张角定理在证明调和数列中的应用

顾燕飞　(江苏省泰州中学附中　225300)

我们知道：如果一个数列的各项倒数成等差数列,则此数列叫做调和数列.

下面就介绍应用张角定理来证明有关线段 a,b,c 成调和数列的几何题.

1　张角定理

如图1，设直线 ACB 外一视点 P 对于线段 AC,CB 的张角分别为 α,β,且 $\alpha+\beta<180^\circ$，则有 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{PC}=\frac{\sin\alpha}{PB}+\frac{\sin\beta}{PA}$.

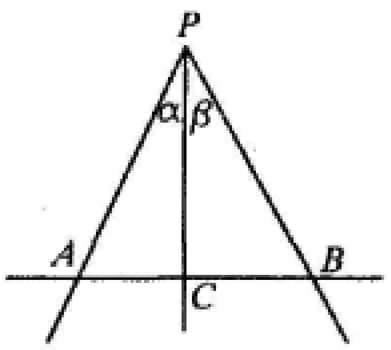

图1

证明　因为 $\triangle PAB$ 的面积等于 $\triangle PAC$ 与 $\triangle PCB$ 面积之和,所以

$$\frac{1}{2}PA\cdot PB\sin(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{1}{2}PA\cdot PC\sin\alpha+\frac{1}{2}PC\cdot PB\sin\beta,$$

两边同除以 $PA\cdot PB\cdot PC$,即得张角定理.

2　应用举例

例1　已知圆心 O 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 BC 上,且与 AB,AC 相切,设圆的直径为 d,求证:AB,d,AC 成调和数列.

证明　如图2，以 A 为视点,则对线段 BO,OC 的张角 $\alpha=\beta=45^\circ$，由张角定理及 $OA=\frac{\sqrt{2}}{2}d$,得

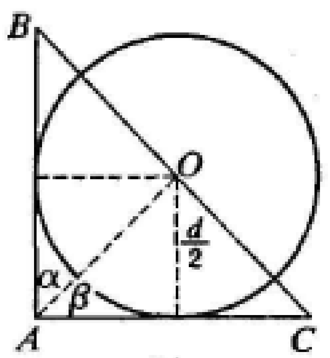

图2

$$\frac{\sin 90^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}d}=\frac{\sin 45^\circ}{AC}+\frac{\sin 45^\circ}{AB},$$

即 $\frac{2}{d}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}$，故 AB,d,AC 成调和数列.

例2　过等腰 $\triangle ABC$ 底边 BC 的中点 D 任作一直线与 AB 交于 M，与 AC 的延长线交于 N. 求证:AM,AB,AN 成调和数列.

证明　如图3，以 A 为视点,分别对 M,D,N 和 B,D,C 用张角定理(张角已标入图),得

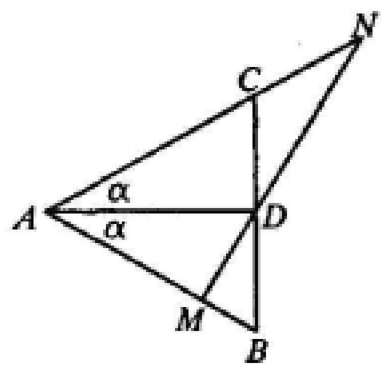

图3

$$\frac{\sin\alpha}{AM}+\frac{\sin\alpha}{AN}=\frac{\sin 2\alpha}{AD}=\frac{\sin\alpha}{AB}+\frac{\sin\alpha}{AC}.$$

考虑到 $AB=AC$,即 $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{2}{AB}$,故 AM,AB,AN 成调和数列.

例3　已知四边形 $ABCD$ 两对对边的延长线分别交于 K,L. 过 K,L 作直线，分别与对角线 AC,BD 的延长线交于 G,F，求证:KF,KL,KG 成调和数列.

证明　如图4，以 K 为视点,分别对 $A,B,L;D,C,L;D,B,F$ 及 A,C,G 用张角定理,得

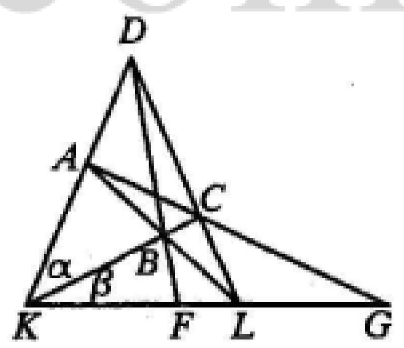

图4

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{KB}=\frac{\sin\alpha}{KL}+\frac{\sin\beta}{KA},\quad ①$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{KC}=\frac{\sin\alpha}{KL}+\frac{\sin\beta}{KD},\quad ②$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{KB}=\frac{\sin\alpha}{KF}+\frac{\sin\beta}{KD},\quad ③$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{KC}=\frac{\sin\alpha}{KG}+\frac{\sin\beta}{KA}.\quad ④$$

①+②-③-④得

www.docin.com

$$\frac{\sin\alpha}{KF}+\frac{\sin\alpha}{KG}=\frac{2\sin\alpha}{KL}.$$

因为 $\sin\alpha\neq 0$，所以 $\frac{1}{KF}+\frac{1}{KG}=\frac{2}{KL}$.

