Méthode de Runge-Kutta d'ordre 3

Ruidong Pan & Hengshuo Li

Introduction

Dans ce projet, nous allons étudier la résolution d'équations différentielles ordinaires sous la forme suivant :

$$\begin{cases} y^{'}(x) = f(x, y(x)) & x \in [a, b] \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in [a, b] \end{cases}$$

Nous toujours considérons que f est continue et Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, cela signifie que il y a une unique solution pour cette équation différentielle ordinaire.

Bien qu'il existe de nombreuses méthodes analytiques pour résoudre les équations différentielles ordinaires, ces méthodes ne s'appliquent qu'à certaines équations différentielles spéciales, donc pour les équations différentielles générales nous utilisons souvent des procédés de résolution numérique. D'après le cours analyse numérique, nous avons connu les méthodes différents pour résoudre les équations différentielles ordinaires, par exemple la méthode d'Euler, la méthode d'Euler implicite, les méthodes de Runge-Kutta. Et dans ce projet nous allons utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 sur les différentes équations différentielles ordinaires pour chercher la valeur de y en les points discrètes qui sont dans l'intervale $[a, b]$. De plus nous allons étudier les différences entre ces valeurs obtenues par la méthode de Runge-Kutta et les valeurs exactes dans les mêmes points discrètes. Avant de commencer, nous vous présentons les formules de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 que nous utilisons :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_n + h, y_n - hK_1 + 2hK_2) \end{cases}$$

où $y_{n+1} = y(x_{n+1})$, $y_n = y(x_n)$, x_n sont des points discrètes dans l'intervale $[a, b]$.

Programmation en langue C

Pour simplifier les calculs, nous allons calculer les erreurs, les approximations, les solutions exactes etc. à l'aide du langage C.

```c
#include<stdlib.h>
#include<stdio.h>
#include<math.h>

/*n désigne le nombre de intervales égales et n+1 désigne le nombre de points.*/

  //Méthode de Runge-Kutta d'ordre 3
  int rungeKutta(double y0,double a,double b,int n,double *x,double *y,double (*function)(double,double)){
      double h=(b-a)/n,k1,k2,k3;
      int i;
      // x=(double*)malloc((n+1)*sizeof(double));
      // y=(double*)malloc((n+1)*sizeof(double));
      x[0]=a;
      y[0]=y0;
      for(i=0;i<n;i++){
         x[i+1]=x[i]+h;
         k1=function(x[i],y[i]);
         k2=function(x[i]+h/2,y[i]+h*k1/2);
         k3=function(x[i]+h,y[i]-h*k1+2*h*k2);
         y[i+1]=y[i]+h*(k1+4*k2+k3)/6;
      }
      return 1;
  }


  //exemple résoudre y'=2*y/(1+x);y0=1;
      double function(double x,double y){
         return 2*y/(1+x);
      }

  //solution exacte de équation différentielle y=(1+x)^2
      double f(double x){
        return (1+x)*(1+x);
      }


   int main(){
        int i,n;
        double y0,a,b;
```

```c
        printf("veuillez saisir respectivement le valeur initial y0, intervale à gauche a, intervale à droit b et le nombre de points intermédiaires n:\n");
        scanf("%lf%lf%lf%d",&y0,&a,&b,&n);
        double x[n+1],y[n+1];
        double h=(b-a)/n;
        printf("Utiliser la méthode Ryuga-Kuta de troisième ordre:\n");
        rungeKutta(y0,a,b,n,x,y,function);
        printf("y0=%lf,a=%lf,b=%lf,le pas: h=%lf\n",y0,a,b,h);
        for(i=0;i<(n+1);i++)
        //erreur: différences entre les valeurs exactes et approximatives
printf("x[%d]=%11.10f,y[%d]=%16.15f,y(%d)=%16.15lf,erreur:%16.15le\n",i,x[i],i,y[i],i,
   f(x[i]),f(x[i])-y[i]);
        return 1;
   }
```

Résultats numériques

Après une compilation réussie, nous choisirons deux équations différentielles ordinaires différentes à étudier.

Nous savons que l'erreur entre l'approximation obtenue par la méthode Runge-Kutta et la valeur exacte est principalement liée à la taille du pas, et nous allons donc essayer de choisir les différents tailles du pas pour la même équation différentielle et de trouver la relation entre la taille du pas et l'erreur en utilisant les équations différentielles nous étudions.

La première équation différentielle nous allons étudier :

$$\begin{cases} y^{'} = \frac{1}{cos^2(x)} & x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ y_0 = 0 & x_0 = 0 \end{cases}$$

dont la solution exacte est $y = tan(x)$.

Le nombre du pas nous choisissons : $n = 10$

```
veuillez saisir respectivement le valeur initial y0, intervale à gauche a, intervale à droit b et le nombre de points intermédiaires n:
0 0 1.5707963 10

Utiliser la méthode Ryuga-Kuta de troisième ordre:

y0=0.000000,a=0.000000,b=1.570796,le pas: h=0.157080

x[0]=0.0000000000, y[0]=0.000000000000000, y(0)=0.000000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[1]=0.1570796300, y[1]=0.158385000048712, y(1)=0.158384437577830, erreur:-5.624708820095581e-07
x[2]=0.3141592600, y[2]=0.324921076916342, y(2)=0.324919690308165, erreur:-1.386608177944559e-06
x[3]=0.4712388900, y[3]=0.509528400348287, y(3)=0.509525439369043, erreur:-2.960979244237549e-06
x[4]=0.6283185200, y[4]=0.726549076674297, y(4)=0.726542511629777, erreur:-6.565044519457608e-06
x[5]=0.7853981500, y[5]=1.000016311211805, y(5)=0.999999973205104, erreur:-1.633800670097774e-05
x[6]=0.9424777800, y[6]=1.376430980446430, y(6)=1.376381873937648, erreur:-4.910650878153788e-05
x[7]=1.0995574100, y[7]=1.962809909032029, y(7)=1.962610414501968, erreur:-1.994945300600737e-04
x[8]=1.2566370400, y[8]=3.079061743705720, y(8)=3.077683312695428, erreur:-1.378431010291781e-03
x[9]=1.4137166700, y[9]=6.344602086035428, y(9)=6.313750529236265, erreur:-3.085155679916252e-02
```

Le nombre du pas nous choisissons : $n = 30$

```
veuillez saisir respectivement le valeur initial y0, intervale à gauche a, intervale à droit b et le nombre de points intermédiaires n:
0 0 1.5707963 30

Utiliser la méthode Ryuga-Kuta de troisième ordre:

y0=0.000000,a=0.000000,b=1.570796,le pas: h=0.052360

x[0]=0.0000000000, y[0]=0.000000000000000, y(0)=0.000000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[1]=0.0523598767, y[1]=0.052407780587764, y(1)=0.052407778387425, erreur:-2.200338723723494e-09
x[2]=0.1047197533, y[2]=0.105104237964006, y(2)=0.105104233459617, erreur:-4.504389208848103e-09
x[3]=0.1570796300, y[3]=0.158384444602153, y(3)=0.158384437577830, erreur:-7.024323317450509e-09
x[4]=0.2094395067, y[4]=0.212556567826255, y(4)=0.212556557935956, erreur:-9.890298885428805e-09
x[5]=0.2617993833, y[5]=0.267949200906986, y(5)=0.267949187644675, erreur:-1.326231019449509e-08
x[6]=0.3141592600, y[6]=0.324919707654220, y(6)=0.324919690308164, erreur:-1.734605520331556e-08
x[7]=0.3665191367, y[7]=0.383864050277308, y(7)=0.383864027862010, erreur:-2.241529767355033e-08
x[8]=0.4188790133, y[8]=0.445228705591378, y(8)=0.445228676746826, erreur:-2.884455102547534e-08
x[9]=0.4712388900, y[9]=0.509525476527257, y(9)=0.509525439369043, erreur:-3.715821417227261e-08
x[10]=0.5235987667, y[10]=0.577350305387046, y(10)=0.577350257280783, erreur:-4.810626319518008e-08
x[11]=0.5759586433, y[11]=0.649407642012897, y(11)=0.649407579229302, erreur:-6.278359521161292e-08
x[12]=0.6283185200, y[12]=0.726542594452500, y(12)=0.726542511629777, erreur:-8.282272334625418e-08
x[13]=0.6806783967, y[13]=0.809784124682755, y(13)=0.809784013969890, erreur:-1.107128649868727e-07
x[14]=0.7330382733, y[14]=0.900404171999082, y(14)=0.900404021655988, erreur:-1.503430940852368e-07
x[15]=0.7853981500, y[15]=1.000000181160615, y(15)=0.999999973205103, erreur:-2.079555120326759e-07
x[16]=0.8377580267, y[16]=1.110612776787658, y(16)=1.110612482911681, erreur:-2.938759766646371e-07
x[17]=0.8901179033, y[17]=1.234897543976494, y(17)=1.234897118196461, erreur:-4.257800330087491e-07
x[18]=0.9424777800, y[18]=1.376382509069855, y(18)=1.376381873937647, erreur:-6.351322077158272e-07
x[19]=0.9948376567, y[19]=1.539865887144953, y(19)=1.539864906605247, erreur:-9.805397058748611e-07
x[20]=1.0471975333, y[20]=1.732052313238226, y(20)=1.732050736115820, erreur:-1.577122405338471e-06
x[21]=1.0995574100, y[21]=1.962613080253628, y(21)=1.962610414501966, erreur:-2.665751661634630e-06
x[22]=1.1519172867, y[22]=2.246041445580134, y(22)=2.246036655128707, erreur:-4.790451427094666e-06
x[23]=1.2042771633, y[23]=2.605098206429125, y(23)=2.605088904737877, erreur:-9.301691247909361e-06
x[24]=1.2566370400, y[24]=3.077703291809069, y(24)=3.077683312695423, erreur:-1.997911364570726e-05
x[25]=1.3089969167, y[25]=3.732099682932610, y(25)=3.732050474235846, erreur:-4.920869676450224e-05
x[26]=1.3613567933, y[26]=4.704777024727468, y(26)=4.704629572265693, erreur:-1.474524617748330e-04
x[27]=1.4137166700, y[27]=6.314349100794883, y(27)=6.313750529236247, erreur:-5.985715586360740e-04
x[28]=1.4660765467, y[28]=9.518497509064046, y(28)=9.514362165360433, erreur:-4.135343703612904e-03
x[29]=1.5184364233, y[29]=19.173681793275293, y(29)=19.081127231274586, erreur:-9.255456200070711e-02
```

