TÉCNICO LISBOA

# Instituto Superior Técnico

## Controlo

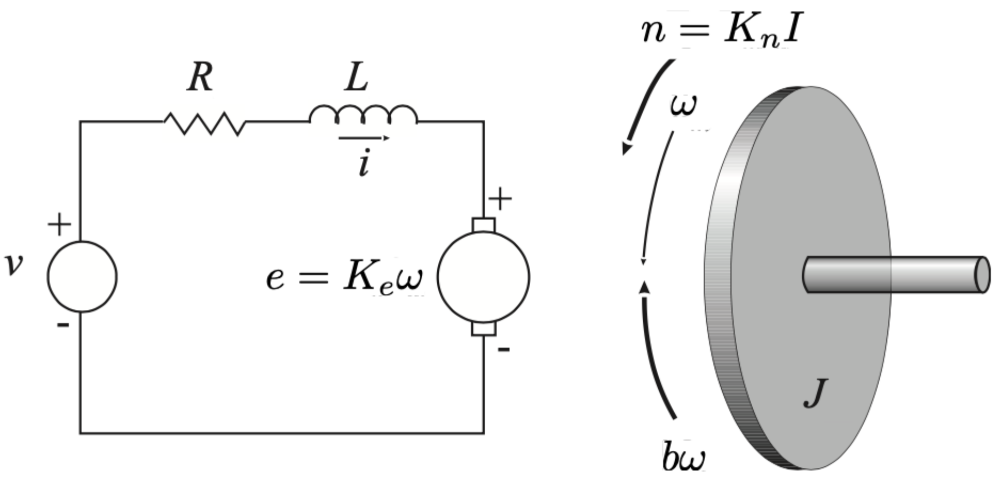
## LEEC

# Controlo de velocidade de um motor | 2º Laboratório

*Alunos:*
Afonso Brito Caiado Alemão | 96135
Inês Isabel Ferreira Fernandes | 96231
Rui Pedro Canário Daniel | 96317

*Grupo:* **25**

*Docente:*
Professor Carlos Filipe Gomes Bispo




26 de junho de 2022

# Conteúdo



# 1 Introdução

O objetivo deste laboratório consiste em modelar, identificar e desenvolver um controlador baseado em retroação capaz de controlar a velocidade de um motor DC com uma carga de engrenagem. Será então necessário identificar e validar experimentalmente os parâmetros do modelo tendo por base a resposta do sistema ao degrau unitário e a resposta em frequência. Pretendemos projetar o controlador de velocidade de acordo com um conjunto de especificações, utilizando técnicas de *loop-shaping*. Após isto, temos com objetivo testar o controlador em simulação assegurando que as especificações são satisfeitas e, por fim, implementar o controlador na prática e avaliar o seu desempenho.

# 2 Modulação Dinâmica

Servindo como introdução para o resto do trabalho laboratorial, pretende-se primeiramente compreender o funcionamento do motor DC descrito no enunciado. Começamos por descrever o seu comportamento através de um modelo simplificado, definindo a sua função transferência e os seus parâmetros.

## 2.1

Pretendemos demonstrar que o modelo dinâmico simplificado do motor é dado por um sistema de 1ª ordem com a função de transferência da equação 1.

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = k_0 \cdot \frac{a}{s+a} \tag{1}$$

Sendo $\Omega(s)$ e $V(s)$ as transformadas de Laplace de $\omega(t)$ e $v(t)$, respetivamente, é então possível escrever expressões para $k_0$ e para $a$ em função de $J$, $b$, $R$, $K_e$ e $K_n$.

Considerando que $R \gg L$, podemos utilizar a aproximação na equação (2) do enunciado. Desta forma, podemos obter que o movimento de rotação do eixo do motor é dado pela equação 2.

$$J\dot{w}(t) = -bw(t) + K_n\Big(\frac{v(t) - K_e w(t)}{R}\Big) \tag{2}$$

Deste modo, desenvolveu-se a equação anterior e aplicou-se a transformada de Laplace (para $w(0^-) = 0$) obtendo-se assim a equação 3.

$$s\Omega(s) + \Omega(s)\frac{1}{J}\Big[b + \frac{K_n K_e}{R}\Big] = \frac{K_n}{RJ}V(s) \tag{3}$$

Tendo agora uma equação dependente apenas de $J$, $b$, $R$, $K_e$ e $K_n$, torna-se possível determinar $G(s)$ em função destes parâmetros, permitindo relacioná-los com $k_0$ e com $a$. Desta forma, fica demonstrado que o modelo dinâmico simplificado do motor é dado por um sistema de 1ª ordem com a função de transferência da equação 1.

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{\frac{K_n}{RJ}}{s + \frac{b}{J} + \frac{K_n K_e}{RJ}} = k_0 \cdot \frac{a}{s+a} \tag{4}$$

Obteve-se assim as seguintes expressões para $k_0$ e $a$:

$$k_0 = \frac{K_n}{Rb + K_n K_e} \tag{5}$$

$$a = \frac{1}{J}\Big(b + \frac{K_n K_e}{R}\Big) \tag{6}$$

# 3 Identificação do Sistema

Pretende-se, experimentalmente, identificar e validar os parâmetros do sistema de primeira ordem, analisando, por isso, a resposta quando se aplica à entrada do sistema um escalão unitário e a resposta em frequência do sistema. Tal como foi dito anteriormente na análise do motor DC, é possível medir, a partir do taquímetro, a velocidade angular do motor, $\omega(t)$, sendo este sistema descrito pela função de transferência:

$$G(s) = k_0 \cdot \frac{a}{s+a} \tag{7}$$

## 3.1

Primeiramente, recorreu-se ao cálculo da resposta ao degrau unitário da função de transferência G(s). Deste modo, sendo $Y(s)$ a transformada de Laplace da resposta do sistema, e sabendo que a transformada de Laplace de $u(t)$, $U(s)$, é igual a $\frac{1}{s}$, temos que:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{k_0 \cdot a}{s+a} \cdot = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} \tag{8}$$

