浅谈向量混合积的应用

摘要　向量代数在数学学习过程中有着很重要的作用，本文重点列举了向量的混合积在微分几何、立体几何、空间解析几何及数学分析等方面的应用，从而体现了向量的混合积应用的广泛性　.

关键词　向量；混合积

向量的混合积在实际应用中在不同的方面都有着广泛的作用，　　下面就混合积在各领域的运用予以举例说明　.

混合积的定义　给定空间的三个矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，如果先做前两个矢量 $\vec{a}$和$\vec{b}$的失性积，再做所得的矢量与第三个矢量 $\vec{c}$的数性积，最后得到的这个数叫做三矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的混合积，记做 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$或$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$或$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

性质 1 三个不共面矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的混合积的绝对值等于以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积 V，并且当 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$构成右手系时混合积是正数；当 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$构成左手系时，混合积是负数，也就是有

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\varepsilon V,$$

当 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$是右手系时 $\varepsilon=1$; 当 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$是左手系时 $\varepsilon=-1$.

性质 2 三矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面的充要条件是 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$.

性质 3 轮换混合积的三个因子，并不改变它的值，对调任何两个因子要改变乘积符号，即

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=(\vec{b}\vec{c}\vec{a})=(\vec{c}\vec{a}\vec{b})=-(\vec{b}\vec{a}\vec{c})=-(\vec{c}\vec{b}\vec{a})=-(\vec{a}\vec{c}\vec{b}).$$

推论　$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

性质 3 如果 $\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k},\vec{b}=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k},\vec{c}=X_3\vec{i}+Y_3\vec{j}+Z_3\vec{k}$，那么

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}.$$

一、在微分几何中的应用

引理 1 向量函数 $\vec{r}(t)$具有固定长的充要条件是对于　t 的每个值，　$\vec{r}'(t)$都与 $\vec{r}(t)$垂直.

证明　（必要性）若 $\left|\vec{r}(t)\right|$ =常数，则有 $\vec{r}^{\,2}(t)=\left|\vec{r}(t)\right|^2$ =常数，等号两边求微分有 $2\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)=0$, 故 $\vec{r}(t)\perp\vec{r}\,'(t)$.

（充分性）若 $\vec{r}(t)\perp\vec{r}\,'(t)$ 则 $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)=0$, 即 $\dfrac{d\vec{r}^{\,2}(t)}{dt}=0$，故 $\vec{r}^{\,2}(t)$=常数，即 $\vec{r}(t)$ 有固定长 .

引理 2 向量函数 $\vec{r}(t)$ 具有固定方向的充要条件是对于 t 的每个值，$\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}(t)=\vec{0}$.

证明　（必要性）若 $\vec{r}(t)$ 具有固定方向，则可设 $\vec{r}(t)=\lambda(t)\vec{a}$ （$\vec{a}$ 为单位常向量）

$$\vec{r}\,'(t)=\lambda'(t)\vec{a}+\lambda(t)\vec{a}\,'=\lambda'(t)\vec{a}$$

$$\vec{r}\times\vec{r}\,'(t)=\lambda(t)\vec{a}\times\lambda'(t)\vec{a}=\lambda(t)\cdot\lambda'(t)\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}.$$

（充分性）若 $\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}(t)=\vec{0}$，设 $\vec{r}(t)=\lambda(t)\vec{a}(t)$ （$\vec{a}(t)$ 为单位向量，需证 $\vec{a}\,'(t)=\vec{0}$）

$$\vec{r}\,'(t)=\lambda'(t)\vec{a}(t)+\lambda(t)\vec{a}\,'(t)$$

又因为 $\vec{r}\times\vec{r}\,'(t)=\lambda(t)\cdot\lambda'(t)\vec{a}(t)\times\vec{a}(t)+\lambda^2(t)\vec{a}(t)\times\vec{a}\,'(t)=\lambda^2(t)\vec{a}(t)\times\vec{a}\,'(t)=\vec{0}$