Le nombre du pas nous choisissons : $n = 40$

```
veuillez saisir respectivement le valeur initial y0, intervale à gauche a, intervale à droit b et le nombre de points intermédiaires n:
0 0 1.5707963 40

Utiliser la méthode Ryuga-Kuta de troisième ordre:

y0=0.000000,a=0.000000,b=1.570796,le pas: h=0.039270

x[0]=0.0000000000, y[0]=0.000000000000000, y(0)=0.000000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[1]=0.0392699075, y[1]=0.039290106857460, y(1)=0.039290106336763, erreur:-5.206968398119294e-10
x[2]=0.0785398150, y[2]=0.078701706531706, y(2)=0.078701705476575, erreur:-1.055131010341270e-09
x[3]=0.1178097225, y[3]=0.118357799220664, y(3)=0.118357797602999, erreur:-1.617664807662678e-09
x[4]=0.1570796300, y[4]=0.158384439801784, y(4)=0.158384437577830, erreur:-2.223954020941221e-09
x[5]=0.1963495375, y[5]=0.198912366789483, y(5)=0.198912363897775, erreur:-2.891708428265360e-09
x[6]=0.2356194450, y[6]=0.240078758470823, y(6)=0.240078754829222, erreur:-3.641601298287611e-09
x[7]=0.2748893525, y[7]=0.282029167738474, y(7)=0.282029163240073, erreur:-4.498401040553546e-09
x[8]=0.3141592600, y[8]=0.324919695800586, y(8)=0.324919690308165, erreur:-5.492421906172495e-09
x[9]=0.3534291675, y[9]=0.368919476921866, y(9)=0.368919470260439, erreur:-6.661426910081758e-09
x[10]=0.3926990750, y[10]=0.414213562578221, y(10)=0.414213554525051, erreur:-8.053169575639174e-09
x[11]=0.4319689825, y[11]=0.461006315221539, y(11)=0.461006305492697, erreur:-9.728841565692647e-09
x[12]=0.4712388900, y[12]=0.509525451136857, y(12)=0.509525439369043, erreur:-1.176781383449566e-08
x[13]=0.5105087975, y[13]=0.560026911308779, y(13)=0.560026897034537, erreur:-1.427424234368146e-08
x[14]=0.5497787050, y[14]=0.612800792626357, y(14)=0.612800775239966, erreur:-1.738639032744516e-08
x[15]=0.5890486125, y[15]=0.668178644675080, y(15)=0.668178623385117, erreur:-2.128996334782585e-08
x[16]=0.6283185200, y[16]=0.726542537867225, y(16)=0.726542511629777, erreur:-2.623744754792767e-08
x[17]=0.6675884275, y[17]=0.788336448696591, y(17)=0.788336416120017, erreur:-3.257657388289203e-08
x[18]=0.7068583350, y[18]=0.854080705403109, y(18)=0.854080664610226, erreur:-4.079288307146101e-08
x[19]=0.7461282425, y[19]=0.924390519629420, y(19)=0.924390468054946, erreur:-5.157447369175117e-08
x[20]=0.7853981500, y[20]=1.000000039117444, y(20)=0.999999973205104, erreur:-6.591234036346094e-08
x[21]=0.8246680575, y[21]=1.081793960036499, y(21)=1.081793874777447, erreur:-8.525905181855364e-08
x[22]=0.8639379650, y[22]=1.170849642957626, y(22)=1.170849531172296, erreur:-1.117853305476757e-07
x[23]=0.9032078725, y[23]=1.268494061352343, y(23)=1.268493912547107, erreur:-1.488052354670089e-07
x[24]=0.9424777800, y[24]=1.376382075437804, y(24)=1.376381873937649, erreur:-2.015001547839290e-07
x[25]=0.9817476875, y[25]=1.496605986598227, y(25)=1.496605708408693, erreur:-2.781895345194130e-07
x[26]=1.0210175950, y[26]=1.631852015970915, y(26)=1.631851623332529, erreur:-3.926383855823445e-07
x[27]=1.0602875025, y[27]=1.785628977410721, y(27)=1.785628408998967, erreur:-5.684117534432431e-07
x[28]=1.0995574100, y[28]=1.962611261962329, y(28)=1.962610414501970, erreur:-8.474603598873642e-07
x[29]=1.1388273175, y[29]=2.169168882447075, y(29)=2.169167574521613, erreur:-1.307925462157300e-06
x[30]=1.1780972250, y[30]=2.414215528446642, y(30)=2.414213425147855, erreur:-2.103298786693131e-06
x[31]=1.2173671325, y[31]=2.710621990732202, y(31)=2.710618435991330, erreur:-3.554740872324658e-06
x[32]=1.2566370400, y[32]=3.077689700311260, y(32)=3.077683312695433, erreur:-6.387615826941584e-06
x[33]=1.2959069475, y[33]=3.545744645083634, y(33)=3.545732242535137, erreur:-1.240254849710354e-05
x[34]=1.3351768550, y[34]=4.165325991223883, y(34)=4.165299352163394, erreur:-2.663906048905318e-05
x[35]=1.3744467625, y[35]=5.027404487899617, y(35)=5.027338876114622, erreur:-6.561178499531195e-05
x[36]=1.4137166700, y[36]=6.313947132634851, y(36)=6.313750529236292, erreur:-1.966033985594251e-04
x[37]=1.4529865775, y[37]=8.449753641050869, y(37)=8.448955545742544, erreur:-7.980953083244202e-04
x[38]=1.4922564850, y[38]=12.711714390524687, y(38)=12.706200601046842, erreur:-5.513789477845421e-03
x[39]=1.5315263925, y[39]=25.575088623097809, y(39)=25.451682629740155, erreur:-1.234059933576539e-01
```

Le nombre du pas nous choisissons : $n = 60$

```
veuillez saisir respectivement le valeur initial y0, intervale à gauche a, intervale à droit b et le nombre de points intermédiaires n:
0 0 1.5707963 60

Utiliser la méthode Ryuga-Kuta de troisième ordre:

y0=0.000000,a=0.000000,b=1.570796,le pas: h=0.026180

x[0]=0.0000000000, y[0]=0.000000000000000, y(0)=0.000000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[1]=0.0261799383, y[1]=0.026185921190732, y(1)=0.026185921122299, erreur:-6.843262762012969e-11
x[2]=0.0523598767, y[2]=0.052407778525090, y(2)=0.052407778387425, erreur:-1.376648517403822e-10
x[3]=0.0785398150, y[3]=0.078701705685088, y(3)=0.078701705476575, erreur:-2.085123324002680e-10
x[4]=0.1047197533, y[4]=0.105104233741440, y(4)=0.105104233459617, erreur:-2.818233563184336e-10
x[5]=0.1308996917, y[5]=0.131652495674283, y(5)=0.131652495315786, erreur:-3.584964547442837e-10
x[6]=0.1570796300, y[6]=0.158384438017329, y(6)=0.158384437577830, erreur:-4.394994645995354e-10
x[7]=0.1832595683, y[7]=0.185339042223972, y(7)=0.185339041698081, erreur:-5.258909141492296e-10
x[8]=0.2094395067, y[8]=0.212556558554800, y(8)=0.212556557935956, erreur:-6.188443091303952e-10
x[9]=0.2356194450, y[9]=0.240078755548898, y(9)=0.240078754829222, erreur:-7.196762630279352e-10
x[10]=0.2617993833, y[10]=0.267949188474555, y(10)=0.267949187644675, erreur:-8.298793874317312e-10
x[11]=0.2879793217, y[11]=0.296213490569818, y(11)=0.296213489618657, erreur:-9.511613163759591e-10
x[12]=0.3141592600, y[12]=0.324919691393656, y(12)=0.324919690308164, erreur:-1.085491585506304e-09
x[13]=0.3403391983, y[13]=0.354118567232278, y(13)=0.354118565997120, erreur:-1.235158086920762e-09
x[14]=0.3665191367, y[14]=0.383864029264846, y(14)=0.383864027862010, erreur:-1.402835958508319e-09
x[15]=0.3926990750, y[15]=0.414213556116723, y(15)=0.414213554525051, erreur:-1.591671683343066e-09
x[16]=0.4188790133, y[16]=0.445228678552213, y(16)=0.445228676746826, erreur:-1.805387062070452e-09
x[17]=0.4450589517, y[17]=0.476975525427483, y(17)=0.476975523379075, erreur:-2.048407610200087e-09
x[18]=0.4712388900, y[18]=0.509525441695066, y(18)=0.509525439369043, erreur:-2.326023373910857e-09
x[19]=0.4974188283, y[19]=0.542955691296575, y(19)=0.542955688651986, erreur:-2.644589658373775e-09
```

```
x[35]=0.9162978417, y[35]=1.303225363176117, y(35)=1.303225330664309, erreur:-3.251180791252750e-08
x[36]=0.9424777800, y[36]=1.376381913816964, y(36)=1.376381873937647, erreur:-3.987931718185678e-08
x[37]=0.9686577183, y[37]=1.455009026507428, y(37)=1.455008977167787, erreur:-4.933964148357006e-08
x[38]=0.9948376567, y[38]=1.539864968225698, y(38)=1.539864906605247, erreur:-6.162045051993914e-08
x[39]=1.0210175950, y[39]=1.631851701085860, y(39)=1.631851623332527, erreur:-7.775333332737944e-08
x[40]=1.0471975333, y[40]=1.732050835340115, y(40)=1.732050736115820, erreur:-9.922429478059769e-08
x[41]=1.0733774717, y[41]=1.841770933826181, y(41)=1.841770805614419, erreur:-1.282117620959866e-07
x[42]=1.0995574100, y[42]=1.962610582473412, y(42)=1.962610414501967, erreur:-1.679714449753789e-07
x[43]=1.1257373483, y[43]=2.096543718952539, y(43)=2.096543495478437, erreur:-2.234741018902753e-07
x[44]=1.1519172867, y[44]=2.246036957620233, y(44)=2.246036655128709, erreur:-3.024915242733073e-07
x[45]=1.1780972250, y[45]=2.414213842650475, y(45)=2.414213425147854, erreur:-4.175026213637523e-07
x[46]=1.2042771633, y[46]=2.605089493892560, y(46)=2.605088904737883, erreur:-5.891546774883238e-07
x[47]=1.2304571017, y[47]=2.823913550027410, y(47)=2.823912697232358, erreur:-8.527950514647387e-07
x[48]=1.2566370400, y[48]=3.077684584045063, y(48)=3.077683312695433, erreur:-1.271349630016516e-06
x[49]=1.2828169783, y[49]=3.375945113344175, y(49)=3.375943151314065, erreur:-1.962030109936563e-06
x[50]=1.3089969167, y[50]=3.732053629309739, y(50)=3.732050474235863, erreur:-3.155073876381920e-06
x[51]=1.3351768550, y[51]=4.165304684384877, y(51)=4.165299352163398, erreur:-5.332221478582255e-06
x[52]=1.3613567933, y[52]=4.704639153784360, y(52)=4.704629572265723, erreur:-9.581518636281317e-06
x[53]=1.3875367317, y[53]=5.395535065514538, y(53)=5.395516461612923, erreur:-1.860390161567693e-05
x[54]=1.4137166700, y[54]=6.313790487886198, y(54)=6.313750529236311, erreur:-3.995864988759479e-05
x[55]=1.4398966083, y[55]=7.595851088750059, y(55)=7.595752671047762, erreur:-9.841770229623847e-05
x[56]=1.4660765467, y[56]=9.514657070381043, y(56)=9.514362165360597, erreur:-2.949050204463788e-04
x[57]=1.4922564850, y[57]=12.707397743385281, y(57)=12.706200601046950, erreur:-1.197142338330792e-03
x[58]=1.5184364233, y[58]=19.089397908903752, y(58)=19.081127231275318, erreur:-8.270677628434697e-03
x[59]=1.5446163617, y[59]=38.373529567434950, y(59)=38.188420845431025, erreur:-1.851087220039247e-01
```

