第八讲　导数的应用

例1. 求下列函数的导数：

（1） $y=2x^2-3x+1-\dfrac{7}{x^2}$；（2） $y=x\ln x$；（3） $y=\dfrac{\cos x}{x}$；（4） $y=x^x$（$x>0$）.

解：（1） $y'=4x-3+\dfrac{14}{x^3}$；（2） $y'=\ln x+1$；（3） $y'=-\dfrac{\cos x+x\sin x}{x^2}$；（4） $y'=x^x(1+\ln x)$

例2. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任意一点的切线与两坐标轴形成的三角形的面积为常数.

证：双曲线 $xy=a^2$ 可变形为 $y=\dfrac{a^2}{x}$，于是 $y'=-\dfrac{a^2}{x^2}$.

对双曲线上一点 $\left(x_0,\dfrac{a^2}{x_0}\right)$，过该点的切线为 $y-\dfrac{a^2}{x_0}=-\dfrac{a^2}{x_0^2}(x-x_0)$.

求得该直线与坐标轴交于点 $\left(0,\dfrac{2a^2}{x_0}\right)$ 和 $(2x_0,0)$，可求得三角形面积为 $2a^2$，故为常数.

例3. 求曲线 $C_1:y=x^2$ 与曲线 $C_2:y=x^3$ 的公切线.

解：对 $C_1:y=x^2$，求得 $y'=2x$，故过 C_1 上点 (a,a^2) 的切线为 $y-a^2=2a(x-a)$.

对 $C_2:y=x^3$，求得 $y'=3x^2$，故过 C_2 上点 (b,b^3) 的切线为 $y-b^3=3b^2(x-b)$.

若该直线为公切线，则对比一次项系数和常数项，有 $\begin{cases}2a=3b^2\\a^2=2b^3\end{cases}$. 解得 $\begin{cases}a=\dfrac{32}{27}\\b=\dfrac{8}{9}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$.

于是公切线为 $y=\dfrac{64}{27}x-\dfrac{1024}{729}$ 或 $y=0$.

例4. 求下列函数的单调递增区间.

（1） $y=e^x-x-1$；　　（2） $y=ax-1-\ln x$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.

解：（1）求导得 $y'=e^x-1$，故 $x<0$ 时，$y'<0$；$x>0$ 时，$y'>0$.

故原函数单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

（2）注意 $y=ax-1-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，求导得 $y'=a-\dfrac{1}{x}$.

当 $a\le 0$ 时，$y'<0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，故原函数无单调递增区间；

当 $a>0$ 时，当 $x<\dfrac{1}{a}$ 时，$y'<0$；当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时，$y'>0$. 故原函数单调递增区间为 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$.

例5. 计算函数 $y=\dfrac{(x-1)^5(x+1)^3}{(x+2)^8}$ 在 $x>1$ 时的最大值.

解：由于 $x>1$ 时 $y>0$， $\ln y=5\ln(x-1)+3\ln(x+1)-8\ln(x+2)$.

要求出 y 的最大值，只需分析 $\ln y$ 的增减变化即可.

求导得 $(\ln y)'=\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{8}{x+2}=\dfrac{18x+12}{(x-1)(x+1)(x+2)}>0$.

于是 $\ln y$ 在 $(1,+\infty)$ 上严格递增.

所以原函数不存在最大值.

例6. 求函数 $f(x)=2x+3+\sqrt{-2x^2+12x-14}$ 的值域.

解：由于 $-2x^2+12x-14\geq 0$，故 $f(x)$ 的定义域为 $\left[3-\sqrt{2},3+\sqrt{2}\right]$.

求导得 $f'(x)=2+\dfrac{-2x+6}{\sqrt{-2x^2+12x-14}}$. 令 $f'(x)=0$，解得 $x=3+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

于是当 $x<3+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ 时， $f'(x)>0$；当 $x>3+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ 时， $f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 在 $x=3+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ 时取到最大值，在端点处取到最小值.

计算可得 $f(x)$ 的值域为 $\left[9-2\sqrt{2},9+2\sqrt{3}\right]$.

例7. 设实数 a，b 满足 $0\leq a\leq\dfrac{1}{2}\leq b\leq 1$，证明：$2(b-a)\leq\cos a\pi-\cos b\pi$.

证：设 $f(x)=2x+\cos\pi x$，本题即证 $f(b)\leq f(a)$.

求导得 $f'(x)=2-\pi\sin\pi x$， $f''(x)=-\pi^2\cos\pi x$.

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时， $f''(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 时， $f''(x)>0$.

于是 $f'(x)=2-\pi\sin\pi x$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上单调递增.

因为 $f'(0)=f'(1)=2$， $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2-\pi<0$.

所以存在 α 和 β， $0<\alpha<\dfrac{1}{2}<\beta<1$，使得 $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$.

于是 $f'(x)<0$ 当且仅当 $x\in(\alpha,\beta)$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\alpha]$ 和 $[\beta,1]$ 上单调递增，在区间 $[\alpha,\beta]$ 上单调递减.

因为 $f(0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f(1)=1$，故对于 $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 有 $f(x)\geq 1$；对于 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 有 $f(x)\leq 1$.

特别地， $f(b)\leq 1\leq f(a)$.