É possível calcular $A$ e $B$ da seguinte forma:

$$A = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} k_0 \cdot \frac{a}{s+a} = k_0 \tag{9}$$

$$B = \lim_{s\to -a} (s+a) \cdot Y(s) = \lim_{s\to -a} k_0 \cdot \frac{a}{s} = -k_0 \tag{10}$$

De onde resulta a seguinte expressão:

$$Y(s) = k_0 \cdot (\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}) \tag{11}$$

Sabendo que $\omega(t) = y(t)$, de seguida, com vista à obtenção da resposta ao escalão unitário no domínio do tempo, aplicou-se a transformada de Laplace inversa:

$$\omega(t) = k_0 \cdot (1 - e^{-at}) \cdot u(t) \tag{12}$$

Recorrendo à equação 12, é possível calcular a velocidade angular do motor em regime estacionário, $\omega(t \to \infty)$, e no instante de tempo $t = \frac{1}{a}$, que corresponde à constante de tempo $\tau$ do sistema.

$$\omega(t \to +\infty) = \lim_{t\to +\infty} k_0 \cdot (1 - e^{-at}) = k_0 \tag{13}$$

$$\omega\left(t \to \frac{1}{a}\right) = k_0 \cdot (1 - e^{-1}) \approx 0,63212 \cdot k_0 \tag{14}$$

É assim evidente pelo resultado da equação 13 que o valor de $k_0$ deverá ser aproximadamente igual ao valor de $\omega$(t) para valores de t elevados. Por exemplo, podemos considerar suficientemente elevado o instante $t = \frac{5}{a}$, para o qual $\omega(t) \approx 0,993 \cdot k_0$.

Partindo da equação 14, uma possível forma de determinar o valor de $a$ seria procurar o instante de tempo, para o qual $\omega(\mathrm{t}) = 0,63212 \cdot k_0$.

## 3.2

Uma outra forma de determinar os parâmetros $k_0$ e $a$ seria a partir da análise em frequência, analisando o diagrama de Bode do sistema com função de transferência G(s).

Tendo em conta que o sistema é de primeira ordem e que o seu único polo é igual a $-a$, podemos então assumir que na representação da magnitude do seu diagrama de Bode assintótico, a partir do momento em que $\omega$ atinge o valor de $a$, existirá um decaimento de 20 $dB$ por década.

Para além disso, podemos obter o ganho estático, $G(0)$, pela equação 15.

$$G(0) = k_0 \tag{15}$$

Desta forma, é possível esboçar o diagrama de Bode assintótico do sistema: figura 1. A preto representamos o diagrama de Bode assintótico e a rosa representamos um esboço do diagrama de Bode real do sistema.

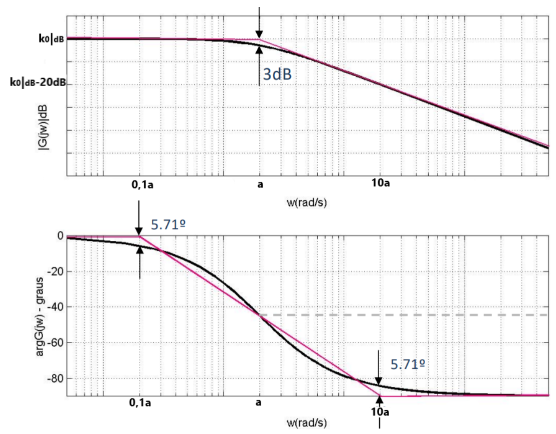



Figura 1: Diagrama de Bode assintótico do sistema (preto) e esboço do diagrama de Bode real do sistema (rosa).

Dito isto, o valor de $k_0$ poderá ser obtido através da obtenção da resposta do sistema em baixa frequência pela equação 15. De modo a obter o valor de $a$, dever-se-á adotar uma estratégia na qual se efetua a interseção das assíntotas de baixa e de alta frequência do diagrama de Bode assintótico de magnitude. A primeira destas retas (baixa frequência) corresponde a uma assíntota horizontal de magnitude igual a $k_{0_{dB}}$. A segunda reta (alta frequência) deve ser obtida através duma regressão linear dos valores obtidos para altas frequências (comparativamente com $\omega = a$).

## 3.3

Recorrendo ao modelo *Simulink* disponibilizado no laboratório, aplicámos à entrada do sistema, um degrau de amplitude $1V$ com a transição em $t = 1s$ e registámos o gráfico das respostas medida e simulada, durante $5s$, sendo que cada um destes foi gerado através de 5001 amostras.

Para a simulação utilizámos os valores $k_0 \approx 1,3754$ e $a \approx 66,6667$, cujo cálculo irá ser detalhado de seguida.

Apresentamos na figura 2 estas respostas do sistema, que representam a evolução da velocidade angular do eixo do motor, $\omega$(t).

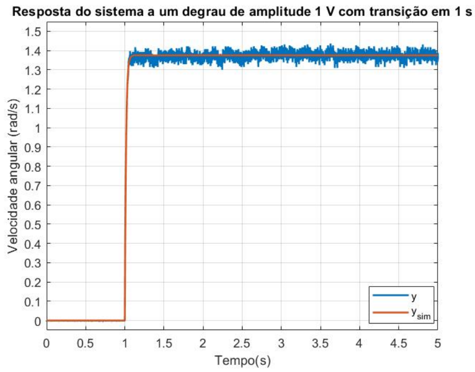



Figura 2: Resposta do sistema a um degrau de amplitude 1 V, com transição em 1 s.