Commentaire :

Nous pouvons constater que lorsque la taille du pas diminue, c'est-à-dire que le nombre du pas augmente, l'erreur diminue de manière significative en la plupart des points, mais l'erreur augmente progressivement lorsque le point se rapproche de l'extrémité droite, mais ceci est normal et est dû à l'erreur cumulative.

Nous notons également que en les points autour de l'extrémité droite, les erreurs sont plus importantes pour les petits pas que pour les grands pas. Mais cela est dû à notre choix de l'équation. Pour la solution $tan(x)$, sa pente autour de $\frac{\pi}{2}$ est trop grand, plus le point est proche de $\frac{\pi}{2}$, plus sa pente est grande et plus il tend vers l'infini positif, et le taux de variation de la pente est donc très important en particulier pour les points autour de $\frac{\pi}{2}$, donc K_1 , K_2 et K_3 on calcul ne peuvent pas bien représenter la pente moyenne dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ qui est voisinage de $\frac{\pi}{2}$. Donc plus la taille du pas est petite, plus les points proches de l'extrémité droite sont proches de $\frac{\pi}{2}$, et plus la pente moyenne est mal représentée, de sorte que l'erreur à ces points est plus grande, même au-delà de l'erreur maximale pour les grandes tailles du pas.

Alors comment choisir le nombre du pas ? Nous pouvons supposer que l'erreur maximale que nous pouvons accepter est de 10^{-2}, alors sur les résultats obtenus, nous pouvons facilement conclure que le nombre du pas d'environ 30 est optimale, avec son erreur maximale toujours à 10^{-2} et son erreur minimale jusqu'à 10^{-9} , c'est pas mal.

La deuxième équation différentielle nous allons étudier :

$$\begin{cases} y^{'} = y & x \in [0,2] \\ y_0 = 1 & x_0 = 0 \end{cases}$$

dont la solution exacte est $y = e^x$.

Le nombre du pas nous choisissons : $n = 10$

```
veuillez saisir respectivement le valeur initial y0, intervale à gauche a, intervale à droit b et le nombre de points intermédiaires n:
1 0 2 10

Utiliser la méthode Ryuga-Kuta de troisième ordre:

y0=1.000000,a=0.000000,b=2.000000,le pas: h=0.200000

x[0]=0.0000000000, y[0]=1.000000000000000, y(0)=1.000000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[1]=0.2000000000, y[1]=1.221333333333333, y(1)=1.221402758160170, erreur:6.942482683647277e-05
x[2]=0.4000000000, y[2]=1.491655111111111, y(2)=1.491824697641270, erreur:1.695865301591937e-04
x[3]=0.6000000000, y[3]=1.821808109037037, y(3)=1.822118800390509, erreur:3.106913534720590e-04
x[4]=0.8000000000, y[4]=2.225034970503901, y(4)=2.225540928492468, erreur:5.059579885666743e-04
x[5]=1.0000000000, y[5]=2.717509377308765, y(5)=2.718281828459045, erreur:7.724511502802400e-04
x[6]=1.2000000000, y[6]=3.318984786153105, y(6)=3.320116922736547, erreur:1.132136583442467e-03
x[7]=1.4000000000, y[7]=4.053586752154992, y(7)=4.055199966844675, erreur:1.613214689682785e-03
x[8]=1.6000000000, y[8]=4.950780619965297, y(8)=4.953032424395114, erreur:2.251804429817206e-03
x[9]=1.8000000000, y[9]=6.046553397184283, y(9)=6.049647464412945, erreur:3.094067228661679e-03
x[10]=2.0000000000, y[10]=7.384857215761071, y(10)=7.389056098930649, erreur:4.198883169577172e-03
```

Le nombre du pas nous choisissons : $n = 20$

```
veuillez saisir respectivement le valeur initial y0, intervale à gauche a, intervale à droit b et le nombre de points intermédiaires n:
1 0 2 20

Utiliser la méthode Ryuga-Kuta de troisième ordre:

y0=1.000000,a=0.000000,b=2.000000,le pas: h=0.100000

x[0]=0.0000000000, y[0]=1.000000000000000, y(0)=1.000000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[1]=0.1000000000, y[1]=1.105166666666667, y(1)=1.105170918075648, erreur:4.251408981081894e-06
x[2]=0.2000000000, y[2]=1.221393361111111, y(2)=1.221402758160170, erreur:9.397049058668117e-06
x[3]=0.3000000000, y[3]=1.349843229587963, y(3)=1.349858807576003, erreur:1.557798804019406e-05
x[4]=0.4000000000, y[4]=1.491801742566297, y(4)=1.491824697641270, erreur:2.295507497329652e-05
x[5]=0.5000000000, y[5]=1.648689559159519, y(5)=1.648721270700128, erreur:3.171154060899184e-05
x[6]=0.6000000000, y[6]=1.822076744464462, y(6)=1.822118800390509, erreur:4.205592604678010e-05
x[7]=0.7000000000, y[7]=2.013698482090641, y(7)=2.013752707470477, erreur:5.422537983523767e-05
x[8]=0.8000000000, y[8]=2.225472439123840, y(8)=2.225540928492467, erreur:6.848936862713373e-05
x[9]=0.9000000000, y[9]=2.459517957305031, y(9)=2.459603111156949, erreur:8.515385191865121e-05
x[10]=1.0000000000, y[10]=2.718177262481610, y(10)=2.718281828459045, erreur:1.045659774350227e-04
x[11]=1.1000000000, y[11]=3.004038904585926, y(11)=3.004166023946433, erreur:1.271193605063559e-04
x[12]=1.2000000000, y[12]=3.319963662718213, y(12)=3.320116922736547, erreur:1.532600183344890e-04
x[13]=1.3000000000, y[13]=3.669113174580745, y(13)=3.669296667619244, erreur:1.834930384996269e-04
x[14]=1.4000000000, y[14]=4.054981576774153, y(14)=4.055199966844675, erreur:2.183900705219344e-04
x[15]=1.5000000000, y[15]=4.481430472598236, y(15)=4.481689070338065, erreur:2.585977398297246e-04
x[16]=1.6000000000, y[16]=4.952727577299817, y(16)=4.953032424395117, erreur:3.048470952995430e-04
x[17]=1.7000000000, y[17]=5.473589427512515, y(17)=5.473947391727202, erreur:3.579642146869233e-04
x[18]=1.8000000000, y[18]=6.049228582305914, y(18)=6.049647464412949, erreur:4.188821070352233e-04
x[19]=1.9000000000, y[19]=6.685405788211753, y(19)=6.685894442279273, erreur:4.886540675199669e-04
x[20]=2.0000000000, y[20]=7.388487630272023, y(20)=7.389056098930653, erreur:5.684686586304721e-04
```

