第一讲　组合计数高级技巧

例1. （1）有一个八位数，它的所有数字都是 1、2 中的某一个，且没有连续两位数字都是 1．满足要求的八位数有多少个？

（2）有一个八位数，它的所有数字都是 1、2、3 中的某一个，且没有连续两位数字都是 1．满足要求的八位数有多少个？

（3）有一个八位数，它的所有数字都是 1、2、3 中的某一个，且没有连续两位数字都是 1，也没有连续两位数字都是 2．满足要求的八位数有多少个？

解：（1）设满足要求的 n 位数有 a_n 个，枚举可得 $a_1=2$，$a_2=3$．

对一般的 a_n，如果首位是 1，则第二位只能是 2，后面 $n-2$ 位有 a_{n-2} 种情况；

如果首位是 2，后面 $n-1$ 位有 a_{n-1} 种情况．于是 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

依次计算得 $a_8=55$．

（2）假设满足要求的 n 位数有 a_n 个，枚举可得 $a_1=3$，$a_2=8$．

对一般的 a_n，如果首位是 1，则第二位是 2 或 3，后面 $n-2$ 位有 a_{n-2} 种情况；

如果首位是 2 或 3，后面 $n-1$ 位有 a_{n-1} 种情况．于是 $a_n=2a_{n-1}+2a_{n-2}$．

依次计算得 $a_8=3344$．

（3）设满足要求的首位为 1 的 n 位数有 x_n 个，首位为 2 的有 y_n 个，首位为 3 的有 z_n 个．

于是 $\begin{cases} x_{n+1}=y_n+z_n \\ y_{n+1}=x_n+z_n \\ z_{n+1}=x_n+y_n+z_n \end{cases}$，且 $x_1=y_1=z_1=1$．

依次计算得 $x_8=y_8=408$，$z_8=577$，$x_8+y_8+z_8=1393$．

例2. 在圆周上给定 16 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_{16}$，用 8 条既无公共端点又不相交的弦连结它们，共有多少种不同的连法？

解：假设圆周上有 $2n$ 个点时的连法数为 a_n，则 $a_1=1$，$a_2=2$

考虑一般情况，注意点 A_1 只能和编号为偶数的点相连（否则该弦两边都是奇数个点，不满足要求）

若 A_1 和 A_2 相连，则剩下 $2n-2$ 个点，有 a_{n-1} 种连法．

若 A_1 和 A_4 相连，则一边剩下 2 个点，另一边剩下 $2n-4$ 个点，有 $a_1\cdot a_{n-2}$ 种连法

若 A_1 和 A_6 相连，则一边剩下 4 个点，另一边剩下 $2n-6$ 个点，有 $a_2\cdot a_{n-3}$ 种连法

依次下去，可以得到 $a_n=a_{n-1}+a_1a_{n-2}+a_2a_{n-3}+\cdots+a_{n-2}a_1+a_{n-1}$

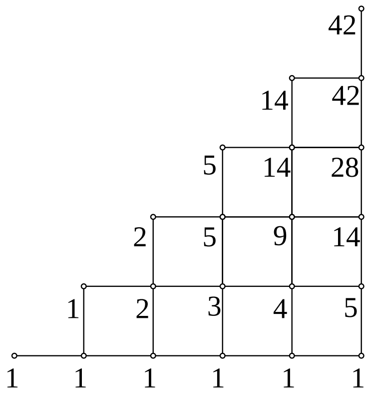
于是可计算得 $a_3=5,a_4=14,a_5=42,a_6=132,a_7=429,a_8=1430$．

例3. 某家电影院的票价为每张 5 元，现有 10 个人，其中 5 个人手持 5 元钞票，另外 5 个人手持 10 元钞票，假设开始售票时售票处没有钱，要使得售票处不会出现找不开钱的局面，这 10 个人有多少种满足要求的排队方式？

解：构造如下模型：

考虑平面直角坐标系中的整点（即横纵坐标都是整数的点）.

