Investigação Operacional

Universidade do Minho

Abril, 2023

Relatório do Trabalho Prático 2

Jorge Teixeira (a100838),
Hugo Dias (a100758),
José Luís Costa (a100749),
Rui Pinto (a100659),
Ricardo Jesus (a100066)

Introdução ao problema

Neste trabalho iremos abranger a otimização que é possível fazer num problema relacionado com transportes. Neste desafio, pretende-se atribuir a equipas, serviços a efetuar a clientes (que estão distribuídos geograficamente). Tendo, estes serviços, custos (como de deslocação e de utilização de veículos) pretende-se minimizar o custo total de cada operação.

Escolhendo o maior número de aluno correspondente a um membro do nosso grupo, obtivemos: **100838**.
Aplicando a regra descrita no enunciado ficamos com os seguintes critérios:

x = 1 | A = 0 | B = 0 | C = 8 | D = 3 | E = 8

e ainda:

a1 = B + 1 = 0 + 1 = 1
a8 = C + 1 = 8 + 1 = 9

D é ímpar por isso mantivemos o cliente 3 (D = 3), mas como **E é par** removemos o cliente 8 (E = 8).

A seguinte tabela demonstra exatamente as restrições dadas pelo valor de xABCDE.

j	Cliente	aj (¼ hora)	aj (hora de serviço)
1	Ana	1	09:15
2	Beatriz	7	10:45
3	Carlos	4	10:00
4	Diogo	2	9:30
5	Eduardo	10	11:30
6	Francisca	6	10:30
7	Gonçalo	9	11:15
8	Helena	9	11:15
9	Inês	2	09:30
10	José	5	10:15

Tabela 1 : Detalhes dos serviços dos Clientes

1. Formulação e modelo

Os tempos de deslocação t_{ij} , $\forall i, j \in V \cup \{K\}$ (i.e., entre clientes e entre clientes e a sede da empresa, localizada em Keleirós), em ¼ de hora, e os custos de deslocação c_{ij} , $\forall i, j \in V \cup \{K\}$, incluindo despesas de combustível, portagens, e outras, são os indicados nos seguintes quadros:

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	4	1	2	2	3	2	1	0	3	1
B		3	5	3	3	2	3	4	2	5
C			3	2	3	2	0	1	1	2
D				1	3	3	3	2	3	1
E					2	1	2	2	2	2
F						2	3	3	3	4
G							2	2	2	3
H								1	1	1
I									3	2
J										4

tempos de deslocação

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	13	5	6	5	10	7	5	0	7	1
B		11	14	10	8	6	11	13	4	15
C			8	6	10	6	0	5	6	2
D				4	8	8	8	6	11	4
E					6	4	6	5	7	6
F						5	10	10	8	11
G							10	7	5	9
H								5	6	9
I									7	9
J										10

custos de deslocação

Figura 1 e 2

Para otimizar este problema, criamos uma tabela com os caminhos possíveis seguindo as tabelas de custos e tempos de deslocação de cada serviço a ser feito, ao que obtivemos:

	A	B	C	D	E	F	G	I	J	K	
A											09:15
B											10:45
C											10:00
D											09:30
E											11:30
F											10:30
G											11:15
I											09:30
J											10:15
K											09:00

Tabela 2 : Combinações dos horários

Legenda:

-> As células a vermelho são as “combinações” que excluímos devido ao trajeto ser impossível de realizar.

-> As células a verde são as células cujo trajeto é válido, isto é, que cumpre com as restrições.

-> As células a cinza são as células em que o trajeto é para o mesmo nodo.

Para minimizar o custo dos serviços prestados, tendo em conta que todos os clientes fossem atendidos, procuramos encontrar o **fluxo de custo mínimo** numa rede com um vértice que indicariam os clientes (indiciados pela letra inicial do seu nome), um outro que indicaria a sede da empresa (K) e um grafo de compatibilidades orientado relativo aos custos das deslocações entre clientes. Denotar que este custo está assinalado em cima de cada arco que une os dois vértices correspondentes aos clientes entre os quais a viagem foi feita.

