对数平均与高考压轴题

陈宽宏
(湖南省岳阳县土地储备中心, 414100)

1 引言

关于两个正数 a, b 的平均数,《普通高中课程标准实验教科书》中的算术平均与几何平均是我们熟知的两种平均, 在中学数学中常见的平均有:

(1) $A(a, b)=\dfrac{a+b}{2}$ 为 a, b 两个数的算术平均;

(2) $G(a, b)=\sqrt{ab}$ 为 a, b 两个数的几何平均;

(3) $H(a, b)=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ 为 a, b 两个数的调和平均;

(4) $S(a, b)=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 为 a, b 两个数的平方根平均.

这四种平均数之间的大小关系为:

$H(a, b)\leqslant G(a, b)\leqslant A(a, b)\leqslant S(a, b)$ (*)

匡继昌教授在其专著《常用不等式》中收录的关于两个正数和的“平均”类型多达十九种, 上述的四种平均都属于该书中的“幂平均”. 笔者认为关于两个正数的对数平均是非常值得我们重视的一种新的平均, 虽然对数平均在课标教材中未曾介绍过, 但是在新高考中以此为背景的压轴题已是屡见不鲜, 只是未挑明而已. 早在 2005 年的高考数学湖南卷理科第 21 题就出现了, 接下来连续三年的高考数学辽宁卷(2009 年理科第 21 题, 2010 年文、理科的第 21 题, 2011 年理科第 21 题), 2010 年湖北卷理科第 21 题, 2011 年湖南卷文科第 22 题都有“对数平均”的影子.

2 对数平均

两个正数 a 和 b 的对数平均定义:

$$L(a, b)=\begin{cases}\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b} & (a\neq b),\\ a & (a=b).\end{cases}$$

2.1 对数平均与算术平均、几何平均的大小关系

$$L(a, b)\leqslant\frac{a+b}{2} \qquad ③$$

$$L(a, b)\geqslant\sqrt{ab} \qquad ④$$

证明 由对称性不妨设 $a>b$(当 $a=b$ 时, 不等式③, ④等号成立),

不等式③ $\Leftrightarrow \ln a-\ln b>2\dfrac{(a-b)}{a+b}\Leftrightarrow \ln\dfrac{a}{b}>2\left(\dfrac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}\right)\Leftrightarrow \ln x>2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$(其中 $x=\dfrac{a}{b}$).

构造函数 $f(x)=\ln x-2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ $(x>1)$, 则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$.

因为 $x>1$ 时, $f'(x)>0$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x)>f(1)=0$. 从而不等式③成立.

不等式④ $\Leftrightarrow \ln a-\ln b<\dfrac{a-b}{\sqrt{ab}}\Leftrightarrow \ln\dfrac{a}{b}<\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\Leftrightarrow 2\ln x<x-\dfrac{1}{x}$(其中 $x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$).

构造函数 $g(x)=2\ln x-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>1)$, 则 $g'(x)=\dfrac{2}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2$.

因为 $x>1$ 时, $g'(x)<0$, 所以函数 $g(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 单调递减, 故 $g(x)<g(1)=0$. 从而不等式④成立.

有了不等式③, ④我们就可将不等式链(*)加密为:

$H(a, b)\leqslant G(a, b)\leqslant L(a, b)\leqslant A(a, b)\leqslant S(a, b)$ (当且仅当 $a=b$ 时取等号) (**)

2.2 对数平均不等式的等价形式

$$\ln a-\ln b\geqslant\frac{2(a-b)}{a+b}\ (a\geqslant b>0) \qquad (四)$$

$$\ln a-\ln b \leqslant \sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\ (a \geqslant b>0) \quad ¼$$

3 链接高考压轴题

例 1 (2005 年高考数学湖南卷理科第 21 题) 已知函数 $f(x)=\ln x$, $g(x)=\frac{1}{2}ax^2+bx$, $a\neq 0$.

(iv) 若 $b=2$, 且函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 存在单调递减区间, 求 a 的取值范围.

(㊆) 设函数 $f(x)$ 的图象 C_1 与函数 $g(x)$ 的图象 C_2 交于点 P, Q, 过线段 PQ 的中点作 x 轴的垂线分别交 C_1, C_2 于点 M, N. 证明 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线不平行.

解析 (iv) 略;

(㊆) 设点 P, Q 的坐标分别是 (x_1, y_1), (x_2, y_2), $0<x_1<x_2$. 则点 M, N 的横坐标为 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$.

C_1 在点 M 处的切线斜率为 $k_1=\frac{2}{x_1+x_2}$, C_2 在点 N 处的切线斜率为 $k_2=\frac{a(x_1+x_2)}{2}+b$.

