衡水中学 2019 年高考押题试卷理数试卷

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2-x-6<0,x\in Z\}$，$B=\{z\mid z=|x-y|,x\in A,y\in A\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{0,1\}$ B. $\{0,1,2\}$ C. $\{0,1,2,3\}$ D. $\{-1,0,1,2\}$

2. 设复数 z 满足 $\dfrac{\quad}{1+i}=2-i$，则 $\left|\dfrac{\quad}{\bar{z}}\right|=$（　）

A. $\sqrt{5}$ B. $\dfrac{1}{5}$ C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\dfrac{\sqrt{5}}{25}$

3. 若 $\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{3}$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $\sin\alpha$ 的值为（ ）

A. $\dfrac{4-\sqrt{2}}{6}$ B. $\dfrac{4+\sqrt{2}}{6}$ C. $\dfrac{7}{18}$ D. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

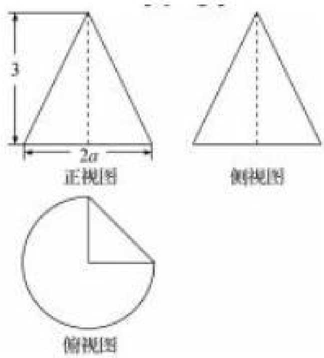
4. 已知直角坐标原点 O 为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的中心，F_1，F_2 为左、右焦点，在区间 $(0,2)$ 任取一个数 e，则事件“以 e 为离心率的椭圆 C 与圆 O：$x^2+y^2=a^2-b^2$ 没有交点”的概率为（ ）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\dfrac{4-\sqrt{2}}{4}$ C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

5. 定义平面上两条相交直线的夹角为：两条相交直线交成的不超过 90° 的正角.已知双曲线 E：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，当其离心率 $e\in[\sqrt{2},2]$ 时，对应双曲线的渐近线的夹角的取值范围为（　）

A. $[0,\dfrac{\pi}{6}]$ B. $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$ C. $[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}]$ D. $[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}]$

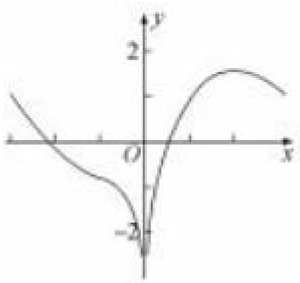
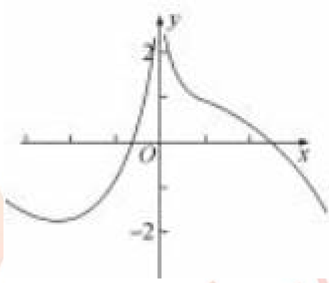
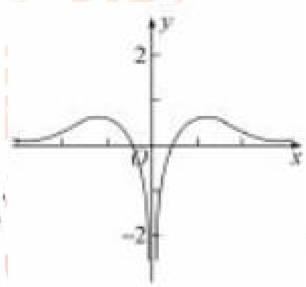
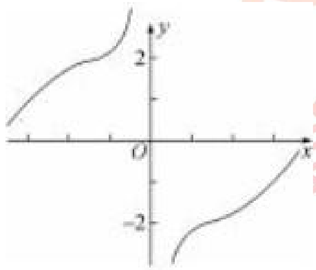
6. 某几何体的三视图如图所示，若该几何体的体积为 $3\pi+2$，则它的表面积是（ ）



A. $(\frac{3\sqrt{13}}{2}+3)\pi+\sqrt{22}+2$　　B. $(\frac{3\sqrt{13}}{4}+\frac{3}{2})\pi+\sqrt{22}+2$

C. $\frac{\sqrt{13}}{2}\pi+\sqrt{22}$　　D. $\frac{\sqrt{13}}{4}\pi+\sqrt{22}$

7. 函数 $y=\sin x+\ln|x|$在区间$[-3,3]$的图象大致为（ ）

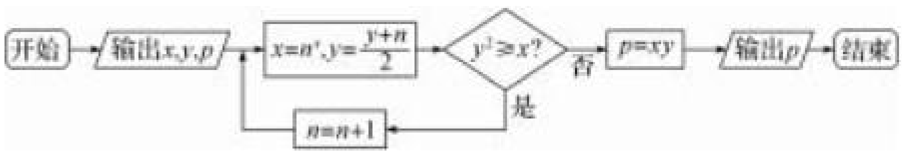





A.　B.　C.　D.

8. 二项式$(ax+\frac{1}{bx})^n(a>0, b>0)$ 的展开式中只有第6 项的二项式系数最大，且展开式中的第3 项的系数是第4 项的系数的3 倍，则ab 的值为（　）

