数列通项公式的求法

各种数列问题在很多情形下，就是对数列通项公式的求解。特别是在一些综合性比较强的数列问题中，数列通项公式的求解问题往往是解决数列难题的瓶颈。本文总结出几种求解数列通项公式的方法，希望能对大家有帮助。

一、定义法

直接利用等差数列或等比数列的定义求通项的方法叫定义法，这种方法适应于已知数列类型的题目.

例 1. 等差数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，前 n 项和为 S_n，且 a_1,a_3,a_9 成等比数列，$S_5=a_5^2$．求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

解：设数列 $\{a_n\}$ 公差为 $d(d>0)$

$\because a_1,a_3,a_9$ 成等比数列，$\therefore a_3^2=a_1a_9$，

即 $(a_1+2d)^2=a_1(a_1+8d)\Rightarrow d^2=a_1d$

$\because d\neq 0$，　　$\therefore a_1=d$,,,,,,,,,,,　①

$\because S_5=a_5^2$　　$\therefore 5a_1+\frac{5\times 4}{2}\cdot d=(a_1+4d)^2$,,,,　②

由①②得：$a_1=\frac{3}{5}$，$d=\frac{3}{5}$

$\therefore a_n=\frac{3}{5}+(n-1)\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}n$

点评：利用定义法求数列通项时要注意不用错定义，设法求出首项与公差（公比）后再写出通项。

二、公式法

若已知数列的前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系，求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 可用公式 $a_n=\begin{cases}S_1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots n=1\\ S_n-S_{n-1} & \cdots\cdots n\geq 2\end{cases}$ 求解。

例 **2**. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n+(-1)^n,n\geq 1$．求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解：由 $a_1=S_1=2a_1-1\Rightarrow a_1=1$

当 $n\geq 2$ 时，有 $a_n=S_n-S_{n-1}=2(a_n-a_{n-1})+2\times(-1)^n$，

$\therefore a_n=2a_{n-1}+2\times(-1)^{n-1}$，

$a_{n-1}=2a_{n-2}+2\times(-1)^{n-2}$，,, ，　$a_2=2a_1-2.$

$\therefore a_n=2^{n-1}a_1+2^{n-1}\times(-1)+2^{n-2}\times(-1)^2+\cdots+2\times(-1)^{n-1}$

$=2^{n-1}+(-1)^n[(-2)^{n-1}+(-2)^{n-2}+\cdots+(-2)]$

$=2^{n-1}-(-1)^n\frac{2[1-(-2)^{n-1}]}{3}$

$=\frac{2}{3}[2^{n-2}+(-1)^{n-1}].$

经验证 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $a_n=\frac{2}{3}[2^{n-2}+(-1)^{n-1}]$

点评：利用公式 $a_n=\begin{cases}S_n & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots n=1\\ S_n-S_{n-1} & \cdots\cdots n\geq 2\end{cases}$ 求解时，要注意对 n 分类讨论，但若能合写时一定要合并.

三、由递推式求数列通项法

对于递推公式确定的数列的求解，通常可以通过递推公式的变换，转化为等差数列或等比数列问题，有时也用到一些特殊的转化方法与特殊数列。

类型 **1** 递推公式为 $a_{n+1}=a_n+f(n)$

解法：把原递推公式转化为 $a_{n+1}-a_n=f(n)$，利用 累加法 **(**逐差相加法 **)**求解。

(2004 全国卷 I.22) 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，且 $a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k$，$a_{2k+1}=a_{2k}+3^k$，其中 $k=1,2,3,\ldots$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。 P24（styyj ）

例 **3**. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n^2+n}$，求 a_n。

解：由条件知：$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

分别令 $n=1,2,3,\cdots\cdots,(n-1)$，代入上式得 $(n-1)$ 个等式累加之，即

$$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots\cdots+(a_n-a_{n-1})$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$$

所以 $a_n-a_1=1-\frac{1}{n}$

$\because a_1=\frac{1}{2}$，$\therefore a_n=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}$

类型 **2** （1）递推公式为 $a_{n+1}=f(n)a_n$

解法：把原递推公式转化为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$，利用 累乘法 **(**逐商相乘法 **)**求解。

(2004 全国卷 I.15) 已知数列 $\{a_n\}$，满足 $a_1=1$，$a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}(n\geq 2)$，则 $\{a_n\}$ 的通项

$$a_n=\begin{cases}1 & n=1\\ \_\_\_\_ & n\geq 2\end{cases}$$ P24（styyj ）

例 **4**. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{2}{3}$，$a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$，求 a_n。

解：由条件知 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$，分别令 $n=1,2,3,\cdots\cdots,(n-1)$，代入上式得 $(n-1)$ 个等式累乘之，即

$$\frac{a_2}{a_1}\bullet\frac{a_3}{a_2}\bullet\frac{a_4}{a_3}\bullet\cdots\cdots\bullet\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\cdots\times\frac{n-1}{n}\Rightarrow\frac{a_n}{a_1}=\frac{1}{n}$$

