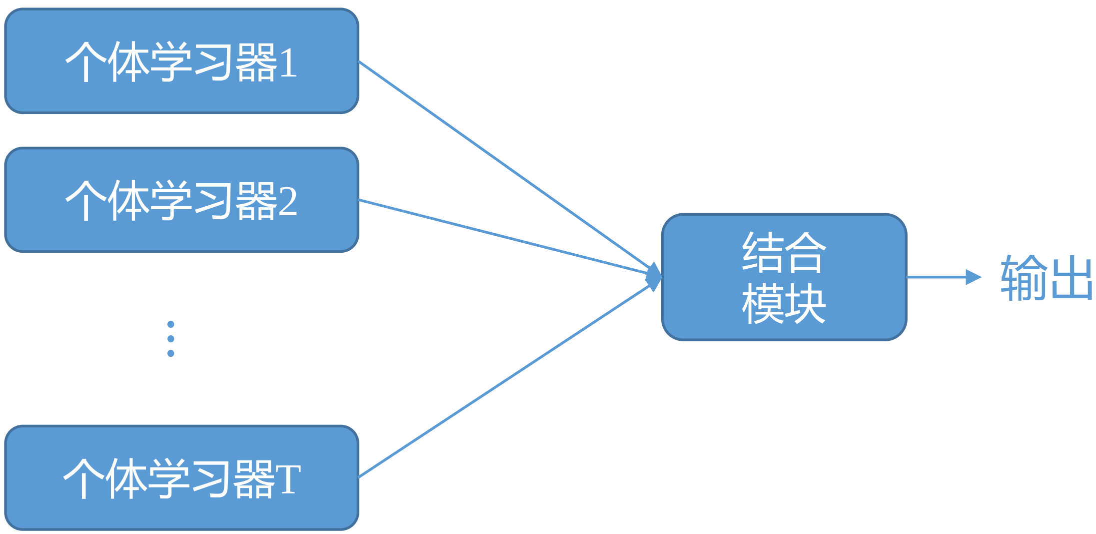
第八章：集成学习

主讲：连德富 特任教授 | 博士生导师
邮箱：liandefu@ustc.edu.cn
手机：13739227137
主页：http://staff.ustc.edu.cn/~liandefu

