# 第十一讲　不等式证明技巧 2

**例1.** 已知实数 $a$、$b$、$c$ 满足 $a^2+b^2+c^2=3$．求证：$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\le 6$．

证：由 $a^2+b^2+c^2=3$，本题即证 $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\le\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)^2$．

展开得 $2(a^4+b^4+c^4)+4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-3(a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+c^3a+ca^3)\ge 0$．

由 $a^4-3a^3b+4a^2b^2-3ab^3+b^4=(a-b)^2(a^2-ab+b^2)\ge 0$，

类似可得 $b^4-3b^3c+4b^2c^2-3bc^3+c^4\ge 0$，$a^4-3a^3c+4a^2c^2-3ac^3+c^4\ge 0$．

相加即可得证．

**例2.** 已知 $a$、$b$、$c$ 为正实数，且满足 $a^2+b^2+c^2=1$，求证：$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge\sqrt{3}$．

证：设 $\frac{ab}{c}=x,\frac{bc}{a}=y,\frac{ca}{b}=z$，则由 $a^2+b^2+c^2=1$ 可得 $xy+yz+zx=1$．

故 $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)=3$．

所以 $x+y+z\ge\sqrt{3}$，不等式得证．

**例3.** 设 $a$、$b$、$c$ 是一个三角形的三条边，且 $a+b+c=1$，

求证：$a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$．

证：设 $\frac{b+c-a}{2}=x$，$\frac{c+a-b}{2}=y$，$\frac{a+b-c}{2}=z$．

由于 $a$、$b$、$c$ 是一个三角形的三条边，故 $x$、$y$、$z$ 为正实数．

此时 $a=y+z$，$b=x+z$，$c=x+y$，且 $x+y+z=\frac{1}{2}$．代入原式，

即证 $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2+4(x+y)(y+z)(z+x)<\frac{1}{2}$．

将此式归一化为齐次式，即证

$$2(x+y+z)\left[(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\right]+4(x+y)(y+z)(z+x)<4(x+y+z)^3.$$

展开可知上式等价于 $xyz>0$．显然成立．

综上即可得证．

**例4.** 已知 $a$、$b$、$c$ 为非负实数，$a+b+c=1$．

求证：$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\ge 2$．

证一：原不等式展开即证 $a^4+b^4+c^4-2(a^2+b^2+c^2)+1\ge 0$．

齐次化后等价于证明 $a^4+b^4+c^4-2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^2+(a+b+c)^4\ge 0$．

展开可知即证 $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+8abc(a+b+c)\ge 0$．显然成立．

证二：设 $ab+bc+ca=m$， $abc=n$． 则 $m$、$n$ 为非负实数.

则 $a^2+b^2+c^2=1-2m$， $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=m^2-2n\times1=m^2-2n$，

$a^4+b^4+c^4=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=(1-2m)^2-2\left(m^2-2n\right)=2m^2-4m+4n+1$，

左式 $=a^4+b^4+c^4-2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3=2m^2-4m+4n+1-2(1-2m)+3=2m^2+4n+2\geq2$.

综上即可得证.

**例5.** 已知 $x$、$y$、$z$、$w$ 是四个不全为零的实数，求 $\dfrac{xy+2yz+zw}{x^2+y^2+z^2+w^2}$ 的最大值.

解：设最大值为 $t$．则不等式 $xy+2yz+zw\leq t\left(x^2+y^2+z^2+w^2\right)$ 对任意实数 $x$、$y$、$z$、$w$ 恒成立.

此时即求使得该式成立的 $t$ 的最小值.

注意 $y^2+z^2\geq2yz$，故只需 $tx^2+(t-1)y^2\geq xy$， $tw^2+(t-1)z^2\geq zw$ 成立即可.

此时只需 $t(t-1)\geq\dfrac{1}{4}$，舍去负数情况，可得 $t\geq\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

先证明 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\left(x^2+y^2+z^2+w^2\right)\geq xy+2yz+zw$.

利用均值不等式，有 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}x^2+\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}y^2\geq xy$， $y^2+z^2\geq2yz$， $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}z^2+\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}w^2\geq zw$

相加即可得证.

再取 $y=z=1$， $x=w=\sqrt{2}-1$，可使得等号成立．故所求式子的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

**例6.** （1）已知 $\dfrac{1}{2}\leq x\leq1$，求 $(1+x)^5(1-x)(1-2x)^2$ 的最大值.

（2）求函数 $y=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}$ 的最大值.

（1）解：取正实数 $a$、$b$，考虑下列变形：

由均值不等式 $(1+x)^5(1-x)(1-2x)^2=(1+x)^5(1-x)(2x-1)^2=\dfrac{1}{a^5b}(a+ax)^5(b-bx)(2x-1)^2$

$\leq\dfrac{1}{a^5b}\cdot\left[\dfrac{5(a+ax)+(b-bx)+2(2x-1)}{8}\right]^8=\dfrac{1}{2^{24}a^5b}\left[(5a-b+4)x+(5a+b-2)\right]^8$

此时要使得 $5a-b+4=0$，且 $a+ax=b-bx=2x-1$．后者可得 $\dfrac{a+1}{2-a}=x=\dfrac{b+1}{b+2}$.

解得 $a=\dfrac{2}{5}$， $b=6$.

代入上式，可得 $x=\dfrac{7}{8}$ 时，原式取最大值 $\dfrac{3^75^5}{2^{22}}$.

（2）取正实数 $a$、$b$，考虑柯西不等式 $\left(a(x+27)+b(13-x)+x\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+1\right)\geq y^2$

此时需要 $a-b+1=0$，且由等号成立条件得 $a^2(x+27)=b^2(13-x)=x$

整理得 $40a^4+80a^3+54a^2-26a-13=0$.

解得 $a=\dfrac{1}{2}$， $b=\dfrac{3}{2}$．代入上式，可得 $x=9$ 时，原式取最大值为 11.