第九讲　高次方程与韦达定理

例1. 已知 a、b、c 是方程 $x^3+2x^2+x-4=0$ 的三个根，求：

（1）$a^2+b^2+c^2$；（2）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$；（3）$a^3+b^3+c^3$.

解：由韦达定理，$a+b+c=-2$，$ab+bc+ca=1$，$abc=4$.

（1）$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=2$.

（2）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{4}$.

（3）$a^3+b^3+c^3=3abc+(a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\right]=10$.

也可由 $a^3=-2a^2-a+4$，$b^3=-2b^2-b+4$，$c^3=-2c^2-c+4$ 代入得

$a^3+b^3+c^3=-2(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)+12=10$.

例2. 设 a、b 是方程 $x^3+x^2-1=0$ 的两个不同的根，求证：ab 是方程 $x^3-x-1=0$ 的根.

证：设 $x^3+x^2-1=0$ 的三根为 a、b、c.

由韦达定理 $a+b+c=-1$，$ab+bc+ca=0$，$abc=1$.

令 $p=ab$，$q=bc$，$r=ac$.

则 $p+q+r=0$，$pq+qr+pr=abc(a+b+c)=-1$，$pqr=(abc)^2=1$.

由韦达定理逆定理，可知方程 $x^3-x-1=0$ 的三根即为 p、q、r.

例3. 已知实数 x、y、z 满足：$x^2+y^2+z^2=x+y+z=2$，求证：$x(x-1)^2=y(y-1)^2=z(z-1)^2$.

证：由题意 $xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=1$，设 $xyz=a$.

由韦达定理逆定理，可得 x、y、z 即为方程 $t^3-2t^2+t-a=0$ 的三根.

从而得到 $x(x-1)^2=y(y-1)^2=z(z-1)^2=a$.

例4. 求所有的 a，使得多项式 x^3-6x^2+ax+a 的根 x_1、x_2、x_3 满足 $(x_1-3)^3+(x_2-3)^3+(x_3-3)^3=0$.

解：令 $y_i=x_i-3$（$i=1,2,3$），则方程 $(y+3)^3-6(y+3)^2+a(y+3)+a=0$ 的三根即为 y_1,y_2,y_3.

整理得 $y^3+3y^2+(a-9)y+4a-27=0$.

故 $y_1+y_2+y_3=-3$，$y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=a-9$，$y_1y_2y_3=27-4a$.

则 $y_1^3+y_2^3+y_3^3=-27-3a=0$，解得 $a=-9$.

例5. 实数 a、b 使得方程 $x^3-ax^2+bx-a=0$ 有三个正实根．求 $\dfrac{2a^3-3ab+3a}{b+1}$ 的最小值．

解：设三个正实根为 x_1,x_2,x_3，则 $x_1+x_2+x_3=x_1x_2x_3=a$，$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$，

于是由 $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\ge\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ 可得 $a^3\ge 27a$，故 $a\ge 3\sqrt{3}$．

由 $\left(x_1+x_2+x_3\right)^3\ge 3\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)$ 可得 $a^2\ge 3b$，故 $b\le\dfrac{a^2}{3}$．

于是 $\dfrac{2a^3-3ab+3a}{b+1}=\dfrac{2a^3+6a}{b+1}-3a\ge\dfrac{2a^3+6a}{\dfrac{a^2}{3}+1}-3a=3a\ge 9\sqrt{3}$．

当 $a=3\sqrt{3},b=9$ 时可取等号．

例6. 已知 a、b、c、d 为实数，且 $b-d\ge 5$，方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有四个实根 x_1,x_2,x_3,x_4．试求 $\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right)\left(x_4^2+1\right)$ 的最小值．

解：令 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，则 $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$．

$\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right)\left(x_4^2+1\right)=(-x_1+i)(-x_1-i)(-x_2+i)(-x_2-i)(-x_3+i)(-x_3-i)(-x_4+i)(-x_4-i)$

$=P(i)P(-i)=(a-c)^2+(1-b+d)^2\ge 16$．

取 $a=c=-4$，$b=6$，$d=1$ 即可取到等号．

例7. 设实系数方程 $ax^n-ax^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_{n-2}x^2-n^2bx+b=0$ 恰有 n 个正根．证明：它所有的根都相等．

证：由韦达定理得 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，$(-1)^n\sum x_1x_2\cdots x_{n-1}=\dfrac{n^2b}{a}$，$(-1)^n x_1x_2\cdots x_n=\dfrac{b}{a}$

后两式相除，可得 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}=n^2$，于是 $n^2=\left(x_1+x_2+\cdots x_n\right)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\right)\ge n^2$

最后一步由柯西不等式得到．利用柯西不等式取等条件可知 $x_1=x_2=\cdots=x_n$．