及第小探花：379591809

衡水中学 2018 年高考押题试卷

文数

第 I 卷（共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设集合 $A=\{x\mid -2<x<3, x\in \mathrm{Z}\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，则集合 $A\cap B$ 为（　　）

A．$\{-2,-1,0,1,2\}$　　B．$\{-1,0,1,2\}$　　C．$\{-1,0,1,2,3\}$　　D．$\{-2,-1,0,1,2,3\}$

2．若复数 $z=x+y\mathrm{i}$（x，$y\in \mathrm{R}$）满足 $\left(1+z\right)\mathrm{i}=3-\mathrm{i}$，则 $x+y$ 的值为（　　）

A．-3　　B．-4　　C．-5　　D．-6

3．若 $\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{3}$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $\sin\alpha$ 的值为（　　）

A．$\dfrac{4-\sqrt{2}}{6}$　　B．$\dfrac{4+\sqrt{2}}{6}$　　C．$\dfrac{7}{18}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

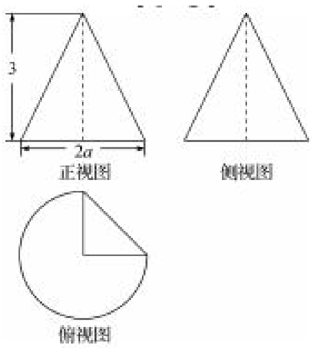
4．抛掷一枚质地均匀的骰子两次，记事件 $A=\{$两次的点数均为偶数且点数之差的绝对值为 2$\}$，则 $P\left(A\right)=$（　　）

A．$\dfrac{1}{9}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{4}{9}$　　D．$\dfrac{5}{9}$

5．定义平面上两条相交直线的夹角为：两条相交直线交成的不超过 90° 的正角．已知双曲线 E：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，当其离心率 $e\in[\sqrt{2},2]$ 时，对应双曲线的渐近线的夹角的取值范围为（　　）

A．$[0,\dfrac{\pi}{6}]$　　B．$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$　　C．$[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}]$　　D．$[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}]$

6．某几何体的三视图如图所示，若该几何体的体积为 $3\pi+2$，则它的表面积是（　　）



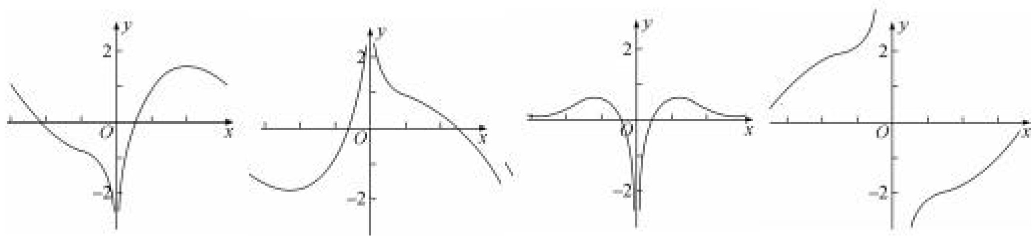
及第教育 JI DI JIAOYU 登科培训学校

高一学习群：128824318　　高二学习群：424149326　　高三冲刺群：258469163

A. $(\frac{3\sqrt{13}}{2}+3)\pi+\sqrt{22}+2$ B. $(\frac{3\sqrt{13}}{4}+\frac{3}{2})\pi+\sqrt{22}+2$

C. $\frac{\sqrt{13}}{2}\pi+\sqrt{22}$ D. $\frac{\sqrt{13}}{4}\pi+\sqrt{22}$

7．函数 $y=\sin x+\ln|x|$ 在区间 $[-3,3]$ 的图象大致为（　　）

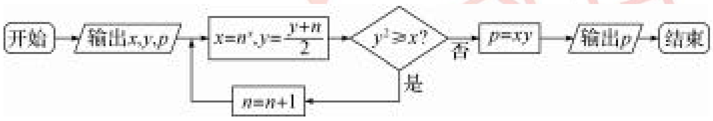


A. B. C. D.

8．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^{x+1}+\dfrac{1}{2}, x\le 2,\\ \dfrac{2}{x-2}-a^{x-3}, x>2\left(a\in \mathrm{R}, a\ne 0\right),\end{cases}$ 若 $f\left(f\left(f\left(3\right)\right)\right)=-\frac{6}{5}$，则 a 为（　　）

