第三讲　极端原理应用

例1. 平面上给定了 100 个点，其中任意三点不共线．求证：可以从中找到三个点 A、B、C，使得其余 97 个点都在△ABC 外．

证：考虑所有以这 100 个点为顶点的三角形．

因为总数有限，故其中必存在面积最小的一个．设为△ABC．

若其中还有另外一个点 D，则△BCD 的面积比△ABC 更小，这与假设矛盾．

故其余 97 个点都在△ABC 外．

例2. 有若干名运动员之间进行单循环比赛，其中没有平局出现．如果没有人全胜，证明必存在 3 名运动员 A、B、C，使得 A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A．

注：所谓单循环比赛，是指所有参赛运动员之间两两比赛一场．

证：考虑比赛中胜利场数的最多的人，设为 A，并设 A 战胜的人分别是 $B_1, B_2 \cdots B_n$.

因为 A 不是全胜，故存在某人胜 A，不妨设为 C．

如果 $B_1, B_2 \cdots B_n$ 全部输给 C，则 C 比 A 多胜一场，这与假设矛盾．

故在 $B_1, B_2 \cdots B_n$ 中至少存在一个战胜 C，记作 B．此时有 A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A．

例3. 有三所中学，每所有 n 名学生，每名学生都认识其他两所中学的 $n+1$ 名学生．求证：可以从每所中学中各选出一名学生，使得这 3 名学生互相认识．

证：考虑每个人认识另两所学校之一的学生人数．不妨设甲校中 A 认识乙校的人数最多，有 k 人．

设这些人为 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ ．因为 $k \le n$ ，故 A 一定认识丙校中某人，设为 C．

若 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 均不认识 C，则 C 最多认识乙校的 $n-k$ 人．

于是 C 至少认识甲校的 $(n+1)-(n-k)=k+1$ 人，这与 k 的最大性矛盾．

故 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 中必存在某人认识 C，记为 B．此时 A、B、C 三人两两认识．

例4. 已知集合 $S=\{1,2,3,\cdots,n\}$．考虑 S 的所有子集，以它们为元素组成一个 2^n 元集合 D．

构造映射 $f: D \to D$ ，满足对任意 $A, B \in D$ ，若 $A \subseteq B$ ，则必有 $f(A) \subseteq f(B)$.

求证：一定存在 $X \in D$，使得 $f(X)=X$.

证：考虑所有满足 $A \subseteq f(A)$ 的子集 A．由于 $\varnothing \subseteq f(\varnothing)$ 一定成立，故这样的 A 一定存在．

设其中元素最多的一个为 X，下证 $f(X)=X$:

设 $f(X)=Y$ ，若 $Y \ne X$ ，由 $X \subseteq f(X)$ 可得 $|Y|>|X|$ （$|X|$ 表示集合 X 的元素个数）

同时由条件得到 $f(X)\subseteq f(Y)$，即 $Y\subseteq f(Y)$．这与 X 的元素最多矛盾．

故必有 $f(X)=X$．

例5. 求证：对任意的正整数数列 $\{a_n\}$，一定存在正整数 m、d，使得 $a_m\le a_{m+d}\le a_{m+2d}$．

证：由极端原理，正整数数列 $\{a_n\}$ 中存在一定最小项，设为 a_m．

考虑子列 $\{a_n\}_{n>m}$，这也是一个正整数数列，故一定也存在最小项，设为 a_{m+d}．

从而得到 $a_m\le a_{m+d}\le a_{m+2d}$．

例6. 平面给定 $2n$ 个点，其中任意三点不共线，将其中 n 个点染成红色，剩下 n 个点染成蓝色，求证：一定可以以这些点为端点连出 n 条线段，使得每条线段两端点不同色，且任意两条线段不相交．

证：考虑所有将红蓝点配对连线的方案中，线段总长度最小的一个．

此时若存在线段 AB 与 CD 相交（不妨设 A、C 为红点，B、D 为蓝点）

则去掉 AB、CD 这两条线段，换上 AD、BC 这两条．

于是总长度变小，这与假设矛盾．

故上述方案中，所有连线段都不相交．

例7. 有 n 个人，他们分别掌握 n 条不同的信息．规定他们可以通过邮件交流，每个人都可以给其他人写信，告诉对方当前自己知道的所有信息．求证：要使得所有人都知道所有信息，至少发送了 $2n-2$ 封邮件．

证：不妨假设所有邮件的到达时间互不相同．考虑第一个知道所有信息的人．

在他知道所有信息之前，其余 $n-1$ 人都需要把自身信息发送出去让其他人接收，故此时至少需要收到 $n-1$ 封邮件．

在他知道所有信息之后，其余 $n-1$ 人都还需要收到至少 1 封邮件，以了解自身之前未知的信息，故至少也还需要收到 $n-1$ 封邮件．

综上可知邮件数不少于 $2n-2$．

下面构造一种方案：先由除 A 外的所有人给 A 发邮件，将自身信息告诉 A．再由 A 将所有人信息逐一回复给其他人．恰好一共发送 $2n-2$ 封邮件．