Homework 8

1. 给定 $G=(V,E)$ 是一带权重且没有权重为负值的环路的有向图，对于所有的结点 $v\in V$，从源结点 s 到结点 v 之间的最短路径中，包含边的条数的最大值为 m。请对算法 BELLMAN-FORD 进行简单修改，可以让其在 $m+1$ 遍松弛操作之后终止，即使 m 不是事先知道的一个数值。

2. 请举出一个包含负权重的有向图，使得 Dijkstra 算法在其上运行时将产生不正确的结果。为什么在有负权重的情况下，这一定理的证明不成立?

3. Floyd-Warshall 算法的空间需求为 $\Theta(n^3)$，因为要计算 $d_{ij}^{(k)}$，其中 $i,j,k=1,2,...,n$。请证明下面所列出的去掉所有上标的算法是正确的，从而将 Floyd-Warshall 算法的空间需求降低到 $\Theta(n^2)$。

FLOYD-WARSHALL'(W)

$n = W.rows$
$D = W$
for $k = 1$ to n **do**
    for $i = 1$ to n **do**
        for $j = 1$ to n **do**
            $d_{ij} = \min(d_{ij}, d_{ik} + d_{kj})$
return D

1.
```
BELLMAN-FORD (G,w,s)
  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G,s)
  for i=1 to |G.V|-1
        finish = TRUE
        for each edge (u,v) ∈ G.E
              v0 = v.d
              RELAX (u,v,w)
              if v.d != v0
                  finish = FALSE
        if finish :
              break
  for each edge (u,v) ∈ G.E
```

if $v.d > u.d + w(u,v)$

  return FALSE

return TRUE。

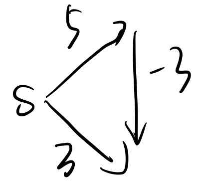
解释：当所有最短路径找到后 Bellman-Ford 算法就不会更新图了，所以若最短路径存在，第 $m+1$ 次和第 m 次的图就相同，只需检验算法更新了图没有。

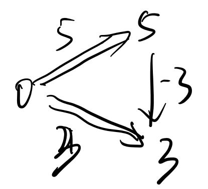
如图所示　该图 Dijkstra 算法结果为：

$\Longrightarrow$ 表示前驱

显然不正确

2.





当有负权时：

定理 24.6 中 $\delta(s,y) \le \delta(s,u)$ 不再成立

所以运行时会产生不正确的结果

3. 对 $\forall k$ 在递归式中 $d_{ij}^{(k)}$ 只依赖 $d_{ij}^{(k-1)}$

即每次动态规划只与上次状态有关

故只需记录上次的状态矩阵

即只需记录一个矩阵，每次动态规划对这个矩阵进行更新

更新后的结果 d_{ij} 仍是节点 i 到 j 取自 $\{1,2,\cdots k\}$ 的一条最短路径权重

当 k 从 1 到 n 即为包含所有点的最短路径矩阵。