A. 1 B. $\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt[3]{4}$

9．执行下图的程序框图，若输入的 x， y， n 的值分别为 0，1，1，则输出的 p 的值为（　　）



A. 81 B. $\frac{81}{2}$ C. $\frac{81}{4}$ D. $\frac{81}{8}$

10．已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列，数列 $\{b_n\}$ 满足关系 $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{2^n}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 S_5 的值为（　　）

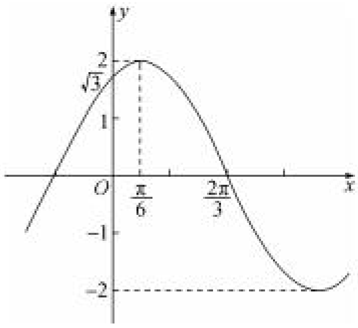
A. -454 B. -450 C. -446 D. -442

11．若函数 $f\left(x\right)=m\ln x+x^2-mx$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 内单调递增，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $\left[0,8\right]$ B. $\left(0,8\right]$ C. $\left(-\infty,0\right]\cup\left[8,+\infty\right)$ D. $\left(-\infty,0\right)\cup\left(8,+\infty\right)$

12．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2},x\in \mathrm{R})$ 的图象如图所示，令 $g(x)=f(x)+f'(x)$，则下列关于函数 $g(x)$ 的说法中不正确的是（　　）

及第教育 JI DI JIAO YU 培训学校



A. 函数 $g(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=k\pi-\frac{\pi}{12}(k\in Z)$

B. 函数 $g(x)$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$

C. 函数 $g(x)$ 的图象上存在点 P，使得在 P 点处的切线与直线 $l:y=3x-1$ 平行

D. 方程 $g(x)=2$ 的两个不同的解分别为 x_1，x_2，则 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$

第Ⅱ卷（共 90 分）

二、填空题（每题 5 分，满分 20 分，将答案填在答题纸上）

13．向量 $\vec{a}=(m,n)$，$\vec{b}=(-1,2)$，若向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 共线，且 $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$，则 mn 的值为_________.

14．已知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，若圆 $x^2+y^2-8x-6y+25-m=0$ 上存在点 P 使 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则 m 的最小值为_________.

15．设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-4\le 0,\\ x-y+2\ge 0,\\ y-1\ge 0,\end{cases}$ 则 $3x+2y$ 的最大值为_________.

16．在平面五边形 $ABCDE$ 中，已知 $\angle A=120^\circ$，$\angle B=90^\circ$，$\angle C=120^\circ$，$\angle E=90^\circ$，$AB=3$，$AE=3$，当五边形 $ABCDE$ 的面积 $S\in[6\sqrt{3},9\sqrt{3})$ 时，则 BC 的取值范围为_________.

三、解答题 （本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．）

17．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $\cos^2 B-\cos^2 C=\sin^2 A-\sqrt{3}\sin A\sin B$.

（1）求角 C；

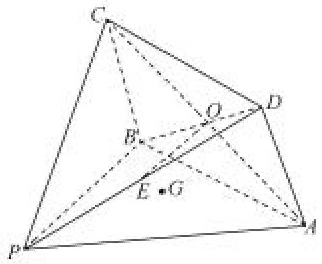
（2）若 $\angle A=\frac{\pi}{6}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$，M 为 AB 的中点，求 CM 的长.

18．如图所示的几何体 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=120^\circ$，$AB=a$，$PB=\sqrt{3}a$，$PB\perp AB$，平面 $ABCD\perp$ 平面 PAB，$AC\cap BD=O$，E 为 PD 的中点，G 为平面 PAB 内任一点.

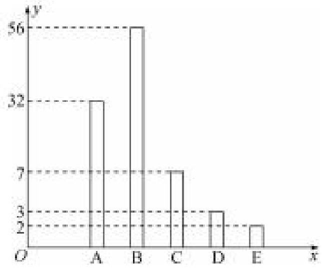
（1）在平面 PAB 内，过 G 点是否存在直线 l 使 $OE\parallel l$？如果不存在，请说明理由，如果存在，请说明作

法；

（2）过 A，C，E 三点的平面将几何体 $P-ABCD$ 截去三棱锥 $D-AEC$，求剩余几何体 $AECBP$ 的体积.



