

Homework 7

1. 如果将输入的图用邻接矩阵来表示，并修改算法来应对此种形式的输入，请问 BFS 的运行时间将是多少？
2. 对于有向图 $G = (V, E)$ 来说，如果 $u \rightsquigarrow v$ 意味着图 G 至多包含一条从 u 到 v 的简单路径，则图 G 是单连通图。请给出一个有效算法来判断一个有向图是否是单连通图。
3. 假定图中的边权重全部为整数，且在范围 $1 \sim |V|$ 内，在此情况下，Kruskal 算法最快能多快？如果变得权重取值范围在 1 到某个常数 W 之间呢？
4. 假定图中的边权重全部为整数，且在范围 $1 \sim |V|$ 内，在此情况下，Prim 算法最快能多快？如果变得权重取值范围在 1 到某个常数 W 之间呢？

1. 邻接矩阵查找节点所有的边 用时 $O(V)$

故 BFS 总时间 $O(V^2)$

2. DFS-VISIT2: 对 DFS-VISIT 进行修改，DFS-VISIT 只在遍历到白色点时进行递归，DFS-VISIT2 遍历到黑色点时记录下时间 $u.d_2 = \text{time}$; $\text{time} = \text{time} + 1$; $u.d_2$ 为 u 的一个属性，代表第二次遍历到该点的时间。 $\text{time}: O(V+E)$

对每个点进行 DFS-VISIT2, $\text{time } O(V \cdot (V+E))$

结束后遍历所有点，若 $u.d_2 > u.f$ ，说明有第二条

路径，返回 False 否则返回 True $\text{time } O(V)$

故总耗时 $O(V \cdot (V+E)) = O(V^2)$

3. 可以用计数排序对边权重进行排序 $\text{time}: O(E)$

总时间: $O(E) + O((E+V) \log(V)) = O(E \log(V))$

4. 可以使用一个计数桶 EXTRACT-MIN 要 $O(W)$ 时间

DECREASE-KEY 改为将节点加入计数桶 要 $O(1)$ 时间 故总时间: $O(VW+E)$

$W = |V|$ 时为 $O(V^2)$ W 为常数时为 $O(E)$