Dessa forma, segue-se o esquema:

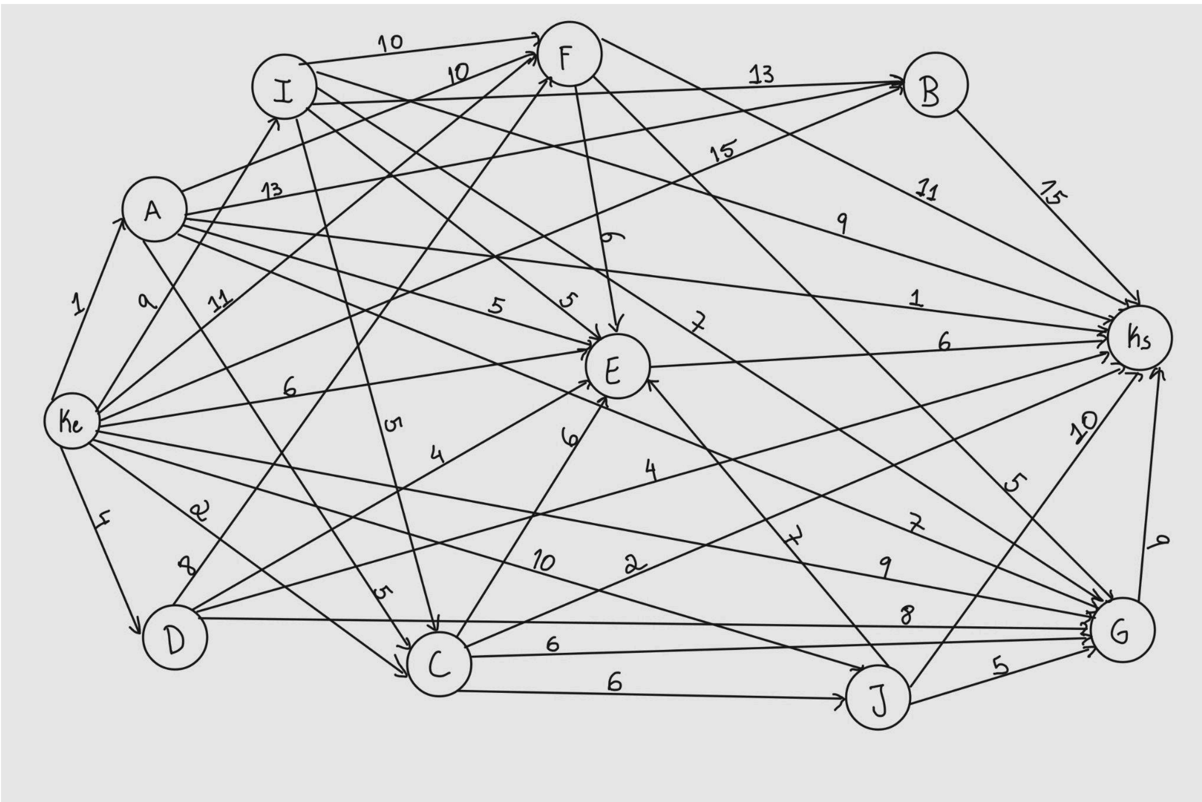


Figura 3

De forma a tornar mais fácil a representação do modelo no Relax4, criamos as seguintes associações entre 2 números e 1 letra para cada cliente.

Cliente	Quando Recebe	Quando Envia
A	1	12
B	2	13
C	3	14
D	4	15
E	5	16
F	6	17
G	7	18
I	8	19
J	9	20
K	10	11

Tabela 3

A coluna “Quando Recebe” representa o número pelo qual o cliente é representado quando há chegada de fluxo até ao mesmo e, por sua vez, a coluna “Quando Envia” representa o número pelo qual o cliente é representado quando há saída de fluxo do ao mesmo até outro cliente. É importante salientar que as arestas que têm origem nos clientes representados pelos números da coluna esquerda têm obrigatoriamente de ir apenas para o correspondente número à direita, tendo um custo associado de 0.