所以 $\vec{a}(t)\times\vec{a}\,'(t)=\vec{0}$

而 $[\vec{a}(t)\times\vec{a}\,'(t)]^2=[\vec{a}(t)\times\vec{a}\,'(t)]\cdot[\vec{a}(t)\times\vec{a}\,'(t)]=\vec{a}^{\,2}(t)\cdot\vec{a}\,'^2(t)-[\vec{a}(t)\cdot\vec{a}\,'(t)]^2=\vec{0}.$

又因为 $\vec{a}(t)$ 为单位向量，故 $\vec{a}^{\,2}(t)=1$，由引理 1 又有 $\vec{a}(t)\cdot\vec{a}\,'(t)=\vec{0}$

故 $[\vec{a}(t)\times\vec{a}\,'(t)]^2=\vec{a}\,'^2(t)=0$,

即 $\vec{a}\,'(t)=\vec{0}$,

所以 $\vec{a}(t)$ =常向量 ,

即 $\vec{r}(t)=\lambda(t)\vec{a}$ （$\vec{a}$ 为单位常向量），$\vec{r}(t)$ 具有固定方向 .

定理 1 向量函数 $\vec{r}(t)$ 平行于固定平面的充要条件是对于 t 的每个值，

$(\vec{r},\vec{r}',\vec{r}'')=0.$

证明 （必要性）设固定平面的单位法向量为 $\vec{n}$，依题意 $\vec{r}(t)\perp\vec{n}$，则 $\vec{r}(t)\cdot\vec{n}=0$，从而 $\vec{r}'(t)\cdot\vec{n}=0,\vec{r}''(t)\cdot\vec{n}=0$，即 $\vec{r}(t)$，$\vec{r}'(t)$，$\vec{r}''(t)$ 与 $\vec{n}$ 都垂直，它们共面，故 $(\vec{r},\vec{r}',\vec{r}'')=0.$

（充分性）由已知 $\vec{r}(t)$，$\vec{r}'(t)$，$\vec{r}''(t)$ 共面，若 $\vec{r}(t)$，$\vec{r}'(t)$ 共线，即 $\vec{r}(t)\times\vec{r}'(t)=\vec{0}$．又因为 $\vec{r}(t)\neq\vec{0}$，由引理 2 可知 $\vec{r}(t)$ 具有固定方向，故 $\vec{r}(t)$ 平行于固定平面．

若 $\vec{r}(t)$，$\vec{r}'(t)$ 不共线，即 $\vec{r}(t)\times\vec{r}'(t)\neq\vec{0}$，则由 $\vec{r}(t)$，$\vec{r}'(t)$，$\vec{r}''(t)$ 共面则有

$$\vec{r}''(t)=\lambda(t)\vec{r}(t)+\mu(t)\vec{r}'(t)，\text{记 } \vec{n}(t)=\vec{r}(t)\times\vec{r}'(t),\text{则}$$

$\vec{n}'(t)=[\vec{r}(t)\times\vec{r}'(t)]'=\vec{r}'(t)\times\vec{r}'(t)+\vec{r}(t)\times\vec{r}''(t)=\vec{r}(t)\times\vec{r}''(t)=\mu(t)\vec{r}(t)\times\vec{r}'(t)=\mu(t)\vec{n}(t)$，从而 $\vec{n}(t)\times\vec{n}'(t)=\vec{0}$,，但 $\vec{n}'(t)\neq\vec{0}$,故由引理 2 得 $\vec{n}(t)$ 具有固定方向，$\vec{n}(t)=\vec{n}_0$（常向量）

又 $\vec{r}(t)\perp\vec{n}_0$，故 $\vec{r}(t)$ 平行于以 $\vec{n}_0$ 为法方向的平面，$\vec{r}(t)$ 平行于固定平面．

二、在立体几何中的应用

1 求解体积问题

定理 三个不共面的向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积的绝对值是以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积．

例 1 求证平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的体积是以 AC,AD',AB' 为棱的平行六面体的体积的一半．

证明 设平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的体积为 V，以 AC,AD',AB' 为棱的平行六面体的体积记为 V'.

又设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$，则

$$V'=\left|(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{AB'})\right|$$

$$=\left|(\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a})\right|$$

$$=\left|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}+\vec{a})\right|$$

$$=\left|(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{c}+\vec{a})\right|$$

$$=\left|\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\times\vec{c}\cdot\vec{c}+\vec{a}\times\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a}\right|$$

$$=2\left|\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}\right|$$

$$=2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

$=2V$ 命题得证 .