又 $\because a_1=\frac{2}{3}$，$\therefore a_n=\frac{2}{3n}$

（2）. 由 $a_{n+1}=f(n)a_n$ 和 a_1 确定的递推数列 $\{a_n\}$ 的通项可如下求得：

由已知递推式有 $a_n=f(n-1)a_{n-1}$，$a_{n-1}=f(n-2)a_{n-2}$，$\bullet\bullet\bullet$，$a_2=f(1)a_1$ 依次向前代入，得

$$a_n=f(n-1)f(n-2)\cdots f(1)a_1,$$

简记为 $a_n=(\prod_{k=1}^{n-1}f(k))a_1 \quad (n\ge 1,\prod_{k=1}^{0}f(k)=1)$，这就是 叠（迭）代法 的基本模式。

（3）递推式： $a_{n+1}=pa_n+f(n)$

解法：只需 构造数列 $\{b_n\}$，消去 $f(n)$ 带来的差异.

例 **5**. 设数列 $\{a_n\}$： $a_1=4,a_n=3a_{n-1}+2n-1,(n\ge 2)$，求 a_n.

解：设 $b_n=a_n+An+B$，则 $a_n=b_n-An-B$，将 a_n,a_{n-1} 代入递推式，得

$$b_n-An-B=3[b_{n-1}-A(n-1)-B]+2n-1=3b_{n-1}-(3A-2)n-(3B-3A+1)$$

$$\therefore \begin{cases}A=3A-2\\ B=3B-3A+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ B=1\end{cases}$$

$\therefore$ 取 $b_n=a_n+n+1$，（1）则 $b_n=3b_{n-1}$，又 $b_1=6$，故 $b_n=6\times 3^{n-1}=2\times 3^n$ 代入（1）得

$a_n=2\times 3^n-n-1$

说明：（1）若 $f(n)$ 为 n 的二次式，则可设 $b_n=a_n+An^2+Bn+C$;(2) 本题也可由

$a_n=3a_{n-1}+2n-1$，$a_{n-1}=3a_{n-2}+2(n-1)-1$（$n\ge 3$）两式相减得

$a_n-a_{n-1}=3(a_{n-1}-a_{n-2})+2$ 转化为 $b_n=pb_{n-1}+q$ 求之.

例 **6**. 已知 $a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{3n-1}{3n+2}a_n \ (n\ge 1)$，求 a_n。

解：$a_n=\dfrac{3(n-1)-1}{3(n-1)+2}\cdot\dfrac{3(n-2)-1}{3(n-2)+2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3\times 2-1}{3\times 2+2}\cdot\dfrac{3-1}{3+2}a_1$

$$=\frac{3n-4}{3n-1}\cdot\frac{3n-7}{3n-4}\cdots\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}\cdot 3=\frac{6}{3n-1}$$ 。

类型 **3** 递推公式为 $a_{n+1}=pa_n+q$（其中 p，q 均为常数，$(pq(p-1)\ne 0)$）。

解法：把原递推公式转化为： $a_{n+1}-t=p(a_n-t)$，其中 $t=\dfrac{q}{1-p}$，再利用 换元法 转化为等比数列求解。

(2006. 重庆 .14）在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=1,a_{n+1}=2a_n+3(n\ge 1)$，则该数列的通项 $a_n=$ ________________

例 **7.** 已知数列 $\{a_n\}$中, $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3$，求 a_n.

解：设递推公式 $a_{n+1}=2a_n+3$ 可以转化为 $a_{n+1}-t=2(a_n-t)$ 即 $a_{n+1}=2a_n-t \Rightarrow t=-3$. 故递推公式为 $a_{n+1}+3=2(a_n+3)$,令 $b_n=a_n+3$，则 $b_1=a_1+3=4$,且 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}+3}{a_n+3}=2$.所以 $\{b_n\}$是以 $b_1=4$ 为首项， 2 为公比的等比数列，则 $b_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$,所以 $a_n=2^{n+1}-3$.

类型 **4** 递推公式为 $a_{n+1}=pa_n+q^n$（其中 p，q 均为常数，($pq(p-1)(q-1)\neq 0$)）。 （或 $a_{n+1}=pa_n+rq^n$,其中 p，q， r 均为常数）

（2006 全国 I.22 ）（本小题满分 12 分）

设数列 $\{a_n\}$的前 n 项的和 $S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}\times 2^{n+1}+\frac{2}{3}$， $n=1,2,3,\cdots$

（Ⅰ）求首项 a_1 与通项 a_n ；

解法：该类型较类型 3 要复杂一些。一般地，要先在原递推公式两边同除以 q^{n+1}，得：$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{p}{q}\bullet\frac{a_n}{q^n}+\frac{1}{q}$

引入辅助数列 $\{b_n\}$（其中 $b_n=\frac{a_n}{q^n}$），得： $b_{n+1}=\frac{p}{q}b_n+\frac{1}{q}$ 再应用类型 3 的方法解决。

例 **8**. 已知数列 $\{a_n\}$中, $a_1=\frac{5}{6}$, $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+(\frac{1}{2})^{n+1}$，求 a_n。