Através da resposta medida, podemos obter estimativas para os valores dos parâmetros $k_0$ e de $a$ da função de transferência $G(s)$.

Recorrendo à equação 13, verificamos que podemos obter uma estimativa do $k_0$, sendo este aproximadamente igual à resposta medida num instante após o período de transição. Analisando a figura, é evidente que para $t \approx 5s$, a resposta já ultrapassou este período transitório, apresentando-se com pequenas oscilações (ruído) em torno de um ponto de equilíbrio constante.

Desta forma, tendo em vista a obtenção de $k_0$, considerámos a sua estimativa igual à média aritmética das últimas 100 amostras obtidas para a resposta medida, de modo a tentar desprezar o efeito do ruído. Obtemos $k_0 \approx 1,3754$.

Tendo em vista a obtenção da constante $a$, calculou-se o instante em que a resposta medida atinge pelo menos $63,212\%$ da sua amplitude final, através da equação 14. Assim obtemos a constante de tempo do sistema de 1ª ordem, $\tau \approx 0,0150s$. Desta forma, obtemos $a \approx 66,6667$.

Podemos verificar que os gráficos obtidos experimentalmente e por simulação são extremamente semelhantes, possuindo o comportamento típico de um sistema de 1ª ordem. A diferença entre estes consiste na existência de ruído na medição da resposta experimental.

O código utilizado para gerar os gráficos e para a obtenção de $k_0$ e de $a$ encontra-se no ficheiro *ex3_3.m* e o *workspace* utilizado no ficheiro *ex3_3.mat*.

## 3.4

Recorrendo ao modelo *Simulink* disponibilizado no laboratório, aplicámos à entrada do sistema um sinal sinusoidal com amplitude $0,5V$ e obtemos a sua resposta experimental e de simulação para um conjunto de frequências entre $[a/10, 5a]$, dentro das possibilidades do modelo.

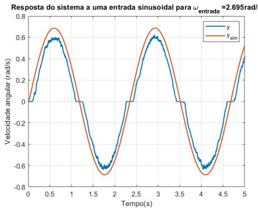
Apresentamos, na tabela 1, cada frequência utilizada para o sinal sinusoidal de entrada, as amplitudes medidas do sinal de saída e o ganho correspondente ao sistema em $dB$.

Para as frequências que permitem a obtenção de um sinal de saída com pelo menos seis períodos, registámos como amplitude de saída o valor da média das primeiras cinco amplitudes máximas da resposta, sendo que ignorámos a primeira amplitude máxima, visto que esta medição pode ser afetada pelo facto de o sistema estar no seu arranque. Caso contrário, registámos como amplitude de saída o valor da média das amostras disponíveis das amplitudes máximas da resposta.

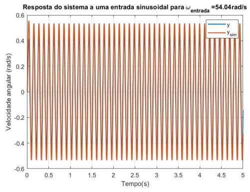
| $\omega_{entrada}(rad/s)$ | Amplitude de saída $(V)$ | Ganho$(dB)$ |
|---|---|---|
| 1,151 | 0,6184 | 1,85 |
| 2,695 | 0,61355 | 1,78 |
| 5,031 | 0,6087 | 1,71 |
| 7,055 | 0,5941 | 1,50 |
| 10,83 | 0,5844 | 1,35 |
| 14,41 | 0,5795 | 1,28 |
| 17,41 | 0,5795 | 1,28 |
| 25,39 | 0,5503 | 0,83 |
| 38,04 | 0,5016 | 0,03 |
| 54,04 | 0,4441 | -1,03 |
| 85,05 | 0,3798 | -2,39 |
| 94,76 | 0,3847 | -2,28 |
| 125 | 0,21995 | -7,13 |
| 250 | 0,1229 | -12,19 |

Tabela 1: Resposta ao sistema para uma entrada sinusoidal de amplitude $0,5V$ para diferentes $\omega_{entrada}$

Apresentamos, como exemplo, os gráficos da resposta do sistema, experimental (medida) e simulada, para as velocidades angulares da tensão de entrada iguais a $\{2,695;\ 54,04\}$ $rad/s$.




(a): $\omega_{entrada} = 2,695$ $rad/s$.




(b): $\omega_{entrada} = 54,04$ $rad/s$.

Figura 3: Resposta ao sistema para uma entrada sinusoidal de amplitude $0,5V$ para diferentes $\omega_{entrada}$.

Ao comparar os resultados experimentais e de simulação, verificamos que a frequência da resposta é igual para ambos. Em relação às amplitudes, verifica-se que a amplitude do sinal medido é ligeiramente inferior à de simulação, o que se deve à existência de distorção do *crossover*.

O código utilizado para gerar os gráficos da figura 3 e para calcular as primeiras 6 (ou menos) amplitudes máximas do sinal de saída encontra-se no ficheiro *ex3_4.m*. Os *workspaces* utilizados para as situações da figura 3 encontram-se nos ficheiros *ex3_4-w2_695.mat* e *ex3_4-w54_04.mat*.

### 3.5

Através dos dados da tabela 1, traçamos o diagrama de Bode de magnitude obtido experimentalmente para o sistema em estudo, na figura 4(b).

