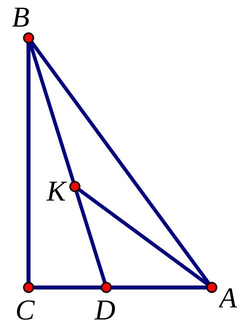
# 第十二讲　平面几何问题中的三角法

**例1.** 已知$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$D$为$AC$上一点，$K$为$BD$上一点，且$\angle ABC=\angle KAD=\angle AKD$．求证：$BK=2DC$．

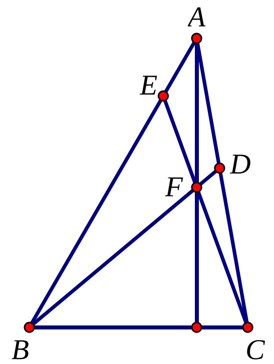


证：设$\angle ABC=\angle KAD=\angle AKD=\alpha$，则$\angle BDC=2\alpha$，$\angle KAB=\frac{\pi}{2}-2\alpha$．

$\frac{BK}{AB}=\frac{\sin\angle KAB}{\sin\angle BKA}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\sin\alpha}$，故$BK=AB\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$

而$CD=\frac{BC}{\tan\angle BDC}=\frac{BC}{\tan 2\alpha}=\frac{AB\cos\alpha}{\tan 2\alpha}=AB\cdot\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}$，故$BK=2CD$．

**例2.** $\triangle ABC$中，$\angle BAC=40^\circ$，$\angle ABC=60^\circ$，点$D$、$E$分别在$AC$、$AB$上，$\angle CBD=40^\circ$，$\angle BCE=70^\circ$，$BD$、$CF$相交于点$F$．求证：$AF\perp BC$．



证：计算角度得$\angle FBA=20^\circ$，$\angle FBC=40^\circ$，$\angle FCB=70^\circ$，$\angle FCA=10^\circ$

本题即证$\angle FAB=\alpha=30^\circ$．

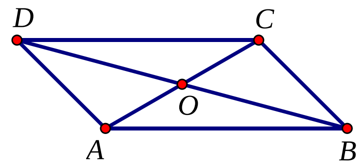
由角元塞瓦定理得$\frac{\sin\alpha}{\sin(40^\circ-\alpha)}\cdot\frac{\sin 10^\circ}{\sin 70^\circ}\cdot\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}=1$，

故$\frac{\sin\alpha}{\sin(40^\circ-\alpha)}=\frac{\sin 70^\circ}{\sin 40^\circ}\cdot\frac{\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\cos 20^\circ\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ\sin 10^\circ}=\frac{1}{2\sin 10^\circ}$．

显然有$\alpha=30^\circ$成立，再由$f(x)=\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{9}-x\right)}$在$\left(0,\frac{\pi}{9}\right)$上单调递增可得解唯一．

故必有$\alpha=30^\circ$．

**例3.** $\square ABCD$中，$AC$与$BD$交于$O$，$\angle CAB=\angle DBC=2\angle DBA$，则$\angle ACB$是$\angle AOB$的多少倍？



解：设$\angle DBA=\alpha$，$\angle DBC=\angle BAC=2\alpha$，$\angle ABC=3\alpha$．

由题意可得$\triangle CAB\backsim\triangle CBO$，可得$CB^2=CO\cdot CA=\frac{1}{2}CA^2$，

由正弦定理得$\frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}=\sqrt{2}$，故$\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{2}$．

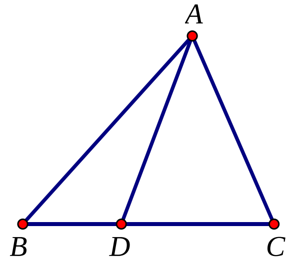
整理得$4\cos^2\alpha-1=2\sqrt{2}\cos\alpha$．

解得$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，故$\alpha=15^\circ$．

于是$\angle ACB=105^\circ$，$\angle AOB=135^\circ$，所以结果为$\frac{7}{9}$倍．

**例4.** 如图，△$ABC$ 中，$D$ 为 $BC$ 边上一点．求证：

（1）$\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{BD}{CD}\cdot\dfrac{AC}{AB}$；（2）$\dfrac{\sin\angle BAD}{AC}+\dfrac{\sin\angle CAD}{AB}=\dfrac{\sin\angle BAC}{AD}$．