解：在 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+(\frac{1}{2})^{n+1}$两边乘以 2^{n+1}得： $2^{n+1}\bullet a_{n+1}=\frac{2}{3}(2^n\bullet a_n)+1$

令 $b_n=2^n\bullet a_n$，则 $b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+1$,应用例 7 解法得： $b_n=3-2(\frac{2}{3})^n$

所以 $a_n=\frac{b_n}{2^n}=3(\frac{1}{2})^n-2(\frac{1}{3})^n$

类型 **5** 递推公式为 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$（其中 p，q 均为常数）。

解法：先把原递推公式转化为 $a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n)$

其中 s，t 满足 $\begin{cases} s+t=p \\ st=-q \end{cases}$，再应用前面类型 3 的方法求解。

（2006.福建 .理.22）（本小题满分 14 分）

已知数列 $\{a_n\}$满足 $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1(n\in N^*)$.

（I）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式； P26（styyj ）

例 **9**. 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1, a_2=2, a_{n+2}=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n$，求 a_n。

解：由 $a_{n+2}=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n$ 可转化为 $a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n)$

即 $a_{n+2}=(s+t)a_{n+1}-sta_n \Rightarrow \begin{cases} s+t=\frac{2}{3} \\ st=-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=1 \\ t=-\frac{1}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} s=-\frac{1}{3} \\ t=1 \end{cases}$

这里不妨选用 $\begin{cases} s=1 \\ t=-\frac{1}{3} \end{cases}$（当然也可选用 $\begin{cases} s=-\frac{1}{3} \\ t=1 \end{cases}$，大家可以试一试），则 $a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n) \Rightarrow \{a_{n+1}-a_n\}$ 是以首项为 $a_2-a_1=1$，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列，所以 $a_{n+1}-a_n=(-\frac{1}{3})^{n-1}$，应用类型 1 的方法，分别令 $n=1,2,3,\cdots\cdots,(n-1)$，代入上式得 $(n-1)$ 个等式累加之，即 $a_n-a_1=(-\frac{1}{3})^0+(-\frac{1}{3})^1+\cdots\cdots+(-\frac{1}{3})^{n-2}=\frac{1-(-\frac{1}{3})^{n-1}}{1+\frac{1}{3}}$

又 $\because a_1=1$，所以 $a_n=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}$。

类型 **6** 递推公式为 S_n 与 a_n 的关系式。(或 $S_n=f(a_n)$)

解法：利用 $a_n=\begin{cases} S_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(n=1) \\ S_n-S_{n-1} \cdots\cdots\cdots(n\ge 2) \end{cases}$ 进行求解。

(2006.陕西.20) (本小题满分 12 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$，其前 n 项和 S_n 满足 $10S_n=a_n^2+5a_n+6$ 且 a_1,a_3,a_{15} 成等比数列，求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n。 P24（styyj ）

例 **10**. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n=4-a_n-\frac{1}{2^{n-2}}$.

（1）求 a_{n+1} 与 a_n 的关系；（2）求通项公式 a_n.

解：（1）由 $S_n=4-a_n-\frac{1}{2^{n-2}}$ 得：$S_{n+1}=4-a_{n+1}-\frac{1}{2^{n-1}}$

于是 $S_{n+1}-S_n=(a_n-a_{n+1})+(\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{1}{2^{n-1}})$

所以 $a_{n+1}=a_n-a_{n+1}+\frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2^n}$.

（2）应用类型 4 的方法，上式两边同乘以 2^{n+1} 得：$2^{n+1}a_{n+1}=2^na_n+2$

由 $a_1=S_1=4-a_1-\frac{1}{2^{1-2}} \Rightarrow a_1=1$. 于是数列 $\{2^na_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公差的等差数列，所以 $2^na_n=2+2(n-1)=2n \Rightarrow a_n=\frac{n}{2^{n-1}}$

类型 **7** 双数列型

解法：根据所给两个数列递推公式的关系，灵活采用 累加 、累乘 、化归 等方法求解。

例 **11**. 已知数列 $\{a_n\}$中，$a_1=1$；数列 $\{b_n\}$中，$b_1=0$。当 $n\geq 2$ 时，$a_n=\frac{1}{3}(2a_{n-1}+b_{n-1}), b_n=\frac{1}{3}(a_{n-1}+2b_{n-1})$，求 a_n, b_n.

