第六讲　数论中的构造问题 2

练1. 当 $n=1$ 时，取 $x_1=y=1$ 即可.

当 $n=2$ 时，取 $x_1=15$， $x_2=20$， $y=12$ 即可.

若 $n=k$ 时成立，当 $n=k+1$ 时，若 $x_1,x_2,\cdots,x_k,y$ 满足 $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_k^2}=\frac{1}{y^2}$.

则 $\frac{1}{(12x_1)^2}+\frac{1}{(12x_2)^2}+\cdots+\frac{1}{(12x_{k-1})^2}+\frac{1}{(15x_k)^2}+\frac{1}{(20x_k)^2}=\frac{1}{(12y)^2}$，命题成立．综上，原命题得证.

练2. 显然该数列中所有项都是奇数.

对任意奇质数 p，有 $2^{p-1}\equiv 1\pmod p$，于是 $2^{k(p-1)}-3\equiv 1-3\equiv -2\pmod p$，故 $2^{k(p-1)}-3$ 与 p 互质.

构造 $\{2^n-3\}$ 的无穷子数列 $\{a_n\}$，令 $a_1=2^2-3=1$， $a_2=2^3-3=5$.

若已经构造好 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，按如下方式构造 a_{n+1}：

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的所有质因子为 $p_1,p_2,\cdots,p_k$，取 $a_{n+1}=2^{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)}-3$.

则 a_{n+1} 与前面所有项都互质．按此方式即可得到 $\{a_n\}$ 中任意两项都互质.

练3. 取 $a_1=2^k-2$，可归纳证明该数列前 k 项都是偶数而第 $k+1$ 项为奇数.

取 $k=1000$ 即可.

练4. 不妨设 $0<q<1$，若 $q>1$，则将其替换为 $\frac{1}{q}$ 后结论不变.

按如下方式构造集合 A 和集合 B：

令 $1\in A$．对任意正整数 n，如果 1~n 已经分到集合 A 或 B，我们考虑 $n+1$ 的分法.

在 $1\le m\le n$ 时，使得 $\frac{m}{n+1}=q$ 成立的正整数 m 取值最多只有一个.

如果这样的 m 不存在，则令 $n+1\in A$；否则将 $n+1$ 分入与 m 不同的集合中.

按此方式，可以将所有正整数都依次分入集合 A 或 B，且满足要求.