第五讲　反证法的技巧

例1. 求证：$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是无理数.

证明：假设$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是有理数，则$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=5+2\sqrt{6}$是有理数，即$\sqrt{6}$是有理数.

假设$\sqrt{6}=\dfrac{p}{q}$，其中$(p,q)=1$，有$p^2=6q^2$，则$2\mid p,4\mid p^2$，有$4\mid 6q^2,2\mid q$. 这与$(p,q)=1$矛盾，所以$\sqrt{6}$不是有理数. 即$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是无理数.

例2. 给定 5 个正实数，已知以其中任意 3 个数为边长都能组成三角形．求证：必能从中选出 3 个数，以它们为边长的三角形是锐角三角形.

证明：假设$a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le a_5$，且任意三条线段组成的三角形均为直角或钝角.

则$a_1^2+a_2^2\le a_3^2\le a_4^2$，$a_3^2+a_4^2\le a_5^2$，故$a_5^2\ge 2\left(a_1^2+a_2^2\right)\ge\left(a_1+a_2\right)^2$

于是a_1,a_2,a_5无法组成三角形，矛盾.

例3. 已知p是一个三位质数，它的百位数字是a，十位数字是b，个位数字是c.

求证：关于x的方程$ax^2+bx+c=0$无整数解.

证明：易知$a\ne 0,c\ne 0$.

假设方程$ax^2+bx+c=0$有整数解x_0.

当$b=0$时，有$x_0^2=-\dfrac{c}{a}<0$，得$x_0=0,c=0$，矛盾.

所以$b\ne 0$，且$x_0<0$.

将$c=p-100a-10b$代入方程$ax^2+bx+c=0$．得

$p=100a+10b-ax_0^2-bx_0=\left(10-x_0\right)\left[\left(10+x_0\right)a+b\right]$

由于$c=-x_0\left(b+ax_0\right)$，所以$1\le -x_0\le 9$.

与p是质数，矛盾.

例4. 有 93 个球队参加单循环比赛，没有平局出现．已知任意 19 个队中，都有一队战胜了其余 18 个队，也有一队败给了其余 18 个队．求证：这 93 个队的胜利场数互不相同．

证明：假设存在 A、B 两支队胜利场数相同，不妨设 A 胜 B．

由于 A、B 胜利场数相同，故一定存在 C，使得 B 胜 C、C 胜 A

取出 A、B、C 和任意其余 16 支队，必有一队全胜，不妨设为 D_1，则 D_1 胜了 A、B、C．

上述 19 支球队中去掉 D_1 再任意添加一支其他球队，可得 D_2 胜 A、B、C

依次下去，得到 $D_1 \sim D_{16}$．注意此时 $D_1 \sim D_{16}$ 再加上 A、B、C 后没有球队全负 ，矛盾．

例5. 求证：无法在平面上放置 2000 条线段，使得其中每一条的端点都严格位于其他线段的内部．

证明：假设可以放置 2000 条线段，使得它们的 4000 个端点全部严格地位于其他线段的内部．现取一定点 O，并找出 4000 个端点中离点 O 最远的点 A，于是，平面上再没有比点 A 到点 O 的距离更远的点了．由于点 A 严格位于另一线段 BC 内部，从而点 A 是 ΔOBC 的边 BC 上的点．故 $OA < \max\{OB, OC\}$．这与点 A 是离点 O 最远的点矛盾．可见平面上不能放置满足题目要求的 2000 条线段．

例6. 在下列 10×10 的数表中，每行每列的十个数字都是 1、2、……、10 循环排列．求证：无法从中选出 10 个数，使得其中任意两个既不同行也不同列，且这些数中 1、2、……、10 均恰好有一个．

1	2	3	……	10
2	3	4	……	1
3	4	5	……	2
⋮	⋮	⋮		⋮
10	1	2	……	9

证明：假设第 i 行选择了第 a_i 个数

则它模 10 同余 $i+a_i-1$

于是 $1+2+\cdots+10 \equiv (1+a_1-1)+\cdots+(10+a_{10}-1) \pmod{10}$

于是 $a_1+a_2+\cdots+a_{10} \equiv 0 \pmod{10}$

但实际 $a_1+a_2+\cdots+a_{10} \equiv 1+2+\cdots+10 \equiv 5 \pmod{10}$

矛盾．

例7. 将 6×6 的棋盘任意划分成 18 个 1×2 的小长方形．求证：一定可以沿格线将棋盘分成两个矩形，且不破坏任意一个小长方形．

证明：假设每一条格线都穿过某一个小长方形．

注意任意一条格线所分的两个矩形面积都是偶数，而每个小长方形面积为 2．

故每条格线所穿过的小长方形个数为偶数，于是至少有 2 个．现在一共有 10 条格线（横纵各 5 条），故小长方形个数不能少于 20．但此时一共只有 18 个小长方形，矛盾．