2 求异面直线的距离

定理 设两条异面直线 L_1, L_2 的方程分别为

$$L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

$$L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

其中 $\vec{s_1}=(m_1,n_1,p_1), \vec{s_2}=(m_2,n_2,p_2)$ 分别是直线 L_1, L_2 的方向向量， $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ， $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 分别是直线 L_1, L_2 上的已知点，则异面直线是我距离为

$$d=\frac{\left|(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\vec{s_1}\times\vec{s_2}\right|}=\frac{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & j & k \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}}$$

例 2 设空间两条异面直线 L_1, L_2 的方程分别为

$$L_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$$

$$L_2:\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-1}$$

解 两条直线的方向向量分别为 $\vec{s_1}=(1,1,2), \vec{s_2}=(3,2,-1)$ ，两条直线分别过点 $M_1(2,3,4)$ ， $M_1(-1,1,0)$ ，得 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,-2,-4)$, 所以三向量 $\vec{s_1}$ ， $\vec{s_2}$ ， $\overrightarrow{M_1M_2}$ 不共面，由定理得

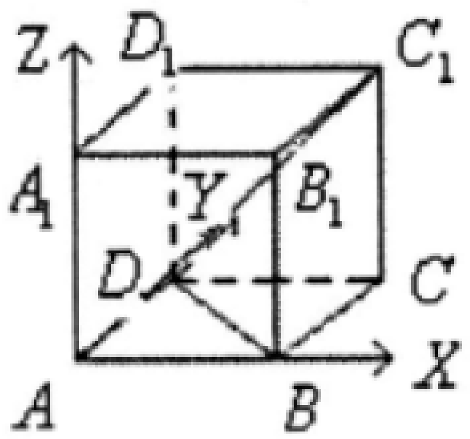
$$d=\frac{\left|(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\vec{s_1}\times\vec{s_2}\right|}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\3&2&-1\\-3&-2&-1\end{vmatrix}}{\left|\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&2\\3&2&-1\end{vmatrix}\right|}=\frac{5}{\sqrt{62}}=\frac{5\sqrt{62}}{62}$$

所以两条异面直线之间的距离为

$$d=\frac{5\sqrt{62}}{62}.$$

例 3 已知 AC_1 为棱长为 a 的正方体，求异面直线 BD 和 AC_1 之间的距离．

解 如图



建立如图所示的坐标系，易得异面直线 BD 和 AC_1 的方程分别为

$$AC_1:\frac{x-0}{a}=\frac{y-0}{a}=\frac{z-0}{a}$$

$$BD:\frac{x-0}{-a}=\frac{y-0}{a}=\frac{z-0}{0}$$

所以三个不共面的向量分别为 $\overrightarrow{AC_1}=(a,a,a)$, $\overrightarrow{BD}=(-a,a,0)$, $\overrightarrow{AB}=(a,0,0)$．根据定理得

$$d=\frac{\left|(\overrightarrow{AC_1}\times\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AC_1}\times\overrightarrow{BD}\right|}=\frac{\sqrt{6}}{6}a.$$

计算结果与中学立体几何中求得的结果完全一致，但是用向量代数知识处理更加方便、快捷．

三、在空间解析几何中的应用

在空间解析几何中的应用我们主要看看一题多解的情况，从而来看混合积解题的优点．

例 4 一直线通过 $A(-3,5,-9)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases}y=3x+5\\z=2x-3\end{cases}$, $L_2:\begin{cases}y=4x-7\\z=5x+10\end{cases}$ 相

交，求此直线方程 .

解 1 过点 A 与直线 L_1, L_2 分别决定两个平面 π_1 与 π_2，则这两个平面的交线即为所求 .