解：因 $a_n+b_n=\frac{1}{3}(2a_{n-1}+b_{n-1})+\frac{1}{3}(a_{n-1}+2b_{n-1})=a_{n-1}+b_{n-1}$

所以 $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}=a_{n-2}+b_{n-2}=\cdots=a_2+b_2=a_1+b_1=1$

即 $a_n+b_n=1$,,,,,,,,,,,,,,, （1）

又因为 $a_n-b_n=\frac{1}{3}(2a_{n-1}+b_{n-1})-\frac{1}{3}(a_{n-1}+2b_{n-1})=\frac{1}{3}(a_{n-1}-b_{n-1})$

所以 $a_n-b_n=\frac{1}{3}(a_{n-1}-b_{n-1})=(\frac{1}{3})^2 a_{n-2}-b_{n-2})=$,, $=(\frac{1}{3})^{n-1}(a_1-b_1)$

$=(\frac{1}{3})^{n-1}$.即 $a_n-b_n==(\frac{1}{3})^{n-1}$,,,,,,,,, （2）

由（1）、（2）得：$a_n=\frac{1}{2}[1+(\frac{1}{3})^{n-1}]$，$b_n=\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{3})^{n-1}]$

四、待定系数法（构造法）

求数列通项公式方法灵活多样，特别是对于给定的递推关系求通项公式，观察、分析、推理能力要求较高。通常可对递推式变换，转化成特殊数列（等差或等比数列）来求解，这种方法体现了数学中化未知为已知的化归思想，而运用待定系数法变换递推式中的常数就是一种重要的转化方法。

1、通过分解常数 ，可转化为特殊数列 $\{a_n+k\}$的形式求解。一般地，形如 $a_{n+1}=p a_n+q$（$p\neq1$，$pq\neq0$）型的递推式均可通过待定系数法对常数 q 分解法：设 $a_{n+1}+k=p(a_n+k)$ 与原式比较系数可得 $pk-k=q$，即 $k=\frac{q}{p-1}$，从而得等比数列 $\{a_n+k\}$。

例 **12**、数列 $\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1$（$n\geq2$），求数列 $\{a_n\}$的通项公式。

解：由 $a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1$（$n\geq2$）得 $a_n-2=\frac{1}{2}(a_{n-1}-2)$，而 $a_1-2=1-2=-1$,

∴数列 $\{a_n-2\}$是以 $\frac{1}{2}$ 为公比，-1 为首项的等比数列

∴ $a_n-2=-(\frac{1}{2})^{n-1}$ ∴ $a_n=2-(\frac{1}{2})^{n-1}$

说明：这个题目通过对常数 1 的分解，进行适当组合，可得等比数列 $\{a_n-2\}$，从而达到解决问题的目的。

例 **13**、数列 $\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$3a_{n+1}+a_n-7=0$,求数列 $\{a_n\}$的通项公式。

解：由 $3a_{n+1}+a_n-7=0$ 得 $a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n+\frac{7}{3}$

设 $a_{n+1}+k=-\frac{1}{3}(a_n+k)$，比较系数得 $-k-\frac{k}{3}=\frac{7}{3}$ 解得 $k=-\frac{7}{4}$

$\therefore\{a_n-\frac{7}{4}\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为公比，以 $a_1-\frac{7}{4}=1-\frac{7}{4}=-\frac{3}{4}$ 为首项的等比数列

$\therefore a_n-\frac{7}{4}=-\frac{3}{4}\times(-\frac{1}{3})^{n-1}\Rightarrow a_n=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\times(-\frac{1}{3})^{n-1}$

例 **14**. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=3a_n+2$，求 a_n.

解：设 $a_{n+1}+t=3(a_n+t)$，则 $a_{n+1}=3a_n+2t\Rightarrow t=1$，

$a_{n+1}+1=3(a_n+1)\Rightarrow\{a_n+1\}$ 是以 (a_1+1) 为首项，以 3 为公比的等比数列

$\Rightarrow a_n+1=(a_1+1)\cdot3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}\Rightarrow a_n=2\cdot3^{n-1}-1$

点评：求递推式形如 $a_{n+1}=pa_n+q$（p、q 为常数）的数列通项，可用迭代法或待定系数法构造新数列 $a_{n+1}+\frac{q}{p-1}=p(a_n+\frac{q}{1-p})$ 来求得，也可用“归纳—猜想—证明”法来求，这也是近年高考考得很多的一种题型.

例 **15**. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n=3^n+2a_{n-1}\ (n\geq2)$，求 a_n.

解：将 $a_n=3^n+2a_{n-1}$ 两边同除 3^n，得 $\frac{a_n}{3^n}=1+\frac{2a_{n-1}}{3^n}\Rightarrow\frac{a_n}{3^n}=1+\frac{2}{3}\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}$

设 $b_n=\frac{a_n}{3^n}$，则 $b_n=1+\frac{2}{3}b_{n-1}$. 令 $b_n-t=\frac{2}{3}(b_{n-1}-t)\Rightarrow b_n=\frac{2}{3}b_{n-1}+\frac{1}{3}t$

$\Rightarrow t=3$. 条件可化成 $b_n-3=\frac{2}{3}(b_{n-1}-3)$，数列 $\{b_n-3\}$ 是以 $b_1-3=\frac{a_1}{3}-3=-\frac{8}{3}$ 为首项，$\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列. $b_n-3=-\frac{8}{3}\times(\frac{2}{3})^{n-1}$. 因 $b_n=\frac{a_n}{3^n}$，

$\therefore a_n=b_n3^n=3^n(-\frac{8}{3}\times(\frac{2}{3})^{n-1}+3)\Rightarrow a_n=3^{n+1}-2^{n+2}$.

