第一讲　不定方程的基本方法

例1. （1）求关于 x、y 的方程 $3x+5y=40$ 的正整数解.

（2）求关于 x、y 的方程 $3x-5y=7$ 的整数解.

（3）求关于 x、y 的方程 $73x+28y=1$ 的整数解.

（1）解一：枚举法：因为要求的是该方程的正整数解，故而 $0<5y\le 40$， $0<y\le 8$，可以逐个尝试列举出当 $y\in(1,8),y\in Z$ 时，所有 x 的取值．最后可取的情况为 $(x,y)=(5,5)$ 或 $(10,2)$.

解二：取模法，较为简易的办法为模 5.

$\because 3x+5y=40$

$\therefore 3x\equiv 40\equiv 0(\bmod 5)$

$\therefore x\equiv 0(\bmod 5)$

$\therefore x=5$ 或 10

故而 $(x,y)=(5,5)$ 或 $(10,2)$.

解三：代数变形法， $3x+5y=40$，则 $3x=40-5y$， $x=\dfrac{40-5y}{3}=13-2y+\dfrac{1+y}{3}$.
$\therefore \dfrac{1+y}{3}$ 为整数，设 $\dfrac{1+y}{3}=k$， 则 $y=3k-1$（估算大小可得 $k=1,2$）．从而 $(x,y)=(5,5)$ 或 $(10,2)$.

（2）解：取模法，将方程两边模 5． $3x\equiv 7\equiv 2(\bmod 5)$，
$\therefore 3x\equiv 12(\bmod 5)$， $x\equiv 4(\bmod 5)$.
$\therefore x=5k+4(k\in\mathbb{Z}),y=3k+1$.
故而 $x=5k+4$， $y=3k+1$．（$k\in\mathbb{Z}$）
解完需检验.

（3）解：辗转相除法： $(73,28)=(73-28\times 2,28)=(17,28)=(17,28-17)=(17,11)=(17-11,11)$
$(6,11)=(6,11-6)=(6,5)=(6-5,5)=(1,5)=1$.
可以得到： $73\times 5-28\times 13=1$.
$x=28k+5$， $y=-73k-13$（$k\in\mathbb{Z}$）

例2. （1）求方程 $x^2-y^2+2y-40=0$ 的整数解.

（2）求方程 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{10}$ 的正整数解.

（1）整理得 $(x+y-1)(x-y+1)=39$，于是 $\begin{cases}x+y-1=1\\x-y+1=39\end{cases}$，$\begin{cases}x+y-1=3\\x-y+1=13\end{cases}$，$\begin{cases}x+y-1=13\\x-y+1=3\end{cases}$，

$\begin{cases}x+y-1=39\\x-y+1=1\end{cases}$，$\begin{cases}x+y-1=-1\\x-y+1=-39\end{cases}$，$\begin{cases}x+y-1=-3\\x-y+1=-13\end{cases}$，$\begin{cases}x+y-1=-13\\x-y+1=-3\end{cases}$，$\begin{cases}x+y-1=-39\\x-y+1=-1\end{cases}$

依次解得 $\begin{cases}x=20\\y=-18\end{cases}$，$\begin{cases}x=8\\y=-4\end{cases}$，$\begin{cases}x=8\\y=-6\end{cases}$，$\begin{cases}x=20\\y=20\end{cases}$，$\begin{cases}x=-20\\y=20\end{cases}$，$\begin{cases}x=-8\\y=6\end{cases}$，$\begin{cases}x=-8\\y=-4\end{cases}$，$\begin{cases}x=-20\\y=-18\end{cases}$.

（2）去分母得 $xy-10x-10y=0$，整理得 $(x-10)(y-10)=100$.

注意 x、y 为正整数，100 只可能分解为

$100=1\times100=2\times50=4\times25=5\times20=10\times10=20\times5=25\times4=50\times2=100\times1$

依次解得 $(x,y)=(11,110),(12,60),(14,35),(15,30),(20,20),(30,15),(35,14),(60,12),(110,11)$

例3. 求方程的 $\left|2^m-3^n\right|=1$ 的正整数解.

