第七讲　复杂共圆问题

例1. $\angle BHQ=\angle BAC=\angle BEC$, $\angle HBQ=\angle CEF$

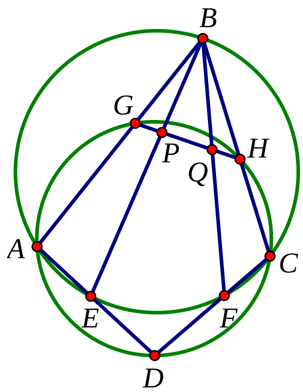
相加可得 $\angle BQP=\angle BEF$

证法一：$\because EAB=EA+AB$

$\therefore \angle EFB=\angle ABE+\angle ACB=\angle ABE+\angle BGH$ （G,A,C,H 四点共圆）

$=\angle BPQ$

$\therefore P,E,F,Q$ 四点共圆.



证法二：$\because \angle BGP=\angle ACH=\angle AEB \therefore G,A,E,P$ 四点共圆.

$\therefore BE\cdot BP=BA\cdot BG$

同理可得 $BQ\cdot BF=BH\cdot BC$ ，

又 $BA\cdot BG=BH\cdot BC$ ，结合上述三个等式可得 $BE\cdot BP=BG\cdot BA$

$\therefore P,E,F,Q$ 四点共圆.

例2. 倍长 BA 到 N' ，倍长 CA 到 M' ，连结 CN',BM' ，

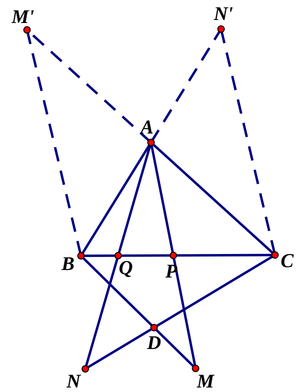
则有 $CM'=2CA, BN'=2BA$

$\because \angle BAP=\angle ACB, \angle ABP=\angle CBA$

$\therefore \triangle BAP\backsim\triangle BCA \therefore BA:AP=BC:CA$

$\therefore BA:AM=BC:CM'$,又$\because \angle BAM=\angle BCM'$

$\therefore \triangle BAM\backsim\triangle BCM' \therefore \angle ABM=\angle CBM'$



同理可以得到：$\angle ACN=\angle BCN'$

因为线段 CM' 与 BN' 相互平分，所以四边形 $M'BCN'$ 为平行四边形

$\therefore \angle M'BC+\angle N'CB=180^\circ \therefore \angle ABM+ACN=180^\circ$

$\therefore B,A,C,D$ 四点共圆.

例3. 连结 AC,AD,AE,AF ，再连结 CM,BA,FN 。

$\because \angle ADC=\angle AFE, \angle ACD=\angle AEF, CD=EF$

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle AEF \ \therefore AC=AE$

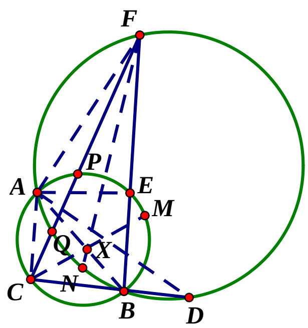
$\therefore BA$ 平分 $\angle CBE$

又 CM,FN 分别平分 $\angle BCF,\angle CFB$

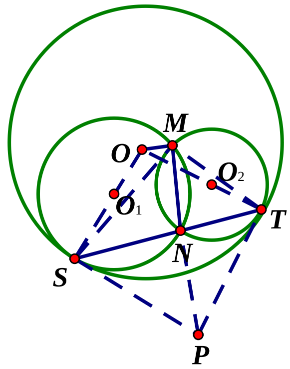
BA,CM,FN 交于 $\triangle BCF$ 的内心 X .

$\therefore CX\cdot XM=AX\cdot XB=FX\cdot XN$

$\therefore C,F,M,N$ 四点共圆.



