1．均值不等式法

例 1 设 $S_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$.求证 $\frac{n(n+1)}{2}<S_n<\frac{(n+1)^2}{2}$.

例 2 已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+a\cdot 2^{bx}}$，若 $f(1)=\frac{4}{5}$，且 $f(x)$ 在[0，1]上的最小值为 $\frac{1}{2}$，求证：

$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)>n+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}$.

例 3 求证 $C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n>n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}(n>1,n\in N)$.

例 4 已知 $a_1^2+a_2^2+\mathrm{L}\ +a_n^2=1$，$x_1^2+x_2^2+\mathrm{L}\ +x_n^2=1$，求证：$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant 1$.

2．利用有用结论

例 5 求证 $(1+1)(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\cdots(1+\frac{1}{2n-1})>\sqrt{2n+1}.$

例 6 已知函数 $f(x)=\lg\frac{1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+a\cdot n^x}{n},0<a\le 1,\text{给定}n\in N^*,n\ge 2.$

求证：$f(2x)>2f(x)(x\ne 0)$ 对任意 $n\in N^*$ 且 $n\ge 2$ 恒成立。

例 7 已知 $a_1=1,a_{n+1}=(1+\frac{1}{n^2+n})a_n+\frac{1}{2^n}$.

(I) 用数学归纳法证明 $a_n\ge 2(n\ge 2)$；

(II) 对 $\ln(1+x)<x$ 对 $x>0$ 都成立，证明 $a_n<e^2$（无理数 $e\approx 2.71828\mathrm{L}$ ）

例 8 已知不等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\mathrm{L}\ +\frac{1}{n}>\frac{1}{2}[\log_2 n],n\in N^*,n>2$。$[\log_2 n]$ 表示不超过 $\log_2 n$ 的最大整数。设正数数列

$\{a_n\}$ 满足：$a_1=b(b>0),a_n\le\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}},n\ge 2.$ 求证 $a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]},n\ge 3.$

再如： 设函数 $f(x)=e^x-x$。

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 最小值；（Ⅱ）求证：对于任意 $n\in N^*$，有 $\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^n<\frac{e}{e-1}.$

例 9 设 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$，求证：数列 $\{a_n\}$ 单调递增且 $a_n<4.$

3．部分放缩

例 10 设 $a_n=1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\mathrm{L}\ +\frac{1}{n^a},a\ge 2,$ 求证：$a_n<2.$

例 11 设数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_{n+1}=a_n^2-na_n+1\left(n\in N_+\right)$，当$a_1\geq 3$时证明对所有$n\geq 1$，有：

$(i)a_n\geq n+2$； $(ii)\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\leq\frac{1}{2}$.

4 ．添减项放缩

例 12 设$n>1,n\in N$，求证$(\frac{2}{3})^n<\frac{8}{(n+1)(n+2)}$.

例 13 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2,a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}(n=1,2,\cdots)$. 证明$a_n>\sqrt{2n+1}$对一切正整数$n$成立；

5 利用单调性放缩： 构造函数

例 14 已知函数$f(x)=ax-\frac{3}{2}x^2$的最大值不大于$\frac{1}{6}$，又当$x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$时$f(x)\geq\frac{1}{8}$.

（Ⅰ）求a的值；（Ⅱ）设$0<a_1<\frac{1}{2},a_{n+1}=f(a_n),n\in N^*$，证明$a_n<\frac{1}{n+1}$.

例 15 数列$\left\{x_n\right\}$由下列条件确定：$x_1=a>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right),n\in N$.

（I） 证明：对$n\geq 2$总有$x_n\geq\sqrt{a}$；（II）证明：对$n\geq 2$总有$x_n\geq x_{n+1}$

6 ．换元放缩

例 16 求证$1<\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}(n\in N^*,n\geq 2)$.

例 17 设$a>1$，$n\geq 2,n\in N$，求证$a^n>\frac{n^2(a-1)^2}{4}$.

7 转化为加强命题放缩

例 18 设$0<a<1$，定义$a_1=1+a,a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+a$，求证：对一切正整数$n$有$a_n>1$.

例 19 数列$\left\{x_n\right\}$满足$x_1=\frac{1}{2},x_{n+1}=x_n+\frac{x_n^2}{n^2}$.证明$x_{2001}<1001$.

例 20 已知数列｛a_n｝满足：$a_1=\frac{3}{2}$，且$a_n=\frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}$（$n\geq 2$，$n\in N^*$）

（1）求数列｛a_n｝的通项公式；（2）证明：对一切正整数 n 有 $a_1\bullet a_2\bullet\cdots\cdots a_n<2\bullet n!$

8．分项讨论

例 21 已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n=2a_n+(-1)^n,n\geq 1$.

（Ⅰ）写出数列$\{a_n\}$的前 3 项a_1,a_2,a_3；　（Ⅱ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅲ）证明：对任意的整数$m>4$，有$\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}<\frac{7}{8}$.

9．借助数学归纳法

例 22（Ⅰ）设函数$f(x)=x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)\ (0<x<1)$，求$f(x)$的最小值；

（Ⅱ）设正数$p_1,p_2,p_3,\cdots,p_{2^n}$满足$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{2^n}=1$，求证：

$$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+p_3\log_2 p_3+\cdots+p_{2^n}\log_2 p_{2^n}\geq -n$$

10．构造辅助函数法

例 23 已知$f(x)=3-4^x+2x\ln 2$，数列$\{a_n\}$满足$-\frac{1}{2}<a_1<0,2^{1+a_{n+1}}=f(a_n)\ (n\in N^*)$

（1）求$f(x)$在$\left[-\frac{1}{2},0\right]$上的最大值和最小值；　（2）证明：$-\frac{1}{2}<a_n<0$；

（3）判断a_n与$a_{n+1}(n\in N^*)$的大小，并说明理由.

