

总论：

一、知识点归纳

二、常见题型分析

三、排列组合解题备忘录

1. 分类讨论的思想

2. 等价转化的思想

3. 容斥原理与计数

4. 模型构造思想

四、排列组合中的 8 大典型错误

1. 没有理解两个基本原理出错

2. 判断不出是排列还是组合出错

3. 重复计算出错

4. 遗漏计算出错

5. 忽视题设条件出错

6. 未考虑特殊情况出错

7. 题意的理解偏差出错

8. 解题策略的选择不当出错

五、排列组合 24 种解题技巧

1. 排序问题

相邻问题捆绑法

相离问题插空排

定序问题缩倍法（插空法）

定位问题优先法

多排问题单排法

圆排问题单排法

可重复的排列求幂法

全错位排列问题公式法

2. 分组分配问题

平均分堆问题去除重复法（平均分配问题）

相同物品分配的隔板法

全员分配问题分组法

有序分配问题逐分法

3. 排列组合中的解题技巧

至多至少间接法

染色问题合并单元格法

交叉问题容斥原理法

构造递推数列法

六. 排列组合中的基本模型

分组模型（分堆模型）

错排模型

染色问题

一. 知识点归纳 :

1. 排列的概念: 从 n 个不同元素中, 任取 m ($m \leq n$) 个元素 (这里的被取元素各不相同) 按照一定的顺序排成一行, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

2. 排列数的定义: 从 n 个不同元素中, 任取 m ($m \leq n$) 个元素的所有排列的个数叫做从 n 个元素中取出 m 元素的排列数, 用符号 A_n^m 表示.

3. 排列数公式: $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ ($m, n \in \mathbb{N}^*, m \leq n$)

4. 阶乘: $n!$ 表示正整数 1 到 n 的连乘积, 叫做 n 的阶乘. 规定 $0! = 1$.

5. 排列数的另一个计算公式: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

6. 组合的概念: 一般地, 从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素并成一组, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 元素的一个组合.

7. 组合数的概念: 从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有组合的个数, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数. 用符号 C_n^m 表示.

8. 组合数公式: $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$

或 $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ($n, m \in \mathbb{N}^*,$ 且 $m \leq n$).

9. 组合数的性质 1: $C_n^m = C_n^{n-m}$. 规定: $C_n^0 = 1$;

10. 组合数的性质 2: $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$.

$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$; $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$

11. “16 字方针”是解决排列组合问题的基本规律, 即: 分类相加, 分步相乘, 有序排列, 无序组合.

12. “2 1 个技巧”是迅速解决排列组合的捷径

二. 基本题型讲解 :

例 1 分别求出符合下列要求的不同排法的种数

- (1) 6 名学生排 3 排, 前排 1 人, 中排 2 人, 后排 3 人;
- (2) 6 名学生排成一排, 甲不在排头也不在排尾;
- (3) 从 6 名运动员中选出 4 人参加 4×100 米接力赛, 甲不跑第一棒, 乙不跑第四棒;
- (4) 6 人排成一排, 甲、乙必须相邻;
- (5) 6 人排成一排, 甲、乙不相邻;
- (6) 6 人排成一排, 限定甲要排在乙的左边, 乙要排在丙的左边 (甲、乙、丙可以不相邻)

解: (1) 分排坐法与直排坐法一一对应, 故排法种数为 $A_6^6 = 720$

(2) 甲不能排头尾，让受特殊限制的甲先选位置，有 A_4^1 种选法，然后其他 5 人选，有 A_5^5 种选法，故排法种数为 $A_4^1 A_5^5 = 480$

(3) 有两棒受限制，以第一棒的人选来分类：

乙跑第一棒，其余棒次则不受限制，排法数为 A_5^3 ；

乙不跑第一棒，则跑第一棒的人有 A_4^1 种选法，第四棒除了乙和第一棒选定的人外，也有 A_4^1 种选法，其余两棒次不受限制，故有 $A_4^1 A_4^1 A_2^2$ 种排法，

由分类计数原理，共有 $A_5^3 + A_4^1 A_4^1 A_2^2 = 252$ 种排法

(4) 将甲乙“捆绑”成“一个元”与其他 4 人一起作全排列共有 $A_2^2 A_5^5 = 240$ 种排法

(5) 甲乙不相邻，第一步除甲乙外的其余 4 人先排好；第二步，甲、乙选择已排好的 4 人的左、右及之间的空挡插位，共有 $A_4^4 A_5^2$ (或用 6 人的排列数减去问题 (2) 后排列数为 $A_6^6 - 240 = 480$)

(6) 三人的顺序定，实质是从 6 个位置中选出三个位置，然后排按规定的顺序放置这三人，其余 3 人在 3 个位置上全排列，故有排法 $C_6^3 A_3^3 = 120$ 种

点评：排队问题是一类典型的排列问题，常见的附加条件是定位与限位、相邻与不相邻

例 2 假设在 100 件产品中有 3 件是次品，从中任意抽取 5 件，求下列抽取方法各多少种？

(1) 没有次品；(2) 恰有两件是次品；(3) 至少有两件是次品

解：(1) 没有次品的抽法就是从 97 件正品中抽取 5 件的抽法，共有 $C_{97}^5 = 64446024$ 种

(2) 恰有 2 件是次品的抽法就是从 97 件正品中抽取 3 件，并从 3 件次品中抽 2 件的抽法，共有 $C_{97}^3 C_3^2 = 442320$ 种

(3) 至少有 2 件次品的抽法，按次品件数来分有二类：

第一类，从 97 件正品中抽取 3 件，并从 3 件次品中抽取 2 件，有 $C_{97}^3 C_3^2$ 种。

第二类从 97 件正品中抽取 2 件，并将 3 件次品全部抽取，有 $C_{97}^2 C_3^3$ 种。

按分类计数原理有 $C_{97}^3 C_3^2 + C_{97}^2 C_3^3 = 446976$ 种。

点评：此题是只选“元”而不排“序”的典型的组合问题，附加的条件是从不同种类的元素中抽取，应当

注意：如果第 (3) 题采用先从 3 件次品抽取 2 件 (以保证至少有 2 件是次品)，再从余下的 98 件产品中任意抽取 3 件的抽法，那么所得结果是 $C_3^2 C_{98}^3 = 466288$ 种，其结论是错误的，错在“重复”：假设 3 件次品是 A、B、C，第一步先抽 A、B 第二步再抽 C 和其余 2 件正品，与第一步先抽 A、C (或 B、C)，第二步再抽 B (或 A) 和其余 2 件正品是同一种抽法，但在算式 $C_3^2 C_{98}^3$ 中算作 3 种不同抽法。

例 3 求证： $A_{n-4}^m + mA_{n-4}^{m-1} = A_n^m$ ； $C_n^{m+1} + C_n^{m-1} + 2C_n^m = C_{n+2}^{m+1}$

证明：利用排列数公式

$$\begin{aligned} \text{左} &= \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!} + \frac{m \cdot (n-1)!}{(n-m)!} \\ &= \frac{(n-m)(n-1)! + m(n-1)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!} = A_n^m = \text{右} \end{aligned}$$

另一种证法：（利用排列的定义理解）

从 n 个元素中取 m 个元素排列可以分成两类：

第一类不含某特殊元素 a 的排列有 A_{n-1}^m

第二类含元素 a 的排列则先从 $(n-1)$ 个元素中取出 $(m-1)$ 个元素排列有 A_{n-1}^{m-1} 种，然后将 a 插入，共有 m

个空档，故有 $m \cdot A_{n-1}^{m-1}$ 种，

因此 $A_{n-1}^m + m \cdot A_{n-1}^{m-1} = A_n^m$

利用组合数公式

$$\begin{aligned} \text{左} &= \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} + \frac{2n!}{m(n-m)!} \\ &= \frac{n!}{(m+1)!(n-m+1)!} \cdot [(n-m)(n-m+1) + m(m+1) + 2(m+1)(n-m+1)] \\ &= \frac{n!}{(m+1)!(n-m+1)!} (n+2)(n+1) = \frac{(n+2)!}{(m+1)!(n-m+1)!} = C_{n+2}^{m+1} = \text{右} \end{aligned}$$

另法：利用公式 $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$ 推得

$$\text{左} = (C_n^{m+1} + C_n^m) + (C_n^m + C_n^{m-1}) = C_{n+1}^{m+1} + C_{n+1}^m = C_{n+2}^{m+1} = \text{右}$$

点评：证明排列、组合恒等式通常利用排列数、组合数公式及组合数基本性质。

例 4 已知 f 是集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 到集合 $B = \{0, 1, 2\}$ 的映射

(1) 不同的映射 f 有多少个？

(2) 若要求 $f(a) + f(b) + f(c) + f(d) = 4$ 则不同的映射 f 有多少个？

分析：(1) 确定一个映射 f ，需要确定 a, b, c, d 的像

(2) a, b, c, d 的象元之和为 4，则加数可能出现多种情况，即 4 有多种分析方案，各方案独立且并列需要分类计算。

解：(1) A 中每个元都可选 $0, 1, 2$ 三者之一为像，由分步计数原理，共有 $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ 个不同映射。

(2) 根据 a, b, c, d 对应的像为 2 的个数来分类，可分为三类：

第一类：没有元素的像为 2，其和又为 4，必然其像均为 1，这样的映射只有一个；

第二类：一个元素的像是 2，其余三个元素的像必为 0,1,1，这样的映射有 $C_4^1 P_3^1 = 12$ 个；

第三类：二个元素的像是 2，另两个元素的像必为 0，这样的映射有 $C_4^2 = 6$ 个。

由分类计数原理共有 $1+12+6=19$ （个）。

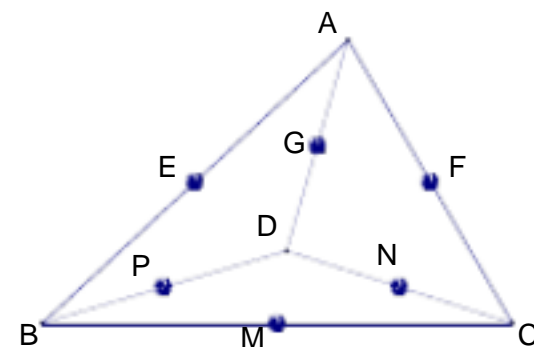
点评：问题（1）可套用投信模型： n 封不同的信投入 m 个不同的信箱，有 m^n 种方法；问题（2）的关键结合映射概念恰当确定分类标准，做到不重、不漏。

例 5 四面体的顶点和各棱的中点共 10 个点

（1）设一个顶点为 A ，从其他 9 点中取 3 个点，使它们和点 A 在同一平面上，不同的取法有多少种？

（2）在这 10 点中取 4 个不共面的点，不同的取法有多少种？

解：（1）如图，含顶点 A 的四面体的三个面上，除点 A 外都有 5 个点，从中取出 3 点必与点 A 共面，共有 $3C_5^3$ 种取法。



含顶点 A 的棱有三条，每条棱上有 3 个点，它们与所对棱的中点共面，共有 3 种取法。

根据分类计数原理和点 A 共面三点取法共有 $3C_5^3 + 3 = 33$ 种。

（2）取出的 4 点不共面比取出的 4 点共面的情形要复杂，故采用间接法：先不加限制任取 4 点（ C_{10}^4 种

取法）减去 4 点共面的取法。

取出的 4 点共面有三类：

第一类：从四面体的同一个面上的 6 点取出 4 点共面，有 $4C_6^4$ 种取法

第二类：每条棱上的 3 个点与所对棱的中点共面，有 6 种取法

第三类：从 6 条棱的中点取 4 个点共面，有 3 种取法

根据分类计数原理 4 点共面取法共有 $4C_6^4 + 6 + 3 = 69$

故取 4 个点不共面的不同取法有 $C_{10}^4 - (4C_6^4 + 6 + 3) = 141$ （种）

点评：由点构成直线、平面、几何体等图形是一类典型的组合问题，附加的条件是点共线与不共线，点共面与不共面，线共面与不共面等。

三、排列组合解题备忘录：

m 个不同的元素必须相邻，有 P_m^m 种“捆绑”方法。

m 个不同元素互不相邻，分别“插入”到 n 个“间隙”中的 m 个位置有 P_n^m 种不同的“插入”方法。

m 个相同的元素互不相邻，分别“插入”到 n 个“间隙”中的 m 个位置，有 C_n^m 种不同的“插入”方法。

若干个不同的元素“等分”为 m 个组，要将选取出每一个组的组合数的乘积除以 P_m^m

四、排列组合问题中的数学思想方法

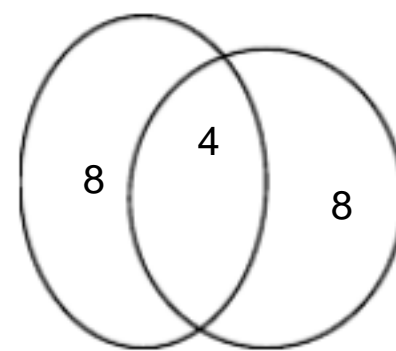
（一）. 分类讨论的思想：许多“数数”问题往往情境复杂，层次多，视角广，这就需要在分析问题

时，选择恰当的切入点，从不同的侧面，把原问题变成几个小问题，分而治之，各种击破。

例. 已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素， $A \cap B$ 含有 4 个元素，求同时满足下列条件的集合 C 的个数：

1) $C \subset A \cup B$ 且 C 中含有 3 个元素, 2) $C \cap A \neq \emptyset$

解: 如图, 因为 A, B 各含有 12 个元素, $A \cap B$ 含有 4 个元素, 所以 $A \cup B$ 中的元素有 $12+12-4=20$ 个, 其中属于 A 的有 12 个, 属于 A 而不属于 B 的有 8 个, 要使 $C \cap A \neq \emptyset$, 则 C 中的元素至少含在 A 中, 集合 C 的个数是: 1) 只含 A 中 1 个元素



的有 $C_{12}^1 C_8^2$; 2) 含 A 中 2 个元素的有 $C_{12}^2 C_8^1$; 3) 含 A 中 3 个元素的有 $C_{12}^3 C_8^0$, 故

所求的集合 C 的个数共有 $C_{12}^1 C_8^2 + C_{12}^2 C_8^1 + C_{12}^3 C_8^0 = 1084$ 个

(二). 等价转化的思想: 很多“数数”问题的解决, 如果能跳出题没有限定的“圈子”, 根据题目的特征构思设计出一个等价转化的途径, 可使问题的解决呈现出“要柳暗花明”的格局。

1. 具体与抽象的转化

例. 某人射击 7 枪, 击中 5 枪, 问击中和未击中的不同顺序情况有多少种?

分析: 没击中用“1”表示, 击中的用“0”表示, 可将问题转化不列问题: 数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ 有

两项为 0, 5 项是 1, 不同的数列个数有多少个?

解: 1) 两个 0 不相邻的情况有 C_6^2 种, 2) 两个 0 相邻的情况有 C_6^1 种, 所以击中和未击中的不同顺序情况

有 $C_6^2 + C_6^1 = 21$ 种。

2) 不同的数学概念之间的转化

例. 连结正方体 8 个顶点的直线中, 为异面直线有多少对?

分析: 正面求解或反面求解 (利用补集, 虽可行, 但容易遗漏或重复, 注意这样一个事实, 每一个三棱锥对应着三对异面直线, 因而转化为计算以正方体顶点, 可以构成多少个三棱锥)

解: 从正文体珠 8 个顶点中任取 4 个, 有 C_8^4 种, 其中 4 点共面的有 12 种, (6 个表面和 6 个对角面) 将不

共面的 4 点可构一个三棱锥, 共有 $C_8^4 - 12$ 个三棱锥, 因而共有 $3(C_8^4 - 12) = 174$ 对异面直线。

综上所述, 有以上几种解排列组合的方法, 此外, 当然也还有其他的方法要靠我们去发现和积累, 我们要掌握好这些方法, 并且能够灵活运用, 这样, 在日常生活中, 我们能轻易解决很多问题。

教师点评: 对排列组合问题的处理方法总结得很细、很全面, 而且挖掘出其中所蕴藏的数学思想方法, 对学习排列组合有一定的指导性。

(三) 容斥原理与计数

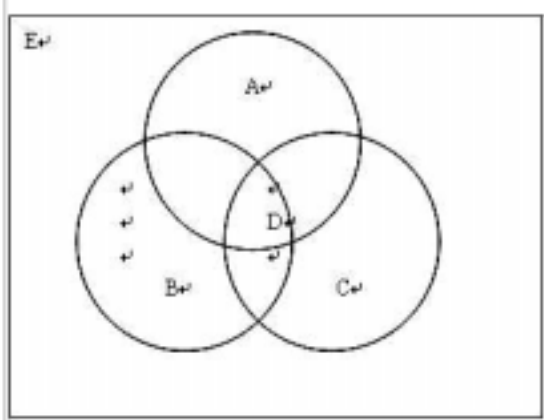
1、文氏图:

在文氏图中, 以下图形的含义如下:

矩形: 其内部的点表示全集的所有元素;

矩形内的圆 (或其它闭曲线): 表示不同的集合;

圆 (或闭曲线) 内部的点: 表示相应集合的元素。



2、三交集公式： $A+B+C=A \cap B \cap C + A \cap B + A \cap C + B \cap C + A + B + C$

($A \cap B \cap C$ 指的是 D , $A \cap B \cap C$ 指的是 D)

(四) 模型构造

例 1. 4 名同学各写一张贺卡，先集中起来，然后每人从中拿出一张别人写的贺卡，则四张贺卡的不同分配方式共有 _____ 种.

例 2. 将编号为 1, 2, 3, 4 的四个小球分别放入编号为 1, 2, 3, 4 的四个盒子中，要求每个盒子放一个小球，且小球的编号与盒子的编号不能相同，则共有 _____ 种不同的放法 .

这两个问题的本质都是每个元素都不在自己编号的位置上的排列问题，我们把这种限制条件的排列问题叫做全错位排列问题 .

例 3. 五位同学坐在一排，现让五位同学重新坐，至多有两位同学坐自己原来的位置，则不同的坐法有 _____ 种.

解析：可以分类解决：

第一类，所有同学都不坐自己原来的位置；

第二类，恰有一位同学坐自己原来的位置；

第三类，恰有两位同学坐自己原来的位置 .

对于第一类，就是上面讲的全错位排列问题；对于第二、第三类有部分元素还占有原来的位置，其余元素可以归结为全错位排列问题，我们称这种排列问题为部分错位排列问题 .

设 n 个元素全错位排列的排列数为 T_n ，则对于例 3，第一类排列数为 T_5 ，第二类先确定一个排原来位置的同学有 5 种可能，其余四个同学全错位排列，所以第二类的排列数为 $5T_4$ ，第三类先确定两个排原位的同学，有 $C_5^2=10$ 种，所以第三类的排列数为 $10T_3$ ，因此例 3 的答案为： $T_5+5T_4+10T_3$.

五. 排列组合中的 易错题

1 没有理解两个基本原理出错

排列组合问题基于两个基本计数原理，即加法原理和乘法原理，故理解“分类用加、分步用乘”是解决排列组合问题的前提 .

例 1 (1995 年上海高考题) 从 6 台原装计算机和 5 台组装计算机中任意选取 5 台，其中至少有原装与组装计算机各两台，则不同的取法有 _____ 种.

误解：因为可以取 2 台原装与 3 台组装计算机或是 3 台原装与 2 台组装计算机，所以只有 2 种取法 .

错因分析：误解的原因在于没有意识到“选取 2 台原装与 3 台组装计算机或是 3 台原装与 2 台组装计算机”是完成任务的两“类”办法，每类办法中都还有不同的取法 .