将 L_1 化为对称式,

$$L_1: x=\frac{y-5}{3}=\frac{z+3}{2}, \text{方向向量 } \vec{a}=(1,3,2)$$

在 L_1 上取一点 $P_1=(0,5,-3)$，则 $\overrightarrow{AP_1}=(3,0,6)$

所以过点 A 与直线 L_1 的平面 π_1 的法向量 $\vec{n}_1=\vec{a}\times\overrightarrow{AP_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 6\end{vmatrix}=(18,0,-9)$

因而平面 π_1 的方程为 $18(x+3)-9(z+9)=0$，即

$$2x-z-3=0.$$

同理，过点 A 与直线 L_2 所确定的平面 π_2 的方程为；

$$34x-y-6z+53=0.$$

即所求直线方程为

$$\begin{cases} 2x-z-3=0\\ 34x-y-6z+53=0\end{cases}.$$

解 2 应用平面束方程来求解 ，

过直线 L_1 的平面方程为 $2x-z-3+\lambda(3x-y+5)=0$ （1）（λ 为任意实数)，又点 $A(-3,5,-9)$ 在平面上，将点 A 带入（1），得 $\lambda=0$.

所以平面 $\pi_1: 2x-z-3=0.$

过直线 L_2 的平面方程为 $4x-y-7+\mu(5x-z+10)=0$ （2）（μ 为任意实数)，又点 $A(-3,5,-9)$ 在平面上，将点 A 带入（2），得 $\mu=6$.

所以平面 $\pi_2: 34x-y-6z+53=0.$

从而所求直线方程为 $\begin{cases} 2x-z-3=0\\ 34x-y-6z+53=0\end{cases}.$

解 3 应用混合积求解

在所求直线上任取一点 $P(x,y,z)$，在 L_1 上取一点 $P_1=(0,5,-3)$， L_1 的方向向

量为 $\vec{a}=(1,3,2)$，则三向量 $\vec{AP},\vec{AP_1},\vec{a}$ 共面，从而混合积 $(\vec{AP},\vec{AP_1},\vec{a})=0$. 即

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-5 & z+9 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0，\text{即 } \pi_1: 2x-z-3=0.$$

同理在 L_2 上取一点 $P_2=(0,-7,10)$，L_2 的方向向量为 $\vec{a}=(1,4,5)$，则三向量 $\vec{AP},\vec{AP_2},\vec{a}$ 共面，从而混合积 $(\vec{AP},\vec{AP_2},\vec{a})=0$. 即

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-5 & z+9 \\ 3 & -12 & 19 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0，\text{即 } \pi_2: 34x-y-6z+53=0.$$

所以所求直线方程为 $\begin{cases} 2x-z-3=0 \\ 34x-y-6z+53=0 \end{cases}$.

四、在数学分析中的应用

利用混合积证明三重积分的变量代换

引理 1 设 $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ 是三个线性无关的向量，又设 $\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3}$ 是任意三个向量，

且

$$\begin{cases} \vec{\alpha_1}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3} \\ \vec{\alpha_2}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+b_3\vec{e_3} \\ \vec{\alpha_3}=c_1\vec{e_1}+c_2\vec{e_2}+c_3\vec{e_3} \end{cases}$$

那么

$$(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$$

证明 先作向量积 $\vec{\alpha_1}\times\vec{\alpha_2}$ 的运算，

$$\vec{\alpha_1}\times\vec{\alpha_2}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3})\times(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+b_3\vec{e_3})$$

$$=a_1b_1(\vec{e_1}\times\vec{e_1})+a_2b_1(\vec{e_2}\times\vec{e_1})+a_3b_1(\vec{e_3}\times\vec{e_1})$$

$$+a_1b_2(\vec{e_1}\times\vec{e_2})+a_2b_2(\vec{e_2}\times\vec{e_2})+a_3b_2(\vec{e_3}\times\vec{e_2})$$

$$+a_1b_3(\vec{e_1}\times\vec{e_3})+a_2b_3(\vec{e_2}\times\vec{e_3})+a_3b_3(\vec{e_3}\times\vec{e_3})$$

$$=(a_1b_2-a_2b_1)\vec{e_1}\times\vec{e_1}+(a_1b_3-a_3b_1)\vec{e_1}\times\vec{e_3}+(a_2b_3-a_3b_2)\vec{e_2}\times\vec{e_3}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}(\vec{e_1}\times\vec{e_2})+\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}(\vec{e_1}\times\vec{e_3})+\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}(\vec{e_2}\times\vec{e_3})$$

