高考数学备考之放缩技巧

证明数列型不等式，因其思维跨度大、构造性强，需要有较高的放缩技巧而充满思考性和挑战性，能全面而综合地考查学生的潜能与后继学习能力，因而成为高考压轴题及各级各类竞赛试题命题的极好素材。这类问题的求解策略往往是：通过多角度观察所给数列通项的结构，深入剖析其特征，抓住其规律进行恰当地放缩；其放缩技巧主要有以下几种：

一、裂项放缩

例 1. (1) 、求 $\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{4k^2-1}$ 的值；　(2) 、求证：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{5}{3}$.

解析：(1) 、因为 $\frac{2}{4n^2-1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$，所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{4k^2-1}=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$

(2) 、因为 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1+\frac{2}{3}-\frac{2}{2n+1}<\frac{5}{5}$$

奇巧积累：

(1) 、$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

(2) 、$\frac{1}{C_{n+1}^{1}C_{n}^{2}}=\frac{2}{(n+1)n(n-1)}==\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n+1)}$

(3) 、$T_{r+1}=C_n^r\cdot\frac{1}{n^r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{1}{n^r}<\frac{1}{r!}<\frac{1}{r(r-1)}=\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r}\ (r\geq 2)$

(4) 、$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2\times 1}+\frac{1}{3\times 2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}$

(5) 、$\frac{1}{2^k(2^k-1)}=\frac{1}{2^k-1}-\frac{1}{2^k}$

(6) 、$\frac{1}{\sqrt{n+2}}=\frac{2}{2\sqrt{n+2}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ ；

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}<\frac{2}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

(7) 、$\left(\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^n}$

(8)、$\frac{1}{k(n+1-k)}=\left(\frac{1}{n+1-k}+\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{1}{n+1}$；$\frac{1}{n(n+1+k)}=\frac{1}{1+k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1+k}\right)$

(9)、$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$

(10). $\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{2}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+\sqrt{n-\frac{1}{2}}}$

(11)、$\frac{2^k}{(2^k-1)^2}=\frac{2^k}{(2^k-1)(2^k-1)}<\frac{2^k}{(2^k-1)(2^k-2)}$

$=\frac{2^{k-1}}{(2^k-1)(2^{k-1}-1)}=\frac{1}{2^{k-1}-1}-\frac{1}{2^k-1}(k\geq 2)$

(12)、$\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n+1)}}=\left(\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}-\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

(13)、$2^{k+1}=2\cdot 2^k=(3-1)\cdot 2^k>3\Rightarrow 3(2^k-1)>2^k\Rightarrow\frac{1}{2^k-1}<\frac{2^k}{3}$

(14)、$\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}$

(15)、$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}(n\geq 2)$

(16)、$\frac{\sqrt{i^2+1}-\sqrt{j^2+1}}{i-j}=\frac{i^2-j^2}{(i-j)\left(\sqrt{i^2+1}+\sqrt{j^2+1}\right)}=\frac{i+j}{\left(\sqrt{i^2+1}+\sqrt{j^2+1}\right)}<1$

例 2. (1)、求证：$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}>\frac{7}{6}-\frac{1}{2(2n-1)}(n\geq 2)$；

(2)、求证：$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\cdots+\frac{1}{4n^2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}$；

(3)、求证：$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}<\sqrt{2n+1}-1$；

(4)、求证：$2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{2}\left(\sqrt{2n+1}-1\right)$；

解析:(1)、因为 $\frac{1}{(2n-1)^2} > \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, 所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)^2} > 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}\right) > 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n-1}\right)$$

(2)、$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\cdots+\frac{1}{4n^2}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{4}\left(1+1-\frac{1}{n}\right)$

(3)、先运用分式放缩法证明出 $\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,

再结合 $\frac{1}{\sqrt{n+2}}=\frac{2}{2\sqrt{n+2}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ 进行裂项, 最后就可以得到答案 .

(4)、首先 $\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

所以容易经过裂项得到 $2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$

再证 $\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{2}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+\sqrt{n-\frac{1}{2}}}$ 而由均值不等式

知道这是显然成立的, 所以 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{2}\left(\sqrt{2n+1}-1\right)$.

例 3. 求证: $\frac{6n}{(n+1)(2n+1)}\le 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{5}{3}$.

解析: 一方面, 因为 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$. 所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1+\frac{2}{3}-\frac{2}{2n+1}<\frac{5}{5}$$

另一方面: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

当 $n=1$ 时, $\frac{6n}{(n+1)(2n+1)}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}$,

当 $n=2$ 时, $\frac{6n}{(n+1)(2n+1)}<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}$,

当 $n\geq 3$ 时，$\frac{n}{n+1}>\frac{6n}{(n+1)\cdot(2n+1)}$，

所以综上有：$\frac{6n}{(n+1)(2n+1)}\leq 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{5}{3}$.

例 4. (2008 年全国一卷) 设函数 $f(x)=x-x\ln x$. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$0<a_1<1$，$a_{k+1}=f(a_k)$.

设 $b\in(a_1,1)$，整数 $k\geq\frac{a_1-b}{a_1\ln b}$. 证明：$a_{k+1}>b$.

解析：由数学归纳法可以证明 $\{a_n\}$ 是递增数列，

故若存在正整数 $m\leq k$，使 $a_m\geq b$，则 $a_{k+1}>a_k\geq b$. 若 $a_m<b(m\leq k)$，

则由 $0<a_1\leq a_m<b<1$ 知：

$a_m\ln a_m\leq a_1\ln a_m<a_1\ln a_1<a_1\ln b<0$，$a_{k+1}=a_k-a_k\ln a_k=a_1-\sum_{m=1}^{k}a_m\ln a_m$

因为 $\sum_{m=1}^{k}a_m\ln a_m<k(a_1\ln b)$，于是 $a_{k+1}>a_1+k|a_1\ln b|\geq a_1+(b_1-a_1)=b$.

例 5. 已知 $n,m\in N^*$，$x>-1$，$S_m=1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m$，求证：$n^{m+1}<(m+1)S_n<(n+1)^{m+1}-1$.

解析：首先可以证明：$(1+x)^n\geq 1+nx$

$$n^{m+1}=n^{m+1}-(n-1)^{m+1}+(n-1)^{m+1}-(n-2)^{m+1}+\cdots+1-0$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left[k^{m+1}-(k-1)^{m+1}\right]$$

所以要证：$n^{m+1}<(m+1)S_n<(n+1)^{m+1}-1$

只要证：
$$\sum_{k=1}^{n}\left[k^{m+1}-(k-1)^{m+1}\right]<(m+1)\sum_{k=1}^{n}k^m<(n+1)^{m+1}-1$$
$$=(n+1)^{m+1}-n^{m+1}+n^{m+1}-(n-1)^{m+1}+\cdots+2^{m+1}-1^{m+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^{m+1}-k^{m+1}\right]$$

故只要证：$\sum_{k=1}^{n}\left[k^{m+1}-(k-1)^{m+1}\right]<(m+1)\sum_{k=1}^{n}k^m<\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^{m+1}-k^{m+1}\right]$

即等价于：$k^{m+1}-(k-1)^{m+1}<(m+1)k^m<(k+1)^{m+1}-k^{m+1}$

即等价于：$1+\frac{m+1}{k}<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{m+1}$，$1-\frac{m+1}{k}<\left(1-\frac{1}{k}\right)^{m+1}$

而正是成立的，所以原命题成立 .

例 6. 已知 $a_n=4^n-2^n$，$T_n=\dfrac{2^n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$，求证：$T_1+T_2+\cdots+T_n<\dfrac{3}{2}$.

解析：$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=4^1+4^2+\cdots+4^n-(2^1+2^2+\cdots+2^n)$

$$=\frac{4(1-4^n)}{1-4}-\frac{2(1-2^n)}{1-2}=\frac{4}{3}(4^n-1)+2(1-2^n)$$

所以：$T_n=\dfrac{2^n}{\frac{4}{3}(4^n-1)+2(1-2^n)}=\dfrac{2^n}{\frac{4^{n+1}}{3}-\frac{4}{3}+2-2^{n+1}}=\dfrac{3\cdot 2^n}{4^{n+1}-3\cdot 2^{n+1}+2}$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{2^n}{2(2^n)^2-3\cdot 2^n+1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2^n}{(2\cdot 2^n-1)\cdot(2^n-1)}=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2\cdot 2^n-1}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$$

从而：$T_1+T_2+\cdots+T_n=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)<\dfrac{3}{2}$

二、函数放缩

例 8. 求证：$\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{\ln 3}{3}+\dfrac{\ln 4}{4}+\cdots+\dfrac{\ln 3^n}{3^n}<3^n-\dfrac{5n+6}{6}\ (n\in N^*)$.

解析：先构造函数有 $\ln x\le x-1\Rightarrow\dfrac{\ln x}{x}\le 1-\dfrac{1}{x}$，从而

$$\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\frac{\ln 3^k}{3^k}<3^k-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^k}\right)$$

又因为 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3^k}=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\dfrac{1}{3^k}\right)$

$$>\frac{5}{6}+\left(\frac{3}{6}+\frac{3}{9}\right)+\left(\frac{9}{18}+\frac{9}{27}\right)+\cdots+\left(\frac{3^{n-1}}{2\cdot 3^{n-1}}+\frac{3^{n-1}}{3^n}\right)=\frac{5n}{6}$$

所以：$\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{\ln 3}{3}+\dfrac{\ln 4}{4}+\cdots+\dfrac{\ln 3^n}{3^n}<3^n-1-\dfrac{5n}{6}=3^n-\dfrac{5n+6}{6}$

例 9. 求证：当 $\alpha\ge 2$ 时，$\dfrac{\ln 2^\alpha}{2^\alpha}+\dfrac{\ln 3^\alpha}{3^\alpha}+\cdots+\dfrac{\ln n^\alpha}{n^\alpha}<\dfrac{2n^2-n-1}{2(n+1)}\ (n\ge 2)$.