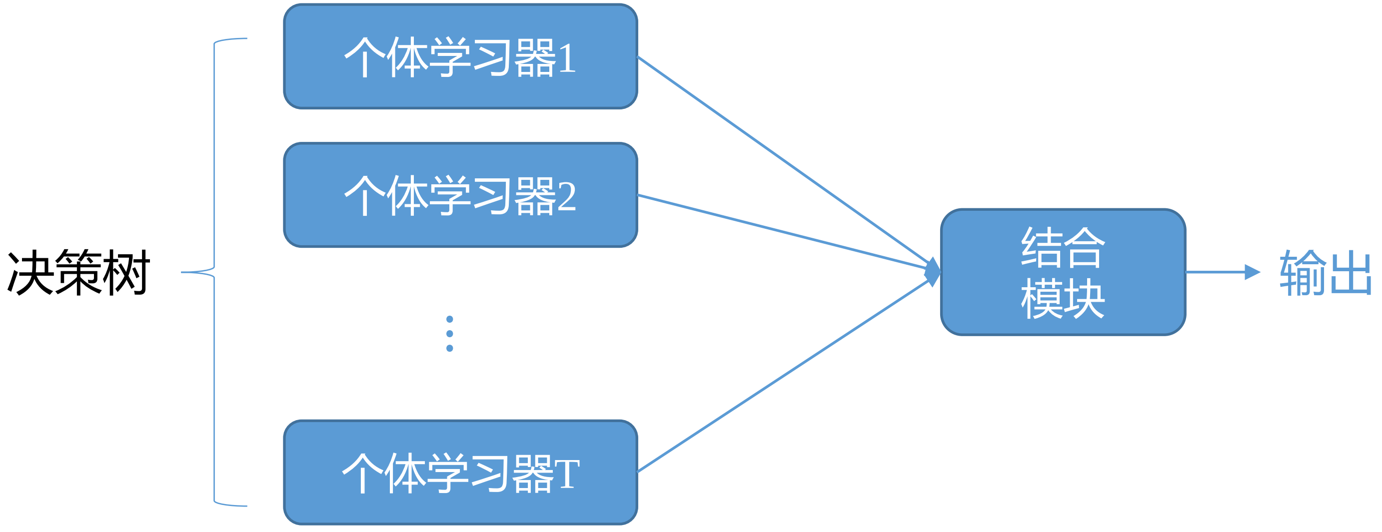
个体与集成

- 集成学习(ensemble learning)通过构建并结合多个学习器来提升性能



个体与集成

- 集成学习(ensemble learning)通过构建并结合多个学习器来提升性能

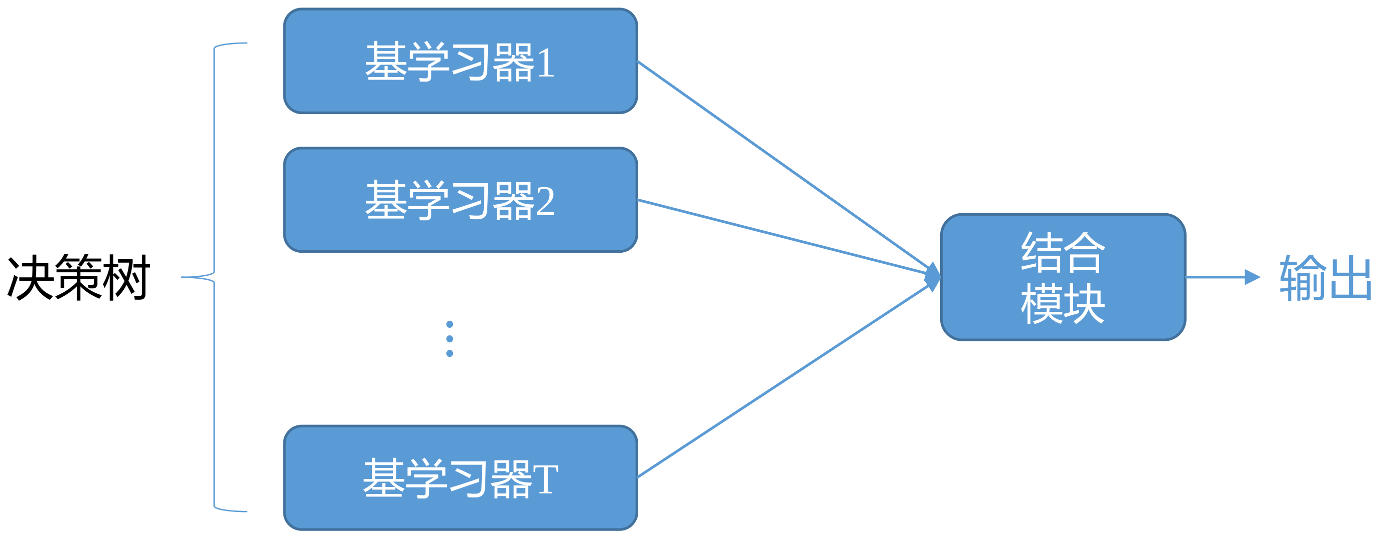


同质集成

决策树集成

个体与集成

- 集成学习(ensemble learning)通过构建并结合多个学习器来提升性能

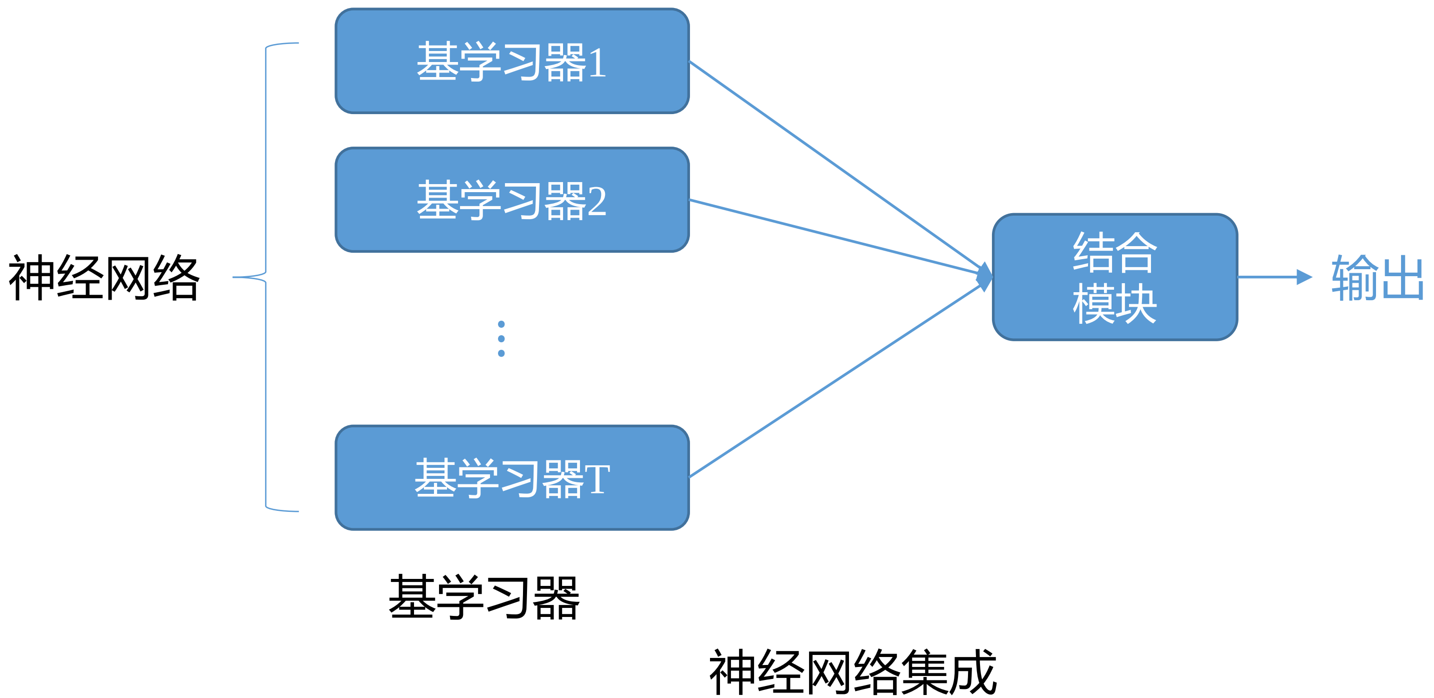


同质集成

决策树集成

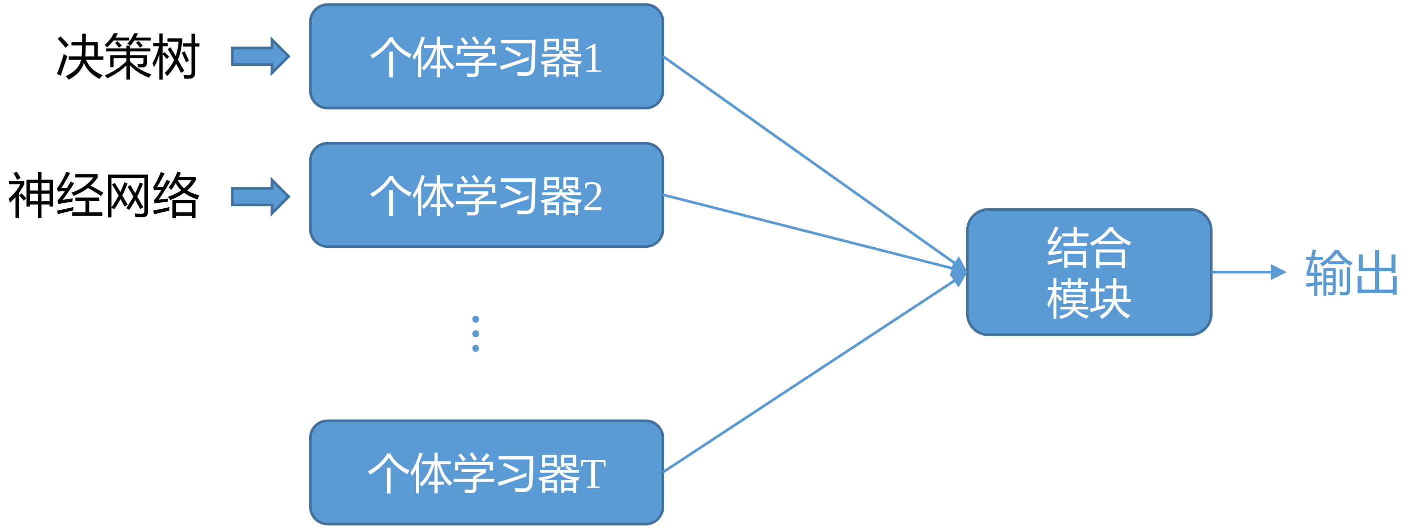
个体与集成

- 集成学习(ensemble learning)通过构建并结合多个学习器来提升性能



个体与集成

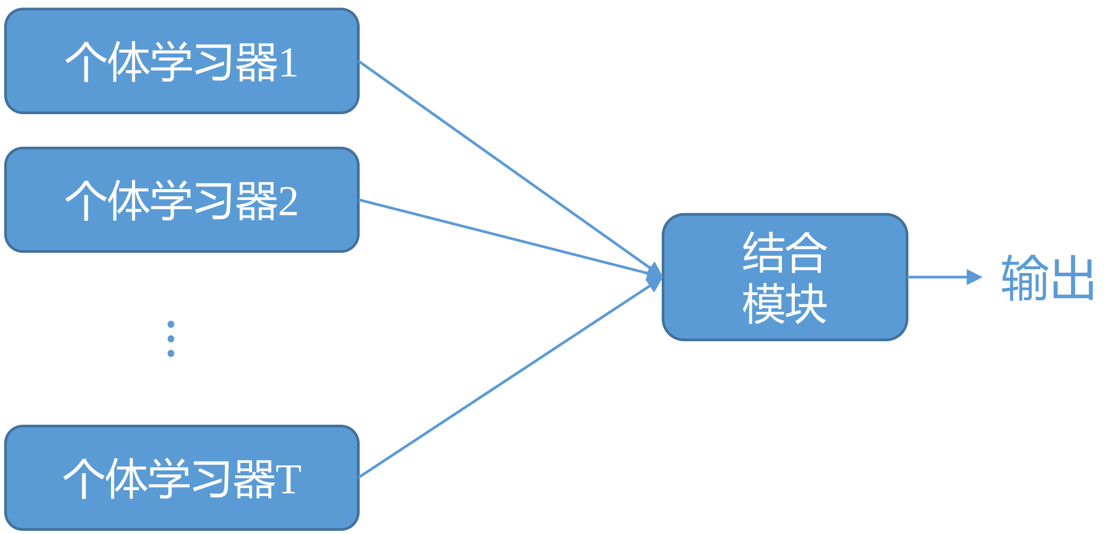
- 集成学习(ensemble learning)通过构建并结合多个学习器来提升性能



异质集成

个体与集成

- 集成学习(ensemble learning)通过构建并结合多个学习器来提升性能



集成学习获得比单一学习器显著优越的泛化性能，对弱学习器尤为明显。

集成学习很多理论研究都是针对弱学习器进行的

个体与集成

- 考虑一个简单的例子，在二分类问题中，假定3个分类器在三个样本中的表现如下图所示，其中√表示分类正确，X 号表示分类错误，集成的结果通过投票产生。

	测试例1	测试例2	测试例3
h_1	√	√	×
h_2	×	√	√
h_3	√	×	√
集群	√	√	√

集成提升性能

	测试例1	测试例2	测试例3
h_1	√	√	×
h_2	√	√	×
h_3	√	√	×
集群	√	√	×

集成不起作用

	测试例1	测试例2	测试例3
h_1	√	×	×
h_2	×	√	×
h_3	×	×	√
集群	×	×	×

集成起负作用

- 集成个体应：好而不同

个体与集成 – 简单分析

- 考虑二分类问题，假设基分类器的错误率为：

$$P\big(h(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x})\big) = \epsilon$$

- 假设集成通过简单投票法结合T个分类器

$$H(\boldsymbol{x}) = \mathrm{sign}\left(\sum_{i}^{T} h_i(\boldsymbol{x})\right)$$

- 假设基分类器的错误率相互独立，令$n(T)$表示T个基分类器中对$\boldsymbol{x}$预测正确的个数

若有超过半数的基分类器正确则分类就正确

$$P\big(H(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x})\big) = P(n(T) \leq \lfloor T/2 \rfloor) = \sum_{k=0}^{\lfloor T/2 \rfloor} \binom{T}{k} (1-\epsilon)^k \epsilon^{T-k}$$

个体与集成 – 简单分析

- Hoeffding's inequality： $P\left(\frac{n(T)}{T} \leq \mathbb{E}\left[\frac{n(T)}{T}\right] - \delta\right) \leq \exp(-2\delta^2 T)$

$$P(n(T) \leq \mathbb{E}[n(T)] - T\delta) \leq \exp(-2\delta^2 T)$$

$$\mathbb{E}[n(T)] = T(1-\epsilon)$$

$$k = \mathbb{E}[n(T)] - T\delta$$

$$\Rightarrow \quad P(n(T) \leq k) \leq \exp\left(-2\frac{(\mathbb{E}[n(T)] - k)^2}{T}\right)$$

$$\begin{aligned} P(H(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x})) &= P(n(T) \leq \lfloor T/2 \rfloor) \\ &\leq P(n(T) \leq T/2) \\ &\leq \exp\left(-2\frac{(\mathbb{E}[n(T)] - T/2)^2}{T}\right) \\ &\leq \exp\left(-2\frac{(T - T\epsilon - T/2)^2}{T}\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}T(1-2\epsilon)^2\right) \end{aligned}$$

在一定条件下，随着集成分类器数目的增加，集成的错误率将指数级下降，最终趋向于0

个体与集成 – 简单分析

- 上面的分析有一个关键假设： 基学习器的误差相互独立
- 现实任务中，个体学习器是为解决同一个问题训练出来的，显然不可能互相独立！
- 事实上，个体学习器的“准确性”和“多样性”本身就存在冲突

