## 概念

向量是由 n 个实数组成的一个 n 行 1 列（n*1）或一个 1 行 n 列（1*n）的有序数组；

向量的点乘，也叫向量的内积、数量积，对两个向量执行点乘运算，就是对这两个向量对应位一一相乘之后求和的操作，点乘的结果是一个标量。

## 点乘公式

对于向量 a 和向量 b：

$$a = [a_1, a_2, \dots a_n] \qquad b = [b_1, b_2, \dots b_n]$$

a 和 b 的点积公式为：

$$a \bullet b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

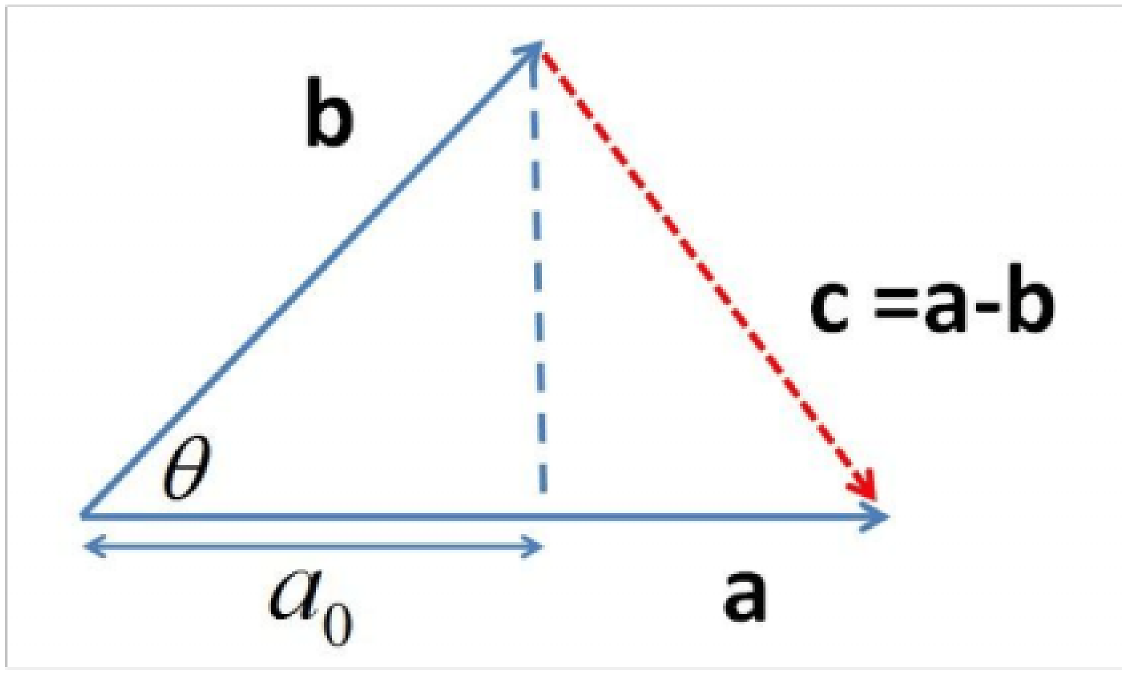
要求一维向量 a 和向量 b 的行列数相同。

## 点乘几何意义

点乘的几何意义是可以用来表征或计算两个向量之间的夹角，以及在 b 向量在 a 向量方向上的投影，有公式：

$$a \bullet b = |a||b| \cos\theta$$

推导过程如下，首先看一下向量组成：




定义向量：

$$c = a - b$$

根据三角形余弦定理有：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2|a||b|\cos\theta$$

根据关系 c=a-b（a、b、c 均为向量）有：

$$(a-b)\bullet(a-b) = a^2 + b^2 - 2a\bullet b = a^2 + b^2 - 2|a||b|\cos\theta$$

即：

$$a \bullet b = |a||b|\cos\theta$$

向量 a，b 的长度都是可以计算的已知量，从而有 a 和 b 间的夹角 θ:

$$\theta = acc\cos(\frac{a \bullet b}{|a||b|})$$

根据这个公式就可以计算向量 a 和向量 b 之间的夹角。从而就可以进一步判断这两个向量是否是同一方向，是否正交 (也就是垂直 )等方向关系，具体对应关系为：

a b>0 方向基本相同，夹角在 0 到 90 之间

a b=0 正交，相互垂直

a b<0 方向基本相反，夹角在 90 到 180 之间

## 叉乘公式

两个向量的叉乘，又叫向量积、外积、叉积，叉乘的运算结果是一个向量而不是一个标量。并且两个向量的叉积与这两个向量组成的坐标平面垂直。

对于向量 a 和向量 b：

$$a = (x_1, y_1, z_1)$$
$$b = (x_2, y_2, z_2)$$

a 和 b 的叉乘公式为：

$$a \times b = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1) i - (x_1 z_2 - x_2 z_1) j + (x_1 y_2 - x_2 y_1) k$$

