例1. 当 I 为△ABC 内心时，下证 M、N、I 共线.

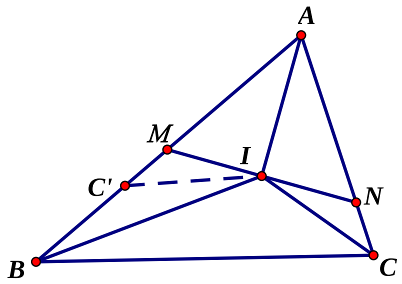
$\angle NIC=\angle ABI=\frac{1}{2}\angle ABC$， $\angle MIB=\angle ACI=\frac{1}{2}\angle ACB$

$\angle BIC=90°+\frac{1}{2}\angle BAC$

$\therefore \angle MIN=\angle NIC+\angle BIC+\angle MIB=180°$

$\therefore M$、I、N 共线.

当 M、N、I 共线．共线时，下证 I 为△ABC 内心.



设 $\angle MBI=\angle NIC=\alpha,\angle MIB=\angle NCI=\beta$

$\angle BMI=\angle BIC=\angle CNI=180°-\alpha-\beta$

解一：$\therefore \angle AMN=\angle ANM=\frac{180°-\angle BAC}{2}=90°-\frac{1}{2}\angle BAC$

$\therefore \angle BIC=180°-\left(90°-\frac{1}{2}\angle BAC\right)=90°+\frac{1}{2}\angle BAC$

$\therefore I$ 为△ABC 内心

解二：$1, AB=AC$

$2, AB\neq AC$，不妨设 $AB>AC$，线段 AB 上取 C' 使得 $AC'=AC$.

则由对称性可知 $MN /\!/ C'C$.

$\therefore \angle BC'C=\angle BMI=\angle BIC$

$\therefore B$、C、I、C' 四点共圆.

又$\because C'I=CI \therefore BI$ 平分 $\angle C'BC \therefore I$ 为△ABC 内心时.

思路三：证△BMI∽△BIC

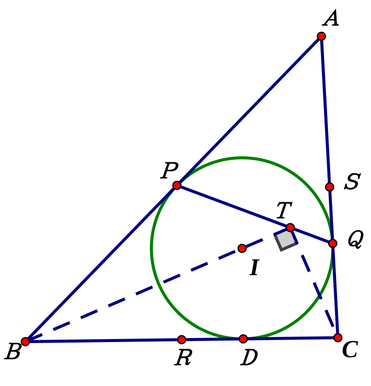
首先△BMI∽△INC，△ANM 为等腰三角形，由三线合一知 $MI=NI$

$\frac{BI}{IC}=\frac{BM}{IN}=\frac{BM}{IM}$， 从而△$BMI$∽△$BIC$.

例2. 解一：由 $AP=AQ$，得 $ST=SQ=\frac{b+c-a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{c-a}{2}$，

$RT=RS-ST=RS-AQ+AS=\frac{c}{2}-\frac{c-a}{2}=\frac{a}{2}=BR$，

故 $\angle TBR=\frac{\angle TRC}{2}=\frac{\angle B}{2}$.



解二：取 T 为角平分线与 PQ 的交点，在证明它在中位线上.

先证 $\angle BTC=90°$.

作出内心 I，则有

$\angle PTB=180°-\angle PBT-\angle BPT=180°-\frac{1}{2}\angle ABC-\left(90°+\frac{1}{2}\angle BAC\right)$

$=\frac{1}{2}\angle ACB=\angle ACI$ 所以 I、T、Q、C 四点共圆.

$\therefore \angle BTC=\angle IQC=90° \therefore \angle BTR=\angle TBR=\angle ABI$.

$\therefore RT /\!/ BA \therefore T$ 在中位线上.

例3. 由 EF 垂直平分 OA，可得弧 AE 等于弧 AF， $AF=AE=EO=R$

所以 CI 为 $\angle ECF$ 平分线．下面证明 $AI=AE=AF$

$\because \angle DOB=\frac{1}{2}\angle AOB=\angle ACB$

$\therefore DO /\!/ AC$，又因为 $AD /\!/ OI$，所以 $ADOI$ 为平行四边形，

所以 $AI=AE=AF$，从而 I 为内心．

例4. 过 E 作 DE 的垂线交 AB、AC 与 M、N.

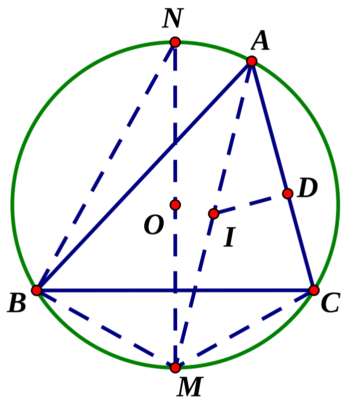
作△ABC 的∠A 所对的旁切圆圆 P.