如何产生“好而不同”的个体学习器是集成学习研究的核心

集成学习

集成学习大致可分为两大类

个体学习器之间存在强依赖关系，必须串行生成的序列化方法

- 代表性方法是Boosting

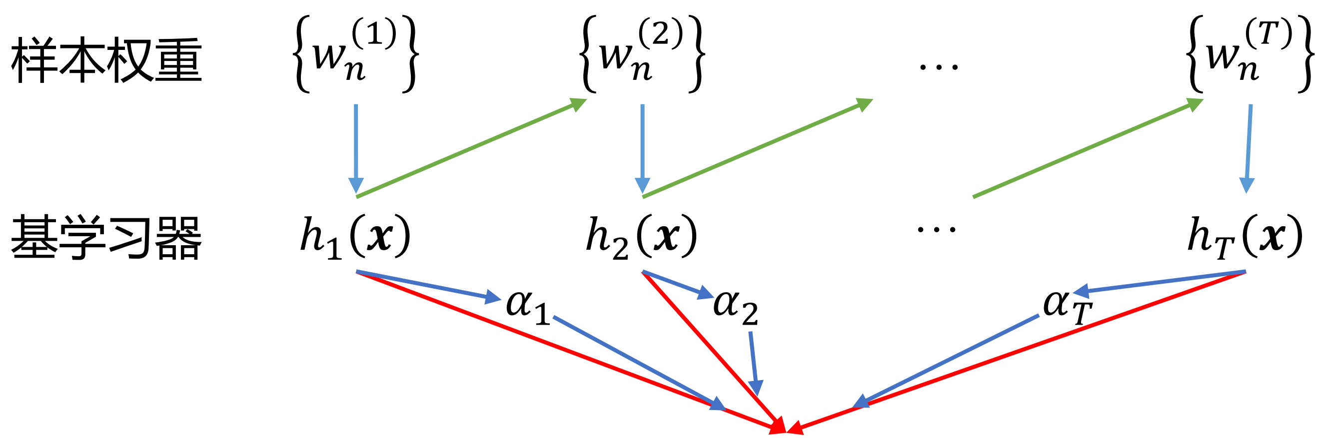
个体学习器不存在强依赖关系，可同时生成的并行化方法

- 代表性方法是Bagging和随机森林

Boosting

- 个体学习器存在强依赖关系，串行生成
- 每次调整训练数据的样本分布

$$D=\{(\boldsymbol{x}_1,y_1,w_1),(\boldsymbol{x}_2,y_2,w_2)\cdots,(\boldsymbol{x}_m,y_m,w_m)\}$$



$$H(x)=\sum_{t=1}^{T}\alpha_t h_t(\boldsymbol{x})$$

AdaBoost

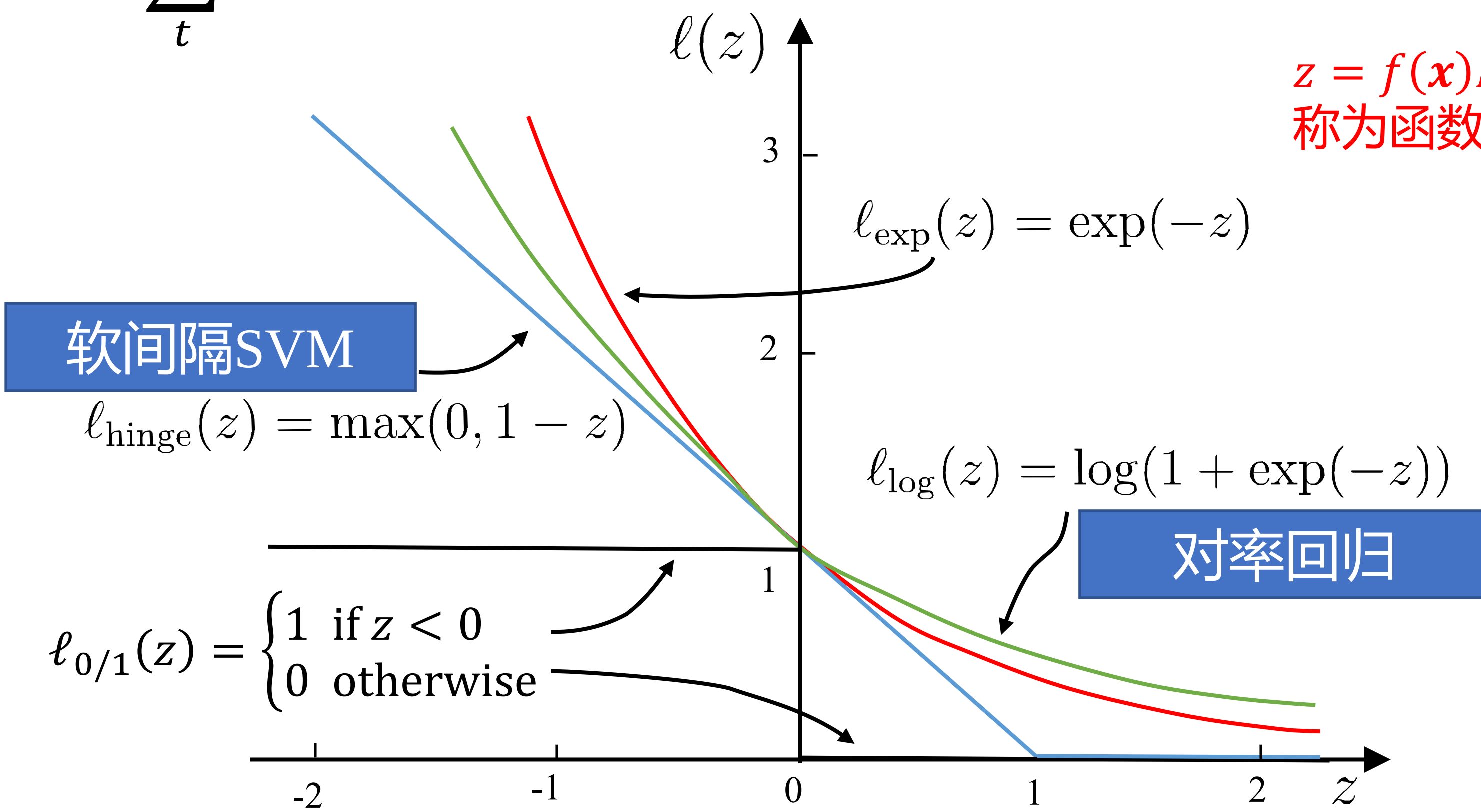
- 基学习器的线性组合

$$H(\boldsymbol{x}) = \sum_{t}^{T} \alpha_t h_t(\boldsymbol{x})$$

- 最小化指数损失函数

$$\ell(H|D) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}\sim\mathcal{D}}\left[\exp\left(-f(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})\right)\right]$$

$z = f(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})$
称为函数间隔



指数损失函数的一致性

- 假设$f(\boldsymbol{x})$具不确定性，即$y=f(\boldsymbol{x})$随机变量，则损失写成

$$
\begin{aligned}
\ell(H|D) &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x},y}\left[\exp\left(-yH(\boldsymbol{x})\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x},y}\left[\mathbb{I}(y=1)\exp\left(-H(\boldsymbol{x})\right)+\mathbb{I}(y=-1)\exp\left(H(\boldsymbol{x})\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\mathbb{E}_{y|\boldsymbol{x}}\mathbb{I}(y=1)\exp\left(-H(\boldsymbol{x})\right)+\mathbb{E}_{y}\mathbb{I}(y=-1)\exp\left(H(\boldsymbol{x})\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[P(y=1|\boldsymbol{x})\exp\left(-H(\boldsymbol{x})\right)+P(y=-1|\boldsymbol{x})\exp\left(H(\boldsymbol{x})\right)\right]
\end{aligned}
$$

- 若$H(\boldsymbol{x})$能令指数损失函数最小化，则上式对$H(\boldsymbol{x})$的偏导值为0

$$
\frac{\partial\ell(H|D)}{\partial H(\boldsymbol{x})}=P(\boldsymbol{x})\left(-P(y=1|\boldsymbol{x})\exp\left(-H(\boldsymbol{x})\right)+P(y=-1|\boldsymbol{x})\exp\left(H(\boldsymbol{x})\right)\right)=0
$$

$$
\Rightarrow\quad P(y=1|\boldsymbol{x})\exp\left(-H(\boldsymbol{x})\right)=P(y=-1|\boldsymbol{x})\exp\left(H(\boldsymbol{x})\right)
$$

$$
\Rightarrow\quad H(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\ln\frac{P(y=1|\boldsymbol{x})}{P(y=-1|\boldsymbol{x})}
$$

指数损失函数的一致性

$$H(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\ln\frac{P(y=1|\boldsymbol{x})}{P(y=-1|\boldsymbol{x})} \Rightarrow P(y=1|\boldsymbol{x})=\frac{1}{1+\exp -2\cdot H(\boldsymbol{x})}$$

$$\mathrm{sign}\big(H(\boldsymbol{x})\big)=\begin{cases}+1, \text{if } P(y=1|\boldsymbol{x})>P(y=-1|\boldsymbol{x})\\ -1, \text{if } P(y=1|\boldsymbol{x})<P(y=-1|\boldsymbol{x})\end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{sign}\big(H(\boldsymbol{x})\big)=\arg\max_{y\in\{\pm 1\}} P(y|\boldsymbol{x})$$