19．某校为缓解高三学生的高考压力，经常举行一些心理素质综合能力训练活动，经过一段时间的训练后从该年级 800 名学生中随机抽取 100 名学生进行测试，并将其成绩分为 A、B、C、D、E 五个等级，统计数据如图所示（视频率为概率），根据图中抽样调查的数据，回答下列问题：



（1）试估算该校高三年级学生获得成绩为 B 的人数；

（2）若等级 A、B、C、D、E 分别对应 100 分、90 分、80 分、70 分、60 分，学校要求当学生获得的等级成绩的平均分大于 90 分时，高三学生的考前心理稳定，整体过关，请问该校高三年级目前学生的考前心理稳定情况是否整体过关？

（3）以每个学生的心理都培养成为健康状态为目标，学校决定对成绩等级为 E 的 16 名学生（其中男生 4 人，女生 12 人）进行特殊的一对一帮扶培训，从按分层抽样抽取的 4 人中任意抽取 2 名，求恰好抽到 1 名男生的概率..

20．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $P(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，动直线 l：$y=kx+m$ 交椭圆 C 于不同的两点 A，B，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$（$O$ 为坐标原点）

（1）求椭圆 C 的方程.

（2）讨论 $3m^2-2k^2$ 是否为定值.若为定值，求出该定值，若不是，请说明理由.

21．设函数 $f(x)=-a^2\ln x+x^2-ax$ $(a\in R)$.

（1）试讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）如果 $a>0$ 且关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有两解 x_1， x_2（ $x_1<x_2$ ），证明 $x_1+x_2>2a$.

请考生在 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22．选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1： $\begin{cases} x=3+\alpha\cos t, \\ y=2+\alpha\sin t \end{cases}$（ t 为参数， $a>0$ ），在以坐标原点为极点， x 轴的非负半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2： $\rho=4\sin\theta$.

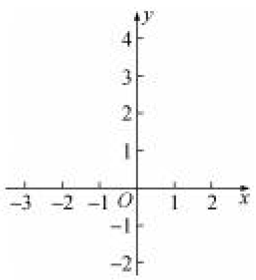
（1）试将曲线 C_1 与 C_2 化为直角坐标系 xOy 中的普通方程，并指出两曲线有公共点时 a 的取值范围；

（2）当 $a=3$ 时，两曲线相交于 A， B 两点，求 $|AB|$ 的值.

23．选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x-1|+|x+1|$.

（1）在给出的直角坐标系中作出函数 $y=f(x)$ 的图象，并从图中找出满足不等式 $f(x)\le 3$ 的解集；



（2）若函数 $y=f(x)$ 的最小值记为 m ，设 $a,b\in \mathrm{R}$ ，且有 $a^2+b^2=m$ ，试证明： $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{4}{b^2+1}\ge\dfrac{18}{7}$.

及第教育 JI DI JIAO YU 登科培训学校

及第小探花：379591809

试卷答案

一、选择题

1-5:BCAAD　　6-10:AADCB　　11、12：AC

二、填空题

13．-8　　14．16　　15．$\dfrac{22}{3}$　　16．$\left[\sqrt{3},3\sqrt{3}\right)$

三、解答题

17．解：（1）由 $\cos^2 B-\cos^2 C=\sin^2 A-\sqrt{3}\sin A\sin B$，

得 $\sin^2 C-\sin^2 B=\sin^2 A-\sqrt{3}\sin A\sin B$．

由正弦定理，得 $c^2-b^2=a^2-\sqrt{3}ab$，

即 $c^2=a^2+b^2-\sqrt{3}ab$．

又由余弦定理，得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{3}ab}{2ab}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

因为 $0<\angle C<\pi$，所以 $\angle C=\dfrac{\pi}{6}$．

（2）因为 $\angle A=\angle C=\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，且顶角 $\angle B=\dfrac{2\pi}{3}$．

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}a^2\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=4\sqrt{3}$，所以 $a=4$．

