第六讲　常见数学思想介绍

例1. 在线段 AB 上关于它的中点对称放置 $2n$ 个点. 任意将这 $2n$ 个点中的 n 个染成红色，另 n 个染成蓝色. 记所有红点到 A 的距离之和为 S，所有蓝点到 B 的距离之和为 T. 试比较 S 与 T 的大小关系.

【解析】：设有一个红点到 A 的距离为 m，一个蓝点到 B 的距离为 n，原先差为 $m-n$

对调后距离差为 $(AB-n)-(AB-m)=m-n$，保持不变.

所以可以经过有限次对调，使得成为红蓝各占左右一半的特殊情况，所以 $S=T$.

例2. 有 99 只筐，每只筐里面装了一些苹果和桃子，各筐装的苹果数和桃子数不一定相同. 求证：可以取 50 只筐，使得这些筐中的苹果数不少于苹果总数的一半，桃子数也不少于桃子总数的一半.

【解析】：设各筐苹果数为 $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_{99}$.

将第 2，4，…，98 筐作为一组，3，5，…99 筐作为另一组. 将两组中，桃子数较多的一组与第一筐合在一起，这 50 筐的桃子数 ≥ 总数的一半. 又由于两组苹果数的差 $\leq x_2-(x_3-x_4)-(x_5-x_6)-\ldots-(x_{97}-x_{98})-x_{99} \leq x_1$，所以所取 50 筐的苹果数不少于苹果总数的一半.

例3. 一次单循环比赛共有 10 名选手参加. 比赛无平局，每场比赛胜者得 1 分，负者得 0 分. 各选手得分的平方和最大是多少？

【解析】：假设各选手得分的平方和最大时，得分依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$（$0\leq a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_{10}\leq 9$）.

则 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=45$.

若存在 $a_k=a_{k+1}$，考虑这两名选手的比赛结果，将其胜负关系颠倒过来，则其中一名选手增加 1 分，另一名选手减少 1 分，其余选手得分不变. 但此时 $(a_k-1)^2+(a_{k+1}+1)^2>a_k^2+a_{k+1}^2$，故平方和变得更大. 故最后 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 两两不等.

此时 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 取遍 0~9 的所有情况，故平方和最大为 285.

例4. 把 2000 表示成若干正整数之和，将这些正整数相乘，所得乘积的最大可能值是多少？

【解析】：注意 2000 的所有表示方法只有有限种，故其中一定存在使得乘积取到最大值的分法.

在乘积取到最大值的分法中，取含 2 尽可能多的一种为 $2000=a_1+a_2+\cdots+a_n$， $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$.

我们可以逐一证明以下结论：

（1） $a_1\ne 1$．若 $a_1=1$，则可以去掉 a_1，并将 a_n 改为 a_n+1，此时总乘积变大，矛盾.

（2） $a_n\le 4$．若 $a_n\ge 5$，则可以将 a_n 拆为 2 和 a_n-2，此时总乘积变大，矛盾.

（3） $a_n\le 3$．若 $a_n=4$，则可以将其拆为 $2+2$，此时总乘积不变，但 2 的个数增加，矛盾.

（4） $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中 2 的个数不超过两个，否则将三个 2 拆为两个 3，总乘积变大，矛盾.

故 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 只能为 2 或 3，且 2 的个数不超过两个.

于是 2000 只能表示为 1 个 2 和 666 个 3 的和，故最大可能值为 $2\cdot 3^{666}$.

例5. 25 个人组成若干委员会，每个委员会有 5 名成员，任意两个委员会至多有 1 名公共成员.

求证：委员会的个数不大于 30.

【解析】：考虑所有的二人组，一共有 $C_{25}^2=300$ 组，每个委员会出现 $C_5^2=10$ 组．显然任意两个委员会不会出现公共的二人组，故最多有 $\dfrac{300}{10}=30$ 个委员会.

例6. 我们用 a_n 表示某城市中居住人数不少于 n 人的房子数（显然有 $a_1\ge a_2\ge a_3\ge\cdots$）．用 b_n 表示该市中所有房子按居住人数从大到小排列第 n 个房子的居住人数（显然有 $b_1\ge b_2\ge b_3\ge\cdots$）．求证：

（1） $a_1+a_2+a_3+\cdots=b_1+b_2+b_3+\cdots$；

（2） $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots=b_1+3b_2+5b_3+\cdots$.

【解析】：第 i 行放 b_i 个小球，于是所有小球代表城市总人口，从列来看第 j 列恰有 a_j 个小球.

故第一问显然成立.

赋值第 1 行小球为 1，第 2 行小球为 3，第 3 行小球为 5……再计算总和可得第二问.