例 24 已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\frac{3}{5}$，$a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$，$n=1,2,\cdots$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；　（Ⅱ）证明：对任意的$x>0$，$a_n\geqslant\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)$，$n=1,2,\cdots$；

（Ⅲ）证明：$a_1+a_2+\cdots+a_n>\frac{n^2}{n+1}$.

例 25 已知函数$f(x)=x^2-1(x>0)$，设曲线$y=f(x)$在点$(x_n,f(x_n))$处的切线与 x 轴的交点为$(x_{n+1},0)$ $(n\in N^*)$.

（Ⅰ）用x_n表示x_{n+1}；　（Ⅱ）求使不等式$x_{n+1}\leq x_n$对一切正整数 n 都成立的充要条件，并说明理由；

（Ⅲ）若$x_1=2$，求证：$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\leq\frac{2^n-1}{3}$.

例 1　解析　此数列的通项为$a_k=\sqrt{k(k+1)},k=1,2,\cdots,n.\because k<\sqrt{k(k+1)}<\frac{k+k+1}{2}=k+\frac{1}{2}$，

$\therefore \sum_{k=1}^{n} k < S_n < \sum_{k=1}^{n}(k+\frac{1}{2})$，即 $\frac{n(n+1)}{2} < S_n < \frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2} < \frac{(n+1)^2}{2}$.

注：①应注意把握放缩的“度”：上述不等式右边放缩用的是均值不等式 $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$，若放成 $\sqrt{k(k+1)} < k+1$ 则得 $S_n < \sum_{k=1}^{n}(k+1) = \frac{(n+1)(n+3)}{2} > \frac{(n+1)^2}{2}$，就放过“度”了！

②根据所证不等式的结构特征来选取所需要的重要不等式，这里

$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \le \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}}$，**其中，$n=2,3$ 等的各式及其变式公式均可供选用。**

例 2 [简析]

$$f(x)=\frac{4^x}{1+4^x}=1-\frac{1}{1+4^x}>1-\frac{1}{2\bullet 2^x}(x\neq 0)\Rightarrow f(1)+\cdots+f(n)>(1-\frac{1}{2\times 2})+(1-\frac{1}{2\times 2^2})+\cdots+(1-\frac{1}{2\times 2^n})$$

$$=n-\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})=n+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}.$$

例 3 简析 不等式左边 $C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-1=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$

$>n\cdot\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 2^2\cdot\cdots\cdot 2^{n-1}}=n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$，**故原结论成立.**

例 4 【解析】使用均值不等式即可：因为 $xy \le \frac{x^2+y^2}{2}\ (x,y\in R)$，所以有

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \le \frac{a_1^2+x_1^2}{2}+\frac{a_2^2+x_2^2}{2}+\cdots+\frac{a_n^2+x_n^2}{2}$$

$$=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{2}+\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

其实，上述证明完全可以改述成求 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ 的最大值。本题还可以推广为：

若 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=p$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=q(p,q>0)$，试求 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ 的最大值。

请分析下述求法：因为 $xy\le\frac{x^2+y^2}{2}\ (x,y\in R)$，所以有 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \le \frac{a_1^2+x_1^2}{2}+\frac{a_2^2+x_2^2}{2}+\cdots+\frac{a_n^2+x_n^2}{2}$

$$=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{2}+\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2}=\frac{p+q}{2}.$$

故 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ 的最大值为 $\frac{p+q}{2}$，且此时有 $a_k=x_k(k=1,2,\cdots,n)$。

上述解题过程貌似完美，其实细细推敲，是大有问题的：取“＝”的条件是 $a_k=x_k(k=1,2,\cdots,n)$，即必须有 $\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2$，即只有 p=q 时才成立！那么，$p\neq q$ 呢？其实例 6 的方法照样可用，只需做稍稍变形转化：

$$\frac{a_1^2}{(\sqrt{p})^2}+\frac{a_2^2}{(\sqrt{p})^2}+\cdots+\frac{a_n^2}{(\sqrt{p})^2}=1,\ \frac{x_1^2}{(\sqrt{q})^2}+\frac{x_2^2}{(\sqrt{q})^2}+\cdots+\frac{x_n^2}{(\sqrt{q})^2}=1,$$

则有 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\sqrt{pq}\dfrac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{\sqrt{pq}}$

$$\le\frac{\sqrt{pq}}{2}[(\frac{a_1^2}{(\sqrt{p})^2}+\frac{a_2^2}{(\sqrt{p})^2}+\cdots+\frac{a_n^2}{(\sqrt{p})^2})+(\frac{x_1^2}{(\sqrt{q})^2}+\frac{x_2^2}{(\sqrt{q})^2}+\cdots+\frac{x_n^2}{(\sqrt{q})^2})]=\sqrt{pq}$$

于是，$(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)_{\max}=\sqrt{pq}$，当且仅当 $\dfrac{a_k}{\sqrt{p}}=\dfrac{x_k}{\sqrt{q}}(k=1,2,\cdots,n).$

结合其结构特征，还可构造向量求解：设 $\vec{m}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\vec{n}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则

由 $|\vec{m}\cdot\vec{n}|\le|\vec{m}||\vec{n}|$ 立刻得解：$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}=\sqrt{pq}.$

且取"＝"的充要条件是：$\dfrac{x_1}{a_1}=\dfrac{x_2}{a_2}=\cdots\dfrac{x_n}{a_n}$。

2．利用有用结论

例 5 简析 本题可以利用的有用结论主要有：

法 1 利用假分数的一个性质 $\dfrac{b}{a}>\dfrac{b+m}{a+m}(b>a>0,m>0)$ 可得

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}>\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot(2n+1)\Rightarrow(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1})^2>2n+1$$

