

# 利用微分方程模型对新冠病毒传染进行分析

2021 数学建模 19 级少转大数据小组\*

2021 年 5 月 3 日

## 摘要

本文介绍了在分析传染病问题时常用的四种微分方程模型 SI, SIR, SEIR, SEIRD 的基本原理和各类人群随时间的变化趋势，并利用这三种模型对武汉肺炎时期的数据进行了具体分析，得出了这几种模型的优点和局限性。

## 一、前言与问题分析

传染病在目前仍是人类面临的一大难题之一，无论是 2003 年 SARS 病毒传染还是 2020 年的新冠病毒传染都对人们的正常生活造成了不小的影响。在一场疫情从流行到结束的过程中有许多因素不容忽视，如人类发病具有潜伏期，人类感染后经一段时间的救治能得以康复，政府的强力干预能有效组织病原传播等规律。值得注意的是，这些特征之间相互关联且均与时间有关，而由于一次疫情的持续时间通常较长，故可以考虑使用微分方程模型研究传染病各数据变化趋势等问题。如何构建统计量并找到它们之间的关系，建立微分方程模型则是一个值得研究的问题。

## 二、建模的假设

- (a) 流行病传染范围内只有几类人，且不同模型中选用的人群种类数不同。[1]
- (b) 易感者与感病者在人群中混合充分均匀。
- (c) 所有不同种类人群相互转换的比率为常数。
- (d) 不考虑出生及人群的迁入和迁出。

## 三、符号说明

---

\*86 金锦秋 (PB19000167)、87 晏瑞然 (PB19000196)、88 刘子瑞 (PB19000233)

表 1: 符号说明

符号	说明	适用模型
$I'$	感病者所占比例	SI
$S'$	易感者所占比例	SI
$k$	传染系数	SI
$S$	易感者人数	SIR,SEIR,SEIRD
$E$	潜伏期人数	SEIR,SEIRD
$I$	感病者人数	SIR,SEIR,SEIRD
$R$	痊愈者人数	SIR,SEIR,SEIRD
$D$	病逝者人数	SEIRD
$\alpha$	易感者单位时间内接触的感染者人数	SIR,SEIR,SEIRD
$\beta$	单人次易感者接触感染者而被感染的几率	SIR,SEIR,SEIRD
$\alpha\beta$	易感者 S 被感病者 I 传染的传染率	SIR,SEIR,SEIRD
$\gamma$	感病者 I 得以痊愈（转换为 R）的痊愈率	SIR,SEIR,SEIRD
$\sigma$	潜伏期患者 E 转换为发病者 I 的发病率	SEIR,SEIRD
$\delta$	感病者 I 去世的病死率	SEIRD

## 四、数学模型建立

### 4.1 SI 模型

假设在传染病流行范围内只有两类人——易感者（未得病但与感病者接触易感染，S 类）和感病者（已经感染者，I 类）。若不考虑部分感病者死亡情况，我们有  $S(t) + I(t) \equiv 1$ ，其中  $S(t), I(t)$  分别为易感者和感病者在人群中的比例。注意到在单位时间内，感病者的增加是由于易感者染病后转换而来。由假设易得出：易感者接触感病者的机会与易感者和感病者的人数成正比。记该比例系数为  $k$ ，称为传染系数，则不难得到  $I', S'$  满足关系式：

$$\frac{dI'}{dt} = kI'S' \quad (1)$$

又  $S(t) + I(t) \equiv 1$ ，故可得到 SI 模型：

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = kI(1 - I) \\ I(0) = I_0 \end{cases} \quad (2)$$

解得  $I(t) = \frac{1}{1 + (I_0^{-1} - 1)e^{-kt}}$ 。

## 4.2 SIR 模型

在 SI 模型中，我们没有考虑患病者经救治后痊愈的情况。我们假设痊愈后的患者（由患病者转换而来，记为 R）在短期内由于获得抗体而不会得病，并令痊愈率为  $\gamma$ ，则可建立如下微分方程组：

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\alpha\beta IS}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\alpha\beta IS}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \quad (3)$$

## 4.3 SEIR 模型

不同于 SIR 模型，SEIR 模型考虑了潜伏期的情况，从而增加了感染但未发病者这一类群体（记为 E）。这样 S 与 I 则通过 E 相关联。我们令  $\sigma$  为感染未发病者转换为感染者的比例，令  $\beta$  为易感者转换为感染未发病者的比例，类似地我们可以构建微分方程组：