A.　4　　B.　8　　C. 12　　D. 16

9. 执行如图的程序框图，若输入的 $x=0$， $y=1$， $n=1$，则输出的 p 的值为（　　）



A. 81　　B. $\dfrac{81}{2}$　　C. $\dfrac{81}{4}$　　D. $\dfrac{81}{8}$

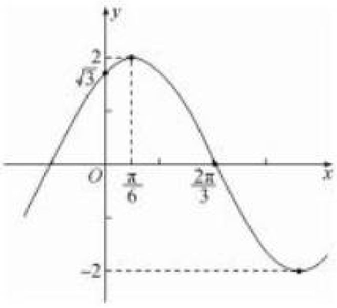
10. 已知数列$a_1=1$，$a_2=2$，且$a_{n+2}-a_n=2-2(-1)^n$，$n\in N^*$，则S_{2017}的值为（　）

A. $2016\times1010-1$ B. 1009×2017 C. $2017\times1010-1$

D. 1009×2016

11. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$) 的图象如图所示，令

$g(x)=f(x)+f'(x)$，则下列关于函数 $g(x)$ 的说法中不正确的是（ ）



A. 函数 $g(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=k\pi-\dfrac{\pi}{12}(k\in Z)$

B. 函数 $g(x)$ 的最大值为$2\sqrt{2}$

C. 函数 $g(x)$ 的图象上存在点 P，使得在 P 点处的切线与直线l： $y=3x-1$ 平行

D. 方程 $g(x)=2$ 的两个不同的解分别为 x_1，x_2，则 $|x_1-x_2|$ 最小值为$\dfrac{\pi}{2}$

12. 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$，若 $f(x)$ 存在三个零点，则a 的取值范围是（　）

A. $(-\infty,-2)$ B. $(-2,2)$ C. $(2,+\infty)$ D. $(-2,0)\cup(0,2)$

第II卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 向量$\vec{a}=(m,n)$，$\vec{b}=(-1,2)$，若向量$\vec{a}$，$\vec{b}$共线，且 $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$，则mn 的值为_.

14. 设点M 是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上的点，以点$M$ 为圆心的圆与x轴相切于椭圆的焦点F，圆M与y轴相交于不同的两点P、Q，若ΔPMQ为锐角三角形，则椭圆的离心率的取值范围为_.

15. 设 x， y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-3\ge 0\\ x-2y+2\ge 0\\ 2x-y-2\le 0\end{cases}$，则 $\dfrac{y}{x}$ 的取值范围为______.

16. 在平面五边形 $ABCDE$ 中，已知 $\angle A=120^\circ$， $\angle B=90^\circ$， $\angle C=120^\circ$， $\angle E=90^\circ$， $AB=3$， $AE=3$，当五边形 $ABCDE$ 的面积 $S\in[6\sqrt{3},9\sqrt{3})$ 时，则 BC 的取值范围为__.

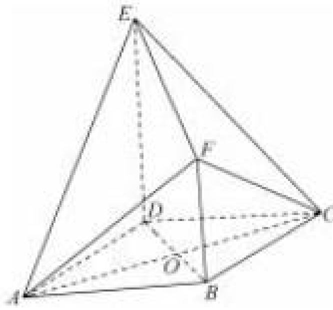
三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n， $a_1=\dfrac{1}{2}$， $2S_n=S_{n-1}+1(n\ge 2, n\in N^*)$.

（1） 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2） 记 $b_n=\log_{\frac{1}{2}}a_n$ $(n\in N^*)$，求 $\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\}$ 的前 n 项和 T_n .