2. Modelo

No nosso modelo recorremos à numeração dos vértices como número. Assim, os vértices de 1 a 9 correspondem aos clientes de ‘A’ a ‘J’, excetuando o 'H' que no nosso caso não está presente. Já o vértice 10 representa a sede da empresa (‘K’). Desta forma, podemos definir V={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} como o conjunto das numerações de vértices a serem utilizados no modelo. Para além disso, podemos definir A = {(10,1), (10,2), (10,3), (10,4), (10,5), (10,6), (10,7), (10,8), (10,9), (1,6), (1,5), (1,10), (1,2), (1,7), (1,3), (4,6), (4,5), (4,10), (4,7), (3,5), (3,10), (3,7), (3,9), (5,10), (6,5), (6,7), (6,10), (8,3), (8,5), (8,7), (8,10), (8,6), (8,2), (2,10), (9,5), (9,10), (9,7), (7,10)} como o conjunto de arcos existentes no modelo.

Desta forma, o nosso modelo no formato Relax4, assume a seguinte estrutura:

```
20
46
12 10 2 1000
12 2 3 1000
12 3 5 1000
12 5 5 1000
12 6 10 1000
12 7 7 1000
1 12 0 1000
13 10 16 1000
2 13 0 1000
14 10 3 1000
14 9 6 1000
14 7 6 1000
14 5 6 1000
3 14 0 1000
15 10 5 1000
15 7 8 1000
15 6 8 1000
15 5 4 1000
4 15 0 1000
16 10 7 1000
5 16 0 1000
17 10 12 1000
17 7 5 1000
17 5 6 1000
6 17 0 1000
18 10 10 1000
7 18 0 1000
19 10 10 1000
19 2 13 1000
19 3 5 1000
19 5 5 1000
19 6 10 1000
```

```
8 19 0 1000
20 10 11 1000
20 5 7 1000
20 7 5 1000
9 20 0 1000
11 1 1 1000
11 2 15 1000
11 3 2 1000
11 4 4 1000
11 5 6 1000
11 6 11 1000
11 7 9 1000
11 8 9 1000
11 9 10 1000
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-3
3
1
1
1
1
1
1
1
1
1
```

Figura 4

As duas primeiras linhas representam, respetivamente, o número de nodos e o número de arestas do modelo. As linhas com 4 valores simbolizam o fluxo de dados nas arestas isto é o primeiro valor corresponde ao nodo de saída (origem), o segundo ao nodo de entrada (destino), o terceiro ao custo de deslocação entre os nodos e o quarto à capacidade, definida com o valor 1000 para que não interfira com o modelo. É de salientar também que somamos uma unidade ao terceiro valor da primeira linha de cada bloco devido ao custo necessário para enviar uma equipa, tal como descrevia o enunciado.

Por último, o ficheiro de input termina com 20 linhas sendo que as 10 primeiras caracterizam o número de equipas que saem (valores de oferta) e as restantes 10 o número de equipas que entram (valores de consumo).

3. Solução Ótima

Numa primeira tentativa enviamos 4 equipas para fazerem os serviços e obtivemos os seguintes resultados:

```
NUMBER OF NODES = 20, NUMBER OF ARCS = 46
DEFAULT INITIALIZATION USED
***********************************
Total algorithm solution time =   0.00340890884 sec.
OPTIMAL COST =   83.
NUMBER OF ITERATIONS =  35
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  4
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  3
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  4
***********************************
```

Figura 5: Dados de output com 4 equipas.

Testamos de seguida uma solução com 3 equipas, à qual obtivemos:

```
   Announcements:
*************************************************************
 NUMBER OF NODES = 20, NUMBER OF ARCS = 46
 DEFAULT INITIALIZATION USED
 ***********************************
 Total algorithm solution time =   0.00308895111 sec.
 OPTIMAL COST =   80.
 NUMBER OF ITERATIONS =  37
 NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  4
 NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  3
 NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  4
 ***********************************
```

Figura 6: Dados de output com 3 equipas.