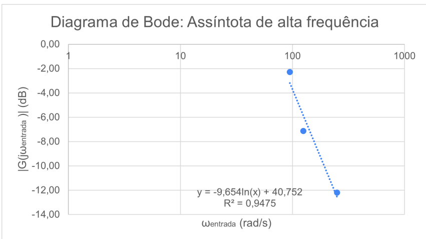
Podemos considerar que a assíntota de baixa frequência é horizontal e constante, correspondendo a

$$\lim_{\omega_{entrada}\to 0} |G(j\omega_{entrada})|_{dB} = k_{0_{dB}} \tag{16}$$

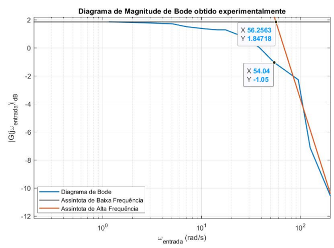
Logo experimentalmente podemos aproximar esta assíntota por uma assíntota horizontal de magnitude $|G(j\omega_{low})|_{dB}$, sendo $\omega_{low} = 1,151 rad/s$ a menor frequência utilizada: $(|G(j1,151)|_{dB} \approx 1,85dB \approx 1,237)$. Desta forma, temos uma aproximação do ganho de baixa frequência, sendo este igual a $k_{0_{experimental}} \approx 1,237$, sendo que face ao $k_{0_{teórico}}$ obtido na alínea 3.1, este valor apresenta um erro percentual igual a 10%, que se deve à existência de distorção de *crossover*.

Em relação à assíntota de alta frequência, teoricamente esta irá encontrar-se a decrescer (20 $dB/década$) a partir de $(\omega_c = a_{experimental})$. Tendo em vista a obtenção desta reta, realizámos uma representação gráfica com linha de tendência logarítmica utilizando os pontos da tabela 1 cuja $\omega_{entrada} > 1,4a$. Assim, obtemos a equação no gráfico da figura 4(a).

Assinalamos ambas as assíntotas e o seu ponto de interseção na figura 4(b).




(a): Assíntota de alta frequência.




(b): Assíntotas de alta e baixa frequência.

Figura 4: Diagrama de magnitude de Bode obtido experimentalmente.

Teoricamente, a frequência de corte $\omega_c$ encontra-se na interseção das assíntotas, logo neste caso obtém-se $\omega_c = a_{experimental}$ $= 56,2563$ $rad/s$, sendo que face a $a_{teórico}$ obtido na alínea 3.1, este valor apresenta um erro percentual igual a 16%. De facto, verifica-se que $|G(ja_{experimental})| = k_{0_{experimental}} - 3dB$, o que era esperado, pois $|G(ja)| = |G(j0)| - 3dB$ . O código utilizado para gerar os gráficos da figura 4 encontra-se no ficheiro *ex3_5.m*.

## 4 Loop Shaping Control Design

Iremos agora detalhar o procedimento adotado e os resultados obtidos para a projeção realizada para um controlador de retroação, sendo que utilizámos *loop shaping*, testámos e validámos experimentalmente o sistema.

### 4.1

Considerando o sistema de cadeia fechada representado na figura 3 do enunciado, temos que a função de transferência do controlador é dada pela equação 17.

$$K(s) = \frac{k_1(s+z)}{sz} \tag{17}$$

Temos como objetivo obter valores para os parâmetros $k_1 \in \mathbb{R}^+$ e $z \in \mathbb{R}^+$, tal que o sistema em cadeia fechada seja estável e satisfaça os seguintes requisitos:

i) Erro estático nulo. ii) Margem de ganho $GM \geq 20$ $dB$. iii) Margem de fase $PM \geq 80°$. iv) $|K(j\omega)G(j\omega)|_{dB} < -10$ $dB$, para $\omega > 10a$.

De modo a verificar que a primeira condição é sempre satisfeita para o nosso sistema, aplicámos o teorema do valor final:

$$e(+\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)K(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G(s)K(s)} = 0 \tag{18}$$

Sabendo que $k_1 > 0$, ao analisar os possíveis valores para $z$, vemos que existem 3 possíveis situações para a posição de $z$ no sistema: a) $0 < z < a$. b) $z = a$. c) $z > a$.

Ao traçar um diagrama *root locus* em função de $k_1$ genérico para cada um dos sistema, representados na figura 5, retiramos algumas conclusões.

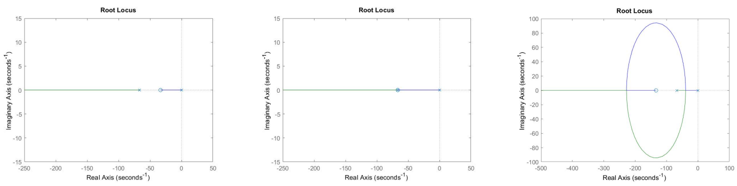
Como temos que $k_1 > 0$, para todas as situações temos a impossibilidade de existirem pólos do sistema em cadeia fechada no semiplano complexo direito, logo o sistema é sempre estável.

O sistema b) é bastante difícil de obter no mundo real, devido à adversidade que provém de tentar que o pólo $-a$ e o zero $-z$ do sistema em cadeia aberta sejam iguais.

Com o auxílio do *ControlSystemDesigner*, verificámos que tanto para o sistema a), como para o sistema b) não existem quaisquer oscilações na reposta ao degrau unitário, ao contrário do que acontece para o caso c).

Apesar disto, para o caso c), é possível obter valores satisfatórios para o tempo de estabelecimento e para o tempo de pico da resposta ao degrau unitário, sendo que estes conseguem ser obtidos para uma posição dos pólos complexos conjugados do sistema em cadeia fechada entre $a$ e $2a$, para um determinado $k_1$.