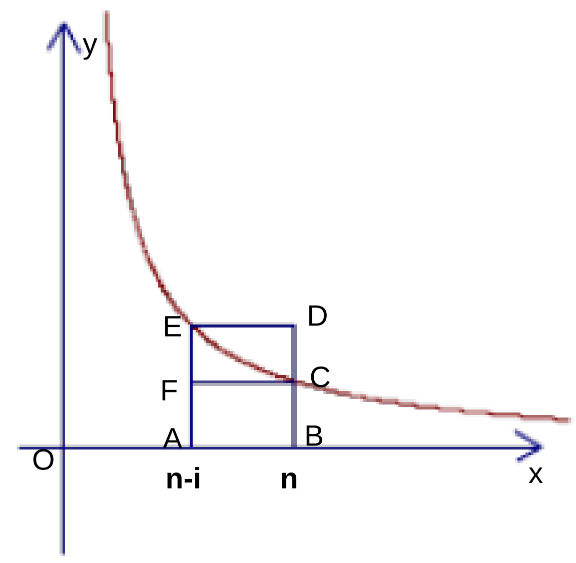
解析：构造函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，得到 $\dfrac{\ln n^\alpha}{n^\alpha}\le\dfrac{\ln n^2}{n^2}$，再进行裂项 $\dfrac{\ln n^2}{n^2}\le 1-\dfrac{1}{n^2}<1-\dfrac{1}{n(n+1)}$，求和后可以得到答案 .

函数构造形式：$\ln x\le x-1$，$\ln n^\alpha\le n^\alpha-1(\alpha\ge 2)$.

例 10. 求证：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

解析：提示：$\ln(n+1)=\ln\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdots\frac{2}{1}=\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n}{n-1}+\cdots+\ln 2$

函数构造形式：$1-\frac{1}{x}<\ln x<x$



当然本题的证明还可以运用积分放缩

如图，取函数 $f(x)=\frac{1}{x}$.

首先：$S_{ABCF}<\int_{n-i}^{n}\frac{1}{x}dx$

从而：$\frac{1}{n}\cdot i<\int_{n-i}^{n}\frac{1}{x}dx=\ln x\big|_{n-i}^{n}=\ln n-\ln(n-i)$

取 $i=1$，有：$\frac{1}{n}<\ln n-\ln(n-1)$，

所以有 $\frac{1}{2}<\ln 2$，$\frac{1}{3}<\ln 3-\ln 2$，$\cdots$，$\frac{1}{n}<\ln n-\ln(n-1)$，$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n$.

相加后可以得到：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)$

另一方面：$S_{ABDE}>\int_{n-i}^{n}\frac{1}{x}dx$. 从而有

$\frac{1}{n-i}\cdot i>\int_{n-i}^{n}\frac{1}{x}dx=\ln\frac{n}{n-i}=\ln n-\ln(n-i)$ $\frac{1}{n-i}\cdot i>\int_{n-i}^{n}\frac{1}{x}=\ln x\big|_{n-i}^{n}=\ln n-\ln(n-i)$

取 $i=1$，有：$\frac{1}{n-1}>\ln n-\ln(n-1)$，所以有：$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

所以综上有：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

例 11. 求证：$\left(1+\frac{1}{2!}\right)\left(1+\frac{1}{3!}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n!}\right)<e$ 和 $\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)<\sqrt{e}$.

例 12. 求证：$(1+1\times2)\cdot(1+2\times3)\cdots[1+n(n+1)]>e^{2n-3}$.

解析：$\ln[1+n(n+1)]>2-\frac{3}{1+n(n+1)}$，叠加之后就可以得到答案．

函数构造形式：$\ln(x+1)>2-\frac{3}{x+1}(x>0)\Rightarrow\frac{1+\ln(1+x)}{x}>\frac{3}{1+x}(x>0)$（加强命题）

例 13. 证明：$\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 3}{4}+\frac{\ln 4}{5}+\cdots+\frac{\ln n}{n+1}<\frac{n(n-1)}{4}(n>1,n\in N^*)$.

解析：构造函数 $f(x)=\ln(x-1)-(x-1)+1(x>1)$，求导可以得到：

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}-1=\frac{2-x}{x-1}$$

令 $f'(x)>0$，有 $1<x<2$；令 $f'(x)<0$，有 $x>2$.

所以 $f(x)\le f(2)=0$，所以 $\ln(x-1)\le x-2$，令 $x=n^2+1$，有：$\ln n^2\le n^2-1$.

所以 $\frac{\ln n}{n+1}\le\frac{n-1}{2}$，所以 $\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 3}{4}+\frac{\ln 4}{5}+\cdots+\frac{\ln n}{n+1}<\frac{n(n-1)}{4}(n>1,n\in N^*)$.

例 14. 已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+n^2}\right)a_n+\frac{1}{2^n}$. 证明：$a_n<e^2$.

解析：因为 $a_1=1$，$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+n^2}\right)a_n+\frac{1}{2^n}\ge 1$.

所以：$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)a_n+\frac{1}{2^n}<\left(1+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)a_n$.

然后两边取自然对数，可以得到：$\ln a_{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)+\ln a_n$.

然后运用 $\ln(1+x)<x$ 和裂项可以得到答案.

放缩思路：$a_{n+1}\le\left(1+\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n}\right)a_n\Rightarrow\ln a_{n+1}\le\ln\left(1+\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n}\right)+\ln a_n$

$\Rightarrow\ln a_{n+1}\le\ln a_n+\frac{1}{n+n^2}+\frac{1}{2^n}$

于是：$\ln a_{n+1}-\ln a_n\le\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n}$

所以：$\sum_{k=1}^{n-1}(\ln a_{k+1}-\ln a_k)\le\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+k^2}+\frac{1}{2^k}\right)\Rightarrow\ln a_n-\ln a_1\le 1-\frac{1}{n}+\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}$

$=2-\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}<2$

即：$\ln a_n-\ln a_1<2\Rightarrow a_n<e^2$.

注：题目所给条件 $\ln(1+x)<x\ (x>0)$ 为一有用结论，可以起到提醒思路与探索放缩方向的作用；当然，本题还可用结论 $2^n>n(n-1)(n\ge 2)$ 来放缩：

$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+n^2}\right)a_n+\frac{1}{2^n}\le\left(1+\frac{1}{n(n-1)}\right)a_n+\frac{1}{n(n-1)}$

$\Rightarrow a_{n+1}+1\le\left(1+\frac{1}{n(n-1)}\right)(a_n+1)$.

对上述不等式两边取对数得：

$\ln(a_{n+1}+1)-\ln(a_n+1)\le\ln\left(1+\frac{1}{n(n-1)}\right)<\frac{1}{n(n-1)}$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n-1}[\ln(a_{k+1}+1)-\ln(a_k+1)]<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k-1)}\Rightarrow\ln(a_{n+1}+1)-\ln(a_1+1)<1-\frac{1}{n}<1$

即：$\ln(a_n+1)<1+\ln 3\Rightarrow a_n<3e-1<e^2$.

例 15. 已知函数 $f(x)=x\ln x$. 若 $a>0,b>0$，证明：$f(a)+(a+b)\ln 2\ge f(a+b)-f(b)$.

解析：设函数 $g(x)=f(x)+f(k-x)(k>0)$.

$\because f(x)=x\ln x$

$\therefore g(x)=x\ln x+(k-x)\ln(k-x)$

$\therefore 0<x<k$

$g'(x)=\ln x+1-\ln(k-x)-1=\ln\dfrac{x}{k-x}$

令 $g'(x)>0$，则有 $\dfrac{x}{k-x}>1\Rightarrow\dfrac{2x-k}{k-x}>0\Rightarrow\dfrac{k}{2}<x<k$

$\therefore$函数 $g(x)$在 $\left[\dfrac{k}{2},k\right)$上单调递增，在 $\left(0,\dfrac{k}{2}\right]$上单调递减．

$\therefore g(x)$的最小值为 $g(\dfrac{k}{2})$，即总有 $g(x)\geq g\left(\dfrac{k}{2}\right)$.

而 $g\left(\dfrac{k}{2}\right)=f\left(\dfrac{k}{2}\right)+f\left(k-\dfrac{k}{2}\right)=k\ln\dfrac{k}{2}=k(\ln k-\ln 2)=f(k)-k\ln 2$

$\therefore g(x)\geq f(k)-k\ln 2$，即 $f(x)+f(k-x)\geq f(k)-k\ln 2$.

令 $x=a, k-x=b$，则 $k=a+b$.

$\therefore f(a)+f(b)\geq f(a+b)-(a+b)\ln 2$．即： $f(a)+(a+b)\ln 2\geq f(a+b)-f(b)$

例 16. 已知函数 $f(x)$是在 $(0,+\infty)$上处处可导的函数，若 $x\cdot f'(x)>f(x)$在 $x>0$ 上恒成立．

(1) 、求证：函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$在 $(0,+\infty)$上是增函数；

(2) 、当 $x_1>0, x_2>0$ 时，证明： $f(x_1)+f(x_2)<f(x_1+x_2)$；

(3) 、已知不等式 $\ln(x+1)<x$ 在 $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$时恒成立．

求证：$\dfrac{\ln 2^2}{2^2}+\dfrac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\dfrac{\ln(n+1)^2}{(n+1)^2}>\dfrac{n}{2(n+1)(n+2)}(n\in N^*)$.