Sendo estes valores mais ótimos procuramos usar apenas 2 equipas, solução esta que providenciou os resultados:

```
   Announcements:
*************************************************************
 NUMBER OF NODES = 20, NUMBER OF ARCS = 46
 DEFAULT INITIALIZATION USED
 ***********************************
  PROBLEM IS FOUND TO BE INFEASIBLE.
 PROGRAM ENDED; PRESS <CR> TO EXIT
```

Figura 7: Dados de output com 2 equipas.

Como visto, com duas equipas o problema não é possível de ser solucionado pelo que , tal como evidenciado, que o número de arcos e vértices foi constante no modelo. O custo otimizado presente nos resultados obtidos garante que o modelo com a melhor opção para a prestação de serviços é o modelo com 3 equipas, sendo o seu custo de 80.

Código dado por relax:

```
s 80.
f 12 10 0
f 12 2 1
f 12 3 0
f 12 5 0
f 12 6 0
f 12 7 0
f 1 12 0
f 13 10 1
f 2 13 0
f 14 10 0
f 14 9 1
f 14 7 0
f 14 5 0
f 3 14 0
f 15 10 0
f 15 7 0
f 15 6 1
f 15 5 0
f 4 15 0
f 16 10 1
f 5 16 0
f 17 10 0
f 17 7 0
f 17 5 1
f 6 17 0
f 18 10 1
f 7 18 0
f 19 10 0
f 19 2 0
f 19 3 1
f 19 5 0
f 19 6 0
f 8 19 0
f 20 10 0
f 20 5 0
f 20 7 1
f 9 20 0
f 11 1 1
f 11 2 0
f 11 3 0
f 11 4 1
f 11 5 0
f 11 6 0
f 11 7 0
f 11 8 1
f 11 9 0
```

Figura 8: Solução ótima dada pelo Relax4

Delineando o percurso que permite a otimização dos serviços obtivemos a seguinte figura:

