挖掘高考试题, 增效高三教学

— 基于 2018 年高考理数 18 题的立体几何复习

广东省东莞实验中学 (523120)　段伟

摘要　立体几何是高中数学的重点内容, 也是高考考查的重难点. 本文以 2018 年高考数学全国 I 卷理科试卷的立体几何题目为例题, 基于《普通高中数学课程标准》, 在核心素养的大背景下, 探讨解法, 整合概念, 变式探究, 反思改进教学方法和教学策略, 以求提高学生的学习能力并渗透数学素养.

关键词　立体几何; 高考题目; 一题多解; 变式教学

《普通高中数学课程标准》指出学科核心素养是育人价值的集中体现, 是学生通过学科学习而逐步形成的正确价值观念、必备品格和关键能力. 作为高中数学重点教学模块的立体几何可以重点提升直观想象、逻辑推理、数学运算和数学抽象素养. 立体几何中的翻折问题由于要发掘图形翻折前后的差异与联系, 寻找定型定量, 题型新颖, 解法丰富, 一直是立体几何教学和考查的热点. 在 2018 年高考数学全国 I 卷理科试卷中, 立体几何的解答题就是以翻折问题的形式展现.

一、一题多解固基础, 多法比较建联系

例　(2018 年高考理科数学全国一卷 18 题) 如图 1, 四边形 $ABCD$ 为正方形, E, F 分别为 AD, BC 的中点, 以 DF 为折痕把 $\triangle DFC$ 折起, 使点 C 到达点 P 的位置, 且 $PF \perp BF$.

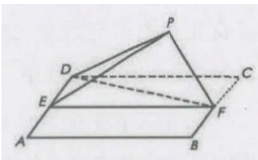

图 1

(1) 证明: 平面 $PEF \perp$ 平面 $ABFD$;

(2) 求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值.

证明　(1) (略);

(2) **解法 1**　如图 2, 在平面 PEF 内, 过点 P 作 $PH \perp EF$ 于点 H, 连接 DH, 由 (1) 可得, $PH \perp$ 平面 $ABFD$, 所以, DH 为 DP 在平面 $ABFD$ 内的射影, $\angle PDH$ 为 DP 与平面 $ABFD$ 所成角. 设正方形的边长为 2, 则 $DP = DC = 2$. 因为 $BF // DE$, $BF \perp$ 平面 PEF, 所以 $DE \perp PE$, 在 $\mathrm{Rt}\triangle PED$ 中, $DP = 2$, $DE = 1$, 则 $PE = \sqrt{3}$, 又因为 $PF = 1$, $EF = 2$, 所以 $PE^2 + PF^2 = EF^2$, 所以 $PE \perp PF$, 在 $\mathrm{Rt}\triangle PEF$ 中, $PH = \dfrac{PE \cdot PF}{EF} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 所以, $\sin\angle PDH = \dfrac{PH}{PD} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, 即, DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

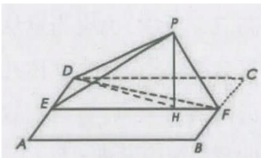

图 2

解法 2　如图 2, 同法 1, $\angle PDH$ 为 DP 与平面 $ABFD$ 所成角. 设正方形 $ABCCD$ 的边长为 2, 则 $EF = DP = 2$, $DE = PF = 1$, 设 $EH = a$, $PH = b$, 则 $HF = 2 - a$ $(a > 0, b > 0)$, 在 $\mathrm{Rt}\triangle DEH$ 中, $DH^2 = DE^2 + EH^2$, 即 $DH^2 = 1 + a^2$, 在 $\mathrm{Rt}\triangle PDH$ 中, $PD^2 = DH^2 + PH^2$, 即 $a^2 + b^2 + 1 = 4$, 在 $\mathrm{Rt}\triangle PHF$ 中, $PF^2 = PH^2 + HF^2$, 即 $(2 - a)^2 + b^2 = 1$, 解得 $a = \dfrac{3}{2}$, $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 所以, $\sin\angle PDH = \dfrac{PH}{PD} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, 即, DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