即 $(1+1)(1+\dfrac{1}{3})(1+\dfrac{1}{5})\cdots(1+\dfrac{1}{2n-1})>\sqrt{2n+1}.$

法 2 利用贝努利不等式 $(1+x)^n>1+nx(n\in N^*,n\ge2,x>-1,x\ne0)$ 的一个特例

$(1+\dfrac{1}{2k-1})^2>1+2\cdot\dfrac{1}{2k-1}$（此处）得 $n=2,x=\dfrac{1}{2k-1}$，$1+\dfrac{1}{2k-1}>\sqrt{\dfrac{2k+1}{2k-1}}\Rightarrow\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\dfrac{1}{2k-1})=\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{2k+1}{2k-1}}=\sqrt{2n+1}.$

例 6 ［简析］高考标准用数学归纳法证明，；这里给出运用柯西（$Cauchy$）不等式 $[\sum\limits_{i=1}^{n}(a_ib_i)]^2\le\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$ 的简捷证法：

$$f(2x)>2f(x)\Leftrightarrow\lg\frac{1+2^{2x}+3^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+a\cdot n^{2x}}{n}>2\lg\frac{1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+a\cdot n^x}{n}$$

$$\Leftrightarrow[1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+a\cdot n^x]^2<n\bullet[1+2^{2x}+3^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+a\cdot n^{2x}]$$

而由 $Cauchy$ 不等式得 $(1\cdot1+1\cdot2^x+1\cdot3^x+\cdots+1\cdot(n-1)^x+a\cdot n^x)^2$

$<(1^2+\cdots+1^2)\bullet[1+2^{2x}+3^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+a^2\cdot n^{2x}]$（$x=0$ 时取等号）

$\le n\bullet[1+2^{2x}+3^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+a\cdot n^{2x}]$（$\because 0<a\le1$），得证！

例 7 ［解析］ (II) 结合第 (I) 问结论及所给题设条件 $\ln(1+x)<x$（$x>0$）的结构特征，可得放缩思路：

$$a_{n+1}\le(1+\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n})a_n\Rightarrow\ln a_{n+1}\le\ln(1+\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n})+\ln a_n\le\ln a_n+\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n}。$$

于是 $\ln a_{n+1}-\ln a_n\le\dfrac{1}{n^2+n}+\dfrac{1}{2^n}$，

$$\sum_{i=1}^{n-1}(\ln a_{i+1}-\ln a_i)\le\sum_{i=1}^{n-1}(\frac{1}{i^2+i}+\frac{1}{2^i})\Rightarrow\ln a_n-\ln a_1\le 1-\frac{1}{n}+\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}<2.$$ 即

$\ln a_n-\ln a_1<2\Rightarrow a_n<e^2.$

【注】：题目所给条件 $\ln(1+x)<x$（$x>0$）为一有用结论，可以起到提醒思路与探索放缩方向的作用；当然，本题还可用结论 $2^n>n(n-1)(n\ge 2)$ 来放缩：$a_{n+1}\le(1+\frac{1}{n(n-1)})a_n+\frac{1}{n(n-1)}\Rightarrow a_{n+1}+1\le(1+\frac{1}{n(n-1)})(a_n+1)$

$$\Rightarrow\ln(a_{n+1}+1)-\ln(a_n+1)\le\ln(1+\frac{1}{n(n-1)})<\frac{1}{n(n-1)}.$$

$$\Rightarrow\sum_{i=2}^{n-1}[\ln(a_{i+1}+1)-\ln(a_i+1)]<\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{i(i-1)}\Rightarrow\ln(a_n+1)-\ln(a_2+1)<1-\frac{1}{n}<1,$$

即 $\ln(a_n+1)<1+\ln 3\Rightarrow a_n<3e-1<e^2.$

例 8 【简析】 当 $n\ge 2$ 时 $a_n\le\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}\Rightarrow\frac{1}{a_n}\ge\frac{n+a_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{n}$，即

$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\ge\frac{1}{n}\Rightarrow\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k-1}})\ge\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$. 于是当 $n\ge 3$ 时有 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}>\frac{1}{2}[\log_2 n]\Rightarrow a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}.$

注：本题涉及的和式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 为调和级数，是发散的，不能求和；但是可以利用所给题设结论 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$ 来进行有效地放缩；

再如：【解析】（Ⅰ）1；（Ⅱ）证明：由（Ⅰ）得 $e^x\ge x+1$，对 x>−1 有 $(1+x)^n\le e^{nx}$，利用此结论进行巧妙赋值：

取 $x=\frac{k}{n}-1,k=1,2,\cdots,n$，则有

$$(\frac{1}{n})^n+(\frac{2}{n})^n+\cdots+(\frac{n}{n})^n\le(\frac{1}{e})^{n-1}+(\frac{1}{e})^{n-2}+\cdots+(\frac{1}{e})^1+(\frac{1}{e})^0=\frac{1-(\frac{1}{e})^n}{1-\frac{1}{e}}<\frac{1}{1-\frac{1}{e}}=\frac{e}{e-1}$$

即对于任意 $n\in N^*$，有 $\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^n<\frac{e}{e-1}.$

例 9 [解析] 引入一个结论：若 $b>a>0$ 则 $b^{n+1}-a^{n+1}<(n+1)b^n(b-a)$，（可通过构造一个等比数列求和放缩来证明，略）

整理上式得 $a^{n+1}>b^n[(n+1)a-nb].$（⊗），以 $a=1+\frac{1}{n+1},b=1+\frac{1}{n}$ 代入（⊗）式得

$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}>(1+\frac{1}{n})^n$.。即 $\{a_n\}$ 单调递增。以 $a=1,b=1+\frac{1}{2n}$ 代入（⊗）式得

$1>(1+\frac{1}{2n})^n\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow(1+\frac{1}{2n})^{2n}<4$.。此式对一切正整数 n 都成立，即对一切偶数有 $(1+\frac{1}{n})^n<4$，又因为数列 $\{a_n\}$

单调递增，所以对一切正整数 n 有 $(1+\frac{1}{n})^n<4$。

注：上述不等式可加强为 $2\le(1+\frac{1}{n})^n<3$. 简证如下： 利用二项展开式进行部分放缩：

$a_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+C_n^1\cdot\frac{1}{n}+C_n^2\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+C_n^n\frac{1}{n^n}$. 只取前两项有 $a_n\ge 1+C_n^1\cdot\frac{1}{n}=2$. 对通项作如下放缩：

$C_n^k\frac{1}{n^k}=\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}<\frac{1}{k!}\le\frac{1}{1\cdot 2\cdots 2}=\frac{1}{2^{k-1}}$. 故有 $a_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(1/2)^{n-1}}{1-1/2}<3$.