在 $\triangle MBC$ 中，由余弦定理，得

$CM^2=MB^2+BC^2-2MB\cdot BC\cos B=4+16+2\times 2\times 4\times\dfrac{1}{2}=28$．

解得 $CM=2\sqrt{7}$．

18．解：（1）过 G 点存在直线 l 使 $OE\parallel l$，理由如下：

由题可知 O 为 BD 的中点，又 E 为 PD 的中点，

所以在 $\triangle PBD$ 中，有 $OE\parallel PB$．

若点 G 在直线 PB 上，则直线 PB 即为所求作直线 l，

所以有 $OE\parallel l$；

若点 G 不在直线 PB 上，在平面 PAB 内，

高一学习群：128824318　　高二学习群：424149326　　高三冲刺群：258469163

及第小探花：379591809

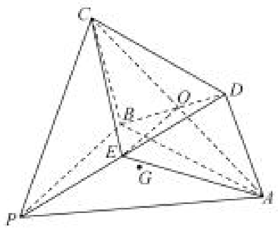
过点 G 作直线 l，使 $l\parallel PB$，

又 $OE\parallel PB$，所以 $OE\parallel l$，

即过 G 点存在直线 l 使 $OE\parallel l$．

（2）连接 EA，EC，则平面 ACE 将几何体分成两部分：

三棱锥 $D-AEC$ 与几何体 $AECBP$（如图所示）．



因为平面 $ABCD\perp$ 平面 PAB，且交线为 AB，
又 $PB\perp AB$，所以 $PB\perp$ 平面 $ABCD$．
故 PB 为几何体 $P-ABCD$ 的高.

又四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=120^\circ$，$AB=a$，$PB=\sqrt{3}a$，

所以 $S_{四边形ABCD}=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$，

所以 $V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{四边形ABCD}\cdot PB=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2\times\sqrt{3}a=\dfrac{1}{2}a^3$.

又 $OE\underline{\underline{//}}\dfrac{1}{2}PB$，所以 $OE\perp$ 平面 ACD，

所以 $V_{三棱锥D-AEC}=V_{三棱锥E-ACD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot EO=\dfrac{1}{4}V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{8}a^3$，

所以几何体 $AECBP$ 的体积 $V=V_{P-ABCD}-V_{三棱锥D-EAC}=\dfrac{1}{2}a^3-\dfrac{1}{8}a^3=\dfrac{3}{8}a^3$．

19．解：（1）从条形图中可知这 100 人中，有 56 名学生成绩等级为 B，

故可以估计该校学生获得成绩等级为 B 的概率为 $\dfrac{56}{100}=\dfrac{14}{25}$，

则该校高三年级学生获得成绩等级为 B 的人数约有 $800\times\dfrac{14}{25}=448$．

（2）这 100 名学生成绩的平均分为 $\dfrac{1}{100}(32\times100+56\times90+7\times80+3\times70+2\times60)=91.3$（分），

因为 $91.3>90$，所以该校高三年级目前学生的“考前心理稳定整体”已过关.

（3）按分层抽样抽取的 4 人中有 1 名男生，3 名女生，记男生为 a，3 名女生分别为 b_1，b_2，b_3. 从中抽取 2 人的所有情况为 ab_1，ab_2，ab_3，b_1b_2，b_1b_3，b_2b_3，共 6 种情况，其中恰好抽到 1 名男生的有 ab_1，ab_2，

高一学习群：128824318　　高二学习群：424149326　　高三冲刺群：258469163

ab_3，共 3 种情况，故所求概率 $P=\dfrac{1}{2}$．

20．解：（1）由题意可知 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $a^2=2c^2=2(a^2-b^2)$，整理，得 $a^2=2b^2$，①

又点 $P(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆上，所以有 $\dfrac{2}{4a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1$，②

由①②联立，解得 $b^2=1$，$a^2=2$，

故所求的椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）$3m^2-2k^2$ 为定值，理由如下：

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

可知 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

联立方程组 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$

消去 y，化简得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

由 $\Delta=16k^2m^2-8(m^2-1)(1+2k^2)>0$，

得 $1+2k^2>m^2$，

由根与系数的关系，得

$x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{1+2k^2}$，③

由 $x_1x_2+y_1y_2=0$，$y=kx+m$，

得 $x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$，

整理，得 $(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$.

将③代入上式，得 $(1+k^2)\dfrac{2m^2-2}{1+2k^2}-km\cdot\dfrac{4km}{1+2k^2}+m^2=0$.

化简整理，得 $\dfrac{3m^2-2-2k^2}{1+2k^2}=0$，即 $3m^2-2k^2=2$.

21．解：（1）由 $f(x)=-a^2\ln x+x^2-ax$，可知 $f'(x)=-\dfrac{a^2}{x}+2x-a=\dfrac{2x^2-ax-a^2}{x}=\dfrac{(2x+a)(x-a)}{x}$.

因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以，

①若 $a>0$，则当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

②若 $a=0$，则当 $f'(x)=2x>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 内恒成立，函数 $f(x)$ 单调递增；

③若 $a<0$，则当 $x\in(0,-\dfrac{a}{2})$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $x\in(-\dfrac{a}{2},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增.

（2）要证 $x_1+x_2>2a$，只需证 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>a$.