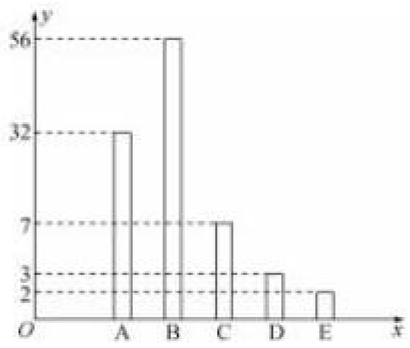
18. 如图所示的几何体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$AB=2a$， $\angle ABC=120^\circ$， AC 与 BD 相交于 O 点，四边形 $BDEF$ 为直角梯形， $DE//BF$， $BD\perp DE$， $DE=2BF=2\sqrt{2}a$，平面 $BDEF\perp$ 底面 $ABCD$.



（1） 证明：平面 $AEF\perp$ 平面 AFC ；

（2） 求二面角 $E-AC-F$ 的余弦值.

19. 某校为缓解高三学生的高考压力，经常举行一些心理素质综合能力训练活动，经过一段 时间的训练后从该年级800 名学生中随机抽取100 名学生进行测试，并将其成绩分为 A 、B 、 C 、D 、E 五个等级，统计数据如图所示（视频率为概率），根据以上抽样调查数据，回答下列问题：



（1） 试估算该校高三年级学生获得成绩为 B 的人数；

（2） 若等级 A、B、C、D、E 分别对应100 分、90 分、80 分、70 分、60 分，学校要求平均分达90 分以上为“考前心理稳定整体过关”，请问该校高三年级目前学生的“考前心理稳定整体”是否过关？

（3） 为了解心理健康状态稳定学生的特点，现从 A、B 两种级别中，用分层抽样的方法抽取11个学生样本，再从中任意选取3 个学生样本分析，求这3 个样本为 A 级的个数 ξ 的分布列与数学期望.

20. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $P(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，动直线 l：$y-kx+m$ 交椭圆 C 于不同的两点 A，B，且 $\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}=0$（$O$ 为坐标原点）.

（1） 求椭圆 C 的方程.

（2） 讨论 $3m^2-2k^2$ 是否为定值？若为定值，求出该定值，若不是请说明理由.

21. 设函数 $f(x)=-a^2\ln x+x^2-ax(a\in R)$.

（1）试讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $\varphi(x)=2x+(a^2-a)\ln x$，记 $h(x)=f(x)+\varphi(x)$，当 $a>0$ 时，若方程 $h(x)=m(m\in R)$ 有两个不相等的实根 x_1，x_2，证明 $h'(\dfrac{x_1+x_2}{2})>0$.

请考生在 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分，作答时请写清题号.

22. 选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1：$\begin{cases}x=3+\alpha\cos t\\ y=2+\alpha\sin t\end{cases}$（$t$ 为参数，$a>0$），在以坐标原点为极

点， x 轴的非负半轴为极轴的极坐标系中，曲线C_2： $\rho=4\sin\theta$.

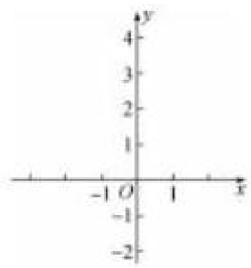
（1） 试将曲线C_1与C_2化为直角坐标系 xOy 中的普通方程，并指出两曲线有公共点时a 的取值范围；

（2） 当$a=3$时，两曲线相交于 A ，B 两点，求 $|AB|$.

23. 选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x-1|+|x+1|$.

（1） 在下面给出的直角坐标系中作出函数 $y=f(x)$ 的图象，并由图象找出满足不等式 $f(x)\le 3$ 的解集；



（2） 若函数 $y=f(x)$ 的最小值记为m， 设$a,b\in R$，且有$a^2+b^2=m$，试证明：
$\frac{1}{a^2+1}+\frac{4}{b^2+1}\ge\frac{18}{7}$.

参考答案及解析

理科数学（Ⅱ）

一、选择题

1-5：BCAAD------------6-10：AABCC　11 、 12：CD

二、填空题

13. -8　　14. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}<e<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　15. $[\dfrac{2}{5},\dfrac{7}{4}]$　16. $[\sqrt{3},3\sqrt{3})$

三、解答题

17. 解：（1）当 $n=2$ 时，由 $2S_n=S_{n-1}+1$ 及 $a_1=\dfrac{1}{2}$，

得 $2S_2=S_1+1$，即 $2a_1+2a_2=a_1+1$，解得 $a_2=\dfrac{1}{4}$.