3. 部分放缩

例 10 ［解析］ $a_n=1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\cdots+\frac{1}{n^a}\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$.

又 $k^2=k\cdot k>k(k-1),k\ge 2$（只将其中一个 k 变成 $k-1$，进行部分放缩），$\therefore\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$,

于是 $a_n\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}<2$.

例 11 【解析】 (i) 用数学归纳法：当 $n=1$ 时显然成立，假设当 $n\ge k$ 时成立即 $a_k\ge k+2$，

则当 $n=k+1$ 时 $a_{k+1}=a_k(a_k-k)+1\ge a_k(k+2-k)+1\ge(k+2)\cdot 2+1>k+3$，成立。

(ii) 利用上述部分放缩的结论 $a_{k+1}\ge 2a_k+1$ 来放缩通项，可得

$$a_{k+1}+1\ge 2(a_k+1)\Rightarrow a_k+1\ge\cdots\ge 2^{k-1}(a_1+1)\ge 2^{k-1}\cdot 4=2^{k+1}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a_k+1}\le\frac{1}{2^{k+1}}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{i+1}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}\le\frac{1}{2}.$$

【注】上述证明 (i) 用到部分放缩，当然根据不等式的性质也可以整体放缩：$a_{k+1}\ge(k+2)(k+2-k)+1>k+3$；

证明 (ii) 就直接使用了部分放缩的结论 $a_{k+1}\ge 2a_k+1$。

例 12 ［简析］ 观察 $(\frac{2}{3})^n$ 的结构，注意到 $(\frac{3}{2})^n=(1+\frac{1}{2})^n$，展开得

$$(1+\frac{1}{2})^n=1+C_n^1\cdot\frac{1}{2}+C_n^2\cdot\frac{1}{2^2}+C_n^3\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\ge 1+\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{8}=\frac{(n+1)(n+2)+6}{8}$$

即 $(1+\frac{1}{2})^n>\frac{(n+1)(n+2)}{8}$，得证.

例 13［简析］本题有多种放缩证明方法，这里我们对（Ⅰ）进行减项放缩，有

法 1 用数学归纳法（只考虑第二步）$a^2{}_{k+1}=a_k^2+2+\frac{1}{a_k^2}>2k+1+2=2(k+1)+1$；

法 2 $a^2{}_{n+1}=a_n^2+2+\frac{1}{a_n^2}>a_n^2+2\Rightarrow a_{k+1}^2-a_k^2>2,k=1,2,\cdots,n-1$.

则 $a_n^2 - a_1^2 > 2(n-1) \Rightarrow a_n^2 > 2n+2 > 2n+1 \Rightarrow a_n > \sqrt{2n+1}$

例 14 [解析] （Ⅰ）$a=1$；（Ⅱ）由 $a_{n+1}=f(a_n)$，得 $a_{n+1}=a_n-\frac{3}{2}a_n^2=-\frac{3}{2}(a_n-\frac{1}{3})^2+\frac{1}{6}\le\frac{1}{6}$ 且 $a_n>0$.

用数学归纳法（只看第二步）：$a_{k+1}=f(a_k)$ 在 $a_k\in(0,\frac{1}{k+1})$ 是增函数，则得

$a_{k+1}=f(a_k)<f(\frac{1}{k+1})=\frac{1}{k+1}-\frac{3}{2}(\frac{1}{k+1})^2<\frac{1}{k+2}$.

例 15 [解析] 构造函数 $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$ 易知 $f(x)$ 在 $[\sqrt{a},+\infty)$ 是增函数。当 $n=k+1$ 时 $x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)$ 在 $[\sqrt{a},+\infty)$ 递增，故 $x_{k+1}>f(\sqrt{a})=\sqrt{a}$.。对(II)有 $x_n-x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n-\frac{a}{x_n}\right)$，构造函数 $f(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{x}\right)$

它在 $[\sqrt{a},+\infty)$ 上是增函数，故有 $x_n-x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n-\frac{a}{x_n}\right)\ge f(\sqrt{a})=0$，得证。

【注】①数列 $\{x_n\}$ 单调递减有下界因而有极限：$a_n\to\sqrt{a}(n\to+\infty)$.

② $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$ 是递推数列 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ 的母函数，研究其单调性对此数列本质属性具有重要的指导作用。

例 16 [简析] 令 $a_n=\sqrt[n]{n}=1+h_n$，这里 $h_n>0(n>1)$，则有

$n=(1+h_n)^n>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2\Rightarrow 0<h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}(n>1)$，从而有 $1<a_n=1+h_n<1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}$.

注：通过换元化为幂的形式，为成功运用二项展开式进行部分放缩起到了关键性的作用。

例 17 [简析] 令 $a=b+1$，则 $b>0$，$a-1=b$，应用二项式定理进行部分放缩有

$a^n=(b+1)^n=C_n^0b^n+C_n^1b^{n-1}+C_n^2b^{n-2}+\cdots+C_n^n>C_n^2b^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}b^2$,

注意到 $n\ge 2, n\in N$，则 $\frac{n(n-1)}{2}b^2\ge\frac{n^2b^2}{4}$（证明从略），因此 $a^n>\frac{n^2(a-1)^2}{4}$.