假设 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线平行, 则 $k_1=k_2$, 即 $\frac{2}{x_1+x_2}=\frac{a(x_1+x_2)}{2}+b$. 则 $\frac{2(x_2-x_1)}{x_2+x_1}=\frac{a}{2}(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)=\left(\frac{a}{2}x_2^2+bx_2\right)-\left(\frac{a}{2}x_1^2+bx_1\right)=y_2-y_1=\ln x_2-\ln x_1$.

所以 $\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=\frac{x_1+x_2}{2}$.

注意到 $x_1<x_2$, 由对数平均与算术平均的大小关系, 上式是不成立的. 所以假设不成立, 故 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线不平行.

高考数学辽宁卷连续三年的高考压轴题(例 2—例 4, 例 7)都可利用对数平均与算术、几何平均不等式来证明, 实属罕见.

例 2 (2009 年高考数学辽宁卷理科第 21 题) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-ax+(a-1)\ln x$, $a>1$.

(iv) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(㊆) 证明: 若 $a<5$, 则对任意 x_1, $x_2\in(0,+\infty)$, $x_1\neq x_2$, 有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$.

解析 (iv) 略; 关于(㊆)的证明, 标准答案及大多数教辅资料采用的是将不等式 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$ 进行下述的变形:

不妨设 $x_1>x_2>0$, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)>-(x_1-x_2)\Leftrightarrow f(x_1)+x_1>f(x_2)+x_2$,

然后证明函数 $F(x)=f(x)+x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增.

这样的解法确实巧妙、简洁, 需要解题者具有灵活的应变能力. 在欣赏这个妙解的同时, 一定会有人提出这样的问题: 有没有直接的解法? 最近文[2]也指出:“当我们看到要证明的不等式时, 首先想到 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(x_2, f(x_2))$ 是函数图象上两点的坐标, 而证明的不等式就是在函数图象上任取两点斜率的取值范围, 这其实是不等式的几何背景, 但如何确定函数图象上任意两点斜率的最小值是有难度的”, 但笔者认为利用对数平均—算术平均不等式, 就可突破难点.

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$
$$=\frac{x_1+x_2}{2}+(a-1)\cdot\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-a$$
$$\geqslant 2\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot(a-1)\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}}-a$$
$$=2\sqrt{a-1}\cdot\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}}-a.$$

由算术平均与对数平均的不等关系式¹得

$$\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}\Rightarrow$$
$$\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>1 \quad ½$$

所以 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>2\sqrt{a-1}-a=-(\sqrt{a-1}-1)^2$.

由 $1<a<5\Rightarrow -1<\sqrt{a-1}-1<1\Rightarrow -(\sqrt{a-1}-1)^2>-1$, 所以 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$.

例 3 (2010 年高考数学辽宁卷文科第 21 题) 已知函数 $f(x)=(a+1)\ln x+ax^2+1$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $a\leqslant -2$. 证明: 对任意 x_1, $x_2\in(0,$

$+\infty)$, $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$.

例 4　(2010 年高考数学辽宁卷理科第 21 题) 已知函数 $f(x)=(a+1)\ln x+ax^2+1$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $a<-1$. 如果对任意 $x_1, x_2\in(0,+\infty)$, $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$, 求 a 的取值范围.

下面仅讨论例 4.

解析　(1) 略;

(2) 当 $x_1=x_2$ 时, 不等式成立, 取等号;

当 $x_1\neq x_2$ 时, $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$ 恒成立 $\Leftarrow \left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|_{\min}\geqslant 4$.

$\because a<-1$ 时, $a+1<0$, $a<0$,

$$\therefore \left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|$$

$$=\left|(a+1)\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}+a(x_1+x_2)\right|$$

$$=\left|(a+1)\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}\right|+|a(x_1+x_2)|$$

$$\geqslant 2\sqrt{\left|(a+1)\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}\right|\cdot|a(x_1+x_2)|}$$

$$=2\sqrt{2a(a+1)\cdot\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}}$$

$$>2\sqrt{2a(a+1)}.$$

(注: 上面利用了 ½ 式)

$\therefore 2\sqrt{2a(a+1)}\geqslant 4\Rightarrow a\leqslant -2$.

故 a 的取值范围是 $(-\infty,-2]$.

例 5　(2010 年高考数学湖北卷理科第 21 题) 已知函数 $f(x)=ax+\frac{b}{x}+c\ (a>0)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$.

(ⅳ) 用 a 表示出 b, c;

(㊆) 若 $f(x)\geqslant\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围;

(㊃) 证明: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)+\frac{n}{2(n+1)}\ (n\geqslant 1)$.