Le nombre du pas nous choisissons : $n = 40$

```
veuillez saisir respectivement le valeur initial y0, intervale à gauche a, intervale à droit b et le nombre de points intermédiaires n:
1 0 2 40

Utiliser la méthode Ryuga-Kuta de troisième ordre:

y0=1.000000,a=0.000000,b=2.000000,le pas: h=0.050000

x[0]=0.0000000000, y[0]=1.000000000000000, y(0)=1.000000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[1]=0.0500000000, y[1]=1.051270833333333, y(1)=1.051271096376024, erreur:2.630426907401784e-07
x[2]=0.1000000000, y[2]=1.105170365017361, y(2)=1.105170918075648, erreur:5.530582865009848e-07
x[3]=0.1500000000, y[3]=1.161833370607106, y(3)=1.161834242728283, erreur:8.721211774975757e-07
x[4]=0.2000000000, y[4]=1.221401535712607, y(4)=1.221402758160170, erreur:1.222447562509998e-06
x[5]=0.2500000000, y[5]=1.284023810283206, y(5)=1.284025416687741, erreur:1.606404535614558e-06
x[6]=0.3000000000, y[6]=1.349856781056268, y(6)=1.349858807576003, erreur:2.026519735576215e-06
x[7]=0.3500000000, y[7]=1.419065063101673, y(7)=1.419067548593257, erreur:2.485491583881227e-06
x[8]=0.4000000000, y[8]=1.491821711441115, y(8)=1.491824697641270, erreur:2.986200155152829e-06
x[9]=0.4500000000, y[9]=1.568308653771461, y(9)=1.568312185490169, erreur:3.531718707927567e-06
x[10]=0.5000000000, y[10]=1.648717145374202, y(10)=1.648721270700128, erreur:4.125325926196410e-06
x[11]=0.5500000000, y[11]=1.733248247348492, y(11)=1.733253017867395, erreur:4.770518903463028e-06
x[12]=0.6000000000, y[12]=1.822113329363588, y(12)=1.822118800390509, erreur:5.471026920611521e-06
x[13]=0.6500000000, y[13]=1.915534598187834, y(13)=1.915540829013896, erreur:6.230826062214589e-06
x[14]=0.7000000000, y[14]=2.013745653315756, y(14)=2.013752707470477, erreur:7.054154720353978e-06
x[15]=0.7500000000, y[15]=2.116992071082633, y(15)=2.117000016612675, erreur:7.945530041908455e-06
x[16]=0.8000000000, y[16]=2.225532018727099, y(16)=2.225540928492468, erreur:8.909765369047307e-06
x[17]=0.8500000000, y[17]=2.339636899937253, y(17)=2.339646851925991, erreur:9.951988738432505e-06
x[18]=0.9000000000, y[18]=2.459592033494452, y(18)=2.459603111156950, erreur:1.107766249797137e-05
x[19]=0.9500000000, y[19]=2.585697366711741, y(19)=2.585709659315847, erreur:1.229260410617883e-05
x[20]=1.0000000000, y[20]=2.718268225450857, y(20)=2.718281828459046, erreur:1.360300818875615e-05
x[21]=1.0500000000, y[21]=2.857636102593244, y(21)=2.857651118063165, erreur:1.501546992077607e-05
x[22]=1.1000000000, y[22]=3.004149486936619, y(22)=3.004166023946434, erreur:1.653700981529838e-05
x[23]=1.1500000000, y[23]=3.158174734589765, y(23)=3.158192909689769, erreur:1.817510000412526e-05
x[24]=1.2000000000, y[24]=3.320096985044461, y(24)=3.320116922736549, erreur:1.993769208796792e-05
x[25]=1.2500000000, y[25]=3.490321124215178, y(25)=3.490342957461843, erreur:2.183324666482633e-05
x[26]=1.3000000000, y[26]=3.669272796854627, y(26)=3.669296667619246, erreur:2.387076461918269e-05
x[27]=1.3500000000, y[27]=3.857399470876695, y(27)=3.857425530696976, erreur:2.605982028169862e-05
x[28]=1.4000000000, y[28]=4.055171556248101, y(28)=4.055199966844677, erreur:2.841059657576750e-05
x[29]=1.4500000000, y[29]=4.263083581246572, y(29)=4.263114515168820, erreur:3.093392224862157e-05
x[30]=1.5000000000, y[30]=4.481655429026734, y(30)=4.481689070338068, erreur:3.364131133398729e-05
x[31]=1.5500000000, y[31]=4.711433637585793, y(31)=4.711470182590745, erreur:3.654500495198221e-05
x[32]=1.6000000000, y[32]=4.952992766379515, y(32)=4.953032424395118, erreur:3.965801560390503e-05
x[33]=1.6500000000, y[33]=5.206936833005765, y(33)=5.206979827179853, erreur:4.299417408848427e-05
x[34]=1.7000000000, y[34]=5.473900823547997, y(34)=5.473947391727204, erreur:4.656817920700718e-05
x[35]=1.7500000000, y[35]=5.754552280355322, y(35)=5.754602676005735, erreur:5.039565041276006e-05
x[36]=1.8000000000, y[36]=6.049592971229373, y(36)=6.049647464412952, erreur:5.449318357886312e-05
x[37]=1.8500000000, y[37]=6.359760644191779, y(37)=6.359819522601838, erreur:5.887841005947081e-05
x[38]=1.9000000000, y[38]=6.685830872220028, y(38)=6.685894442279277, erreur:6.357005924861880e-05
x[39]=1.9500000000, y[39]=7.028618992564476, y(39)=7.028687580589301, erreur:6.858802482501147e-05
x[40]=2.0000000000, y[40]=7.388982145495750, y(40)=7.389056098930657, erreur:7.395343490657069e-05
```

Le nombre du pas nous choisissons : $n = 60$

```
veuillez saisir respectivement le valeur initial y0, intervale à gauche a, intervale à droit b et le nombre de points intermédiaires n:
1 0 2 60

Utiliser la méthode Ryuga-Kuta de troisième ordre:

y0=1.000000,a=0.000000,b=2.000000,le pas: h=0.033333

x[0]=0.0000000000, y[0]=1.000000000000000, y(0)=1.000000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[1]=0.0333333333, y[1]=1.033895061728395, y(1)=1.033895113513574, erreur:5.178517903381419e-08
x[2]=0.0666666667, y[2]=1.068938998666362, y(2)=1.068939105747246, erreur:1.070808846037608e-07
x[3]=0.1000000000, y[3]=1.105170752010047, y(3)=1.105170918075648, erreur:1.660656008262151e-07
x[4]=0.1333333333, y[4]=1.142630582869844, y(4)=1.142630811795723, erreur:2.289258784760051e-07
x[5]=0.1666666667, y[5]=1.181360117008970, y(5)=1.181360412865646, erreur:2.958566762689685e-07
x[6]=0.2000000000, y[6]=1.221402391098453, y(6)=1.221402758160170, erreur:3.670617172435442e-07
x[7]=0.2333333333, y[7]=1.262801900539944, y(7)=1.262802343293801, erreur:4.427538573548162e-07
x[8]=0.2666666667, y[8]=1.305604648909480, y(8)=1.305605172064952, erreur:5.231554722762155e-07
x[9]=0.3000000000, y[9]=1.349858199077146, y(9)=1.349858807576003, erreur:6.084988568577643e-07
x[10]=0.3333333333, y[10]=1.395611726059447, y(10)=1.395612425086090, erreur:6.990266430140224e-07
x[11]=0.3666666667, y[11]=1.442916071663103, y(11)=1.442916866655337, erreur:7.949922335992454e-07
x[12]=0.4000000000, y[12]=1.491823800981017, y(12)=1.491824697641270, erreur:8.966602529358880e-07
x[13]=0.4333333333, y[13]=1.542389260803158, y(13)=1.542390265110174, erreur:1.004307016438943e-06
x[14]=0.4666666667, y[14]=1.594668640007295, y(14)=1.594669758228316, erreur:1.118221020890431e-06
x[15]=0.5000000000, y[15]=1.648720031996678, y(15)=1.648721270700128, erreur:1.238703450257006e-06
x[16]=0.5333333333, y[16]=1.704603499254047, y(16)=1.704604865322753, erreur:1.366068706598611e-06
x[17]=0.5666666667, y[17]=1.762381140083701, y(17)=1.762382640728658, erreur:1.500644957630470e-06
x[18]=0.6000000000, y[18]=1.822117157615797, y(18)=1.822118800390509, erreur:1.642774711818618e-06
x[19]=0.6333333333, y[19]=1.883877931149552, y(19)=1.883879723964963, erreur:1.792815410572857e-06
x[20]=0.6666666667, y[20]=1.947732089914627, y(20)=1.947734041054676, erreur:1.951140048417344e-06
x[21]=0.7000000000, y[21]=2.013750589332659, y(21)=2.013752707470477, erreur:2.118137817141985e-06
x[22]=0.7333333333, y[22]=2.082006789863682, y(22)=2.082009084078456, erreur:2.294214773712611e-06
x[23]=0.7666666667, y[23]=2.152576538525049, y(23)=2.152579018319587, erreur:2.479794538157165e-06
x[24]=0.8000000000, y[24]=2.225538253173450, y(24)=2.225540928492467, erreur:2.675319016987032e-06
x[25]=0.8333333333, y[25]=2.300973009643669, y(25)=2.300975890892825, erreur:2.881249155706200e-06
x[26]=0.8666666667, y[26]=2.378964631840912, y(26)=2.378967729906635, erreur:3.098065722628718e-06
x[27]=0.9000000000, y[27]=2.459599784886828, y(27)=2.459603111156949, erreur:3.326270121117858e-06
x[28]=0.9333333333, y[28]=2.542968071422715, y(28)=2.542971637807954, erreur:3.566385239572867e-06
x[29]=0.9666666667, y[29]=2.629162131176925, y(29)=2.629165950133254, erreur:3.818956328949241e-06
x[30]=1.0000000000, y[30]=2.718277743907126, y(30)=2.718281828459045, erreur:4.084551919358859e-06
x[31]=1.0333333333, y[31]=2.810413935831780, y(31)=2.810418299596550, erreur:4.363764769976797e-06
x[32]=1.0666666667, y[32]=2.905673089669140, y(32)=2.905677746882001, erreur:4.657212861580717e-06
x[33]=1.1000000000, y[33]=3.004161058406012, y(33)=3.004166023946433, erreur:4.965540421508763e-06
x[34]=1.1333333333, y[34]=3.105987282922724, y(34)=3.105992572341721, erreur:5.289418996579087e-06
x[35]=1.1666666667, y[35]=3.211264913605000, y(35)=3.211270543153562, erreur:5.629548561536524e-06
x[36]=1.2000000000, y[36]=3.320110936077871, y(36)=3.320116922736549, erreur:5.986658678125423e-06
x[37]=1.2333333333, y[37]=3.432646301201350, y(37)=3.432652662711043, erreur:6.361509693242340e-06
x[38]=1.2666666667, y[38]=3.548996059472317, y(38)=3.549002814366307, erreur:6.754893989935340e-06
x[39]=1.3000000000, y[39]=3.669289499981962, y(39)=3.669296667619247, erreur:7.167637285032669e-06
x[40]=1.3333333333, y[40]=3.793660294083202, y(40)=3.793667894683181, erreur:7.600599978729861e-06
x[41]=1.3666666667, y[41]=3.922246643927714, y(41)=3.922254698606269, erreur:8.054678555691197e-06
x[42]=1.4000000000, y[42]=4.055191436037634, y(42)=4.055199966844679, erreur:8.530807044770938e-06
x[43]=1.4333333333, y[43]=4.192642400082589, y(43)=4.192651430041122, erreur:9.029958532913440e-06
x[44]=1.4666666667, y[44]=4.334752273038474, y(44)=4.334761826185215, erreur:9.553146740337581e-06
x[45]=1.5000000000, y[45]=4.481678968910415, y(45)=4.481689070338071, erreur:1.010142765611732e-05
x[46]=1.5333333333, y[46]=4.633585754208483, y(46)=4.633596430109725, erreur:1.067590124126383e-05
x[47]=1.5666666667, y[47]=4.790641429371192, y(47)=4.790652707084386, erreur:1.127771319442417e-05
x[48]=1.6000000000, y[48]=4.953020516338335, y(48)=4.953032424395123, erreur:1.190805678774609e-05
x[49]=1.6333333333, y[49]=5.120903452481630, y(49)=5.120916020656409, erreur:1.256817477912620e-05
x[50]=1.6666666667, y[50]=5.294476791108647, y(50)=5.294490050470039, erreur:1.325936139284778e-05
x[51]=1.7000000000, y[51]=5.473933408762830, y(51)=5.473947391727211, erreur:1.398296438104296e-05
x[52]=1.7333333333, y[52]=5.659472719549970, y(52)=5.659487459937138, erreur:1.474038716775539e-05
x[53]=1.7666666667, y[53]=5.851300896729284, y(53)=5.851316429820357, erreur:1.553309107293899e-05
x[54]=1.8000000000, y[54]=6.049631101815336, y(54)=6.049647464412960, erreur:1.636259762349823e-05
x[55]=1.8333333333, y[55]=6.254683721445386, y(55)=6.254700951936344, erreur:1.723049095758711e-05
x[56]=1.8666666667, y[56]=6.466686612275365, y(56)=6.466704750695687, erreur:1.813842032216684e-05
x[57]=1.9000000000, y[57]=6.685875354176624, y(57)=6.685894442279286, erreur:1.908810266204597e-05
x[58]=1.9333333333, y[58]=6.912493512014796, y(58)=6.912513593340118, erreur:2.008132532171913e-05
x[59]=1.9666666667, y[59]=7.146792906301668, y(59)=7.146814026250507, erreur:2.111994883868817e-05
x[60]=2.0000000000, y[60]=7.389033893020819, y(60)=7.389056098930670, erreur:2.220590985135829e-05
```