正解：由分析，完成第一类办法还可以分成两步：第一步在原装计算机中任意选取 2 台，有 C_6^2 种方法；

第二步是在组装计算机任意选取 3 台，有 C_5^3 种方法，据乘法原理共有 $C_6^2 \cdot C_5^3$ 种方法 . 同理，完成第二类办

法中有 $C_6^3 \cdot C_5^2$ 种方法 . 据加法原理完成全部的选取过程共有 $C_6^2 \cdot C_5^3 + C_6^3 \cdot C_5^2 = 350$ 种方法 .

例 2 在一次运动会上有四项比赛的冠军在甲、乙、丙三人中产生，那么不同的夺冠情况共有 () 种 .

(A) A_4^3 (B) 4^3 (C) 3^4 (D) C_4^3

误解：把四个冠军，排在甲、乙、丙三个位置上，选 A.

错因分析：误解是没有理解乘法原理的概念，盲目地套用公式 .

正解：四项比赛的冠军依次在甲、乙、丙三人中选取，每项冠军都有 3 种选取方法，由乘法原理共有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ 种.

说明：本题还有同学这样误解，甲乙丙夺冠均有四种情况，由乘法原理得 4^3 . 这是由于没有考虑到某项冠军一旦被一人夺得后，其他人就不再有 4 种夺冠可能 .

2 判断不出是排列还是组合出错

在判断一个问题是排列还是组合问题时，主要看元素的组成有没有顺序性，有顺序的是排列，无顺序的是组合 .

例 3 有大小形状相同的 3 个红色小球和 5 个白色小球，排成一排，共有多少种不同的排列方法？

误解：因为是 8 个小球的全排列，所以共有 A_8^8 种方法 .

错因分析：误解中没有考虑 3 个红色小球是完全相同的，5 个白色小球也是完全相同的，同色球之间互换位置是同一种排法 .

正解：8 个小球排好后对应着 8 个位置，题中的排法相当于在 8 个位置中选出 3 个位置给红球，剩下的位置给白球，由于这 3 个红球完全相同，所以没有顺序，是组合问题 . 这样共有： $C_8^3 = 56$ 排法 .

3 重复计算出错

在排列组合中常会遇到元素分配问题、平均分组问题等，这些问题要注意避免重复计数，产生错误。

例 4 (2002 年北京文科高考题) 5 本不同的书全部分给 4 个学生，每个学生至少一本，不同的分法种数为 ()

(A) 480 种 (B) 240 种 (C) 120 种 (D) 96 种

误解：先从 5 本书中取 4 本分给 4 个人，有 A_5^4 种方法，剩下的 1 本书可以给任意一个人有 4 种分法，共有 $4 \times A_5^4 = 480$ 种不同的分法，选 A.

错因分析：设 5 本书为 a、b、c、d、e，四个人为甲、乙、丙、丁 . 按照上述分法可能如下的表 1 和表 2：

甲	乙	丙	丁
a	b	c	d
e			

表 1

甲	乙	丙	丁
e	b	c	d
a			

表 2

表 1 是甲首先分得 a、乙分得 b、丙分得 c、丁分得 d，最后一本书 e 给甲的情况；表 2 是甲首先分得 e、乙分得 b、丙分得 c、丁分得 d，最后一本书 a 给甲的情况 . 这两种情况是完全相同的，而在误解中计算成了不同的情况。正好重复了一次 .

正解：首先把 5 本书转化成 4 本书，然后分给 4 个人 . 第一步：从 5 本书中任意取出 2 本捆绑成一本书，有 C_5^2 种方法；第二步：再把 4 本书分给 4 个学生，有 A_4^4 种方法 . 由乘法原理，共有 $C_5^2 \cdot A_4^4 = 240$ 种方法，故选 B.

例 5 某交通岗共有 3 人，从周一到周日的七天中，每天安排一人值班，每人至少值 2 天，其不同的排法共有 () 种。

(A) 5040 (B) 1260 (C) 210 (D) 630

误解：第一个人先挑选 2 天，第二个人再挑选 2 天，剩下的 3 天给第三个人，这三个人再进行全排列，共有：

$$C_7^2 C_5^2 A_3^3 = 1260, \text{ 选 B.}$$

错因分析：这里是均匀分组问题。比如：第一人挑选的是周一、周二，第二人挑选的是周三、周四；也可能是第一个人挑选的是周三、周四，第二人挑选的是周一、周二，所以在全排列的过程中就重复计算了。

正解： $\frac{C_7^2 C_5^2 A_3^3}{2} = 630 \text{ 种.}$

4 遗漏计算出错

在排列组合问题中还可能由于考虑问题不够全面，因为遗漏某些情况，而出错。

例 6 用数字 0, 1, 2, 3, 4 组成没有重复数字的比 1000 大的奇数共有 ()

(A) 36 个 (B) 48 个 (C) 66 个 (D) 72 个

误解：如右图，最后一位只能是 1 或 3 有两种取法，

又因为第 1 位不能是 0，在最后一位取定后只有 3 种取



法，剩下 3 个数排中间两个位置有 A_3^2 种排法，共有 $2 \times 3 \times A_3^2 = 36$ 个。

错因分析：误解只考虑了四位数的情况，而比 1000 大的奇数还可能是五位数。

正解：任一个五位的奇数都符合要求，共有 $2 \times 3 \times A_3^3 = 36$ 个，再由前面分析四位数个数和五位数个数之和

共有 72 个，选 D。

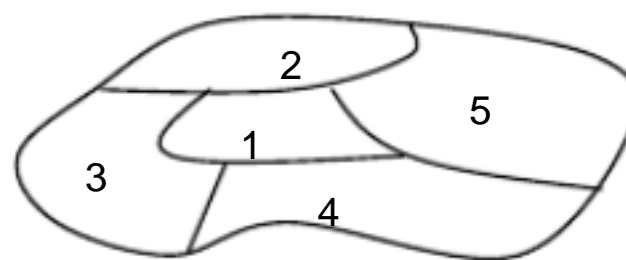
5 忽视题设条件出错

在解决排列组合问题时一定要注意题目中的每一句话甚至每一个字和符号，不然就可能多解或者漏解。

例 7 (2003 全国高考题) 如图，一个地区分为 5 个行政区域，现给地图着色，

要求相邻区域不得使用同一颜色，现有 4

种颜色可供选择，则不同的着色方法共有 _____ 种。(以数字作答)



误解：先着色第一区域，有 4 种方法，剩下 3 种颜色涂四个区域，即有一种颜色涂相对的两块区域，有

$$C_3^1 \cdot 2 \cdot A_2^2 = 12 \text{ 种, 由乘法原理共有: } 4 \times 12 = 48 \text{ 种.}$$

错因分析：据报导，在高考中有很多考生填了 48 种。这主要是没有看清题设“有 4 种颜色可供选择”，不一定需要 4 种颜色全部使用，用 3 种也可以完成任务。

正解：当使用四种颜色时，由前面的误解知有 48 种着色方法；当仅使用三种颜色时：从 4 种颜色中选取 3

种有 C_4^3 种方法，先着色第一区域，有 3 种方法，剩下 2 种颜色涂四个区域，只能是一种颜色涂第 2、4 区

域，另一种颜色涂第 3、5 区域，有 2 种着色方法，由乘法原理有 $C_4^3 \times 3 \times 2 = 24$ 种。综上共有： $48 + 24 = 72$ 种。

例 8 已知 $ax^2 - b = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，其中 $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ ，求解集不同的一元二次方程的个数。

误解：从集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 中任意取两个元素作为 a, b ，方程有 A_4^2 个，当 a, b 取同一个数时方程有 1 个，共有 $A_4^2 + 1 = 13$ 个。

错因分析：误解中没有注意到题设中：“求解集不同的”，所以在上述解法中要去掉同解情况，由于

$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$ 同解、 $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$ 同解，故要减去 2 个。

正解：由分析，共有 $13 - 2 = 11$ 个解集不同的一元二次方程。

6 未考虑特殊情况出错

在排列组合中要特别注意一些特殊情况，一有疏漏就会出错。

例 9 现有 1 角、2 角、5 角、1 元、2 元、5 元、10 元、20 元、50 元人民币各一张，100 元人民币 2 张，从中至少取一张，共可组成不同的币值种数是（ ）

(A) 1024 种 (B) 1023 种 (C) 1536 种 (D) 1535 种

误解：因为共有人民币 11 张，每张人民币都有取和不取 2 种情况，减去全不取的 1 种情况，共有 $2^{10} - 1 = 1023$ 种。

错因分析：这里 100 元面值比较特殊有两张，在误解中被计算成 4 种情况，实际上只有不取、取一张和取二张 3 种情况。

正解：除 100 元人民币以外每张均有取和不取 2 种情况，100 元人民币的取法有 3 种情况，再减去全不取的 1 种情况，所以共有 $2^9 \times 3 - 1 = 1535$ 种。

7 题意的理解偏差出错

例 10 现有 8 个人排成一排照相，其中有甲、乙、丙三人不能相邻的排法有（ ）种。

(A) $A_6^3 \cdot A_5^5$ (B) $A_8^8 - A_6^6 \cdot A_3^3$ (C) $A_5^3 \cdot A_3^3$ (D) $A_8^8 - A_6^4$

误解：除了甲、乙、丙三人以外的 5 人先排，有 A_5^5 种排法，5 人排好后产生 6 个空档，插入甲、乙、丙三人有 A_6^3 种方法，这样共有 $A_6^3 \cdot A_5^5$ 种排法，选 A。

错因分析：误解中没有理解“甲、乙、丙三人不能相邻”的含义，得到的结果是“甲、乙、丙三人互不相邻”的情况。“甲、乙、丙三人不能相邻”是指甲、乙、丙三人不能同时相邻，但允许其中有两人相邻。

正解：在 8 个人全排列的方法数中减去甲、乙、丙全相邻的方法数，就得到甲、乙、丙三人不相邻的方法数，即 $A_8^8 - A_6^6 \cdot A_3^3$ ，故选 B。

8 解题策略的选择不当出错

有些排列组合问题用直接法或分类讨论比较困难，要采取适当的解决策略，如间接法、插入法、捆绑法、概率法等，有助于问题的解决。

例 10 高三年级的三个班到甲、乙、丙、丁四个工厂进行社会实践，其中工厂甲必须有班级去，每班去哪个工厂可自由选择，则不同的分配方案有（ ）。

(A) 16 种 (B) 18 种 (C) 37 种 (D) 48 种

误解：甲工厂先派一个班去，有 3 种选派方法，剩下的 2 个班均有 4 种选择，这样共有 $3 \times 4 \times 4 = 48$ 种方案。

错因分析：显然这里有重复计算。如：a 班先派去了甲工厂，b 班选择时也去了甲工厂，这与 b 班先派去了甲工厂，a 班选择时也去了甲工厂是同一种情况，而在上述解法中当作了不一样的情况，并且这种重复很难排除。

正解：用间接法。先计算 3 个班自由选择去何工厂的总数，再扣除甲工厂无人去的情况，即：
 $4 \times 4 \times 4 - 3 \times 3 \times 3 = 37$ 种方案。

排列组合问题虽然种类繁多，但只要能把握住最常见的原理和方法，即：“分步用乘、分类用加、有序排列、无序组合”，留心容易出错的地方就能够以不变应万变，把排列组合学好。

六. 练习：

1. 五个工程队承建某项工程的五个不同的子项目，每个工程队承建 1 项，其中甲工程队不能承建 1 号子项目，则不同的承建方案共有 (B)

A. $C_4^1 C_4^4$ 种 B. $C_4^1 A_4^4$ 种 C. C_4^4 种 D. A_4^4 种

2. 在由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 所组成的没有重复数字的四位数中，不能被 5 整除的数共有 192 个。

3. 有 12 个座位，现安排 2 人就座并且这 2 人不左右相邻，那么不同排法的种数是 110

4. 某校高三年级举行一次演讲赛共有 10 位同学参赛，其中一班有 3 位，二班有 2 位，其它班有 5 位，若采用抽签的方式确定他们的演讲顺序，则一班有 3 位同学恰好被排在一起（指演讲序号相连，不管人的顺序），而二班的 2 位同学没有被排在一起的概率为： (D)

A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{20}$ C. $\frac{1}{40}$ D. $\frac{1}{120}$

5. 用 1、2、3、4、5、6、7、8 组成没有重复数字的八位数，要求 1 和 2 相邻，3 与 4 相邻，5 与 6 相邻，而 7 与 8 不相邻，这样的八位数共有 576 个。

6. 把一同排 6 张座位编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的电影票全部分给 4 个人，每人至少分 1 张，至多分 2 张，且这两张票具有连续的编号，那么不同的分法种数 (D)

A. 168 B. 96 C. 72 D. 144

7. 将标号为 1, 2, ..., 10 的 10 个球放入标号为 1, 2, ..., 10 的 10 个盒子里，每个盒内放一个球，恰好 3 个球的标号与其在盒子的标号不一致的放入方法种数为 (B)

A. 120 B. 240 C. 360 D. 720

8. 从 5 位男教师和 4 位女教师中选出 3 位教师，派到 3 个班担任班主任（每班 1 位班主任），要求这 3 位班主任中男、女教师都要有，则不同的选派方案共 (B) 种

A. 210 种 B. 420 种 C. 630 种 D. 840

9. 从集合 {P, Q, R, S} 与 {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} 中各任选 2 个元素排成一行（字母和数字均不能重复），每排中字母 Q 和数字 0 至多只能出现一个的不同排法种数是 5832。（用数字作答）。

10. 从 6 人中选出 4 人分别到巴黎、伦敦、悉尼、莫斯科四个城市游览，要求每个城市有一人游览，每人只游览一个城市，且这 6 人中甲、乙两人不去巴黎游览，则不同的选择方案共有 (B)

A. 300 种 B. 240 种 C. 144 种 D. 96 种

题示： $C_4^4 A_4^4 + 2C_4^3 \cdot 3 \cdot A_3^3 + C_4^2 \cdot 2 \cdot A_3^3$

11. 四棱锥的 8 条棱代表 8 种不同的化工产品，有公共点的两条棱代表的化工产品放在同一仓库是危险的，没有公共顶点的两条棱多代表的化工产品放在同一仓库是安全的，现打算用编号为 1、2、3、4 的 4 个仓库存放这 8 种化工产品，那么安全存放的不同方法种数为 (B)

A 96 B 48 C 24 D 0

12. 4 棵柳树和 4 棵杨树栽成一行，柳树、杨树逐一相间的栽法有 ____ 种。

解析： $2A_4^4 \cdot A_4^4 = 1152$ 种。

答案：1152

13. 某餐厅供应客饭，每位顾客可以在餐厅提供的菜肴中任选 2 菜 2 素共 4 种不同的品种。现在餐厅准备了 5 种不同的荤菜，若要保证每位顾客有 200 种以上的不同选择，则餐厅至少还需要不同的素菜品种 ____ 种。(结果用数值表示)

解析：设素菜 n 种，则 $C_5^2 \cdot C_n^2 \geq 200 \Rightarrow n(n-1) \geq 40$ ，所以 n 的最小值为 7。

答案：7

14. 设有编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个球和编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个盒子。现将这五个球投放入这五个盒子内，要求每个盒子内投放一球，并且恰好有两个球的编号与盒子的编号相同，则这样的投放方法有多少种？

分析：五个球分别投放到五个盒子内，恰好有两个球的编号与盒子的编号相同，则其他三个球必不能投放到与球的编号相同的盒子内，此时，这三个球与对应的三个盒子，就成了受限的特殊元素与特殊位置。

解：先在五个球中任选两个球投放到与球编号相同的盒子内，有 C_5^2 种；剩下的三个球，不失一般性，

不妨设编号为 3, 4, 5，投放 3 号球的方法数为 C_2^1 ，则投放 4, 5 号球的方法只有一种，根据分步计数原理共有 $C_5^2 \cdot C_2^1 = 20$ 种。

点评：本题投放球有两种方法，一种是投入到与编号相同的盒子内，另一种是投入到与编号不同的盒子内，故应分步完成。

15. 球台上有 4 个黄球，6 个红球，击黄球入袋记 2 分，击红球入袋记 1 分，欲将此十球中的 4 球击入袋中，但总分不低于 5 分，击球方法有几种？

解：设击入黄球 x 个，红球 y 个符合要求，

则有 $x+y=4$ ， $2x+y \geq 5$ ($x, y \in \mathbf{N}$)，得 $1 \leq x \leq 4$

$$\begin{cases} x=1, \\ y=3; \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=2; \end{cases} \begin{cases} x=3, \\ y=1; \end{cases} \begin{cases} x=4, \\ y=0. \end{cases}$$

相应每组解 (x, y)，击球方法数分别为 $C_4^1 C_6^3, C_4^2 C_6^2, C_4^3 C_6^1, C_4^4 C_6^0$ 。

共有不同击球方法数为 $C_4^1 C_6^3 + C_4^2 C_6^2 + C_4^3 C_6^1 + C_4^4 C_6^0 = 195$ 。

七．排列组合问题经典题型与通用方法

(一) 排序问题

1. 相邻问题捆绑法：题目中规定相邻的几个元素捆绑成一个组，当作一个大元素参与排列。

例 1. A, B, C, D, E 五人并排站成一排，如果 A, B 必须相邻且 B 在 A 的右边，则不同的排法有 ()

A、60种 B、48种 C、36种 D、24种

解析：把 A, B 视为一人，且 B 固定在 A 的右边，则本题相当于 4 人的全排列， $A_4^4 = 24$ 种，答案：D.

2. 相离问题插空排：元素相离（即不相邻）问题，可先把无位置要求的几个元素全排列，再把规定的相离的几个元素插入上述几个元素的空位和两端.

例 2. 七人并排站成一行，如果甲乙两个必须不相邻，那么不同的排法种数是（ ）

A、1440 种 B、3600 种 C、4820 种 D、4800 种

解析：除甲乙外，其余 5 个排列数为 A_5^5 种，再用甲乙去插 6 个空位有 A_6^2 种，不同的排法种数是 $A_5^5 A_6^2 = 3600$ 种，选 B.

3. 定序问题缩倍法：在排列问题中限制某几个元素必须保持一定的顺序，可用缩小倍数的方法.

例 3. A, B, C, D, E 五人并排站成一排，如果 B 必须站在 A 的右边（A, B 可以不相邻）那么不同的排法有（ ）

A、24 种 B、60 种 C、90 种 D、120 种

解析：B 在 A 的右边与 B 在 A 的左边排法数相同，所以题设的排法只是 5 个元素全排列数的一半，即

$\frac{1}{2} A_5^5 = 60$ 种，选 B.

11. 定位问题优先法：某个或几个元素要排在指定位置，可先排这个或几个元素；再排其它的元素。

例 11. 现有 1 名老师和 4 名获奖同学排成一排照相留念，若老师不站两端则有不同的排法有多少种？

解析：老师在中间三个位置上选一个有 A_3^1 种，4 名同学在其余 4 个位置上有 A_4^4 种方法；所以共有 $A_3^1 A_4^4 = 72$ 种。

12. 多排问题单排法：把元素排成几排的问题可归结为一排考虑，再分段处理。

例 12. (1) 6 个不同的元素排成前后两排，每排 3 个元素，那么不同的排法种数是（ ）

A、36 种 B、120 种 C、720 种 D、1440 种

(2) 8 个不同的元素排成前后两排，每排 4 个元素，其中某 2 个元素要排在前排，某 1 个元素排在后排，有多少种不同排法？

解析：(1) 前后两排可看成一排的两段，因此本题可看成 6 个不同的元素排成一排，共 $A_6^6 = 720$ 种，选 C.