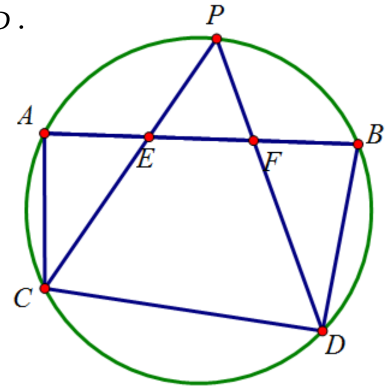

（1）证：$\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle BDA}\cdot\dfrac{\sin\angle CDA}{\sin\angle CAD}=\dfrac{BD}{AB}\cdot\dfrac{AC}{CD}$

（2）证：由面积关系 $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}$．

故 $AB\cdot AD\sin\angle BAD+AC\cdot AD\sin\angle CAD=AB\cdot AC\sin\angle BAC$

两边同时除以 $AB\cdot AC\cdot AD$ 即可得证．

**例5.** 如图，$AB$ 是圆的一条弦，$P$ 为弧 $AB$ 内一点，$E$、$F$ 为线段 $AB$ 上两点，满足 $AE=EF=FB$，连线 $PE$、$PF$ 并延长，与圆分别交于点 $C$、$D$，求证：$EF\cdot CD=AC\cdot BD$．




证：设 $\angle APE=\alpha,\angle EPF=\beta,\angle BPF=\gamma$

本题即证 $\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)=3\sin\alpha\sin\gamma$

由例 4 第一问可得

$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma}=\dfrac{2PB}{PA}$，$\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}=\dfrac{PB}{2PA}$

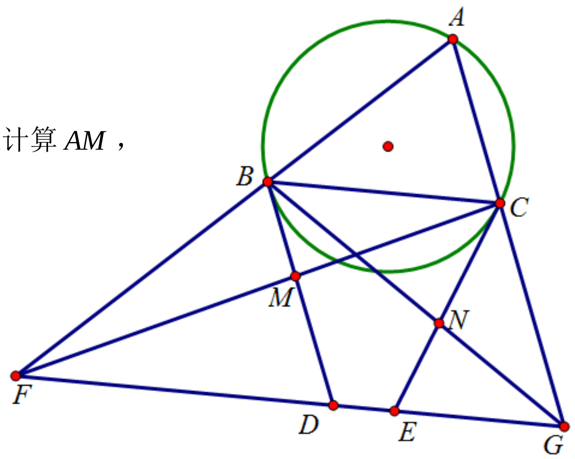
于是 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)=4\sin\alpha\sin\gamma$

则 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin\gamma=3\sin\alpha\sin\gamma$

而 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin\gamma=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}-\cos\dfrac{\alpha+2\beta+\gamma}{2}-\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}+\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2}-\cos\dfrac{\alpha+2\beta+\gamma}{2}\right)=\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

**例6.** 在锐角三角形 $ABC$ 中，$\angle BAC\neq 60^\circ$，过点 $B$，$C$ 分别作三角形 $ABC$ 的外接圆的切线 $BD$，$CE$，且满足 $BD=CE=BC$．直线 $DE$ 与 $AB$，$AC$ 的延长线分别交于点 $F$，$G$．设 $CF$ 与 $BD$ 交于点 $M$，$CE$ 与 $BG$ 交于点 $N$．求证：$AM=AN$．




证：设△$ABC$ 三边为 $a$、$b$、$c$，则 $BD=CE=a$，先计算 $AM$，

因为 $\angle BFD=\angle ABC$，$\angle BDF=\angle DBC=\angle BAC$

所以△$BFD$ ∽△$CBA$，$DF=\dfrac{ac}{b}$．

故 $\dfrac{BM}{BD-BM}=\dfrac{BC}{DF}=\dfrac{b}{c}$，故 $BM=\dfrac{ab}{b+c}$．

由余弦定理知

$AM^2=c^2+\left(\dfrac{ab}{b+c}\right)^2-2c\cdot\dfrac{ab}{b+c}\cos(A+B)$

$=c^2+\left(\dfrac{ab}{b+c}\right)^2+\dfrac{2abc}{b+c}\cos C=c^2+\left(\dfrac{ab}{b+c}\right)^2+\dfrac{c(a^2+b^2-c^2)}{b+c}=bc+\dfrac{a^2(b^2+bc+c^2)}{(b+c)^2}$

此式关于 $b$，$c$ 对称，故可知 $AM=AN$