解法 3　如图 2, 同法 1, $\angle PDH$ 为 DP 与平面 $ABFD$ 所成角. $V_{D-PEF} = \dfrac{1}{3}DE \cdot S_{\triangle PEF} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, $V_{P-DEF} = \dfrac{1}{3}PH \cdot S_{\triangle DEF} = \dfrac{1}{3}PH$, 又由于 $V_{D-PEF} = V_{P-DEF}$, 解得 $PH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 所以, $\sin\angle PDH = \dfrac{PH}{PD} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, 即, DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

解法 4　如图 3, 在平面 PEF 内作 $PH \perp EF$ 于点 H, 由 (1) 得, $PH \perp$ 平面 $ABFD$, 以 H 为坐标原点, $\overrightarrow{HF}$ 的方向为 y 轴正方向, $|\overrightarrow{BF}|$ 为单位长度, 建立空间直角坐标系 $H - xyz$, 由 (1) 得, $DE \perp PE$, 又 $DP = 2$, $DE = 1$, 所以 $PE = \sqrt{3}$, 又 $PF = 1$, $EF = 2$, 所以 $PE^2 + PF^2 = EF^2$, 所以 $PE \perp PF$, 在 $\mathrm{Rt}\triangle PEF$ 中, $PH = \dfrac{PE \cdot PF}{EF} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $EH = \dfrac{3}{2}$, 则 $H(0,0,0)$, $P\left(0, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $D\left(-1, -\dfrac{3}{2}, 0\right)$, $\overrightarrow{DP} = \left(1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 取 $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$ 为平面 $ABFD$ 的法向量, 设 DP 与平面 $ABFD$ 所成角为 θ, 则 $\sin\theta = |\cos\langle\overrightarrow{DP}, \boldsymbol{n}\rangle| = \left|\dfrac{\overrightarrow{DP} \cdot \boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{DP}| \cdot |\boldsymbol{n}|}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, 即, DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

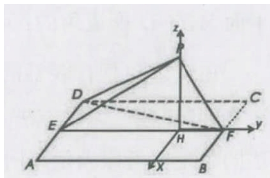

图 3

解法 5　如图 3, 在平面 PEF 内作 $PH \perp EF$ 于点 H,

由 (1) 得, $PH\perp$ 平面 $ABFD$, 以 H 为坐标原点, $\overrightarrow{HF}$ 的方向为 y 轴正方向, $|\overrightarrow{BF}|$ 为单位长度, 建立空间直角坐标系 $H-xyz$, 设正方形 $ABCCD$ 的边长为 2, $EH=a$, $PH=b$ $(a>0,b>0)$, 则 $H(0,0,0)$, $F(0,2-a,0)$, $D(-1,-a,0)$, $P(0,0,b)$, 由题意得, $|\overrightarrow{DP}|=DC=2$, $|\overrightarrow{PF}|=CF=1$, 即, $1+a^2+b^2=4$, $(2-a)^2+(-b)^2=1$, 解得 $a=\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 所以, $\overrightarrow{DP}=\left(1,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 平面 $ABFD$ 的法向量为 $\overrightarrow{HP}=\left(0,0,\dfrac{3}{2}\right)$, 设 DP 与平面 $ABFD$ 所成角为 θ, 则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{HP}\rangle|=\left|\dfrac{\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{HP}}{|\overrightarrow{DP}|\cdot|\overrightarrow{HP}|}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, 即, DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

解法 6 如图 4, 以 D 为原点, $\overrightarrow{DA}$ 为 x 轴正方向, $\overrightarrow{DC}$ 为 y 轴正方向, 过点 D 作垂直于平面 $ABFD$ 的直线为 z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 如图所示, 设正方形 $ABCCD$ 的边长为 2, 由 (1), 可设 $P(1,a,b)$ $(a,b>0)$, 则 $D(0,0,0)$, $F(1,2,0)$, 所以, $\overrightarrow{DP}=(1,a,b)$, $\overrightarrow{PF}=(0,2-a,b)$, 由题意得, $|\overrightarrow{DP}|=DC=2$, $|\overrightarrow{PF}|=CF=1$, 即, $1+a^2+b^2=4$, $(2-a)^2+(-b)^2=1$, 解得, $a=\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 所以, $\overrightarrow{DP}=\left(1,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 取 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$ 为平面 $ABFD$ 的法向量, 设 DP 与平面 $ABFD$ 所成角为 θ, 则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{DP},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{DP}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, 即, DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