$\mathrm{sign}\big(H(\boldsymbol{x})\big)$达到了贝叶斯最优错误率

说明指数损失函数是分类任务原来0/1损失函数的一致的替代函数

AdaBoost

- 假设$f(\boldsymbol{x})$是确定性的，在第t步，优化以下损失函数

$$
\begin{aligned}
\ell(H_{t-1} + \alpha_t h_t | D) &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\exp\left(-f(\boldsymbol{x})\left(H_{t-1}(\boldsymbol{x}) + \alpha_t h_t(\boldsymbol{x})\right)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\exp\left(-f(\boldsymbol{x})H_{t-1}(\boldsymbol{x})\right)\exp\left(-f(\boldsymbol{x})\alpha_t h_t(\boldsymbol{x})\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})\exp\left(-f(\boldsymbol{x})\alpha_t h_t(\boldsymbol{x})\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})\exp(-\alpha_t)\,\mathbb{I}\left(f(\boldsymbol{x}) = h_t(\boldsymbol{x})\right) \right. \\
&\qquad \left. + \bar{w}_t(\boldsymbol{x})\exp(\alpha_t)\,\mathbb{I}\left(f(\boldsymbol{x}) \neq h_t(\boldsymbol{x})\right)\right] \\
&= \exp(-\alpha_t)\,\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})\mathbb{I}\left(f(\boldsymbol{x}) = h_t(\boldsymbol{x})\right)\right] \\
&\quad + \exp(\alpha_t)\,\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})\mathbb{I}\left(f(\boldsymbol{x}) \neq h_t(\boldsymbol{x})\right)\right]
\end{aligned}
$$

$D = \{(\boldsymbol{x}_1, y_1, w_1), \cdots, (\boldsymbol{x}_m, y_m, w_m)\}$

样本权重 $\left\{w_n^{(t)}\right\}$

基学习器 $h_t(\boldsymbol{x})$

α_t

$$H_t(x) = \alpha_t h_t(\boldsymbol{x}) + H_{t-1}(x)$$

AdaBoost

- 假设$f(\boldsymbol{x})$是确定性的，在第t步，优化以下损失函数（求解h_t）

$$\ell(H_{t-1}+\alpha_t h_t|D)=\exp(-\alpha_t)\,\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})\boxed{\mathbb{I}\big(f(\boldsymbol{x})=h_t(\boldsymbol{x})\big)\big]}+\exp(\alpha_t)\,\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})\mathbb{I}\big(f(\boldsymbol{x})\neq h_t(\boldsymbol{x})\big)\right]$$

$$\min_{h_t}\ell(H_{t-1}+\alpha_t h_t|D)=\exp(-\alpha_t)\,\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})\boxed{\Big(1-\mathbb{I}\big(f(\boldsymbol{x})\neq h_t(\boldsymbol{x})\big)\Big)\Big]}+\exp(\alpha_t)\,\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})\mathbb{I}\big(f(\boldsymbol{x})\neq h_t(\boldsymbol{x})\big)\right]$$

$$D=\{(\boldsymbol{x}_1,y_1,w_1),\cdots,(\boldsymbol{x}_m,y_m,w_m)\}$$

$$=\boxed{\big(\exp(\alpha_t)-\exp(-\alpha_t)\big)}\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})\mathbb{I}\big(f(\boldsymbol{x})\neq h_t(\boldsymbol{x})\big)\right]+\exp(-\alpha_t)\,\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})]$$

样本权重 $\left\{w_n^{(t)}\right\}$

当$\alpha_t>0$，$\exp(\alpha_t)-\exp(-\alpha_t)>0$

基学习器 $h_t(\boldsymbol{x})$

$$\min_{h_t}\ell(H_{t-1}+\alpha_t h_t|D)\text{ 等价于 }\min_{h_t}\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})\mathbb{I}\big(f(\boldsymbol{x})\neq h_t(\boldsymbol{x})\big)\right]$$

$$\bar{w}_t(\boldsymbol{x})=\exp\big(-f(\boldsymbol{x})H_{t-1}(\boldsymbol{x})\big)$$

α_t

$$H_t(x)=\alpha_t h_t(\boldsymbol{x})+H_{t-1}(x)$$

AdaBoost

$$h_t^{\star}(\boldsymbol{x}) = \underset{h_t}{\operatorname{argmin}}\, \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}\sim\mathcal{D}}\left[\overline{w}_t(\boldsymbol{x})\mathbb{I}\big(f(\boldsymbol{x}) \neq h_t(\boldsymbol{x})\big)\right]$$

$$= \underset{h_t}{\operatorname{argmin}}\, \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}\sim\mathcal{D}}\left[\frac{\overline{w}_t(\boldsymbol{x})}{\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}\sim\mathcal{D}}[\overline{w}_t(\boldsymbol{x})]}\mathbb{I}\big(f(\boldsymbol{x}) \neq h_t(\boldsymbol{x})\big)\right] = \underset{h_t}{\operatorname{argmin}}\, \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}\sim\mathcal{D}_t}\left[\mathbb{I}\big(f(\boldsymbol{x}) \neq h_t(\boldsymbol{x})\big)\right]$$

$$\mathcal{D}_t(\boldsymbol{x}) = \mathcal{D}(\boldsymbol{x})\frac{\overline{w}_t(\boldsymbol{x})}{\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}\sim\mathcal{D}}[\overline{w}_t(\boldsymbol{x})]} = \mathcal{D}(\boldsymbol{x})\frac{\exp\big(-f(\boldsymbol{x})H_{t-1}(\boldsymbol{x})\big)}{\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}\sim\mathcal{D}}\left[\exp\big(-f(\boldsymbol{x})H_{t-1}(\boldsymbol{x})\big)\right]}$$

$$= \mathcal{D}(\boldsymbol{x})\frac{\exp\big(-f(\boldsymbol{x})H_{t-2}(\boldsymbol{x})\big)\exp\big(-\alpha_{t-1}f(\boldsymbol{x})h_{t-1}(\boldsymbol{x})\big)}{\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}\sim\mathcal{D}}\left[\exp\big(-f(\boldsymbol{x})H_{t-1}(\boldsymbol{x})\big)\right]}$$

$$= \mathcal{D}_{t-1}(\boldsymbol{x})\exp\big(-\alpha_{t-1}f(\boldsymbol{x})h_{t-1}(\boldsymbol{x})\big)\frac{\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}\sim\mathcal{D}}\left[\exp\big(-f(\boldsymbol{x})H_{t-2}(\boldsymbol{x})\big)\right]}{\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}\sim\mathcal{D}}\left[\exp\big(-f(\boldsymbol{x})H_{t-1}(\boldsymbol{x})\big)\right]}$$

$$= \frac{\mathcal{D}_{t-1}(\boldsymbol{x})\exp\big(-\alpha_{t-1}f(\boldsymbol{x})h_{t-1}(\boldsymbol{x})\big)}{Z_{t-1}}$$

AdaBoost

$$h_t^\star(\boldsymbol{x}) = \operatorname*{argmin}_{h_t} \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})\mathbb{I}\left(f(\boldsymbol{x}) \neq h_t(\boldsymbol{x})\right)\right]$$

- 假设$f(\boldsymbol{x})$是确定性的，在第t步，优化以下损失函数（求解α_t）

$$\begin{aligned}\ell(H_{t-1} + \alpha_t h_t^\star | D) &= (\exp(\alpha_t) - \exp(-\alpha_t))\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})\mathbb{I}\left(f(\boldsymbol{x}) \neq h_t^\star(\boldsymbol{x})\right)\right] \\ &\quad + \exp(-\alpha_t)\,\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})] \\ &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})]\left((\exp(\alpha_t) - \exp(-\alpha_t))\epsilon_t + \exp(-\alpha_t)\right)\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}\left[\frac{\bar{w}_t(\boldsymbol{x})}{\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}[\bar{w}_t(\boldsymbol{x})]}\mathbb{I}\left(f(\boldsymbol{x}) \neq h_t^\star(\boldsymbol{x})\right)\right] = \epsilon_t$$

$$D = \{(\boldsymbol{x}_1, y_1, w_1), \cdots, (\boldsymbol{x}_m, y_m, w_m)\}$$

样本权重 $\left\{w_n^{(t)}\right\}$ $\downarrow$

基学习器 $h_t(\boldsymbol{x})$ $\downarrow$ α_t

$$H_t(x) = \alpha_t h_t(\boldsymbol{x}) + H_{t-1}(x)$$

$$\frac{\partial \ell(H_{t-1} + \alpha_t h_t^\star | D)}{\partial \alpha_t} = 0$$

$$\Rightarrow (\exp(\alpha_t) + \exp(-\alpha_t))\epsilon_t - \exp(-\alpha_t) = 0$$

$$\Rightarrow (\exp(2\alpha_t) + 1)\epsilon_t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \exp(2\alpha_t) = \frac{1-\epsilon_t}{\epsilon_t} \Rightarrow \alpha_t = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\epsilon_t}{\epsilon_t}$$

AdaBoost

输入: 训练集 $D=\{(\boldsymbol{x}_1,y_1),(\boldsymbol{x}_2,y_2),\ldots,(\boldsymbol{x}_m,y_m)\}$;
基学习算法 $\mathfrak{L}$;
训练轮数 T.

