第十讲　多圆问题技巧

例1. 取 QH 的中点 K，下证 K 点在圆 O 和圆 Q 的根轴上.

直线 QH 交圆 Q 于 E，交圆 O 于点 F.

则由 $AB\perp QH$ 可知：

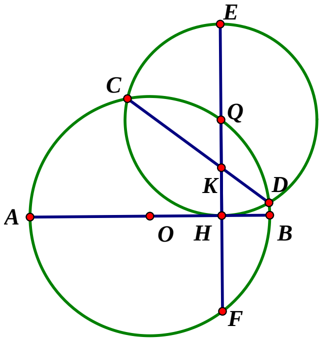
$HF=QH=QE=2KQ=2KH$.

从而 K 点关于圆 Q 的幂为 $KH\cdot KE=KH\cdot(KQ+EQ)=3KH^2$ ；

K 点关于圆 O 的幂为 $KQ\cdot KF=KQ\cdot(KH+HF)=3KH^2$

从而，K 点关于两圆的幂相等.

从而，K 在两圆的根轴上，即 CD 平分线段 QH.



例2. 在△CDE 中作高线 CC_1、DD_1 ，设 H 是高线的交点.

以 AC 和 BD 为直径的圆分别过点 C_1 和 D_1 ，

所以 H 点对于这两个圆的幂等于它对于以 CD 为直径的圆的幂.

同理可得，点 H 关于以 AC，BD 和 EF 的圆的幂也相等.

也就是这些圆的根轴过点 H.

对于其余三个三角形的垂心，同理可证.

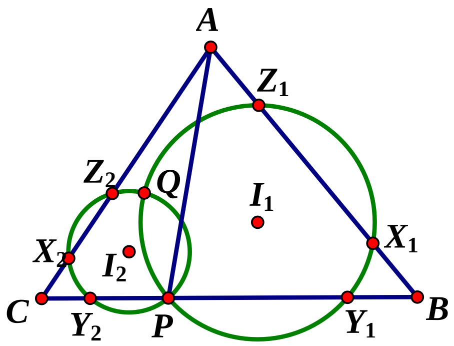
例3. 如图设 Z_1 是圆 Γ_1 与 AB 的另一个的交点，

$\angle CAB$、$\angle ABC$、$\angle BCA$ 的大小分别为 α、β、γ .

由圆 Γ_1 以 I_1 为圆心知 $X_1Z_1=PY_1$ ， $BZ_1=BP$.

设△ABP 的内切圆与 AB、PB 分别切于点 M、N.

则 M、N 分别是 X_1Z_1 、 PY_1 的中点.



故 $AX_1=AM+\frac{1}{2}X_1Z_1=\frac{1}{2}(AP+AB-PB)+\frac{1}{2}X_1Z_1$

$=\frac{1}{2}(AP+AB-PB)+\frac{1}{2}PY_1=\frac{1}{2}(AP+AB-PB)+\frac{1}{2}(AP+PB-AB)=AP$

同理可得 $AX_2=AP$. 所以，△ AX_1X_2 为等腰三角形.

进而，△ BX_1Y_1 和△ CX_2Y_2 也为等腰三角形.

从而 $\angle Y_2X_2X_1=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)-\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)=90^\circ-\frac{\beta}{2}$.

$\angle Y_2Y_1X_1=90^\circ+\frac{\beta}{2}$.

故 X_1、Y_1、Y_2、X_2 四点共圆．该圆记作圆 Γ_3

于是 PQ、X_1Y_1 、X_2Y_2 为圆 Γ_1、Γ_2、Γ_3 两两之间的根轴.

X_1Y_1 、 X_2Y_2 、PQ 三线共点于它们的根心.

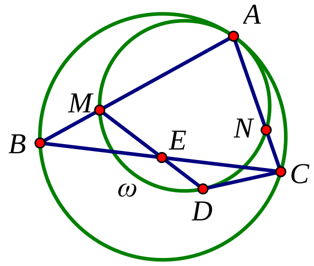
例4. 由位似可得 $MN /\!/ BC$，于是 $\angle ACE = \angle ANM = \angle ADE$.

故 A、C、D、E 共圆.

$\angle AEB = \pi - \angle AEC = \pi - \angle ADC = \pi - \angle AMD = \angle BME$

故$\triangle ABE \backsim \triangle EBM$，于是 $BM \cdot BA = BE^2$，

即线段 BE 的长度等于点 B 到圆 ω 的切线长.



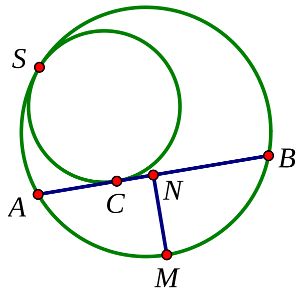
例5. 作小圆直径 CD，利用位似可以证明 SCM 三点共线，

由相交弦定理知： $AC \cdot CB = SC \cdot CM$ ，

又 $\angle SCD = \angle CMD$ ，所以 $\mathrm{Rt}\triangle CSD \backsim \mathrm{Rt}\triangle MNC$.

所以 $SC \cdot CM = CD \cdot MN = 2r \cdot MN$.

从而 $AC \cdot CB = 2r \cdot MN$.



例6. E 为弧 BC 中点，所以： $BE = CE$ ，

$\angle BAE = \angle EAC = \angle EBC$ ，又 $\angle BEA = \angle BED$ ..

$\triangle BAE \backsim \triangle DBE$.

$EF^2 = EG^2 = ED \cdot EA = EB^2 = EC^2$.