解析:(1) 、因为 $g'(x)=\dfrac{x\cdot f'(x)-f(x)}{x^2}>0$，所以函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$在 $(0,+\infty)$上是增函数；

(2) 、因为 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$在 $(0,+\infty)$上是增函数，所以：

$$\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\Rightarrow f(x_1)<\frac{x_1}{x_1+x_2}\cdot f(x_1+x_2)$$

$$\frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\Rightarrow f(x_2)<\frac{x_2}{x_1+x_2}\cdot f(x_1+x_2)$$

将上述两式相加后可以得到： $f(x_1)+f(x_2)<f(x_1+x_2)$；

(3) 、（方法一） 因为：

$$\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\Rightarrow f(x_1)<\frac{x_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\cdot f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

$$\frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\Rightarrow f(x_2)<\frac{x_2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\cdot f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

,,

$$\frac{f(x_k)}{x_k}<\frac{f(x_1+x_2+\cdots+x_k)}{x_1+x_2+\cdots+x_k}\Rightarrow f(x_k)<\frac{x_k}{x_1+x_2+\cdots+x_k}\cdot f(x_1+x_2+\cdots+x_k)$$

将上述不等式相加后可以得到 ：$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)<f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

所以：$x_1\ln x_1+x_2\ln x_2+\cdots+x_n\ln x_n<(x_1+x_2+\cdots+x_n)\ln(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

令 $x_n=\frac{1}{(1+n)^2}$，有：

$$-\left(\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\frac{\ln(n+1)^2}{(n+1)^2}\right)<\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}\right)\cdot\ln\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$<\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}\right)\ln\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=-\frac{n}{2(n+1)(n+2)}$$

故：$\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\frac{\ln(n+1)^2}{(n+1)^2}>\frac{n}{2(n+1)(n+2)}(n\in N^*)$

（方法二）：$\frac{\ln(n+1)^2}{(n+1)^2}>\frac{\ln(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}\geq\frac{\ln 4}{(n+1)(n+2)}=\ln 4\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

所以：$\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\frac{\ln(n+1)^2}{(n+1)^2}>\ln 4\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{n\ln 4}{2(n+2)}$

又 $\ln 4>1>\frac{1}{1+n}$，所以：$\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\frac{\ln(n+1)^2}{(n+1)^2}>\frac{n}{2(n+1)(n+2)}(n\in N^*)$

三、分式放缩

姐妹不等式：$\frac{b}{a}>\frac{b+m}{a+m}(b>a>0,m>0)$和$\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}(a>B>0,m>0)$

记忆口诀：”小者小，大者大”

解释：看 b，若 b 小，则不等号是小于号 ，反之则反之 .

例 17. 姐妹不等式：$(1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\sqrt{2n+1}$和

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$也可以表示成为 $\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdot2n}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdot(2n-1)}>\sqrt{2n+1}$和

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

解析：利用假分数的一个性质 $\frac{b}{a}>\frac{b+m}{a+m}(b>a>0,m>0)$ 可得：

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}>\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot(2n+1)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{2n}{2n-1}\right)^2>2n+1.$$

即：$(1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\sqrt{2n+1}.$

四、分类放缩

例 18. 求证：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}.$

解析：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$-\frac{1}{2^n}=\frac{n}{2}+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)>\frac{n}{2}.$$

例 19.(2004 年全国高中数学联赛加试改编) 在平面直角坐标系 xOy 中，y 轴正半轴上的点列 $\{A_n\}$ 与曲线 $y=\sqrt{2x}(x\ge 0)$ 上的点列 $\{B_n\}$ 满足 $|OA_n|=|OB_n|=\frac{1}{n}$，直线 A_nB_n 在 x 轴上的截距为 a_n. 点 B_n 的横坐标为 b_n, $n\in N^*$.

(1)、证明：$4<a_{n+1}<a_n$, $n\in N^*$；

(2)、证明：存在 $n_0\in N^*$，使得对 $\forall n>n_0$ 都有 $\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_2}+\cdots+\frac{b_n}{b_{n-1}}+\frac{b_{n+1}}{b_n}<n-2008$.

解析:(1)、依题设有：$A_n\left(0,\frac{1}{n}\right)$，$B_n\left(b_n,\sqrt{2b_n}\right)(b_n>0)$，由 $|OB_n|=\frac{1}{n}$ 得

$$b_n^2+2b_n=\frac{1}{n^2},\quad\therefore\quad b_n=\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}-1,n\in N^*$$

又直线 A_nB_n 在 x 轴上的截距为 a_n 满足：

$$(a_n-0)\cdot\left(\sqrt{2b_n}-\frac{1}{n}\right)=\left(0-\frac{1}{n}\right)\cdot(b_n-0),\quad a_n=\frac{b_n}{1-n\sqrt{2b_n}}$$

$$\because\quad 2n^2b_n=1-n^2b_n^2>0,\quad b_n+2=\frac{1}{n^2b_n}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{b_n}{1-n\sqrt{2b_n}}=\frac{b_n\left(1+n\sqrt{2b_n}\right)}{1-2n^2b_n}=\frac{1}{n^2b_n}+\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{b_n}}=b_n+2+\sqrt{2b_n+4}$$

$$\therefore\quad a_n=\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+1+\sqrt{2+2\sqrt{\frac{1}{n^2}}+1}$$

显然，对于 $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}>0$，有 $4<a_{n+1}<a_n,\ n\in N^*$.

(2) 、证明：设 $c_n=1-\frac{b_{n+1}}{b_n},n\in N^*$，则 $c_n=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2}+1}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}-1}}$

$$=n^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2}+1}}$$

$$>\frac{2n+1}{(n+1)^2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+1}{2\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}-\frac{2n+1}{(n+1)^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}\right)>\frac{2n+1}{2(n+1)^2}$$

$$\because\ (2n+1)(n+2)-2(n+1)^2=n>0$$

$$\therefore\quad c_n>\frac{1}{n+2},n\in N^*$$

设 $S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n,n\in N^*$，则当 $n=2^k-2(k\in N^*)$时，

$$S_n>\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}+\cdots+\frac{1}{2^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$>2\cdot\frac{1}{2^2}+2^2\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{k-1}{2}$$

所以，取 $n_0=2^{4009}-2$, 对 $\forall n>n_0$ 都有：

$$\left(1-\frac{b_2}{b_1}\right)+\left(1-\frac{b_3}{b_2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)=S_n>S_{n_0}>\frac{4017-1}{2}=2008$$

故有 $\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_2}+\cdots+\frac{b_n}{b_{n-1}}+\frac{b_{n+1}}{b_n}<n-2008$ 成立.

例 20.(2007 年泉州市高三质检) 已知函数 $f(x)=x^2+bx+c(b\ge1,c\in R)$，若 $f(x)$的定义域为 $[-1,0]$，值域也为 $[-1,0]$. 若数列 $\{b_n\}$满足 $b_n=\frac{f(n)}{n^3}(n\in N^*)$，记数列 $\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，问是

否存在正常数 A，使得对于任意正整数 n 都有 $T_n < A$?并证明你的结论 .

解析: 首先求出 $f(x)=x^2+2x$.

$\because b_n=\frac{f(n)}{n^3}=\frac{n^2+2n}{n^3}>\frac{1}{n}$

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n>1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

$\because \frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$, $\cdots$,

$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}>2^{k-1}\times\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}$.

故当 $n>2^k$时, $T_n>\frac{k}{2}+1$.

因此，对任何常数 A，设 m 是不小于 A 的最小正整数,

则当 $n>2^{2m-2}$时, 必有 $T_n>\frac{2m-2}{2}+1=m>A$.

故不存在常数 A 使 $T_n<A$, 对所有 $n\geq 2$ 的正整数恒成立 .

五、迭代放缩

例 21. 设 $S_n=\frac{\sin 1!}{2}+\frac{\sin 2!}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n!}{2^n}$, 求证: 对任意的正整数 k, 若 $k\geq n$ 恒有: $|S_{n+k}-S_n|<\frac{1}{n}$.

解析：

$$|S_{n+k}-S_n|=\left|\frac{\sin(n+1)!}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)!}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+k)!}{2^{n+k}}\right|$$

$$\leq\left|\frac{\sin(n+1)!}{2^{n+1}}\right|+\left|\frac{\sin(n+2)!}{2^{n+2}}\right|+\cdots+\left|\frac{\sin(n+k)!}{2^{n+k}}\right|$$

$$\leq\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+k}}\leq\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$=\frac{1}{2^n}\cdot\left(1-\frac{1}{2^k}\right)<\frac{1}{2^n}$$

又 $2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n>n$， 所以 $|S_{n+k}-S_n|<\frac{1}{n}$.

六、借助数列递推关系

例 22. 求证: $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}<\sqrt{2n+1}-1$.

解析： 设 $a_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$, 则 $a_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}a_n\Rightarrow[2(n+1)+1]a_{n+1}=a_{n+1}+(2n+1)a_n$

从而 $a_{n+1}=[2(n+1)+1]a_{n+1}-(2n+1)a_n$

相加后就可以得到 ：

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=(2n+1)a_{n+1}-3a_1$$

$$<(2n+1)a_{n+1}-\frac{3}{2}<(2n+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{3}{2}$$

$$<\sqrt{2n+1}-1$$

例 23. 若 $a_1=1, a_{n+1}\cdot a_n=n+1$, 求证：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\geq 2(\sqrt{n+1}-1)$.

解析：$a_{n+1}\cdot a_{n+2}=n+2=a_n\cdot a_{n+1}+1\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}=a_{n+2}-a_n$. 所以就有：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+a_{n+1}+a_n-a_2-a_1\geq 2\sqrt{a_{n+1}a_n}-a_1=2\sqrt{n+1}-2.$$

七、分类讨论

例 24. 已知数列 $\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足：$S_n=2a_n+(-1)^n, n\geq 1$. 证明：对任意的整数 $m>4$，有

$$\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}<\frac{7}{8}.$$

解析：容易得到 $a_n=\frac{2}{3}\left[2^{n-1}+(-1)^{n-1}\right]$, 由于通项中含有 $(-1)^n$，很难直接放缩，考虑分项讨论：

当 $n\geq 3$ 且 n 为奇数时：$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^n-1}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{2^n+2^{n-1}}{2^{2n-1}+2^n-2^{n-1}-1}$

$$<\frac{3}{2}\cdot\frac{2^n+2^{n-1}}{2^{2n-1}}=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right)$$ （减项放缩）

于是：①、当 $m>4$ 且 m 为偶数时 $\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}=\frac{1}{a_4}+\left(\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{m-1}}+\frac{1}{a_m}\right)$

$$<\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{m-2}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{m-4}}\right)<\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$$

②、当 $m>4$ 且 m 为奇数时

$$\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}<\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}+\frac{1}{a_{m+1}}$$ （添项放缩）

由①知 $\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}<\frac{7}{8}$

由①②得证 .

