第四讲　完全平方数的性质

例1. 求证：对任意正整数 n，$3^n+2\cdot17^n$ 不是完全平方数.

证明：易知 $3^n\equiv1或3\pmod 8$，$2\cdot17^n\equiv2\cdot1=2\pmod 8$.
从而 $3^n+2\cdot17^n=3或5\pmod 8$，而完全平方数模 8 只能余 0,1,4.
故 $3^n+2\cdot17^n$ 不是完全平方数.

例2. 已知正整数 x、y、z 满足 $x^2+y^2=z^2$，求证：$60\mid xyz$.

证明：只要分别证明 $3\mid xyz$，$4\mid xyz$，$5\mid xyz$.
（1）当 $3\nmid a$ 时，$a^2\equiv1\pmod 3$，所以若 x,y,z 均不是 3 的倍数，则 $2\equiv x^2+y^2=z^2\equiv1\pmod 3$，矛盾，故 x,y,z 中至少有一个数为 3 的倍数，从而 $3\mid xyz$.
（2）当 $4\nmid a$ 时，$a^2\equiv1或4\pmod 8$，所以,若 x,y,z 均不是 4 的倍数，则 $x^2+y^2\equiv0,2,5\pmod 8$，而 $z^2\equiv1或4\pmod 8$，矛盾，故 x,y,z 中至少有一个数为 4 的倍数，从而 $4\mid xyz$.
（2）当 $5\nmid a$ 时，$a^2\equiv1或4\pmod 8$，所以,若 x,y,z 均不是 5 的倍数，则 $x^2+y^2\equiv0,2,3\pmod 8$，而 $z^2\equiv1或4\pmod 8$，矛盾，故 x,y,z 中至少有一个数为 5 的倍数，从而 $5\mid xyz$.
命题得证.

例3. 设正整数 m 和 n 满足 $m(m-1)=7n^2$，求证：m 是完全平方数.

证明：注意 $(m,m-1)=1$，故 $m=7a^2,m-1=b^2$ 或 $m=a^2,m-1=7b^2$.
前一种情况可得 $b^2\equiv6\pmod 7$，不可能，从而 $m=a^2$，即 m 是完全平方数.

例4. （1）求证：在下列整数 11，111，1111，11111……中不存在完全平方数；
（2）以上各数中是否存在某数，它可以表示为两个完全平方数（可以相同）之和？
（3）找出以上各数中所有可以表示为三个完全平方数（可以相同）之和的数.

（1）完全平方数模 4 只能为 0 或 1，而 11，111，1111，11111……均模 4 余 3，故不存在.
（2）完全平方数模 4 只能为 0 或 1，从而两个完全平方数之和模 4 只能为 0 或 1 或 2，
而 11，111，1111，11111……均模 4 余 3，故不存在.
（3）完全平方数模 8 只能为 0 或 1 或 4，从而三个完全平方数之和模 8 不能为 7，而 11，111，1111，11111……中除了 11，其余数均模 8 余 7，又 $11=3^2+1^2+1^2$，故只有 11 满足条件.

例5. 是否存在正整数 x、y，使得 x^2+2y 和 y^2+2x 均为完全平方数？

解：不存在．

对 $\forall x,y\in\mathbb{Z}^+$，不妨设 $x\geq y$．

则 $x^2<x^2+2y\leq x^2+2x<(x+1)^2$，从而 x^2+2y 不为完全平方数．

例6. 对 $1^2,2^2,\cdots,101^2$ 这 101 个数，它们除以 101 所得的余数一共有多少种可能？

解：若 $1\leq b<a\leq 101$，且满足 $a^2=b^2\pmod{101}$，则 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2\equiv 0\pmod{101}$，

而 101 为质数，且 $0<a-b<101$，故 $a+b\equiv 0\pmod{101}$，$a+b=101$．

从而 $1^2,2^2,\cdots,50^2$ 模 101 各不相同，且 $i^2\equiv(101-i)^2\not\equiv 0\pmod{101}$，$i=1,2,\cdots,50$．

又 $101^2\equiv 0\pmod{101}$，故余数有 51 种可能．

例7. 已知 n 为正整数，求证：不存在正整数 a、b、c、d，使得 $n^2<a<b<c<d<(n+1)^2$，且 $ad=bc$．

证明：反证法，若存在正整数 a、b、c、d 满足条件．

则 $ad=bc$ 可变形为 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$，从而存在 $(p,q)=1$ 满足 $\frac{p}{q}=\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$，其中 b,d 为 p 的倍数，a,c 为 q 的倍数．另外，由 $\frac{b}{a}>1$ 知，$p\geq q+1$．

不妨设 $a=kq>n^2$，则 $b=kp$，而 $d>b$，从而 $d\geq(k+1)p$，

而 $(k+1)p\geq(k+1)(q+1)=kq+(k+q)+1\geq kq+2\sqrt{kq}+1>n^2+2n+1=(n+1)^2$，矛盾．

命题得证．