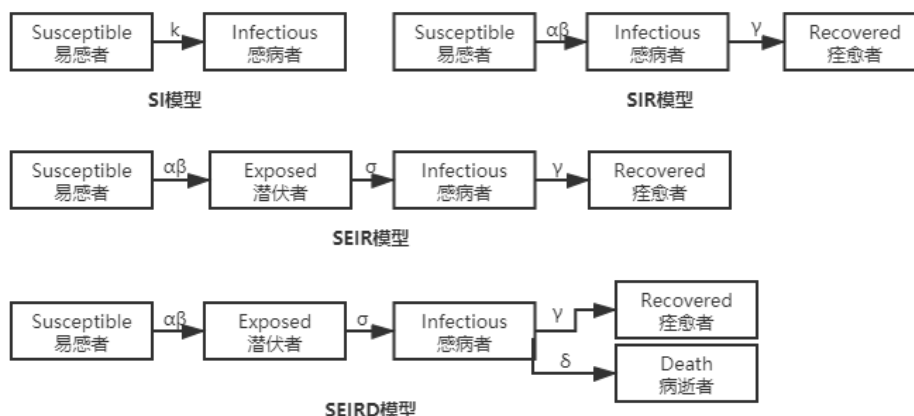
$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\alpha\beta IS}{N} \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\alpha\beta IS}{N} - \sigma E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \quad (4)$$

## 4.4 SEIRD 模型

相比于 SEIR 模型，我们引入了病逝者，记为 D. 若假设病死率为  $\delta$ ，我们有：

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\alpha\beta IS}{N} \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\alpha\beta IS}{N} - \sigma E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I - \delta I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \\ \frac{dD}{dt} = \delta I \end{cases} \quad (5)$$

上述四种模型的参数转换关系如下图所示。

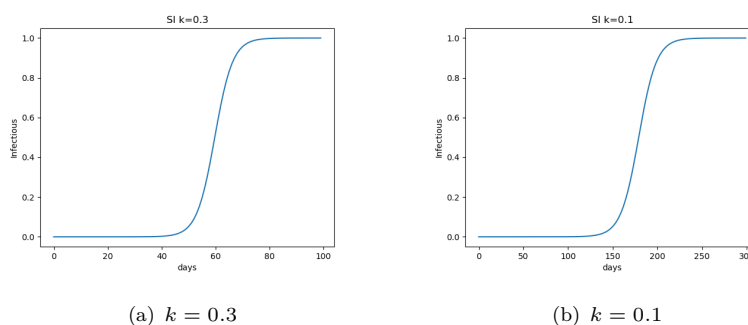


## 五、结果与分析

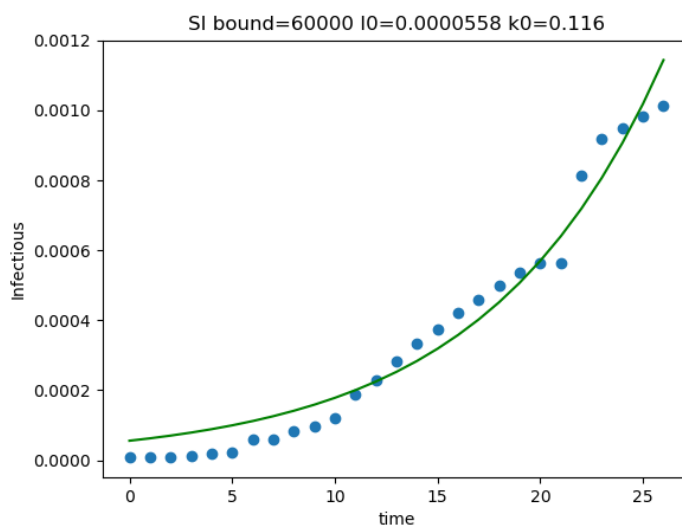
在以下分析过程中，我们分别对上述四种模型先在理想情况下的数据变化趋势进行展示，再用它来解释新冠肺炎时期的各项数据，分析这些模型的合理性和不足之处。

### 5.1 SI 模型

分别取  $I_0 = \frac{1}{60000000}$ ,  $k = 0.3, 0.1$ ，我们可以得到 SI 模型中感染者比例随时间的变化趋势如下图所示。



显然这一模型存在不合理之处，因为患病者在接受救治后会治愈，从而使得患病者人数减少。若不考虑痊愈情况，则在一段时间内群体所有人都将患上疾病，这与常识不符！但在疾病流行初期，医疗救治严重不足的情况下，SI 模型有一定的参考价值。我们用 SI 模型解出的方程  $I(t) = \frac{1}{1 + (I_0^{-1} - 1)e^{-kt}}$  对湖北省疫情初期（感染人数小于 60000）的感染人数进行拟合可得出下列结果：