(2) 解析：看成一排，某 2 个元素在前半段四个位置中选排 2 个，有 A_4^2 种，某 1 个元素排在后半段的四个位置中选一个有 A_4^1 种，其余 5 个元素任排 5 个位置上有 A_5^5 种，故共有 $A_4^2 A_4^1 A_5^5 = 5760$ 种排法.

16. 圆排问题单排法：把 n 个不同元素放在圆周 n 个无编号位置上的排列，顺序（例如按顺时针）不同的排法才算不同的排列，而顺序相同（即旋转一下就可以重合）的排法认为是相同的，它与普通排列的区别在于只计顺序而无首位、末位之分，下列 n 个普通排列：

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n; a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_1; a_3, a_4, \dots, a_n, a_1, a_2$ 在圆排列中只算一种，因为旋转后可以重合，故认为相同，n 个元素的圆排列数有 $\frac{n!}{n}$ 种. 因此可将某个元素固定展成单排，其它的 n-1 元素全排列.

例 16. 有 5 对姐妹站成一圈，要求每对姐妹相邻，有多少种不同站法？

解析：首先可让 5 位姐姐站成一圈，属圆排列有 A_5^4 种，然后在让插入其间，每位均可插入其姐姐的左边

和右边，有 2 种方式，故不同的安排方式 $24 \times 2^5 = 768$ 种不同站法. 说明：从 n 个不同元素中取出 m 个元素作圆形排列共有 $\frac{1}{m} A_n^m$ 种不同排法.

17. 可重复的排列求幂法：允许重复排列问题的特点是以元素为研究对象，元素不受位置的约束，可逐一安排元素的位置，一般地 n 个不同元素排在 m 个不同位置的排列数有 m^n 种方法.

例 17. 把 6 名实习生分配到 7 个车间实习共有多少种不同方法？

解析：完成此事共分 6 步，第一步：将第一名实习生分配到车间有 7 种不同方案，第二步：将第二名实习生分配到车间也有 7 种不同方案，依次类推，由分步计数原理知共有 7^6 种不同方案.

14. 选排问题先取后排：从几类元素中取出符合题意的几个元素，再安排到一定的位置上，可用先取后排法.

例 14. (1) 四个不同球放入编号为 1, 2, 3, 4 的四个盒中，则恰有一个空盒的放法有多少种？

(2) 9 名乒乓球运动员，其中男 5 名，女 4 名，现在要进行混合双打训练，有多少种不同的分组方法？

解析：先取四个球中二个为一组，另二组各一个球的方法有 C_4^2 种，再排：在四个盒中每次排 3 个有 A_4^3

种，故共有 $C_4^2 A_4^3 = 144$ 种。

解析：先取男女运动员各 2 名，有 $C_5^2 C_4^2$ 种，这四名运动员混和双打练习有 A_2^2 种排法，故共有 $C_5^2 C_4^2 A_2^2 = 120$ 种。

4. 标号排位问题分步法：把元素排到指定位置上，可先把某个元素按规定排入，第二步再排另一个元素，如此继续下去，依次即可完成。

例 4. 将数字 1, 2, 3, 4 填入标号为 1, 2, 3, 4 的四个方格里，每格填一个数，则每个方格的标号与所填数字均不相同的填法有 () A、6 种 B、9 种 C、11 种 D、23 种

解析：先把 1 填入方格中，符合条件的有 3 种方法，第二步把被填入方格的对应数字填入其它三个方格，又有三种方法；第三步填余下的两个数字，只有一种填法，共有 $3 \times 3 \times 1 = 9$ 种填法，选 B。

22. 全错位排列问题公式法：全错位排列问题（贺卡问题，信封问题）记住公式即可

瑞士数学家欧拉按一般情况给出了一个递推公式：用 A、B、C…… 表示写着 n 位友人名字的信封，a、b、c…… 表示 n 份相应的写好的信纸。把错装的总数为记作 f(n)。假设把 a 错装进 B 里了，包含着这个错误的一切错装法分两类：

(1) b 装入 A 里，这时每种错装的其余部分都与 A、B、a、b 无关，应有 f(n-2) 种错装法。

(2) b 装入 A、B 之外的一个信封，这时的装信工作实际是把 (除 a 之外的) 份信纸 b、c…… 装入 (除 B 以外的) n-1 个信封 A、C……，显然这时装错的方法有 f(n-1) 种。

总之上 a 装入 B 的错误之下，共有错装法 f(n-2)+f(n-1) 种。a 装入 C，装入 D…… 的 n-2 种错误之下，同样都有 f(n-2)+f(n-1) 种错装法，因此：

得到一个递推公式： $f(n) = (n-1) \{f(n-1) + f(n-2)\}$ ，分别代入 n=2、3、4 等可推得结果。

也可用迭代法推导出一般公式： $f(n) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$

例. 五位同学坐在一排，现让五位同学重新坐，至多有两位同学坐自己原来的位置，则不同的坐法有 种。

解析：可以分类解决：

第一类，所有同学都不坐自己原来的位置；

第二类，恰有一位同学坐自己原来的位置；

第三类，恰有两位同学坐自己原来的位置。

对于第一类，就是上面讲的全错位排列问题；对于第二、第三类有部分元素还占有原来的位置，其余元素可以归结为全错位排列问题，我们称这种排列问题为 部分错位排列问题。

设 n 个元素全错位排列的排列数为 T_n ，则对于例 3，第一类排列数为 T_5 ，第二类先确定一个排原来位置的同学有 5 种可能，其余四个同学全错位排列，所以第二类的排列数为 $5T_4$ ，第三类先确定两个排原位的同学，有 $C_5^2 = 10$ 种，所以第三类的排列数为 $10T_3$ ，因此例 3 的答案为： $T_5 + 5T_4 + 10T_3$ 。

(二) 分组分配问题

24. 平均分堆问题去除重复法

例 2. 从 7 个参加义务劳动的人中，选出 6 个人，分成两组，每组都是 3 人，有多少种不同的分法？

分析：记 7 个人为 a、b、c、d、e、f、g 写出一些组来考察。表 1

选 3 人	再选 3 人	分组方法种数
a b c	d e f	这两种只能算一种分法
d e f	a b c	

abc	deg	这两种只能
deg	abc	算一种分法
''	''	''

由表 1 可见，把 abc, def 看作 2 个元素顺序不同的排列有 A_2^2 种，而这 A_2^2 只能算一种分组方法。

解：选 3 人为一组有 C_7^3 种，再选 3 人为另一组有 C_4^3 种，依分步计数原理，又每 A_2^2 种分法只能算一种，所以不同的分法有 $C_7^3 C_4^3 / A_2^2 = 70$ (种)。

也可以先选再分组为 $C_7^6 C_6^3 C_3^3 / A_2^2 = 70$ (种)

例 6 6 本不同的书平均分成三堆，有多少种不同的方法？

分析：分出三堆书 (a₁, a₂), (a₃, a₄), (a₅, a₆) 由顺序不同可以有 $A_3^3 = 6$ 种，而这 6 种分法只算一种分

$$\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3}$$

堆方式，故 6 本不同的书平均分成三堆方式有 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} = 15$ 种

练习：1. 6 本书分三份，2 份 1 本，1 份 4 本，则有不同分法？

2. 某年级 6 个班的数学课，分配给甲乙丙三名数学教师任教，每人教两个班，则分派方法的种数。

5. 有序分配问题逐分法：有序分配问题指把元素分成若干组，可用逐步下量分组法。

例 5. (1) 有甲乙丙三项任务，甲需 2 人承担，乙丙各需一人承担，从 10 人中选出 4 人承担这三项任务，不同的选法种数是 () A、1260 种 B、2025 种 C、2520 种 D、5040 种

(2) 12 名同学分别到三个不同的路口进行流量的调查，若每个路口 4 人，则不同的分配方案有 ()

A、 $C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$ 种 B、 $3C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$ 种 C、 $C_{12}^4 C_8^4 A_3^3$ 种 D、 $\frac{C_{12}^4 C_8^4 C_4^4}{A_3^3}$ 种

解析：(1) 先从 10 人中选出 2 人承担甲项任务，再从剩下的 8 人中选 1 人承担乙项任务，第三步从另外的 7 人中选 1 人承担丙项任务，不同的选法共有 $C_{10}^2 C_8^1 C_7^1 = 2520$ 种，选 C。

(2) 答案：A。

6. 全员分配问题分组法：

例 6. (1) 4 名优秀学生全部保送到 3 所学校去，每所学校至少去一名，则不同的保送方案有多少种？

(2) 5 本不同的书，全部分给 4 个学生，每个学生至少一本，不同的分法种数为 ()

A、480 种 B、240 种 C、120 种 D、96 种

答案：(1) 36. (2) B。

7. 名额分配问题隔板法 (无差别物品分配问题隔板法)：

例 7：10 个三好学生名额分到 7 个班级，每个班级至少一个名额，有多少种不同分配方案？

解析：10 个名额分到 7 个班级，就是把 10 个名额看成 10 个相同的小球分成 7 堆，每堆至少一个，可以在 10 个小球的 9 个空位中插入 6 块木板，每一种插法对应着一种分配方案，故共有不同的分配方案为 $C_9^6 = 84$ 种。

8. 限制条件的分配问题分类法：

例 8. 某高校从某系的 10 名优秀毕业生中选 4 人分别到西部四城市参加中国西部经济开发建设，其中甲同学不到银川，乙不到西宁，共有多少种不同派遣方案？

解析：因为甲乙有限制条件，所以按照是否含有甲乙来分类，有以下四种情况：

若甲乙都不参加，则有派遣方案 A_8^4 种；若甲参加而乙不参加，先安排甲有 3 种方法，然后安排其余学生有 A_8^3 方法，所以共有 $3A_8^3$ ；若乙参加而甲不参加同理也有 $3A_8^3$ 种；若甲乙都参加，则先安排甲乙，有 7 种方法，然后再安排其余 8 人到另外两个城市有 A_8^2 种，共有 $7A_8^2$ 方法。所以共有不同的派遣方法

总数为

$$A_8^4 + 3A_8^3 + 3A_8^2 + 7A_8^1 = 4088 \text{ 种}.$$

(三) 排列组合问题中的技巧

10. 交叉问题集合法 (容斥原理) : 某些排列组合问题几部分之间有交集, 可用集合中求元素个数公式

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

例 10. 从 6 名运动员中选出 4 人参加 4×100 米接力赛, 如果甲不跑第一棒, 乙不跑第四棒, 共有多少种不同的参赛方案?

解析: 设全集 $I = \{6 \text{ 人中任取 } 4 \text{ 人参赛的排列}\}$, $A = \{\text{甲跑第一棒的排列}\}$, $B = \{\text{乙跑第四棒的排列}\}$, 根据求集合元素个数的公式得参赛方法共有:

$$n(I) - n(A) - n(B) + n(A \cap B) = A_6^4 - A_5^3 - A_5^3 + A_4^2 = 252 \text{ 种}.$$

13. “至少”“至多”问题用间接排除法或分类法:

例 13. 从 4 台甲型和 5 台乙型电视机中任取 3 台, 其中至少要甲型和乙型电视机各一台, 则不同的取法共有 () A、140 种 B、80 种 C、70 种 D、35 种

解析 1: 逆向思考, 至少各一台的反面就是分别只取一种型号, 不取另一种型号的电视机, 故不同的取法

$$\text{共有 } C_9^3 - C_4^3 - C_5^3 = 70 \text{ 种, 选 C}$$

解析 2: 至少要甲型和乙型电视机各一台可分两种情况: 甲型 1 台乙型 2 台; 甲型 2 台乙型 1 台; 故不同的取法有 $C_5^2 C_4^1 + C_5^1 C_4^2 = 70$ 台, 选 C.

23. 构造数列递推法

例 一楼梯共 10 级, 如果规定每次只能跨上一级或两级, 要走上这 10 级楼梯, 共有多少种不同的走法?

分析: 设上 n 级楼梯的走法为 a_n 种, 易知 $a_1=1, a_2=2$, 当 $n \geq 2$ 时, 上 n 级楼梯的走法可分两类: 第一类: 是最后一步跨一级, 有 a_{n-1} 种走法, 第二类是最后一步跨两级, 有 a_{n-2} 种走法, 由加法原理知: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, 据此, $a_3 = a_1 + a_2 = 3, a_4 = a_2 + a_3 = 5, a_5 = a_3 + a_4 = 8, a_6 = 13, a_7 = 21, a_8 = 34, a_9 = 55, a_{10} = 89$. 故走上 10 级楼梯共有 89 种不同的方法。

15. 部分合条件问题排除法: 在选取的总数中, 只有一部分合条件, 可以从总数中减去不符合条件数, 即为所求.

例 15. (1) 以正方体的顶点为顶点的四面体共有 ()

A、70 种 B、64 种 C、58 种 D、52 种

(2) 四面体的顶点和各棱中点共 10 点, 在其中取 4 个不共面的点, 不同的取法共有 ()

A、150 种 B、147 种 C、144 种 D、141 种

解析: (1) 正方体 8 个顶点从中每次取四点, 理论上可构成 C_8^4 四面体, 但 6 个表面和 6 个对角面的四个

顶点共面都不能构成四面体, 所以四面体实际共有 $C_8^4 - 12 = 58$ 个.

(2) 解析: 10 个点中任取 4 个点共有 C_{10}^4 种, 其中四点共面的有三种情况: 在四面体的四个面上, 每面内四点共面的情况为 C_6^4 , 四个面共有 $4C_6^4$ 个; 过空间四边形各边中点的平行四边形共 3 个; 过棱上三点与对棱中点的三角形共 6 个. 所以四点不共面的情况的种数是 $C_{10}^4 - 4C_6^4 - 3 - 6 = 141$ 种.

18. 复杂排列组合问题构造模型法:

例 18. 马路上有编号为 1, 2, 3, ..., 9 九只路灯, 现要关掉其中的三盏, 但不能关掉相邻的二盏或三盏, 也不能关掉两端的两盏, 求满足条件的关灯方案有多少种?

解析: 把此问题当作一个排队模型, 在 6 盏亮灯的 5 个空隙中插入 3 盏不亮的灯 C_5^3 种方法, 所以满足条件

的关灯方案有 10 种.

说明: 一些不易理解的排列组合题, 如果能转化为熟悉的模型如填空模型, 排队模型, 装盒模型可使问题

容易解决 .

19. 元素个数较少的排列组合问题可以考虑枚举法 :

例 19. 设有编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个球和编号为 1, 2, 3, 4, 5 的盒子现将这 5 个球投入 5 个盒子要求每个盒子放一个球, 并且恰好有两个球的号码与盒子号码相同, 问有多少种不同的方法?

解析: 从 5 个球中取出 2 个与盒子对号有 C_5^2 种, 还剩下 3 个球与 3 个盒子序号不能对应, 利用枚举法分析, 如果剩下 3, 4, 5 号球与 3, 4, 5 号盒子时, 3 号球不能装入 3 号盒子, 当 3 号球装入 4 号盒子时, 4, 5 号球只有 1 种装法, 3 号球装入 5 号盒子时, 4, 5 号球也只有 1 种装法, 所以剩下三球只有 2 种装法, 因此总共装法数为 $2C_5^2 = 20$ 种.

9. 多元问题分类法: 元素多, 取出的情况也多种, 可按结果要求分成不相容的几类情况分别计数再相加.

例 9(1) 由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的六位数, 其中个位数字小于十位数字的共有 ()

A、210 种 B、300 种 C、464 种 D、600 种

(2) 从 1, 2, 3, ..., 100 这 100 个数中, 任取两个数, 使它们的乘积能被 7 整除, 这两个数的取法 (不计顺序) 共有多少种?

(3) 从 1, 2, 3, ..., 100 这 100 个数中任取两个数, 使其和能被 4 整除的取法 (不计顺序) 有多少种?

解析: (1) 按题意, 个位数字只可能是 0, 1, 2, 3, 4 共 5 种情况, 分别有 A_5^5 个, $A_4^1 A_3^1 A_3^3$, $A_3^1 A_3^1 A_3^3$, $A_2^1 A_3^1 A_3^3$, $A_3^1 A_3^3$

个, 合并总计 300 个, 选 B. 另解, 首位数字不能为 0, 故首位数字有 5 种选择, 其它五个数字全排列 A_5^5 ,

由于个位数字比十位数字大与个位数字比十位数字小是对称的。故所求六位数共有 $5 A_5^5 / 2 = 300$ 。

(2) 解析: 被取的两个数中至少有一个能被 7 整除时, 他们的乘积就能被 7 整除, 将这 100 数组成的集合视为全集 I, 能被 7 整除的数的集合记做 $A = \{7, 14, 21, \dots, 98\}$ 共有 14 个元素, 不能被 7 整除的数组

成的集合记做 $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$ 共有 86 个元素; 由此可知, 从 A 中任取 2 个元素的取法有 C_{14}^2 , 从 A

中任取一个, 又从 \bar{A} 中任取一个共有 $C_{14}^1 C_{86}^1$, 两种情形共符合要求的取法有 $C_{14}^2 + C_{14}^1 C_{86}^1 = 1295$ 种.

(3) 解析: 将 $I = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 分成四个不相交的子集, 能被 4 整除的数集 $A = \{4, 8, 12, \dots, 100\}$; 能被 4 除余 1 的数集 $B = \{1, 5, 9, \dots, 97\}$, 能被 4 除余 2 的数集 $C = \{2, 6, \dots, 98\}$, 能被 4 除余 3 的数集 $D = \{3, 7, 11, \dots, 99\}$, 易见这四个集合中每一个有 25 个元素; 从 A 中任取两个数符合要; 从 B, D 中各取一个数也符合要求; 从 C 中任取两个数也符合要求; 此外其它取法都不符合要求; 所以符合要求的取法共有 $C_{25}^2 + C_{25}^1 C_{25}^1 + C_{25}^2$ 种.

20. 复杂的排列组合问题也可用分解与合成法 :

例 20. (1) 30030 能被多少个不同偶数整除?

(2) 正方体 8 个顶点可连成多少对异面直线?

解析: 先把 30030 分解成质因数的形式: $30030 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$; 依题意偶因数 2 必取, 3, 5, 7, 11, 13 这 5 个因数中任取若干个组成成积, 所有的偶因数为

$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 32$ 个.

(2) 解析: 因为四面体中仅有 3 对异面直线, 可将问题分解成正方体的 8 个顶点可构成多少个不同的四面体, 从正方体 8 个顶点中任取四个顶点构成的四面体有 $C_8^4 - 12 = 58$ 个, 所以 8 个顶点可连成的异面直线有 $3 \times 58 = 174$ 对.

21. 利用对应思想转化法 : 对应思想是教材中渗透的一种重要的解题方法, 它可以将复杂的问题转化为简单问题处理 .

例 21. (1) 圆周上有 10 点, 以这些点为端点的弦相交于圆内的交点有多少个?

(2) 某城市的街区有 12 个全等的矩形组成, 其中实线表示马路, 从 A 到 B 的最短路径有多少种?

解析: 因为圆的一个内接四边形的两条对角线相交于圆内一点, 一个圆的内接四边形就对应着两条弦相交

于圆内的一个交点, 于是问题就转化为圆周上的 10 个点可以确定多少个不同的四边形, 显然有 C_{10}^4 个, 所

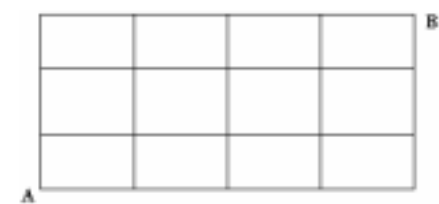
以圆周上有 10 点, 以这些点为端点的弦相交于圆内的交点有 C_{10}^4 个.

