Homework 3

1. 我们对钢条切割问题进行一点修改，除了切割下的钢条段具有不同价格 p_i 外，每次切割还要付出固定的成本 c。这样，切割方案的收益就等于钢条段的价格之和减去切割的成本。设计一个动态规划算法解决修改后的钢条切割问题。

2. 令 $R(i, j)$ 表示在一次调用 MATRIX-CHAIN-ORDER 过程中，计算其他表项时访问表项 $m[i, j]$ 的次数。证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} R(i,j) = \frac{n^3 - n}{3}$$

3. 对输入链长度为 n 的矩阵链乘法问题，描述其子问题图：它包含多少个顶点？包含多少条边？这些边分别连接哪些顶点。

1. CUT-ROD (p, n, c)

```
let r[0..n] be a new array
 r[0] = 0
 for j=1 to n
     q = -∞
     for i=1 to j:
         q = max(q, p[i]+r[j-i]-c)
     r[j] = q
 return r[n]
```

2. $R(i,j) = n-j+i-1$ (3中进行了解释)

$$\sum_{j=i}^{n} R(i,j) = \frac{(n+i-2)(n-i+1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2-n-2+3i-i^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} R(i,j) = \frac{1}{2}\left(n^3-n^2-2n^1+\frac{3n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{n^3-n}{3}$$

3. 顶点为 $m[i,j]$ 其中 $j \geq i$

故共有：$n+(n-1)+\cdots+1+0=\frac{n(n+1)}{2}$ 个顶点

对 $\forall$ $m[i,j]$ 作为子问题的次数即为其它表项访问

$m[i,j]$ 的次数即为 $R(i,j)$

所有的边数 $|E|=\sum\limits_{1\le i\le j\le n} R(i,j)=\frac{n^3-n}{3}$

$\forall$ 点 $m[i,j]$，相连的点为 $m[k_1,j]$ $(k_1=1,2,\cdots i-1)$，
$m[i,k_2]$ $(k_2=j+1,\cdots n)$

共 $n-j+i-1$ 个

这也解释了为什么 $R(i,j)=n-j+i-1$.