又由 $2S_n=S_{n-1}+1$，①

可知 $2S_{n+1}=S_n+1$，②

②-①得 $2a_{n+1}=a_n$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}(n\geq 2)$.

且 $n=1$ 时，$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{1}{2}$ 适合上式，因此数列 $\{a_n\}$ 是以 $\dfrac{1}{2}$ 为首项，$\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列，故

$a_n=\dfrac{1}{2^n}(n\in N^*)$.

（2）由（1）及 $b_n=\log_{\frac{1}{2}}a_n(n\in N^*)$，

可知 $b_n=\log_{\frac{1}{2}}(\dfrac{1}{2})^n=n$，

所以 $\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

故 $T_n=\dfrac{1}{b_nb_2}+\dfrac{1}{b_2b_3}+\cdots\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}=[(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})]=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$.

18. 解：（1）因为底面 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$，

又平面 $BDEF\perp$ 底面 $ABCD$，平面 $BDEF\cap$ 平面 $ABCD=BD$，

因此 $AC\perp$ 平面 $BDEF$，从而 $AC\perp EF$.

又 $BD\perp DE$，所以 $DE\perp$ 平面 $ABCD$，

由 $AB=2a$， $DE=2BF=2\sqrt{2}a$， $\angle ABC=120^\circ$，

可知 $AF=\sqrt{4a^2+2a^2}=\sqrt{6}a$，$BD=2a$，

$EF=\sqrt{4a^2+2a^2}=\sqrt{6}a$， $AE=\sqrt{4a^2+8a^2}=2\sqrt{3}a$，

从而 $AF^2+FE^2=AE^2$，故 $EF\perp AF$.

又 $AF\cap AC=A$，所以 $EF\perp$ 平面 AFC.

又 $EF\subset$ 平面 AEF，所以平面 $AEF\perp$ 平面 AFC.

（2）取 EF 中点 G，由题可知 $OG//DE$，所以 $OG\perp$ 平面 $ABCD$，又在菱形 $ABCD$ 中，$OA\perp OB$，所以分别以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OG}$ 的方向为 x，y，z 轴正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$（如图示），

则 $O(0,0,0)$， $A(\sqrt{3}a,0,0)$， $C(-\sqrt{3}a,0,0)$， $E(0,-a,2\sqrt{2}a)$， $F(0,a,\sqrt{2}a)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,-a,2\sqrt{2}a)-(\sqrt{3}a,0,0)=(-\sqrt{3}a,-a,2\sqrt{2}a)$，

$\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3}a,0,0)-(\sqrt{3}a,0,0)=(-2\sqrt{3}a,0,0)$， $\overrightarrow{EF}=(0,a,\sqrt{2}a)-(0,-a,2\sqrt{2}a)$

$=(0,2a,-\sqrt{2}a)$.

由（1）可知 $EF\perp$ 平面 AFC，所以平面 AFC 的法向量可取为 $\overrightarrow{EF}=(0,2a,-\sqrt{2}a)$.

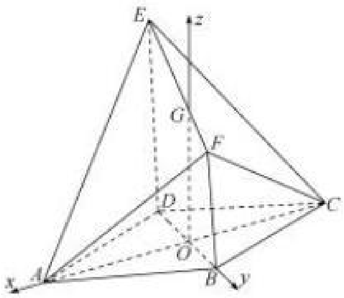
设平面 AEC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x-y+2\sqrt{2}z=0\\ x=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}y=2\sqrt{2}z\\ x=0\end{cases}$，令 $z=\sqrt{2}$，得 $y=4$，

所以 $\vec{n}=(0,4,\sqrt{2})$.

从而 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{EF}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\dfrac{6a}{6\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故所求的二面角 $E-AC-F$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



19. 解：（1）从条形图中可知这100人中，有56名学生成绩等级为B，

所以可以估计该校学生获得成绩等级为B的概率为$\dfrac{56}{100}=\dfrac{14}{25}$，

则该校高三年级学生获得成绩为B的人数约有$800\times\dfrac{14}{25}=448$.