(2) 解析: 可将图中矩形的一边叫一小段, 从 A 到 B 最短路线必须走 7 小段, 其中: 向东 4 段, 向北 3 段; 而且前一段的尾接后一段的首, 所以只要确定向东走过 4 段的走法, 便能确定路径, 因此不同走法有 C_7^4 种.

例 17 圆周上共有 15 个不同的点, 过其中任意两点连一弦, 这些弦在圆内的交点最多有多少个?

分析: 因两弦在圆内若有一交点, 则该交点对应于一个以两弦的四端点为顶点的圆内接四边形, 则问题化为圆周上的 15 个不同的点能构成多少个圆内接四边形, 因此这些现在圆内

的交点最多有 $C_{15}^4 = 1365$ (个)



(四) 染色问题

24. 染色问题合并单元格解决

八、排列组合中常见模型

(一) 分组问题

由于涉及的面比较广, 所以是排列、组合中的难点。如果只是断章取义的去教学, 不从根本上去加以理解、归纳, 那么就很难正确的解答各类题型, 下面通过例题予以浅谈。

1、非均匀分组

所谓“非均匀分组”是指将所有元素分成元素个数彼此不相等的组。

例 1. 七个人参加义务劳动, 按下列方法分组有多少种不同的分法?

(1) 分成三组, 分别为 1 人、2 人、4 人;

(2) 选出 5 个人再分成两组, 一组 2 人, 另一组 3 人。

解: (1) 选出 1 人的方法有 C_7^1 种, 再由剩下的 6 个人中选出 2 人的方法有 C_6^2 种, 剩下的 4 人为一组有 C_4^4 种, 依分步计数原理得分组的方法有 $C_7^1 C_6^2 C_4^4 = 105$ (种)

(2) 可直接从 7 人中选出 2 人的方法有 C_7^2 种, 再由余下的 5 个人中选 3 人的方法有 C_5^3 种, 所以依分步计数原理, 分组的方法有: $C_7^2 C_5^3 = 210$ (种)。

也可先选取 5 人, 再分为两组有 $C_7^5 C_5^2 C_3^3 = 210$ (种)。

2、均匀分组

所谓“均匀分组”是指将所有元素分成所有组元素个数相等或部分组元素个数相等的组。

(1) 全部均匀分组

例 2. 从 7 个参加义务劳动的人中, 选出 6 个人, 分成两组, 每组都是 3 人, 有多少种不同的分法?

分析: 记 7 个人为 a、b、c、d、e、f、g 写出一些组来考察。表 1

选 3 人	再选 3 人	分组方法种数
abc def	def abc	这两种只能 算一种分法
abc deg	deg abc	这两种只能 算一种分法
''	''	''

由表 1 可见，把 abc，def 看作 2 个元素顺序不同的排列有 A_2^2 种，而这 A_2^2 只能算一种分组方法。

解：选 3 人为一组有 C_7^3 种，再选 3 人为另一组有 C_4^3 种，依分步计数原理，又每 A_2^2 种分法只能算一种，所以不同的分法有 $C_7^3 C_4^3 / A_2^2 = 70$ （种）。

也可以先选再分组为 $C_7^6 C_6^3 C_3^3 / A_2^2 = 70$ （种）

(2) 部分均匀分组

例 3. 将十个不同的零件分成四堆，每堆分别有 2 个、2 个、2 个、4 个，有多少种不同的分法？

分析：记十个零件为 a、b、c、d、e、f、g、h、i、j 写出一些组来考察

表 2

选 2 个	再选 2	又选 2 个	剩下四个	分组方法数
ab	cd	ef	ghij	<div> 这A_3^3种只 能算一种 </div>
ab	ef	cd	ghij	
cd	ab	ef	ghij	
cd	ef	ab	ghij	
ef	ab	cd	ghij	
ef	cd	ab	ghij	
''	''	''	''	, ,

由表可见，把 ab、cd、ef 看作三个元素顺序不同的排列时有 A_3^3 种排法，而这种只能算一种分法。

解：因为分成 2 个、2 个、2 个、4 个元素的四个堆，分别为 C_{10}^2 、 C_8^2 、 C_6^2 、 C_4^4 种，由分步计数原理及每 A_3^3 中只能算一种不同的分组方法得 $C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^4 / A_3^3 = 3150$ （种）

由此可见，不论全部均匀分组还是部分均匀分组，如果有 m 个组的元素是均匀的，都有 A_m^m 种顺序不同的排法只能算一种分法。

3、编号分组

(1) 非均匀编号分组

例 4. 从 7 个参加义务劳动的人中选出 2 人一组、3 人一组，轮流挖土、运土，有多少种分组方法？

解：分组的方法有 $C_7^2 C_3^3 A_2^2 = 420$ (种)

注：由于分组后各组要担任不同的工作，这就将不编号的组变为编号的组，只需乘以组数的全排列即可。

(2) 部分均匀编号分组

例 5. 有 5 本不同的书全部分给 3 人，每人至少一本，有多少种不同的分法？

分析：5 本不同的书全部分给 3 人有两类情况，一类是一人得 3 本；另外两人各得 1 本；另一类是一人得 1 本，另外两人各得 2 本。

解：(1) 将书分成 3 本、1 本、1 本三组，再分给三个人的方法有：

$$(C_5^3 C_2^1 C_1^1 / A_2^2) \cdot A_3^3 = 60 \text{ (种)}$$

(2) 将书分成 2 本、2 本、1 本三组，再分给三人共有：

$$(C_5^2 C_3^2 C_1^1 / A_2^2) \cdot A_3^3 = 90 \text{ (种)}$$

所以，总的分组方法有

$$60 + 90 = 150 \text{ (种)}$$

注：此类题型只要先分组再排列即可。

例 6. 已知集合 A 含有 4 个元素，集合 B 含 3 个元素，现建立从 A 到 B 的映射 $f: A \rightarrow B$ ，使 B 中的每个元素在 A 中都有原象的映射有多少个？

解：先把 A 中的 4 个元素分成 3 组，即 2 个、1 个、1 个，所有分组方法有 $C_4^2 C_2^1 C_1^1 / A_2^2$ 种。

再把 B 中的 3 个元素看成 3 个位子，然后在 3 个位子全排有

$$(C_4^2 C_2^1 C_1^1 / A_2^2) A_3^3 = 36 \text{ 种}$$

因此使 B 中的元素都有原象的映射有 36 个。

(二)全错位排列问题

每个元素都不在自己编号的位置上的排列问题，我们把这种限制条件的排列问题叫做 全错位排列问题 。

1. 错位排列问题

例 1. 4 名同学各写一张贺卡，先集中起来，然后每人从中拿出一张别人写的贺卡，则四张贺卡的不同分配方式共有 _____ 种。

例 2. 将编号为 1, 2, 3, 4 的四个小球分别放入编号为 1, 2, 3, 4 的四个盒子中，要求每个盒子放一个小球，且小球的编号与盒子的编号不能相同，则共有 _____ 种不同的放法 。

这两个问题的本质都是每个元素都不在自己编号的位置上的排列问题，我们把这种限制条件的排列问题叫做 全错位排列问题 。

例 3. 五位同学坐在一排，现让五位同学重新坐，至多有两位同学坐自己原来的位置，则不同的坐法有 _____ 种。

解析：可以分类解决：

第一类，所有同学都不坐自己原来的位置；

第二类，恰有一位同学坐自己原来的位置；

第三类，恰有两位同学坐自己原来的位置。

对于第一类，就是上面讲的全错位排列问题；对于第二、第三类有部分元素还占有原来的位置，其余元素可以归结为全错位排列问题，我们称这种排列问题为部分错位排列问题。

设 n 个元素全错位排列的排列数为 T_n ，则对于例 3，第一类排列数为 T_5 ，第二类先确定一个排原来位置的同学有 5 种可能，其余四个同学全错位排列，所以第二类的排列数为 $5T_4$ ，第三类先确定两个排原位的同学，有 $C_5^2=10$ 种，所以第三类的排列数为 $10T_3$ ，因此例 3 的答案为： $T_5+5T_4+10T_3$ 。

由于生活中很多这样的问题，所以我们有必要探索一下关于全错位排列问题的解决方法。

2. 关于全错位排列数的一个递推关系式： $T_n = (n-1)(T_{n-1}+T_{n-2})$, ($n \geq 3$)

(1). 一般地，设 n 个编号为 1、2、3、...、 i 、...、 j 、...、 n 的不同元素 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n$ ，排在一排，且每个元素均不排在与其编号相同的位置，这样的全错位排列数为 T_n ，则 $T_2=1, T_3=2$ ， $T_n = (n-1)(T_{n-1}+T_{n-2})$, ($n \geq 3$)。

(2). 递推关系的确立

显然对于 $n=1, 2$ 时有 $T_1=0, T_2=1$ 。

当 $n \geq 3$ 时，在 n 个不同元素中任取一个元素 a_i 不排在与其编号相对应的 i 位，必排在剩下 $n-1$ 个位置之一，所以 a_i 有 $n-1$ 种排法。

对 a_i 每一种排法，如 a_i 排在 j 位，对应 j 位的元素 a_j 的排位总有两种情况：

第一种情况： a_j 恰好排在 i 位上，如表 (1)

1	2	3	...	i	...	j	...	n
				a_j		a_i		

表 (1)

此时， a_i 排在 j 位， a_j 排在 i 位，元素 a_i, a_j 排位已定，还剩 $n-2$ 个元素，每个元素均有一个不能排的位置，它们的排位问题就转化为 $n-2$ 个元素全错位排列数，应有 T_{n-2} 种；

第二种情况： a_j 不排在 i 位上，如表 (2)

1	2	3	...	i	...	j	...	n
						a_i		

a_j 不排 i 位

表 (2)

此时， a_i 仍排在 j 位， a_j 不排在 i 位，则 a_j 有 $n-1$ 个位置可排，除 a_i 外，还有 $n-1$ 个元素，每个元素均有一个不能排的位置，问题就转化为 $n-1$ 个元素全错位排列，排列数为 T_{n-1} ，由乘法原理和加法原理可得：

$T_n = (n-1)(T_{n-1}+T_{n-2})$, ($n \geq 3$)。

利用此递推关系可以分别算出 $T_4=9, T_5=44$ ，所以题三的答案为 $44+5 \times 9+10 \times 2=109$ 。

3. 关于全错位排列数的一个通项公式： $T_n = n! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right]$ ($n \geq 2$)。

(1). 探索

规定 $A_n^0 = 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，试计算以下各式的值：

(1) $A_4^2 - A_4^1 + A_4^0$ ；

(2) $A_5^3 - A_5^2 + A_5^1 - A_5^0$ ；

(3) $A_6^4 - A_6^3 + A_6^2 - A_6^1 + A_6^0$ 。

很容易计算三式的值依次为 9, 44, 265. 而这与利用上面的递推关系式得到的 T_4, T_5, T_6 刚好吻合, 即

$$\begin{aligned} T_4 &= A_4^2 - A_4^1 + A_4^0; \\ T_5 &= A_5^3 - A_5^2 + A_5^1 - A_5^0; \\ T_6 &= A_6^4 - A_6^3 + A_6^2 - A_6^1 + A_6^0. \end{aligned}$$

(2). 猜想

根据上面的探索, 我们可以猜想 n 个元素全错位排列的排列数为

$$T_n = A_n^{n-2} - A_n^{n-3} + \dots + (-1)^n A_n^0 \quad (n \geq 2) \quad (*)$$

为了更容易看清其本质, 我们对这个式子进行变形, 得到:

$$\begin{aligned} T_n &= A_n^{n-2} - A_n^{n-3} + \dots + (-1)^n A_n^0 \\ &= \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!} = n! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right] \end{aligned}$$

(3). 证明 (数学归纳法)

$n=2, 3$ 时 $(*)$ 式显然成立;

假设 $n=k, k-1$ 时 $(*)$ 式成立, 则当 $n=k+1$ 时, 有上面的递推关系式可得:

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= k(T_k + T_{k-1}) \\ &= k \left\{ k! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \right] + (k-1)! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \right] \right\} \\ &= k \cdot (k-1)! \cdot \left\{ k \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \right] + \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \right] \right\} \\ &= k! \cdot \left[\frac{k+1}{2!} - \frac{k+1}{3!} + \dots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{k+1}{(k-1)!} + k \cdot (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \right] \\ &= k! \cdot \left[\frac{k+1}{2!} - \frac{k+1}{3!} + \dots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{k+1}{(k-1)!} + (k+1) \cdot (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} - (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \right] \\ &= k! \cdot \left[\frac{k+1}{2!} - \frac{k+1}{3!} + \dots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{k+1}{(k-1)!} + (k+1) \cdot (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} - (-1)^k \cdot \frac{k+1}{(k+1)!} \right] \\ &= k! \cdot \left[\frac{k+1}{2!} - \frac{k+1}{3!} + \dots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{k+1}{(k-1)!} + (k+1) \cdot (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} + (-1)^k \cdot \frac{k+1}{(k+1)!} \right] \\ &= (k+1)! \cdot \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{(k-1)!} + (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} + (-1)^k \cdot \frac{1}{(k+1)!} \right]. \end{aligned}$$

$n=k+1$ 时 $(*)$ 式也成立.

由以上过程可知 n 个元素全错位排列的排列数为:

$$\begin{aligned} T_n &= A_n^{n-2} - A_n^{n-3} + \dots + (-1)^n A_n^0 = \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!} \\ &= n! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right] \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

4. 关于全错位排列数的另一个递推关系式: $T_n = nT_{n-1} + (-1)^n$

由 $T_2=1$, $T_3=2$, $T_4=9$, $T_5=44$, $T_6=265$ 可得 :

$$T_3=3T_2-1 ;$$

$$T_4=4T_3+1 ;$$

$$T_5=5T_4-1 ;$$

$$T_6=6T_5+1.$$

于是猜想 $T_n=nT_{n-1}+(-1)^n$.

证明：由上面已证明的全错位排列数公式可知

$$\begin{aligned} \text{右边} &= n \cdot (n-1)! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \right] + (-1)^n \\ &= n! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \right] + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!} \\ &= n! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right] = \text{左边}. \end{aligned}$$

所以 $T_n=nT_{n-1}+(-1)^n$.

5.点评

在解决排列组合问题时，经常涉及到全错位或部分错位的排列问题，在元素不是很多时，我们可以通过分类讨论的方案，对问题进行讨论，但当元素较多时讨论起来非常麻烦，所以掌握了全错位排列数的一个通项公式和两个递推关系式，对我们解决这一类问题将带来很大的方便。

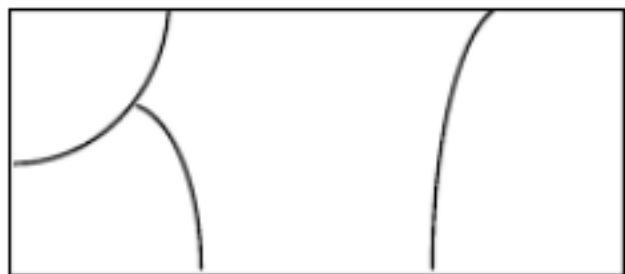
（三）高考数学中涂色问题的常见解法及策略

与涂色问题有关的试题新颖有趣，近年已经在高考题中出现，其中包含着丰富的数学思想。解决涂色问题方法技巧性强且灵活多变，因而这类问题有利于培养学生的创新思维能力、分析问题与观察问题的能力，有利于开发学生的智力。本文拟总结涂色问题的常见类型及求解方法。

一.区域涂色问题 www.k.s.5.u.c.o.m

（1）根据分步计数原理，对各个区域分步涂色，这是处理染色问题的基本方法。

1. 用 5 种不同的颜色给图中标、
、
的各部分涂色，每部分只涂一种颜色，相邻部分涂不同颜色，则不同的涂色方法有多少种？



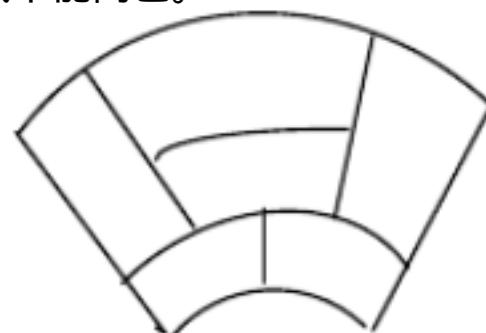
分析：先给 号区域涂色有 5 种方法，再给 号涂色有 4 种方法，接着给 号涂色方法有 3 种，由于 号与 、 不相邻，因此 号有 4 种涂法，根据分步计数原理，不同的涂色方法有 $5 \times 4 \times 3 \times 4 = 240$

（2）根据共用了多少种颜色讨论，分别计算出各种出各种情形的种数，再用加法原理求出不同的涂色方法种数。

例 2、四种不同的颜色涂在如图所示的 6 个区域，且相邻两个区域不能同色。

分析：依题意只能选用 4 种颜色，要分四类：

- （1）与 同色、与 同色，则有 A_4^4 ；
- （2）与 同色、与 同色，则有 A_4^4 ；

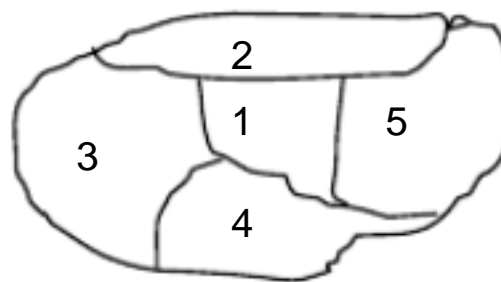


(3) 与 同色、与 同色, 则有 A_4^4 ;

(4) 与 同色、与 同色, 则有 A_4^4 ; (5) 与 同色、与 同色, 则有 A_4^4 ;

所以根据加法原理得涂色方法总数为 $5 A_4^4 = 120$

例 3、如图所示, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻区域不得使用同一颜色, 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有多少种?



分析: 依题意至少要用 3 种颜色

1) 当先用三种颜色时, 区域 2 与 4 必须同色,

2) 区域 3 与 5 必须同色, 故有 A_4^3 种;

3) 当用四种颜色时, 若区域 2 与 4 同色,

4) 则区域 3 与 5 不同色, 有 A_4^4 种; 若区域 3 与 5 同色, 则区域 2 与 4 不同色, 有 A_4^4 种, 故用四种颜色时共有 $2 A_4^4$ 种。由加法原理可知满足题意的着色方法共有 $A_4^3 + 2 A_4^4 = 24 + 2 \times 24 = 72$

(3) 根据某两个不相邻区域是否同色分类讨论, 从某两个不相邻区域同色与不同色入手, 分别计算出两种情形的种数, 再用加法原理求出不同涂色方法总数。

例 4 用红、黄、蓝、白、黑五种颜色涂在如图所示的四个区域内, 每个区域涂一种颜色, 相邻两个区域涂不同的颜色, 如果颜色可以反复使用, 共有多少种不同的涂色方法?