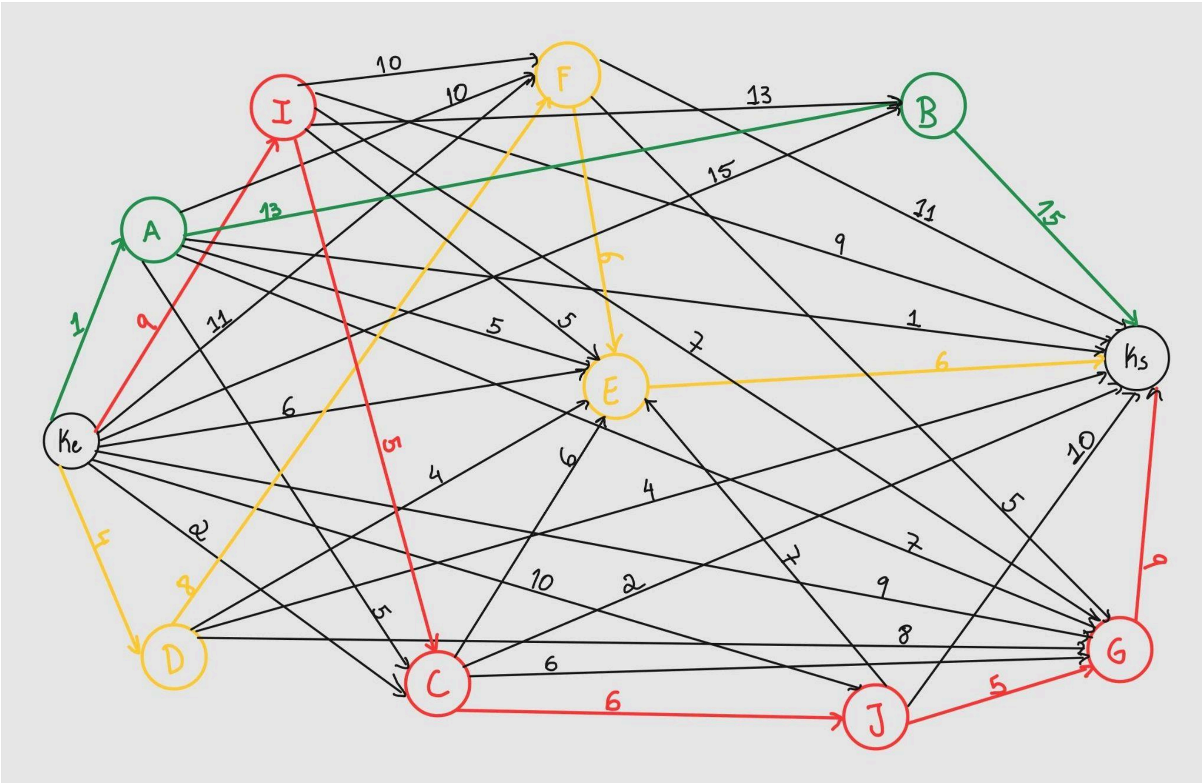


Figura 9: Percurso realizado por cada uma das equipas.

Para diferenciar o percurso realizado por cada uma das equipas utilizamos cores diferentes para esse efeito. Assim sendo, os caminhos que permitem uma menor despesa na prestação dos serviços são os seguintes :

K -> A -> B -> K
K -> D -> F -> E -> K
K -> I -> C -> J -> G -> K

4. Validação do Modelo

Para validar o nosso modelo, tentamos resolver o problema através de um modelo de programação linear (pelo LpSolve) e verificámos que a solução obtida por este modelo é igual à solução obtida pela rede de fluxos.

➔ **Função Objetivo Minimizar o custo total.**

$$min: \sum_{i,j\epsilon V} c_{ij} * x_{ij}, \;\; x_{ij} \epsilon A$$

```
min: 1 xka + 4 xkd + 9 xki + 11 xkf + 2 xkc + 10 xkj + 9 xkg + 6 xke + 15 xkb +
     5 xic + 5 xie + 7 xig + 9 xik + 10 xif + 13 xib +
     10 xaf + 13 xab + 1 xak + 5 xae + 7 xag + 5 xac +
     8 xdf + 4 xde + 4 xdk + 8 xdg +
     6 xce + 2 xck + 6 xcg + 6 xcj +
     6 xek +
     6 xfe + 5 xfg + 11 xfk +
     7 xje + 10 xjk + 5 xjg +
     15 xbk +
     9 xgk;
```

Figura 10: Função objetivo inserida no LPSolve.

