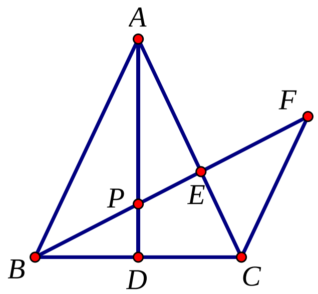
第七讲　相似三角形的应用

例1. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，AD是中线，P是AD上一点，过C作$CF\parallel BA$，延长BP交AC于E，交CF于F．求证：$BP^2=PE\cdot PF$．



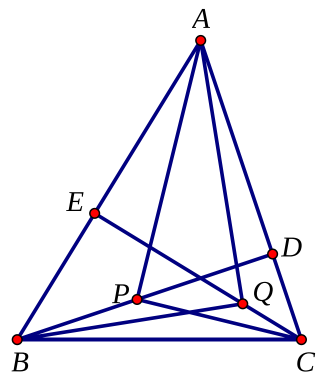
证：延长AD、FC交于Q，连结BQ．

因为$CF\parallel AB$，$BD=CD$，所以$AD=QD$，四边形$ABQC$为平行四边形．

因为$CF\parallel AB$，所以$\dfrac{PB}{PF}=\dfrac{PA}{PQ}$．因为$AC\parallel BQ$，所以$\dfrac{PE}{PB}=\dfrac{PA}{PQ}$．

于是$\dfrac{PB}{PF}=\dfrac{PE}{PB}$，即$BP^2=PE\cdot PF$．

例2. 在$\triangle ABC$的高线BD和CE上分别取点P、Q，使得$\angle APC=\angle AQB=90°$．求证：$AP=AQ$．



证：因为$\angle APC=90°$，$PD\perp AC$，所以$AP^2=AD\cdot AC$．

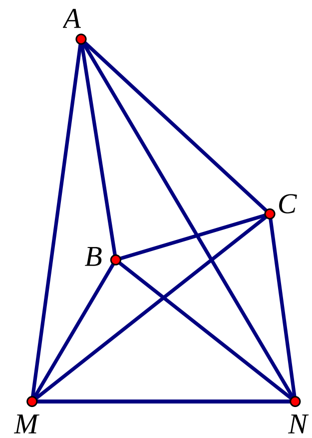
同理可得$AQ^2=AE\cdot AB$．

而$\mathrm{Rt}\triangle ADB\backsim\mathrm{Rt}\triangle AEC$，故$\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{AB}{AC}$，即$AD\cdot AC=AE\cdot AB$．

于是$AP=AQ$．

例3. 如图，在线段MN的同侧取点A、B、C，使得$\triangle AMN\backsim\triangle NBM\backsim\triangle MNC$．

求证：$\triangle ABC$与上述3个三角形也相似．



证：由$\triangle AMN\backsim\triangle NBM\backsim\triangle MNC$可得

$\angle AMB=\angle AMN-\angle BMN=\angle MNC-\angle MNA=\angle ANC$

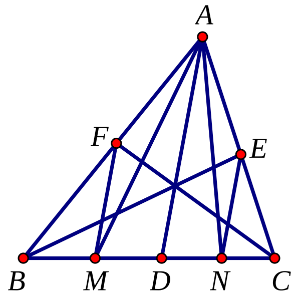
$\dfrac{AM}{MN}=\dfrac{MN}{NC}$，$\dfrac{BM}{MN}=\dfrac{MN}{NA}$，于是$\dfrac{AM}{AN}=\dfrac{BM}{CN}$．

从而得到$\triangle AMB\backsim\triangle ANC$．

于是$\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}$，所以$\triangle ABC\backsim\triangle AMN$．

例4. 已知△ABC 中，AD、BE、CF 是角平分线，M、N 在 BC 上，且 $FM // AD // EN$.

求证：AD 平分 $\angle MAN$.



证：$\angle AFM = 180° - \angle BAD = 180° - \angle CAD = \angle AEN$

设三角形的三边长分别为 a、b、c.

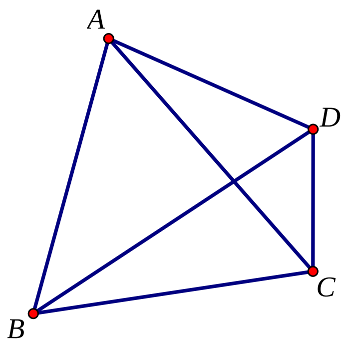
由内角平分线定理，$AF = \dfrac{bc}{a+b}$，$BF = \dfrac{ac}{a+b}$，$AE = \dfrac{bc}{a+c}$，$EC = \dfrac{ac}{a+c}$.

于是 $\dfrac{FM}{EN} = \dfrac{FM}{AD} \cdot \dfrac{AD}{EN} = \dfrac{BF}{BA} \cdot \dfrac{AC}{EC} = \dfrac{a}{a+b} \cdot \dfrac{a+c}{a} = \dfrac{a+c}{a+b} = \dfrac{AF}{AE}$

故△AFM∽△AEN.

于是 $\angle MAD = \angle AMF = \angle ANE = \angle NAD$.

例5. 如图，已知四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形．求证：$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.



证：在 BD 上取点 E 使得 $\angle BAE = \angle CAD$，

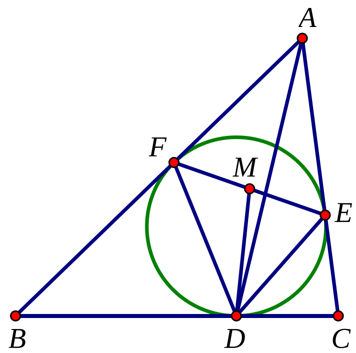
则可得△BAE ∽△CAD，从而 $AB \cdot CD = BE \cdot AC$.

此时有△EAD ∽△BAC，从而 $AD \cdot BC = AC \cdot ED$.

两式相加得 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

例6. 如图，已知△ABC 的内切圆分别与三边切于点 D、E、F．M 为 EF 中点．

求证：$\angle FDM = \angle ADE$．．



证：设 AD 与内切圆交于点 P.

于是△AEP∽△ADE，△AFP∽△ADF.

可得 $\dfrac{PE}{DE} = \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AF}{AD} = \dfrac{PF}{DF}$，于是 $PE \cdot DF = PF \cdot DE$.

由托勒密定理，$PE \cdot DF + PF \cdot DE = EF \cdot PD = FM \cdot PD$

故 $PE \cdot DF = \dfrac{1}{2} EF \cdot PD = FM \cdot PD$，从而△$FDM$∽△$PDE$.

所以 $\angle FDM = \angle ADE$.