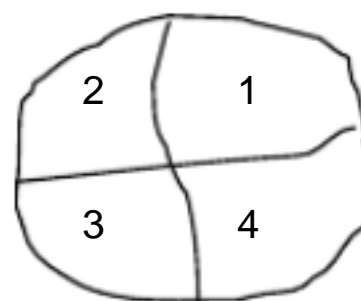
分析: 可把问题分为三类:

(1) 四格涂不同的颜色, 方法种数为 A_5^4 ;

(2) 有且仅两个区域相同的颜色,

(3) 即只有一组对角小方格涂相同的颜色, 涂法种数为

$$2 C_5^1 A_4^2;$$



5) 两组对角小方格分别涂相同的颜色, 涂法种数为 A_5^2 ,

因此, 所求的涂法种数为 $A_5^2 + 2 C_5^1 A_4^2 + A_5^2 = 260$

(4) 根据相间区使用颜色的种类分类

例 5 如图, 6 个扇形区域 A、B、C、D、E、F, 现给这 6 个区域着色, 要求同一区域涂同一种颜色, 相邻的两个区域不得使用同一种颜色, 现有 4 种不同的颜色可

解 (1) 当相间区域 A、C、E 着同一种颜色时,

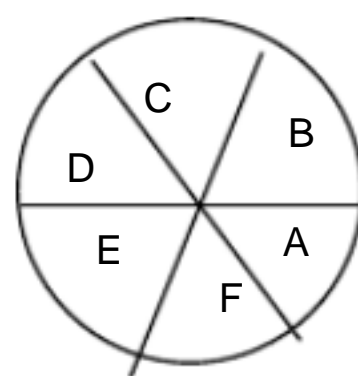
有 4 种着色方法, 此时,

B、D、F 各有 3 种着色方法,

此时, B、D、F 各有 3 种着色方法

故有 $4 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$

种方法。



(2) 当相间区域 A、C、E 着色两不同的颜色时, 有 $C_3^2 A_4^2$ 种着色方法, 此时 B、D、F 有 $3 \times 2 \times 2$ 种着色方法, 故共有 $C_3^2 A_4^2 \times 3 \times 2 \times 2 = 432$ 种着色方法。

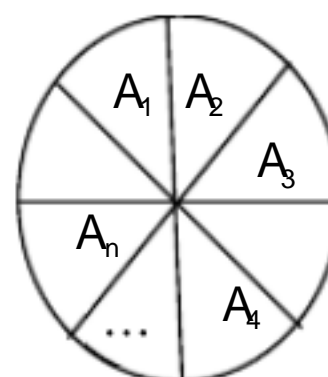
(3) 当相间区域 A、C、E 着三种不同的颜色时有 A_4^3 种着色方法, 此时 B、D、F 各有 2 种着色方法。此时共有 $A_4^3 \times 2 \times 2 \times 2 = 192$ 种方法。

故总计有 $108 + 432 + 192 = 732$ 种方法。

说明: 关于扇形区域涂色问题还可以用数列中的递推公来解决。

如: 如图, 把一个圆分成 $n (n \geq 2)$ 个扇形, 每个扇形用红、白、蓝、黑四色之一染色, 要求相邻扇形不同色, 有多少种染色方法?

解: 设分成 n 个扇形时染色方法为 a_n 种



(1) 当 $n=2$ 时 A_1, A_2 有 $A_4^2=12$ 种, 即 $a_2=12$

(2) 当分成 n 个扇形, 如图, A_1 与 A_2 不同色, A_2 与 A_3 不同色, \dots , A_{n-1}

与 A_n 不同色, 共有 $4 \times 3^{n-1}$ 种染色方法, 但由于 A_n 与 A_1 邻, 所以应排除 A_n 与 A_1 同色的情形; A_n 与 A_1 同色时, 可把 A_n, A_1 看成一个扇形, 与前 $n-2$ 个扇形加在一起为 $n-1$ 个扇形, 此时有 a_{n-1} 种染色法, 故有如下递推关系:

$$\begin{aligned} a_n &= 4 \times 3^{n-1} - a_{n-1} \therefore a_n = -a_{n-1} + 4 \times 3^{n-1} = -(-a_{n-2} + 4 \times 3^{n-2}) + 4 \times 3^{n-1} \\ &= a_{n-2} - 4 \times 3^{n-2} + 4 \times 3^{n-1} = -a_{n-3} + 4 \times 3^{n-3} - 4 \times 3^{n-4} + 4 \times 3^{n-3} = \dots = 4 \times [3^{n-1} - 3^{n-2} + 3^{n-3} - \dots + (-1)^n \times 3] \\ &= (-1)^n \times 3 + 3^n \end{aligned}$$

二. 点的涂色问题

方法有: (1) 可根据共用了多少种颜色分类讨论, (2) 根据相对顶点是否同色分类讨论, (3) 将空间问题平面化, 转化成区域涂色问题。

例 6、将一个四棱锥 $S-ABCD$ 的每个顶点染上一种颜色, 并使同一条棱的两端点异色, 如果只有 5 种颜色可供使用, 那么不同的染色方法的总数是多少?

解法一: 满足题设条件的染色至少要用三种颜色。

(1) 若恰用三种颜色, 可先从五种颜色中任选一种染顶点 S , 再从余下的四种颜色中任选两种涂

A, B, C, D 四点, 此时只能 A 与 C, B 与 D 分别同色, 故有 $C_5^1 A_4^2 = 60$ 种方法。

(2) 若恰用四种颜色染色, 可以先从五种颜色中任选一种颜色染顶点 S , 再从余下的四种颜色中任选两种染 A 与 B , 由于 A, B 颜色可以交换, 故有 A_4^2 种染法; 再从余下的两种颜色中任选一种染 D 或 C , 而 D 与 C , 而 D 与 C 中另一个只需染与其相对顶点同色即可, 故有 $C_5^1 A_4^2 C_2^1 C_2^1 = 240$ 种方法。

(3) 若恰用五种颜色染色, 有 $A_5^5 = 120$ 种染色法

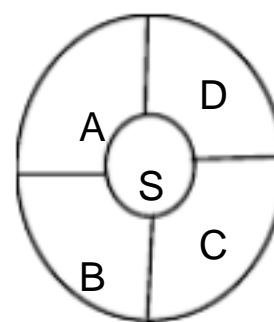
综上所述, 满足题意的染色方法数为 $60+240+120=420$ 种。

解法二: 设想染色按 $S-A-B-C-D$ 的顺序进行, 对 S, A, B 染色, 有 $5 \times 4 \times 3 = 60$ 种染色方法。

由于 C 点的颜色可能与 A 同色或不同色, 这影响到 D 点颜色的选取方法数, 故分类讨论:

C 与 A 同色时 (此时 C 对颜色的选取方法唯一), D 应与 $A(C), S$ 不同色, 有 3 种选择; C 与 A 不同色时, C 有 2 种选择的颜色, D 也有 2 种颜色可供选择, 从而对 C, D 染色有 $1 \times 3 + 2 \times 2 = 7$ 种染色方法。由乘法原理, 总的染色方法是 $60 \times 7 = 420$

解法三: 可把这个问题转化成相邻区域不同色问题: 如图, 对这五个区域用 5 种颜色涂色, 有多少种不同的涂色方法?



二. 线段涂色问题

对线段涂色问题, 要注意对各条线段依次涂色, 主要方法有:

6) 根据共用了多少颜色分类讨论

7) 根据相对线段是否同色分类讨论。

例 7、用红、黄、蓝、白四种颜色涂矩形 $ABCD$ 的四条边, 每条边只涂一种颜色, 且使相邻两边涂不同的颜色, 如果颜色可以反复使用, 共有多少种不同的涂色方法?

解法一: (1) 使用四颜色共有 A_4^4 种;

(2) 使用三种颜色涂色, 则必须将一组对边染成同色, 故有 $C_4^1 C_2^1 A_3^2$ 种,

(3) 使用二种颜色时, 则两组对边必须分别同色, 有 A_4^2 种

因此, 所求的染色方法数为 $A_4^4 + C_4^1 C_2^1 A_3^2 + A_4^2 = 84$ 种

解法二: 涂色按 $AB-BC-CD-DA$ 的顺序进行, 对 AB, BC 涂色有 $4 \times 3 = 12$ 种涂色方法。

由于 CD 的颜色可能与 AB 同色或不同色, 这影响到 DA 颜色的选取方法数, 故分类讨论: 当

CD 与 AB 同色时, 这时 CD 对颜色的选取方法唯一, 则 DA 有 3 种颜色可供选择 CD 与 AB 不同色时, CD 有两种可供选择的颜色, DA 也有两种可供选择的颜色, 从而对 CD, DA 涂色有 $1 \times 3 + 2 \times 2 = 7$ 种涂色方法。

由乘法原理, 总的涂色方法数为 $12 \times 7 = 84$ 种

例 8、用六种颜色给正四面体 $A-BCD$ 的每条棱染色，要求每条棱只染一种颜色且共顶点的棱涂不同的颜色，问有多少种不同的涂色方法？

解：(1) 若恰用三种颜色涂色，则每组对棱必须涂同一颜色，而这三组间的颜色不同，故有 A_6^3 种方法。

(2) 若恰用四种颜色涂色，则三组对棱中有二组对棱的组内对棱涂同色，但组与组之间不同色，故有 $C_3^2 A_6^4$ 种方法。

(3) 若恰用五种颜色涂色，则三组对棱中有一组对棱涂同一种颜色，故有 $C_3^1 A_6^5$ 种方法。

(4) 若恰用六种颜色涂色，则有 A_6^6 种不同的方法。

综上，满足题意的总的染色方法数为 $A_6^3 + C_3^2 A_6^4 + C_3^1 A_6^5 + A_6^6 = 4080$ 种。

三.面涂色问题

例 9、从给定的六种不同颜色中选用若干种颜色，将一个正方体的 6 个面涂色，每两个具有公共棱的面涂成不同的颜色，则不同的涂色方案共有多少种？

分析：显然，至少需要 3 种颜色，由于有多种不同情况，仍应考虑利用加法原理分类、乘法原理分步进行讨论

解：根据共用多少种不同的颜色分类讨论

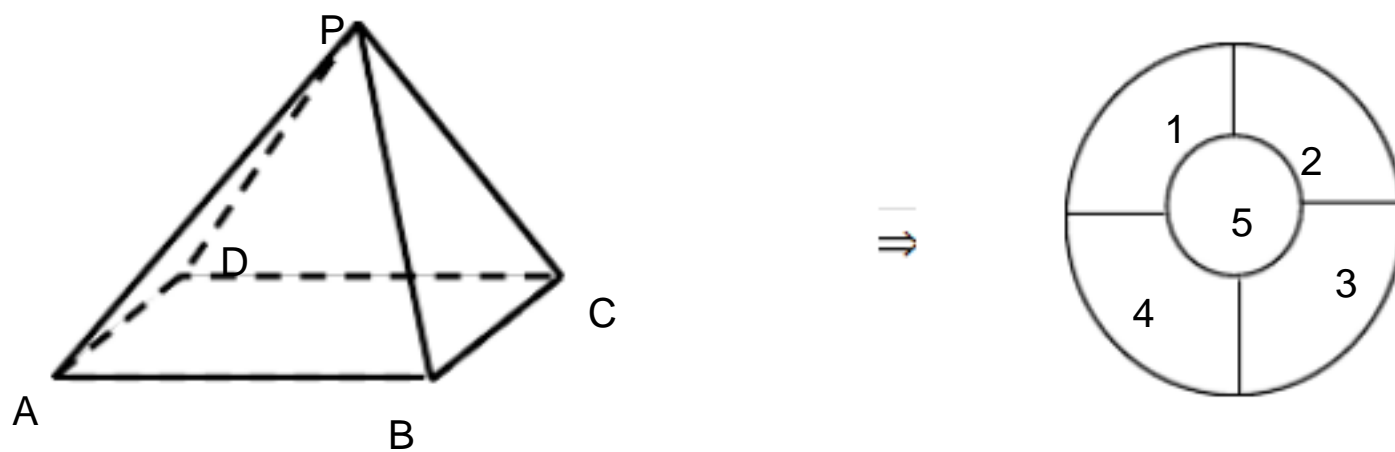
(1) 用了六种颜色，确定某种颜色所涂面为下底面，则上底颜色可有 5 种选择，在上、下底已涂好后，再确定其余 4 种颜色中的某一种所涂面为左侧面，则其余 3 个面有 3! 种涂色方案，根据乘法原理 $n_1 = 5 \times 3! = 30$

(2) 共用五种颜色，选定五种颜色有 $C_6^5 = 6$ 种方法，必有两面同色（必为相对面），确定为上、下底面，其颜色可有 5 种选择，再确定一种颜色为左侧面，此时的方法数取决于右侧面的颜色，有 3 种选择（前后面可通过翻转交换）

$n_2 = C_6^5 \times 5 \times 3 = 90$ ；(3) 共用四种颜色，仿上分析可得

$n_3 = C_6^4 C_4^2 = 90$ ；(4) 共用三种颜色， $n_4 = C_6^3 = 20$

例 10、四棱锥 $P-ABCD$ ，用 4 种不同的颜色涂在四棱锥的各个面上，要求相邻不同色，有多少种涂法？



解：这种面的涂色问题可转化为区域涂色问题，如右图，区域 1、2、3、4 相当于四个侧面，区域 5 相当于底面；根据共用颜色多少分类：

(1) 最少要用 3 种颜色，即 1 与 3 同色、2 与 4 同色，此时有 A_4^3 种；

(2) 当用 4 种颜色时，1 与 3 同色、2 与 4 两组中只能有一组同色，此时有 $C_2^1 A_4^4$ ；故满足题意

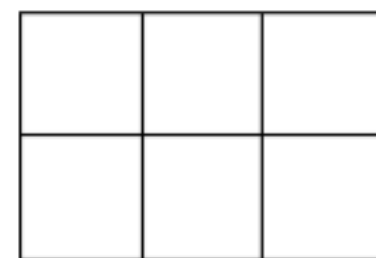
总的涂色方法总方法交总数为 $A_4^3 + C_2^1 A_4^4 = 72$

用三种不同的颜色填涂如右图 3×3 方格中的 9 个区域，要求

每行、每列的三个区域都不同色，则不同的填涂方法种数共有 (D)



A、48、 B、24 C、12 D、6



四、染色模型在“立几”中的计数问题应用

在近几年的高考试题和各地模拟试题中频繁出现以“立几”中的点、线、面的位置关系为背景的计数问题，这类问题题型新颖、解法灵活、多个知识点交织在一起，综合性强，能力要求高，有一定的难度，它不仅考查相关的基础知识，而且注重对数学思想方法和数学能力的考查。现结合具体例子谈谈这种问题的求解策略。

1. 直接求解 w.w.w.k.s.5.u.c.o.m

例 1：从平面 α 上取 6 个点，从平面 β 上取 4 个点，这 10 个点最多可以确定多少个三棱锥？

解析：利用三棱锥的形成将问题分成 α 平面上有 1 个点、2 个点、3 个点三类直接求解共有

$$C_6^1 C_4^3 + C_6^2 C_4^2 + C_6^3 C_4^1 = 194 \text{ 个三棱锥}$$

例 2：在四棱锥 P-ABCD 中，顶点为 P，从其它的顶点和各棱的中点中取 3 个，使它们和点 P 在同一平面上，不同的取法有 A.40 B.48 C.56 D.62 种

解析：满足题设的取法可以分成三类

1. 在四棱锥的每一个侧面上除 P 点外取三点有 $4C_5^3 = 40$ 种不同取法；

2. 在两个对角面上除点 P 外任取 3 点，共有 $2C_4^3 = 8$ 种不同取法；

3. 过点 P 的每一条棱上的 3 点和与这条棱异面的棱的中点也共面，共有 $4C_2^1 = 8$ 种不同取法，故共有 $40+8+8=56$ 种

评注：这类问题应根据立体图形的几何特点，选取恰当的分类标准，做到分类不重复、不遗漏。

2. 结合“立几”概念求解

例 3：空间 10 个点无三点共线，其中有 6 个点共面，此外没有任何四个点共面，则这些点可以组成多少个四棱锥？

解析： $C_6^4 C_4^1 = 60$

3. 结合“立几”图形求解

如果把两条异面直线看作“一对”，那么六棱锥的棱和底面所有的 12 条直线中，异面直线有： A. 12 B. 24 C. 36 D. 48

用正五棱柱的 10 个顶点中的 5 个顶点作四棱锥的 5 个顶点，共可得多少个四棱锥？

分类：以棱柱的底面为棱锥的底面 $2C_5^4 C_5^1$ ；

以棱柱的侧面为棱锥的底面 $C_5^1 C_6^1$

以棱柱的对角面为棱锥的底面 $C_5^1 C_6^1$

以图中 ADC_1B_1 (梯形) 为棱锥的底面 $2C_5^1 C_6^1$

4. 构造几何模型求解

在正方体的 8 个顶点的所有连线中，有多少对异面直线？

与空间不共面的四点距离相等的平面有多少个？

(05 年湖北) 以平面六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的任意三个顶点为顶点作三角形，从中随机取出两个三角形，则这两个三角形不共面的概率为

A. $\frac{367}{385}$ B. $\frac{376}{385}$ C. $\frac{192}{385}$ D. $\frac{18}{385}$ A

在知识的网络交汇点初设计命题是近几年高考命题改革强调的重要观念之一，在复习备考中，要把握好知识间的纵横联系和综合，使所学知识真正融会贯通，运用自如，形成有序的网络化知识体系。

一、对于已知直线 a, 如果直线 b 同时满足下列三个条件：与直线 a 异面；与直线 a 所成的角为定值 θ ；与直线 a 的距离为定值 d. 那么这样的直线 b 有

A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 无数条

2. 如果一条直线与一个平面垂直，那么称此直线与平面构成一个“正交线面对”。在一个正方体中，由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的“正交线面对”的个数是

A. 48 B. 36 C. 24 D. 18

3. 设四棱锥 P-ABCD 的底面不是平行四边形，用平面 α 去截这个四棱锥，使得截面四边形是平行四边形，则

这样的平面 α

- A. 不存在 B. 只有 1 个 C. 恰有 4 个 D. 有无穷多个

4. 如图, 点 P_1, P_2, \dots, P_{10} 分别是四面体的顶点或棱的中点, 那么在同一平面上的四点组 (P_i, P_j, P_k, P_l) 共有 个

5. 在正方体的一个面所在的平面内, 任意画一条直线, 则与它异面的正方体的棱的条数是

6. 正方体的 8 个顶点中任取 4 个不在同一平面上的顶点 P, Q, M, N 组成的二面角为 $P-MN-Q$ 的大小可能值有 个.

答案

1. D 2. B 3. D 4. 33 5. 4 或 6 或 7 或 8 6. 8 个

附录

排列组合题型总结

排列组合问题千变万化, 解法灵活, 条件隐晦, 思维抽象, 难以找到解题的突破口. 因而在求解排列组合应用题时, 除做到: 排列组合分清, 加乘原理辩明, 避免重复遗漏外, 还应注意积累排列组合问题得以快速准确求解.

一. 直接法

1. 特殊元素优先法

例 1 用 1, 2, 3, 4, 5, 6 这 6 个数字组成无重复的四位数, 试求满足下列条件的四位数各有多少个

(1) 数字 1 不排在个位和千位

(2) 数字 1 不在个位, 数字 6 不在千位.

分析: (1) 个位和千位有 5 个数字可供选择 A_5^2 , 其余 2 位有四个可供选择 A_4^2 , 由乘法原理: $A_5^2 A_4^2 = 240$

2. 特殊位置法

(2) 当 1 在千位时余下三位有 $A_5^3 = 60$, 1 不在千位时, 千位有 A_4^1 种选法, 个位有 A_4^1 种, 余下的有 A_4^2 , 共有 $A_4^1 A_4^1 A_4^2 = 192$ 所以总共有 $192 + 60 = 252$

二. 间接法 当直接法求解类别比较大时, 应采用间接法. 如上例中 (2) 可用间接法 $A_6^4 - 2A_5^3 + A_4^2 = 252$

例 2 有五张卡片, 它的正反面分别写 0 与 1, 2 与 3, 4 与 5, 6 与 7, 8 与 9, 将它们任意三张并排放在一起组成三位数, 共可组成多少个不同的三位数?