其中：

$$i = (1,0,0) \qquad \mathrm{j} = (0,1,0) \qquad \mathrm{k} = (0,0,1)$$

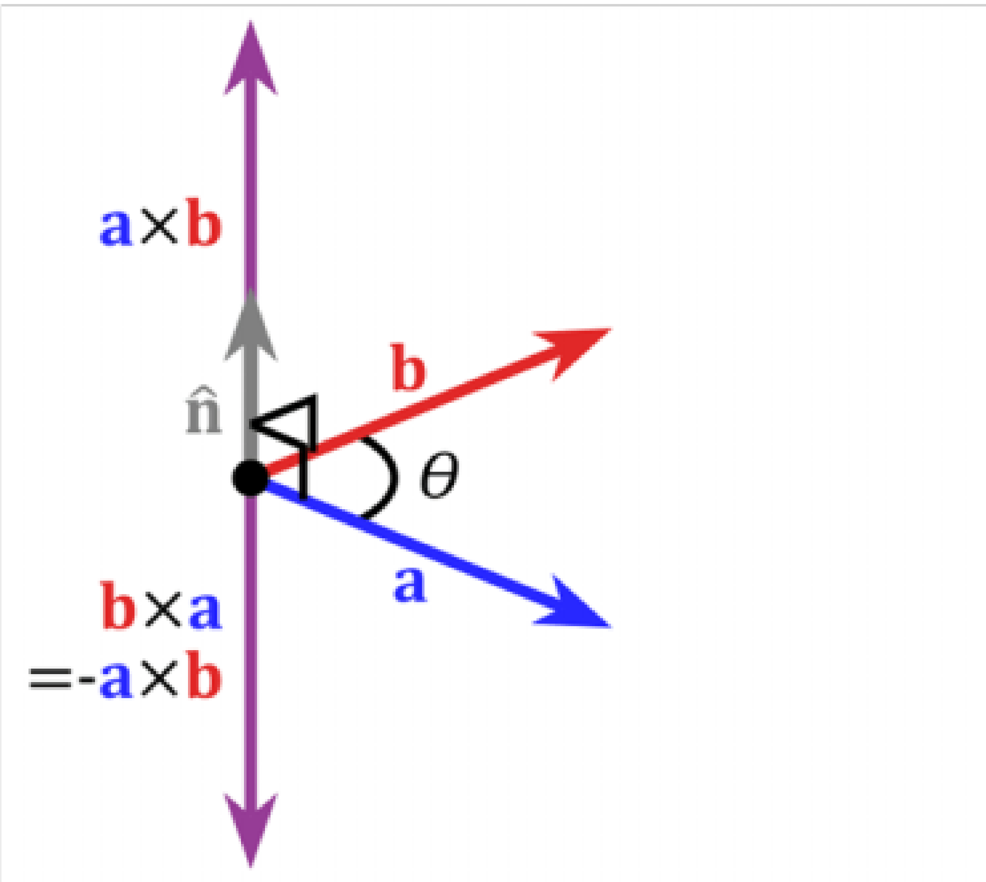
根据 i、j、k 间关系，有：

$$a \times b = (y_1 z_2 - y_2 z_1,\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1),\ x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

叉乘几何意义

在三维几何中， 向量 a 和向量 b 的叉乘结果是一个向量， 更为熟知的叫法是法向量，该向量垂直于 a 和 b 向量构成的平面。

在 3D 图像学中，叉乘的概念非常有用，可以通过两个向量的叉乘，生成第三个垂直于 a, b 的法向量，从而构建 X、Y、Z 坐标系。如下图所示：




在二维空间中， 叉乘还有另外一个几何意义就是： aXb 等于由向量 a 和向量 b 构成的平行四边形的面积。