例4. 过 S,T 作公切线，与直线 MN 交于点 P，连结 OS,OT。



$\therefore \angle OMN=90^\circ \Leftrightarrow O,S,P,T,M$ 共圆

$\Leftrightarrow O,S,T,M$ 共圆 $\Leftrightarrow \angle OSM=\angle OTM \Leftrightarrow \angle OO_1M=\angle OO_2M$

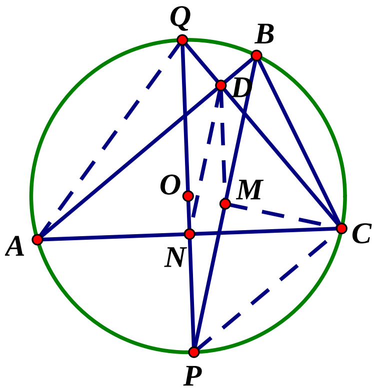
$\angle OO_1M=2\angle SNM-180^\circ$

$\angle OO_2M=180^\circ-2\angle MNT$

$\therefore \angle OO_1M=\angle OO_2M \Leftrightarrow 2\angle SNM-180^\circ=180^\circ-2\angle MNT$

$\Leftrightarrow \angle SNM+\angle MNT=180 \Leftrightarrow S,N,T$ 共线.

例5. 取 BP 中点 M，证明：B,C,D,M 共圆



设 AC 与 PQ 交于点 N，连 AQ,DN，

$\because \angle ANQ=\angle ADQ=90^\circ \therefore A,Q,D,N$ 四点共圆.

又 $\because AP=PC \therefore \angle ADN=\angle AQN=\angle PBC$

$\because \angle DAN=\angle BPC \therefore \triangle DAN \backsimeq \triangle BPC$

$\therefore \frac{DA}{AN}=\frac{PB}{PC} \Rightarrow \frac{DA}{AC}=\frac{MP}{PC}$

$\because \angle DAC=\angle MPC \therefore \triangle DAC \backsimeq \triangle MPC$

$\therefore \angle PMC=\angle ADC \therefore \angle BDC=\angle BMC$

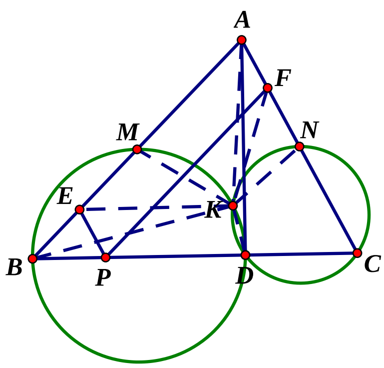
$\therefore B,C,D,M$ 共圆，从而原命题成立.

记 AC 的中点为 N，只用证 $\frac{AD}{AN}=\frac{PB}{PC}$

由 $QDNA$ 共圆，可得 $\angle DNQ=\angle DAQ=\angle BPQ$

从而 $DN /\!/ BP$，$\triangle AND \backsim \triangle PBC$

例6. 连结 BK,EK,MK,AK,FK,NK,DK，



$\because \angle AMK=\angle BDK=\angle KNC$

$\therefore A,M,K,N$ 四点共圆

$\because \triangle ABD$ 为直角三角形，MN 为 $\triangle ABC$ 的中位线.

$\therefore \angle MKB=\angle MDB=\angle MBD=\angle AMN=\angle AKN$

$\because \angle BMK=\angle KNA \therefore \triangle BMK=\triangle AKN$

$\therefore \frac{BM}{MK}=\frac{AN}{NK}$

又 $\because \frac{BE}{BM}=\frac{2BE}{BA}=\frac{2BP}{BC}=\frac{2AF}{AC}=\frac{AF}{AN}$

$\therefore \frac{EM}{MK}=\frac{FN}{KN} \therefore \triangle MEK \backsim \triangle NFK \therefore \angle NFK=\angle MEK \therefore K,E,A,F$ 四点共圆