Le nombre du pas nous choisissons : $n = 100$

```
veuillez saisir respectivement le valeur initial y0, intervale à gauche a, intervale à droit b et le nombre de points intermédiaires n:
1 0 2 100

Utiliser la méthode Ryuga-Kuta de troisième ordre:

y0=1.000000,a=0.000000,b=2.000000,le pas: h=0.020000

x[0]=0.0000000000, y[0]=1.000000000000000, y(0)=1.000000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[1]=0.0200000000, y[1]=1.020201333333333, y(1)=1.020201340026756, erreur:6.693422482939582e-09
x[2]=0.0400000000, y[2]=1.040810760535111, y(2)=1.040810774192388, erreur:1.365727708702025e-08
x[3]=0.0600000000, y[3]=1.061836525645601, y(3)=1.061836546545360, erreur:2.089975859043136e-08
x[4]=0.0800000000, y[4]=1.083287039245676, y(4)=1.083287067674959, erreur:2.842928226165498e-08
x[5]=0.1000000000, y[5]=1.105170881821158, y(5)=1.105170918075648, erreur:3.625448963262556e-08
x[6]=0.1200000000, y[6]=1.127496807195121, y(6)=1.127496851579376, erreur:4.438425449393435e-08
x[7]=0.1400000000, y[7]=1.150273746029539, y(7)=1.150273798857227, erreur:5.282768844594443e-08
x[8]=0.1600000000, y[8]=1.173510809397664, y(8)=1.173510870991810, erreur:6.159414667195051e-08
x[9]=0.1800000000, y[9]=1.197217292428576, y(9)=1.197217363121810, erreur:7.069323459951704e-08
x[10]=0.2000000000, y[10]=1.221402678025356, y(10)=1.221402758160170, erreur:8.013481389568256e-08
x[11]=0.2200000000, y[11]=1.246076640658372, y(11)=1.246076730587381, erreur:8.992900868420861e-08
x[12]=0.2400000000, y[12]=1.271249050235192, y(12)=1.271249150321405, erreur:1.000862126510071e-07
x[13]=0.2600000000, y[13]=1.296929976048677, y(13)=1.296930086665772, erreur:1.106170952613894e-07
x[14]=0.2800000000, y[14]=1.323129690804828, y(14)=1.323129812337437, erreur:1.215326090875379e-07
x[15]=0.3000000000, y[15]=1.349858674732006, y(15)=1.349858807576003, erreur:1.328439966918893e-07
x[16]=0.3200000000, y[16]=1.377127619773159, y(16)=1.377127764335957, erreur:1.445627979546060e-07
x[17]=0.3400000000, y[17]=1.404947433862737, y(17)=1.404947590563594, erreur:1.567008569569595e-07
x[18]=0.3600000000, y[18]=1.433329245290009, y(18)=1.433329414560340, erreur:1.692703310851584e-07
x[19]=0.3800000000, y[19]=1.462284407150528, y(19)=1.462284589434225, erreur:1.822836968035091e-07
x[20]=0.4000000000, y[20]=1.491824501887511, y(20)=1.491824697641270, erreur:1.957537589802882e-07
x[21]=0.4200000000, y[21]=1.521961345924975, y(21)=1.521961555618634, erreur:2.096936588813492e-07
x[22]=0.4400000000, y[22]=1.552706994394454, y(22)=1.552707218511336, erreur:2.241168821637274e-07
x[23]=0.4600000000, y[23]=1.584073745957215, y(23)=1.584073984994482, erreur:2.390372675353802e-07
x[24]=0.4800000000, y[24]=1.616074147723878, y(24)=1.616074402192894, erreur:2.544690154149265e-07
x[25]=0.5000000000, y[25]=1.648721000273431, y(25)=1.648721270700128, erreur:2.704266974795644e-07
x[26]=0.5200000000, y[26]=1.682027362773621, y(26)=1.682027649698887, erreur:2.869252653248111e-07
x[27]=0.5400000000, y[27]=1.716006558204799, y(27)=1.716006862184859, erreur:3.039800600124209e-07
x[28]=0.5600000000, y[28]=1.750672178689280, y(28)=1.750672500296101, erreur:3.216068213962586e-07
x[29]=0.5800000000, y[29]=1.786038090928375, y(29)=1.786038430750074, erreur:3.398216985583957e-07
x[30]=0.6000000000, y[30]=1.822118441749250, y(30)=1.822118800390509, erreur:3.586412598011179e-07
x[31]=0.6200000000, y[31]=1.858927663763840, y(31)=1.858928041846343, erreur:3.780825024168877e-07
x[32]=0.6400000000, y[32]=1.896480481142088, y(32)=1.896480879304952, erreur:3.981628637905743e-07
x[33]=0.6600000000, y[33]=1.934791915501800, y(33)=1.934792334402032, erreur:4.189002320575952e-07
x[34]=0.6800000000, y[34]=1.973877291917490, y(34)=1.973877732230448, erreur:4.403129578722798e-07
```

```
x[60]=1.2000000000, y[60]=3.320115615762715, y(60)=3.320116922736549, erreur:1.306973834935832e-06
x[61]=1.2200000000, y[61]=3.387186378021942, y(61)=3.387187733621337, erreur:1.355599394514684e-06
x[62]=1.2400000000, y[62]=3.455612059106490, y(62)=3.455613464762678, erreur:1.405656187891680e-06
x[63]=1.2600000000, y[63]=3.525420030183187, y(63)=3.525421487365385, erreur:1.457182198016937e-06
x[64]=1.2800000000, y[64]=3.596638215352927, y(64)=3.596639725569284, erreur:1.510216356859218e-06
x[65]=1.3000000000, y[65]=3.669295102820677, y(65)=3.669296667619247, erreur:1.564798569830828e-06
x[66]=1.3200000000, y[66]=3.743419756291125, y(66)=3.743421377260865, erreur:1.620969740212530e-06
x[67]=1.3400000000, y[67]=3.819041826594547, y(67)=3.819043505366339, erreur:1.678771791358002e-06
x[68]=1.3600000000, y[68]=3.896191563547526, y(68)=3.896193301795218, erreur:1.738247691562833e-06
x[69]=1.3800000000, y[69]=3.974899828053271, y(69)=3.974901627494751, erreur:1.799441480709874e-06
x[70]=1.4000000000, y[70]=4.055198104446384, y(70)=4.055199966844678, erreur:1.862398294250056e-06
x[71]=1.4200000000, y[71]=4.137118513087007, y(71)=4.137120440251396, erreur:1.927164388959568e-06
x[72]=1.4400000000, y[72]=4.220693823209381, y(72)=4.220695816996557, erreur:1.993787175358364e-06
x[73]=1.4600000000, y[73]=4.305957466029975, y(73)=4.305959528345210, erreur:2.062315235029644e-06
x[74]=1.4800000000, y[74]=4.392943548120401, y(74)=4.392945680918761, erreur:2.132798359255617e-06
x[75]=1.5000000000, y[75]=4.481686865050498, y(75)=4.481689070338069, erreur:2.205287571221959e-06
x[76]=1.5200000000, y[76]=4.572222915307004, y(76)=4.572225195142163, erreur:2.279835158880417e-06
x[77]=1.5400000000, y[77]=4.664587914493426, y(77)=4.664590270988130, erreur:2.356494704258694e-06
x[78]=1.5600000000, y[78]=4.758818809816746, y(78)=4.758821245137859, erreur:2.435321112770339e-06
x[79]=1.5800000000, y[79]=4.854953294866791, y(79)=4.854955811237438, erreur:2.516370646965527e-06
x[80]=1.6000000000, y[80]=4.953029824694160, y(80)=4.953032424395119, erreur:2.599700959393658e-06
x[81]=1.6200000000, y[81]=5.053087631192748, y(81)=5.053090316563872, erreur:2.685371123689606e-06
x[82]=1.6400000000, y[82]=5.155166738793016, y(82)=5.155169512234687, erreur:2.773441670100851e-06
x[83]=1.6600000000, y[83]=5.259307980472287, y(83)=5.259310844446905, erreur:2.863974617461906e-06
x[84]=1.6800000000, y[84]=5.365553014088468, y(84)=5.365555971121981, erreur:2.957033513162344e-06
x[85]=1.7000000000, y[85]=5.473944339043740, y(85)=5.473947391727205, erreur:3.052683465121220e-06
x[86]=1.7200000000, y[86]=5.584525313284876, y(86)=5.584528464276060, erreur:3.150991184419638e-06
x[87]=1.7400000000, y[87]=5.697340170646982, y(87)=5.697343422671997, erreur:3.252025015498816e-06
x[88]=1.7600000000, y[88]=5.812434038547611, y(88)=5.812437394402595, erreur:3.355854984121720e-06
x[89]=1.7800000000, y[89]=5.929852956038324, y(89)=5.929856418591153, erreur:3.462552828459309e-06
x[90]=1.8000000000, y[90]=6.049643892220907, y(90)=6.049647464412953, erreur:3.572192046163991e-06
x[91]=1.8200000000, y[91]=6.171854765035625, y(91)=6.171858449883560, erreur:3.684847935225832e-06
x[92]=1.8400000000, y[92]=6.296534460429031, y(92)=6.296538261026664, erreur:3.800597633052405e-06
x[93]=1.8600000000, y[93]=6.423732851908978, y(93)=6.423736771429142, erreur:3.919520163542245e-06
x[94]=1.8800000000, y[94]=6.553500820494675, y(94)=6.553504862191157, erreur:4.041696481493773e-06
x[95]=1.9000000000, y[95]=6.685890275069762, y(95)=6.685894442279277, erreur:4.167209515237857e-06
x[96]=1.9200000000, y[96]=6.820954173146538, y(96)=6.820958469290758, erreur:4.296144219928522e-06
x[97]=1.9400000000, y[97]=6.958746542049663, y(97)=6.958750970637281, erreur:4.428587618399149e-06
x[98]=1.9600000000, y[98]=7.099322500527789, y(98)=7.099327065156642, erreur:4.564628852676833e-06
x[99]=1.9800000000, y[99]=7.242738280801785, y(99)=7.242742985161022, erreur:4.704359237273081e-06
x[100]=2.0000000000, y[100]=7.389051251058355, y(100)=7.389056098930660, erreur:4.847872305369094e-06
```

Commentaire :

Comme dans l'exemple ci-dessus, lorsque la taille du pas diminue, l'erreur diminue de manière significative, mais l'erreur augmente progressivement lorsque le point se rapproche de l'extrémité droite, mais ceci est normal et est dû à l'erreur cumulative.