八、线性规划型放缩

例 25. 设函数 $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2}$. 若对一切 $x\in R$，$-3\leq af(x)+b\leq 3$，求 $a-b$ 的最大值 .

解析：由 $\left[f(x)+\frac{1}{2}\right]\cdot[f(1)-1]=\frac{-(x+2)^2\cdot(x-1)^2}{2(x^2+2)^2}$ 知：$\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)\cdot(f(1)-1)\leq 0$

即 $-\frac{1}{2}\leq f(x)\leq 1$.

由此再由 $f(x)$的单调性可以知道 $f(x)$的最小值为 $-\frac{1}{2}$，最大值为 1.

因此对一切 $x\in R$，$-3\le af(x)+b\le 3$的充要条件是 $\begin{cases}-3\le -\frac{1}{2}a+b\le 3\\ -3\le a+b\le 3\end{cases}$，即 a，b 满足约束条件，由线性规划得，$a-b$的最大值为 5.

九、均值不等式放缩

例 26. 设 $S_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$. 求证：$\frac{n(n+1)}{2}<S_n<\frac{(n+1)^2}{2}$.

解析：此数列的通项为 $a_k=\sqrt{k(k+1)},k=1,2,\cdots,n$.

$\because k<\sqrt{k(k+1)}<\frac{k+k+1}{2}=k+\frac{1}{2}$，$\therefore \sum_{k=1}^{n}k<S_n<\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)$，

即 $\frac{n(n+1)}{2}<S_n<\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}<\frac{(k+1)^2}{2}$.

注：①、应注意把握放缩的“度”：上述不等式右边放缩用的是均值不等式 $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$，若放成 $\sqrt{k(k+1)}<k+1$，则得 $S_k<\sum_{k=1}^{n}(k+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}>\frac{(n+1)^2}{2}$，就放过“度”了；

②、根据所证不等式的结构特征来选取所需要的重要不等式，这里

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

其中，$n=2,3$ 等的各式及其变式公式均可供选用.

例 27. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+a\cdot 2^{bx}}$，若 $f(1)=\frac{4}{5}$，且 $f(x)$在$[0,1]$上的最小值为 $\frac{1}{2}$，求证：$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)>n+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}$.

解析：易求得：$f(x)=\frac{4^x}{1+4^x}=1-\frac{1}{1+4^x}>1-\frac{1}{2\cdot 2^x}(x\ne 0)$

$$\Rightarrow f(1)+f(2)+\cdots+f(n)>\left(1-\frac{1}{2\times 2}\right)+\left(1-\frac{1}{2\times 2^2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{2\times 2^n}\right)$$

$$=n-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=n+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}.$$

例 28. 已知 a,b为正数，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，试证：对每一个 $n\in N^*$，有 $(a+b)^n-a^n-b^n\ge 2^{2n}-2^{n+1}$.

解析：由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$得 $ab=a+b$，又因为 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 4$，故 $ab=a+b\ge 4$

而 $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$

令 $f(n)=(a+b)^n-a^n-b^n$，则 $f(n)=C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}$，因为 $C_n^r=C_n^{n-r}$，倒序相加得：

$$2f(n)=C_n^1(a^{n-1}b+ab^{n-1})+\cdots+C_n^r(a^{n-r}b^r+a^rb^{n-r})+\cdots+C_n^{n-1}(ab^{n-1}+a^{n-1}b)$$

而：$a^{n-1}b+ab^{n-1}\ge 2\sqrt{a^nb^n}\ge 2\sqrt{4^n}=2^{n+1}$，…，$a^{n-r}b^r+a^rb^{n-r}\ge 2^{n+1}$ ；…，$ab^{n-1}+a^{n-1}b\ge 2^{n+1}$

则 $2f(n)=(C_n^1+\cdots+C_n^r+\cdots+C_n^{n-1})\sum_{r=1}^{n-1}(a^rb^{n-r}+a^{n-r}b^r)\ge(C_n^1+\cdots+C_n^r+\cdots+C_n^{n-1})\cdot 2^{n+1}$

$=(2^n-2)\cdot 2^{n+1}$

所以 $f(n)\ge(2^n-2)\cdot 2^n$，即对每一个 $n\in N^*$，有 $(a+b)^n-a^n-b^n\ge 2^{2n}-2^{n+1}$.

例 29. 求证：$C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n>n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\ (n>1,n\in N^*)$.

解析：不等式左边 $=C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-1=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$

$$>n\cdot\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 2^2\cdots\cdot 2^{n-1}}=n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$$

从而原结论成立 .

例 30. 已知 $f(x)=e^x+e^{-x}$，求证：$f(1)\cdot f(2)\cdots\cdot f(n)>(e^{n+1}+1)^{\frac{n}{2}}$.

解析：$f(x_1)\cdot f(x_2)=(e^{x_1}+e^{-x_1})\cdot(e^{x_2}+e^{-x_2})=e^{x_1+x_2}+\dfrac{1}{e^{x_1+x_2}}+\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}}+\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}}>e^{x_1+x_2}+1$

所以： $f(1)\cdot f(n)>e^{1+n}+1$，$f(2)\cdot f(n-1)>e^{1+n}+1$，…，$f(n)\cdot f(1)>e^{n+1}+1$.

经过倒序相乘，再开方，就可以得到： $f(1)\cdot f(2)\cdots\cdot f(n)>(e^{n+1}+1)^{\frac{n}{2}}$.

例 31. 已知 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，求证：$f(1)\cdot f(2)\cdots\cdot f(n)>2^n(n+1)^{\frac{n}{2}}$.

解析：

$$\left(k+\frac{1}{k}\right)\left(2n+1-k+\frac{1}{2n+1-k}\right)=k(2n+1-k)+\frac{k}{2n+1-k}+\frac{2n+1-k}{k}+\frac{1}{k(2n+1-k)}$$

$>2(2n+1-k)+2$，其中：$k=1,2,3,\cdots,2n$.

因为：$k\cdot 2n+k\cdot(1-k)-2n=(k-1)(2n-k)\ge 0\Rightarrow k(2n+1-k)\ge 2n$

所以：$\left(k+\dfrac{1}{k}\right)\cdot\left(2n+1-k+\dfrac{1}{2n+1-k}\right)\ge 2n+2$

从而 $[f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdots\cdot f(2n)]^2>(2n+2)^{2n}$

所以 $f(1)\cdot f(2)\cdots\cdot f(n)>2^n(n+1)^{\frac{n}{2}}$.

例 32. 若 $k>7$，求证：$S_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{nk-1}>\dfrac{3}{2}$.

解析：$2S_n=\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{nk-1}\right)+\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{nk-2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{nk-1}+\dfrac{1}{n}\right)$

因为当 $x>0, y>0$ 时，$x+y\ge 2\sqrt{xy}, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{2}{\sqrt{xy}}$

所以 $(x+y)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge 2$，从而 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$，当且仅当 $x=y$ 时取到等号．

故 $2S_n>\frac{4}{n+nk-1}+\frac{4}{n+1+nk-2}+\frac{4}{n+2+nk-3}+\cdots+\frac{4}{n+nk-1}$

$=\frac{4n(k-1)}{n+nk-1}$

所以 $S_n>\frac{2(k-1)}{1+k-\frac{1}{n}}>\frac{2(k-1)}{1+k}=2-\frac{4}{k+1}>\frac{3}{2}$，即：$S_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{nk-1}>\frac{3}{2}$．

例 33. 已知 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$，求证：$f(0)\cdot f(1)\le\frac{a^2}{16}$．

解析：$f(0)\cdot f(1)=a^2[x_1(1-x_1)][x_2(1-x_2)]\le a^2\left(\frac{x_1+1-x_1}{2}\right)^2\left(\frac{x_2+1-x_2}{2}\right)^2\le\frac{a^2}{16}$

例 34. 已知函数 $f(x)=x^2-(-1)^k\cdot 2\ln x$（$k\in N^*$,k 是奇数），当 $n\in N^*$ 时，求证：

$[f'(x)]^n-2^{n-1}\cdot f'(x^n)\ge 2^n(2^n-2)$.

解析：由已知得 $f'(x)=2x+\frac{2}{x}(x>0)$

(1)、当 $n=1$ 时，左式 $=\left(2x+\frac{2}{x}\right)-\left(2x+\frac{2}{x}\right)=0=$ 右式，$\therefore$ 不等式成立．

(2)、当 $n\ge 2$ 时，左式 $=[f'(x)]^n-2^{n-1}\cdot f'(x^n)=\left(2x+\frac{2}{x}\right)^n-2^{n-1}\cdot\left(2x^n+\frac{2}{x^n}\right)$

$=2^n\left(C_n^1x^{n-2}+C_n^2x^{n-4}+\cdots+C_n^{n-2}\frac{1}{x^{n-4}}+C_n^{n-1}\frac{1}{x^{n-2}}\right)$.

令 $S=C_n^1x^{n-2}+C_n^2x^{n-4}+\cdots+C_n^{n-2}\frac{1}{x^{n-4}}+C_n^{n-1}\frac{1}{x^{n-2}}$

由倒序相加法得：$2S=C_n^1\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+C_n^2\left(x^{n-4}+\frac{1}{x^{n-4}}\right)+\cdots+C_n^{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-2}}+x^{n-2}\right)$

$\ge 2(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1})=2(C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n-2)$

$=2(2^n-2)$

所以 $S\ge 2^n-2$.

综上，当 k 是奇数，$n\in N^+$ 时，所以 $[f'(x)]^n-2^{n-1}\cdot f'(x^n)\ge 2^n(2^n-2)$ 成立．

例 35.（2007年东北三校）已知函数 $f(x)=a^x-x(a>1)$.