7 转化为加强命题放缩

例 18 [解析] 用数学归纳法推 $n=k+1$ 时的结论 $a_{n+1}>1$，仅用归纳假设 $a_k>1$ 及递推式

$a_{k+1}=\frac{1}{a_k}+a$ 是难以证出的，因为 a_k 出现在分母上！可以逆向考虑：$a_{k+1}=\frac{1}{a_k}+a>1\Leftarrow a_k<\frac{1}{1-a}$.

故将原问题转化为证明其加强命题：对一切正整数 n 有 $1<a_n<\frac{1}{1-a}$.（证略）

例 19 [简析] 将问题一般化：先证明其加强命题 $x_n\le\frac{n}{2}$. 用数学归纳法，只考虑第二步：

$x_{k+1}=x_k+\frac{x_k^2}{k^2}\le\frac{k}{2}+\frac{1}{k^2}\cdot(\frac{k}{2})^2=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}<\frac{k+1}{2}$.。因此对一切 $x\in N^*$ 有 $x_n\le\frac{n}{2}$.

例 20 [解析]：(1) 将条件变为：$1-\frac{n}{a_n}=\frac{1}{3}(1-\frac{n-1}{a_{n-1}})$，因此 $\{1-\frac{n}{a_n}\}$ 为一个等比数列，其首项为 $1-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$，

从而 $1-\frac{n}{a_n}=\frac{1}{3^n}$，据此得 $a_n=\frac{n\cdot 3^n}{3^n-1}$ $(n\ge 1)$ ……1°

(2) 证：据1°得，$a_1\cdot a_2\cdot\cdots a_n=\dfrac{n!}{(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\ \cdots\ (1-\frac{1}{3^n})}$，为证 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdots a_n<2\cdot n!$，

只要证 $n\in N^*$ 时有 $(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\ \cdots\ (1-\frac{1}{3^n})>\frac{1}{2}$ ……2° 显然，左端每个因式都是正数，先证明一个加强不等式：

对每个 $n\in N^*$，有 $(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\ \cdots\ (1-\frac{1}{3^n})\ge 1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n})$ ……3°

(用数学归纳法，证略) 利用3°得 $(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\ \cdots\ (1-\frac{1}{3^n})\ge 1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n})$

$=1-\dfrac{\frac{1}{3}(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n>\frac{1}{2}$。故2°式成立，从而结论成立。

8．分项讨论

例 21 [简析] (Ⅰ) 略，(Ⅱ) $a_n=\frac{2}{3}\left[2^{n-2}+(-1)^{n-1}\right]$；(Ⅲ) 由于通项中含有 $(-1)^n$，很难直接放缩，考虑分项讨论：

当 $n\ge 3$ 且 n 为奇数时

$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{2}(\frac{1}{2^{n-2}+1}+\frac{1}{2^{n-1}-1})=\frac{3}{2}\cdot\frac{2^{n-2}+2^{n-1}}{2^{2n-3}+2^{n-1}-2^{n-2}-1}<\frac{3}{2}\cdot\frac{2^{n-2}+2^{n-1}}{2^{2n-3}}=\frac{3}{2}\cdot(\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-1}})$ (减项放缩)，

于是，①当 $m>4$ 且 m 为偶数时，$\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}=\frac{1}{a_4}+(\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6})+\cdots+(\frac{1}{a_{m-1}}+\frac{1}{a_m})$

$<\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{m-2}})=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot(1-\frac{1}{2^{m-4}})<\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}.$

②当 $m>4$ 且 m 为奇数时，$\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}<\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}+\frac{1}{a_{m+1}}$ (添项放缩)

由①知 $\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}+\frac{1}{a_{m+1}}<\frac{7}{8}$.。由①②得证。

9．借助数学归纳法

例 22 [解析] 科学背景：直接与凸函数有关！(Ⅰ) 略，只证 (Ⅱ)：

考虑试题的编拟初衷，是为了考查数学归纳法，于是借鉴詹森不等式的证明思路有：

法1 (用数学归纳法)

(ⅰ) 当 n=1 时，由 (Ⅰ) 知命题成立。(ⅱ) 假定当 $n=k$ 时命题成立，即若正数 $p_1,p_2,\cdots,p_{2^k}$ 满足 $p_1+p_2+\cdots+p_{2^k}=1$，

则 $p_1\log_2 p_1 + p_2\log_2 p_2 + \cdots + p_{2^k}\log_2 p_{2^k} \geq -k.$

当 $n = k+1$ 时，若正数 $p_1, p_2, \cdots, p_{2^{k+1}}$ 满足 $p_1 + p_2 + \cdots + p_{2^{k+1}} = 1$,（*）

为利用归纳假设，将（*）式左边均分成前后两段：

令 $x = p_1 + p_2 + \cdots + p_{2^k}, q_1 = \dfrac{p_1}{x}, q_2 = \dfrac{p_2}{x}, \cdots, q_{2^k} = \dfrac{p_{2^k}}{x}.$

则 $q_1, q_2, \cdots, q_{2^k}$ 为正数，且 $q_1 + q_2 + \cdots + q_{2^k} = 1$.

由归纳假定知 $q_1\log_2 p_1 + p_2\log_2 p_2 + \cdots + q_{2^k}\log_2 q_{2^k} \geq -k.$

$$p_1\log_2 p_1 + p_2\log_2 p_2 + \cdots + p_{2^k}\log_2 p_{2^k} = x(q_1\log_2 q_1 + q_2\log_2 q_2 + \cdots + q_{2^k}\log_2 q_{2^k}$$

$$+\log_2 x) \geq x(-k) + x\log_2 x, \qquad (1)$$

同理，由 $p_{2^k+1} + p_{2^k+2} + \cdots + p_{2^{k+1}} = 1 - x$ 得

$$p_{2^k+1}\log_2 p_{2^k+1} + \cdots + p_{2^{k+1}}\log_2 p_{2^{k+1}} \geq (1-x)(-k) + (1-x)\log_2(1-x). \quad (2)$$

