é sempre para ele próprio, alterando apenas a condição inicial. Esta ocorre quando se verifica $y \geq y_{parede}$ e dita que o módulo da velocidade na componente y imediatamente após o choque é obtida pelo produto do módulo da velocidade na componente y imediatamente antes do choque por um fator de atenuação γ , que verifica $0 < \gamma < 1$. Este traduz a energia dissipada durante o choque com a parede.

De modo a simular esta situação, criámos o diagrama de blocos no SIMULINK que rege o funcionamento dos diagramas de estados da figura 2 e da figura 15.

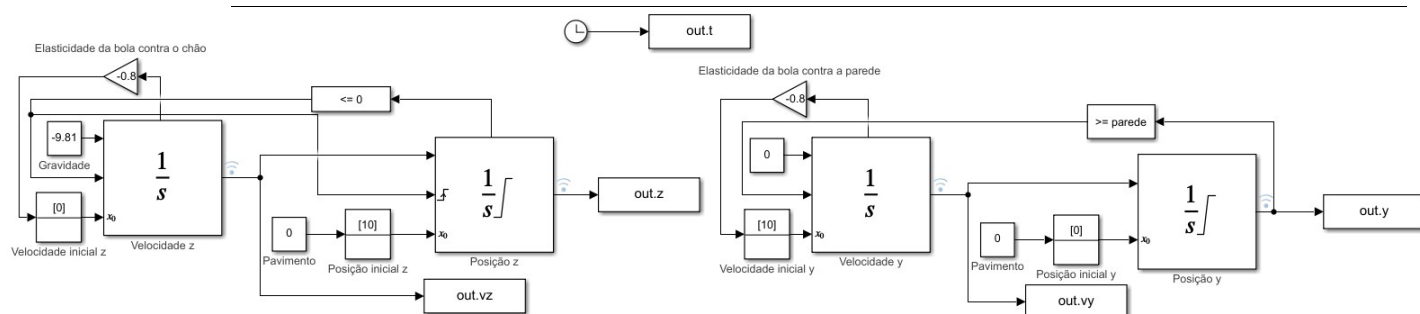


Figura 16: Diagrama de blocos do SIMULINK para a simulação da bola saltitante num plano com choque com parede vertical

Realizámos duas simulações com os valores $\gamma = 0,8$; $\alpha = 0,8$; $z_0 = 10$ m; $v_{0z} = 0$; $v_y = 10$ m/s e $y_0 = 0$, em que numa considerámos que a parede se encontrava em $y = 60$ m e na outra que se encontrava em $y = 30$ m, obtendo as trajetórias da bola representadas na figura 17.

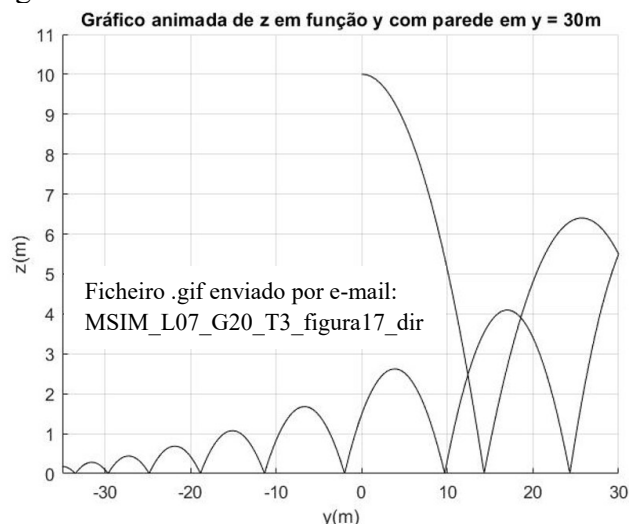
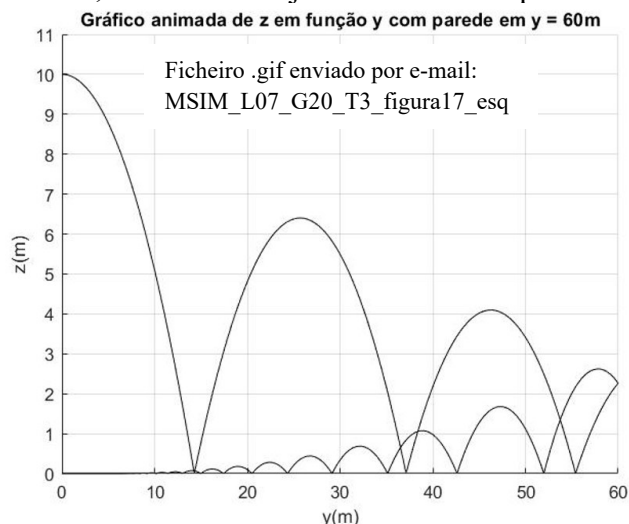


Figura 17: Gráfico de z em função de y com parede em $y = 60$ m (esquerda) e com parede em $y = 30$ m (direita)

Ao analisar as duas simulações, temos que a bola, ao chocar com a parede, não só inverte o sentido do seu movimento horizontal, como também se torna mais lenta nesta componente do movimento, ou seja, v_y diminui em módulo e altera o seu sentido, dissipando energia. No instante da colisão com a parede, v_z mantém-se constante (a não ser que z se anule), mantendo a bola o seu movimento ascendente ou descendente. O movimento da bola no sentido vertical é o esperado, cuja análise foi efetuada nas alíneas anteriores.

Conclusão

Este trabalho consistiu na simulação de um sistema dinâmico híbrido, no qual o sistema é constituído por estados contínuos e estados discretos. Para tal, foi realizada uma simulação de uma bola que se desloca por ação da força da gravidade, assumindo que é um ponto material.

Inicialmente estudámos o movimento livre na direção vertical e a ocorrência de impactos, analisando o efeito da variação do fator de atenuação, da velocidade inicial e da existência de atrito viscoso. Posteriormente, simulámos também o movimento num plano, considerando que este pode ter várias superfícies com diferentes fatores de atenuação. Em último lugar, observámos a trajetória da bola quando é adicionada uma parede vertical. Assim, podemos concluir que a modelação de sistemas físicos com fronteiras pode ser feita com precisão considerando-os sistemas híbridos, com estados discretos cujas transições estão definidas pelas condições de fronteira.

Bibliografia

- [1] Modelação e Simulação - Slides das Aulas Teóricas 2021/2022, 1º Semestre (LEEC), do professor João Miranda Lemos, IST-DEEC;
- [2] 1º Semestre 2021/2022, Modelação e Simulação, 3º Trabalho de Laboratório - Bola Saltitante - Enunciado;
- [3] MATLAB, MATLAB R2021a, versão 9.10.0.1739362, 2021;
- [4] Simulink - Simulation and Model-Based Design - MathWorks;
- [5] <https://ezgif.com/> : Aceleração das animações gif;
- [6] <https://www.xconvert.com/> : Compressão dos gif.