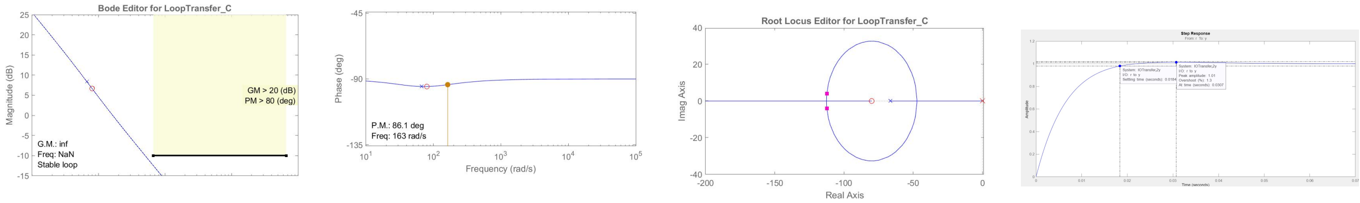
Para atingir estes valores nos sistemas a) e b) seria necessário arrastar o pólo do sistema em cadeia fechada para valores de ordem bastante superior e para valores de $k_1$ superiores aos usados no caso c). Desta forma, decidimos escolher a opção c) para a nossa implementação.




(a): $z = \frac{a}{2}$.  (b): $z = a$.  (c): $z = 2a$.

Figura 5: *Root locus* do sistema para diferentes valores de $z$.

Utilizámos o *ControlSystemDesigner* para projetar um controlador que satisfaça os restantes requisitos $ii$), $iii$) e $iv$) (figura 6). Em primeiro lugar, colocámos $z$ numa posição em que garantidamente sejam satisfeitos os requisitos $ii$) e $iii$) para qualquer valor de $k_1 > 0$. Selecionámos $z = 80$. Por fim, escolhemos um valor de $k_1$ que garante valores de tempo de estabelecimento e de tempo de pico satisfatórios, isto é, valores baixos, de forma a garantir rapidez de resposta do sistema. Para além disto, também assegurámos que a sobreelevação existente é baixa. Obtemos então para $k_1 = 138$, $GM = +\infty$, $PM = 86,1°$, $t_s(2\%) = 0,0184s$ e $t_p = 0,0307s$, com sobreelevação de $1,3\%$.




(a): Diagrama de Bode de magnitude do sistema em cadeia aberta.  (b): Diagrama de Bode de fase do sistema em cadeia aberta.  (c): Diagrama *root locus* para o sistema.  (d): Resposta ao *step* para sistema em cadeia fechada.

Figura 6: Resultados obtidos no *ControlSystemDesigner* para $k_1 = 138$ e $z = 80$.

## 4.2

Nesta alínea iremos estudar o efeito de limitação da energia do sinal de atuação por parte do requisito $iv$). Ao analisar o diagrama de blocos do sistema, é possível relacionar as transformadas de Laplace do sinal de atuação $U(s)$ e do sinal de referência $R(s)$, através da equação 19.

$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)}\frac{1}{G(s)} \tag{19}$$

A condição $iv$) aplica uma técnica para limitar sinais de atuação:

$$|K(j\omega)G(j\omega)| < \epsilon_l, \omega > k\omega_p, \omega_p = a, k = 10 > 1, \epsilon_l = -10dB \tag{20}$$

Sendo $\phi_x(\omega)$ a densidade espetral de um sinal $x$, para o sistema em análise é obtida a equação 21.

$$\phi_u(\omega) = \phi_r(\omega)\left|\frac{U(j\omega)}{R(j\omega)}\right|^2 \tag{21}$$

Logo, podemos obter a energia do sinal de atuação, pela expressão 22.

$$Energia^2(u) = \int_0^{+\infty} \phi_r(\omega) \left| \frac{U(j\omega)}{R(j\omega)} \right|^2 d\omega \tag{22}$$

Por simplicidade, iremos considerar $\epsilon_l << 1$, apesar desta ser uma aproximação grosseira. Desta forma, podemos considerar a aproximação seguinte.

$$\frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)} \approx G(s)K(s) \tag{23}$$

Obtemos então uma expressão aproximada para a energia do sinal de atuação, na equação 24.

$$Energia^2(u) \approx \int_0^{+\infty} \phi_r(\omega)|K(j\omega)|^2 \, d\omega < \int_0^{+\infty} \phi_r(\omega) \left| \frac{\epsilon_l}{G(j\omega)} \right|^2 d\omega \tag{24}$$

Pelo diagrama de Bode de $G(j\omega)$, verificamos que $|G(j\omega)| < \epsilon_g$ para $\omega > 10a$, sendo $\epsilon_g \in \mathbb{R}^+$. Desta forma, para $\omega > 10a$, sendo $|G(j\omega)|$ limitado e sendo $|G(j\omega)K(j\omega)|$ limitado, então $|K(j\omega)|$ também será limitado. Assim, fica comprovado que a energia do sinal de atuação é limitada pela aplicação da condição *iv*): estamos a garantir que a atuação não vai ter valores excessivamente elevados, permanecendo dentro dos limites de atuação do sistema.

## 4.3

Iremos agora considerar que existe um atraso temporal $\tau$ na transmissão de informação entre o controlador $K(s)$ e o sistema $G(s)$. Este atraso é traduzido por $e^{-s\tau}$ do domínio da frequência. Desta forma, o diagrama de Bode da função de transferência do sistema em cadeia aberta irá ser modificado, sendo obtidas as equações 25 e 26.

$$|K(j\omega)G(j\omega)|_\tau = |K(j\omega)G(j\omega)| \tag{25}$$

$$arg(K(j\omega)G(j\omega))_\tau = -\omega\tau + arg(K(j\omega)G(j\omega)) \tag{26}$$

Podemos então concluir que com o aumento de $\tau$, a margem de fase diminui, a margem de ganho diminui, $\omega_{180^\circ}$ diminui e $\omega_{0dB}$ não varia com $\tau$. Deste modo, o sistema com atraso apresenta uma menor estabilidade relativa.

