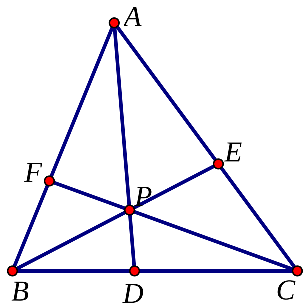
第十讲　梅涅劳斯定理与塞瓦定理

例1. 如图，已知△ABC 中，AD、BE、CF 交于一点 P.

（1）已知 $\frac{BP}{PE}=\frac{5}{4}$，$\frac{CP}{PF}=\frac{3}{2}$，求 $\frac{BD}{DC}$.

（2）已知 $\frac{AP}{PD}=\frac{3}{1}$，$\frac{BP}{PE}=\frac{4}{3}$，求 $\frac{CP}{PF}$.

（3）已知 $\frac{AF}{FB}=\frac{7}{4}$，$\frac{AE}{EC}=\frac{3}{2}$，求 $\frac{AP}{PD}$.



（1）解：对△PBC 和点 A 用塞瓦定理有，$\frac{PE}{EB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FP}=1$，即 $\frac{4}{9}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{5}{2}=1$，从而 $\frac{BD}{DC}=\frac{9}{10}$；

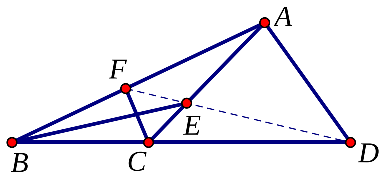
（2）解：先对△BPD 被直线 AEC 截用梅涅劳斯定理，$\frac{BD}{DC}=\frac{3}{4}$

再对△CPD 被直线 AFB 截，$\frac{CP}{PF}=\frac{19}{9}$，

或者利用面积法，$\frac{PD}{AD}=\frac{S_{\Delta PBC}}{S_{\Delta ABC}}$，可得 $\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$，计算即可.

（3）解：先对△ABC 和点 P 用塞瓦定理得 $\frac{BD}{DC}=\frac{6}{7}$，再 BPE 截△ADC 得 $\frac{AP}{PD}=\frac{13}{4}$.

例2. 已知 BE、CF 为△ABC 的两条内角平分线，$\angle A$ 的外角平分线与 BC 的延长线相交于 D.
求证：D、E、F 共线.

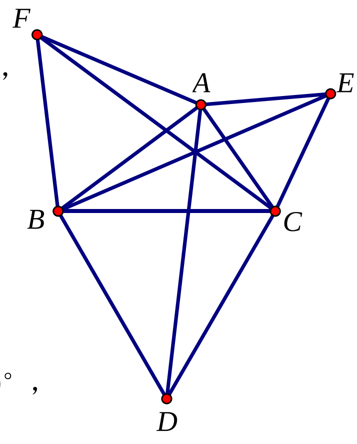


证明：由梅涅劳斯定理逆定理可知，只需证 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$.

而由角分线定理有：$\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{BC}$，$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，$\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{AB}$，

三式相乘得 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，得证.

例3. 以△ABC 的三边为边向形外作正三角形 ABF、BCD、ACE．求证：AD、BE、CF 交于一点.



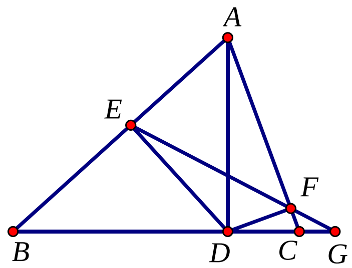
证明：设 AD 与 BC 交于 X，同理设 Y 和 Z，则只需证 $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$，

而，$\frac{BX}{XC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}$，$\frac{CY}{YA}=\frac{S_{\Delta BCE}}{S_{\Delta BAE}}$，$\frac{AZ}{ZB}=\frac{S_{\Delta CAF}}{S_{\Delta CBF}}$

注意到△ABD≌△FBC，△ACD≌△ECB，△BAE≌△FAC，
三式相乘即得证.

注：题中三线的交点即为费马点，顶点小于 120° 的三角形中，
到三个顶点距离之和最小的点，费马点与三顶点连线所成夹角均为 120°，
可用共圆、全等等方法证明.