综合（1）（2）两式 $p_1\log_2 p_1 + p_2\log_2 p_2 + \cdots + p_{2^{k+1}}\log_2 p_{2^{k+1}}$

$$\geq [x + (1-x)](-k) + x\log_2 x + (1-x)\log_2(1-x) \geq -(k+1).$$

即当 $n = k+1$ 时命题也成立．根据（i）、（ii）可知对一切正整数 n 命题成立．

法 2 构造函数 $g(x) = x\log_2 x + (c-x)\log_2(c-x)$(常数 $c>0, x\in(0,c)$), 那么

$$g(x) = c\left[\frac{x}{c}\log_2\frac{x}{c} + \left(1-\frac{x}{c}\right)\log_2\left(1-\frac{x}{c}\right) + \log_2 c\right],$$

利用（Ⅰ）知，当 $\dfrac{x}{c} = \dfrac{1}{2}$ (即 $x = \dfrac{c}{2}$) 时, 函数 $g(x)$ 取得最小值.

对任意 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 都有 $x_1\log_2 x_1 + x_2\log_2 x_2 \geq 2\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}\log_2\dfrac{x_1+x_2}{2} = (x_1+x_2)[\log_2(x_1+x_2) - 1]$ ②

（②式是比①式更强的结果）．下面用数学归纳法证明结论．

（i）当 n=1 时，由（I）知命题成立．

（ii）设当 n=k 时命题成立，即若正数 $p_1, p_2, \cdots, p_{2^k}$ 满足 $p_1 + p_2 + \cdots + p_{2^k} = 1$, 有

$$p_1\log_2 p_1 + p_2\log_2 p_2 + \cdots + p_{2^k}\log_2 p_{2^k} \geq -k.$$

当 $n = k+1$ 时, $p_1, p_2, \cdots, p_{2^{k+1}}$ 满足 $p_1 + p_2 + \cdots + p_{2^{k+1}} = 1$.

令 $H = p_1\log_2 p_1 + p_2\log_2 p_2 + \cdots + p_{2^{k+1}-1}\log_2 p_{2^{k+1}-1} + p_{2^{k+1}}\log_2 p_{2^{k+1}}$

对（*）式的连续两项进行两两结合变成 2^k 项后使用归纳假设，并充分利用②式有

$$H \geq (p_1+p_2)[\log_2(p_1+p_2) - 1] + \cdots + (p_{2^{k+1}-1} + p_{2^{k+1}})[\log_2(p_{2^{k+1}-1} + p_{2^{k+1}}) - 1],$$

因为 $(p_1+p_2) + \cdots + (p_{2^{k+1}-1} + p_{2^{k+1}}) = 1$,

由归纳法假设 $(p_1+p_2)\log_2(p_1+p_2) + \cdots + (p_{2^{k+1}-1} + p_{2^{k+1}})\log_2(p_{2^{k+1}-1} + p_{2^{k+1}}) \geq -k$,

得 $H \geq -k - (p_1 + p_2 + \cdots + p_{2^{k+1}+1} + p_{2^{k+1}}) = -(k+1).$

即当 $n = k+1$ 时命题也成立．所以对一切正整数 n 命题成立．

【评注】(1) 式②也可以直接使用函数 $g(x)=x\log_2 x$ 下凸用（Ⅰ）中结论得到；

(2) 为利用归纳假设，也可对（*）式进行对应结合：$q_i = p_i + p_{2^{n-1}+i}$ 而变成 2^k 项；

(3) 本题用凸函数知识分析如下：先介绍詹森（jensen）不等式：若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的下凸函数，则

对任意 $x_i\in[a,b],\lambda_i>0(i=1,\cdots,n),\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$，有

$$f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n).$$

特别地，若 $\lambda_i=\dfrac{1}{n}$，则有 $f(\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n})\le\dfrac{1}{n}[f(x_1)+\cdots f(x_n)].$

若为上凸函数则改"≤"为"≥"。

由 $g(x)$ 为下凸函数得 $\dfrac{g(p_1)+g(p_2)+\cdots+g(p_{2^n})}{2^n}\ge g(\dfrac{p_1+p_2+\cdots+p_{2^n}}{2^n})$，又 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{2^n}=1$，

所以 $p_1\log_2p_1+p_2\log_2p_2+p_3\log_2p_3+\cdots+p_{2^n}\log_2p_{2^n}\ge2^ng(\dfrac{1}{2^n})\ge-n.$

(4) 本题可作推广如下：若正数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 满足 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$，则

$p_1\ln p_1+p_2\ln p_2+\cdots+p_n\ln p_n\ge-\ln n.$。简证：构造函数 $f(x)=x\ln x-x+1$，

易得 $f(x)\ge f(1)=0\Rightarrow x\ln x\ge x-1.\Rightarrow(np_i)\ln(np_i)\ge np_i-1\Rightarrow p_i\ln(np_i)\ge p_i-\dfrac{1}{n}.$

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}[p_i\ln(np_i)]\ge\sum p_i-1=0\Rightarrow\ln n+\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\ln p_i\ge0.$

10．构造辅助函数法

例 23 【解析】(1) 求导可得 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$ 上是增函数，$\therefore f_{\max}(x)=2;f_{\min}(x)=\dfrac{5}{2}-\ln2.$

(2)（数学归纳法证明）①当 $n=1$ 时，由已知成立；②假设当 $n=k$ 时命题成立，即 $-\dfrac{1}{2}<a_k<0$ 成立，

那么当 $n=k+1$ 时，由（1）得 $2^{1+a_{k+1}}=f(a_k)\in(\dfrac{5}{2}-\ln2,2)$，$\therefore\sqrt{2}<\dfrac{3}{2}<\dfrac{5}{2}-\ln2<2^{1+a_k+1}<2$，

$\dfrac{1}{2}<1+a_{k+1}<1$，$\therefore-\dfrac{1}{2}<a_{k+1}<0$，这就是说 $n=k+1$ 时命题成立。由①、②知，命题对于 $n\in N^*$ 都成立