简析　(ⅳ) 略; (㊆)略;

(㊃) 于不等式 ¼ 中取 $a=(k+1)^2$, $b=k^2(k\in\mathbf{N}^+)$ 得 $2(\ln(k+1)-\ln k)\leqslant\frac{k+1}{k}-\frac{k}{k+1}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$, 取 $k=1,2,\cdots,n$, 得到 n 个不等式, 两边叠加, 化简得 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)+\frac{n}{2(n+1)}\ (n\geqslant 1)$.

例 6　(2011 年高考数学湖南卷文科第 22 题) 设函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x\ (a\in\mathbf{R})$

(ⅳ) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(㊆) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1 和 x_2, 记过点 $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ 的直线的斜率为 k. 问: 是否存在 a, 使得 $k=2-a$? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

简析　(ⅳ) 略;

(㊆) 由(ⅳ)知, $a>2$ 且 $x_1x_2=1$.

因为 $f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2+\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}-a(\ln x_1-\ln x_2)$,

所以 $k=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=1+\frac{1}{x_1x_2}-a\cdot\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=2-a\cdot\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$.

若存在 a, 使得 $k=2-a$, 则 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=1$. 即 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\sqrt{x_1x_2}$.

注意到 $x_1\neq x_2$, 由对数平均与几何平均的大小关系知, 上式不成立.

故不存在 a, 使得 $k=2-a$.

例 7　(2011 年高考数学辽宁卷理科第 21 题) 已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+(2-a)x$.

(ⅳ) 略;

(㊆) 设 $a>0$, 证明: 当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时, $f(\frac{1}{a}+x)>f(\frac{1}{a}-x)$;

(㊃) 若函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点, 线段 AB 中点的横坐标为 x_0, 证明: $f'(x_0)<0$.

简析　(㊆) 待证结论等价于

$$\ln(\frac{1}{a}+x)-\ln(\frac{1}{a}-x)>2ax.$$

由对数平均与算术平均不等式㊃上述不等式

对数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$与$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$的系统性研究

程汉波　杨春波
(华中师范大学 数学与统计学学院, 430079)

在高考或数学竞赛中, 以数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$为背景的考题屡见不鲜. 在各类期刊杂志上, 也曾多次发表过有关数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$的文章. 本文从单调性、有界性、极限、相关不等式以及一些重要结论五个方面入手, 同时对数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$及$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$进行研究性学习, 用高等数学的观点, 初等数学的方法深入浅出地呈现出以上五个方面的重要结果, 以期读者从中获得一些新的认识.

为了叙述方便, 以下我们记 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

1　单调性

命题 1　$\{a_n\}$是 $\mathbf{N}^*$ 上的严格单调递增数列.

证明　$\forall n\in\mathbf{N}^*$, 有 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}>1$. 又几何平均数不大于算术平均数, 故有

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left[\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right]^{n+1}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=a_{n+1},$$

所以$\{a_n\}$是 $\mathbf{N}^*$ 上的严格单调递增数列.

命题 2　$\{b_n\}$是 $\mathbf{N}^*$ 上的严格单调递减数列.

证明　$\forall n\in\mathbf{N}^*$, 有 $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>1$. 又几何平均数不大于算术平均数, 故有

$$\frac{1}{b_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1\times$$

成立.

(四) $f'(x)=\frac{1}{x}-2ax+2-a$.

设函数 $y=f(x)$的零点分别为 $x_1, x_2(x_1>x_2>0)$. 则

$$\ln x_1-ax_1^2+(2-a)x_1=0,$$
$$\ln x_2-ax_2^2+(2-a)x_2=0.$$

两式相减得$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=a(x_1+x_2)+a-2$,

所以$f'(x_0)=f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{2}{x_1+x_2}-a(x_1+x_2)+2-a=\frac{2}{x_1+x_2}-\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$,

由对数平均与算术平均不等式知$f'(x_0)<0$.

总之, 近年来对数平均作为一种新的平均在高考题中频频出现已是不争的事实(例 1—例 7), 虽然我们无法猜测高考命题当时的真实背景, 但是提出对数平均的背景还是很有意义的, 因此, 对数平均非常值得我们去关注, 应当引起我们的重视.

参考文献:

[1]　匡继昌. 常用不等式[M]. 济南: 山东科学技术出版社(第四版), 2010.

[2]　汪中明, 罗新兵. 例说函数背景下的不等式证明[J]. 中学数学教学参考, 2011(11).

[3]　陈宽宏. 对一道高考题一种证法的质疑及别证[J]. 中学数学月刊, 2006(10).

(收稿日期: 2012-06-22)