（1）、求函数 $f(x)$ 的最小值，并求最小值小于 0 时的 a 取值范围；

（2）、令 $S(n)=C_n^1 f'(1)+C_n^2 f'(2)+\cdots+C_n^{n-1} f'(n-1)$，求证：$S(n)>(2^n-2)\cdot f'\left(\frac{n}{2}\right)$.

解析：（1）、由 $f'(x)=a^x\ln a-1$，令 $f'(x)>0$，即：$a^x\ln a>1$.

$\therefore\ a^x>\frac{1}{\ln a}$，又 $a>1$，$\therefore\ x>-\log_a\ln a$.

同理：由 $f'(x)<0$ 得，$x<-\log_a\ln a$.

所以，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\log_a\ln a)$ 上递减，在 $(-\log_a\ln a,+\infty)$ 上递增；

从而：$f(x)_{min}=f(-\log_a\ln a)=\frac{1+\ln a}{\ln a}$

若 $f(x)_{min}<0$，即 $\frac{1+\ln a}{\ln a}<0$，则 $\ln\ln a<-1$，$\therefore\ \ln a<\frac{1}{e}$

$\therefore$ a 的取值范围是 $(0, e^{\frac{1}{e}})$.

（2）、$S(n)=C_n^1(a\ln a-1)+C_n^2(a^2\ln a-1)+\cdots+C_n^{n-1}(a^{n-1}\ln a-1)$

$$=(C_n^1a+C_n^2a^2+\cdots+C_n^{n-1}a^{n-1})\ln a-(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1})$$

$$=\frac{1}{2}\left[C_n^1(a+a^{n-1})+C_n^2(a^2+a^{n-2})+\cdots+C_n^{n-1}(a^{n-1}+a)\right]\ln a-(2^n-2)$$

$$\geq a^{\frac{n}{2}}(2^n-2)\ln a-(2^n-2)=(2^n-2)\left(a^{\frac{n}{2}}\ln a-1\right)=(2^n-2)f'\left(\frac{n}{2}\right)$$

所以不等式成立 .

★例 36. (2008 年江西高考试题) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{\frac{ax}{ax+8}}$ $x\in(0,+\infty)$.

（1）、当 $a=8$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）、对任意正数 a，证明：$1<f(x)<2$.

解：（1）、当 $a=8$ 时，$f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}$，求导得：$f'(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x(1+x)^3}}$.

于是当 $x\in(0,1]$ 时，$f'(x)\geq0$；而当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$f'(x)\leq0$.

即 $f(x)$ 在 $x\in(0,1]$ 上单调递增，而在 $x\in[1,+\infty)$ 中单调递减.

（2）、对任意给定的 $a>0$，$x>0$，由 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{ax}}}$

若令 $b=\frac{8}{ax}$，则 $abx=8$　　①

而 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}$　　②

（一）、先证 $f(x)>1$.

因为 $\frac{1}{\sqrt{1+x}}>\frac{1}{1+x}$，$\frac{1}{\sqrt{1+a}}>\frac{1}{1+a}$，$\frac{1}{\sqrt{1+b}}>\frac{1}{1+b}$.

又由 $2+a+b+x\geq 2\sqrt{2a}+2\sqrt{bx}\geq 2\sqrt[4]{2abx}=8$，得：$a+b+x\geq 6$.

所以 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}>\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$

$$=\frac{3+2(a+b+x)+(ab+ax+bx)}{(1+x)(1+a)(1+b)}\geq\frac{9+(a+b+x)+(ab+ax+bx)}{(1+x)(1+a)(1+b)}$$

$$=\frac{1+(a+b+x)+(ab+ax+bx)+abx}{(1+x)(1+a)(1+b)}=1$$

（二）、再证 $f(x)<2$.

由①、②式中关于 x,a,b 的对称性，不妨设 $x\geq a\geq b$．则 $0<b\leq 2$.

(I)、当 $a+b\geq 7$，则 $a\geq 5$，所以 $x\geq a\geq 5$，因为 $\frac{1}{\sqrt{1+b}}<1$，$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}\leq\frac{2}{\sqrt{1+5}}<1$.

此时 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}<2$.

(II)、当 $a+b<7$　　③

由①得：$x=\frac{8}{ab}$，$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{\frac{ab}{ab+8}}$.

因为：$\frac{1}{1+b}<1-\frac{b}{1+b}+\frac{b^2}{4(1+b)^2}=\left(1-\frac{b}{2(1+b)}\right)^2$

所以 $\frac{1}{\sqrt{1+b}}<1-\frac{b}{2(1+b)}$　　④

同理得 $\frac{1}{\sqrt{1+a}}<1-\frac{a}{2(1+a)}$　　⑤

于是：$f(x)<2-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}-2\sqrt{\frac{ab}{ab+8}}\right)$　　⑥

下面证明：$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}>2\sqrt{\frac{ab}{ab+8}}$ ⑦

因为 $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\geq 2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}$

只要证 $\frac{ab}{(1+a)(1+b)}>\frac{ab}{ab+8}$，即 $ab+8>(1+a)(1+b)$，也即 $a+b<7$，据③，此为显然.

因此⑦得证．故由⑥得 f（x）＜2.

综上所述，对任何正数 a,x，皆有 $1<f(x)<2$.

例 37. 求证：$1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}<2$.

解析：一方面：(法一) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}\geq\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=1$

(法二) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{3n}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4n+2}{(3n+1)\cdot(n+1)}+\frac{4n+2}{3n(n+2)}+\cdots+\frac{4n+2}{(3n+1)\cdot(n+1)}\right)$$

$$=(2n+1)\cdot\left(\frac{1}{(2n+1)^2-n^2}+\frac{1}{(2n+1)^2-(n-1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2-n^2}\right)$$

$$>\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2}=1$$

另一方面：$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}<\frac{2n+1}{n+1}<\frac{2n+2}{n+1}=2$.

十、二项放缩

$$2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n\geq C_n^0+C_n^1=n+1,$$

$$2^n\geq C_n^0+C_n^1+C_n^2=\frac{n^2+n+2}{2};\ 2^n>n(n-1)\ (n\geq 2)$$

例 38. 已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)a_n+\frac{1}{2^n}$. 证明：$a_n<e^2$.

解析：$a_{n+1}\leq\left(1+\frac{1}{n(n-1)}\right)a_n+\frac{1}{n(n-1)}\Rightarrow a_{n+1}+1\leq\left(1+\frac{1}{n(n-1)}\right)(a_n+1)$

$\because \ln(1+x)<x,\ (x>-1)$

$$\Rightarrow \ln(a_{n+1}+1)\le \ln(a_n+1)+\ln\left(1+\frac{1}{n(n-1)}\right)<\ln(a_n+1)+\frac{1}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow \ln(a_{n+1}+1)-\ln(a_n+1)<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\left[\ln(a_{k+1}+1)-\ln(a_k+1)\right]<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k-1)}\Rightarrow \ln(a_n+1)-\ln(a_1+1)<1-\frac{1}{n}<1.$$

即：$\ln(a_n+1)<1+\ln 3\Rightarrow a_n<3e-1<e^2$.

例 39. 设 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，求证：数列 $\{a_n\}$ 单调递增且 $a_n<4$.

解析：引入一个结论：若 $0<a<b$，则 $b^{n+1}-a^{n+1}<(n+1)b^n(b-a)$（证明略）

整理上式得：$a^{n+1}>b^n[(n+1)a-nb]$ （$\otimes$）

以 $a=1+\frac{1}{n+1}, b=1+\frac{1}{n}$ 代入（$\otimes$）式得：$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

即 $\{a_n\}$ 单调递增.

以 $a=1, b=1+\frac{1}{2n}$ 代入（$\otimes$）式得：$1>\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\Rightarrow\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n<2\Rightarrow\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}<4$.

此式对一切正整数 n 都成立，即对一切偶数有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$，又因为数列 $\{a_n\}$ 单调递增，所以对一切正整数 n 有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$.

例 40. 已知 $a+b=1$，$a>0$，$b>0$，求证：$a^n+b^n\ge 2^{1-n}$.

解析：因为 $a+b=1$，$a>0$，$b>0$，则可以认为：$a,\frac{1}{2},b$ 成等差数列，设 $a=\frac{1}{2}-d$，$b=\frac{1}{2}+d$

从而：$a^n+b^n=\left(\frac{1}{2}-d\right)^n+\left(\frac{1}{2}+d\right)^n\ge 2^{1-n}$.

例 41. 设 $n>1$，$n\in N^*$，求证：$\left(\frac{2}{3}\right)^n<\frac{8}{(n+1)(n+2)}$.