分析: 此例正面求解需考虑 0 与 1 卡片用与不用, 且用此卡片又分使用 0 与使用 1, 类别较复杂, 因

而可使用间接计算: 任取三张卡片可以组成不同的三位数 $C_5^3 \times 2^3 \times A_3^3$ 个, 其中 0 在百位的有 $C_4^2 \times 2^2 \times A_2^2$ 个, 这是不合题意的. 故共可组成不同的三位数 $C_5^3 \times 2^3 \times A_3^3 - C_4^2 \times 2^2 \times A_2^2 = 432$ (个)

三. 插空法 当需排元素中有不能相邻的元素时, 宜用插空法.

例 3 在一个含有 8 个节目的节目单中, 临时插入两个歌唱节目, 且保持原节目顺序, 有多少中插入方法?

分析: 原有的 8 个节目中含有 9 个空档, 插入一个节目后, 空档变为 10 个, 故有 $A_9^1 \times A_{10}^1 = 100$ 中插入方法.

四. 捆绑法 当需排元素中有必须相邻的元素时, 宜用捆绑法.

例 4 4 名男生和 3 名女生共坐一排, 男生必须排在一起的坐法有多少种?

分析：先将男生捆绑在一起看成一个大元素与女生全排列有

A_4^4 种排法，而男生之间又有 A_4^4 种排法，

又乘法原理满足条件的排法有： $A_4^4 \times A_4^4 = 576$

练习 1. 四个不同的小球全部放入三个不同的盒子中，若使每个盒子不空，则不同的放法有 _____ 种

($C_4^2 A_3^3$)

1. 某市植物园要在 30 天内接待 20 所学校的学生参观，但每天只能安排一所学校，其中有一所学校

人数较多，要安排连续参观 2 天，其余只参观一天，则植物园 30 天内不同的安排方法有 ($C_{29}^1 \cdot A_{28}^{19}$) (注

意连续参观 2 天，即需把 30 天种的连续两天捆绑看成一天作为一个整体来选有 C_{29}^1 其余的就是 19 所学校选 28 天进行排列)

五. 隔板法 名额分配或相同物品的分配问题，适宜采隔板用法

例 5 某校准备组建一个由 12 人组成篮球队，这 12 个人由 8 个班的学生组成，每班至少一人，名额分配方案共 _____ 种。

分析：此例的实质是 12 个名额分配给 8 个班，每班至少一个名额，可在 12 个名额种的 11 个空当中插

入 7 块闸板，一种插法对应一种名额的分配方式，故有 C_{11}^7 种

练习 1. $(a+b+c+d)^{15}$ 有多少项？

当项中只有一个字母时，有 C_4^1 种 (即 a.b.c.d 而指数只有 15 故 $C_4^1 \cdot C_{14}^0$ 。

当项中有 2 个字母时，有 C_4^2 而指数和为 15，即将 15 分配给 2 个字母时，如何分，闸板法一分为 2， C_{14}^1 即 $C_4^2 C_{14}^1$

当项中有 3 个字母时 C_4^3 指数 15 分给 3 个字母分三组即可 $C_4^3 C_{14}^2$

当项种 4 个字母都在时 $C_4^4 \cdot C_{14}^3$ 四者都相加即可。

练习 2. 有 20 个不加区别的小球放入编号为 1, 2, 3 的三个盒子里，要求每个盒子内的球数不少编号

数，问有多少种不同的方法？(C_{16}^2)

3. 不定方程 $X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{50} = 100$ 中不同的整数解有 (C_{99}^{49})

六. 平均分堆问题

例 6 6 本不同的书平均分成三堆，有多少种不同的方法？

分析：分出三堆书 (a_1, a_2), (a_3, a_4), (a_5, a_6) 由顺序不同可以有 $A_3^3 = 6$ 种，而这 6 种分法只算一种分

$$\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3}$$

堆方式，故 6 本不同的书平均分成三堆方式有 =15 种

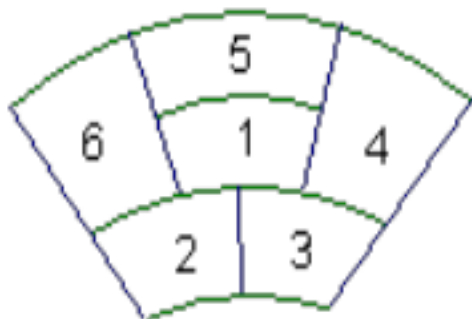
练习：1. 6 本书分三份，2 份 1 本，1 份 4 本，则有不同分法？

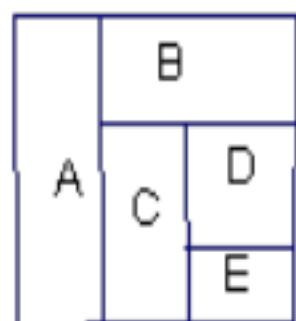
2. 某年级 6 个班的数学课，分配给甲乙丙三名数学教师任教，每人教两个班，则分派方法的种数。

七. 合并单元格解决染色问题

例 7 (全国卷(文、理))如图 1，一个地区分为 5 个行政区域，现

24





给地图着色，要求相邻区域不得使用同一颜色，现有四种颜色可供选择，则不同的着色方法共有 72 种（以数字作答）。

分析：颜色相同的区域可能是 2、3、4、5。

下面分情况讨论：

②④

() 当 2、4 颜色相同且 3、5 颜色不同时，将 2、4 合并成一个单元格，此时不同的着色方法

相当于 4 个元素

的全排列数

$$A_4^4$$

() 当 2、4 颜色不同且 3、5 颜色相同时，与情形 () 类似同理可得 A_4^4 种着色法。

③⑤

() 当 2、4 与 3、5 分别同色时，将 2、4；3、5 分别合并，这样仅有三个单元格

从 4 种颜色中选 3 种来着色这三个单元格，计有

$$C_4^3 \cdot A_3^3$$

种方法。

由加法原理知：不同着色方法共有

$$2A_4^4 + C_4^3 A_3^3 = 48 + 24 = 72 \text{ (种)}$$

练习 1 (天津卷(文)) 将 3 种作物种植

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

在如图的 5 块试验田里，每块种植一种作物且相邻的试验田不能种植同一作物，不同的种植方法共 72 种（以数字作答）。

2. (江苏、辽宁、天津卷(理)) 某城市中心广场建造一个花圃，花圃分为 6 个部分（如图 3），现要栽种 4 种颜色的花，每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的话，不同的栽种方法有 120 种（以数字作答）。

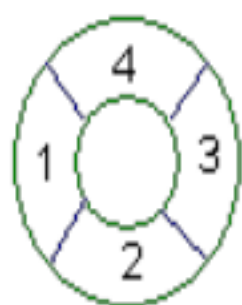
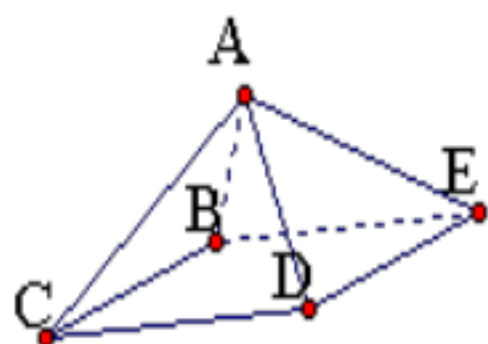


图 3

图 4

3. 如图 4，用不同的 5 种颜色分别为 ABCDE 五部分着色，相邻部分不能用同一颜色，但同一种颜色可以反复使用也可以不用，则符合这种要求的不同着色种数。（540）



4. 如图 5：四个区域坐定 4 个单位的人，有四种不同颜色的服装，每个单位的观众必须穿同种颜色的服装，且相邻两区域的颜色不同，不相邻区域颜色相同，不相邻区域颜色相同与否不受限制，那么不同的着色方法是 84 种（84）

图 5

图 6

5. 将一四棱锥 (图 6) 的每个顶点染一种颜色, 并使同一条棱的两端点异色, 若只有五种颜色可供使用, 则不同的染色方法共 _____ 种 (420)

八. 递推法

例八 一楼梯共 10 级, 如果规定每次只能跨上一级或两级, 要走上这 10 级楼梯, 共有多少种不同的走法?

分析: 设上 n 级楼梯的走法为 a_n 种, 易知 $a_1=1, a_2=2$, 当 $n \geq 2$ 时, 上 n 级楼梯的走法可分两类: 第一类: 是最后一步跨一级, 有 a_{n-1} 种走法, 第二类是最后一步跨两级, 有 a_{n-2} 种走法, 由加法原理知: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, 据此, $a_3 = a_1 + a_2 = 3, a_4 = a_2 + a_3 = 5, a_5 = a_3 + a_4 = 8, a_6 = 13, a_7 = 21, a_8 = 34, a_9 = 55, a_{10} = 89$. 故走上 10 级楼梯共有 89 种不同的方法。

九. 几何问题

1. 四面体的一个顶点位 A , 从其它顶点与各棱中点取 3 个点, 使它们和点 A 在同一平面上, 不同的取法有 _____ 种 ($3C_5^3 + 3 = 33$)

2. 四面体的棱中点和顶点共 10 个点 (1) 从中任取 3 个点确定一个平面, 共能确定多少个平面?

($C_{10}^3 - 4C_6^3 + 4 - 3C_4^3 + 3 - 6C_4^3 + 6 + 2 \times 6 = 29$)

(2) 以这 10 个点为顶点, 共能确定多少格凸棱锥? 三棱锥 $C_{10}^4 - 4C_6^4 - 6C_4^4 - 3C_4^4 = 141$ 四棱锥 $6 \times 4 \times 4 = 96$ $3 \times 6 = 18$ 共有 114

十. 先选后排法

例 9 有甲乙丙三项任务, 甲需 2 人承担, 乙丙各需 1 人承担, 从 10 人中选派 4 人承担这三项任务, 不同的选派方法有 ()

A. 1260 种

B. 2025 种

C. 2520 种

D. 5054 种

分析: 先从 10 人中选出 2 人

十一. 用转换法解排列组合问题

例 10. 某人连续射击 8 次有四次命中, 其中有三次连续命中, 按“中”与“不中”报告结果, 不同的结果有多少种.

解 把问题转化为四个相同的黑球与四个相同白球, 其中只有三个黑球相邻的排列问题.

$$A_5^2 = 20 \text{ 种}$$

例 11. 个人参加秋游带 10 瓶饮料, 每人至少带 1 瓶, 一共有多少种不同的带法.

解 把问题转化为 5 个相同的白球不相邻地插入已经排好的 10 个相同的黑球之间的 9 个空隙种的排列问题. $C_9^5 = 126$ 种

例 12 从 1, 2, 3, ..., 1000 个自然数中任取 10 个不连续的自然数, 有多少种不同的去法.

解 把问题转化为 10 个相同的黑球与 990 个相同白球, 其其中黑球不相邻的排列问题。

$$C_{991}^{10}$$

例 13 某城市街道呈棋盘形, 南北向大街 5 条, 东西向大街 4 条, 一人欲从西南角走到东北角, 路程最短的走法有多少种.

解 无论怎样走必须经过三横四纵, 因此, 把问题转化为 3 个相同的白球与四个相同的黑球的排列问

题. $C_7^3 = 35$ (种)

例 14 一个楼梯共 18 个台阶 12 步登完, 可一步登一个台阶也可一步登两个台阶, 一共有多少种不同的走法.

解 根据题意要想 12 步登完只能 6 个一步登一个台阶, 6 个一步登两个台阶, 因此, 把问题转化为 6 个相同的黑球与 6 个相同的白球的排列问题. $C_{12}^6 = 924$ (种).

例 15 求 $(a+b+c)^{10}$ 的展开式的项数.

解 展开式的项为 $a^i b^j c^k$, 且 $i+j+k=10$, 因此, 把问题转化为 2 个相同的黑球与 10 个相同的白球的排列问题. $C_{12}^2=66$ (种)

例 16 亚、欧乒乓球对抗赛, 各队均有 5 名队员, 按事先排好的顺序参加擂台赛, 双方先由 1 号队员比赛, 负者淘汰, 胜者再与负方 2 号队员比赛, 直到一方全被淘汰为止, 另一方获胜, 形成一种比赛过程. 那么所有可能出现的比赛过程有多少种?

解 设亚洲队队员为 a_1, a_2, \dots, a_5 , 欧洲队队员为 b_1, b_2, \dots, b_5 , 下标表示事先排列的出场顺序, 若以依次被淘汰的队员为顺序. 比赛过程转化为这 10 个字母互相穿插的一个排列, 最后获胜队逐步被淘汰的队员和可能未参加比赛的队员, 所以比赛过程可表示为 5 个相同的白球和 5 个相同黑球排列问题, 比赛过程的总数为 $C_{10}^5=252$ (种)

十二. 转化命题法

例 17 圆周上共有 15 个不同的点, 过其中任意两点连一弦, 这些弦在圆内的交点最多有多少个?

分析: 因两弦在圆内若有一交点, 则该交点对应于一个以两弦的四端点为顶点的圆内接四边形, 则问题

化为圆周上的 15 个不同的点能构成多少个圆内接四边形, 因此这些现在圆内的交点最多有 $C_{15}^4=1365$ (个)

十三. 概率法

例 18 一天的课程表要排入语文、数学、物理、化学、英语、体育六节课, 如果数学必须排在体育之前, 那么该天的课程表有多少种排法?

分析: 在六节课的排列总数中, 体育课排在数学之前与数学课排在体育之前的概率相等, 均为 $\frac{1}{2}$, 故本

例所求的排法种数就是所有排法的 $\frac{1}{2}$, 即 $\frac{1}{2} A_6^6=360$ 种

十四. 除序法 例 19 用 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 这七个数字组成没有重复数字的七位数中,

(1) 若偶数 2, 4, 6 次序一定, 有多少个?

(2) 若偶数 2, 4, 6 次序一定, 奇数 1, 3, 5, 7 的次序也一定的有多少个?

解 (1) $\frac{A_7^7}{A_3^3}$ (2) $\frac{A_7^7}{A_3^3 A_4^4}$

十五. 错位排列

例 20 同室四人各写一张贺卡, 先集中起来, 然后每人从中拿一张别人送出的卡片, 则不同的分配方法有 ___ 种 (9)

公式 1) $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$ $n=4$ 时 $a_4=3(a_3+a_2)=9$ 种 即三个人有两种错排, 两个人有一种错排.

2) $a_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!})$

练习 有五位客人参加宴会, 他们把帽子放在衣帽寄放室内, 宴会结束后每人戴了一顶帽子回家, 回家后, 他们的妻子都发现他们戴了别人的帽子, 问 5 位客人都不戴自己帽子的戴法有多少种? (44)

14 种策略 7 大模型 “绝杀” 排列组合

排列组合问题是高考的必考题, 它联系实际生动有趣, 但题型多样, 思路灵活, 不易掌握, 实践证明,

掌握模型和解题方法，识别并化归到模式，熟练运用，是解决排列组合应用题的有效途径。

第一部分——组合的常见技巧

策略一：合理分类与准确分步策略

分类相加：每类方法都能独立地完成这件事；分步相乘：只有各个步骤都完成了，才能完成这件事。

【例 1】有 11 名外语翻译人员，其中 5 名是英语译员，4 名是法语译员，另外两名是英、法语均精通，从中找出 8 人，使他们可以组成翻译小组，其中 4 人翻译英语，另 4 人翻译法语，这两个小组能同时工作，问这样的 8 人名单可以开出几张？

【解析】：按只会英语的有 4 名、3 名、2 名分类 $C_5^4 C_6^4 + C_5^3 C_2^1 C_5^4 + C_5^2 C_2^2 C_4^4$

【例 2】见后面【例 19】

【特别提醒】在解排列组合问题时，一定要以两个原理为核心。按元素的性质分类，按事情发生的过程分步。综合题通常是整体分类再局部分步。

【类题演练】

- 1、360 的正约数（包括 1 和 360）共有 _____ 个。（答案 24）
- 2、工厂实验生产中需依次投入 2 种化工原料，现有 5 种原料可用，但甲、乙两种原料不能同时使用，且依次投料时，若使用甲原料，则甲必须先投放。那么不同的实验方案共有 _____ 种（答案 15）；
- 3、公司招聘进 8 名员工，平均分给下属的甲、乙两个部门。其中两名英语翻译人员不能同给一个部门；另三名电脑编程人员也不能同给一个部门，则不同的分配方案有 _____ 种（答案 36）；
- 4、 f 是集合 $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 到集合 $N = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的映射。（答案 7；9）

若 $f(4) + f(5) = f(6)$ ，则映射共有 _____ 个；若 $xf(x) + 3$ 为奇数，则映射共有 _____ 个。

- 5、（2010 湖南卷理科 7）在某种信息传输过程中，用 4 个数字的一个排列（数字也许重复）表示一个信息，不同排列表示不同信息，若所用数字只有 0 和 1，则与信息 0110 至多有两个对应位上的数字相同的消息个数为（ ）（答案 B）

（A）10 （B）11 （C）12 （D）15

- 6、（2010 浙江卷 17）有 4 位同学在同一天上的、下午参加“身高与体重”、“立定跳远”、“肺活量”、“握力”、“台阶”五个项目的测试，每位同学上、下午各测试一个项目，且不重复。若上午不测“握力”项目，下午不测“台阶”项目，其余项目上下午都各测试一人，则不同的安排方式共有 _____ 种（用数字作答）。（答案 264）

策略二：不同元素可重复的分配求幂法

不同元素重复的分配问题要区分两类元素：一类可以重复，另一类不能重复，从不可重复的一类进行分配，“人选一个房间，房间不是住一个人”。

【例 3】8 名同学争夺 3 项冠军，获得冠军的可能性有（ ）

（A） 8^3 （B） 3^8 （C） A_8^3 （D） C_8^3

【解析】：冠军不能重复，但同一个学生可获得多项冠军，因此共有 8^3 种不同的结果。所以选 A

【类题演练】

- 1、有 4 名学生报名参加数学、物理、化学竞赛，每人限报一科，有多少种不同的报名方法？（答案 3^4 ）

2、有 4 名学生参加争夺数学、物理、化学竞赛冠军，有多少种不同的结果？ (答案 4^3)

3、将 3 封不同的信投入 4 个不同的邮筒，则有多少种不同投法？ (答案 4^3)

策略三：相邻问题捆绑法

题目中规定相邻的几个元素捆绑成一个组，当作一个大元素参与排列 .资源?网

【例 4】五人并排站成一排，如果 A, B 必须相邻且 B 在 A 的右边，那么不同的排法种数有 _____

【解析】：把 A, B 视为一人，且 B 固定在 A 的右边，则本题相当于 4 人的全排列， $A_4^4 = 24$ 种

【类题演练】

1、把 4 名男生和 4 名女生排成一排，女生要排在一起，不同的排法种数为 _____ (答案 $A_4^4 A_5^5$);

2、由 1, 2, 3, 4, 5 组成不重复的 5 位数，1、3 之间恰有两个偶数，则有 _____ 个。(答案 $A_2^2 A_2^2 A_2^2$)

3、停车场划出一排 12 个停车位路，今有 8 辆车需要停放 . 要求空车位路连在一起，不同的停车方法有多少种？ (答案 A_9^9)

策略四：相离问题（不相邻问题）插空法

元素相离问题，可先把无位置要求的几个元素全排列，再把规定的相离的几个元素插入上述几个元素的空位和两端 .