➔ **Restrições**

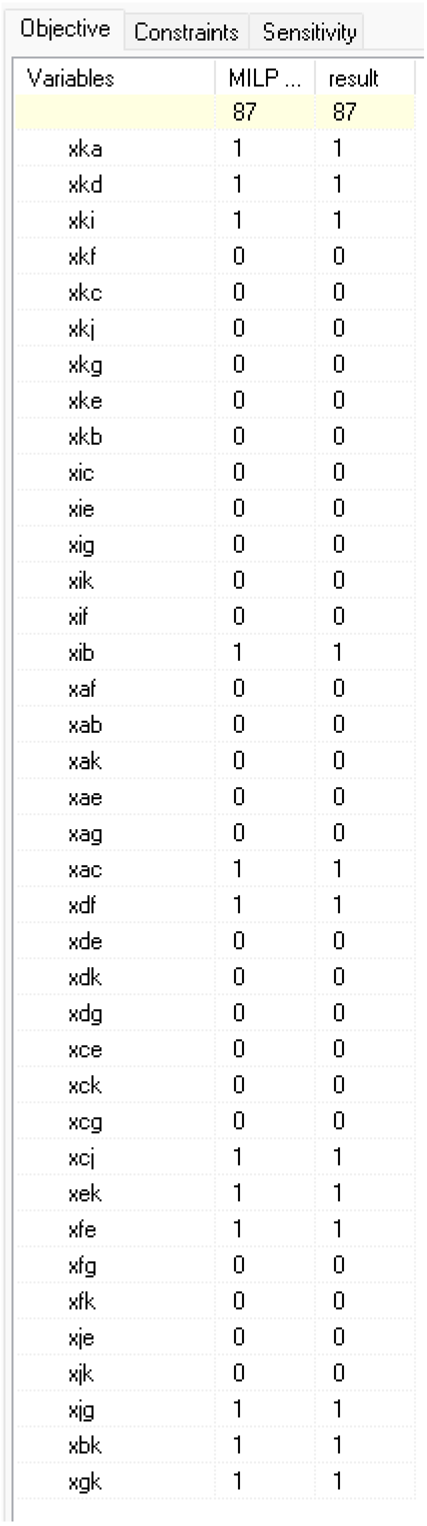
O único vértice que pode ter mais de uma equipa atribuída é o vértice K.

```
/* Variable bounds */
VA: xka = 1;
VA': xaf + xab + xak + xae + xag + xac = 1;
VB: xkb + xab + xib = 1;
VB': xbk = 1;
VC: xkc + xic + xac = 1;
VC': xce + xck + xcg + xcj = 1;
VD: xkd = 1;
VD': xdf + xde + xdk + xdg = 1;
VE: xke + xie + xae + xde + xce + xfe + xje = 1;
VE': xek = 1;
VF: xkf + xif + xaf + xdf = 1;
VF': xfe + xfg + xfk = 1;
VG: xkg + xig + xag + xdg + xcg + xfg + xjg = 1;
VG': xgk = 1;
VI: xki = 1;
VI': xic + xie + xig + xik + xif + xib = 1;
VJ: xkj + xcj = 1;
VJ': xje + xjk + xjg = 1;
VK: xak + xdk + xik + xfk + xck + xjk + xgk + xek + xbk = 3;
VK': xka + xkd + xki + xkf + xkc + xkj + xkg + xke + xkb = 3;

bin xka, xkd, xki, xkf, xkc, xkj, xkg, xke, xkb,
    xic, xie, xig, xik, xif, xib,
    xaf, xab, xak, xae, xag, xac,
    xdf, xde, xdk, xdg,
    xce, xck, xcg, xcj,
    xek,
    xfe, xfg, xfk,
    xje, xjk, xjg,
    xbk,
    xgk;
```

Figura 11: Restrições inseridas no LPSolve.

➔ Solução Ótima


Objective | Constraints | Sensitivity

Variables	MILP ...	result
	87	87
xka	1	1
xkd	1	1
xki	1	1
xkf	0	0
xkc	0	0
xkj	0	0
xkg	0	0
xke	0	0
xkb	0	0
xic	0	0
xie	0	0
xig	0	0
xik	0	0
xif	0	0
xib	1	1
xaf	0	0
xab	0	0
xak	0	0
xae	0	0
xag	0	0
xac	1	1
xdf	1	1
xde	0	0
xdk	0	0
xdg	0	0
xce	0	0
xck	0	0
xcg	0	0
xcj	1	1
xek	1	1
xfe	1	1
xfg	0	0
xfk	0	0
xje	0	0
xjk	0	0
xjg	1	1
xbk	1	1
xgk	1	1

Figura 12: Output produzido pelo programa LPSolve.

orig \ dest	A	B	C	D	E	F	G	I	J	K	
A		**X**						**X**			09:15
B										**X**	10:45
C									**X**		10:00
D						**X**					09:30
E										**X**	11:30
F					**X**						10:30
G										**X**	11:15
I			**X**								09:30
J							**X**				10:15
K	**X**			**X**							09:00

Tabela 4: Output obtido no LPSolve traduzido no problema

Nesta tabela os caminhos efetuados pelas equipas ficam assinalados com um “X”.

Desta forma, o resultado esperado seria, através dos métodos anteriormente mencionados, 80. Contudo, verificando esta mesma solução através do LPsolve (cumprindo com todas as restrições impostas, isto é, cada cliente recebe um serviço efetuado por exatamente uma equipa e que todas as horas de serviço e deslocamento são respeitadas) o resultado observado foi de 87, o que nos leva a concluir que o método não foi correto. Apesar das várias tentativas de corrigir o erro, não conseguimos detetar o mesmo. Alguns dos problemas que podem ter feito com que estes dois resultados difiram são:

- Mau input do código relax4
- Má definição dos horários na tabela 2
- Mau input do código no LPSolve
- Desenho incorreto do grafo