解析：观察 $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 的结构，注意到 $\left(\frac{3}{2}\right)^n=\left(1+\frac{1}{2}\right)^n$，展开得：

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^n=1+C_n^1\cdot\frac{1}{2}+C_n^2\cdot\frac{1}{2^2}+C_n^3\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+C_n^n\cdot\frac{1}{2^n}$$

$$\ge 1+\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{8}=\frac{(n+1)(n+2)+6}{8}$$

即：$\left(1+\frac{1}{2}\right)^n > \frac{(n+1)(n+2)}{8}$，命题得证．

例 42. (2008 年北京海淀 5 月练习) 已知函数 $y=f(x)$，$x\in N^*$，$y\in N^*$，满足：

①、对任意 $a,b\in N^*$，$a\neq b$，都有：$af(a)+bf(b)>af(b)+bf(a)$；②、对任意 $n\in N^*$，都有 $f[f(n)]=3n$．

(1)、试证明：$f(x)$为 N^* 上的单调增函数；(2)、求 $f(1)+f(6)+f(28)$；

(3)、令 $a_n=f(3^n)$，$n\in N^*$，试证明：$\frac{n}{4n+2}\le\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{4}$．

解析：本题的亮点很多，是一道考查能力的好题．

(1)、运用抽象函数的性质判断单调性：

因为 $af(a)+bf(b)>af(b)+bf(a)$，所以可以得到：$(a-b)f(a)-(a-b)f(b)>0$．

即：$(a-b)\cdot(f(a)-f(b))>0$．

不妨设 $a>b$，所以，可以得到 $f(a)>f(b)$，所以 $f(x)$为 N^* 上的单调增函数

(2)、此问的难度较大，要完全解决出来需要一定的能力！

首先我们发现条件不是很足，，尝试探索看看按 (1) 中的不等式可以不可以得到什么结论，一发现就有思路了！

由 (1) 可知：$(a-b)\cdot(f(a)-f(b))>0$，令 $b=1$，$a=f(1)$，则可以得到

$(f(x)-1)\cdot[f(f(1))-f(1)]>0$，又因为 $f(f(1))=3$

所以由不等式可以得到：$1<f(1)<3$．

又 $f(1)\in N^*$，所以可以得到：　$f(1)=2$　①

接下来要运用迭代的思想：

因为 $f(1)=2$，所以：$f(2)=f[f(1)]=3$，$f(3)=f[f(2)]=6$，$f(6)=f[f(3)]=9$　②

$f(9)=f[f(6)]=18$，$f(18)=f[f(9)]=27$，$f(27)=f[f(18)]=54$，$f(54)=f[f(27)]=81$

在此比较有技巧的方法就是：$81-54=27=54-27$

所以可以判断：$f(28)=55$　③

当然，在这里可能不容易一下子发现这个结论，所以还可以列项的方法，把所有项数尽可能地列出来，然后就可以得到结论．

所以，综合①②③有：$f(1)+f(6)+f(28)=55+9+2=66$．

(3)、在解决 $\{a_n\}$的通项公式时也会遇到困难．

$f[f(3^n)]=3^{n+1}$，$f(3^{n+1})=f\{f[f(3^n)]\}=3f(3^n)\Rightarrow a_{n+1}=3a_n$．

所以数列 $a_n=f(3^n)$, $n\in N^*$ 的方程为 $a_n=2\cdot 3^n$, 从而 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$.

一方面: $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{1}{4}$; 另一方面: $3^n=(1+2)^n\geq C_n^0\cdot 2^0+C_n^1\cdot 2^1=2n+1$.

所以: $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\geq\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{n}{4n+2}$.

从而, 综上有: $\frac{n}{4n+2}\leq\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{4}$.

例 43. 已知函数 $f(x)$的定义域为 $[0,1]$, 且满足下列条件:

①、对于任意 $x\in[0,1]$, 总有 $f(x)\geq 3$, 且 $f(1)=4$;

②、若 $x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_1+x_2\leq 1$, 则有: $f(x_1+x_2)\geq f(x_1)+f(x_2)-3$.

(1)、求 $f(0)$的值;

(2)、求证: $f(x)\leq 4$;

(3)、当 $x\in\left(\frac{1}{3^n},\frac{1}{3^{n-1}}\right]$ $(n=1,2,3,\cdots)$时, 试证明: $f(x)<3x+3$.

解析: (1)、令 $x_1=x_2=0$, 由①知: 对于任意 $x\in[0,1]$, 总有 $f(x)\geq 3$, ∴ $f(0)\geq 3$

又由②得: $f(0)\geq 2f(0)-3$, 即 $f(0)\leq 3$. ∴ $f(0)=3$.

(2)、任取 $x_1,x_2\in[0,1]$, 且设 $x_1<x_2$, 则: $f(x_2)=f[x_1+(x_2-x_1)]\geq f(x_1)+f(x_2-x_1)-3$.

因为 $x_2-x_1>0$, 所以 $f(x_2-x_1)\geq 3$, 即 $f(x_2-x_1)-3\geq 0$.

∴ $f(x_1)\leq f(x_2)$.

∴当 $x\in[0,1]$ 时, $f(x)\leq f(1)=4$.

(3)、证明: 先用数学归纳法证明: $f\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)\leq\frac{1}{3^{n-1}}+3$ $(n\in N^*)$

①、当 $n=1$时, $f\left(\frac{1}{3^0}\right)=f(1)=4=1+3=\frac{1}{3^0}+3$, 不等式成立.

②、假设当 $n=k$时, $f\left(\frac{1}{3^{k-1}}\right)\leq\frac{1}{3^{k-1}}+3$ $(k\in N^*)$.

当 $n=k+1$时, 由 $f\left(\frac{1}{3^{k-1}}\right)=f\left[\frac{1}{3^k}+\left(\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^k}\right)\right]\geq f\left(\frac{1}{3^k}\right)+f\left(\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^k}\right)-3$

$$\geq f\left(\frac{1}{3^k}\right)+f\left(\frac{1}{3^k}\right)+f\left(\frac{1}{3^k}\right)-6.$$

得：$3f\left(\frac{1}{3^k}\right)\leq f\left(\frac{1}{3^{k-1}}\right)+6\leq\frac{1}{3^{k-1}}+9=\frac{3}{3^k}+9=3\left(\frac{1}{3^k}+3\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{3^k}\right)\leq\frac{1}{3^k}+3$

即当 $n=k+1$ 时，不等式成立 .

由①②可知：不等式 $f\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)\leq\frac{1}{3^{n-1}}+3$ 对一切正整数 n 都成立 .

于是，当 $x\in\left(\frac{1}{3^n},\frac{1}{3^{n-1}}\right](n=1,2,3,\cdots)$ 时， $3x+3>3\times\frac{1}{3^n}+3=\frac{1}{3^{n-1}}+3\geq f\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)$.

而 $x\in[0,1]$ ， $f(x)$ 单调递增 . $\therefore f\left(\frac{1}{3^n}\right)<f\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)$. 所以：$f(x)<f\left(\frac{1}{3^{k-1}}\right)<3x+3$.

例 44. 已知：$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，$a_i>0$，$i=1,2,3,\cdots,n$.

求证：$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}>\frac{1}{2}$.

解析：构造对偶式：令 $A=\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}$

$B=\frac{a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_1^2}{a_n+a_1}$

$$\text{则 } A-B=\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2-a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2-a_1^2}{a_n+a_1}$$
$$=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+(a_n-a_1)=0$$

$\therefore A=B$

又 $\because \frac{a_i^2+a_j^2}{a_i+a_j}\geq\frac{1}{2}(a_i+a_j)\ (i,j=1,2,3,\cdots,n)$

$$\therefore A=\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}\right)$$
$$\geq\frac{1}{4}[(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)+(a_n+a_1)]=\frac{1}{2}$$

十一、积分放缩

利用定积分的保号性比大小

保号性是指，定义在 $[a,b]$ 上的可积函数 $f(x)\geq0(\leq0)$，则 $\int_a^b f(x)dx\geq0(\leq0)$.

例 45. 求证：$\pi^e<e^\pi$.

解析：$\pi^e<e^\pi\Rightarrow\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{\ln e}{e}$ $\quad\because\frac{\ln\pi}{\pi}-\frac{\ln e}{e}=\left.\frac{\ln x}{x}\right|_e^\pi=\int_e^\pi d\left(\frac{\ln x}{x}\right)=\int_e^\pi\frac{1-\ln x}{x^2}dx$

当 $x\in(e,\pi)$ 时，$\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$，$\int_e^{\pi}\dfrac{1-\ln x}{x^2}dx<0$

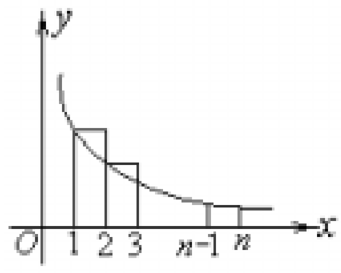
$\therefore \dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{\ln e}{e}$，$\pi^e<e^{\pi}$.

利用定积分估计和式的上下界

定积分产生和应用的一个主要背景是计算曲边梯形的面积，现在用它来估计小矩形的面积和 .

例 46. 求证：$1+\dfrac{1}{\sqrt2}+\dfrac{1}{\sqrt3}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt n}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$，$(n>1,n\in N^*)$.

解析：考虑函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt x}$ 在区间 $[i,i+1]\ (i=1,2,3,\cdots,n)$ 上的定积分 .



如图，显然 $\dfrac{1}{\sqrt i}=\dfrac{1}{\sqrt i}\cdot 1>\int_i^{i+1}\dfrac{1}{\sqrt x}dx$ ①

对 i 求和：$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt i}>\sum\limits_{i=1}^{n}\int_i^{i+1}\dfrac{1}{\sqrt x}dx=\int_1^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt x}dx=\left[2\sqrt x\right]_1^{n+1}=2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$

$=\left[2\sqrt x\right]_1^{n+1}=2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$.

例 47. 已知 $n\ge4,n\in N$. 求证：$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}<\dfrac{7}{10}$.

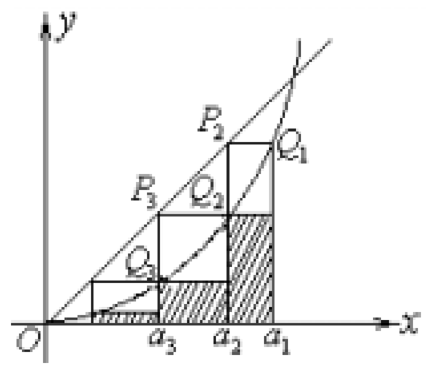
解析：考虑函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 在区间 $\left[\dfrac{i-1}{n},\dfrac{i}{n}\right]\ (i=1,2,3,\cdots,n)$ 上的定积分 .

$\because \dfrac{1}{n+i}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{n}}<\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\dfrac{1}{1+x}dx$

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{n}}<\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\dfrac{1}{1+x}dx=\int_0^1\dfrac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\big|_0^1-\ln 2<\dfrac{7}{10}$.