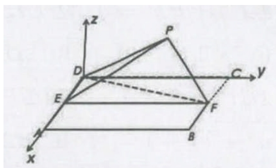

图 4

知识之间是有联系的. 通过一题多解, 不但可以建立解法之间的联系, 优化方法, 洞察问题的深层结构, 而且多种解法的呈现也可以满足不同学生对同一问题的不同认知. 解法 1、2、3 是综合法, 解法 4、5、6 是向量法. 在此题的解答中, 综合法的关键是利用定义找到所求线面角, 向量法的关键在于恰当建立坐标系, 但是两种方法的难点都在于与 P 点相关的长度或者坐标的确定. 解法 1 是由因导果的综合法的完整体现, 需要比较强的数据分析能力以确定 $\triangle PEF$ 是直角三角形, 从而突破 PH 长度的求解障碍; 解法 2 利用方程求解 PH 的长度; 解法 3 利用等体积法求解 PH. 解法 1、2 都是将立体几何问题降维后在三角形中解决的, 解法 3 利用了等体积法, 突出了避作而求的推理方式. 解法 4 是解法 1 的向量法体现; 解法 5、6 是解法 2 的向量法体现, 不同之处在于建系的方式不同. 通过以上方法的比较不难发现, 综合法需要添加辅助线才能把相关几何元素联系起来, 而这常常成为制约学生分析问题的障碍. 向量法已经利用直线的方向向量和平面的法向量将线面角的关系模型化, 将线面角的求解方法公式化, 避免了寻找线面角这个难点. 这体现出向量法在立体几何问题中定量分析的优势, 也可以说, 向量法是立体几何中定量分析的更加优化的方法. 所以, 对于几何中严密的论证和计算, 一方面我们要提高学生利用综合法解决问题的能力, 进一步发展和完善学生的推理能力; 另一方面要强化向量法, 利用坐标中向量之间的性质解决问题.

二、收集错误显问题, 反思教法促教学

对于第 2 问的解答, 学生多采用向量法, 而在平常的教学过程中, 对于角度、距离类定量分析的问题, 学生也偏好向量法, 这与立体几何改革的基本方向一致. 当然, 不论是综合法还是向量法, 能够准确运用并解决问题就是好方法, 然而, 对于这道看似并不困难的问题, 答卷情况却不容乐观, 出现比较多的知识方法错误有以下三点:

(1) 综合法中找不到线面角;

(2) 建系正确, 但点 P 的坐标错误;

(3) 直接用 $\overrightarrow{DP}$ 与平面法向量的夹角作为线面所成角.

错误 (1) 的根源主要在于定义的理解不透彻, 想象及推理能力欠缺, 导致在具体的图形中, 不能熟练洞察线面关系以确定线面角; 错误 (2) 的原因在于对于题目中与点 P 相关的数量关系, 不能准确的挖掘翻译并建立与问题的联系; 错误 (3) 的源由在于学生平常的学习只是机械式的记忆公式, 没有建立图形与数量、公式的联系, 更没有真正理解线面角与向量角的区别和联系.

针对以上 3 个常见错误, 在立体几何的教学中, 应当注重以下策略和方法上的调整:

1. 理清基本线索

从数学的内在逻辑上看, 立体几何的基本线索是 ① 从定性到定量 ② 从综合法到向量法, 教材中立体几何的内容安排设置也是以此为据的. 那么, 在立体几何的教学, 特别是高三复习中, 也应当遵从这条线索, 让学生对立体几何认知符合规律; 在每个立体几何问题的分析过程中, 也应当先理清点线面关系, 再建立数量或向量关系, 让学生对每个问题的理解循序渐进.

2. 强调基本图形

亦如平面几何中强调三角形, 立体几何中也有基本图形, 例如长方形, 四面体, 这些基本图形随手可得, 结构简单, 但是却蕴含了所有的点、线、面关系. 在立体几何的教学中, 都应当强调在基本图形中理解基本几何元素关系, 理解基本定理, 理解基本公式方法, 那么在复杂的图形中, 学生才可以举

一反三, 触类旁通.