点评：递推式为 $a_{n+1}=pa_n+q^{n+1}$（p、q 为常数）时，可同除 q^{n+1}，得 $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{a_n}{q^n}+1$，令 $b_n=\frac{a_n}{q^n}$ 从而化归为 $a_{n+1}=pa_n+q$（p、q 为常数）型.

2、通过分解系数，可转化为特殊数列 $\{a_n-a_{n-1}\}$ 的形式求解。这种方法适用于 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ 型的递推式，通过对系数 p 的分解，可得等比数列 $\{a_n-a_{n-1}\}$：设 $a_{n+2}-ka_{n+1}=h(a_{n+1}-ka_n)$，比较系数得 $h+k=p,-hk=q$，可解得 h,k。

（2006.福建.文.22）（本小题满分 14 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=3,a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n(n\in N^*)$.

（I）证明：数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列；

（II）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

例 **16**、数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2,a_2=5,a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

分析：递推式 $a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$ 中含相邻三项，因而考虑每相邻两项的组合，即把中间一项 a_{n+1} 的系数分解成 1

和 2，适当组合，可发现一个等比数列 $\{a_n - a_{n-1}\}$。

解：由 $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ 得 $a_{n+2} - a_{n+1} - 2(a_{n+1} - a_n) = 0$

即 $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$，且 $a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$

$\therefore \{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 2 为公比，3 为首项的等比数列

$\therefore a_{n+1} - a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

利用逐差法可得 $a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$

$$= 3 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-2} + \cdots + 3 \cdot 2^0 + 2$$

$$= 3 \cdot (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1) + 2$$

$$= 3 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} + 2$$

$$= 3 \cdot 2^n - 1$$

$\therefore a_n = 3 \times 2^{n-1} - 1$

例 **17**、数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 1, a_2 = 2, 3a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解：由 $3a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ 得 $a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n$，设 $a_{n+2} - ka_{n+1} = h(a_{n+1} - ka_n)$

比较系数得 $k + h = \frac{2}{3}, -kh = \frac{1}{3}$，解得 $k = 1, h = -\frac{1}{3}$ 或 $k = -\frac{1}{3}, h = 1$

若取 $k = 1, h = -\frac{1}{3}$，则有 $a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n)$

$\therefore \{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为公比，以 $a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$ 为首项的等比数列

$\therefore a_{n+1} - a_n = (-\frac{1}{3})^{n-1}$

由逐差法可得 $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$

$$= (-\frac{1}{3})^{n-2} + (-\frac{1}{3})^{n-3} + \cdots + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3}) + 1 + 1$$

$$= \frac{1 - (-\frac{1}{3})^{n-1}}{1 + \frac{1}{3}} + 1 = \frac{3}{4}\left[1 - (-\frac{1}{3})^{n-1}\right] + 1 = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \times (-\frac{1}{3})^{n-1}$$

说明：若本题中取 $k = -\frac{1}{3}, h = 1$，则有 $a_{n+2} + \frac{1}{3}a_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n$ 即得

$\{a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n\}$ 为常数列，$a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n=a_n+\frac{1}{3}a_{n-1}=\cdots=a_2+\frac{1}{3}a_1$

$=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ 故可转化为例 13。

例 **18**. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n$ 求 a_n.

解：设 $a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n)\Rightarrow$

$$a_{n+2}=(s+t)a_{n+1}-sta_n\Rightarrow\begin{cases}s+t=\frac{2}{3}\\ st=-\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s=1\\ t=-\frac{1}{3}\end{cases}\text{或}\begin{cases}s=-\frac{1}{3}\\ t=1\end{cases}$$

则条件可以化为 $a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)\Rightarrow\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以首项为 $a_2-a_1=1$，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列，所以 $a_{n+1}-a_n=(-\frac{1}{3})^{n-1}$. 问题转化为利用累加法求数列的通项的问题，解得 $a_n=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}$.

点评：递推式为 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$（p、q 为常数）时，可以设 $a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n)$，其待定常数 s、t 由 $s+t=p,st=-q$ 求出，从而化归为上述已知题型.

五、特征根法

1、设已知数列 $\{a_n\}$ 的项满足 $a_1=b,a_{n+1}=ca_n+d$，其中 $c\neq 0,c\neq 1$，求这个数列的通项公式。作出一个方程

$x=cx+d$，则当 $x_0=a_1$ 时，a_n 为常数列，即 $a_n=a_1$；当 $x_0\neq a_1$ 时，$a_n=b_n+x_0$，其中 $\{b_n\}$ 是以 c 为公比的等比数列，

即 $b_n=b_1c^{n-1},b_1=a_1-x_0$.

例 **19**. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n-2,n\in N,a_1=4$，求 a_n.

解：作方程 $x=-\frac{1}{3}x-2$，则 $x_0=-\frac{3}{2}$.

当 $a_1=4$ 时，$a_1\neq x_0,b_1=a_1+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$.