这里设

$$A=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix},B=\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix},C=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

再把 $\vec{\alpha_1}\times\vec{\alpha_2}$ 与 $\vec{\alpha_3}$ 作数量积运算

$$(\vec{\alpha_1}\times\vec{\alpha_2})\cdot\vec{\alpha_3}=(A(\vec{e_1}\times\vec{e_2})+A(\vec{e_1}\times\vec{e_3})+C(\vec{e_2}\times\vec{e_3}))\cdot(c_1\vec{e_1}+c_2\vec{e_2}+c_3\vec{e_3})$$

$$\begin{aligned}&=c_1A(\vec{e_1}\times\vec{e_2})\cdot\vec{e_1}+c_1B(\vec{e_1}\times\vec{e_3})\cdot\vec{e_1}+c_1C(\vec{e_2}\times\vec{e_3})\cdot\vec{e_1}\\&+c_2A(\vec{e_1}\times\vec{e_2})\cdot\vec{e_1}+c_2B(\vec{e_1}\times\vec{e_3})\cdot\vec{e_1}+c_2C(\vec{e_2}\times\vec{e_3})\cdot\vec{e_1}\\&+c_3A(\vec{e_1}\times\vec{e_2})\cdot\vec{e_1}+c_3B(\vec{e_1}\times\vec{e_3})\cdot\vec{e_1}+c_3C(\vec{e_2}\times\vec{e_3})\cdot\vec{e_1}\\&=c_1C(\vec{e_2}\times\vec{e_3})\cdot\vec{e_1}+c_2B(\vec{e_1}\times\vec{e_3})\cdot\vec{e_2}+c_3A(\vec{e_1}\times\vec{e_2})\cdot\vec{e_3}\end{aligned}$$

即

$$(\vec{\alpha_1}\times\vec{\alpha_2})\cdot\vec{\alpha_3}=c_1\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}((\vec{e_2}\times\vec{e_3})\cdot\vec{e_1})+c_2\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}((\vec{e_1}\times\vec{e_3})\cdot\vec{e_2})+c_3\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}((\vec{e_1}\times\vec{e_2})\cdot\vec{e_3})$$

这里

$$(\vec{e_2}\times\vec{e_3})\cdot\vec{e_1}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$$

$$(\vec{e_1}\times\vec{e_3})\cdot\vec{e_2}=-(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$$

所以

$$(\vec{\alpha_1}\times\vec{\alpha_2})\cdot\vec{\alpha_3}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}(\vec{e_1}\times\vec{e_2})\cdot\vec{e_3}$$

即

$$(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\quad \text{证毕}.$$

例 5 利用坐标变换证明下面命题

设函数 $x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)$ 在 uvw空间某个闭区间 Ω' 上有连续的一阶偏导数，变换

$$T:\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \qquad (u,v,w) \in \Omega'$$

把 Ω' 一对一的变换到 xyz 空间上的闭区域 Ω，又

$$P = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

在 Ω' 上恒不为零，设 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域 Ω 上连续，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw\,.$$

证明　由变换 T 可得到函数的全微分计算

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u}du + \dfrac{\partial x}{\partial v}dv + \dfrac{\partial x}{\partial w}dw \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial u}du + \dfrac{\partial y}{\partial v}dv + \dfrac{\partial y}{\partial w}dw \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}du + \dfrac{\partial z}{\partial v}dv + \dfrac{\partial z}{\partial w}dw \end{cases}$$

将 dx,dy,dz,du,dv,dw 都看作向量，再根据引理 1 有

$$(\vec{dx},\vec{dy},\vec{dz}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} (\vec{du},\vec{dv},\vec{dw}) = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| (\vec{du},\vec{dv},\vec{dw}).$$

上式的左端就是在空间直角坐标系中以 $\vec{dx},\vec{dy},\vec{dz}$ 为棱的体积元，经过坐标变换后就成为 uvw 空间坐标系中的体积元 $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|(du,dv,dw)$，这样就得到三重积分的坐标变换式

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw\,.$$