统计学笔记

Ruijun Shi[1]

2021 年 11 月 18 日

[1]GitHub：https://github.com/RuijunShi

摘要

简单的统计学笔记，主要是在天文学，特别是引力波和pulsar timing中遇到的统计学，现在没写多少内容。缓慢更新中[1]。同时这也是我第一次用latex编写书籍，学习过程艰难啊。有错误请大家指出！latex资料参考https://github.com/Ali-loner

Contents

Chapter 1

代数基础

未完待续。。。图片测试 SVD分解 1.1

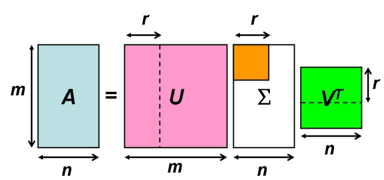

图 1.1: tSVD分解

Chapter 2

数理统计基础

2.1 概率

1. 概率的定义（略）概率满足：非负性，规范性，可列可加性
2. 概率的性质：
   重点：逆事件概率；加法公式；有限可加性
3. 条件概率：
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{2.1}$$
4. 乘法定理：
$$P(AB) = P(A|B)P(A) \tag{2.2}$$
5. 全概率公式：
$$P(A) = P(A \mid B_1) P(B_1) + P(A \mid B_2) P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_n) P(B_n) \tag{2.3}$$
6. 独立性：满足
$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{2.4a}$$
$$P(B|A) = P(B) \tag{2.4b}$$
$$\tag{2.4c}$$

2.2 单变量分布

1. 随机变量的概念（略）
2. 分布函数的概念（略）和性质：不减函数；$0 \leq F(x) \leq 1$; $F(x+0) = F(x)$
3. 概率密度函数
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{dt} \tag{2.5}$$

性质：

$$f(x) \le 0 \tag{2.6a}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{2.6b}$$
$$P\{x_1 < X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \tag{2.6c}$$
$$F'(x) = f(x) \tag{2.6d}$$

2.3 常见分布

1. (0-1)分布:

$$P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, 0 < p < 1, k = 0, 1 \tag{2.7}$$

2. 二项分布:

$$P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} \tag{2.8}$$

3. 泊松分布:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

4. Beta分布:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \tag{2.10}$$

其中：$0 \le x \le 1,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$

5. 均匀分布:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.11}$$

6. 指数分布:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.12}$$

7. 正态分布:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.13}$$

$f(x)$关于μ对称；$f(\mu) = max(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$。

8. *Gamma*分布:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \tag{2.14}$$

其中：$x > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$

9. Inv-*Gamma*分布:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{x}} \tag{2.15}$$

其中：$x > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$

10. χ^2分布:

$$f_k(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \tag{2.16}$$

等价$\alpha = k/2, \beta = 1/2$的Gamma分布

11. Inv-χ^2分布:

$$f(x) = \frac{2^{-\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{-\left(\frac{k}{2}+1\right)} e^{-\frac{1}{2x}} \tag{2.17}$$

等价$\alpha = k/2, \beta = 1/2$的Inv-Gamma分布

12. Scaled Inv-χ^2分布:

$$f(x) = \frac{\frac{k}{2}^{-\frac{k}{2}} s^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{-\left(\frac{k}{2}+1\right)} e^{-\frac{ks^2}{2x}} \tag{2.18}$$

等价$\alpha = k/2, \beta = ks^2/2$的Inv-Gamma分布。

2.4 多元随机变量

2.5 随机变量的数学特征

2.6 频率学派的参数估计

2.7 频率学派的假设检验

Chapter 3

贝叶斯统计

3.1 贝叶斯定理推导

1. 贝叶斯公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_i)P(B_j)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} \tag{3.1}$$

先验：$P(B)$

似然: $P(A|B)$

后验: $P(B|A)$

证据（归一化）：$P(A)$

2. 贝叶斯公式含义：通过数据推算模型参数的概率。即：

$$P(\text{Model}(\theta)|\text{Data}) = P(\text{Data}|\text{Model}(\theta))P(\theta) \tag{3.2}$$

3. 贝叶斯统计的优势：将这个某种程度上是主观性的信息明确表达在先验概率中，而不是隐藏在没有明确指出的假设中; 让数据说话，减少主观性的先验概率。

3.2 贝叶斯学派和频率学派

3.3 单变量贝叶斯参数估计

3.4 多变量贝叶斯参数估计

3.5 分层贝叶斯模型

3.6 贝叶斯回归

3.7 贝叶斯模型选择

Chapter 4

随机过程

4.1 随机过程及其统计描述

4.2 平稳随机过程

4.3 马尔科夫链

Chapter 5

MCMC

5.1 拒绝-接受采样

5.2 吉布斯采用

5.3 M-H采样

5.4 Nested采样

Chapter 6

高斯随机过程

6.1 高斯随机过程及其统计描述

6.2 核密度估计

6.3 高斯混合模型

6.4 高斯学习

参考文献

[1] Jaranowski, P., and Królak, A. *Analysis of gravitational-wave data.* No. 29 in Cambridge monographs on particle physics, nuclear physics and cosmology. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2009.