(3) 由 $2^{1+a_{n+1}}-2^{1+a_n}=f(a_n)-2^{1+a_n}$，构造辅助函数 $g(x)=f(x)-2^{x+1}$，得

$g'(x)=f'(x)-2^{x+1}\ln2=(1-2^x-4^x)\ln4$，当 $-\dfrac{1}{2}<x<0$ 时，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<2^x<1,\dfrac{1}{2}<4^x<1.$

故 $1-2^x-4^x<1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}<0$，所以 $g'(x)<0$ 得 g(x) 在 $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$ 是减函数，

$\therefore$ g(x)>g(0)=f(0)-2=0，$\therefore f(a_n)-2^{1+a_n}>0$, 即 $2^{1+a_{n+1}}-2^{1+a_n}>0$，得 $a_{n+1}>a_n$。

例 24 【解析】（Ⅰ）$a_n=\dfrac{3^n}{3^n+2}$．（Ⅱ）提供如下两种思路：

思路 1 观察式子右边特征，按$\dfrac{1}{1+x}$为元进行配方，确定其最大值。

法 1 由（Ⅰ）知$a_n=\dfrac{3^n}{3^n+2}>0$，$\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}\left(\dfrac{2}{3^n}-x\right)$

$$=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}+1-1-x\right)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left[\frac{1}{a_n}-(1+x)\right]=-\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{2}{1+x}$$

$$=-\frac{1}{a_n}\left(\frac{1}{1+x}-a_n\right)^2+a_n\leqslant a_n$$，∴原不等式成立．

思路 2 将右边看成是关于 x 的函数，通过求导研究其最值来解决：

法 2 设$f(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}\left(\dfrac{2}{3^n}-x\right)$，则

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{-(1+x)^2-\left(\frac{2}{3^n}-x\right)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^2}=\frac{2\left(\frac{2}{3^n}-x\right)}{(1+x)^2}$$

$\because x>0$，∴当$x<\dfrac{2}{3^n}$时，$f'(x)>0$；当$x>\dfrac{2}{3^n}$时，$f'(x)<0$，

∴当$x=\dfrac{2}{3^n}$时，$f(x)$取得最大值$f\left(\dfrac{2}{3^n}\right)=\dfrac{1}{1+\frac{2}{3^n}}=a_n$．∴原不等式成立．

（Ⅲ）思路 1 考虑本题是递进式设问，利用（Ⅱ）的结论来探究解题思路：

由（Ⅱ）知，对任意的$x>0$，有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3}-x\right)+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^2}-x\right)+\cdots+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)$$

$=\dfrac{n}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\cdots+\dfrac{2}{3^n}-nx\right)$．∴取$x=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\cdots+\dfrac{2}{3^n}\right)=\dfrac{\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{3}\right)}=\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$，

则$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant\dfrac{n}{1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}=\dfrac{n^2}{n+1-\frac{1}{3^n}}>\dfrac{n^2}{n+1}$．∴原不等式成立．

【注】本解法的着眼点是对上述不等式中的 x 进行巧妙赋值，当然，赋值方法不止一种，如：还可令$x=\dfrac{1}{n}$，得

$$\frac{n}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n}-nx\right)=\frac{n}{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}\left(1-\frac{1}{3^n}-n\cdot\frac{1}{n}\right)=\frac{n^2}{n+1}+\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}\cdot\frac{1}{3^n}>\frac{n^2}{n+1}.$$

思路 2 所证不等式是与正整数 n 有关的命题，能否直接用数学归纳法给予证明？尝试：

$\Leftrightarrow \dfrac{3^1}{3^1+2}+\dfrac{3^2}{3^2+2}+\cdots+\dfrac{3^n}{3^n+2}>\dfrac{n^2}{n+1}$.（1）当 $n=1$ 时 $\dfrac{3^1}{3^1+2}=\dfrac{3}{5}>\dfrac{1}{2}=\dfrac{1^2}{1+1}$，成立；

（2）假设命题对 $n=k$ 成立，即 $\dfrac{3^1}{3^1+2}+\dfrac{3^2}{3^2+2}+\cdots+\dfrac{3^k}{3^k+2}>\dfrac{k^2}{k+1}$.

则当 $n=k+1$ 时，有 $\dfrac{3^1}{3^1+2}+\dfrac{3^2}{3^2+2}+\cdots+\dfrac{3^k}{3^k+2}+\dfrac{3^{k+1}}{3^{k+1}+2}>\dfrac{k^2}{k+1}+\dfrac{3^{k+1}}{3^{k+1}+2}$，

只要证明 $\dfrac{k^2}{k+1}+\dfrac{3^{k+1}}{3^{k+1}+2}>\dfrac{(k+1)^2}{k+2}$；即证 $\dfrac{3^{k+1}}{3^{k+1}+2}>\dfrac{(k+1)^2}{k+2}-\dfrac{k^2}{k+1}=\dfrac{(k+1)^3-k^2(k+2)}{(k+2)(k+1)}=\dfrac{k^2+3k+1}{k^2+3k+2}$，

即证 $\dfrac{3^{k+1}+2-2}{3^{k+1}+2}>\dfrac{k^2+3k+2-1}{k^2+3k+2}\Leftrightarrow\dfrac{2}{3^{k+1}+2}<\dfrac{1}{k^2+3k+2}\Leftrightarrow 3^{k+1}+2>2(k^2+3k+2)$

用二项式定理（展开式部分项）证明，再验证前几项即可。如下证明是否正确，请分析：易于证明 $a_n=\dfrac{3^n}{3^n+2}>\dfrac{n}{n+1}$ 对任意 $n\in N^*$ 成立；于是 $\sum a_n=\sum\dfrac{3^n}{3^n+2}>\sum\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{n^2}{n+1}$.