当 $2^m-3^n=1$ 时，显然 $m\neq1$，且 $(m,n)=(2,1)$ 是一组解.

若有 $m\geq3$，则 $8\mid2^m$，于是 $8\mid3^n+1$．但 3^n 模 8 余 1 或 3，故此时无解.

当 $3^n-2^m=1$ 时，$(m,n)=(1,1)$ 显然是一组解.

若有 $m\geq2$，则 $3^n=2^m+1\equiv1\pmod 4$，从而 n 为偶数，不妨设 $n=2k$.

则 $3^{2k}-2^m=1$，化为 $\left(3^k-1\right)\left(3^k+1\right)=2^m$.

而 $\left(3^k-1,3^k+1\right)=\left(2,3^k+1\right)=2$，从而 $3^k-1=2$ 且 $3^k+1=2^{m-1}$.

解得 $(m,n)=(3,2)$.

综上，原方程的解为 $(m,n)=(2,1),(1,1),(3,2)$.

例4. 试求方程 $x^2+y^2=z^2$ 的所有非零整数解.

不妨设 x,y,z 两两互质，

模 4 可得 x、y 为一奇一偶，z 为奇数．不妨设 x 为偶，

则 $x^2=(z+y)(z-y)$，从而 $\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{z+y}{2}\times\frac{z-y}{2}$.

注意 $(z+y,z-y)=(z+y,2y)=2$，于是 $\frac{z+y}{2}$ 和 $\frac{z-y}{2}$ 互质

从而它们均为完全平方数，则 $z+y=2m^2$，$z-y=2n^2$.

整理可得 $y=m^2-n^2$，$z=m^2+n^2$．代入得 $x=2mn$．此时 m、n 互质且奇偶性不同.

故此题结果为 $\begin{cases}x=2kmn\\y=k\left(m^2-n^2\right)\\z=k\left(m^2+n^2\right)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=k\left(m^2-n^2\right)\\y=2kmn\\z=k\left(m^2+n^2\right)\end{cases}$ （m、n 互质且奇偶性不同，k 为非零整数）

例5. 求证：方程 $2a^2+3b^2=c^2+6d^2$ 无正整数解.

反证，若方程存在正整数解．设所有解中使得 a 最小的一组为 $\left(a_0,b_0,c_0,d_0\right)$

则 $2a_0^2+3b_0^2=c_0^2+6d_0^2$，即 $3\left(b_0^2-2d_0^2\right)=c_0^2-2a_0^2$．故 $3\mid c_0^2-2a_0^2$．

由于完全平方数除以 3 只能余 0 或 1，故可得 c_0^2 和 a_0^2 均为 3 的倍数．从而 $3\mid a_0, 3\mid c_0$．

设 $a_0=3a_1, c_0=3c_1$，于是 $3\left(b_0^2-2d_0^2\right)=9\left(c_1^2-2a_1^2\right)$，即 $b_0^2-2d_0^2=3\left(c_1^2-2a_1^2\right)$

类似可得 $3\mid b_0, 3\mid d_0$．再设 $b_0=3b_1, d_0=3d_1$，于是整理得 $2a_1^2+3b_1^2=c_1^2+6d_1^2$．

故 $\left(a_1,b_1,c_1,d_1\right)$ 也是原方程的正整数解，且 $a_1=\frac{1}{3}a_0<a_0$．

这与假设矛盾．故原方程无正整数解．

例6. 求大于 1 的整数 m、n、k，使得 $1!+2!+3!+\cdots+m!=n^k$．

当 $m\geq 4$ 时，$1!+2!+\cdots+m!\equiv 1!+2!+3!+4!\equiv 3\pmod 5$

注意完全平方数模 5 余 0 或 1 或 4，故 $k\geq 3$．

当 $m\geq 8$ 时，$1!+2!+\cdots+m!\equiv 1!+2!+\cdots+8!\equiv 9\pmod{27}$

故 $3^2\mid n^k$ 且 $3^3\nmid n^k$，从而 $k<3$．

所以当 $m\geq 8$ 时原方程无解．逐一检验 $m=1,2,3,4,5,6,7$ 可得 $\begin{cases}m=3\\n=3\\k=2\end{cases}$．