A margem de fase do sistema com atraso é dada pela equação 27.

$$PM(\tau) = PM(\tau = 0) - \omega_{0dB}\tau \tag{27}$$

Da alínea 4.1, sabemos que $PM(\tau = 0) = 86,1^\circ \approx 1,5027 \ rad$. Da expressão 25, obtemos $\omega_{0dB} = 163,0801 \ rad/s$. Deste modo, tendo em vista obter um sistema em cadeia fechada estável, é necessário restringir $\tau$ a um intervalo de valores que garantem esta estabilidade, que é dado pela condição $PM > 0$. Chegamos então à equação 28.

$$0 < \tau < \frac{PM(\tau = 0)}{\omega_{0dB}} \iff 0 < \tau < 9,2147ms. \tag{28}$$

Desta forma, ao aumentar $PM(\tau = 0)$, estamos a aumentar o intervalo de valores toleráveis para $\tau$ que garantem a estabilidade do sistema. Por outro lado, ao diminuir $\omega_{0dB}$ de $K(j\omega)G(j\omega)$, também estamos a aumentar o intervalo de valores toleráveis para $\tau$ que garantem a estabilidade do sistema.

## 4.4

Ao longo desta e das próximas questões recorremos ao ficheiro *ex4.m*. Os *workspace* utilizado encontra-se no ficheiro *ex4_4-z-80-k1-138-tau-0.mat*.

Durante a sessão de laboratório, testámos o comportamento do sistema para os parâmetros $k_1 = 138$ e $z = 80$, obtidos na projeção do controlador. Obtemos a resposta do sistema experimental e simulada, sendo estas representadas na figura 7.

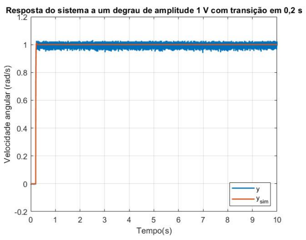



Figura 7: Resposta do sistema a um degrau de amplitude 1 V, com transição em 0,2 s.

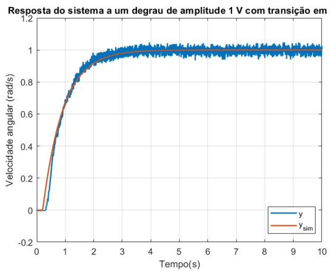
Podemos verificar que as respostas são extremamente semelhantes, sendo que as diferenças consistem na existência de ruído na resposta obtida experimentalmente, e nas aproximações efetuadas durante a modelação do sistema. De facto, o sistema comporta-se de forma estável, como era expectável.

## 4.5

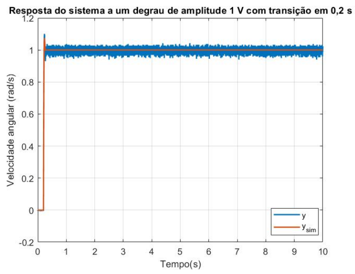
De seguida, analisámos o efeito da alteração dos parâmetros $k_1$ e $z$ na resposta ao degrau unitário do sistema em cadeia fechada. Obtemos a resposta do sistema experimental e simulada, para os valores de $k_1$ e de $z$ indicados na tabela 2, sendo estas representadas na figura 8. Os *workspaces* utilizados encontram-se nos ficheiros, *ex4_5-z-20-k1-1-tau-0.mat*, *ex4_5-z-20-k1-100-tau-0.mat*, *ex4_5-z-20-k1-500-tau-0.mat*, *ex4_5-z-140-k1-1-tau-0.mat*, *ex4_5-z-140-k1-100-tau-0.mat* e *ex4_5-z-140-k1-2000-tau-0.mat*. Na tabela 2 também estão indicados os valores para a margem de fase, a sobreelevação ($S\%$), o tempo de pico ($t_p$) e para $\omega_{0dB}$ obtidos pelo *ControlSystemDesigner*.

| $k_1$ | $z$ | $PM(°)$ | $S\%$ | $\omega_{0dB}(rad/s)$ | $t_p(s)$ | $E(u)$ | $E(u_{sim})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 140 | 89,4 | 0 | 1,38 | >7 | 0,3816 | 0,1678 |
| 100 | 140 | 69,2 | 7,42 | 95,4 | 0,0341 | 0,5819 | 0,4332 |
| 2000 | 140 | 83,8 | 3,49 | 1320 | 0,00439 | 1,3047 | 0,8328 |
| 1 | 20 | 92,8 | 0 | 1,38 | >4,5 | 0,3768 | 0,1622 |
| 100 | 20 | 95,8 | 0 | 454 | >0,16 | 0,6427 | 0,4752 |
| 500 | 20 | 91,2 | 0 | 2290 | >0,004 | 1,0473 | 0,7347 |

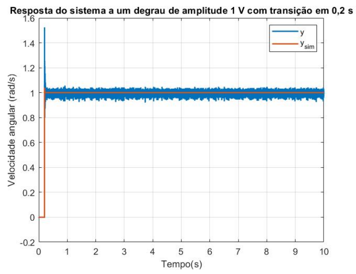
Tabela 2: Parâmetros da resposta do sistema ao degrau unitário.



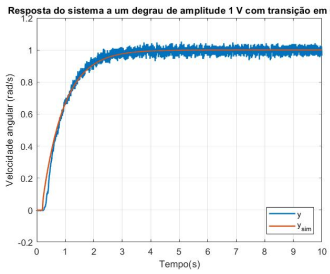

(a): $k_1 = 1$ e de $z = 140$.