过程:

$\mathcal{D}_1(\boldsymbol{x})=1/m.$

for $t=1,2,\ldots,T$ **do**

$\quad h_t=\mathfrak{L}(D,\mathcal{D}_t);$

$\quad \epsilon_t=P_{\boldsymbol{x}\sim\mathcal{D}_t}(h_t(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{x}));$

$\quad$ **if** $\epsilon_t>0.5$ **then break**

$\quad \alpha_t=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\epsilon_t}{\epsilon_t}\right);$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{t+1}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mathcal{D}_t(\boldsymbol{x})}{Z_t}\times\begin{cases}\exp(-\alpha_t), & \text{if } h_t(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})\\ \exp(\alpha_t), & \text{if } h_t(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{x})\end{cases}\\ &= \frac{\mathcal{D}_t(\boldsymbol{x})\exp(-\alpha_t f(\boldsymbol{x})h_t(\boldsymbol{x}))}{Z_t}\end{aligned}$$

end for

输出: $H(\boldsymbol{x})=\operatorname{sign}\left(\sum_{t=1}^{T}\alpha_t h_t(\boldsymbol{x})\right)$

AdaBoost

- Boosting算法要求基学习器能对特定的数据分布进行学习

重赋权法：在每一轮训练，根据样本分布为每个样本赋一个权重

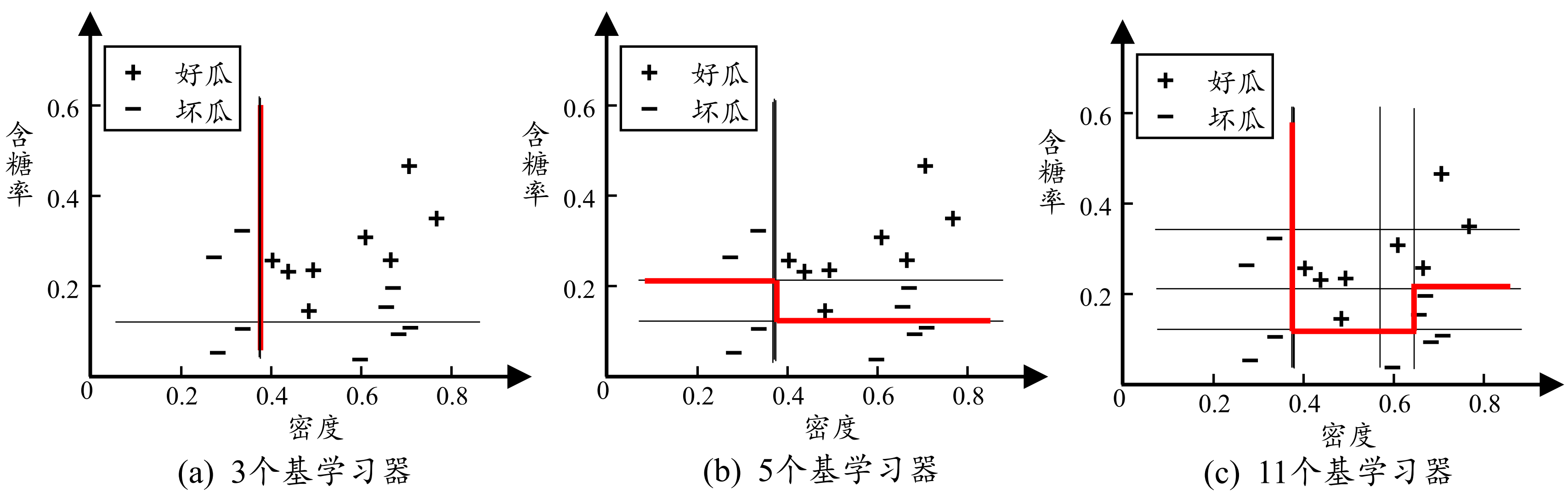
- 检查满足泛化误差大于0.5，条件不满足，就会被放弃，且学习会停止

重采样法：在每一轮学习，根据样本分布对训练集进行重采样，再用重采样而得的样本集对基学习器进行训练

- 获得重启动机会一避免训练过程过早停止：在抛弃不满足条件的当前基学习器之后，可根据当前分布重新对训练样本进行采样，再基于新的采样结果重新训练处基学习器。

AdaBoost

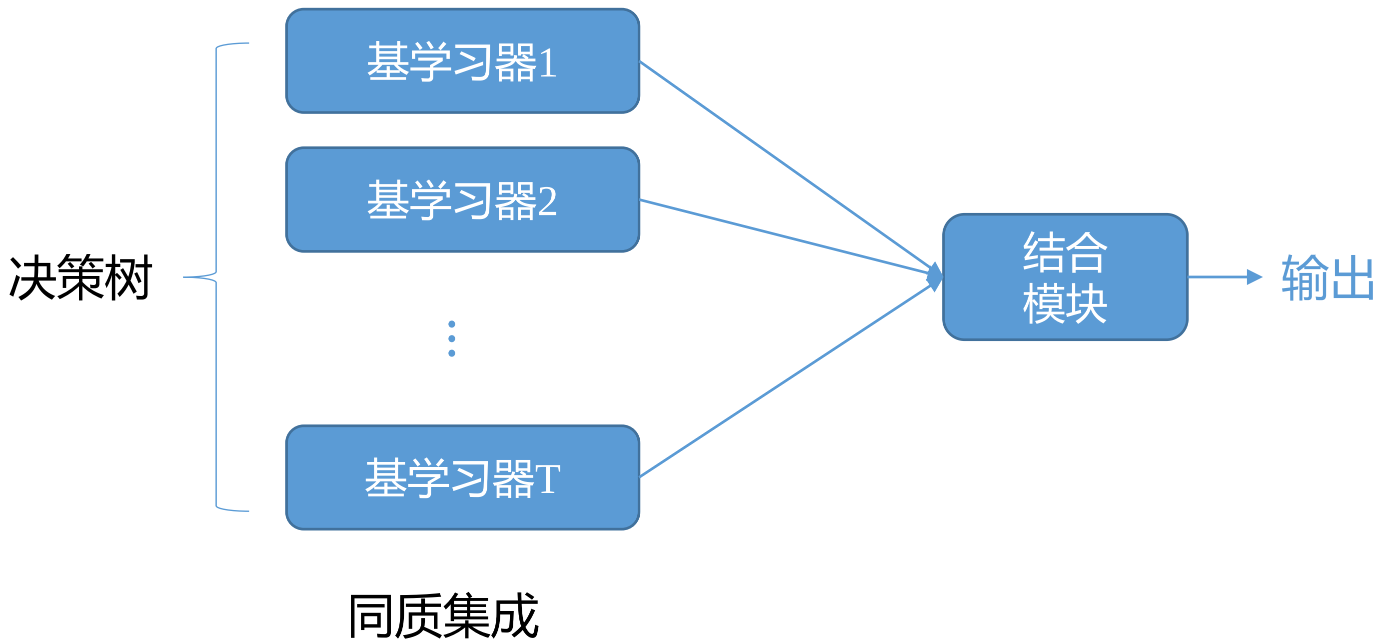
- 从偏差-方差的角度：降低偏差，可对泛化性能相当弱的学习器构造出很强的集成



集成模型（红色）和基学习器（黑色）的分类边界

梯度提升树

- 基于决策树的Boosting集成



决策树集成

梯度提升树

Adaboost

$$H(\boldsymbol{x})=\sum_{t}^{T}\alpha_t h_t(\boldsymbol{x})$$

先训练学习器再学习权重

$$\min_{H(\boldsymbol{x})}\mathbb{E}_{\boldsymbol{x},y}\left[\exp\left(-yH(\boldsymbol{x})\right)\right]$$

适用于分类

Gradient Boosting

$$H(\boldsymbol{x})=\sum_{t}^{T}h_t(\boldsymbol{x})$$

同时学习权重和学习器

$$\min_{H(\boldsymbol{x})}\mathbb{E}_{\boldsymbol{x},y}\left[\ell\left(y,H(\boldsymbol{x})\right)\right]$$

适用于回归和分类

梯度提升树

- 与Adaboost一样，通过前向分布法优化 $\min_{H(\boldsymbol{x})} \mathbb{E}_{\boldsymbol{x},y}\left[\ell\left(y, H(\boldsymbol{x})\right)\right]$

将$H(\boldsymbol{x})$看过一个参数（泛函），$H(\boldsymbol{x})$的学习过程看成是一个梯度下降过程

$$H_t(\boldsymbol{x}) = H_{t-1}(\boldsymbol{x}) + h_t(\boldsymbol{x})$$

负梯度

$$h_t(\boldsymbol{x}) \approx -\frac{d\ell(y,\hat{y})}{d\hat{y}}\bigg|_{\hat{y}=H_{t-1}(\boldsymbol{x})} = -\ell'\left(y, H_{t-1}(\boldsymbol{x})\right)$$

$$\ell\left(y, H(\boldsymbol{x})\right) = \left(y - H(\boldsymbol{x})\right)^2 \qquad -\ell'\left(y, H_{t-1}(\boldsymbol{x})\right) = y - H_{t-1}(\boldsymbol{x})$$

残差

梯度提升树

- 梯度提升树的算法流程

(1) 初始化 $h_0(\boldsymbol{x}) = \mathrm{argmin}_\gamma \sum_{i=1}^{m} \ell(y_i, \gamma)$

(2) 对 t=1 to T

(a) 计算负梯度:$\tilde{y}_i = -\ell'\big(y_i, H_{t-1}(\boldsymbol{x}_i)\big)$， $i \in \{1,2,\ldots m\}$

(b) 通过最小化平方误差，用基学习器$h_t(\boldsymbol{x})$根据$\boldsymbol{x}_i$拟合$\tilde{y}_i$

(c) 使用线搜索确定步长ρ_t，$\rho_t = \mathrm{argmin}_{\rho_t} \sum_{i=1}^{m} \ell\big(y_i, H_{t-1}(\boldsymbol{x}) + \rho_t h_t(\boldsymbol{x})\big)$

(d) 更新$H_t(\boldsymbol{x}) = H_{t-1}(\boldsymbol{x}) + \rho_t h_t(\boldsymbol{x})$

