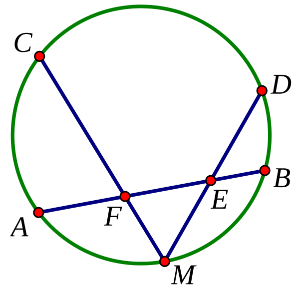
第八讲　四点共圆的常用技巧 1

例1. 如图，在圆 O 中，M 为弧 AB 的中点，MC、MD 与 AB 交于 F、E．求证：C、D、E、F 四点共圆．



证一：$\angle AFC = \angle ABC + \angle BCM = \angle ADC + \angle ADM = \angle CDE$

故 C、D、E、F 四点共圆．

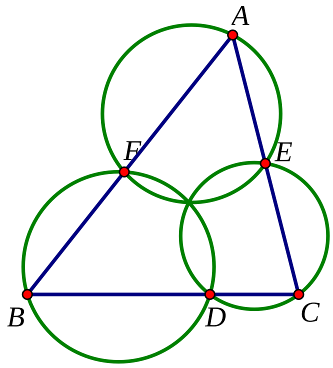
证二：由 $\angle BAM = \angle ACM$，可得$\triangle MAF \backsim \triangle MCA$

所以 $MF \times MC = MA^2$．

同理可得$\triangle MAE \backsim \triangle MDA$，$ME \times MD = MA^2$．

于是 $MF \times MC = ME \times MD$，即 C、D、E、F 四点共圆．

例2. 如图，已知 D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 三边上的点，求证：$\triangle AEF$、$\triangle BDF$、$\triangle CDE$ 的外接圆交于一点．



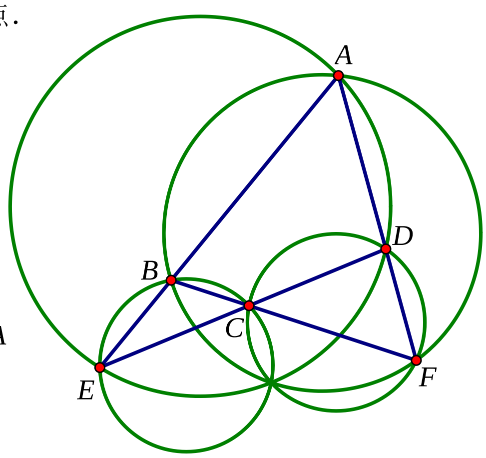
证：设$\triangle AEF$ 和$\triangle BDF$ 的外接圆交于 P．

则 $\angle PEC = \angle PFA = \angle PDB$．

从而 C、D、P、E 共圆，原命题得证．

例3. 如图，已知四边形 $ABCD$，延长 AB、DC 相交于 E，延长 AD、BC 相交于 F．

求证：$\triangle ADE$、$\triangle ABF$、$\triangle BCE$、$\triangle CDF$ 的外接圆交于一点．



证：设$\triangle BCE$ 和$\triangle CDF$ 的外接圆交于 P．

则 $\angle CPE = \angle ABF$，$\angle CPD = \angle AFB$．

于是 $\angle DPE = \angle ABF + \angle AFB = 180^\circ - \angle A$．

所以 A、D、P、E 共圆．

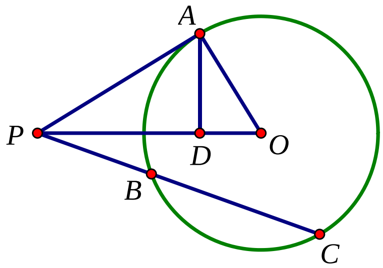
同理由 $\angle BPF = \angle BPC + \angle CPF = \angle AED + \angle ADE = 180^\circ - \angle A$

可得 A、B、P、F 共圆．

综上即可得证．

例4. 如图，P 为圆 O 外一点，PA 切圆 O 于 A，PC 交圆 O 于 B，作 $AD\perp PO$ 于 D.

证明：D、O、B、C 共圆.

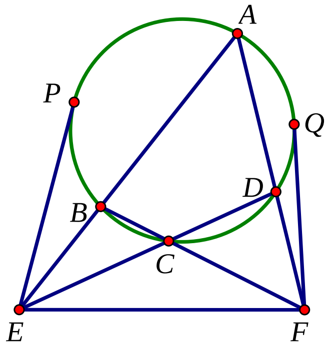


证：由切割线定理 $PB\times PC=PA^2$.

由射影定理 $PD\times PO=PA^2$.

故 $PB\times PC=PD\times PO$. 所以 D、O、B、C 共圆.

例5. 如图，已知圆内接四边形 $ABCD$，延长 AB、DC 交于 E，延长 AD、BC 交于 F，过 E、F 作圆的切线，切点分别为 P、Q. 求证：$EF^2=EP^2+FQ^2$.



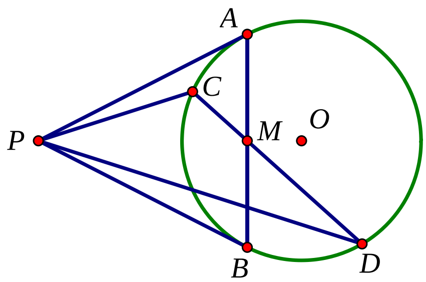
证：在 EF 上取点 M，使得 B、C、M、E 共圆.

由 $\angle CME=\angle ABC=\angle CDF$，可得 C、D、F、M 共圆.（例 2）

于是 $EF^2=EM\times EF+FM\times EF=EC\times ED+FC\times FB=EP^2+FQ^2$.

例6. 如图，P 为圆 O 外一点，过 P 作圆 O 的切线 PA、PB. M 为 AB 中点，CD 为过点 M 的一条弦.

连结 PC、PD，求证：$\angle APC=\angle BPD$.



证：由题意 P、M、O 共线且 $OA\perp PA$.

于是 $PM\times MO=AM^2=AM\times BM=CM\times DM$.

所以 P、C、O、D 共圆.

由 $OC=OD$ 可得 $\angle OPC=\angle OPD$.

从而 $\angle APC=\angle OPA-\angle OPC=\angle OPB-\angle OPD=\angle BPD$.