3. 归纳基本图例

学生之所以在题海中低效徘徊, 很重要的原因在于缺乏反思和归纳总结. 其实, 立体几何中的点、线、面关系就那几类, 角度及距离问题就那几个, 选取恰当的图例概括归纳, 既有助于点、线、面关系的定性分析, 更有助于公式理解及应用的定量分析. 如图 5, 既包含了许多点、线、面关系, 从中可以对线面垂直, 平面的斜线, 线面角等有更好的理解, 也包含了点面距离, 线面角关系及向量关系, 从该图中, 可以建立图形和公式的联系, 分析得到线面角 $\theta=\frac{\pi}{2}-\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle$ 或者 $\theta=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle-\frac{\pi}{2}$, 所以, $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle|$; 又如图 6, 可以结合图形辨析和理解二面角与法向量夹角的关系: $\theta=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle$ 或者 $\theta=\pi-\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle$, 从而 $|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle|$.

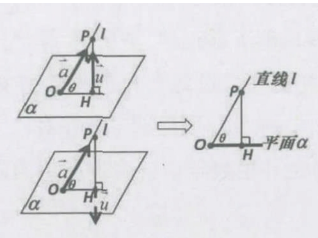

图 5

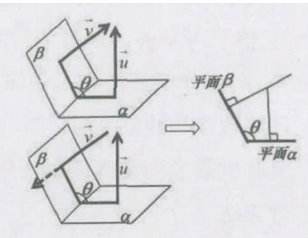

图 6

三、一题多变提能力, 渗透素养增效力

数学是研究数量关系和空间形式的一门科学, 立体几何尤为如此. 所以在立体几何的教学中, 不论是定性分析还是定量分析, 不管是综合法还是向量法, 都要紧抓图形分析数据, 而且可以发挥立体几何中数量与图形紧密联系的特点, 设置连续而有逻辑关联的变式问题, 并在这些问题的解决过程中, 进一步强化训练推理论证的技能.

例题变式 1-4 如图 1, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 边长为 2, E,F 分别为 AD,BC 的中点, 以 DF 为折痕把 $\triangle DFC$ 折起, 使点 C 到达点 P 的位置, 且 $PF\perp BF$.

变式 1 求点 E 到平面 DPF 的距离 d.

思路分析 通过等体积法, 利用 $V_{E-DPF}=V_{D-PEF}$, 得到 $d\cdot S_{\triangle DPF}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 计算得到 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 也可以在图 3 的坐标系下求得平面 DPF 的法向量 $\boldsymbol{m}=(-2\sqrt{3},\sqrt{3},1)$, $\overrightarrow{DE}=(1,0,0)$, 利用空间向量点面公式得到 $d=\frac{|\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

变式 2 求二面角 $P-DF-E$ 的余弦值.

思路分析 在图 3 中求得平面 DPF 的法向量 $\boldsymbol{m}=(-2\sqrt{3},\sqrt{3},1)$, 平面 DEF 的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$, 利用空间向量二面角余弦值的计算公式得到二面角 $P-DF-E$ 的余弦值 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{4}$; 也可以利用二面角定义, 如图 7, 过点 H 作 DF 的垂线, 垂足为 Q, 可证 $DF\perp$ 平面 PQH, 那么 $\angle PQH$ 即为二面角 $P-DF-E$ 的平面角. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PHQ$ 中, $\cos\angle PQH=\frac{HQ}{PQ}=\frac{1}{4}$ 即为所求.

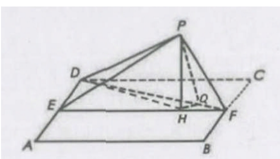

图 7

变式 3 求三棱锥 $P-DEF$ 的外接球半径 R.

思路分析 由于 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle DFP$ 全等, 并且有公共斜边 DF, 取 DF 中点 O, 无论平面 DPF 和平面 DEF 是否垂直, 都有 $OD=OE=OF=OP$, 即点 O 为三棱锥 $P-DEF$ 的外接球的球心, 所以 $R=OD=\frac{1}{2}DF=\frac{\sqrt{5}}{2}$; 也可以在图 3 的坐标系下利用向量法, 设点 $O(x,y,z)$, 利用 $OD=OE=OF=OP$, 建立方程: $(x+1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+z^2=x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+z^2=x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+z^2=x^2+y^2+\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, 解得 $O\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$, 从而三棱锥 $P-DEF$ 的半径 $R=|\overrightarrow{OE}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

变式 4 求三棱锥 $P-DEF$ 的内接球半径 r.

