期中测试

考试时间：90 分钟满分：100 分（$9'\times5+11'\times5$）

题1. 正整数a、$b(b>1)$满足$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=b$．$a$的最小值为__________.

难度：1.

知识点：数论综合.

答案：256.

解析：由题意得：$b^8=a^7$，$a=b\cdot b^{\frac{1}{7}}$，从而$b^{\frac{1}{7}}$为有理数，从而$b^{\frac{1}{7}}$为整数.

又$b^{\frac{1}{7}}>1$，所以$b^{\frac{1}{7}}\geq2$，所以，$a\geq2^7\cdot2=256$．又$(a,b)=(256,128)$是原方程的解.

题2. 使得$\dfrac{(n-2)^2(n+1)}{2n-1}$是整数的最大的整数$n$为__________.

难度：1.

知识点：代数式整除.

答案：14.

解析：记$t=2n-1$，$8\dfrac{(n-2)^2(n+1)}{2n-1}=\dfrac{(t-3)^2(t+3)}{t}\Rightarrow t|27$.

从而，$t\leq27\Rightarrow n\leq14$．$\dfrac{(n-2)^2(n+1)}{2n-1}=80$.

题3. $10^{10}+10^{10^2}+10^{10^3}+\cdots+10^{10^{10}}$模 7 的余数为__________.

难度：2.

知识点：费马小定理.

答案：5.

注意到：$10^6\equiv1(\bmod 7)$，$6|10^k-10,(k\geq1)$

所以，$10^{10}+10^{10^2}+10^{10^3}+\cdots+10^{10^{10}}\equiv10\times10^{10}\equiv3^{11}\equiv3^5\equiv5(\bmod 7)$.

题4. 两两不等且互素的正整数a,b,c满足任意两个之和是第三个的倍数，$a+b+c$的最大值为__________.

难度：2

知识点：数论综合

答案：6.

不妨设：$a<b<c$，则由$c|a+b,a+b<2c$可知$c=a+b$.

又$b|a+c\Rightarrow b|2a+b\Rightarrow b|2a$，又$(a,b)=1$，所以$b=1$或 2.

又$a<b$，所以$a=1,b=2,c=3$.

题5. 具有形式为n^n+1，位数不超过 19 的最大的素数为__________.

难度：3.

知识点：数论综合.

答案：257.

如果 n 含奇因子，设 $n=mk$，其中 m 为奇素数，则有 $n^k+1\left|\left(n^k\right)^m+1\right.$，此时 n^n+1 部位素数.

于是 n 只能是小于 19 的偶数，即 $n=2,4,8,16$.

若 $n=16$，则 $16^{16}=2^{64}=\left(2^{10}\right)^6\cdot 16>16\cdot 10^{18}$. $16^{16}+1$ 多于 19 位.

逐个验证可知 n 最大为 4， $4^4+1=257$ 为素数.

题6. 任意选定的 n 个整数，至少存在两个数，它们的和或差能被 2018 整除，满足条件的最小的 n 为__________.

难度：3.

知识点：构造问题.

答案：1011.

解析：取 1010 个整数的集合 $M=\left\{a_i \mid a_i=0,1,2,\cdots,1009\right\}$.

则对于任意的 $i\neq j, i, j=0,1,\cdots,1009$， $a_i+a_j\leq 1008+1009=2017$， $0<\left|a_i-a_j\right|\leq 1009$.

所以 M 中任意两个数的和与差都不是 2018 的倍数.

设 $n=1011$，若 $a_i\equiv a_j\pmod{2018}$，对所有 $i\neq j$，

$-1008,-1007,\cdots,0,1,2,\cdots,1009$ 是 2018 的剩余类，正负配对，一共有 1010 组.

又 $n=1011>1010$，所以至少存在两个不同的数 a_i, a_j， 使得 $a_i\equiv -a_j\pmod{2018}$，

于是，有 $2018\left|a_i+a_j\right.$.

题7. 正整数 a、b 满足 $(a,b)=1$，且 $\left(ab^2+b+7\right)\left|a^2b+a+b\right.$，求 b 的最大值为__________.

难度：3.

知识点：代数式整除.

答案：1.

解析：由题意知： $ab^2+b+7\left|a\left(ab^2+b+7\right)-b\left(a^2b+a+b\right)\right.$. 即 $ab^2+b+7\left|7a-b^2\right.$.