从上图中可以看出 SI 模型的预测基本合理，但若想得出更准确的模型需要考虑更多因素。

## 5.2 SIR 模型

我们分别取传染率  $\alpha\beta = 0.4, 0.5, 0.6$ ，并固定恢复率  $\gamma = 0.154$ ，可作出 S,I,R 三类人群随时间变化情况如下：

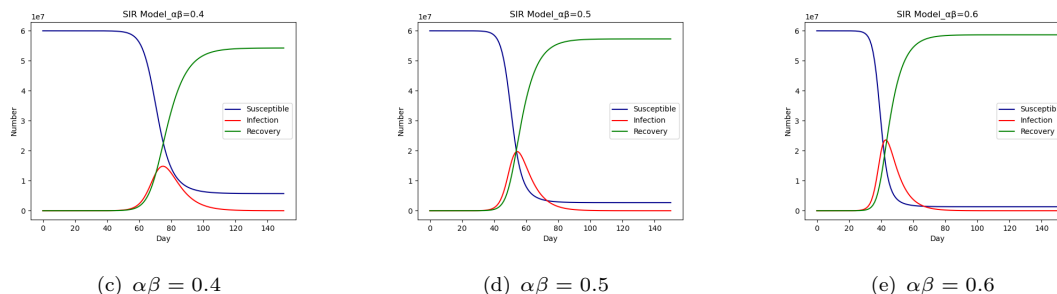


图 1: 不同传染率下 S,I,R 随时间变化情况

从以上三张图可以看出，疫情的爆发时间随传染率的增高而提前且峰值会随之加大，结束时间也会随之延长。但对比上图和武汉疫情的情况不难发现，理想化的 SIR 模型的疫情峰值过大（实际上没有这么多人会患病），说明对疫情的建模还不够充分。但是该模型可以模拟出整个疫情中不同类人群的变化趋势，是相比于 SI 模型有提升的一点。

## 5.3 SEIR 模型

固定传染率和恢复率分别为  $\alpha\beta = 0.4, \gamma = 0.154$ ，分别取潜伏期  $T_e = 7, 10, 14$  可作出如下曲线：

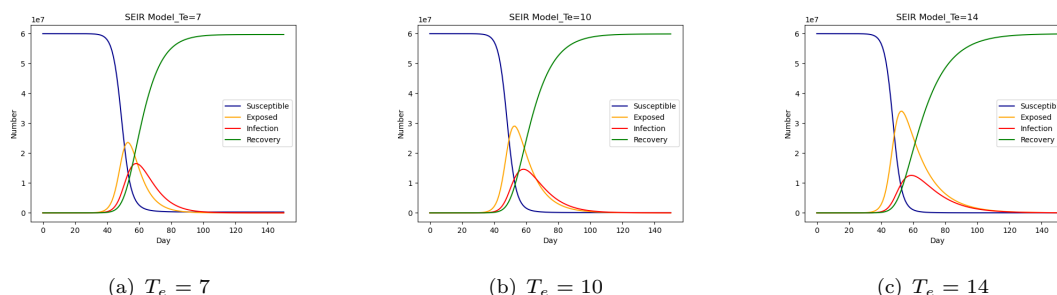


图 2: 不同潜伏期下 S,E,I,R 随时间变化情况

从上图中可以看出，在其它条件相同的情况下，不同时间长短的潜伏期对感染者和潜伏者人数都有一定影响。其中潜伏期越长，感染但未发病的人越多但最终发病者越少。在以上模型中，我们还可考虑潜伏期患者将病毒传染给他人的情况。取潜伏期患者传染率  $\alpha\beta_1 = 1 \times 0.78735 = 0.78735$  [2]，发病者传染率  $\alpha\beta_2 = 0.15747$ ，我们可以作出如下曲线：