例4. 如图，已知 AD 是△ABC 的高，作 $DE\perp AB$ 于 E，$DF\perp AC$ 于 F，连结 EF 并延长交 BC 延长线于 G，求证：$\dfrac{CG}{BG}=\dfrac{DC^2}{BD^2}$．

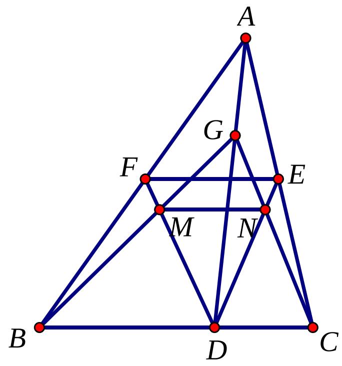


证明：EFG 截△ABC，由梅涅劳斯定理有：$\dfrac{CG}{GB}\cdot\dfrac{BE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FC}=1$．

由射影定理有：$\dfrac{CD^2}{AD^2}=\dfrac{CF\cdot CA}{AF\cdot AC}=\dfrac{CF}{AF}$，同理 $\dfrac{AD^2}{BD^2}=\dfrac{AE}{EB}$．

从而 $\dfrac{CG}{BG}=\dfrac{CF}{FA}\cdot\dfrac{AE}{EB}=\left(\dfrac{CD}{AD}\right)^2\left(\dfrac{AD}{BD}\right)^2=\dfrac{CD^2}{BD^2}$．

例5. 已知：D 是△ABC 的边 BC 上的点，G 是 AD 上的一点，E、F 分别在 AC、AB 上，且 $EF\,//\,BC$．GB 与 DF 交于 M，DE 与 CG 交于 N，求证：$MN\,//\,BC$．



证明：只需证 $\dfrac{GM}{MB}=\dfrac{GN}{NC}$．

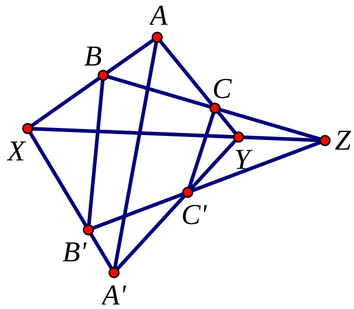
由 FMD 截△ABG 和 END 截△ACG，有：

$\dfrac{GM}{MB}\cdot\dfrac{BF}{FA}\cdot\dfrac{AD}{DG}=1$，$\dfrac{GN}{NC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AD}{DG}=1$

又 $EF\,//\,BC$，有 $\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AE}{EC}$

上两式做除法即得 $\dfrac{GM}{MB}=\dfrac{GN}{NC}$，从而 $MN\,//\,BC$．

例6. 如图，△ABC 和△ $A'B'C'$ 的三组对应边 AB 与 $A'B'$ 交于点 X，AC 与 $A'C'$ 交于点 Y，BC 与 $B'C'$ 交于点 Z，且 X、Y、Z 三点共线．求证：直线 AA'、BB'、CC' 相交于一点或相互平行．



证明：BCZ 截△ AXY 和 $B'C'Z$ 截△ $A'XY$，

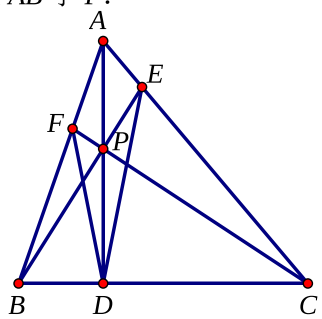
有 $\dfrac{AB}{BX}\cdot\dfrac{XZ}{ZY}\cdot\dfrac{YC}{CA}=1$ 和 $\dfrac{A'B'}{B'X}\cdot\dfrac{XZ}{ZY}\cdot\dfrac{YC'}{C'A'}=1$，从而 $\dfrac{AB}{BX}\cdot\dfrac{YC}{CA}=\dfrac{A'B'}{B'X}\cdot\dfrac{YC'}{C'A'}$，

