第五讲　高斯函数

例1. 如果$[x]=3$，$[y]=2$，$[z]=1$，求$[x+y-z]$的所有可能值.

解：由题意，$3\le x<4$，$2\le y<3$，$1\le z<2$．所以$3<x+y-z<6$.

构造$x=3,y=2,z=1.1$，则$[x+y-z]=3$；$x=3,y=2,z=1$，则$[x+y-z]=4$；

$x=3.9,y=2.9,z=1$，则$[x+y-z]=5$.

综上可得所求值为3、4、5.

例2. 若实数r使得$\left[r+\frac{3}{20}\right]+\left[r+\frac{4}{20}\right]+\cdots+\left[r+\frac{19}{20}\right]=40$，求$[20r]$.

解：易知，$[r]\le\left[r+\frac{k}{20}\right]\le[r+1]=[r]+1$，从而$\left[r+\frac{k}{20}\right]=[r]$或$[r]+1$.

则$17[r]\le 40\le 17([r]+1)$，解得$[r]=2$.

由$\left[r+\frac{3}{20}\right],\left[r+\frac{4}{20}\right],\cdots,\left[r+\frac{19}{20}\right]$单调不减，设这17项中前$a$项等于2，其余$b$项等于3.

则$\begin{cases}a+b=17\\2a+3b=40\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=11\\b=6\end{cases}$.

故$\left[r+\frac{13}{20}\right]=2$，$\left[r+\frac{14}{20}\right]=3$，从而$r+\frac{13}{20}<3$，$r+\frac{14}{20}\ge 3$.

解得$\frac{46}{20}\le r<\frac{47}{20}$，故$46\le 20r<47$，$[20r]=46$.

例3. 解方程：（1）$2x-[x]=\frac{16}{5}$.（2）$x^3-[x]=3$.

（1）解：由$x\le 2x-[x]<x+1$，整理得$\frac{11}{5}<x\le\frac{16}{5}$，于是$[x]=2,3$.

若$[x]=2$，则$2x-2=\frac{16}{5}$，解得$x=\frac{13}{5}$．若$[x]=3$，则$2x-3=\frac{16}{5}$，解得$x=\frac{31}{10}$.

检验它们均满足要求.

（2）解：由$x^3-x\le x^3-[x]<x^3-x+1$，整理得$2<x^3-x\le 3$.

利用$f(x)=x^3-x$估算可得$x\ge 2$和$x<1$时无解，故$[x]=1$.

从而$x^3=4$，故$x=\sqrt[3]{4}$．检验其满足要求.

例4. 求证：对正整数 n，$2^{n-1}\mid n!$ 当且仅当 $n=2^k$，其中 k 为某个自然数.

证：当 $n=2^k$ 时，$L_2(n!)=\sum_{i\ge1}\left[\frac{n}{2^i}\right]=\sum_{i\ge1}\left[2^{k-i}\right]=\sum_{i=1}^{k}\left[2^{k-i}\right]=\sum_{i=0}^{k-1}2^i=2^k-1=n-1$，从而 $2^{n-1}\mid n!$.

当 $2^{n-1}\mid n!$ 时，不妨设 $2^k\le n<2^{k+1}\ (k\ge0)$.

一方面有，$L_2(n!)\ge n-1$.

另一方面，$L_2(n!)=\sum_{i\ge1}\left[\frac{n}{2^i}\right]=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{2^i}\right]\le\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{2^i}=n\left(1-\frac{1}{2^k}\right)=n-\frac{n}{2^k}\le n-1$.

则 $L_2(n!)=n-1$，故 $n-\frac{n}{2^k}=n-1$，从而 $n=2^k$.

例5. 已知 x 是实数，前 1000 个正整数当中有多少个可以表示成 $[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$ 的形式？

解：令 $f(x)=[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$，考虑 $f(x)$ 的值域.

注意到 $f(x)$ 不减，其图象为阶梯状，且 $f(x+1)=f(x)+20$.

注意 $f(0)=0$ 且 $f(1)=20$，在区间 $(0,1]$ 中，函数值在 $x=\frac18,\frac28,\frac38,\frac48,\frac58,\frac68,\frac78,\frac16,\frac26,\frac46,\frac56,1$ 共 12 处发生改变. 故 $f(x)$ 在 1~20 中恰取到 12 个不同值.

于是 1~1000 中能取 600 个不同值.

例6. 对任意正整数 n 和实数 x，求证：$[x]+\left[x+\frac1n\right]+\left[x+\frac2n\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$.

证：设 $\frac{k}{n}\le\{x\}<\frac{k+1}{n}$（这里 $0\le k\le n-1$）. 于是 $[nx]=n[x]+k$.

左边从 $[x]$ 到 $\left[x+\frac{n-k-1}{n}\right]$ 这 $n-k$ 项的值为 $[x]$，从 $\left[x+\frac{n-k}{n}\right]$ 到 $\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$ 这 k 项的值为 $[x]+1$.

相加即可得证.

例7. 在 $\left[\frac{1^2}{1000}\right],\left[\frac{2^2}{1000}\right],\left[\frac{3^2}{1000}\right],\cdots,\left[\frac{999^2}{1000}\right]$ 中，一共有多少个不同的整数？

解：令 $a_k=\frac{k^2}{1000}$（$k=1,2,\cdots,999$）

当 $k\le500$ 时，$a_k-a_{k-1}=\frac{2k-1}{1000}<1$，故 $[a_1],[a_2],\cdots,[a_{500}]$ 取遍从 $[a_1]$ 到 $[a_{500}]$ 的所有整数.

而 $[a_1]=0$，$[a_{500}]=250$，故一共有 251 种取值.

当 $k\ge501$ 时，$a_k-a_{k-1}=\frac{2k-1}{1000}>1$，故 $[a_{501}],[a_{502}],\cdots,[a_{999}]$ 都是互不相同的整数.

故一共有 $251+499=750$ 个不同的整数.