(3) 输出$H_T(\boldsymbol{x})$

梯度提升树

- 回忆：回归树将空间划分为M个区域$R_1, R_2, \cdots, R_M$，那么回归树的决策函数为

$$h(\boldsymbol{x}) = \sum_{c=1}^{C} w_c I(\boldsymbol{x} \in R_c)$$

- 如果优化平方损失，在给定区域划分情况下，最优的c_m值是对应区域内的平均值

$$f_i = \ell'\big(y_i, H_{t-1}(\boldsymbol{x}_i)\big) \qquad s_i = \ell''\big(y_i, H_{t-1}(\boldsymbol{x}_i)\big)$$

- 提升树每次优化

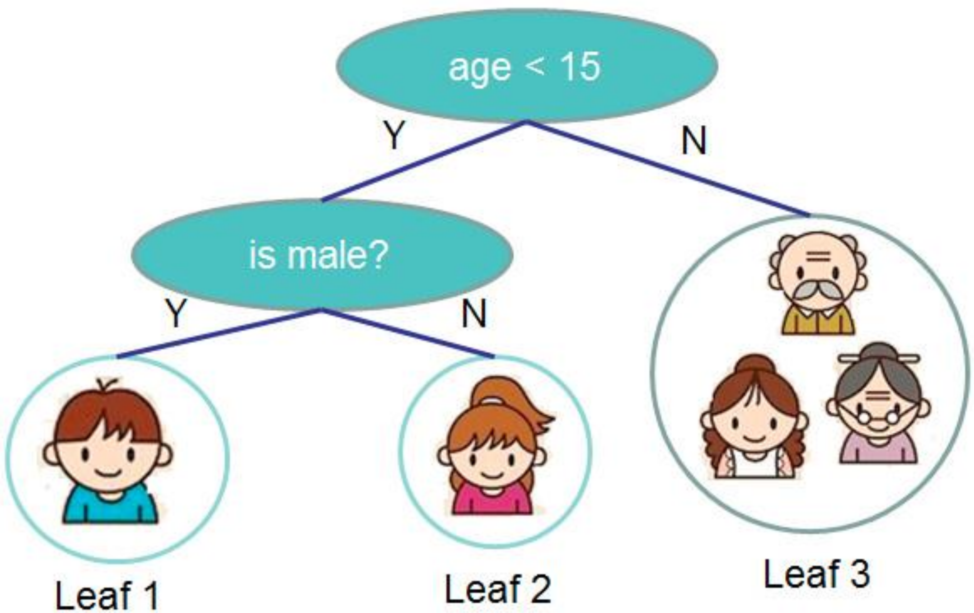
$$\begin{aligned} J^{(t)}\big(h_t(\boldsymbol{x}_i)\big) &= \sum_{i=1}^{m} \ell\big(y_i, H_{t-1}(\boldsymbol{x}_i) + h_t(\boldsymbol{x}_i)\big) + \Omega(h_t) \\ &\simeq \sum_{i=1}^{m} \left[\ell\big(y_i, H_{t-1}(\boldsymbol{x}_i)\big) + f_i h_t(\boldsymbol{x}_i) + \frac{1}{2} s_i h_t^2(\boldsymbol{x}_i)\right] + \Omega(h_t) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left[f_i h_t(\boldsymbol{x}_i) + \frac{1}{2} s_i h_t^2(\boldsymbol{x}_i)\right] + \Omega(h_t) + \text{const} \end{aligned}$$

梯度提升树

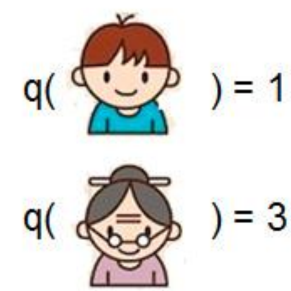
$$h(\boldsymbol{x}) = \sum_{c=1}^{C} w_c I(\boldsymbol{x} \in R_c)$$

树的复杂度可以定义为

$$\Omega(h) = \gamma C + \frac{1}{2}\lambda \sum_{c=1}^{C} w_c^2$$



w_1 w_2 w_3



梯度提升树

$$h(\boldsymbol{x}) = \sum_{c=1}^{C} w_c I(\boldsymbol{x} \in R_c)$$

$$\begin{aligned}
J^{(t)}(h_t(\boldsymbol{x}_i)) &\simeq \sum_{i=1}^{m}\left[f_i h_t(\boldsymbol{x}_i) + \frac{1}{2} s_i h_t^2(\boldsymbol{x}_i)\right] + \Omega(h_t) + \text{const} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left[f_i h_t(\boldsymbol{x}_i) + \frac{1}{2} s_i h_t^2(\boldsymbol{x}_i)\right] + \gamma C + \frac{1}{2}\lambda \sum_{c=1}^{C} w_c^2 + \text{const} \\
&= \sum_{c=1}^{C}\left[\left(\boxed{\sum_{i \in R_c} f_i}\right) w_c + \frac{1}{2}\left(\boxed{\sum_{i \in R_c} s_i} + \lambda\right) w_c^2\right] + \gamma C + \text{const} \\
&= \sum_{c=1}^{C}\left[F_c w_c + \frac{1}{2}(S_c + \lambda) w_c^2\right] + \gamma C + \text{const}
\end{aligned}$$

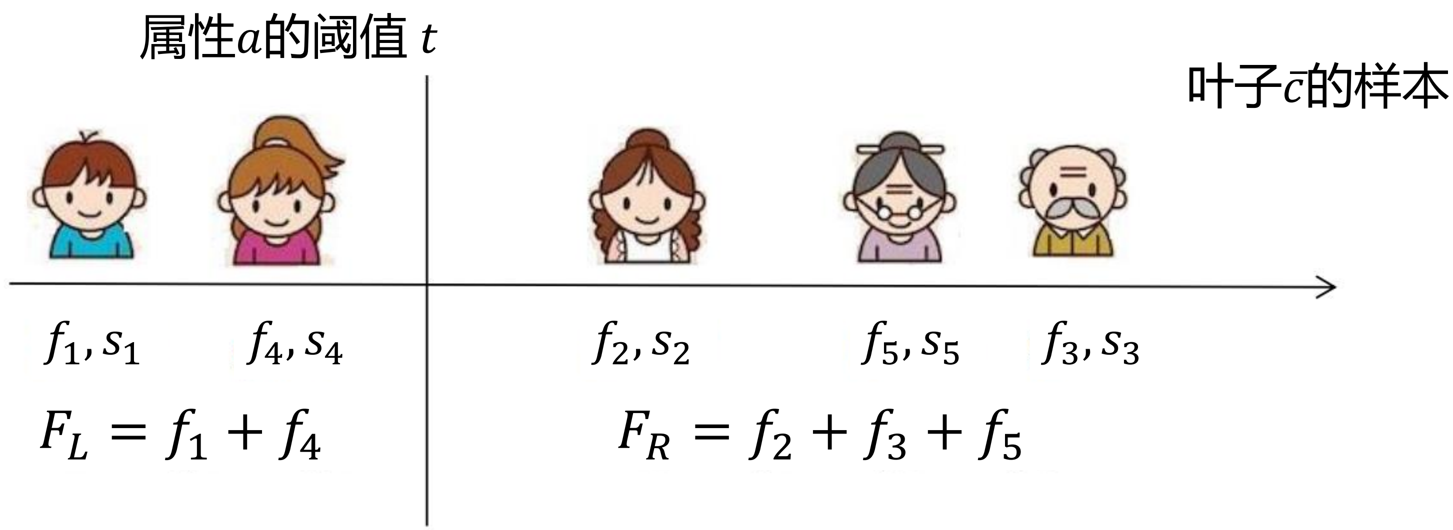
给定在给定区域划分情况下

$$w_c^\star = -\frac{F_c}{S_c + \lambda}$$

$$J^{(t)}(h_t(\boldsymbol{x}_i)) = -\frac{1}{2}\sum_{c=1}^{C}\frac{F_c^2}{S_c + \lambda} + \gamma C$$

该树与训练数据的适合度度量，
可用于指导分类树的构建

梯度提升树



$\frac{(F_L+F_R)^2}{S_L+S_r+\lambda}$

- 划分点选择准则
- 划分前： $-\frac{1}{2}\sum_{c=1,c=\bar{c}}^{C}\frac{F_c^2}{S_c+\lambda}-\frac{1}{2}\boxed{\frac{F_{\bar{c}}^2}{S_{\bar{c}}+\lambda}}+\gamma C$ （假设划分叶子为$\bar{c}$）
- 划分后： $-\frac{1}{2}\sum_{c=1,c\neq\bar{c}}^{C}\frac{F_c^2}{S_c+\lambda}-\frac{1}{2}\frac{F_L^2}{S_L+\lambda}-\frac{1}{2}\frac{F_R^2}{S_R+\lambda}+\gamma(C+1)$

划分为左子树L和右子树R

$$\mathrm{gain}(D,a,t)=\frac{1}{2}\left(\frac{F_L^2}{S_L+\lambda}+\frac{F_R^2}{S_R+\lambda}-\frac{(F_L+F_R)^2}{S_L+S_r+\lambda}\right)-\gamma$$

梯度提升树

- GBDT的知名算法库

- XGBoost

dmlc XGBoost eXtreme Gradient Boosting

Chen, T., & Guestrin, C. (2016, August). Xgboost: A scalable tree boosting system. In *Proceedings of the 22nd acm sigkdd international conference on knowledge discovery and data mining* (pp. 785-794).

https://github.com/dmlc/xgboost

- LightGBM

LightGBM

Light Gradient Boosting Machine

Ke, G., Meng, Q., Finley, T., Wang, T., Chen, W., Ma, W., ... & Liu, T. Y. (2017). Lightgbm: A highly efficient gradient boosting decision tree. In *Advances in neural information processing systems* (pp. 3146-3154).

https://github.com/microsoft/LightGBM

Bagging

- 个体学习器不存在强依赖关系、并行化生成

- 基学习器尽可能具有较大的差异

对训练样本进行采样，产生出不同的子集，再从每个子集中训练出一个基学习器

若采样出完全不同的子集，每个基学习器只用到一小部分训练数据，可能不足以进行有效学习，无法确保基学习器的性能

Bagging

- 自助采样法

对数据集 D 有放回采样 m 次得到训练集D'

样本在m次采样中始终不被采样到的概率 $=$ $\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^m$ $=$ $\frac{1}{e}\approx 0.368$

初始训练集中约有63.2%样本出现在采样集中

Bagging

输入: 训练集 $D = \{(\boldsymbol{x}_1, y_1), (\boldsymbol{x}_2, y_2), \ldots, (\boldsymbol{x}_m, y_m)\}$;
基学习算法 $\mathfrak{L}$;
训练轮数 T.