则△AMN+圆 I 与△ABC+圆 P 关于点 A 位似，

从而 E、F 为对应点．A、E、F 三点共线．

最后由旁切圆性质计算长度得到 $BF=CD=\dfrac{a+b-c}{2}$.

例5. （1）延长 AI 交外接圆于 M，作直径 MN，作 $ID\perp AC$ 于 D



由圆幂定理，可得 $R^2-d^2=AI\cdot IM$

而 $ID=r$， $MN=2R$， $MB=MI$

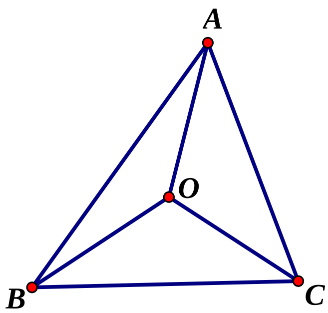
$\angle BNM=\angle MAD=\angle IAD$ 由此可知

$Rt\triangle MBN \backsim Rt\triangle IDA$，故 $\dfrac{AI}{2R}=\dfrac{r}{MB}$.

整理后即可得 $d^2=R^2-2Rr$.

（2）解一：由（1）直接可得

$R^2-2Rr=d^2\geq 0$ 从而 $R^2\geq 2rR$，约掉 R，即可得 $R\geq 2r$.



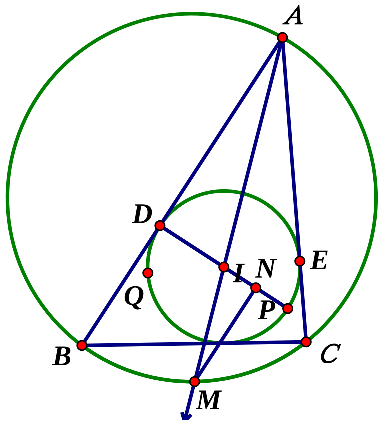
解二：考虑凹四边形 $ABOC$，则 $S_{ABOC}\leq \frac{1}{2}BC\cdot AO=\frac{1}{2}BC\cdot R$.

同理可得： $S_{ABCO}\leq \frac{1}{2}AC\cdot R$， $S_{ABCO}\leq \frac{1}{2}AC\cdot R$.

上面三个式子相加可以得到：

$2S_{\triangle ABC}\leq \frac{1}{2}(a+b+c)R$ 又 $2S_{\triangle ABC}=(a+b+c)r$，从而 $R\geq 2r$.

例6. 解一：延长 AI 交外接圆于 M，



若 $BCPQ$ 四点共圆，则圆心必为 M 点，由此可知

本题只需要证明：$MB=MC=MP=MQ=MI$．

利用 $MI=MB=MC$ 和托勒密定理可得

$BM\cdot AC+MC\cdot AB=BC\cdot AM$

将 $AB+AC=3BC$ 代入可得：

$AM=3BC$ 继而可得 $AI=2MI$．

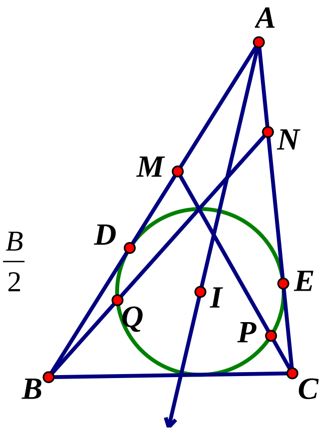
作 $MN\perp IP$ 可得 $\dfrac{IN}{ID}=\dfrac{IM}{IA}=\dfrac{1}{2}$，于是 $IN=NP$，$MP=MI$

故 $MB=MC=MP=MQ$．

B、C、P、Q 共圆．

解二：由 $AB+AC=3BC$ 可得 $AD=AE=BC$

延长 CP 交 AB 于 M，延长 BQ 交 AC 于 N



利用例 4 结论可得 $BM=AD=BC$，$CN=AE=BC$

于是 $\angle BCP=90^\circ-\dfrac{B}{2}$，

由对称性知弧 PQ=弧 DE，所以

$\angle EQP=90^\circ-\angle QEP=90^\circ-\angle DPE=90^\circ-\angle AIE=\dfrac{A}{2}$

$\angle BQP=\angle BQE-\angle PQE=\angle BNC+90^\circ-\dfrac{A}{2}=90^\circ-\dfrac{C}{2}+90^\circ-\dfrac{A}{2}=90^\circ+\dfrac{B}{2}$

故 $\angle BCP+\angle BQP=180^\circ$．

B、C、P、Q 共圆．