Homework 9

1. 我们怎样才能使用 Floyd-Warshall 算法的输出来检测权重为负值的环路?

2. 假定在一个权重函数为 W 的有向图图 G 上运行 Johnson 算法。证明：如果图 G 包含一条权重为 0 的环路 c，那么对于环路 c 上的每条边 (u,v)，$\hat{w}(u,v)=0$

3. (最大流的更新) 设 $G=(V,E)$ 是一个源结点为 s 汇结点为 t 的流网络，其容量全部为整数值。假定我们已经给定 G 的一个最大流。

a. 如果将单条边 $(u,v)\in E$ 的容量增加 1 个单位，请给出一个 $O(V+E)$ 时间的算法来对最大流进行更新。

b. 如果将单条边 $(u,v)\in E$ 的容量减少 1 个单位，请给出一个 $O(V+E)$ 时间的算法来对最大流进行更新。

1. 只需在输出 $D^{(n)}$ 上再跑一次最外层循环 即得到 $D^{(n+1)}$

若 $D^{(n+1)}$ 相较于 $D^{(n)}$ 还有更新 则说明有负环

2. 若 $\exists\ u,v \in C$ $\quad \hat{w}(u,v)>0$ $\quad$ 即 $w(u,v)+h(u)-h(v)>0$

设 $p = v \rightsquigarrow u$ $\quad w(p) = -w(u,v)+h(v)-h(u)<0$

$= \langle v_0, v_1, \cdots v_k, u\rangle$ $\quad = \sum_{i=1}^{k} \hat{w}(v_{i-1},v_i)+\hat{w}(v_i,u)$

又 $\because$ 由 Johnson 算法得到的 $\hat{w}\geqslant 0 \Rightarrow w(p)>0$ 矛盾

$\Rightarrow$ 对 $\forall\ u,v \in C$ $\quad \hat{w}(u,v)=0$

3. a. ①更新 $c(u,v)$ 后，求 G 的剩余网络 G_f : $O(E)$

②用 dfs 查找是否存在增广路径 : $O(V+E)$

③若存在增广路径，该路径上流量 +1 即可 $O(E)$

总时间 : $O(V+E)$

b. ①若 $G.f(u,v)=0$，最大流不变，返回G
否则：

②在流网络中对 s 进行dfs直到找到 $P_1:\langle s,u_1,\cdots u_k,u\rangle$
对 v 进行dfs直到找到 $P_2:\langle v,v_1,\cdots v_l,t\rangle$
$:O(V+E)$

得到 $P:\langle s,u_1,\cdots u_k,u,v,v_1,\cdots v_l,t\rangle$

将P的流量减1，得 G'　$O(E)$

③求 G' 剩余网络 G'_f　$O(E)$

④用dfs查找增广路径　$O(V+E)$

⑤若存在增广路径，该路径上流量+1即可　$O(E)$

总时间：$O(V+E)$