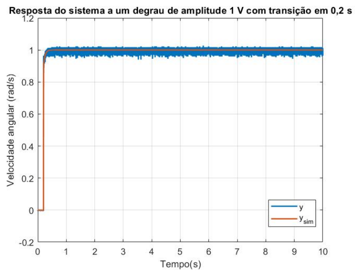

(b): $k_1 = 100$ e de $z = 140$.



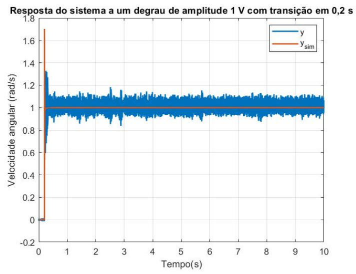

(c): $k_1 = 2000$ e de $z = 140$.




(d): $k_1 = 1$ e de $z = 20$.




(e): $k_1 = 100$ e de $z = 20$.




(f): $k_1 = 500$ e de $z = 20$.

Figura 8: Resposta do sistema a um degrau de amplitude 1 V, com transição em 0,2 s, para diferentes valores de $k_1$ e de $z$.

De modo a retirarmos algumas conclusões, testámos o sistema para três possíveis situações: $0 < z < a$, $z > a$ e $z = a$.

Para o primeiro caso, fixámos $z = 20$ e variámos $k_1$. Não existe sobreelevação, logo não é possível relacionar $S\%$ com $PM$. À medida que $k_1$ aumenta, um dos pólos em cadeia fechada desloca-se partindo de 0 em direção a $-z$, enquanto que o outro pólo parte de $-a$ em direção a $-\infty$. Desta forma, o primeiro destes pólos rege a rapidez do sistema, sendo que o tempo de estabelecimento da resposta (tal como o $t_p$) diminui à medida que aumentamos $k_1$. Podemos também verificar que à medida que $k_1$ aumenta, $\omega_{0dB}$ também aumenta. Assim, um aumento de $\omega_{0dB}$ vêm acompanhado por uma diminuição de $t_p$. Este fenómeno encontra-se representado nas figuras 8(d), 8(e) e 8(f). Também é possível verificar que com o aumento do valor de $k_1$, o ruído na resposta do sistema aumenta.

Para o segundo caso, fixámos $z = 140$ e variámos $k_1$.

Numa primeira fase, os pólos em cadeia fechada, à medida que $k_1$ aumenta, partem da posição dos pólos em cadeia aberta, em direção ao *breakaway point* $\approx 16,313$. Neste caso, não existe sobreelevação, logo não é possível relacionar $S\%$ com $PM$. Para além disso, um aumento de $k_1$ leva a um aumento de $\omega_{0dB}$, que vêm acompanhado por uma diminuição de $t_p$.

Numa segunda fase, os pólos em cadeia fechada, à medida que $k_1$ aumenta, partem do *breakaway point* $\approx 16,313$, em direção ao *break-in point* $\approx 635,13$, descrevendo um percurso que se assemelha a uma circunferência. Neste caso, para $k_1 \approx 16,313$ até $k_1 \approx 210$ a sobreelevação é crescente, enquanto que para $k_1 \approx 210$ até $k_1 \approx 635,13$ a sobreelevação é decrescente. Por outro lado, para a margem de fase, temos que $PM$ é decrescente de $k_1 \approx 16,313$ a $k_1 \approx 101,79$ e é crescente de $k_1 \approx 101,79$ a $k_1 \approx 635,13$. Logo não é possível relacionar $PM$ com $S\%$ para este caso. Apenas podemos constatar que: entre $k_1 \approx 16,313$ e $k_1 \approx 101,79$, um aumento de $S\%$ vêm acompanhado com uma diminuição de $PM$; entre $k_1 \approx 101,79$ e $k_1 \approx 210$, um aumento de $S\%$ vêm acompanhado com um aumento de $PM$; entre $k_1 \approx 210$ e $k_1 \approx 635,13$, uma diminuição de $S\%$ vêm acompanhada com um aumento de $PM$. Para além disso, um aumento de $k_1$ leva a um aumento de $\omega_{0dB}$, que vêm acompanhado por uma diminuição de $t_p$.

Numa terceira fase , os pólos em cadeia fechada, à medida que $k_1$ aumenta, partem do *break-in point* $\approx 635,13$, um deles direção a $+\infty$ e o outro em direção a $-z$. Neste caso, o aumento de $k_1$ leva a uma diminuição da sobreelevação da resposta do sistema, e a um aumento de $PM$. Logo, nesta situação em particular, um aumento de $PM$ vêm acompanhado com uma diminuição de $S\%$. Para além disso, um aumento de $k_1$ leva a um aumento de $\omega_{0dB}$, que, nesta situação pode vir acompanhado por uma diminuição ou por um aumento de $t_p$. Por exemplo, para $k_1 = 940$ obtém-se $t_p = 0,00751s$, para $k_1 = 950$ obtém-se $t_p = 0,00741s$ e para $k_1 = 960$ obtém-se $t_p = 0,00749s$.

Caso $z = a$, não existe sobreelevação, logo não é possível relacionar $S\%$ com $PM$. À medida que $k_1$ aumenta, um dos pólos em cadeia fechada está fixo na posição $-z$, enquanto que o outro pólo se desloca partindo de 0 em direção a $-\infty$. Desta forma, o tempo de estabelecimento da resposta (tal como o $t_p$) diminui à medida que aumentamos $k_1$. Podemos também verificar que à medida que $k_1$ aumenta, $\omega_{0dB}$ também aumenta. Assim, um aumento de $\omega_{0dB}$ vêm acompanhado por uma diminuição de $t_p$.