设 $g(x)=f'(x)=-\dfrac{a^2}{x}+2x-a$，

因为 $g'(x)=\dfrac{a^2}{x^2}+2>0$，

所以 $g(x)=f'(x)$ 为单调递增函数.

所以只需证 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>f'(a)=0$，

即证 $-\dfrac{2a^2}{x_1+x_2}+x_1+x_2-a>0$，

只需证 $-\dfrac{2}{x_1+x_2}+\dfrac{1}{a^2}(x_1+x_2-a)>0$.（*）

又 $-a^2\ln x_1+x_1^2-ax_1=m$，$-a^2\ln x_2+x_2^2-ax_2=m$，

所以两式相减，并整理，得 $-\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}+\dfrac{1}{a^2}(x_1+x_2-a)=0$.

把 $\dfrac{1}{a^2}(x_1+x_2-a)=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$ 代入（*）式，

得只需证$-\dfrac{2}{x_1+x_2}+\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>0$，

可化为$-\dfrac{2\left(\dfrac{x_1}{x_2}-1\right)}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}+\ln\dfrac{x_1}{x_2}<0$.

令$\dfrac{x_1}{x_2}=t$，得只需证$-\dfrac{2(t-1)}{t+1}+\ln t<0$.

令$\varphi(t)=-\dfrac{2(t-1)}{t+1}+\ln t$（$0<t<1$），

则$\varphi'(t)=-\dfrac{4}{(t+1)^2}+\dfrac{1}{t}=\dfrac{(t-1)^2}{(t+1)^2t}>0$，

所以$\varphi(t)$在其定义域上为增函数，

所以$\varphi(t)<\varphi(1)=0$.

综上得原不等式成立.

22．解：（1）曲线C_1：$\begin{cases}x=3+\alpha\cos t,\\ y=2+\alpha\sin t,\end{cases}$消去参数$t$可得普通方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=a^2$.

由$\rho=4\sin\theta$，得$\rho^2=4\rho\sin\theta$. 故曲线C_2：$\rho=4\sin\theta$化为平面直角坐标系中的普通方程为

$x^2+(y-2)^2=4$.

当两曲线有公共点时a的取值范围为$[1,5]$.

（2）当$a=3$时，曲线C_1：$\begin{cases}x=3+3\cos t,\\ y=2+3\sin t,\end{cases}$即$(x-3)^2+(y-2)^2=9$，

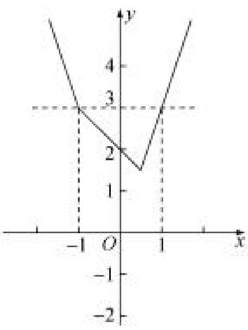
联立方程$\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=9,\\ x^2+(y-2)^2=4,\end{cases}$消去$y$，得两曲线的交点$A$，$B$所在直线方程为$x=\dfrac{2}{3}$.

曲线$x^2+(y-2)^2=4$的圆心到直线$x=\dfrac{2}{3}$的距离为$d=\dfrac{2}{3}$，

所以$|AB|=2\sqrt{4-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$.

23．解：（1）因为 $f(x)=|2x-1|+|x+1|=\begin{cases}-3x, x<-1,\\ -x+2, -1\le x\le\dfrac{1}{2},\\ 3x, x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

所以作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



从图中可知满足不等式 $f(x)\le 3$ 的解集为 $[-1,1]$.

（2）证明：从图中可知函数 $y=f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$，即 $m=\frac{3}{2}$.

所以 $a^2+b^2=\frac{3}{2}$，从而 $a^2+1+b^2+1=\frac{7}{2}$，

故

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{4}{b^2+1}=\frac{2}{7}[(a^2+1)+(b^2+1)](\frac{1}{a^2+a}+\frac{4}{b^2+1})=\frac{2}{7}[5+(\frac{b^2+1}{a^2+1}+\frac{4(a^2+1)}{b^2+1})]\ge$$

$$\frac{2}{7}[5+2\sqrt{\frac{b^2+1}{a^2+1}\cdot\frac{4(a^2+1)}{b^2+1}}]=\frac{18}{7}.$$

当且仅当 $\frac{b^2+1}{a^2+1}=\frac{4(a^2+1)}{b^2+1}$ 时，等号成立，

即 $a^2=\frac{1}{6}$，$b^2=\frac{4}{3}$ 时，原式有最小值，

所以 $\frac{1}{a^2+1}+\frac{4}{b^2+1}\ge\frac{18}{7}$ 得证.

及第教育 JIDI JIAO YU 登科培训学校