过程:

1: **for** $t = 1, 2, \ldots, T$ **do**
2: $\quad h_t = \mathfrak{L}(D, \mathcal{D}_{bs})$
3: **end for**

输出: $H(\boldsymbol{x}) = \underset{y \in \mathcal{Y}}{\arg\max} \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}(h_t(\boldsymbol{x}) = y)$

对分类任务使用简单投票法 **结合策略** 对回归任务使用简单平均法

Bagging

- 时间复杂度低
  - 假定个体学习器的计算复杂度为O(m)，采样与投票/平均过程的复杂度为O(s)，则bagging的复杂度大致为T(O(m)+O(s))
  - O(s)很小且T是一个不大的常数
  - 训练一个bagging集成与直接使用基学习器的复杂度同阶

Bagging

- 由于个体学习器并未使用全部训练数据，因此其余数据可用作验证集对泛化性能进行包外估计（out-of-bag estimate）

- $H^{oob}(\boldsymbol{x})$表示对样本$\boldsymbol{x}$的包外预测，即仅考虑那些未使用样本$\boldsymbol{x}$训练的基学习器在$\boldsymbol{x}$上的预测

$$H^{oob}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{argmax}_{y\in\mathcal{Y}} \sum_{i}^{T} \mathbb{I}(h_t(\boldsymbol{x}) = y) \cdot \mathbb{I}(\boldsymbol{x} \notin D_t)$$

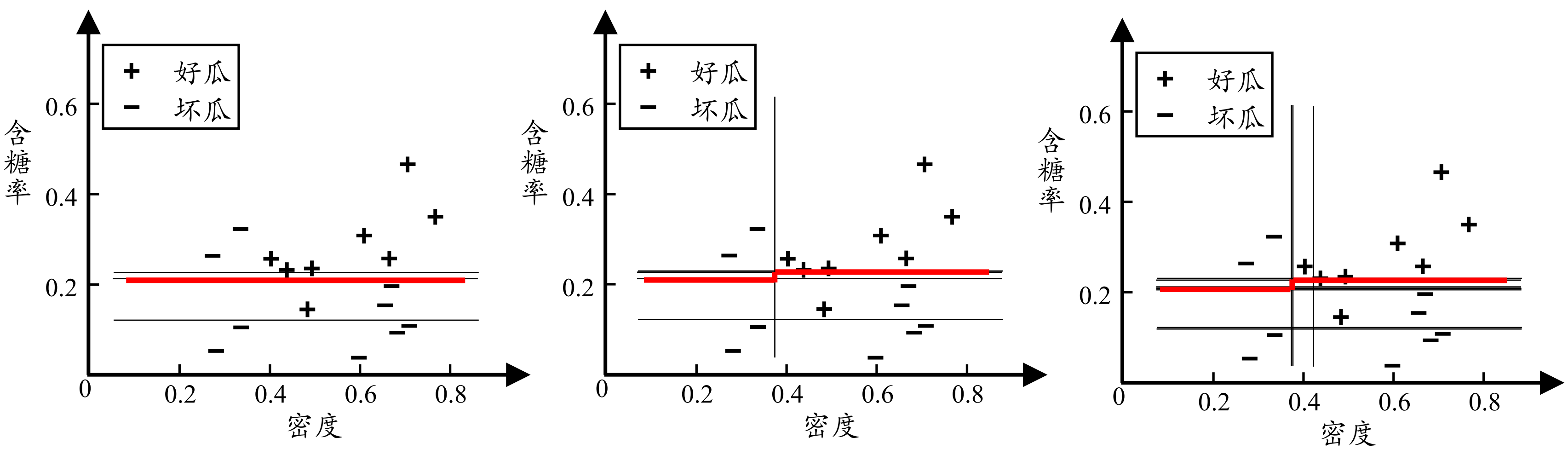
- Bagging泛化误差的包外估计为：

$$\epsilon^{oob} = \frac{1}{|D|} \sum_{(x,y)\in D} \mathbb{I}\left(H^{oob}(\boldsymbol{x}) = y\right)$$

- 包外样本还可以用于决策树剪枝、神经网络早停等

Bagging

从偏差-方差的角度：降低方差，在不剪枝的决策树、神经网络等易受样本影响的学习器上效果更好



(a) 3个基学习器 (b) 5个基学习器 (c) 11个基学习器

随机森林

- 随机森林(Random Forest，简称RF)是bagging的一个扩展变种
- 在采样的随机性基础上，进一步引入了属性选择的随机性

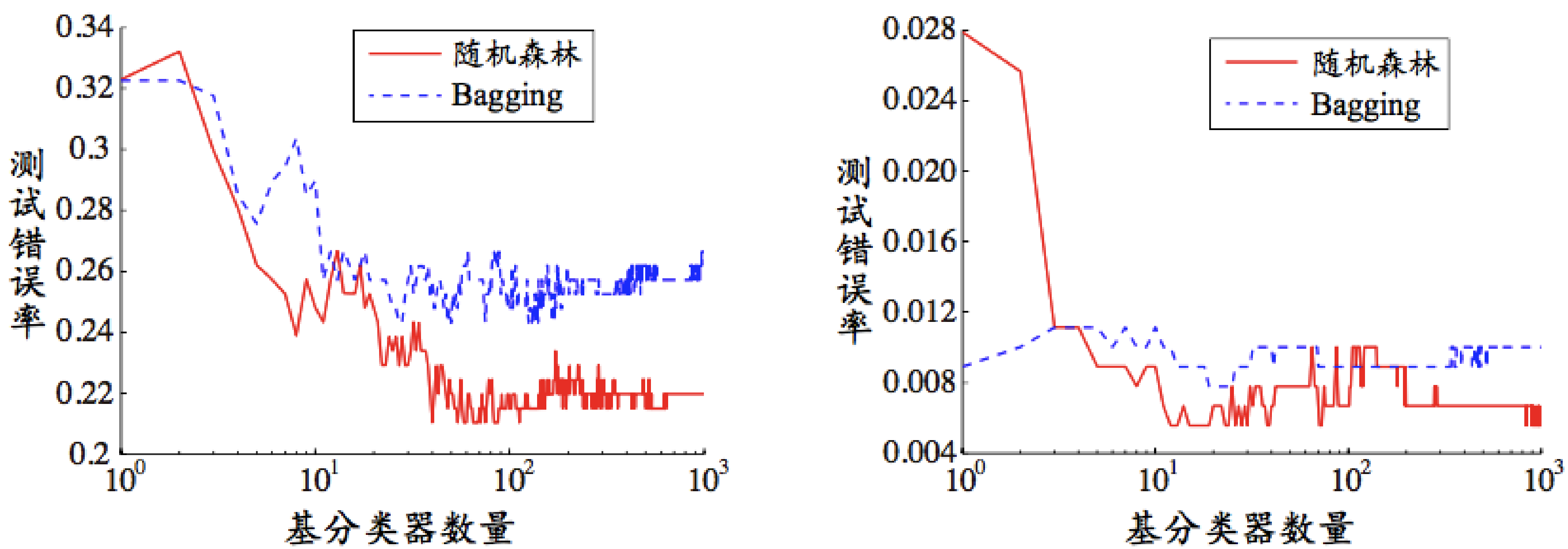
传统决策树在选择划分属性时是在当前节点的属性集合（假定d个属性）中选择一个最优属性

对基决策树的每个节点，先从该节点的属性集合中随机选择一个包含k个属性的子集，然后再从这个子集中选择一个最优属性用于划分。 $k = \log_2 d$

属性扰动使得个体学习器相关性进一步减弱，提升了泛化性能

随机森林简单、易实现、计算开销小，很多任务展现强大性能，被誉为“代表集成学习水平的方法”