数列 $\{b_n\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列. 于是 $b_n=b_1(-\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{11}{2}(-\frac{1}{3})^{n-1},a_n=-\frac{3}{2}+b_n=-\frac{3}{2}+\frac{11}{2}(-\frac{1}{3})^{n-1},n\in N$.

2、对于由递推公式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$，$a_1=\alpha,a_2=\beta$ 给出的数列 $\{a_n\}$，方程 $x^2-px-q=0$，叫做数列 $\{a_n\}$ 的特征方程。若 x_1,x_2 是特征方程的两个根，当 $x_1\neq x_2$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=Ax_1^{n-1}+Bx_2^{n-1}$，其中 A，B 由 $a_1=\alpha,a_2=\beta$ 决定（即把 a_1,a_2,x_1,x_2 和 $n=1,2$，代入 $a_n=Ax_1^{n-1}+Bx_2^{n-1}$，得到关于 A、B 的方程组）；当 $x_1=x_2$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=(A+Bn)x_1^{n-1}$，其中 A，B 由 $a_1=\alpha,a_2=\beta$ 决定（即把 a_1,a_2,x_1,x_2 和 $n=1,2$，代入 $a_n=(A+Bn)x_1^{n-1}$，得到关于 A、B 的方程组）。

例 **20**：已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a,a_2=b,3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0(n\geq 0,n\in N)$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解法一（待定系数——迭加法）

由 $3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0$，得

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n),$$

且 $a_2-a_1=b-a$。

则数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$是以 $b-a$ 为首项，$\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列，于是

$a_{n+1}-a_n=(b-a)(\frac{2}{3})^{n-1}$。把 $n=1,2,3,\cdots,n$ 代入，得

$a_2-a_1=b-a$，

$a_3-a_2=(b-a)\cdot(\frac{2}{3})$，

$a_4-a_3=(b-a)\cdot(\frac{2}{3})^2$，

•••

$a_n-a_{n-1}=(b-a)(\frac{2}{3})^{n-2}$。

把以上各式相加，得

$$a_n-a_1=(b-a)[1+\frac{2}{3}+(\frac{2}{3})+\cdots+(\frac{2}{3})^{n-2}]=\frac{1-(\frac{2}{3})^{n-1}}{1-\frac{2}{3}}(b-a)。$$

$\therefore a_n=[3-3(\frac{2}{3})^{n-1}](b-a)+a=3(a-b)(\frac{2}{3})^{n-1}+3b-2a$。

解法二（特征根法）：数列 $\{a_n\}$：$3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0(n\geq 0,n\in N)$，$a_1=a,a_2=b$ 的特征方程是：

$3x^2-5x+2=0$。

$\because x_1=1,x_2=\frac{2}{3}$，

$\therefore a_n=Ax_1^{n-1}+Bx_2^{n-1}=A+B\cdot(\frac{2}{3})^{n-1}$。

又由 $a_1=a,a_2=b$，于是

$$\begin{cases}a=A+B\\ b=A+\frac{2}{3}B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=3b-2a\\ B=3(a-b)\end{cases}$$

故 $a_n=3b-2a+3(a-b)(\frac{2}{3})^{n-1}$

3、如果数列 $\{a_n\}$ 满足下列条件：已知 a_1 的值且对于 $n\in N$，都有 $a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+h}$（其中 p、q、r、h 均为常数，且

$ph\neq qr, r\neq 0, a_1\neq -\frac{h}{r}$），那么，可作特征方程 $x=\frac{px+q}{rx+h}$，当特征方程有且仅有一根 x_0 时，则 $\left\{\frac{1}{a_n-x_0}\right\}$ 是等差数列；当特征方程有两个相异的根 λ_1、λ_2 时，则 $\left\{\frac{a_n-x_1}{a_n-x_2}\right\}$ 是等比数列。

(2006.重庆.文.22).（本小题满分 12 分）

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ 且 $8a_{n+1}a_n-16a_{n+1}+2a_n+5=0(n\geq 1)$. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

解：由已知，得 $a_{n+1}=\frac{2a_n+5}{16-8a_n}$，其特征方程为 $x=\frac{2x+5}{16-8x}$，解之，得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{5}{4}$

$\therefore a_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{6(a_n-\frac{1}{2})}{16-8a_n}$，$\therefore a_{n+1}-\frac{5}{4}=\frac{12(a_n-\frac{5}{4})}{16-8a_n}$

$\therefore \frac{a_{n+1}-\frac{1}{2}}{a_{n+1}-\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\frac{a_n-\frac{1}{2}}{a_n-\frac{5}{4}}$，$\therefore \frac{a_n-\frac{1}{2}}{a_n-\frac{5}{4}}=\frac{a_1-\frac{1}{2}}{a_1-\frac{5}{4}}\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}=-\frac{4}{2^n}$

$a_n=\frac{2^{n-1}+5}{2^n+4}$。 P26 (styyj)

例 **21**、已知数列 $\{a_n\}$ 满足性质：对于 $n\in N, a_{n-1}=\frac{a_n+4}{2a_n+3}$，且 $a_1=3$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