（2）这100名学生成绩的平均分为$\dfrac{1}{100}(32\times100+56\times90+7\times80+3\times70+2\times60)=91.3$，

因为$91.3>90$，所以该校高三年级目前学生的“考前心理稳定整体”已过关.

（3）由题可知用分层抽样的方法抽取11个学生样本，其中A级4个，B级7个，从而任意选取3个，这3个为A级的个数ξ的可能值为0，1，2，3.

则$P(\xi=0)=\dfrac{C_4^0C_7^3}{C_{11}^3}=\dfrac{7}{33}$，$P(\xi=1)=\dfrac{C_4^1C_7^2}{C_{11}^3}=\dfrac{28}{55}$，

$P(\xi=2)=\dfrac{C_4^2C_7^1}{C_{11}^3}=\dfrac{14}{55}$，$P(\xi=3)=\dfrac{C_4^3C_7^0}{C_{11}^3}=\dfrac{4}{165}$.

因此可得ξ的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{7}{33}$	$\dfrac{28}{55}$	$\dfrac{14}{55}$	$\dfrac{4}{165}$

则$E(\xi)=0\times\dfrac{7}{33}+1\times\dfrac{28}{55}+2\times\dfrac{14}{55}+3\times\dfrac{4}{165}=\dfrac{12}{11}$.

20. 解：（1）由题意可知$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$a^2=2c^2=2(a^2-b^2)$，即$a^2=2b^2$，①

又点$P(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$在椭圆上，所以有$\dfrac{2}{4a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1$，②

由①②联立，解得$b^2=1$，$a^2=2$，

故所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

可知 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

联立方程组 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，

消去 y 化简整理得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

由 $\Delta=16k^2m^2-8(m^2-1)(1+2k^2)>0$，得 $1+2k^2>m^2$，所以 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，

$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}$，③

又由题知 $x_1x_2+y_1y_2=0$，

即 $x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$，

整理为 $(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$.

将③代入上式，得 $(1+k^2)\frac{2m^2-2}{1+2k^2}-km\cdot\frac{4km}{1+2k^2}+m^2=0$.

化简整理得 $\frac{3m^2-2-2k^2}{1+2k^2}=0$，从而得到 $3m^2-2k^2=2$.

21. 解：（1）由 $f(x)=-a^2\ln x+x^2-ax$，可知 $f'(x)=-\frac{a^2}{x}+2x-a$

$=\frac{2x^2-ax-a^2}{x}=\frac{(2x+a)(x-a)}{x}$.

因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以，

①若 $a>0$ 时，当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

函数 $f(x)$ 单调递增；

②若 $a=0$ 时，当 $f'(x)=2x>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 内恒成立，函数 $f(x)$ 单调递增；

③若$a<0$时，当 $x\in(0,-\frac{a}{2})$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $x\in(-\frac{a}{2},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增.

（2）证明：由题可知$h(x)=f(x)+\varphi(x)=x^2+(2-a)x-a\ln x(x>0)$，

所以$h'(x)=2x+(2-a)-\frac{a}{x}=\frac{2x^2+(2-a)x-a}{x}=\frac{(2x-a)(x+1)}{x}$.

所以当$x\in(0,-\frac{a}{2})$时，$h'(x)<0$；当$x\in(-\frac{a}{2},+\infty)$ 时，$h'(x)>0$；当$x=\frac{a}{2}$时，$h'(\frac{a}{2})=0$.

欲证$h'(\frac{x_1+x_2}{2})>0$，只需证$h'(\frac{x_1+x_2}{2})>h'(\frac{a}{2})$，又$h''(x)=2+\frac{a}{x^2}>0$，即$h'(x)$单调递增，故只需证明$\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{a}{2}$.

设 x_1， x_2是方程$h(x)=m$ 的两个不相等的实根，不妨设为$0<x_1<x_2$，

则$\begin{cases}x_1^2+(2-a)x_1-a\ln x_1=m\\x_2^2+(2-a)x_2-a\ln x_2=m\end{cases}$，

两式相减并整理得$a(x_1-x_2+\ln x_1-\ln x_2)=x_1^2-x_2^2+2x_1-2x_2$，

从而$a=\frac{x_1^2-x_2^2+2x_1-2x_2}{x_1-x_2+\ln x_1-\ln x_2}$，

故只需证明$\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{x_1^2-x_2^2+2x_1-2x_2}{2(x_1-x_2+\ln x_1-\ln x_2)}$，

即$x_1+x_2=\frac{x_1^2-x_2^2+2x_1-2x_2}{x_1-x_2+\ln x_1-\ln x_2}$.

