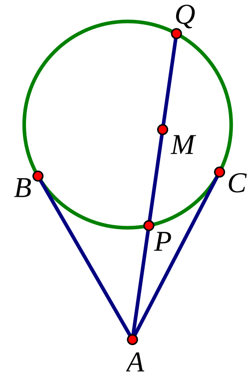
第九讲　四点共圆常用技巧 2

例1. 如图，A 为圆外一点，AB、AC 切圆于 B、C，直线 APQ 为圆的割线，M 为 PQ 中点．

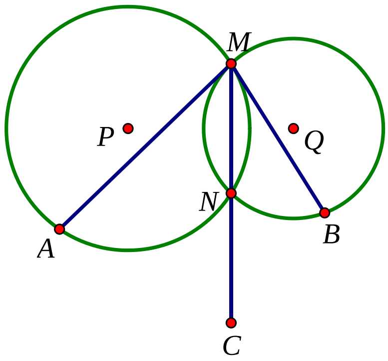
求证：A、B、M、C 四点共圆．



证：记圆心为 O，则 $\angle ABO=\angle ACO=\angle AMO=90°$，

所以 A、B、O、M、C 五点共圆．

例2. 如图，圆 P 与圆 Q 交于点 M、N，过 M 作两圆的切线，分别交另一个圆于点 A、B．延长 MN 至点 C 使得 $MN=NC$．求证：M、A、C、B 四点共圆．



证：过 P 作 AM 的垂线，过 Q 作 BM 的垂线交于点 O．

则 O 为△AMB 的外心．

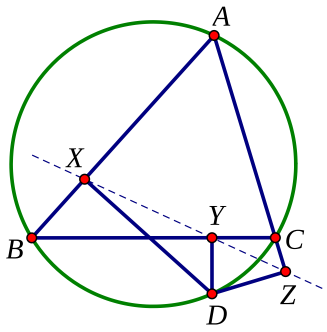
由 $OP\,/\!/\,MQ$，$OQ\,/\!/\,MP$ 可得四边形 $MPOQ$ 为平行四边形．

于是 PQ 平分 OM，再由 PQ 平分 MN 可得 $ON\,/\!/\,PQ$．

从而 $ON\perp MN$．所以 $OM=OC$，即 M、A、C、B 四点共圆．

例3. 如图，在△ABC 的外接圆上取一点 D，过 D 作三边所在直线的垂线，垂足分别为 X、Y、Z．

求证：X、Y、Z 三点共线．

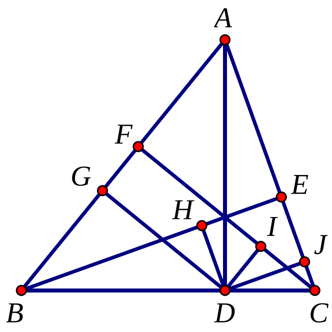


证：由题意 $ABCD$、$XBDY$、$YDZC$、$AXDZ$ 分别共圆．

$\angle XYB=\angle XDB=90°-\angle ABD=90°-\angle DCZ=\angle CDZ=\angle CYZ$．

所以 X、Y、Z 三点共线．

例4. 如图，△ABC 中，AD、BE、CF 为三条高．过 D 作 AB、BE、CF、AC 的垂线，垂足分别为 G、H、I、J．求证：G、H、I、J 四点共线．



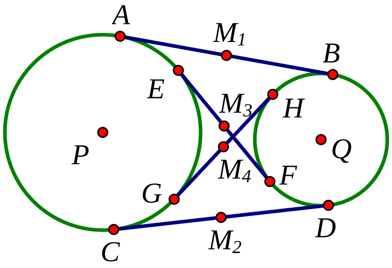
证：由题意，A、B、D、E 共圆．

由西姆松定理，D 到△ABE 三边的投影共线，即 G、H、J 共线．

同理由 A、F、D、C 共圆，可得 G、I、J 共线．

所以 G、H、I、J 四点共线．

例5. 如图，圆 P 与圆 Q 的外公切线为 AB、CD，内公切线为 EF、GH．AB、CD、EF、GH 的中点分别为 M_1,M_2,M_3,M_4．求证：M_1,M_2,M_3,M_4 四点共线．



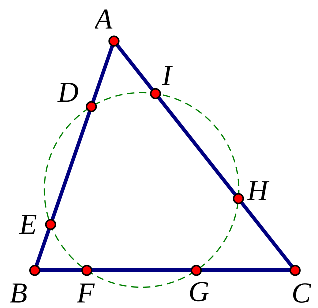
证：由定义，M_1 对圆 P 的幂为 M_1A^2，M_1 对圆 Q 的幂为 M_1B^2．

故 M_1 在圆 P 与圆 Q 的根轴上．

类似可得 M_2,M_3,M_4 也都在根轴上，所以这 4 点共线．

例6. 如图，给定△ABC．D、E 为 AB 边上两点，F、G 为 BC 边上两点，H、I 为 CA 边上两点．若 D、E、F、G 四点共圆，F、G、H、I 四点共圆，D、E、H、I 四点共圆．

求证：D、E、F、G、H、I 这六点共圆．



证：设 D、E、F、G 四点在圆 O 上，F、G、H、I 四点在圆 P 上，D、E、H、I 四点在圆 Q 上．

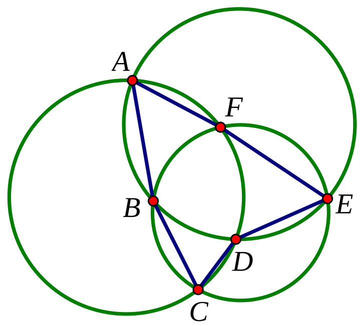
若这 6 点不共圆，则圆 O、圆 P、圆 Q 为三个不同的圆．

DE 为圆 O 和圆 Q 的公共弦，故直线 AB 为两圆根轴．

类似可得 BC 为圆 O 与圆 P 的根轴，AC 为圆 P 和圆 Q 的根轴．

但这 3 条直线既不交于一点也不互相平行，矛盾．故原命题成立．

例7. 如图，三圆两两相交，交点依次为 A、B、C、D、E、F．求证：$AB\cdot CD\cdot EF=BC\cdot DE\cdot FA$．



证：连结 AD、BE、CF．由题意，可知它们交于一点 P．

此时可得△PAB∽△PED，于是 $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{PA}{PE}$，

同理有 $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{PE}{PC}$，$\dfrac{DC}{FA}=\dfrac{PC}{PA}$，相乘即可得证．