解：数列 $\{a_n\}$ 的特征方程为 $x=\frac{x+4}{2x+3}$，变形得 $2x^2+2x-4=0$，其根为 $\lambda_1=1, \lambda_2=-2$. 故特征方程有两个相异的根，使用定理 2 的第（2）部分，则有

$$c_n=\frac{a_1-\lambda_1}{a_1-\lambda_2}\cdot(\frac{p-\lambda_1 r}{p-\lambda_2 r})^{n-1}=\frac{3-1}{3+2}\cdot(\frac{1-1\cdot 2}{1-2\cdot 2})^{n-1}, n\in N.$$

$$\therefore c_n=\frac{2}{5}(-\frac{1}{5})^{n-1}, n\in N.$$

$$\therefore a_n=\frac{\lambda_2 c_n-\lambda_1}{c_n-1}=\frac{-2\cdot\frac{2}{5}(-\frac{1}{5})^{n-1}-1}{\frac{2}{5}(-\frac{1}{5})^{n-1}-1}, n\in N.$$

即 $a_n=\frac{(-5)^n-4}{2+(-5)^n}, n\in N.$

例 **22**. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：对于 $n\in N$，都有 $a_{n+1}=\frac{13a_n-25}{a_n+3}$.

（1）若 $a_1=5$，求 a_n；（2）若 $a_1=3$，求 a_n；（3）若 $a_1=6$，求 a_n；

（4）当 a_1 取哪些值时，无穷数列 $\{a_n\}$ 不存在？

解：作特征方程 $x=\frac{13x-25}{x+3}$. 变形得 $x^2-10x+25=0,$

特征方程有两个相同的特征根 $\lambda=5$. 依定理 2 的第（1）部分解答 .

(1) $\because a_1=5, \therefore a_1=\lambda. \therefore$ 对于 $n\in N$, 都有 $a_n=\lambda=5;$

(2) $\because a_1=3, \therefore a_1\neq\lambda.$

$$\therefore b_n=\frac{1}{a_1-\lambda}+(n-1)\frac{r}{p-r\lambda}$$
$$=\frac{1}{3-5}+(n-1)\cdot\frac{1}{13-1\cdot5}$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{n-1}{8},$$

令 $b_n=0$，得 $n=5$.故数列 $\{a_n\}$ 从第 5 项开始都不存在,

当 $n\leq4$, $n\in N$ 时， $a_n=\frac{1}{b_n}+\lambda=\frac{5n-17}{n-5}$.

(3) $\because a_1=6, \lambda=5, \therefore a_1\neq\lambda.$

$$\therefore b_n=\frac{1}{a_1-\lambda}+(n-1)\frac{r}{p-\lambda r}=1+\frac{n-1}{8}, n\in N.$$

令 $b_n=0$, 则 $n=-7\notin n$. $\therefore$对于 $n\in N, b_n\neq0.$

$$\therefore a_n=\frac{1}{b_n}+\lambda=\frac{1}{1+\frac{n-1}{8}}+5=\frac{5n+43}{n+7}, n\in N.$$

(4)、显然当 $a_1=-3$ 时，数列从第 2 项开始便不存在 .由本题的第（1）小题的解答过程知， $a_1=5$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是存在的，当 $a_1\neq\lambda=5$ 时，则有 $b_n=\frac{1}{a_1-\lambda}+(n-1)\frac{r}{p-\lambda r}=\frac{1}{a_1-5}+\frac{n-1}{8}, n\in N$. 令 $b_n=0$, 则得 $a_1=\frac{5n-13}{n-1}, n\in N$ 且 $n\geq2$.

$\therefore$当 $a_1=\frac{5n-13}{n-1}$（其中 $n\in N$ 且 $N\geq2$）时，数列 $\{a_n\}$ 从第 n 项开始便不存在 .

于是知：当 a_1 在集合 $\{-3$或 $\frac{5n-13}{n-1}: n\in N$, 且 $n\geq2\}$ 上取值时，无穷数列 $\{a_n\}$ 都不存在 .

说明：形如：$a_n=\frac{ma_{n-1}}{k(a_{n-1}+b)}$ 递推式，考虑函数倒数关系有 $\frac{1}{a_n}=k(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{m})\Rightarrow\frac{1}{a_n}=k\cdot\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{k}{m}$ 令 $b_n=\frac{1}{a_n}$ 则 $\{b_n\}$

可归为 $a_{n+1}=pa_n+q$ 型。(取倒数法)

例 **23**： $a_n=\frac{a_{n-1}}{3\cdot a_{n-1}+1}, a_1=1$

解：取倒数： $\frac{1}{a_n}=\frac{3\cdot a_{n-1}+1}{a_{n-1}}=3+\frac{1}{a_{n-1}}$

$\therefore \left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列， $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)\cdot 3=1+(n-1)\cdot 3 \Rightarrow a_n=\frac{1}{3n-2}$

六、构造法

构造法就是在解决某些数学问题的过程中，通过对条件与结论的充分剖析，有时会联想出一种适当的辅助模型，如某种数量关系，某个直观图形，或者某一反例，以此促成命题转换，产生新的解题方法，这种思维方法的特点就是 “ 构造 ” .若已知条件给的是数列的递推公式要求出该数列的通项公式，此类题通常较难，但使用构造法往往给人耳目一新的感觉 .

