基本不等式的推广和应用

贺泰安

众所周知，基本不等式$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$（$x>0$，$y>0$）是初等数学中的一个极为重要、应用颇广的不等式。现把它推广如下：

若$x>0$，$y>0$，$a>0$，$b>0$，且$a+b=1$，则有$ax+by\geqslant x^a y^b$（当且仅当$x=y$时等号成立）。

显然，基本不等式是不等式$ax+by\geqslant x^a y^b$当$a=b=\frac{1}{2}$时的特例。

下面用微分中值定理来证明这个不等式。

证明　不妨设$x>y>0$，则$\frac{x}{y}>1$．令$\frac{x}{y}=t$，设函数$f(t)=t^a$，$f(t)$在区间$[1,t]$上满足微分中值定理的条件，故

$$\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(\xi)，(1<\xi<t)$$

即　$t^a-1=(t-1)a\xi^{a-1}$.

$\because \xi>1$，$a-1<0$，

$\therefore \xi^{a-1}<1$.

$\therefore t^a-1<(t-1)a$.

因而，$t^a<1+(t-1)a$，

即　$$\left(\frac{x}{y}\right)^a<1+\left(\frac{x}{y}-1\right)a=1+\frac{x-y}{y}a.$$

$\because y>0$，

$$\therefore y\left(\frac{x}{y}\right)^a<y+ax-ay$$

$$=ax+(1-a)y.$$

$\therefore x^a\cdot y^{1-a}<ax+(1-a)y$.

$\because 1-a=b$，

$\therefore x^a y^b<ax+by$.

如果$0<x<y$，只须变换a与b的位置，则可得同一个不等式。

如果$x=y$，则$x^a y^b=x^{a+b}=x$，

$ax+by=x(a+b)=x$，

$\therefore x^a y^b=ax+by$.

综上所证　有$ax+by\geqslant x^a y^b$.　（Ⅰ）

用不等式（Ⅰ）可以证明很多不等式，请看下面的例子。

例1．证明：$\sqrt[3]{3a^2}\leqslant 1+\frac{2}{3}a$.（$a>0$）

证明：$\because \sqrt[3]{3a^2}=3^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$，

由不等式（Ⅰ）得

$$\sqrt[3]{3a^2}\leqslant\frac{1}{3}\times 3+\frac{2}{3}a=1+\frac{2}{3}a.$$

显然，当$a=3$时不等式变成等式。

不难用不等式（Ⅰ）证明更一般的情况：当$a>0$，n为自然数时，

$$\sqrt[n]{na^{n-1}}\leqslant 1+\frac{n-1}{n}a.$$

例2．证明：$(\log_a x)^n\cdot(\log_a y)^m\leqslant\log_a x^n+\log_a y^m$.

（$a>0$且$a\neq 1$，$x>1$，$y>1$，$n>0$，$m>0$，且$m+n=1$）

证明　由不等式（Ⅰ）有

$(\log_a x)^n\cdot(\log_a y)^m$

$\leqslant n\cdot\log_a x+m\log_a y$

$=\log_a x^n+\log_a y^m$.

例3．若$a+b=1$，$a>0$，$b>0$．求证：$a^{b-1}b^{a-1}\leqslant 2$.

证明　由不等式（Ⅰ）有

$a^b b^a\leqslant ba+ab=2ab$，

$$\therefore\frac{a^b b^a}{ab}\leqslant 2,$$

即$a^{b-1}b^{a-1}\leqslant 2$.

例4．若$m+n=1$，$m>0$，$n>0$.

证明：$(1+m)^n\cdot(1+n)^m\leqslant 1+2mn$.

证明　由不等式（Ⅰ）得

$(1+m)^n\cdot(1+n)^m\leqslant n(1+m)$

$+m(1+n)$
$=n+nm+m+mn$
$=1+2mn.$

例5. 证明：$\operatorname{tg}x\geq 4\sqrt[4]{\operatorname{tg}x}-3$.
$(0<x<\frac{\pi}{2})$

证明 由不等式（Ⅰ）有

$$\frac{1}{4}\sin x+\frac{3}{4}\cos x$$
$$\geq(\sin x)^{\frac{1}{4}}(\cos x)^{\frac{3}{4}}$$
$$=(\sin x)^{\frac{1}{4}}(\cos x)^{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\cos x\cdot(\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{4}}.$$

两边同除以$\cos x$得

$$\frac{1}{4}\operatorname{tg}x+\frac{3}{4}\geq(\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{4}}.$$
$$\therefore \operatorname{tg}x+3\geq 4\sqrt[4]{\operatorname{tg}x},$$
$$\operatorname{tg}x\geq 4\sqrt[4]{\operatorname{tg}x}-3.$$

不难证明更一般的不等式：

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\operatorname{tg}x\geq n\sqrt[n]{\operatorname{tg}x}-(n-1)$．（n为自然数）

例6. 证明：

$$(\sin x)^{\sin^2x}\cdot(\cos x)^{\cos^2x}\leq\sin^3x+\cos^3x.\quad(0<x<\frac{\pi}{2})$$

证明 $\because \sin^2x+\cos^2x=1$.
∴由不等式（Ⅰ）有

$$(\sin x)^{\sin^2x}\cdot(\cos x)^{\cos^2x}$$
$$\leq\sin^2x\cdot\sin x+\cos^2x\cdot\cos x$$
$$=\sin^3x+\cos^3x.$$

由以上各例可以看出，不等式（Ⅰ）的用途很广，同时还为我们构造不等式提供了方便，只要给出满足$x,\ y>0,\ a>0,\ b>0$，且$a+b=1$的不同的$x,\ y,\ a,\ b$，即可得出许多不等式来，而这些不等式的证明用不等式（Ⅰ）又显得特别简单。

（作者单位：四川雅安地区教育局教研室）

一个不等式的推广与应用

常治安

下面不等式是众所周知的：设$a、b\in R^+$且$a+b=1$，则$ab+\frac{1}{ab}\geq\frac{17}{4}$.

本文想对上面不等式作较为一般的推广，并举例说明它的简单应用。

设$a_k\in R^+$ $(k=1,2,\cdots,n)$，且$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$．则$a_1a_2\cdots a_n+\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}\geq n^n+\frac{1}{n^n}$.

证明 $\because 0<a_1a_2\cdots a_n$

$$\leq\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n$$
$$\leq\frac{1}{n^n}<1,$$
$$\therefore 1-a_1a_2\cdots a_n\geq 1-\frac{1}{n^n}>0,$$
$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}\geq n^n>0,$$
$$\therefore a_1a_2\cdots a_n+\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$$
$$=\frac{(a_1a_2\cdots a_n)^2+1}{a_1a_2\cdots a_n}$$
$$=\frac{(1-a_1a_2\cdots a_n)^2}{a_1a_2\cdots a_n}+2$$
$$\geq n^n(1-\frac{1}{n^n})^2+2$$
$$=n^n+\frac{1}{n^n}.\qquad(1)$$

同法易证：若$a_k\in R^+(k=1,2,\cdots,n)$，且$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，则$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}}\geq n+\frac{1}{n}$．（2）