思路分析 由于 $S_{\triangle DEF}=S_{\triangle DPF}=1$, $S_{\triangle DEP}=S_{\triangle PEF}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 可以利用等体积法, 得到 $\frac{1}{3}r(S_{\triangle DEF}+S_{\triangle DPF}+S_{\triangle DEP}+S_{\triangle PEF})=V_{P-DEF}$, 解得 $r=\sqrt{3}-\frac{3}{2}$.

设计意图 例题变式 1-4 在高考原题的基础上展开, 意在通过学生熟悉的题干和图形对距离、二面角、内切球和外接球等常规概念、问题及涉及的方法进行复习巩固. 数学核心素养要求学生能够在熟悉的情境中建立数量与图形的联系并进行抽象和表达论证. 在平常的立体几何教学中, 可以启发学生在同一个立体几何背景中寻找不同的点、线、面之间的关系并进行自主变式教学, 多角度的理解图形并认知问题.

例题变式 5-10 如图 1, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 边长为 2, E,F 分别为 AD,BC 的中点, 以 DF 为折痕把 $\triangle DFC$ 折起, 使点 C 到达点 P 的位置,

变式 5 当平面 $DPF\perp$ 平面 DEF 时, 求直线 PE 和平面 DEF 所成角的正弦值.

思路分析 如图 8 所示, 在平面 DPF 中, 过点 P 作 $PT\perp DF$ 于点 T, 连结 ET, 利用面面垂直的性质定理可以证明 $PT\perp$ 平面 DEF, 那么 $\angle PET$ 为直线 PE 和平面 DEF 所成角, 可以分别在

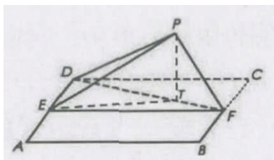

图 8

$\mathrm{Rt}\triangle PDF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DET$ 中, 求得, $PT=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $DT=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, $ET=\dfrac{\sqrt{65}}{5}$, $PE=\dfrac{\sqrt{85}}{5}$, 那么, 直线 PE 和平面 DEF 所成角的正弦值 $\sin\angle PET=\dfrac{PT}{PE}=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$; 也可以在图 4 所成的空间直角坐标系中求得点 $P\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\overrightarrow{PE}=\left(\dfrac{1}{5},-\dfrac{8}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 取平面 DEF 的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$, 设直线 PE 和平面 DEF 所成角为 θ, 利用向量法计算得 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PE},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{PE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PE}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$.

变式 6 当平面 $DPF\perp$ 平面 DEF 时, 求三棱锥 $P-DEF$ 的外接球体积; 并探究, 当 $\triangle DPF$ 绕 DF 翻折的过程中, 三棱锥 $P-DEF$ 的外接球体积有没有变化?

思路分析 如图 9, 由于 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle DPF$ 全等, 并且有公共斜边 DF, 取 DF 中点 O, 无论平面 DPF 和平面 DEF 是否垂直, 都有 $OD=OE=OF=OP$, 即点 O 为三棱锥 $P-DEF$ 的外接球的球心, 并且 $V_{P-DEF}=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^3=\dfrac{5\sqrt{5}\pi}{6}$ 为定值.

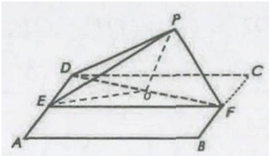

图 9

设计意图 变式 5、6 将高考原题中的条件“$PF\perp BF$”换为“平面 $DPF\perp$ 平面 DEF”, 变式 5 的问题和原题相同, 变式 6 与变式 4 的问题类似但有所推广. 两个问题意在通过与原问题关联或者相似的情景, 帮助学生能够理解和建构相关数学知识之间的联系, 从而进一步理解数学概念, 辨析逻辑关系, 提炼数学方法.

变式 7 当 $\triangle DPF$ 绕 DF 翻折的过程中, 是否存在某个位置使得 $DE\perp PF$.