【例 5】七人并排站成一行，如果甲乙两个必须不相邻，那么不同的排法种数是 _____

【解析】：除甲乙外，其余 5 个排列数为 A_5^5 种，再用甲乙去插 6 个空位有 A_6^2 种，不同的排法种数是

$A_5^5 A_6^2 = 3600$ 种

【例 6】3 个人坐在一排 8 个椅子上，若每个人左右两边都有空位，则坐法的种数有多少种？

【解析】：先拿出 5 个椅子排成一排（注意空椅子不排序），在 5 个椅子中间出现 4 个空， * * * *

* (* 表示椅子， 表示空) 再让 3 个人每人带一把椅子去插空，于是有 $A_4^3 = 24$ 种.

【例 7】马路上有编号为 1, 2, 3..., 9 九只路灯，现要关掉其中的三盏，但不能关掉相邻的二盏或三盏，

也不能关掉两端的两盏，求满足条件的关灯方案有多少种？

【解析】：把此问题当作一个排序模型，在 6 盏亮灯的 5 个空隙中插入 3 盏不亮的灯 C_5^3 种方法，所以满足

条件的关灯方案有 10 种。（注意亮的灯、不亮的灯均不排序）

【特别提醒】从这三个例子看得出来，先排的元素和后插的元素都有可能有序，也可能无序，所以做题时一定要分析清楚。

【类题演练】

1、高三（一）班学要安排毕业晚会的 4 各音乐节目，2 个舞蹈节目和 1 个曲艺节目的演出顺序，要求

两个舞蹈节目不连排，则不同排法的种数是 _____ (答案 $A_5^5 A_6^2 = 3600C$)

- 2、(1) 连续发射 8 发子弹 4 发命中，恰有 3 发连中，有 _____ 种命中方式。 (答案 (1) A_5^2 ;)
 (2) 连续发射 8 发子弹 4 发命中，恰有两次 2 发连中，有 _____ 种命中方式。 (答案 (2) C_5^2)

策略五：元素优先法（位置优先法） 【分析法】

某个或几个元素要或不要排在指定位置，可先处理这个或几个元素，再排其它的元素 (元素优先法) ；
 也可针对特殊元素，先把指定位置安排好元素，再排其它的元素 (位置优先法) 。

【例 8】 2010 年广州亚运会组委会要从小张、小赵、小李、小罗、小王五名志愿者中选派四人分别从事翻译、导游、礼仪、司机四项不同工作，若其中小张和小赵只能从事前两项工作，其余三人均能从事这四项工作，则不同的选派方案共有 ()

- A. 36 种 B. 12 种 C. 18 种 D. 48 种

【解析】： 方法一： 从后两项工作出发，采取位置分析法。 $A_3^2 A_3^3 = 36$

方法二：元素分析法。分两类：若小张或小赵入选，则有选法 $C_2^1 C_2^1 A_3^3 = 24$ ；若小张、小赵都入选，则有选法 $A_2^2 A_3^2 = 12$ ，共有选法 36 种，选 A.

【特别提醒】 当元素多，但是位置少的时候，“元素分析法”一定要注意特殊元素可能被选中，也可能不被选中，这时要注意分类。因此这种情况一般选用“位置分析法”。

【类题演练】

- 1、某单位准备用不同花色的装饰石材分别装饰办公楼中的办公室、走廊、大厅的地面及楼的外墙，现有编号为 1 到 6 的 6 种不同花色的石材可选择，其中 1 号石材有微量的放射性，不可用于办公室内，则不同的装饰效果有 _____ 种 (答案 300)；
- 2、某银行储蓄卡的密码是一个 4 位数，某人采用千位、百位上的数字之积作为十位个位上的数字 (如 2816) 的方法设计密码，当积为一位数时，十位上数字选 0。千位、百位上都能取 0。这样设计出来的密码共有 _____ 种 (答案 100)；
- 3、用 0, 1, 2, 3, 4, 5 这六个数字，可以组成无重复数字的四位偶数 _____ 个 (答案 156)；
- 4、某班上午要上语、数、外和体育 4 门课，如体育不排在第一、四节；语文不排在第一、二节，则不同排课方案种数为 _____ (答案 6)；
- 5、四个不同的小球全部放入编号为 1、2、3、4 的四个盒中。若恰有两个空盒的放法有 _____ 种；若甲球只能放入第 2 或 3 号盒，而乙球不能放入第 4 号盒的不同放法有 _____ 种 (答案 84 ; 96)；

策略六：多排问题单排法

把元素排成几排的问题可归结为一排考虑，再分段处理。 高 考 资 源 ? 网

【例 9】把 15 人分成前后三排，每排 5 人，不同的排法种数为 ()

- (A) $A_{15}^5 A_{10}^5$ (B) $A_{15}^5 A_{10}^5 A_5^5 A_3^3$ (C) A_5^{15} (D) $A_{15}^5 A_{10}^5 A_5^5 \div A_3^3$

【解析】本题可看成左、中、右各 5 人，因此本题可看成 15 个不同的元素排成一排，共 A_{15}^{15} 种 资 源 ? 网

【例 10】8 个不同的元素排成前后两排，每排 4 个元素，其中某 2 个元素要排在前排，某 1 个元素排在后排，有多少种不同排法？

【解析】看成一排，某 2 个元素在左边四个位置中选排 2 个，有 A_4^2 种，某 1 个元素排在右边的四个位置中选一个有 A_4^1 种，其余 5 个元素任排 5 个位置上有 A_5^5 种，故共有 $A_4^1 A_4^2 A_5^5 = 5760$ 种排法。

【类题演练】

1、若 $2n$ 个学生排成一排的排法数为 x ，这 $2n$ 个学生排成前后两排，每排各 n 个学生的排法数为 y ，则 x, y 的大小关系为 _____ (答案：相等)；

策略七：环排问题线排法

排成环与排成一排的不同点在于：排成环形没有首尾之分，所以固定一个元素并从此位置把圆形展成直线。

【例 11】5 人围桌而坐，共有多少种坐法？

【解析】A——B——C——D——E——A，固定 A，其余元素有 $(5-1)! = 4!$ 种排法。

策略八：定序问题缩倍法、插空法，空位法

在排列问题中限制某几个元素必须保持一定的顺序，可用缩小倍数的方法。

【例 12】五人排站成一排，如果 B 必须站在 A 的右边 (A, B 可以不相邻) 那么不同的排法种数是 ()

【解析】：法 1 (缩倍法)：B 在 A 的右边与 B 在 A 的左边排法数相同，所以题设的排法只是 5 个元素全排列数的一半，即 $\frac{1}{2} A_5^5 = 60$ 种；

法 2 (插空法)：先排好 A、B，再把 C、D、E 逐一插空，即 $3 \times 4 \times 5 = 60$ 种

法 3 (空位法)：5 个位置 C、D、E 先排好，空两个位置 AB 来放： $A_5^3 = 60$

【类题演练】

- 书架上有 3 本不同的书，使这些书的顺序不变，再放上 2 本不同的书，有 _____ 种放法 (答案 20)；
- 百米决赛有 6 名运动员，每个运动员速度都不同，则 A 比 F 先到终点共有 _____ 种情况 (答案 360)；
- 学号为 1, 2, 3, 4 的四名学生的成绩 $x_i \in \{89, 90, 91, 92, 93\} (i = 1, 2, 3, 4)$ 且满足 $x_1 < x_2 \leq x_3 < x_4$ ，则这四位同学考试成绩的所有可能情况有 _____ 种 (答案 15)；
- 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，对任意 $x \in A$ ，有 $f(x) \in A$ ，则映射 $f: A \rightarrow A$ 的个数是 _____ (答案 $C_8^3 8^5$)；
- 如果一个三位正整数形如 “ $a_1 a_2 a_3$ ” 满足 $a_1 < a_2$ 且 $a_3 < a_2$ ，则称这样的三位数为凸数 (如 120、363、374 等)，那么所有凸数个数为 _____ (答案 240)；
- 离心率等于 $\log_p q$ (其中 $1 \leq p \leq 9, 1 \leq q \leq 9$ 且 $p, q \in \mathbb{N}^*$) 的不同形状的双曲线的个数为 _____ (答案 26)。

策略九：标号排位问题 (不配对问题) 分步法

把元素排到指定位置上，可先把某个元素按规定排入，第二步再排另一个元素，如此继续下去，依次即可完成。

【例 13】同室 4 人各写一张贺年卡，先集中起来，然后每人从中拿一张别人送出的贺年卡，

则 4 张贺年卡不同的分配方式共有 ()

(A) 6 种 (B) 9 种 (C) 11 种 (D) 23 种

【解析】：设四个人分别为甲、乙、丙、丁，各自写的贺年卡分别为 a、b、c、d。

第一步，甲取其中一张，有 3 种等同的方式； 第二步，假设甲取 b，则乙无论取 a、c、d 丙、丁的取法都是唯一的。根据乘法原理，一共有 $3 \times 3 \times 1 \times 1 = 9$ 种分配方式。 故选 (B)

【类题演练】

1、五个人排成一列，重新站队时，各人都不站在原来的位路上，那么不同的站队方式共有 ()

(A) 60 种 (B) 44 种 (C) 36 种 (D) 24 种 (答案 B)

2、编号为 1、2、3、4、5 的五个人分别去坐编号为 1、2、3、4、5 的五个座位，其中有且只有两个的编号与座位号一致的坐法是 () (答案 B)

(A) 10 种 (B) 20 种 (C) 30 种 (D) 60 种

3、设有编号为 1、2、3、4、5 的五个茶杯和编号为 1、2、3、4、5 的 5 个杯盖，将五个杯盖盖在五个茶杯上，至少有两个杯盖和茶杯的编号相同的盖法有 _____ 种 (答案 31)

策略十：不同元素的分配问题先分组再排组法 (详见模型五)

将不同元素放到某些位置或分给某些人，往往先分成组，再将组排序。但因为各组元素的个数相等与否，一般分为：平均，不平均，部分平均分配，在用组合数选取元素时，个数平均的组与组之间已经有序，个数不平均的组与组之间无序，须加序。此外还有定向分配和特殊元素参与的分配。

【例 14】将 4 名大学生分配到 3 个乡镇去当村官，每个乡镇至少一名，则不同的分配方案有 _____ 种

【解析】：第一步将 4 名大学生按，2，1，1 分成三组，其分法有 $\frac{C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1}{A_2^2}$ ；

第二步将分好的三组分配到 3 个乡镇，分法有 A_3^3 所以满足条件得分配的方案有 $\frac{C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 36$

【例 15】四个不同球放入编号为 1，2，3，4 的四个盒中，则恰有一个空盒的放法有多少种？

【解析】：先取四个球中二个为一组，另二组各一个球的方法有 C_4^2 种，再排：在四个盒中每次排 3 个有 A_4^3 种，故共有 $C_4^2 A_4^3 = 144$ 种。

【类题演练】 (详见模型五)

1、有甲乙丙三项任务，甲需 2 人承担，乙丙各需一人承担，从 10 人中选出 4 人承担这三项任务，不同的选法种数是 () (答案 C)

(A) 1260 种 (B) 2025 种 (C) 2520 种 (D) 5040 种

2、某外商计划在四个候选城市投资 3 个不同的项目，且在同一个城市投资的项目不超过 2 个，则该外商不同的投资方案有 () 种 (答案 D)

(A) 16 种 (B) 36 种 (C) 42 种 (D) 60 种

策略十一：相同元素的分配问题隔板法

对于 n 个相同元素分配到 m 个位置的问题，可看作是由 $(m-1)$ 个隔板（或排序，或插空）把 n 个相同元素隔成 m 段。

【例 16】10 个三好学生名额分到 7 个班级，每个班级至少一个名额，有多少种不同分配方案？

【解析】：把 10 个名额看成 10 个相同的小球分成 7 堆，每堆至少一个，可在小球的 9 个空位中插入 6 块板，如：
| | | | | | |。每种插法对应一种分配方案，故共有不同的分配方案为 $C_9^6 = 84$ 种。

【例 17】4 个相同的白球、5 个相同的黑球、6 个相同的红球放入 4 个不同的盒子中的 3 个中，使得有一个空盒且其他盒子中球的颜色齐全的不同放法有多少种？

【解析】：1、先从 4 个盒子中选三个放置小球有 C_4^3 种方法。

2、注意到小球都是相同的，我们可以采用隔板法。为了保证三个盒子中球的颜色齐全，可以在 4 个相同的白球、5 个相同的黑球、6 个相同的红球所产生的 3 个、4 个、5 个空挡中分别插入两个板。各有 C_3^2 、 C_4^2 、 C_5^2 种方法。
3、由分步计数原理可得 $C_4^3 C_3^2 C_4^2 C_5^2 = 720$ 种

【类题演练】

1、7 个相同的小球，任意放入四个不同的盒子，问盒子可以空放法有 _____ 种（答案 C_{10}^3 ）

2、马路上有 9 盏路灯，为节约用电，把其中的三盏关掉，但不能同时关掉相邻的两盏，也不能关掉两端的路灯，满足条件的关灯办法有 _____ 种。（答案 C_5^3 ）

3、把一同排 6 张座位编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的电影票全部分给 4 个人，每人至少分 1 张，至多分 2 张，且这两张票具有连续的编号，那么不同的分法种数是 _____（答案 144）

4、把 20 个相同的球全放入编号分别为 1, 2, 3 的三个盒子中，要求每个盒子中的球数不少于其编号数，则有多少种不同的放法？（答案 $C_{16}^2 = 120$ 种）

策略十二：“至多”“至少”问题间接法（淘汰法），正难则反思想

对有限制条件的问题，尤其是“至多”“至少”问题，直接法较难则从总体考虑，再把不符合条件的情况去掉。

【例 18】从 4 台甲型和 5 台乙型电视机中任取 3 台，至少要甲、乙各一台，则不同的取法有多少种？

【解析】不分条件有 C_9^3 种，全是甲 C_4^3 种，全是乙 C_5^3 种，共有 $C_9^3 - C_4^3 - C_5^3 = 70$ 种

【类题演练】

1、在平面直角坐标系中，由六个点 (0,0), (1,2), (2,4), (6,3), (-1, -2), (-2, -1) 可以确定三角形的个数为 _____（答案 15）。

策略十三：综合问题先选后排法

有很多排列问题，都是排序前要先选元素，按步骤现选后排，比如【例 8】、【例 14】、【例 15】等

【例 19】从 0-9 中选出奇数、偶数各两个，组成不重复的四位数，这样的四位偶数有多少个？

【解析】法 1：第一步：任选两个奇数两个偶数 $C_5^2 C_5^2$ ； 第二步：排成四位偶数 $C_5^2 C_5^2 A_4^4$ ；

第三步：除去 0 在首位的偶数 $C_5^2 C_5^2 A_4^4 - C_4^1 A_5^2$ （间接法）

法 2：第一类：选 0，依然选数再排，注意元素优先 $C_4^1 C_5^2 A_3^3 + C_4^1 C_2^1 A_5^2$

第二类：不选 0，选数 $C_4^2 C_5^2$ ，再排数 $C_4^2 C_5^2 C_2^1 A_3^3$ ，故 $C_4^1 C_5^2 A_3^3 + C_4^1 C_2^1 A_5^2 + C_4^2 C_5^2 C_2^1 A_3^3$

【类题演练】

1、某种产品有 4 只次品和 6 只正品，每只产品均不相同且可区分，今每次取出一只测试，直到 4 只次品全测出为止，则最后一只次品恰好在第五次测试时，被发现的不同情况种数是 _____（答案 576）。

策略十四：转化与化归法

转化与化归思想是高中四大数学思想之一。很多排列组合问题只按题目表面意思求解，很困难，如果用化归的思想，换个角度来思考，（一般转化为基本模型问题），往往能收到“山穷水尽疑无路，柳暗花明又一村”的效果。

【例 20】（2005 浙江）设平面坐标内有一个质点从原点出发，沿 x 轴跳动，每次向正方向或负方向跳一个单位，经过 5 次跳动质点落在点 (3,0)（允许重复过此点）处，则质点不同的运动方法共有 _____ 种（用数字作答）。

【解析】不要局限于坐标轴上位置的概念，而应从运动方向上来分析。经过五步后向右运动了 3 个单位长度，必定是向右 4 步向左 1 步，将 4 右 1 左排顺序，如：“右右右左右”。即 5 种方法。

【例 21】小明家住二层，他每次回家上楼梯时都是一步迈两级或三级台阶。已知相邻楼层之间有 16 级台阶，那么小明从一层到二层共有多少种不同的走法？

【解析】：共 16 级台阶为偶数，故走 3 级台阶的次数也该为偶数。

第一类：有 0 次走 3 级台阶（即全走 2 级），那么有 1 种走法； 高 考 资 源 ? 网

第二类：有两次走 3 级台阶，则有 5 次走 2 级台阶：

法 1：看做 5 个 2 和 2 个 3 排序，如“2232232”，有 $C_7^2 = 21$ 。

法 2：看做 7 个相同小球的分配问题，先各放 2 个小球共 14，剩下 2 个球各选个盒子放，有 $C_7^2 = 21$ 。

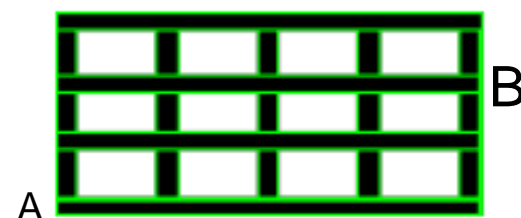
第三类：有 4 次走 3 级台阶，则有 2 次走两级台阶，方法同上，有 $C_6^2 = 15$ 。 故总共有：37 种。

【特别提醒】后面“第二部分 - 排列组合的常见模型”的练习均可看作是转化与化归策略。

【类题演练】

1、25 人排成 5×5 方队，现从中选 3 人，要求 3 人不在同一行也不在同一列，选法有多少种？（答案 600）

2、城市街区由 12 个的矩形组成，其中实线表示马路，则从 A 走到 B 的最短路径有多少种？（答案 35）



3、欲登上第 10 级楼梯，如果规定每步只能跨上一级或两级，则不同

的走法共有 () (答案 C)

(A) 34 种 (B) 55 种 (C) 89 种 (D) 144 种

第二部分——排列组合的常见模型

模型一：排序问题

【例 1】(1) 7 个不同小球排成一排，有多少种排法？ (不同元素排序)

(2) 4 个相同小球和另外 3 个不同小球排成一排，有多少排法？ (部分相同部分不同元素排序)

(3) 4 个相同黑球和 3 个相同白球排成一排，有多少种排法？ (多组相同元素排序)

【解析】(1) A_7^7 ，但不同元素排序往往有限制 (参看模型二、模型三、)；(2) 法一：先排不同元素 A_3^3 ，法二：缩倍法 $\frac{A_7^7}{A_4^4}$ ；(3) 先排一组相同元素 C_7^3 ，法二：缩倍法 $\frac{A_7^7}{A_4^4 A_3^3}$

【类题演练】

1、3 人坐在一排 8 个座位上，若每人的左右两边都有空位，则不同的坐法种数有 _____ 种 (答案：24)；

2、连续发射 8 发子弹 4 发命中，有 _____ 种命中方式。 (答案： C_8^4)

模型二：站队问题

【例 2】5 个男生 4 个女生站成一排照相，问满足下列要求的排队种数：

(1) 任意站成一排；(2) 平均站成三排；(3) 站成一排，甲站中间；(4) 站成一排，甲不站中间；(5) 甲和乙不站两端；(6) 甲不站头乙不站尾；(7) 甲和乙站一起；(8) 甲和乙中间有两人；(9) 男生站一起，女生站一起；(10) 甲和乙不站一起；(11) 甲乙相邻，乙丙不相邻；(12) 男女相间；(13) 男生按高矮顺序从左到右站