Contrairement à l'exemple précédent, l'erreur maximale continue de diminuer au fur et à mesure que la taille du pas diminue. C'est-à-dire que lorsque la taille du pas s'approche de l'infini, l'erreur maximale tend vers zéro. En effet, la pente de e^x sur $[0, 2]$ est relativement plate, et le taux de variation de la pente est donc faible contrairement à $tan(x)$ sa pente tend vers l'infini lorsqu'il s'approche de $\frac{\pi}{2}$ et le taux de variation de la pente est très important en particulier pour les points autour de $\frac{\pi}{2}$. Donc K_1 , K_2 et K_3 on calcul peuvent bien représenter la pente moyenne dans l'intervalle quelconque $[x_i, x_{i+1}]$.

Alors comment choisir le nombre du pas ? Si nous choisissons une taille du pas trop petite, le nombre du pas augmentera, ce qui augmentera le nombre d'opérations. Nous pouvons constater qu'à un nombre du pas de 100, l'erreur minimale est à 10^{-9} et l'erreur maximale est à 10^{-6}. Nous pouvons donc supposer que l'approximation est approximativement égale à la valeur exacte. De plus le nombre du pas n'est pas trop élevé, donc choisir 100 est un bon choix, mais bien sûr nous pouvons aussi augmenter le nombre du pas de la manière appropriée.

La troisième équation différentielle nous allons étudier :

$$\begin{cases} y^{'} = 4x^3 - 13.2x^2 + 13.42x - 4.144 & x \in [0, 2] \\ y_0 = 0.882 & x_0 = 0 \end{cases}$$

dont la solution exacte est $y = (x-0.5)(x-0.7)(x-1.4)(x-1.8) = x^4 - 4.4x^3 + 6.71x^2 - 4.144x + 0.882$.

Le nombre du pas nous choisissons : $n = 10$

```
veuillez saisir respectivement le valeur initial y0, intervale à gauche a, intervale à droit b et le nombre de points intermédiaires n:
0.882 0 2 10

Utiliser la méthode Ryuga-Kuta de troisième ordre:

y0=0.882000,a=0.000000,b=2.000000,le pas: h=0.200000

x[0]=0.0000000000, y[0]=0.882000000000000, y(0)=0.882000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[1]=0.2000000000, y[1]=0.288000000000000, y(1)=0.288000000000000, erreur:-1.110223024625157e-16
x[2]=0.4000000000, y[2]=0.042000000000000, y(2)=0.042000000000000, erreur:-1.942890293094024e-16
x[3]=0.6000000000, y[3]=-0.009600000000000, y(3)=-0.009600000000000, erreur:-2.775557561562891e-16
x[4]=0.8000000000, y[4]=0.018000000000000, y(4)=0.018000000000000, erreur:-4.128641872824801e-16
x[5]=1.0000000000, y[5]=0.048000000000000, y(5)=0.047999999999999, erreur:-5.620504062164855e-16
x[6]=1.2000000000, y[6]=0.042000000000000, y(6)=0.041999999999999, erreur:-9.783840404509192e-16
x[7]=1.4000000000, y[7]=0.000000000000001, y(7)=0.000000000000001, erreur:2.706168622523819e-16
x[8]=1.6000000000, y[8]=-0.039599999999998, y(8)=-0.039600000000000, erreur:-1.262878690511116e-15
x[9]=1.8000000000, y[9]=0.000000000000002, y(9)=-0.000000000000001, erreur:-3.039235529911366e-15
x[10]=2.0000000000, y[10]=0.234000000000002, y(10)=0.234000000000006, erreur:4.052314039881821e-15
```

Le nombre du pas nous choisissons : $n = 20$

```
veuillez saisir respectivement le valeur initial y0, intervale à gauche a, intervale à droit b et le nombre de points intermédiaires n:
0.882 0 2 20

Utiliser la méthode Ryuga-Kuta de troisième ordre:

y0=0.882000,a=0.000000,b=2.000000,le pas: h=0.100000

x[0]=0.0000000000, y[0]=0.882000000000000, y(0)=0.882000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[1]=0.1000000000, y[1]=0.530400000000000, y(1)=0.530400000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[2]=0.2000000000, y[2]=0.288000000000000, y(2)=0.288000000000000, erreur:-1.110223024625157e-16
x[3]=0.3000000000, y[3]=0.132000000000000, y(3)=0.132000000000000, erreur:-1.387778780781446e-16
x[4]=0.4000000000, y[4]=0.042000000000000, y(4)=0.042000000000000, erreur:-1.249000902703301e-16
x[5]=0.5000000000, y[5]=0.000000000000000, y(5)=-0.000000000000000, erreur:-1.318389841742373e-16
x[6]=0.6000000000, y[6]=-0.009600000000000, y(6)=-0.009600000000000, erreur:-1.613292832658431e-16
x[7]=0.7000000000, y[7]=0.000000000000000, y(7)=0.000000000000001, erreur:6.661338147750939e-16
x[8]=0.8000000000, y[8]=0.018000000000000, y(8)=0.018000000000000, erreur:-4.510281037539698e-17
x[9]=0.9000000000, y[9]=0.036000000000000, y(9)=0.036000000000000, erreur:-3.122502256758253e-16
x[10]=1.0000000000, y[10]=0.048000000000000, y(10)=0.048000000000001, erreur:6.314393452555578e-16
x[11]=1.1000000000, y[11]=0.050400000000000, y(11)=0.050399999999999, erreur:-9.645062526431047e-16
x[12]=1.2000000000, y[12]=0.042000000000000, y(12)=0.041999999999999, erreur:-8.465450562766819e-16
x[13]=1.3000000000, y[13]=0.024000000000000, y(13)=0.024000000000001, erreur:1.137978600240785e-15
x[14]=1.4000000000, y[14]=0.000000000000000, y(14)=-0.000000000000001, erreur:-1.613292832658431e-15
x[15]=1.5000000000, y[15]=-0.023999999999999, y(15)=-0.024000000000002, erreur:-2.858824288409778e-15
x[16]=1.6000000000, y[16]=-0.039600000000000, y(16)=-0.039600000000002, erreur:-1.970645868709653e-15
x[17]=1.7000000000, y[17]=-0.036000000000000, y(17)=-0.036000000000001, erreur:-1.082467449009528e-15
x[18]=1.8000000000, y[18]=0.000000000000000, y(18)=-0.000000000000002, erreur:-2.803313137178520e-15
x[19]=1.9000000000, y[19]=0.084000000000001, y(19)=0.083999999999999, erreur:-2.151057110211241e-15
x[20]=2.0000000000, y[20]=0.234000000000002, y(20)=0.234000000000002, erreur:-5.551115123125783e-17
```