随机森林

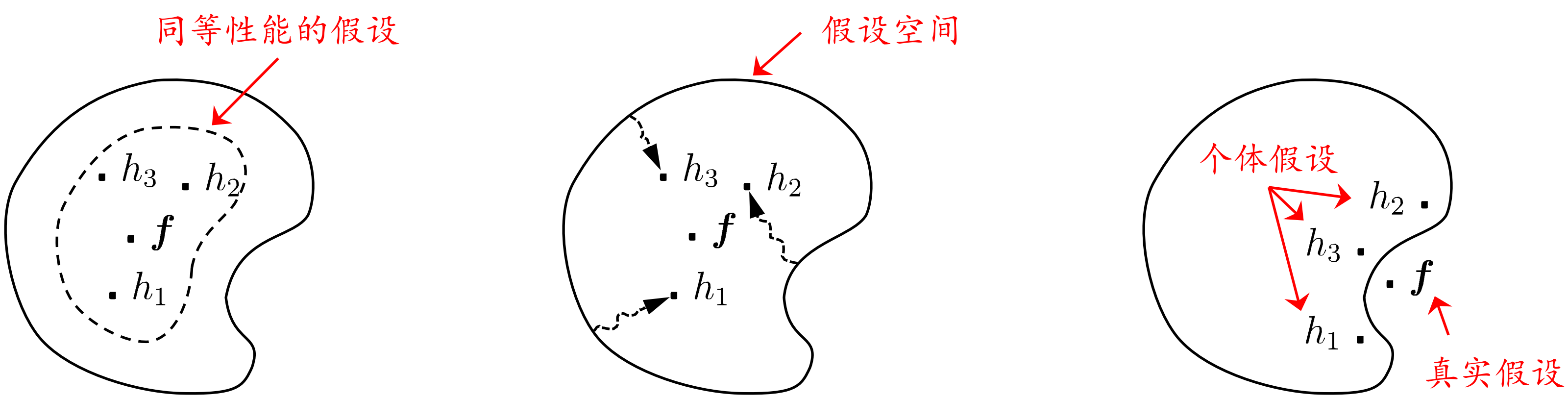


(a) glass 数据集　　(b) auto-mpg 数据集

随着基分类器数目增加，随机森林通常会收敛到更低的泛化误差

结合策略

- 学习器的组合可以从三个方面带来好处



(a) 统计的原因 (b) 计算的原因 (c) 表示的原因

学习任务假设空间大，多个假设在训练集上可能达到同等性能，结合多个学习器会减小方差

学习算法往往会陷入局部极小值，有的局部极小点对应的泛化性能可能差，通过多次运行后进行结合，减低陷入差极小点的风险

某些学习任务的真实假设可能不在当前学习算法的假设空间中，结合多个学习器，可以扩大假设空间，学得更好的近似

结合策略—回归

- 简单平均法

$$H(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{T}\sum_{i}^{T} h_i(\boldsymbol{x})$$

- 加权平均法

$$H(\boldsymbol{x}) = \sum_{i}^{T} w_i h_i(\boldsymbol{x}) \qquad w_i \geq 0 \text{ and} \sum_i w_i = 1$$

- 加权平均不一定优于简单平均

结合策略—分类

- 绝对多数投票法（majority voting）假设N个类别

$$H(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} c_j \ \text{if} \displaystyle\sum_{i=1}^{T} h_i^j(\boldsymbol{x}) > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{T} h_i^k(\boldsymbol{x}) \\ \text{rejection} \ \text{otherwise} \end{cases}$$

- 相对多数投票法（plurality voting）

$$H(\boldsymbol{x}) = c_{\arg\max_j \sum_{i=1}^{T} h_i^j(\boldsymbol{x})}$$

- 加权投票法（weighted voting）

$$H(\boldsymbol{x}) = c_{\arg\max_j \sum_{i=1}^{T} w_i h_i^j(\boldsymbol{x})} \qquad w_i \geq 0 \text{ and} \sum_i w_i = 1$$

结合策略—学习法

- Stacking是学习法的典型代表

先从训练数据集训练出初级学习器，然后生成一个新数据集用于训练次级学习器

Input: Data set $D = \{(\boldsymbol{x}_1, y_1), (\boldsymbol{x}_2, y_2), \ldots, (\boldsymbol{x}_m, y_m)\}$;
First-level learning algorithms $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_T$;
Second-level learning algorithm $\mathfrak{L}$.

Process:

for $t = 1, \ldots, T$:
  $h_t = \mathfrak{L}_t(D)$; 个体学习器称为初级学习器
end
$D' = \emptyset$;
for $i = 1, \ldots, m$:
  for $t = 1, \ldots, T$:
    $z_{it} = h_t(\boldsymbol{x}_i)$;
  end
  $D' = D' \cup ((z_{i1}, \ldots, z_{iT}), y_i)$; 生成一个新数据集
end
$h' = \mathfrak{L}(D')$; 用于结合的学习器称为元学习器

Output: $H(\boldsymbol{x}) = h'(h_1(\boldsymbol{x}), \ldots, h_T(\boldsymbol{x}))$

误差-分歧分解

- 对集成学习进行简单理论分析

- 定义学习器h_i的分歧

$$A(h_i|\boldsymbol{x}) = \left(h_i(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x})\right)^2 \qquad H(\boldsymbol{x}) = \sum_{i}^{T} w_i h_i(\boldsymbol{x})$$

$$w_i \geq 0 \text{ and } \textstyle\sum_i w_i = 1$$

- 集成的分歧

$$\bar{A}(h|x) = \sum_{i}^{T} w_i A(h_i|x) \quad = \sum_{i}^{T} w_i \left(h_i(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x})\right)^2$$

分歧项代表了个体学习器在样本$\boldsymbol{x}$上的不一致性，即在一定程度上反映了个体学习器的多样性

误差-分歧分解

$$\bar{A}(h|\boldsymbol{x}) = \sum_{i}^{T} w_i\big(h_i(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x})\big)^2 \quad = \sum_{i}^{T} w_i\big(h_i(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x})\big)^2$$

$$= \sum_{i}^{T} w_i\big(h_i(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\big)^2 + \sum_{i}^{T} w_i\big(f(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x})\big)^2 + 2\sum_{i}^{T} w_i\big(h_i(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\big)\big(f(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x})\big)$$

$$= \sum_{i}^{T} w_i\big(h_i(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\big)^2 + \big(f(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x})\big)^2 + 2\big(H(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\big)\big(f(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x})\big)$$

$$= \sum_{i}^{T} w_i\big(h_i(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\big)^2 - \big(f(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x})\big)^2$$

$$= \sum_{i}^{T} w_i \boxed{\big(h_i(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\big)^2} - \boxed{\big(f(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x})\big)^2}$$

$$= \sum_{i}^{T} w_i \boxed{E(h_i|\boldsymbol{x})} - \boxed{E(H|\boldsymbol{x})} = \bar{E}(h|\boldsymbol{x}) - E(H|\boldsymbol{x})$$

$E(h_i|\boldsymbol{x})$集成h_i的平方误差

$E(H|\boldsymbol{x})$集成H的平方误差

$\bar{E}(h|\boldsymbol{x})$个体学习器误差的加权均值

误差-分歧分解

$$\bar{A}(h|\boldsymbol{x})=\bar{E}(h|\boldsymbol{x})-E(H|\boldsymbol{x})$$

- 上式对所有样本$\boldsymbol{x}$均成立，令$p(\boldsymbol{x})$表示样本的概率密度，则在全样本上有

$$\sum_{i=1}^{T} w_i \int A(h_i|\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{T} w_i \int \bar{E}(h_i|\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}-\int E(H|\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

$$\sum_{i=1}^{T} w_i A_i=\sum_{i=1}^{T} w_i E_i - E$$

$$\boldsymbol{E}=\overline{\boldsymbol{E}}-\overline{\boldsymbol{A}}$$

个体学习器精确性越高($\overline{\boldsymbol{E}}$小)、多样性越大($\overline{\boldsymbol{A}}$大)，则集成效果越好。

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\overline{\boldsymbol{E}}-\boldsymbol{E}$$

个体学习器的加权分歧　　个体学习器的加权泛化误差　　集成的泛化误差

多样性增强

- 常见的增强个体学习器的多样性的方法

  - 数据样本扰动
  - 输入属性扰动
  - 输出表示扰动
  - 算法参数扰动

多样性增强—数据样本扰动

- 数据样本扰动通常是基于采样法
  - Bagging中的自助采样法
  - Adaboost中的序列采样

数据样本扰动对“不稳定基学习器”很有效

- 对数据样本的扰动敏感的基学习器(不稳定基学习器)
  - 决策树，神经网络等

- 对数据样本的扰动不敏感的基学习器(稳定基学习器)
  - 线性学习器，支持向量机，朴素贝叶斯，k近邻等

多样性增强—属性扰动

- 随机子空间算法(random subspace)
- 从初始属性集中抽取出若干个属性子集，在基于每个属性子集训练一个基学习器

输入： 训练集 $D = \{(\boldsymbol{x}_1, y_1), (\boldsymbol{x}_2, y_2), \cdots, (\boldsymbol{x}_m, y_m)\}$;
基学习算法 $\mathfrak{L}$;
基学习器数 T;
子空间属性数 d'.

过程:

1: **for** $t = 1, 2, \ldots, T$ **do**
2: $\quad \mathcal{F}_t = \mathrm{RS}(D, d')$
3: $\quad D_t = \mathrm{Map}_{\mathcal{F}_t}(D)$
4: $\quad h_t = \mathfrak{L}(D_t)$
5: **end for**

输出： $H(\boldsymbol{x}) = \underset{y \in \mathcal{Y}}{\arg\max} \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left(h_t\left(\mathrm{Map}_{\mathcal{F}_t}(\boldsymbol{x})\right) = y\right)$

多样性增强

- 输出扰动
  - 翻转法(Flipping Output)
  - 输出调剂法(Output Smearing)
  - ECOC法

- 负相关法
  - 显式地通过正则化来强制个体神经网络使用不同的参数

作业

- 习题8.2
- 习题8.6