若 AA' 与 BB' 平行，则 $\dfrac{AB}{BX}=\dfrac{A'B'}{B'X}$，可得 $\dfrac{YC}{CA}=\dfrac{YC'}{C'A'}$，从而 AA' 与 CC' 平行．

若 AA' 与 BB' 相交于 P，则 $\dfrac{AB}{BX}\cdot\dfrac{XB'}{B'A'}\cdot\dfrac{A'P}{PA}=1$，

结合 $\dfrac{AB}{BX}\cdot\dfrac{YC}{CA}=\dfrac{A'B'}{B'X}\cdot\dfrac{YC'}{C'A'}$，可得 $\dfrac{AC}{CY}\cdot\dfrac{YC'}{C'A'}\cdot\dfrac{A'P}{PA}=1$，故 PCC' 共线，命题得证．

例7. 如图，在△ABC 中，P 为高 AD 上一点．延长 BP 交 AC 于 E，延长 CP 交 AB 于 F．求证：$\angle ADE=\angle ADF$．

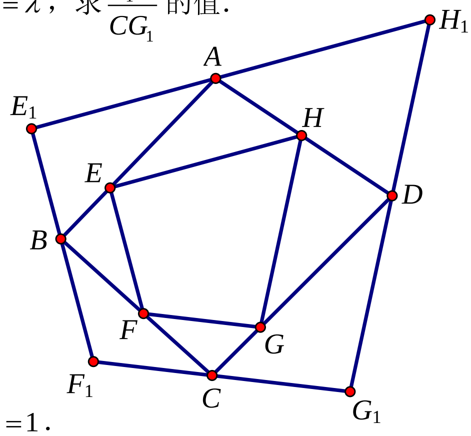


证明：过 A 作 BC 平行线交 DE、DF 延长线于 M、N

则 $\dfrac{AM}{DC}=\dfrac{AE}{EC}$，$\dfrac{AN}{BD}=\dfrac{AF}{FB}$，再由 $\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$ 可得 $AM=AN$

从而△DMN 为等腰三角形，故 $\angle ADE=\angle ADF$．

例8. 如图，凸四边形 $EFGH$ 的顶点 E、F、G、H 分别在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 上，且满足 $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$．而点 A、B、C、D 分别在凸四边形 $E_1F_1G_1H_1$ 的边 H_1E_1、E_1F_1、F_1G_1、G_1H_1 上，满足 $E_1F_1 /\!/ EF$，$F_1G_1 /\!/ FG$，$G_1H_1 /\!/ GH$，$H_1E_1 /\!/ HE$．已知 $\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$，求 $\frac{F_1C}{CG_1}$ 的值.



证明：（1）若 $EF /\!/ AC$，则 $\frac{BE}{EA}=\frac{BF}{FC}$．

代入已知条件，可得 $\frac{DH}{HA}=\frac{DG}{GC}$，所以 $HG /\!/ AC$，

从而 $E_1F_1 /\!/ AC /\!/ H_1G_1$，故 $\frac{F_1C}{CG_1}=\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$．

（2）若 EF 与 AC 不平行，设 EF 的延长线与 CA 的延长线交于点 T，

则由梅涅劳斯定理得：$\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AT}{TC}=1$．结合题设有：$\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}\cdot\frac{AT}{TC}=1$．

由梅涅劳斯逆定理可知，T,H,G 三点共线，设 TF,TG 与 E_1H_1 分别交于点 M,N．

由 $E_1B /\!/ EF$，得 $E_1A=\frac{BA}{EA}\cdot AM$，同理 $H_1A=\frac{AD}{AH}\cdot AN$，所以 $\frac{E_1A}{H_1A}=\frac{AM}{AN}\cdot\frac{AB}{AE}\cdot\frac{AH}{AD}$

又因为 $\frac{AM}{AN}=\frac{EQ}{QH}=\frac{S_{\Delta AEC}}{S_{\Delta AHC}}=\frac{S_{\Delta ABC}\cdot AE\cdot AD}{S_{\Delta ADC}\cdot AB\cdot AH}$，从而 $\frac{E_1A}{H_1A}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADC}}$．

同理 $\frac{F_1C}{CG_1}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADC}}$．所以 $\frac{F_1C}{CG_1}=\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$．