例4 经过圆外一点 B 作⊙O 的两条割线，其中割线 BDE 通过圆心 O 且交圆于 D，E，另一割线 BAF 交圆于 A，F，在圆上取一点 G，使 $\overset{\frown}{EG}=\overset{\frown}{EF}$，连 AG 交 DE 于 C，求证：BE，DE，CE 成调和数列.

证明 如图5，由题设易证 AD，AE 分别为 $\triangle BAC$ 的内角与外角的平分线. 设 $AD=d$，$AB=b$，$AC=c$，$AE=e$，则以 A 为视点，对 D，C，E 用张角定理，得

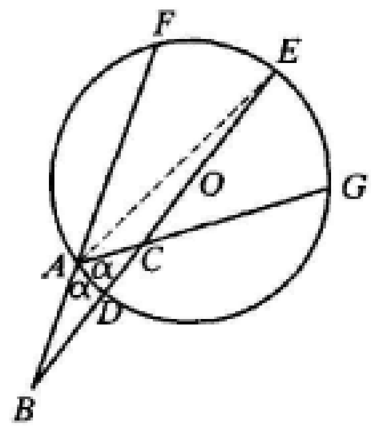

图5

$$\frac{\sin 90^\circ}{c}=\frac{\sin\alpha}{e}+\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{d},$$

所以 $c=\dfrac{de}{e\cos\alpha+d\sin\alpha}$. ①

同理以 A 为视点，对 B，D，E 用张角定理得 $b=\dfrac{de}{e\cos\alpha-d\sin\alpha}$. ②

在 $\triangle ABE$ 中用余弦定理，并将其中 b 用②式代入，经整理可得

$$BE=\sqrt{\frac{e^2\cos^2\alpha(d^2+e^2)}{(e\cos\alpha-d\sin\alpha)^2}}$$

$$=\frac{e\cos\alpha\cdot DE}{e\cos\alpha-d\sin\alpha}.$$

$(e\cos\alpha-d\sin\alpha>0, d^2+e^2=DE^2)$

在 $\triangle ACE$ 中用余弦定理，将其中 c 用①代入，经整理可得

$$CE=\frac{e\cos\alpha\cdot DE}{e\cos\alpha+d\sin\alpha}.$$

于是有 $\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{2}{DE}$，证毕.

例5 如图6，半径分别为 R，r 的⊙O_1 和⊙O_2 外切于 P，AB 是两圆的公切线，A，B 为切点，$PC\perp AB$ 于 C，设 $PC=m$，求证：R，r，m 成调和数列.

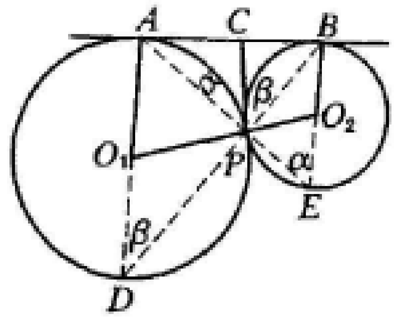

图6

证明 作两圆的直径 AO_1D 和 BO_2E，连结 PA，PB，PD，PE. 容易证明 A，P，E 和 B，P，D 分别共线. 设 $\angle APC=\angle E=\alpha$，$\angle BPC=\angle D=\beta$，在 Rt$\triangle APD$ 和 Rt$\triangle PBE$ 中，分别得

$PA=2R\sin\beta$，$PB=2r\sin\alpha$. ①

由张角定理得

$$\frac{\sin\alpha}{PB}+\frac{\sin\beta}{PA}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{m}=\frac{1}{m}. \quad ②$$

把①代入②并整理得

$\frac{1}{R}+\frac{1}{r}=\frac{2}{m}$，证毕.

综上所述，应用张角定理证明 a，b，c 成调和数列，关键在于找准视点，对有关三点运用张角定理列出关系式，再应用题设，结合三角、代数知识，通过运算证得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$. 这种方法简捷明快，富有规律，不添或少添辅助线，是证题的一种好方法，值得重视.

参考文献

[1] 张景中. 面积关系帮你解题[M]. 上海：上海教育出版社，1982：20~21.
[2] 井中，沛生. 从数学教育到教育数学[M]. 成都：四川教育出版社，1989：106~116.
[3] 于志洪. 用张角公式证明复杂比例式 [J]. 中学数学教学，1989(4).
[4] 于志洪. 张角公式帮你解竞赛题 [J]. 内蒙古教育学院学报(综合版)，1991(1).
[5] 于志洪. 用张角公式证明线段相等[J]. 数学通报，1993(8).

www.docin.com