因为$x_1-x_2+\ln x_1-\ln x_2<0$，

所以(*)式可化为$\ln x_1-\ln x_2<\frac{2x_1-2x_2}{x_1+x_2}$，

即$\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{2\frac{x_1}{x_2}-2}{\frac{x_1}{x_2}+1}$.

因为$0<x_1<x_2$，所以$0<\frac{x_1}{x_2}<1$，

不妨令$t=\dfrac{x_1}{x_2}$，所以得到$\ln t<\dfrac{2t-2}{t+1}$， $t\in(0,1)$.

设$R(t)=\ln t-\dfrac{2t-2}{t+1}$，$t\in(0,1)$，所以$R'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}\geq 0$，当且仅当$t=1$时，

等号成立，因此 $R(t)$ 在$(0,1)$ 单调递增.

又 $R(1)=0$，

因此 $R(t)<0$， $t\in(0,1)$，

故$\ln t<\dfrac{2t-2}{t+1}$， $t\in(0,1)$ 得证，

从而$h'(\dfrac{x_1+x_2}{2})>0$ 得证.

22. 解：（1）曲线C_1：$\begin{cases}x=3+\alpha\cos t\\ y=2+\alpha\sin t\end{cases}$，消去参数$t$可得普通方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=a^2$.

曲线C_2： $\rho=4\sin\theta$，两边同乘 ρ. 可得普通方程为 $x^2+(y-2)^2=4$.

把$(y-2)^2=4-x^2$代入曲线C_1的普通方程得： $a^2=(x-3)^2+4-x^2=13-6x$，

而对C_2有$x^2\leq x^2+(y-2)^2=4$，即$-2\leq x\leq 2$，所以$1\leq a^2\leq 25$故当两曲线有公共点时，

a 的取值范围为$[1,5]$.

（2）当$a=3$时，曲线C_1：$(x-3)^2+(y-2)^2=9$，

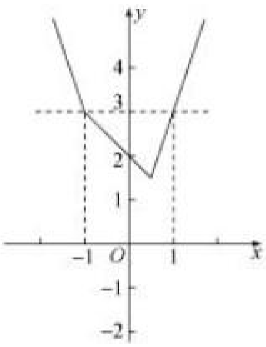
两曲线交点 A， B 所在直线方程为 $x=\dfrac{2}{3}$.

曲线 $x^2+(y-2)^2=4$的圆心到直线 $x=\dfrac{2}{3}$ 的距离为 $d=\dfrac{2}{3}$，

所以$|AB|=2\sqrt{4-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$.

23.解：（1）因为$f(x)=|2x-1|+|x+1|=\begin{cases}-3x, x<-1\\ -x+2,-1\leq x\leq\dfrac{1}{2},\\ 3x, x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

所以作出图象如图所示，并从图可知满足不等式$f(x)\leq 3$的解集为$[-1,1]$.



（2）证明：由图可知函数 $y=f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$，即 $m=\frac{3}{2}$.

所以$a^2+b^2=\frac{3}{2}$，从而$a^2+1+b^2+1=\frac{7}{2}$，

从而

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{4}{b^2+1}=\frac{2}{7}[(a^2+1)+(b^2+1)]\left(\frac{1}{a^2+a}+\frac{4}{b^2+1}\right)=\frac{2}{7}\left[5+\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}+\frac{4(a^2+1)}{b^2+1}\right)\right]\geq$$

$$=\frac{2}{7}\left[5+2\sqrt{\frac{b^2+1}{a^2+1}\cdot\frac{4(a^2+1)}{b^2+1}}\right]=\frac{18}{7}.$$

当且仅当 $\frac{b^2+1}{a^2+1}=\frac{4(a^2+1)}{b^2+1}$ 时，等号成立，

即 $a^2=\frac{1}{6}$，$b^2=\frac{4}{3}$ 时，有最小值，

所以 $\frac{1}{a^2+1}+\frac{4}{b^2+1}\geq\frac{18}{7}$ 得证.