Le nombre du pas nous choisissons : $n = 40$

```
veuillez saisir respectivement le valeur initial y0, intervale à gauche a, intervale à droit b et le nombre de points intermédiaires n:
0.882 0 2 40

Utiliser la méthode Ryuga-Kuta de troisième ordre:

y0=0.882000,a=0.000000,b=2.000000,le pas: h=0.050000

x[0]=0.0000000000, y[0]=0.882000000000000, y(0)=0.882000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[1]=0.0500000000, y[1]=0.691031250000000, y(1)=0.691031250000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[2]=0.1000000000, y[2]=0.530400000000000, y(2)=0.530400000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[3]=0.1500000000, y[3]=0.397031250000000, y(3)=0.397031250000000, erreur:-5.551115123125783e-17
x[4]=0.2000000000, y[4]=0.288000000000000, y(4)=0.288000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[5]=0.2500000000, y[5]=0.200531250000000, y(5)=0.200531250000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[6]=0.3000000000, y[6]=0.132000000000000, y(6)=0.132000000000000, erreur:-5.551115123125783e-17
x[7]=0.3500000000, y[7]=0.079931250000000, y(7)=0.079931250000000, erreur:1.665334536937735e-16
x[8]=0.4000000000, y[8]=0.042000000000000, y(8)=0.042000000000000, erreur:-2.081668171172169e-17
x[9]=0.4500000000, y[9]=0.016031250000000, y(9)=0.016031250000000, erreur:1.144917494144693e-16
x[10]=0.5000000000, y[10]=-0.000000000000000, y(10)=0.000000000000000, erreur:4.024558464266192e-16
x[11]=0.5500000000, y[11]=-0.007968750000000, y(11)=-0.007968750000000, erreur:-1.006139616066548e-16
x[12]=0.6000000000, y[12]=-0.009600000000000, y(12)=-0.009600000000000, erreur:-6.418476861114186e-17
x[13]=0.6500000000, y[13]=-0.006468750000000, y(13)=-0.006468750000000, erreur:4.232725281383409e-16
x[14]=0.7000000000, y[14]=-0.000000000000000, y(14)=-0.000000000000000, erreur:-1.387778780781446e-17
x[15]=0.7500000000, y[15]=0.008531250000000, y(15)=0.008531249999999, erreur:-6.210310043996969e-16
x[16]=0.8000000000, y[16]=0.018000000000000, y(16)=0.018000000000000, erreur:2.012279232133096e-16
x[17]=0.8500000000, y[17]=0.027431250000000, y(17)=0.027431249999999, erreur:-6.036837696399289e-16
x[18]=0.9000000000, y[18]=0.036000000000000, y(18)=0.036000000000000, erreur:7.632783294297951e-17
x[19]=0.9500000000, y[19]=0.043031250000000, y(19)=0.043031250000000, erreur:3.261280134836397e-16
x[20]=1.0000000000, y[20]=0.048000000000000, y(20)=0.048000000000000, erreur:4.440892098500626e-16
x[21]=1.0500000000, y[21]=0.050531250000000, y(21)=0.050531249999999, erreur:-1.276756478318930e-15
x[22]=1.1000000000, y[22]=0.050400000000000, y(22)=0.050399999999999, erreur:-7.563394355258879e-16
x[23]=1.1500000000, y[23]=0.047531250000000, y(23)=0.047531249999999, erreur:-1.082467449009528e-15
x[24]=1.2000000000, y[24]=0.042000000000000, y(24)=0.041999999999999, erreur:-8.743006318923108e-16
x[25]=1.2500000000, y[25]=0.034031250000000, y(25)=0.034031249999998, erreur:-2.504940699310509e-15
x[26]=1.3000000000, y[26]=0.024000000000000, y(26)=0.023999999999999, erreur:-1.512678871051776e-15
x[27]=1.3500000000, y[27]=0.012431250000000, y(27)=0.012431250000000, erreur:-1.561251128379126e-17
x[28]=1.4000000000, y[28]=-0.000000000000000, y(28)=0.000000000000000, erreur:3.400058012914542e-16
x[29]=1.4500000000, y[29]=-0.012468750000000, y(29)=-0.012468750000001, erreur:-1.493596912816031e-15
x[30]=1.5000000000, y[30]=-0.024000000000000, y(30)=-0.024000000000001, erreur:-6.938893903907228e-16
x[31]=1.5500000000, y[31]=-0.033468750000000, y(31)=-0.033468750000000, erreur:-9.298117831235686e-16
x[32]=1.6000000000, y[32]=-0.039599999999999, y(32)=-0.039600000000002, erreur:-2.171873791922962e-15
x[33]=1.6500000000, y[33]=-0.040968749999999, y(33)=-0.040968750000001, erreur:-1.637578961322106e-15
x[34]=1.7000000000, y[34]=-0.035999999999999, y(34)=-0.036000000000003, erreur:-3.975986206938842e-15
x[35]=1.7500000000, y[35]=-0.022968749999999, y(35)=-0.022968750000005, erreur:-6.702971511174383e-15
x[36]=1.8000000000, y[36]=0.000000000000001, y(36)=-0.000000000000001, erreur:-2.914335439641036e-15
x[37]=1.8500000000, y[37]=0.034931250000002, y(37)=0.034931250000001, erreur:-8.396061623727746e-16
x[38]=1.9000000000, y[38]=0.084000000000002, y(38)=0.084000000000001, erreur:-1.193489751472043e-15
x[39]=1.9500000000, y[39]=0.149531250000002, y(39)=0.149531249999996, erreur:-6.605826996519681e-15
x[40]=2.0000000000, y[40]=0.234000000000003, y(40)=0.234000000000000, erreur:-2.553512956637860e-15
```

Le nombre du pas nous choisissons : $n = 50$

```
veuillez saisir respectivement le valeur initial y0, intervale à gauche a, intervale à droit b et le nombre de points intermédiaires n:
0.882 0 2 50

Utiliser la méthode Ryuga-Kuta de troisième ordre:

y0=0.882000,a=0.000000,b=2.000000,le pas: h=0.040000

x[0]=0.0000000000, y[0]=0.882000000000000, y(0)=0.882000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[1]=0.0400000000, y[1]=0.726696960000000, y(1)=0.726696960000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[2]=0.0800000000, y[2]=0.591212160000000, y(2)=0.591212160000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[3]=0.1200000000, y[3]=0.473948160000000, y(3)=0.473948160000000, erreur:5.551115123125783e-17
x[4]=0.1600000000, y[4]=0.373368960000000, y(4)=0.373368960000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[5]=0.2000000000, y[5]=0.288000000000000, y(5)=0.288000000000000, erreur:-5.551115123125783e-17
x[6]=0.2400000000, y[6]=0.216428160000000, y(6)=0.216428160000000, erreur:-1.110223024625157e-16
x[7]=0.2800000000, y[7]=0.157301760000000, y(7)=0.157301760000000, erreur:-1.387778780781446e-16
x[8]=0.3200000000, y[8]=0.109330560000000, y(8)=0.109330560000000, erreur:-1.387778780781446e-16
x[9]=0.3600000000, y[9]=0.071285760000000, y(9)=0.071285760000000, erreur:-2.775557561562891e-17
x[10]=0.4000000000, y[10]=0.042000000000000, y(10)=0.042000000000000, erreur:-5.551115123125783e-17
x[11]=0.4400000000, y[11]=0.020367360000000, y(11)=0.020367360000000, erreur:-1.353084311261910e-16
x[12]=0.4800000000, y[12]=0.005343360000000, y(12)=0.005343360000000, erreur:5.898059818321144e-17
x[13]=0.5200000000, y[13]=-0.004055040000000, y(13)=-0.004055040000000, erreur:2.602085213965211e-17
x[14]=0.5600000000, y[14]=-0.008749440000000, y(14)=-0.008749440000000, erreur:-3.920475055707584e-16
x[15]=0.6000000000, y[15]=-0.009600000000000, y(15)=-0.009600000000000, erreur:-1.283695372222837e-16
x[16]=0.6400000000, y[16]=-0.007405440000000, y(16)=-0.007405440000000, erreur:-4.093947403305265e-16
x[17]=0.6800000000, y[17]=-0.002903040000000, y(17)=-0.002903040000000, erreur:-1.786765180256111e-16
x[18]=0.7200000000, y[18]=0.003231360000000, y(18)=0.003231360000000, erreur:-7.806255641895632e-17
x[19]=0.7600000000, y[19]=0.010383360000000, y(19)=0.010383360000000, erreur:-4.805184028455756e-16
x[20]=0.8000000000, y[20]=0.018000000000000, y(20)=0.018000000000000, erreur:1.110223024625157e-16
x[21]=0.8400000000, y[21]=0.025589760000000, y(21)=0.025589759999999, erreur:-1.131039706336878e-15
x[22]=0.8800000000, y[22]=0.032722560000000, y(22)=0.032722560000000, erreur:-3.330669073875470e-16
x[23]=0.9200000000, y[23]=0.039029760000000, y(23)=0.039029759999999, erreur:-5.689893001203927e-16
x[24]=0.9600000000, y[24]=0.044204160000000, y(24)=0.044204159999999, erreur:-1.040834085586084e-15
x[25]=1.0000000000, y[25]=0.048000000000000, y(25)=0.048000000000000, erreur:2.636779683484747e-16
x[26]=1.0400000000, y[26]=0.050232960000000, y(26)=0.050232960000000, erreur:-4.302114220422482e-16
x[27]=1.0800000000, y[27]=0.050780160000000, y(27)=0.050780160000000, erreur:-2.498001805406602e-16
x[28]=1.1200000000, y[28]=0.049580160000000, y(28)=0.049580159999999, erreur:-9.992007221626409e-16
x[29]=1.1600000000, y[29]=0.046632960000000, y(29)=0.046632960000000, erreur:-5.134781488891349e-16
x[30]=1.2000000000, y[30]=0.042000000000000, y(30)=0.041999999999999, erreur:-8.604228440844963e-16
x[31]=1.2400000000, y[31]=0.035804160000000, y(31)=0.035804160000000, erreur:-1.040834085586084e-16
x[32]=1.2800000000, y[32]=0.028229760000000, y(32)=0.028229759999998, erreur:-2.140648769355380e-15
x[33]=1.3200000000, y[33]=0.019522560000000, y(33)=0.019522560000002, erreur:1.602884491802570e-15
x[34]=1.3600000000, y[34]=0.009989760000000, y(34)=0.009989760000000, erreur:1.474514954580286e-16
x[35]=1.4000000000, y[35]=0.000000000000000, y(35)=0.000000000000000, erreur:1.474514954580286e-16
x[36]=1.4400000000, y[36]=-0.010016640000000, y(36)=-0.010016640000003, erreur:-3.358424649491099e-15
x[37]=1.4800000000, y[37]=-0.019568640000000, y(37)=-0.019568640000000, erreur:-1.040834085586084e-16
x[38]=1.5200000000, y[38]=-0.028103039999999, y(38)=-0.028103040000000, erreur:-6.245004513516506e-16
x[39]=1.5600000000, y[39]=-0.035005439999999, y(39)=-0.035005439999997, erreur:2.275957200481571e-15
x[40]=1.6000000000, y[40]=-0.039599999999999, y(40)=-0.039600000000002, erreur:-2.345346139520643e-15
x[41]=1.6400000000, y[41]=-0.041149439999999, y(41)=-0.041149440000002, erreur:-3.233524559220768e-15
x[42]=1.6800000000, y[42]=-0.038855039999999, y(42)=-0.038855039999998, erreur:3.885780586188048e-16
x[43]=1.7200000000, y[43]=-0.031856639999999, y(43)=-0.031856640000002, erreur:-3.788636071533347e-15
x[44]=1.7600000000, y[44]=-0.019232639999998, y(44)=-0.019232640000002, erreur:-3.406996906818449e-15
x[45]=1.8000000000, y[45]=0.000000000000002, y(45)=-0.000000000000001, erreur:-3.431283035482124e-15
x[46]=1.8400000000, y[46]=0.026885760000002, y(46)=0.026885759999997, erreur:-5.526828994462107e-15
x[47]=1.8800000000, y[47]=0.062530560000003, y(47)=0.062530559999997, erreur:-5.856426454897701e-15
x[48]=1.9200000000, y[48]=0.108101760000003, y(48)=0.108101759999997, erreur:-5.773159728050814e-15
x[49]=1.9600000000, y[49]=0.164828160000003, y(49)=0.164828159999990, erreur:-1.293409823688307e-14
x[50]=2.0000000000, y[50]=0.234000000000004, y(50)=0.234000000000000, erreur:-3.441691376337985e-15
```