1、构造等差数列或等比数列

由于等差数列与等比数列的通项公式显然， 对于一些递推数列问题， 若能构造等差数列或等比数列， 无疑是一种行之有效的构造方法 .

例 **24**： 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，对于任意正整数 n，都有等式：$a_n^2+2a_n=4S_n$ 成立，求 $\{a_n\}$ 的通项 an.

解： $a_n^2+2a_n=4S_n \Rightarrow a_{n-1}^2+2a_{n-1}=4S_{n-1}$，

$\therefore a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}=4(S_n-S_{n-1})=4a_n$

$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$， $\because a_n+a_{n-1}\neq 0$， $\therefore a_n-a_{n-1}=2$. 即 $\{a_n\}$ 是以 2 为公差的等差数列，且 $a_1^2+2a_1=4a_1 \Rightarrow a_1=2$.

$\therefore a_n=2+2(n-1)=2n$

例 **25**： 数列 $\{a_n\}$中前 n 项的和 $S_n=2n-a_n$，求数列的通项公式 a_n.

解 ： $\because$ $a_1=S_1=2-a_1 \Rightarrow a_1=1$ 当 n $\geq$ 2 时 ，

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-a_n-[2(n-1)-a_{n-1}]=-a_n+2+a_{n-1} \Rightarrow a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1 \Rightarrow a_n-2=\frac{1}{2}(a_{n-1}-2)$

令 $b_n=a_n-2$，则 $b_n=\frac{1}{2}b_{n-1}$，且 $b_1=1-2=-1$

$\{b_n\}$是以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列， $b_n=-1\times(\frac{1}{2})^{n-1}=-(\frac{1}{2})^{n-1}$

$\therefore a_n=2-(\frac{1}{2})^{n-1}$.

2、构造差式与和式

解题的基本思路就是构造出某个数列的相邻两项之差，然后采用迭加的方法就可求得这一数列的通项公式 .

例 **26**： 设 $\{a_n\}$是首项为 1 的正项数列，且 $a_n^2-a_{n-1}^2-na_n-na_{n-1}=0$，（n∈N*），求数列的通项公式 an.

解：由题设得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-n)=0$.

$\because a_n>0$， $a_{n-1}>0$， $\therefore a_n+a_{n-1}>0$.

$\therefore a_n-a_{n-1}=n$

$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots(a_n-a_{n-1})=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 例 **27**： 数列 $\{a_n\}$中， $a_1=1, a_2=3$，且 $a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$，（n∈N*），求通项公式 a_n.

解：∵ $a_{n+2}-a_{n+1}=(n+2)(a_{n+1}-a_n)=(n+2)(n+1)(a_n-a_{n-1})$

$=\cdots=(n+2)(n+1)\cdots4\times3(a_2-a_1)=(n+2)!$

∴ $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+2!+3!+\cdots n!$（n∈N*）

3、构造商式与积式

构造数列相邻两项的商式，然后连乘也是求数列通项公式的一种简单方法 .

例 **28**： 数列 $\{a_n\}$中， $a_1=\frac{1}{2}$， 前 n 项的和 $S_n=n^2a_n$， 求 a_{n+1}.

解： $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}\Rightarrow(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$

$$\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1},$$

$$\therefore a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

4、构造对数式或倒数式

有些数列若通过取对数，取倒数代数变形方法，可由复杂变为简单，使问题得以解决 .

例 **29**： 设正项数列 $\{a_n\}$满足 $a_1=1$， $a_n=2a_{n-1}^2$（n≥2） .求数列 $\{a_n\}$的通项公式 .

解：两边取对数得： $\log_2^{a_n}=1+2\log_2^{a_{n-1}}$， $\log_2^{a_n}+1=2(\log_2^{a_{n-1}}+1)$， 设 $b_n=\log_2^{a_n}+1$，

则 $b_n=2b_{n-1}$

$\{b_n\}$是以 2 为公比的等比数列， $b_1=\log_2^1+1=1$.

$b_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$， $\log_2^{a_n}+1=2^{n-1}$， $\log_2^{a_n}=2^{n-1}-1$，

$\therefore a_n=2^{2^{n-1}-1}$

例 **30**： 已知数列 $\{a_n\}$中， $a_1=2$， n≥2 时 $a_n=\frac{7a_{n-1}-3}{3a_{n-1}+1}$， 求通项公式 .

解：∵ $a_n-1=\frac{4a_{n-1}-4}{3a_{n-1}+1}$，两边取倒数得 $\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{a_{n-1}-1}+\frac{3}{4}$.

可化为等差数列关系式 .

$$\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{a_1-1}+\frac{3}{4}(n-1)=\frac{3n+1}{4}$$

$$\therefore a_n=\frac{3n+5}{3n+1}$$

总结方法比做题更重要 !方法产生于具体数学内容的学习过程中 .