例 48.（2003 年全国高考江苏卷） 设 $a>0$，如图，已知直线 $l:y=ax$ 及曲线 $C:y=x^2$，C 上的点 Q_1 的横坐标为 $a_1(0<a_1<a)$. 从 C 上的点 $Q_n(n\ge1)$ 作直线平行于 x 轴，交直线 l 于点 P_{n+1}，再从点 P_{n+1} 作直线平行于 y 轴，交曲线 C 于点 Q_{n+1}. $Q_n(n=1,2,3,,)$ 的横坐标构成数列 $\{a_n\}$

（1）、试求 a_{n+1} 与 a_n 的关系，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；



（2）、当 $a=1,a_1\le\dfrac{1}{2}$ 时，证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}<\dfrac{1}{32}$；

（3）、当 $a=1$ 时，证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}<\dfrac{1}{3}$.

解析：（1） $\because Q_n(a_{n-1},a_n^2),P_{n+1}(\frac{1}{a}\cdot a_n^2,a_n^2),Q_{n+1}(\frac{1}{a}\cdot a_n^2,\frac{1}{a^2}a_n^4)$.

$$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{a}\cdot a_n^2,\quad \therefore a_n=\frac{1}{a}\cdot a_{n-1}^2=\frac{1}{a}(\frac{1}{a}\cdot a_{n-2}^2)^2=(\frac{1}{a})^{1+2}a_{n-2}^{2^2}$$

$$=(\frac{1}{a})^{1+2}(\frac{1}{a}\cdot a_{n-3}^2)^{2^2}=(\frac{1}{a})^{1+2+2^2}a_{n-2}^{2^3}=\cdots$$

$$=(\frac{1}{a})^{1+2+\cdots+2^{n-2}}a_1^{2^{n-1}}=(\frac{1}{a})^{2^{n-1}-1}a_1^{2^{n-1}}=a(\frac{a_1}{a})^{2^{n-1}}$$

$$\therefore a_n=a(\frac{a_1}{a})^{2^{n-1}}.$$

（2）、证明：由 a=1 知： $a_{n+1}=a_n^2$， $\because a_1\le\frac{1}{2}$， $\therefore a_2\le\frac{1}{4},a_3\le\frac{1}{16}$.

$\because$ 当 $k\ge1$时， $a_{k+2}\le a_3\le\frac{1}{16}$.

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})\cdot a_{k+2}\le\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=\frac{1}{16}(a_1-a_{n+1})<\frac{1}{32}$$

（3）、证明：由（1）知，当 a=1 时， $a_n=a_1^{2^{n-1}}$，因此

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}=\sum_{k=1}^{n}(a_1^{2^{k-1}}-a_1^{2^k})a_1^{2^{k+1}}\le\sum_{i=1}^{2^{n-1}}(a_1^i-a_1^{i+1})a_1^{2i+2}$$

$$=(1-a_1)a_1^2\sum_{i=1}^{2^{n-1}}a_1^{3i}<(1-a_1)a_1^2\cdot\frac{a_1^3}{1-a_1^3}=\frac{a_1^5}{1+a_1+a_1^2}<\frac{1}{3}.$$

奇巧积累： 将定积分构建的不等式略加改造即得“初等”证明，如：

①、 $\frac{1}{\sqrt{i}}>2(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})$;

②、 $\frac{1}{n+i}<\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\frac{1}{1+x}dx=\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n+i}<\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\frac{1}{1+x}dx$ ；

③、 $\frac{\sin\theta_i-\sin\theta_{i-1}}{\sqrt{1-\sin^2\theta_{i-1}}}<\int_{\sin\theta_{i-1}}^{\sin\theta}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\theta_i-\theta_{i-1}$ ；

十二、部分放缩（尾式放缩）

例 49. 求证: $\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3\times2+1}+\cdots+\frac{1}{3\cdot2^{n-1}+1}<\frac{4}{7}$.

解析: $\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3\times2+1}+\cdots+\frac{1}{3\cdot2^{n-1}+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3\cdot2^{n-1}+1}$

$$<\frac{11}{28}+\frac{1}{3\cdot2^2}+\cdots+\frac{1}{3\cdot2^{n-1}}<\frac{11}{28}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{47}{84}<\frac{48}{84}=\frac{4}{7}$$

例 50. 设$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$，$\alpha\ge 2$. 求证：$a_n<2$.

解析：$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

又$k^2=k\cdot k>k(k-1)\ k\ge 2$（只将其中一个 k变成$k-1$，进行部分放缩）

$\therefore\ \frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

于是$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$

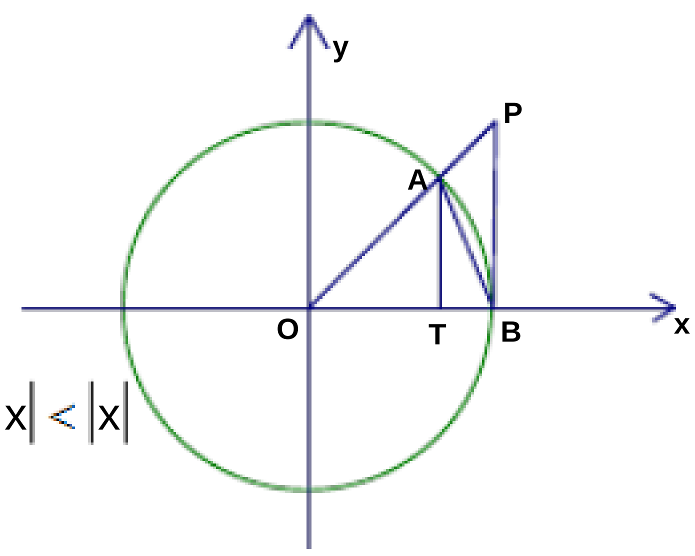
$$\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2$$

十三、三角不等式的放缩

例 51. 求证：$|\sin x|\le|x|\ (x\in R)$

解析：(1)、当$x=0$时，

(2)、当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，构造单位圆，如图所示：



因为三角形 AOB的面积小于扇形 OAB的面积

所以可以得到：$\sin x<x\Rightarrow|\sin x|<|x|$

当$x\ge\frac{\pi}{2}$时，$|\sin x|<|x|$. 所以当$x>0$时，$\sin x<x$有$|\sin x|<|x|$

(3)、当$x<0$时，$-x>0$. 由(2)可知：$|\sin x|<|x|$

所以综上有$|\sin x|\le|x|\ (x\in R)$

十四、使用加强命题法证明不等式

(1)、同侧加强：对所证不等式的同一方向（可以是左侧，也可以是右侧）进行加强. 如要证明$f(x)<A$，只要证明$f(x)<A-B(B>0)$，其中 B 通过寻找分析，归纳完成.

例 52. 求证：对一切$n\in N^*$，都有$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}<3$.

解析：$\frac{1}{k\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k^3}}<\frac{1}{\sqrt{k(k^2-1)}}=\frac{1}{\sqrt{(k-1)k(k+1)}}<\left(\frac{1}{\sqrt{(k-1)k}}-\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\cdot\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}{2}<\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\cdot\sqrt{\frac{2k}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

从而：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}<1+\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

$$<1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}<3$$

当然本题还可以使用其他方法，如:

$$\because\ 2k=k+k>\sqrt{k(k-1)}+\sqrt{(k-1)\cdot(k-1)}=\sqrt{k-1}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)$$

$$\therefore\ \frac{1}{k\sqrt{k}}=\frac{2}{2k\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k}\sqrt{k-1}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)}{\sqrt{k}\sqrt{k-1}}=2\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

所以：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}=1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}<1+2\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$=1+2-\frac{2}{\sqrt{n}}=3-\frac{2}{\sqrt{n}}<3$$

(2)、异侧加强(数学归纳法)

(3)、双向加强：有些不等式，往往是某个一般性命题的特殊情况，这时，不妨"返璞归真"，通过双向加强还原其本来面目，从而顺利解决原不等式．其基本原理为：

欲证明 $A<f(x)<B$，只要证明：$A+C<f(x)<B-C\ (C>0, A<B)$.

例 53. 已知数列 $\{a_n\}$满足：$a_1=1, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$，求证：$\sqrt{2n-1}<a_n<\sqrt{3n-2}\ (n>2)$

解析：$a_n^2=\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}\right)^2>a_{n-1}^2+2$，从而 $a_n^2-a_{n-1}^2>2$，所以有

$$a_n^2=\left(a_n^2-a_{n-1}^2\right)+\left(a_{n-1}^2-a_{n-2}^2\right)+\cdots+\left(a_2^2-a_1^2\right)+a_1^2>2(n-1)+1=2n-1$$

所以：$a_n>\sqrt{2n-1}$

又 $a_n^2=\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}\right)^2<a_{n-1}^2+3$，所以 $a_n^2-a_{n-1}^2<3$．从而有

$$a_n^2=\left(a_n^2-a_{n-1}^2\right)+\left(a_{n-1}^2-a_{n-2}^2\right)+\cdots+\left(a_2^2-a_1^2\right)+a_1^2<3(n-1)+1$$

所以：$a_n<\sqrt{3n-2}$

所以综上有：$\sqrt{2n-1}<a_n<\sqrt{3n-2}\ (n>2)$

引申：已知数列 $\{a_n\}$满足：$a_1=1, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\le\sqrt{2n-1}$．

解析：由上可知 $a_n>\sqrt{2n-1}>\frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n-3}}{2}$．

所以：$\frac{1}{a_n}<\frac{1}{\sqrt{2n-1}}<\frac{2}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n-3}}=\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-3}$

从而：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<1+(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-3}=\sqrt{2n-1}\ (n\geq 2)$

又当 $n=1$时，$\frac{1}{a_1}=1$，所以综上有 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\leq\sqrt{2n-1}$.

同题引申：(2008 年浙江高考试题) 已知数列 $\{a_n\}$，$a_n\geq 0$，$a_1=0$，$a_{n+1}^2+a_{n+1}-1=a_n^2(n\in N^*)$.

记：$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$T_n=\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$.

求证：当 $n\in N^*$ 时，(1)、$a_n<a_{n+1}$；(2)、$S_n>n-2$；　★(3)、$T_n<3$.