【解析】(1) 全排 A_9^9 ；(2) 多排看成单排 A_9^9 ；(3) 优先法 A_8^8 ；(4) 元素优先法 $C_8^1 A_8^8$ ；间接法 $A_9^9 - A_8^8$ ；(5) 元素 (位置) 优先法 $A_7^2 A_7^7$ ；(6) 元素优先法 A_8^8 (甲站尾) + $C_7^1 C_7^1 A_7^7$ (甲不站头尾)；(7) 相邻问题捆绑法 $A_2^2 A_8^8$ ；(8) 小团体也捆绑法 $A_2^2 A_7^7 A_6^6$ ；(9) 捆绑 $A_4^4 A_5^5 A_2^2$ ；(10) 不相邻问题插空法 $A_7^7 A_8^2$ ；(11) 先捆绑后插空 $A_2^2 A_7^7 C_7^1$ ；(12) $A_4^4 A_5^5$ ；(13) 定序按无序算：缩倍法 $A_9^9 \div A_5^5$ 或先排有序元素 A_9^4

【特别提醒】1、站队的常见限制：“在与不在”；“邻与不邻”；“序与不序”。

2、(5) 用间接法时不能只排除甲乙都站在两端的情况，还要除掉有一个站两端的情况，同样

(6) 用间接法时也不能只排除甲站头乙站尾的情况。

【类题演练】

1、(2010 重庆理科 9) 某单位安排 7 位员工在 10 月 1 日至 7 日值班，每天安排 1 人，每人值班 1 天，若 7 位员工中的甲、乙排在相邻两天，丙不排在 10 月 1 日，丁不排在 10 月 7 日，则不同的安排方案共有 () (答案 C)

(A) 504 种 (B) 960 种 (C) 1008 种 (D) 1108 种

2、(2010 北京卷理科 4) 8 名学生和 2 位老师站成一排合影，2 位老师不相邻的排法种数为 ()

(A) $A_8^8 A_9^2$ (B) $A_8^8 C_9^2$ (C) $A_8^8 A_7^2$ (D) $A_8^8 C_7^2$ (答案 A)

3、(2010 山东卷理科 8) 某台小型晚会由 6 个节目组成，演出顺序有如下要求：节目甲必须排在第四位、节目乙不能排在第一位，节目丙必须排在最后一位，该台晚会节目演出顺序的编排方案共有

(A) 36 种 (B) 42 种 (C) 48 种 (D) 54 种 (答案 B)

4、(2008 安徽卷) 12 名同学合影，站成了前排 4 人后排 8 人。现摄影师要从后排 8 人中抽 2 人调整到前排，若其他人的相对顺序不变，则不同调整方法的种数是 () (答案 C)

(A) $C_8^2 A_3^2$ (B) $C_8^2 A_6^6$ (C) $C_8^2 A_6^2$ (D) $C_8^2 A_5^2$

5、(2009 四川卷理) 3 位男生和 3 位女生共 6 位同学站成一排，若男生甲不站两端，3 位女生中有且只有两位女生相邻，则不同排法的种数是 () (答案 B)

(A) 360 (B) 288 (C) 216 (D) 96

模型三：排数问题

【例 3】 从 0、2、3、5、6、7 的 6 个数中选择不重复的数字

(1) 能组成多少四位数？ (2) 能组成多少小于 1000 的数？ (3) 能组成多少四位偶数？ (4) 能组成多少被 5 整除的四位数？被 25 整除的四位数？ (5) 能组成多少被 3 整除的四位数？ (6) 四位数从小到大排列，5307 是第几项？ (7) 所有四位数的和是多少？

【解析】(1) 位置优先 $C_5^1 A_5^5$ ； (2) $6(\text{一位数}) + C_5^1 C_5^1 (\text{两位数}) + C_5^1 A_5^2 (\text{三位数})$ ；
(3) 从个位开始 $A_5^3 (\text{选 } 0) + C_2^1 C_4^1 A_4^2 (\text{选 } 2、6)$ ； (4) $A_5^3 (\text{个位 } 0) + C_4^1 A_4^2 (\text{个位 } 5) + C_3^1 C_3^1 (25) + A_4^2 (50)$ ；
(5) 要由被 3 整除、余一、余二的三组数组合 $C_3^2 C_2^1 A_4^4 - C_2^1 C_2^1 A_3^3$ ； (6) 从高位开始分析 $C_2^1 A_5^3 (\text{千位}) + C_2^1 A_4^2 (\text{百位}) + 3(\text{个位})$ ； (7) $(2+3+5+6+7) A_5^3 \times 1000 + (2+3+5+6+7) C_4^1 A_4^2 \times (100+10+1)$

【特别提醒】 1、排数问题常用优先法，尤其注意 0 与首位的特殊关系。

2、如果数字可以重复呢？

【类题演练】

1、(2010 四川理) 由 1、2、3、4、5、6 组成没有重复数字且 1、3 都不与 5 相邻的六位偶数的个数是 (A) 72 (B) 96 (C) 108 (D) 144 (答案 C)
2、(2009 浙江卷) 用 1,2,3,4,5,6 组成六位数 (没有重复数字)，要求任何相邻两个数字的奇偶性不同，且 1 和 2 相邻。这样的六位数的个数是 _____ (用数字作答)。 (答案 $A_2^2 2A_2^2 C_5^1 = 40$)

模型四：抽取问题

【例 4】 5 个不同白球和 4 个不同红球，从中摸 3 个球

(1) 有多少摸法？ (2) 恰有一个白球的摸法？ (3) 至少一个白球的摸法？ (4) 至多 2 个白球的摸法？ (5) 某白球被抽到，某红球不被抽到的摸法？

【解析】(1) 组合 C_9^3 ； (2) 分步 $C_5^1 C_4^2$ ； (3) 直接法： $C_5^1 C_4^2 + C_5^2 C_4^1 + C_5^3$ ；间接法： $C_9^3 - C_4^3$ (4)

直接法： $C_4^3 + C_5^1 C_4^2 + C_5^2 C_4^1$ ；间接法： $C_9^3 - C_5^3$ ； (5) C_7^2

【特别提醒】1、至多、至少问题注意对直接法、间接法合理选择。

2、“至少 n 个”问题切忌这样分步：先满足 n ，再任意选取。如 (3) 不能 $C_5^1 C_8^2$ 。

【类题演练】

1、(2010 全国卷 I 理科 6) 某校开设 A 类选修课 3 门，B 类选择课 4 门，一位同学从中共选 3 门，若要求两类课程中各至少选一门，则不同的选法共有 () (答案 A)

(A) 30 种 (B) 35 种 (C) 42 种 (D) 48 种

2、(2009 全国卷) 甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门，则甲、乙所选的课程中至少有 1 门不相同的选法共有 () (答案 C)

(A) 6 种 (B) 12 种 (C) 30 种 (D) 36 种

模型五：不同元素的分组、分配问题

【例 5】有 6 本不同的书按下列方式，共有多少种不同的情况？

- (1) 分成每组都是 2 本三个组； (2) 分给三人，每个人 2 本；
 (3) 分成 1 本、2 本、3 本三组； (4) 分给三人，其中一人 1 本，一人 2 本，一人 3 本；
 (5) 分成 4 本、1 本、1 本三组； (6) 分给三人，其中一人 4 本，其余各一本；
 (7) 分给 4 人每人至少 1 本。 (8) 选出 5 本分给 3 人，每人至少 1 本；
 (9) 分给甲 1 本，乙 2 本，丙 3 本； (10) 分给甲 4 本，乙 1 本，丙 1 本；
 (11) 平均分给 2 人，理、化两本书给了同一人； (12) 平均分给 2 人，理、化两本书分别给了两人

【解析】：(1) 平均分给 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3}$ ；(2) 平均分配 $C_6^2 C_4^2 C_2^2$ ；(3) 不平均分给 $C_6^1 C_5^2 C_3^3$ ；(4) 不平均

分配 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 A_3^3$ ；(5) 部分平均分给 $\frac{C_6^4 C_2^1 C_1^1}{A_2^2}$ ；(6) 部分平均分配 $\frac{C_6^4 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} A_3^3$ ；(7) $3+1+1+1$ 或 $2+2+1+1$

$\frac{C_6^3 C_3^1 C_2^1 C_1^1}{A_3^3} A_4^4 + \frac{C_6^2 C_4^2 C_2^1 C_1^1}{A_2^2 A_2^2} A_4^4$ ；(8) 先选后分配 $\frac{C_6^3 C_3^1 C_2^1}{A_2^2} A_3^3 + \frac{C_6^2 C_4^2 C_2^1}{A_2^2} A_3^3$ ；(9) 定向分配 $C_6^1 C_5^2 C_3^3$ ；(10)

定向分配 $C_6^4 C_2^1 C_1^1$ ；(11) 特殊元素不平均 $C_2^2 C_4^1 C_3^3 A_2^2$ ；(12) 特殊元素平均 $C_2^1 C_4^2 C_1^1 C_2^2$

【特别提醒】1、分清组合数乘积是否有序，再由“分配有序，分组无序”加序或消序。

2、处理“至少一本”切忌先各放一本，然后再任意放。如 (7) 不能做成 $A_6^5 C_5^1$

【类题演练】

1、有甲乙丙三项任务，甲需 2 人承担，乙丙各需一人承担，从 10 人中选出 4 人承担这三项任务，不同的选法种数是 () (答案 C)

(A) 1260 种 (B) 2025 种 (C) 2520 种 (D) 5040 种

2、将 5 名实习教师分配到高一年级的 3 个班实习，每班至少 1 名，最多 2 名，则不同的分配方案有 ()

(A) 30 种 (B) 90 种 (C) 180 种 (D) 270 种 (答案 B)

3、(2010 江西卷理科 14) 将 6 位志愿者分成 4 组，其中两个组各 2 人，另两个组各 1 人，分赴世博会的四个不同场馆服务，不同的分配方案有 _____ 种(用数字作答)。(答案 1080)

4、某外商计划在四个候选城市投资 3 个不同的项目，且在同一个城市投资的项目不超过 2 个，则该外商不同的投资方案有 () 种 (答案 D)

(A) 16 种 (B) 36 种 (C) 42 种 (D) 60 种

5、(2010 全国 2 卷理数 6) 将标号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片放入 3 个不同的信封中。若每个信封放 2 张，其中标号为 1, 2 的卡片放入同一信封，则不同的方法共有 () (答案 B)

(A) 12 种 (B) 18 种 (C) 36 种 (D) 54 种

6、(2010 数学湖北卷理科 8) 现安排甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学参加上海世博会志愿者服务活动，每人从事翻译、导游、礼仪、司机四项工作之一，每项工作至少有一人参加。甲、乙不会开车但能从事其他三项工作，丙、丁、戊都能胜任四项工作，则不同安排方案的种数是 () (答案 B)

A . 152 B. 126 C. 90 D. 54

模型六：分组、分配问题

【例 6】 下列问题有多少放法？

(1) 6 个不同小球放进 3 个不同盒子 (盒子可以空) ; (不同元素无限制的分配)

(2) 6 个不同小球放进 3 个不同盒子，每个盒子至少一球 ; (不同元素有限制的分配)

(3) 6 个不同小球放进 3 个相同盒子，每个盒子至少一球 ; (不同元素的分组)

(4) 6 个相同小球放进 3 个不同盒子，(盒子可以空) ; (相同元素无限制的分配)

(5) 6 个相同小球放进 3 个不同盒子，每个盒子至少一球 ; (相同元素有限制的分配)

(6) 6 个相同小球放进 3 个相同盒子，每个盒子至少一球 ; (相同元素的分组)

(7) 6 个不同小球放进编号为 1, 2 的两个盒子，盒中球数不少于编号数 ;

(8) 6 个相同小球放进编号为 1, 2 的两个盒子，盒中球数不少于编号数 ;

【解析】 : (1) 投信问题 3^6 ; (2) 属模型五：分配 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 A_3^3 + C_6^2 C_4^2 C_2^2 + \frac{C_6^4 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} A_3^3$; (3) 属模型五：

分组 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 + \frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} + \frac{C_6^4 C_2^1 C_1^1}{A_2^2}$; (4) 排序隔板 C_8^2 ; (5) 插空隔板 C_5^2 ; (6) 123;222;411 共三组 (7)

属模型五：定向分配 $C_6^1 C_5^5 + C_6^2 C_4^4 + C_6^3 C_3^3 + C_6^4 C_2^2$; (8) 先放 1+2 个，剩 3 个再排序隔板 C_4^1 ; 【特别提醒】

分清情况中元素是相同还是不同 (即元素与元素之间和顺序是否有关) , 是分配还是分组 (即组与组之间

与顺序是否有关) , 再对应选用方法。

【类题演练】

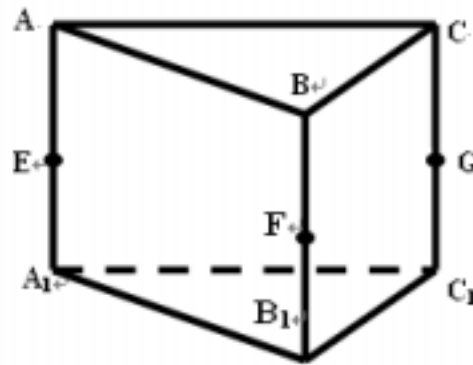
1、满足 $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4\}$ 的集合 A、B、C 共有 _____ 组 (答案 7^4)

- 2、某年级 10 个班，派 15 名同学参加社会实践活动，每班至少派一名，有多少派法？ (答案 C_{15}^9)
- 3、设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $B = \{7, 8, 9\}$ ，对映射 $f: A \rightarrow B$ 有 $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$ ，则映射的个数是 _____ (答案 C_7^2)

模型七：几何问题

【例 7】 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ ，E、F、G 分别为

AA_1 、 BB_1 、 CC_1 的中点如图：



- (1) 由这 9 个点可确定多少线段？多少直线？
- (2) 由这 9 个点可确定多少有向线段？多少射线？
- (3) 由这 9 个点可确定多少三角形？多少平面？
- (4) 由这 9 个点可确定多少四面体？
- (5) 由这 9 个点可确定多少对异面直线？
- (6) 把 6 个顶点涂上颜色，有 4 种不同颜色供选择，要求每条棱上两点颜色不同，有多少涂法？

【解析】：(1) 线段：任选两点 C_9^2 ；直线： C_9^2 排除多点共线重复的 $C_9^2 - 3C_3^2 + 3$ ；(2) 有向线段：任排两点

A_9^2 ；射线： $A_9^2 - 6$ ；(3) 三角形：任选三点且不共线 $C_9^3 - 3C_3^3$ ；平面：三角形除去重复的

$(C_9^3 - 3C_3^3) - 3(C_6^3 - 2) + 3$ ；(4) 四点且不共面 $C_9^4 - 3C_6^4$ ；(5) 四面体的三组对棱异面 $3(C_9^4 - 3C_6^4)$ ；(6)

着色问题：法 1：逐步着色 $4 \times 3 \times 2 \times [1 \times (1 \times 1 + 1 \times 2) + 2 \times 2 \times 2] = 264$ ；

法 2：第一类，只着 3 种色；第二类，着 4 种色 $4 \times 3 \times 2 \times 2 + 4 \times 3 \times 2 \times C_3^1 \times (1 \times 1 + 1 \times 2) = 264$

【特别提醒】1、几何问题注意间接法的使用。还要注意分步中前面着色对之后着色的影响。

2、涂色问题的常用方法有：(1) 可根据共用了多少种颜色分类讨论；

(2) 根据相对区域是否同色分类讨论；(3) 将空间问题平面化，转化成平面区域涂色问题。

【类题演练】

1、一个四棱锥 $S - ABCD$ 的每个顶点染上一种颜色，并使同一条棱的两端点异色，如果只有 5 种颜色可供使用，那么不同的染色方法的总数是 _____ (答案 420)

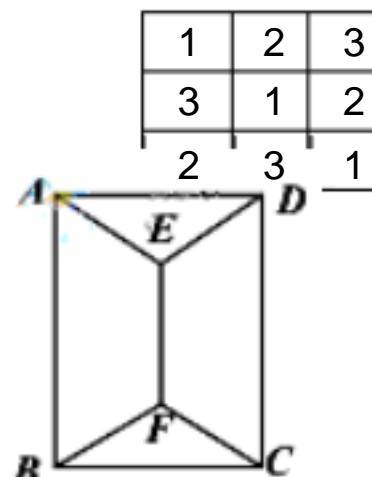
2、(2008 全国卷) 将 1, 2, 3 填入 3×8 的方格中，要求每行、每列都没有重复数字，下面是一种填法，则不同的填写方法共有 _____ (答案 B)

(A) 6 种 (B) 12 种 (C) 24 种 (D) 48 种

3、(2010 天津卷理科 10) 如图，用四种不同颜色给图中的 A、B、C、D、E、F 六个点涂色，要求每个点涂一种颜色，且图中每条线段的两个端点涂不同颜色。则不同的

涂色方法共有 _____ (答案 B)

(A) 288 种 (B) 264 种 (C) 240 种 (D) 168 种



从模型可看出，排列组合基本可分为“选”、“排”、“先选后排”三大类。做题时，第一步：先判断元素是否有序，或所分的组是否要排序；第二步：对于事情的发展过程考虑是分类还是分步，还是整体分类局部分步。第三步：选择对应的模型和策略求解。

模型八：分球入盒问题

问题：将 5 个小球放到 3 个盒子中，在下列 8 种条件下，各有多少种投放方法？

小球不同，盒子不同，盒子不空

小球不同，盒子不同，盒子可空

小球不同，盒子相同，盒子不空

小球不同，盒子相同，盒子可空

小球相同，盒子不同，盒子不空

小球相同，盒子不同，盒子可空

小球相同，盒子相同，盒子不空

小球相同，盒子相同，盒子可空

分球入盒问题解答

问题：将 5 个小球放到 3 个盒子中，在下列 8 种条件下，各有多少种投放方法？

小球不同，盒子不同，盒子不空

解：将小球分成 3 份，每份 1, 1, 3 或 1, 2, 2。再放在 3 个不同的盒子中，即先分堆，后分配。有

$$\left(\frac{C_5^3 C_2^1}{A_2^2} + \frac{C_5^2 C_3^2}{A_2^2} \right) \cdot A_3^3$$

小球不同，盒子不同，盒子可空

解： 3^5 种

小球不同，盒子相同，盒子不空

解：只要将 5 个不同小球分成 3 份，分法为：1, 1, 3；1, 2, 2。共有

$$\frac{C_5^3 C_2^1}{A_2^2} + \frac{C_5^2 C_3^2}{A_2^2} = 25 \text{ 种}$$

小球不同，盒子相同，盒子可空

本题即是 将 5 个不同小球分成 1 份，2 份，3 份的问题。共有 $C_5^5 + (C_5^4 + C_5^3) + \left(\frac{C_5^3 C_2^1}{A_2^2} + \frac{C_5^2 C_3^2}{A_2^2} \right) = 41$ 种

小球相同，盒子不同，盒子不空 解：

(隔板法)。0\00\00，有 C_4^2 种方法

小球相同，盒子不同，盒子可空

把 5 个小球及插入的 2 个隔板都设为小球 (7 个球)。7 个球中任选两个变为隔板 (可以相邻)。那么 2 块

隔板分成 3 份的小球数对应于相应的 3 个不同盒子。故有 $C_7^2=21$ 种

小球相同，盒子相同，盒子不空

解：5 个相同的小球分成 3 份即可，有 3, 1, 1; 2, 2, 1。 共 2 种

小球相同，盒子相同，盒子可空

解：只要将 5 个相同小球分成 1 份，2 份，3 份即可。分法如下： 5, 0, 0; 4, 1, 0; 3, 2, 0; 3, 1, 1; 2, 2, 1。