【注】上述证明是错误的！因为：$f(k)=\dfrac{k}{k+1}$ 是递增的，不能逐步"缩小"到所需要的结论。可修改如下：

考虑 $\dfrac{n^2}{n+1}$ 是某数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，则 $b_n=\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{(n-1)^2}{n}=\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n}$，

只要证明 $a_k>b_k\Leftrightarrow\dfrac{3^k}{3^k+2}>\dfrac{k^2+k-1}{k^2+k}\Leftrightarrow 3^k>2k^2+2k-2$.

思路 3　深入观察所证不等式的结构特征，利用均值不等式可得如下妙证：

由 $a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+1}$ 取倒数易得：$a_n=\dfrac{3^n}{3^n+2}>0$，用 n 项的均值不等式：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{n}{1+\frac{2}{3^1}+1+\frac{2}{3^2}+\cdots+1+\frac{2}{3^n}}=\frac{n}{n+\frac{2}{3^1}\frac{[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{n}{n+1-\frac{1}{3^n}}>\frac{n}{n+1},$$

$$\Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_n>\frac{n^2}{n+1}.$$

例 25 【解析】(Ⅰ) $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+1}{2x_n}$.（Ⅱ）使不等式 $x_{n+1}\le x_n$ 对一切正整数 n 都成立的充要条件是 $x_1\geq 1$.

(Ⅲ) 基本思路：寻求合适的放缩途径。

探索 1 着眼于通项特征，结合求证式特点，尝试进行递推放缩：

$$1+x_{n+1}=\frac{(x_n+1)^2}{2x_n}\Rightarrow\frac{1}{1+x_n}=\frac{2x_{n-1}}{(1+x_{n-1})^2}=\frac{2(x_{n-1}+1)-2}{(1+x_{n-1})^2}\le\frac{2}{1+x_{n-1}}\ (n\ge 2)$$

即 $\dfrac{1}{1+x_n}\le\dfrac{2}{1+x_{n-1}}\ (n\ge 2)$。于是由此递推放缩式逐步放缩得 $\dfrac{1}{1+x_n}\le\dfrac{2}{1+x_{n-1}}\le\dfrac{2^2}{1+x_{n-2}}\le\cdots\le\dfrac{2^{n-1}}{1+x_1}=\dfrac{2^{n-1}}{3}$.

探索 2 从求证式特征尝试分析：结论式可作如下变形：

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\le\frac{1}{3}(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})=\frac{2^n-1}{3}.$$ 逆向思考，猜想应有：$\frac{1}{1+x_n}\le\frac{2^{n-1}}{3}$.（用数学归纳法证明，略）。

探索 3 探索过渡"桥"，寻求证明加强不等式：由（2）知 $x_n\geqslant1$，由此得 $\frac{1}{1+x_n}\le\frac{1}{2}(n\ge2)$。有

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\le\frac{1}{3}+\frac{n-1}{2}.$$ 尝试证明 $\frac{1}{3}+\frac{n-1}{2}\le\frac{2^n-1}{3}\Leftrightarrow 2^{n+1}\ge3n+1.$

证法 1（数学归纳法，略）；

法 2 （用二项展开式部分项）：当 n≥2 时 $2^n=(1+1)^n\geqslant C_n^0+C_n^1+C_n^2=\frac{n^2+n+2}{2}$

$$2^n-\frac{3n+1}{2}\ge\frac{n^2+n+2-3n-1}{2}=\frac{(n-1)^2}{2}\ge0.$$ 此题还可发现一些放缩方法，如：

$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}<n(n\in N^*)$。（每一项都小于 1），而再证 $n\le\frac{2^n-1}{3}$ 即 $2^n\ge3n+1$，则需要归纳出条件 n≥4.（前 4 项验证即可）

技巧积累:(1) $\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$ (2) $\frac{1}{C_{n+1}^1C_n^2}=\frac{2}{(n+1)n(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n+1)}$

(3) $T_{r+1}=C_n^r\cdot\frac{1}{n^r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{1}{n^r}<\frac{1}{r!}<\frac{1}{r(r-1)}=\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r}(r\ge2)$

(4) $(1+\frac{1}{n})^n<1+1+\frac{1}{2\times1}+\frac{1}{3\times2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}<\frac{5}{2}$

(5) $\frac{1}{2^n(2^n-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^n}$ (6) $\frac{1}{\sqrt{n+2}}<\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

(7) $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ (8) $\left(\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{(2n+1)\cdot2^{n-1}}-\frac{1}{(2n+3)\cdot2^n}$

(9) $\frac{1}{k(n+1-k)}=\left(\frac{1}{n+1-k}+\frac{1}{k}\right)\frac{1}{n+1},\frac{1}{n(n+1+k)}=\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1+k}\right)$

(10) $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$ (11) $\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+\sqrt{n-\frac{1}{2}}}$

(11) $\frac{2^n}{(2^n-1)^2}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^n-1)}<\frac{2^n}{(2^n-1)(2^n-2)}=\frac{2^{n-1}}{(2^n-1)(2^{n-1}-1)}=\frac{1}{2^{n-1}-1}-\frac{1}{2^n-1}(n\ge2)$

(12) $\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{\sqrt{n\cdot n^2}}<\frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n+1)}}=\left(\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}-\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

(13) $2^{n+1}=2\cdot2^n=(3-1)\cdot2^n>3\Rightarrow3(2^n-1)>2^n\Rightarrow2^n-1>\frac{2^n}{3}\Rightarrow\frac{1}{2^n-1}<\frac{2^n}{3}$

(14) $\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}$ (15) $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}(n\ge2)$

(15) $\frac{\sqrt{i^2+1}-\sqrt{j^2+1}}{i-j}=\frac{i^2-j^2}{(i-j)(\sqrt{i^2+1}+\sqrt{j^2+1})}=\frac{i+j}{\sqrt{i^2+1}+\sqrt{j^2+1}}<1$