解析：(1)、$a_{n+1}^2-a_n^2=1-a_{n+1}$，猜想 $a_n<1$. 下面用数学归纳法证明：

①、当 $n=1$时，$a_1<1$，结论成立；

②、假设当 $n=k(k\geq 1)$时，$a_k<1$.

则 $n=k+1(k\geq 1)$时，$a_{n+1}^2+a_{n+1}=1+a_n^2$，从而

$a_{n+1}^2+a_{n+1}<2\Rightarrow a_{n+1}<1$，所以 $0\leq a_{k+1}<1$.

所以综上有 $0\leq a_n<1$，故 $a_{n+1}^2-a_n^2>0\Rightarrow a_{n+1}>a_n$.

(2)、因为 $a_{n+1}^2-a_n^2=1-a_{n+1}$，则 $a_2^2-a_1^2=1-a_2$，$a_3^2-a_2^2=1-a_3\cdots$ $a_{n+1}^2-a_n^2=1-a_{n+1}$

相加后可以得到：$a_{n+1}^2-a_1^2=n-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\Rightarrow S_{n+1}=n-a_{n+1}^2$.

所以 $S_n=n-1-a_n^2>n-2$.

(3)、因为 $a_{n+1}^2+a_{n+1}=1+a_n^2\geq 2a_n$，从而 $a_{n+1}+1\geq\frac{2a_n}{a_{n+1}}$，有 $\frac{1}{1+a_{n+1}}\leq\frac{a_{n+1}}{2a_n}$，所以有

$$\frac{1}{(1+a_3)\cdots(1+a_n)(1+a_{n+1})}\leq\frac{a_{n+1}}{2a_n}\cdot\frac{a_n}{2a_{n-1}}\cdots\frac{a_3}{2a_2}=\frac{a_{n+1}}{2^{n-1}a_2}$$

从而 $$\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)(1+a_{n+1})}\leq\frac{a_{n+1}}{2^{n-1}a_2}\cdot\frac{1}{1+a_2}=\frac{a_{n+1}}{2^{n-1}}$$

所以 $$\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)}\leq\frac{a_n}{2^{n-2}\cdot a_2}\cdot\frac{1}{1+a_2}=\frac{a_n}{2^{n-2}}$$

则 $T_n\leq 1+\frac{1}{1+a_2}+\frac{a_3}{2}+\frac{a_4}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-2}}<1+\frac{1}{1+a_2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}$

$$<\frac{2}{\sqrt{5}+1}+1+1<3$$

所以综上有 $T_n<3$.

例 54. (2008 年陕西省高考试题) 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\frac{3}{5}$， $a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$， $n=1,2,\cdots$.

(1)、 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)、 证明：对任意的 $x>0$， $a_n\geq\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)$， $n=1,2,\cdots$ ；

(3)、 证明： $a_1+a_2+\cdots+a_n>\frac{n^2}{n+1}$.

解法一：（1）、 $\because a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$， $\therefore\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3a_n}$， $\therefore\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$,

又 $\frac{1}{a_n}-1=\frac{2}{3}$， $\therefore\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项， $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

$\therefore\frac{1}{a_n}-1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{2}{3^n}$， $\therefore a_n=\frac{3^n}{3^n+2}$.

（2）、由（1）知 $a_n=\frac{3^n}{3^n+2}>0$，

$$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}+1-1-x\right)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left[\frac{1}{a_n}-(1+x)\right]$$

$$=-\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{2}{1+x}=-\frac{1}{a_n}\left(\frac{1}{1+x}-a_n\right)^2+a_n\leq a_n,$$

$\therefore$ 原不等式成立.

（3）、由（2）知，对任意的 $x>0$，有：

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geq\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3}-x\right)+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^2}-x\right)+\cdots+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)$$

$$=\frac{n}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n}-nx\right).$$

$$\therefore\ \text{取}\ x=\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n}\right)=\frac{\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{3^n}\right),$$

则 $a_1+a_2+\cdots+a_n \ge \dfrac{n}{1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}=\dfrac{n^2}{n+1-\frac{1}{3^n}}>\dfrac{n^2}{n+1}$. $\therefore$ 原不等式成立.

解法二：（**1**）、同解法一.

（**2**）、设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}\left(\dfrac{2}{3^n}-x\right)$,

则 $f'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{-(1+x)^2-\left(\frac{2}{3^n}-x\right)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^2}=\dfrac{2\left(\frac{2}{3^n}-x\right)}{(1+x)^2}$

$\because x>0$,

$\therefore$ 当 $x<\dfrac{2}{3^n}$时, $f'(x)>0$；当 $x>\dfrac{2}{3^n}$时, $f'(x)<0$.

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{2}{3^n}$时, $f(x)$ 取得最大值 $f\left(\dfrac{2}{3^n}\right)=\dfrac{1}{1+\frac{2}{3^n}}=a_n$. $\therefore$ 原不等式成立.

（**3**）、同解法一.

十四、经典题目方法探究

探究 1. (2008 年福建省高考改编) 求证：$(1+1)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)>\sqrt{2n+1}$.

证法一： 对于 $\forall n\in N^*$, 有： $4n^2>4n^2-1=(2n-1)(2n+1)$, 即： $(2n)^2>(2n-1)(2n+1)$,

那么则有： $\dfrac{2n}{2n-1}>\dfrac{2n+1}{2n}$. 从而有：$\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)>\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$.

令 $I=(1+1)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)$, $H=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{6}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$.

由 $\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)>\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$可知, $I>H$.

所以 $:I^2>I\cdot H=(1+1)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$

$$=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{2n}{2n-1}\times\frac{2n+1}{2n}=2n+1$$

易知 $I>0$, 从而 $I>\sqrt{2n+1}$.

即 $(1+1)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)>\sqrt{2n+1}$.

证法二（函数导数法）：令 $f(x)=1+\dfrac{1}{2x-1},\ x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

则有： $f'(x)=-\dfrac{1}{(2x-1)^2}<0$ 对 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 恒成立 .

所以 $f(x)$ 在 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减 .

又因为对 $\forall n\in N^*$，有 $n+\dfrac{1}{2}>n$，由 $f(x)$ 的递减性可知： $1+\dfrac{1}{2n-1}>1+\dfrac{1}{2n}$.

其余同证法一 .

证法三（数学归纳法）：

（1）当 $n=1$ 时， $2>\sqrt{3}$，不等式明显成立；

（2）当 $n=k$ 时，命题成立，即 $(1+1)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2k-1}\right)>\sqrt{2k+1}$ 成立.

那么当 $n=k+1$ 时，由归纳假设可知：

$(1+1)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2k-1}\right)\left(1+\dfrac{1}{2k+1}\right)>\sqrt{2k+1}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2k+1}\right)$. ①

欲证 $(1+1)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2k-1}\right)\left(1+\dfrac{1}{2k+1}\right)>\sqrt{2k+3}$ 成立 ②

比较①②式，只需证 $\sqrt{2k+1}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2k+1}\right)>\sqrt{2k+3}$ ③ 成立即可 .

将③式两边平方化简，即证： $4k^2+8k+4>4k^2+8k+3$，此为显然 .

即当 $n=k+1$ 时，不等式也成立 .

由（1）、（2）可知，对一切 $n\in N^*$，都有 $(1+1)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)>\sqrt{2n+1}$ 成立.

本题还有多种解法，这里不再详细叙述。比较以上三种解法，都是以不等式“ $(2n)^2>(2n-1)(2n+1)$ ”为载体，通过适当的变形，突出了学生对基本数学知识的灵活运用 .

探究 2. (2008 年全国二卷) 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

（1）、求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）、如果对任何 $x\geq 0$，都有 $f(x)\leq ax$，求 a 的取值范围.

解：（1）、 $f'(x)=\dfrac{(2+\cos x)\cos x-\sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}=\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$.

当 $2k\pi-\frac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{2\pi}{3}$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$\cos x>-\frac{1}{2}$，即 $f'(x)>0$；

当 $2k\pi+\frac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{4\pi}{3}$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$\cos x<-\frac{1}{2}$，即 $f'(x)<0$.

因此 $f(x)$ 在每一个区间 $\left(2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）是增函数，

$f(x)$ 在每一个区间 $\left(2k\pi+\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）是减函数.

（2）、令 $g(x)=ax-f(x)$，则

$$g'(x)=a-\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}=a-\frac{2}{2+\cos x}+\frac{3}{(2+\cos x)^2}=3\left(\frac{1}{2+\cos x}-\frac{1}{3}\right)^2+a-\frac{1}{3}.$$

故当 $a\geq\frac{1}{3}$ 时，$g'(x)\geq 0$.

又 $g(0)=0$，所以当 $x\geq 0$ 时，$g(x)\geq g(0)=0$，即 $f(x)\leq ax$.

当 $0<a<\frac{1}{3}$ 时，令 $h(x)=\sin x-3ax$，则 $h'(x)=\cos x-3a$.

故当 $x\in[0,\arccos 3a)$时，$h'(x)>0$. 因此 $h(x)$ 在 $[0,\arccos 3a)$上单调增加.

故当 $x\in(0,\arccos 3a)$ 时，$h(x)>h(0)=0$，即 $\sin x>3ax$.

于是，当 $x\in(0,\arccos 3a)$时，$f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}>\frac{\sin x}{3}>ax$.

当 $a\leq 0$时，有 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}>0\geq a\cdot\frac{\pi}{2}$.

因此，a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$

变式：若 $0<x_i<\arccos 3a$，其中 $i=1,2,3,\cdots,n$. 且 $0<a<\frac{1}{3}$，$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=\arccos 3a$，求证：

$\tan\frac{x_1}{2}+\tan\frac{x_2}{2}+\tan\frac{x_3}{2}+\cdots+\tan\frac{x_n}{2}>\frac{3a}{2}\arccos 3a$.

证明：容易得到 $\tan\frac{x_i}{2}=\frac{\sin x_i}{\cos x_i+1}>\frac{\sin x_i}{2}$，由上面那个题目知道 $\sin x_i>3ax_i$.