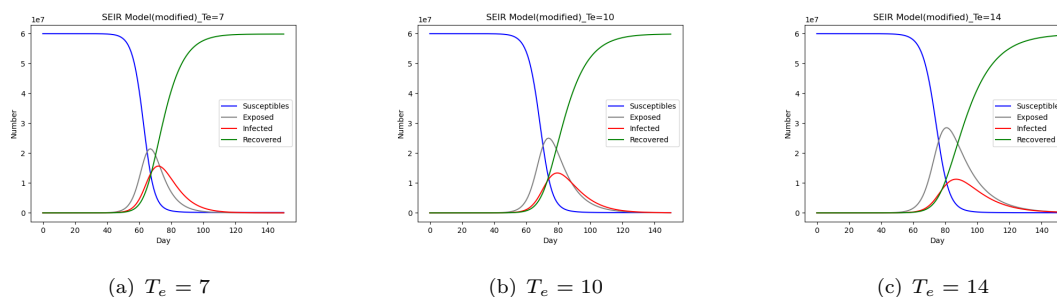
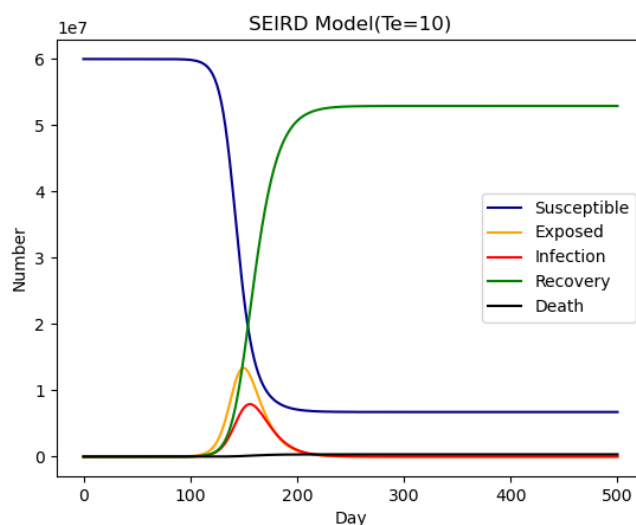


图 3: 不同潜伏期下 S,E,I,R 随时间变化情况

尽管作出曲线与图二差别不大，但是这种改进的模型与实际疫情的状况更加相符。

## 5.4 SEIRD 模型

类似于该脚本 SEIR 模型中用到的想法，我们认为潜伏期患者和患病者均可感染他人。在构建 SEIRD 模型时，我们进一步考虑由于政府控制，易感者单位时间内接触的潜伏期患者与感病者人数不相同的情况，即  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 。我们取潜伏期患者接触人数  $\alpha_1 = 0.3$ ，发病者接触人数  $\alpha_2 = 0.1$ ，并取  $\beta_1 = 0.78735$ ,  $\beta_2 = 0.15747$ ，可作出不同潜伏期下 S,E,I,R,T 随时间变化情况如下图：



由上图可以看出病逝者占比很小，这与事实相符，但是感染者比例较显示比仍偏大，说明实际情况与模型相比仍有一定差距。

## 六、结论

运用微分方程模型可以有效地对传染病流行期的数据进行分析并对病情加以适当地推测。在 SI,SIR,SEIR,SEIRD 等模型中，随着模型考虑的群体类型增多，模型变得更加合理，对现实疫情的解释更加科学。同时我们注意到由于实际的疫情中的因素远比这些模型包含的信息多，这些模型都无法完全清楚地解释疫情中的数

据变化趋势。但从这些模型中我们可以得知，为有效地控制疫情，减少人员流动，及时收治患者是很有必要的，这些都可以显著地减慢疫情的传播，这也是我国抗疫取得成功的主要原因之一。

## 七、问题

在以上的分析中，仍有一些细节处理值得改进。如假设 (a) 假定了疫情中只有几类人，但事实上种类不止我们建模时假定的这么少，还有许多种类的人没有被考虑在内；又如假设 (c) 中不同种类人群转化比例为常数这一点不太合理，因为不同人群转化比例是会随着外界的干预而变化的，如死亡率应随着痊愈率（反映在医疗力度上）的增高而降低，痊愈率又应该是时间的函数，不应简易地看作是常数。这些问题都等待着由更精细的模型去解决。

## 参考文献

- [1] 谭永基, 蔡志杰. 数学模型 (第三版). 上海: 复旦大学出版社, 2019.
- [2] ModifiedSEIR and AI prediction of the epidemics trend of COVID-19 in China under public health interventions”, Zifeng Yang, Zhiqi Zeng, KeWang, Sook-San Wong, Wenhua Liang, Mark Zanin, Peng Liu, Xudong Cao, Zhongqiang Gao, Zhitong Mai, Jingyi Liang, Xiaoqing Liu, Shiyue Li, Yimin Li, Feng Ye, Weijie Guan, Yifan Yang, Fei Li, Shengmei Luo, Yuqi Xie, Bin Liu, Zhoulang Wang, Shaobo Zhang, Yaonan Wang, Nanshan Zhong, Jianxing He, Journal of Thoracic Disease, March, 2020