有一只蚂蚁从$(0,0)$出发，每次只能向右或向上爬到下一个整点，最后到达$(5,5)$，且蚂蚁不能爬到直线$y=x$上方，一共有多少种方法？



不难发现，将蚂蚁向右爬行一次视为队伍中排进一个手持 5 元钞票的人，蚂蚁向上爬行一次视为队伍中排进一个手持 10 元钞票的人，这个模型的答案和原题保持一致.

如右图，利用标数法，可求得共有 42 种方式.

考虑到不同人的排列，故结果为$42\times A_5^5\times A_5^5=604800$种

例4. 在掷硬币时，我们记 Z 表示正面朝上，F 表示反面朝上，统计连续两次投掷的结果．例如掷硬币 15 次得到 $ZZFFZZZZFFFZZFF$ 中共有 5 次 ZZ、4 次 FF、3 次 ZF 和 2 次 FZ．则恰出现 2 次 ZZ、3 次 ZF、4 次 FZ、5 次 FF 的投掷结果共有多少种？

解：我们将掷硬币得到的序列中连续的相同字母视为一整段，

则该序列一定是……（F）（Z）（F）（Z）……的形式．其中（F）和（Z）分别表示一整段 F 和 Z.

显然 ZF 和 FZ 只在相邻两段之间产生，且它们必须交错出现.

由于恰出现 3 次 ZF 和 4 次 FZ，故这个序列只能形如（F）（Z）（F）（Z）（F）（Z）（F）（Z）

此时这 4 段 F 中要出现 5 次 FF，设其中各有a_1,a_2,a_3,a_4个 F，

则$(a_1-1)+(a_2-1)+(a_3-1)+(a_4-1)=5$，于是共有$C_8^3=56$种情况.

类似可求得 Z 有 10 种情况．故满足要求的序列共有$56\times10=560$种情况.

例5. 一只虫子从无限大的正方形格纸的一个格点出发，沿格线向四个方向移动，每步移动距离为 1．求虫子走 10 步回到出发点的方法数.

解：假设该虫子向上一共走 x 步，向左一共走 y 步，则它向下走 x 步，向右走 y 步.

从而$x+y=5$．此时不同的走法为$C_{10}^xC_{10-2x}^xC_{10-2x-y}^y$.

故所有走法一共有$C_{10}^5+C_{10}^1C_9^1C_8^4+C_{10}^2C_8^2C_6^3+C_{10}^3C_7^3C_4^2+C_{10}^4C_6^4C_2^1+C_{10}^5=63504$种.

例6. 连接一个凸 10 边形的所有对角线，其中任意三条不交于 10 边形内部同一点.

（1）这些对角线在凸 10 边形的内部一共有多少个交点？

（2）此时得到的图形中一共有多少个不同的三角形？

解：（1）每个交点需要两条线段相交，这等价于从 10 个顶点中选出 4 个，并把相对的两个连结，故一共有 $C_{10}^{4}=210$ 种.

（2）图中所有的三角形可以被分为以下 4 类：

①三个顶点都是原来的 10 边形的顶点．这样的三角形有 $C_{10}^{3}=120$ 个.

②三个顶点中有 2 个是原来的 10 边形的顶点．延长三角形各边，发现原来 10 边形的每 4 个顶点可以形成 4 个这样的三角形．故总有 $4\times C_{10}^{4}=840$ 个.

③三个顶点中有 1 个是原来的 10 边形的顶点．延长三角形各边，发现原来 10 边形的每 5 个顶点可以形成 5 个这样的三角形．故总有 $5\times C_{10}^{5}=1260$ 个.

④三个顶点都不是原来的 10 边形的顶点．延长三角形各边，发现原来 10 边形的每 6 个顶点可以形成 1 个这样的三角形．故总有 $C_{10}^{6}=210$ 个.

总计有 2430 个三角形.