注意到 $ab^2+b+7\geq b^2+b+7>b^2-7a$. 若 $b^2=7a\Rightarrow 7|b\Rightarrow 49|7a\Rightarrow 7|a$. 与 $(a,b)=1$ 矛盾.

$7a-b^2>0\Rightarrow 7a-b^2\geq ab^2+b+7$. $7a\geq ab^2\Rightarrow 7\geq b^2\Rightarrow b=1$ 或 2.

若 $b=2$， $4a+9|7a-4$. 注意到 $4a+9\leq 7a-4<2(4a+9)$，从而 $4a+9=7a-4$，上式无整数解.

若 $b=1$，可得 $a=11$ 或 49. 从而 $b=1$.

题8. n 为大于 1 的整数， p 为素数，则满足 $n\leq 2p$，且 $n^{p-1}\left|(p-1)^n+1\right.$ 的正整数对一共有__________组.

难度：4.

知识点：费马小定理.

答案：2.

$p=2$ 时， $n|2$，从而 $n=2$.

$p\ge 3$时，n为奇数，考虑n最小的素因子q，则$(n,q-1)=1$，$un+v(q-1)=1$．

利用费马小定理知：$q\left|(p-1)^{q-1}-1\right.$，又由条件可知：$q\left|(p-1)^{n}-1\right.$．

于是，$p-1\equiv(p-1)^{un+v(q-1)}=(p-1)^{un}\cdot(p-1)^{v(q-1)}\equiv(-1)^{u}\cdot 1^{v}(\bmod q)$．

又$q-1$为偶数，所以v为奇数．所以$p-1\equiv-1(\bmod q)$．从而$p\equiv 0(\bmod q)$．

从而$p=q=n$．

$(p-1)^{p}+1=p^{2}\left(p^{p-2}-C_{p}^{1}p^{p-3}+\cdots+C_{p}^{p-2}+1\right)$，括号里面与$p$互质，所以$p-1\le 2$．

$(n,p)=(3,3)$．综上，共有两组满足条件．

题9. 自然数序列$\{x_n\}$按如下法则构造出来：

$x_1=a,x_2=b,x_{n+2}=x_n+x_{n+1},n\ge 1$．

现知序列中存在某项为 60，求和数$a+b$的最小可能值__________．

难度：4

知识点：不定方程

答案：4．

解析：有一般关系式$x_n=t_na+t_{n+1}b$，其中$t_1=1,t_2=0,t_{n+2}=t_{n+1}+t_n$．

注意到从$n=4$开始，序列$\{t_n\}$严格上升．所以若$k>n\ge 4$，且$100=t_na+t_{n+1}b=t_ka'+t_{k+1}b'$．

则$(a+b)t_{n+1}>t_na+t_{n+1}b=t_ka'+t_{k+1}b'>t_k(a'+b')\ge t_{n+1}(a'+b')$，即$a+b>a'+b'$．

这表明原问题转化为确定最大的n，使得$t_na+t_{n+1}b=1000$有自然数解．

$\{t_n\}$开头的一些项为$1,0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\cdots$

显然$55a+89b=60$以及其以后的方程都不可能有自然数解．

可以验证：$34a+55b=60,21a+34b=60$．都没有自然数解．方程$13x+21y=60$．有唯一一组自然数解：$a=3,b=1$．由此得到$a+b$的最小值为 4．

题10. 从任意n个不同的整数中，总可以选四个不同的整数a,b,c,d，使得$a+b-c-d$能被 20 整除．求满足的条件的最小整数n为__________．

难度：5．

知识点：构造问题．

答案：9．

解析：0，1，2，4，7，12，20，40 这 8 个数中任意四个都不能使$20|a+b-c-d$．

下面证明：$n=9$可以．

假设不成立，则有，

注意到$C_7^2=21>20$，由抽屉原理可知，一定可以选出两对整数，其和模 20 同余．

1，这四个两两不同，则有$a+b\equiv c+d(\bmod 20)\Rightarrow a+b-c-d\equiv 0(\bmod 20)$．矛盾．

2，这四个存在相同，则必为$a+b\equiv b+c(\bmod 20)$，即$a\equiv c(\bmod 20)$．

除a,c外，剩下的 7 个数中，类似可以得到存在两个不同的数b、d，满足$b\equiv d(\bmod 20)$．

从而，$a+b-c-d\equiv 0(\bmod 20)$．