Le nombre du pas nous choisissons : $n = 60$

```
veuillez saisir respectivement le valeur initial y0, intervale à gauche a, intervale à droit b et le nombre de points intermédiaires n:
0.882 0 2 60

Utiliser la méthode Ryuga-Kuta de troisième ordre:

y0=0.882000,a=0.000000,b=2.000000,le pas: h=0.033333

x[0]=0.0000000000, y[0]=0.882000000000000, y(0)=0.882000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[1]=0.0333333333, y[1]=0.751160493827161, y(1)=0.751160493827161, erreur:0.000000000000000e+00
x[2]=0.0666666667, y[2]=0.634271604938272, y(2)=0.634271604938272, erreur:-1.110223024625157e-16
x[3]=0.1000000000, y[3]=0.530400000000000, y(3)=0.530400000000000, erreur:-1.110223024625157e-16
x[4]=0.1333333333, y[4]=0.438641975308642, y(4)=0.438641975308642, erreur:-1.110223024625157e-16
x[5]=0.1666666667, y[5]=0.358123456790124, y(5)=0.358123456790123, erreur:-5.551115123125783e-17
x[6]=0.2000000000, y[6]=0.288000000000000, y(6)=0.288000000000000, erreur:0.000000000000000e+00
x[7]=0.2333333333, y[7]=0.227456790123457, y(7)=0.227456790123457, erreur:-5.551115123125783e-17
x[8]=0.2666666667, y[8]=0.175708641975309, y(8)=0.175708641975309, erreur:-1.110223024625157e-16
x[9]=0.3000000000, y[9]=0.132000000000000, y(9)=0.132000000000000, erreur:-1.110223024625157e-16
x[10]=0.3333333333, y[10]=0.095604938271605, y(10)=0.095604938271605, erreur:-1.665334536937735e-16
x[11]=0.3666666667, y[11]=0.065827160493827, y(11)=0.065827160493827, erreur:1.387778780781446e-16
x[12]=0.4000000000, y[12]=0.042000000000000, y(12)=0.042000000000000, erreur:-6.938893903907228e-17
x[13]=0.4333333333, y[13]=0.023486419753086, y(13)=0.023486419753086, erreur:-1.006139616066548e-16
x[14]=0.4666666667, y[14]=0.009679012345679, y(14)=0.009679012345679, erreur:3.989863994746656e-17
x[15]=0.5000000000, y[15]=-0.000000000000000, y(15)=0.000000000000000, erreur:3.608224830031759e-16
x[16]=0.5333333333, y[16]=-0.006098765432099, y(16)=-0.006098765432099, erreur:-6.331740687315346e-17
x[17]=0.5666666667, y[17]=-0.009135802469136, y(17)=-0.009135802469136, erreur:-1.873501354054952e-16
x[18]=0.6000000000, y[18]=-0.009600000000000, y(18)=-0.009600000000000, erreur:-1.335737076502141e-16
x[19]=0.6333333333, y[19]=-0.007950617283951, y(19)=-0.007950617283951, erreur:-2.081668171172169e-16
x[20]=0.6666666667, y[20]=-0.004617283950617, y(20)=-0.004617283950618, erreur:-5.984795992119984e-16
x[21]=0.7000000000, y[21]=0.000000000000000, y(21)=0.000000000000001, erreur:7.728193085476676e-16
x[22]=0.7333333333, y[22]=0.005530864197531, y(22)=0.005530864197531, erreur:1.309716224362489e-16
x[23]=0.7666666667, y[23]=0.011634567901235, y(23)=0.011634567901234, erreur:-7.528699885739343e-16
x[24]=0.8000000000, y[24]=0.018000000000000, y(24)=0.018000000000000, erreur:9.020562075079397e-17
x[25]=0.8333333333, y[25]=0.024345679012346, y(25)=0.024345679012345, erreur:-5.377642775528102e-16
x[26]=0.8666666667, y[26]=0.030419753086420, y(26)=0.030419753086419, erreur:-7.355227538141662e-16
x[27]=0.9000000000, y[27]=0.036000000000000, y(27)=0.036000000000000, erreur:-1.595945597898663e-16
x[28]=0.9333333333, y[28]=0.040893827160494, y(28)=0.040893827160493, erreur:-5.412337245047638e-16
x[29]=0.9666666667, y[29]=0.044938271604938, y(29)=0.044938271604939, erreur:2.081668171172169e-16
x[30]=1.0000000000, y[30]=0.048000000000000, y(30)=0.048000000000001, erreur:6.938893903907228e-16
x[31]=1.0333333333, y[31]=0.049975308641975, y(31)=0.049975308641973, erreur:-2.373101715136272e-15
x[32]=1.0666666667, y[32]=0.050790123456790, y(32)=0.050790123456790, erreur:-1.457167719820518e-16
x[33]=1.1000000000, y[33]=0.050400000000000, y(33)=0.050399999999998, erreur:-1.831867990631508e-15
x[34]=1.1333333333, y[34]=0.048790123456790, y(34)=0.048790123456789, erreur:-8.534839501805891e-16
x[35]=1.1666666667, y[35]=0.045975308641975, y(35)=0.045975308641975, erreur:-5.967448757360216e-16
x[36]=1.2000000000, y[36]=0.042000000000000, y(36)=0.041999999999999, erreur:-8.465450562766819e-16
x[37]=1.2333333333, y[37]=0.036938271604938, y(37)=0.036938271604938, erreur:-2.914335439641036e-16
x[38]=1.2666666667, y[38]=0.030893827160494, y(38)=0.030893827160494, erreur:2.428612866367530e-17
x[39]=1.3000000000, y[39]=0.024000000000000, y(39)=0.023999999999999, erreur:-8.257283745649602e-16
x[40]=1.3333333333, y[40]=0.016419753086420, y(40)=0.016419753086419, erreur:-8.465450562766819e-16
x[41]=1.3666666667, y[41]=0.008345679012346, y(41)=0.008345679012343, erreur:-3.224850941840884e-15
x[42]=1.4000000000, y[42]=0.000000000000001, y(42)=-0.000000000000001, erreur:-2.090341788552053e-15
x[42]=1.4000000000, y[42]=0.000000000000001, y(42)=-0.000000000000001, erreur:-2.090341788552053e-15
x[43]=1.4333333333, y[43]=-0.008365432098765, y(43)=-0.008365432098768, erreur:-3.778227730677486e-15
x[44]=1.4666666667, y[44]=-0.016469135802468, y(44)=-0.016469135802470, erreur:-1.776356839400250e-15
x[45]=1.5000000000, y[45]=-0.023999999999999, y(45)=-0.024000000000001, erreur:-2.327998904760875e-15
x[46]=1.5333333333, y[46]=-0.030617283950616, y(46)=-0.030617283950618, erreur:-1.360023205165817e-15
x[47]=1.5666666667, y[47]=-0.035950617283950, y(47)=-0.035950617283953, erreur:-3.573530360512223e-15
x[48]=1.6000000000, y[48]=-0.039599999999999, y(48)=-0.039600000000000, erreur:-8.118505867571457e-16
x[49]=1.6333333333, y[49]=-0.041135802469135, y(49)=-0.041135802469140, erreur:-5.689893001203927e-15
x[50]=1.6666666667, y[50]=-0.040098765432097, y(50)=-0.040098765432097, erreur:1.526556658859590e-16
x[51]=1.7000000000, y[51]=-0.035999999999998, y(51)=-0.036000000000005, erreur:-6.973588373426765e-15
x[52]=1.7333333333, y[52]=-0.028320987654319, y(52)=-0.028320987654326, erreur:-6.519090822720841e-15
x[53]=1.7666666667, y[53]=-0.016513580246912, y(53)=-0.016513580246913, erreur:-1.464106613724425e-15
x[54]=1.8000000000, y[54]=0.000000000000002, y(54)=-0.000000000000003, erreur:-5.492134524942571e-15
x[55]=1.8333333333, y[55]=0.021827160493830, y(55)=0.021827160493827, erreur:-2.355754480376504e-15
x[56]=1.8666666667, y[56]=0.049604938271608, y(56)=0.049604938271606, erreur:-1.963706974805746e-15
x[57]=1.9000000000, y[57]=0.084000000000004, y(57)=0.083999999999994, erreur:-9.880984919163893e-15
x[58]=1.9333333333, y[58]=0.125708641975313, y(58)=0.125708641975312, erreur:-9.992007221626409e-16
x[59]=1.9666666667, y[59]=0.175456790123462, y(59)=0.175456790123454, erreur:-8.049116928532385e-15
x[60]=2.0000000000, y[60]=0.234000000000006, y(60)=0.233999999999993, erreur:-1.249000902703301e-14
```

Commentaire :

Dans ce cas, notre solution exacte est un polynôme avec 4 zéros distincts en l'intervalle $[0, 2]$.

Nous remarquons que l'erreur maximale est faible malgré la taille du pas n'est pas assez petite, ce qui indique que l'approximation de cette solution peut être bien obtenue en utilisant la méthode Runge-Kutta.

Pour choisir le nombre du pas nous pouvons comparer les erreurs maximale et minimale pour différentes nombre de pas en utilisant les résultats obtenus.

Pour le nombre du pas est 10, l'erreur est dans $[10^{-16}, 10^{-15}]$.

Pour le nombre du pas est 20, l'erreur est dans $[10^{-17}, 10^{-15}]$.

Pour le nombre du pas est 40, l'erreur est dans $[10^{-17}, 10^{-15}]$.

Pour le nombre du pas est 50, l'erreur est dans $[10^{-17}, 10^{-14}]$.

Pour le nombre du pas est 60, l'erreur est dans $[10^{-17}, 10^{-14}]$.

Donc nous pouvons conclure que prenant le nombre du pas entre 20 et 40 est optimale.

Conclusion

D'après les résultats nous avons obtenu, nous pouvons constater que si la taille du pas est trop grande, l'erreur devient plus grande, mais si la taille du pas est trop petite, elle conduira à une augmentation du nombre d'opérations et aussi à l'accumulation d'erreurs(nous pouvons voir que l'erreur augmente progressivement à mesure que le point x_i se rapproche de l'extrémité droite), il est donc très important de choisir la bonne taille du pas pour minimiser les erreurs. C'est le même principe que le professeur a enseigné en classe. De plus pour différentes équations différentielles nous devons choisir différentes tailles du pas optimales et il s'agir d'une analyse spécifique de problèmes spécifiques.

Finalement, dans ce projet, nous comprenons mieux comment résoudre les équations différentielles en utilisant des approximations et aussi comment fonction la méthode Runge-Kutta d'ordre 3. Et bien sûr ce projet est très intéressant pour nous.