思路分析 如果 $DE\perp PF$, 又 $DE\perp EF$, $PF\cap EF=F$, 那么 $DE\perp$ 平面 PEF, 所以 $DE\perp PE$, 而 $PD>DE$, 所以以 PD 为斜边的直角三角形是存在的. 那么, 当 $\triangle DPF$ 绕 DF 翻折的过程中, 存在某个位置使得 $DE\perp PF$.

变式 8 当 $\triangle DPF$ 绕 DF 翻折的过程中, 是否存在某个位置使得 $DP\perp EF$.

思路分析 如果 $DP\perp EF$, 又 $DP\perp PF$, $PF\cap EF=F$, 那么 $DP\perp$ 平面 PEF, 所以 $DP\perp PE$, 而 $DP=DC>DE$, 所以不存在以 DE 为斜边的直角三角形. 那么, 当 $\triangle DPF$ 绕 DF 翻折的过程中, DP 与 EF 始终不垂直.

变式 9 当 $\triangle DPF$ 绕 DF 翻折的过程中, 是否存在某个位置使得 $DF\perp PE$.

思路分析 如图 10, 在矩形 $DCEF$ 中, 过点 C 作 $CT\perp DF$, 垂足为 T, 过点 E 作 $ES\perp DF$, 垂足为 S, 因为 $DC\neq CF$, 所以 T 与 S 不重合; 如果 $DF\perp PE$, 又 $DF\perp PT$, $PE\cap PT=P$, 那么 $DF\perp$ 平面 PET, 所以 $DF\perp ET$, 这与 T 与 S 不重合矛盾, 所以, 当 $\triangle DPF$ 绕 DF 翻折的过程中, DF 与 PE 始终不垂直.

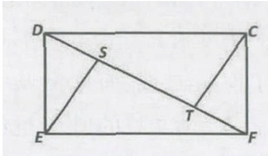

图 10

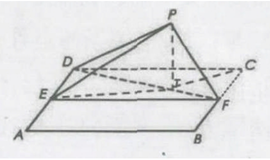

图 11

设计意图 变式 7-9 删除了高考原题中的条件“$PF\perp BF$”, 那么图形就不是静态的图形, 是在翻折变化的动态过程中设置问题, 学生也只能在动态过程中思考三组异面直线的位置关系.3 个题目都以推理论证能力培养为目标, 在思考解答的过程中考察培养了举正例, 举反例, 综合分析, 反证分析等能力.3 个问题意在通过综合化的一般情境, 理解数学的抽象结构和结论的一般性, 期望学生能够对较为复杂的数学问题探索论证途经并用数学语言合理准确的进行表达.

变式 10 当 $\triangle DPF$ 绕 DF 翻折的过程中, 三棱锥 $P-DEF$ 的表面积和体积是否有最大值; 如果有, 求出最大值; 如果没有, 说明理由.

设计意图 该问题依然在翻折过程中设置, 属于开放探究性问题, 变量的引入和问题的解决途经均具有偶然性和自主性, 可以鼓励学生通过操作观察, 形成猜想, 证明结论. 经历这样的探究过程, 有利于培养学生发现问题, 分类讨论, 作图表达, 推理论证的能力, 在具体情境中提升直观想象、数学抽象、逻辑推理等素养, 积累探究活动经验.

四、结语

由于高考题目不但依据课标, 紧贴教材, 有一般训练题目不可比拟的基础性、综合性、应用性和创新性; 而且高考题目经过了全国学生的实践检验及老师的深入研讨, 科学性强, 解题思路明朗, 解题书写规范, 评分细则标准, 所以高考真题既有利于全面覆盖, 又有利于突出重点. 在高三的教学中, 教师如果能发挥高考真题的真优势, 让真题的分析是真知灼见, 让问题的诊断有真凭实据, 让解法的优化能返璞归真, 让教法的改善可去伪存真, 那么, 学生必定可以获取真才实学.

参考文献

[1] 人民教育出版社. 普通高中数学课程标准 [M] (2017 年版). 北京: 人民教育出版社, 2018.

[2] 章建跃. 立体几何教学中的几个问题. 中学数学月刊 [J], 2015 (10).

[3] 周远方. 返璞归真考推理, 动态变化考探究. 教学通讯 [J], 2009 (11).