Existem duas últimas colunas na tabela 2 dedicadas à apresentação da energia obtida para o sinal de atuação, experimentalmente e em simulação, quando é colocado à entrada uma referência igual a $u(t-0,2)-u(t-1)$, sendo $u(t)$ o degrau unitário. Na figura 9 representamos o sinal de atuação experimental e obtido para a situação $k_1 = 100$ e de $z = 140$.

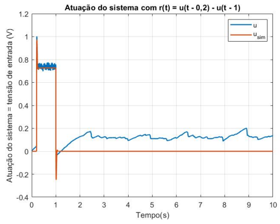



Figura 9: Sinal de atuação experimental e simulado obtido para um sinal de referência igual a $u(t-0,2)-u(t-1)$, sendo $u(t)$ o degrau unitário, para $k_1 = 100$ e $z = 140$.

É possível verificar que a energia dos sinais de atuação $u$ e $u_{sim}$ é limitada, tal como previmos na alínea 4.2, sendo a energia do sinal obtido experimentalmente superior à energia do sinal obtido por simulação. A energia de um sinal $x(t)$ é dada pela equação 29.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \tag{29}$$

Através do código no ficheiro *ex4_energia.m*, calculámos a energia dos sinais de atuação que apresentamos na tabela 2. Apenas calculamos o integral da equação 29 até $10s$, visto que para $t > 10s$ temos que $u(t) \approx 0$, apesar de para o sinal obtido experimentalmente podermos observar que o sinal de atuação não se extingue totalmente até $t = 10s$, fenómeno que parece estar relacionado com a existência de ruído. O *workspace* para o caso da figura 9 encontra-se no ficheiro *ex4_5-EnergiaLimitada-z-140-k1-100-tau-0.mat*

### 4.6

Nesta secção descrevemos o procedimento de análise do efeito de um atraso temporal na performance do sistema. Utilizando o controlador projetado na alínea 4.1, com $k_1 = 138$ e $z = 80$, é possível garantir a estabilidade do sistema para $0 < \tau < 9,2147ms$. Deste modo, testámos o sistema para $\tau = 0,002s$, e obtemos a resposta experimental e de simulação do sistema com o degrau unitário à sua entrada, durante $10s$, representada na figura 10(a).

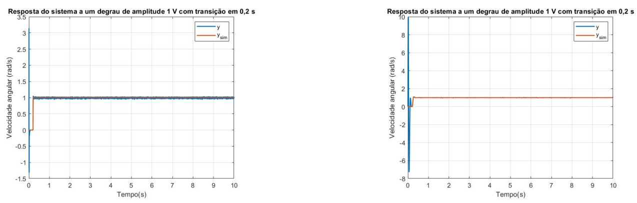
De facto, podemos confirmar que o sistema apresenta um comportamento estável para este valor de $\tau$, sendo as respostas simulada e experimental bastante semelhantes, com exceção de um pico de atuação inicial existente na resposta experimental.

No entanto, este sistema não garante a estabilidade em cadeia fechada para $\tau = 0,02s$. Com recurso ao *ControlSystemDesigner* e à função *allmargin()* do *MATLAB*, afinámos os parâmetros $k_1 = 20$ e $z = 80$, de modo a alterar os valores de $\omega_{0dB}$ e de $PM(\tau = 0)$ tendo em vista aumentar o intervalo de valores toleráveis para $\tau$ que garantem a estabilidade do sistema. Assim, o sistema em cadeia fechada é estável para $0 < \tau < 0,0562s$, intervalo que inclui $\tau = 0,02s$.

Desta forma, de modo a garantir que o sistema em cadeia fechada permanece estável para atrasos temporais maiores, tanto o tempo de estabelecimento como o tempo de pico do sistema aumentam. Ou seja, a rapidez de resposta do sistema é sacrificada em prol de uma tolerância do sistema a maiores atrasos temporais, permanecendo este estável em cadeia fechada.

Por último, testámos o sistema para $k_1 = 20$, $z = 80$ e $\tau = 0,02s$, e obtemos a resposta experimental e de simulação do sistema com o degrau unitário à sua entrada, durante $10s$, representada na figura 10(b), sendo as respostas simulada e experimental bastante semelhantes, com exceção de um pico de atuação inicial existente na resposta experimental, que neste caso é bastante superior ao existente no caso da figura 10(a). A resposta do sistema possui um comportamento estável, tal como era expectável.

Os *workspaces* utilizados encontram-se nos ficheiros *ex4_6-z80-k1-138-tau-0_002.mat* e *ex4_6-z-80-k1-20-tau-0_02.mat*.




(a): $k_1 = 138$, $z = 80$ e $\tau = 0,002s$.

(b): $k_1 = 20$, $z = 80$ e $\tau = 0,02s$.

Figura 10: Resposta do sistema a um degrau de amplitude 1 V, com transição em 0,2 s, para um determinado $k_1$, $z$ e $\tau$.

## 5 Conclusão

Neste trabalho de laboratório modelámos, identificámos e desenvolvemos um controlador baseado em retroação que consegue controlar a velocidade de um motor DC com uma carga de engrenagem. Para tal, foi necessário identificar e validar experimentalmente os parâmetros do modelo, sendo assim possível cumprir um conjunto de especificações, utilizando técnicas de *loop shaping*. Validámos o funcionamento esperado do controlador através de testagem feita em ambiente de laboratório.

## 6 Bibliografia

[1] Controlo - Slides das Aulas Teóricas 2021/2022, 2º Semestre (LEEC), da professora Rita Cunha;
[2] 2º Semestre 2021/2022, Controlo, 2º Trabalho de Laboratório, "Speed Control of a DC Motor Laboratory Guide";
[3] MATLAB, MATLAB R2021a, versão 9.10.0.1739362, 2021;
[4] Simulink – Simulation and Model-Based Design & Control System Designer – MathWorks.