第四讲　代数式中的整除问题

例1. 解：因为$\left(n^n-n^2+n-1\right)+(n-1)^2=n^n-n$．故只要证明$(n-1)^2\mid n^n-n$，

只需证$(n-1)\mid\left(n^{n-2}+n^{n-3}+\cdots+1\right)$，

而$n^{n-2}+n^{n-3}+\cdots+1\equiv1+1+\cdots+1\equiv0(\bmod n-1)$．

故而$(n-1)^2\mid\left(n^n-n^2+n-1\right)$．

例2. 解：$\left(2^n+n\right)\mid\left(8^n+n^3\right)$（利用立方和公式），故$\left(2^n+n\right)\mid\left(8^n+n^3\right)-\left(n^3-n\right)$，即$\left(2^n+n\right)\mid\left(n^3-n\right)$，于是$2^n+n\le n^3-n$（$n>1$时）

大小估计可得$n<10$（此处可用数学归纳法证明），逐一检验可知$n=1,2,4,6$

例3. 解：观察可得$(x+y+1)(x+y-1)-\left(x^2+y^2-1\right)=2xy$，故$(x+y-1)\mid 2xy$．

而$(x+y+1,x+y-1)=1$或2，故$(x+y+1)(x+y-1)\mid 4xy$

再由$(x+y+1)(x+y-1)=(x+y)^2-1\ge4xy-1$可得$(x+y+1)(x+y-1)=4xy$

从而$(x-y)^2=1$

于是$(x,y)=(n,n+1)$或$(n+1,n)$（$n=1,2,\cdots$），检验易知都满足要求．

例4. 解一：因为$(m,n)=1$，由裴蜀定理知，$\exists a,b\in\mathbb{Z}$，使得$1=am+bn$．

从而$\dfrac{(m+n-1)!}{m!n!}=\dfrac{(am+bn)(m+n-1)!}{m!n!}=a\cdot\dfrac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}+b\cdot\dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}=aC_{m+n-1}^{n}+bC_{m+n-1}^{m}\in\mathbb{Z}$．

解二：要证$\dfrac{(m+n-1)!}{m!n!}$为整数，

只需证对任意质数p，$m!n!$中p的次数不超过$(m+n-1)!$中p的次数．

在$n!$中p的次数为$\left[\dfrac{n}{p}\right]+\left[\dfrac{n}{p^2}\right]+\left[\dfrac{n}{p^3}\right]+\cdots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\dfrac{n}{p^k}\right]$．

则只需证：$\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\dfrac{n}{p^k}\right]\right)+\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\dfrac{m}{p^k}\right]\right)\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\dfrac{m+n-1}{p^k}\right]$．

则只需证：$\left[\dfrac{n}{p^k}\right]+\left[\dfrac{m}{p^k}\right]\le\left[\dfrac{m+n-1}{p^k}\right]$．

设$m=p^k\cdot m_1+r_1.0\le r_1<p^k$，$n=p^k\cdot n_1+r_2.0\le r_2<p^k$．

则$\left[\dfrac{m}{p^k}\right]+\left[\dfrac{n}{p^k}\right]=m_1+n_1$．

而$m+n-1=p^k\cdot(m_1+n_1)+(r_1+r_2-1)$．

由于$(m,n)=1$，故而r_1,r_2不全为0．$r_1+r_2-1\ge0$．

因此$\left[\dfrac{m+n-1}{p^k}\right]\ge m_1+n_1=\left[\dfrac{m}{p^k}\right]+\left[\dfrac{n}{p^k}\right]$．命题得证．

例5. 解：若 $f(n)$ 含质因子 p，则 $p\mid 2^n-1$，故 p 为奇数

注意 $p\mid f(n+p)-f(n)$，故 $p\mid f(n+p)$，于是 $p\mid 2^{n+p}-1$

于是 $p\mid 2^{n+p}-2^n$，即 $p\mid 2^p-1$.

由费马小定理有 $p\mid 2^p-2$，从而 $p\mid\left(2^p-1\right)-\left(2^p-2\right)$，即 $p\mid 1$，矛盾.

故 $\left|f(n)\right|\le 1$，则 $f(x)$ 为常数，只能是 1 或 -1.

特别说明：若 $f(x)$ 不是常数，则 $f(x)=\pm 1$ 只能是有限个解.

例6. 解：首先 $m=k$ 成立，记 $f(x)=C_x^k$，则 $f(x)$ 是关于 x 的 k 次有理系数多项式

故 $f(x)=\dfrac{1}{k!}g(x)$，$g(x)$ 为 k 次整系数多项式

注意 $(a-b)\mid\left(g(a)-g(b)\right)$，故增加 $l\cdot(k!)$ 后模 l 不变

对任意正整数 t，令 $m=k+t\cdot l\cdot(k!)$．我们证明 $\left(C_m^k,l\right)=1$.

设 p 是 l 的任一素因子，只要证明：$p\nmid C_m^k$.

若 $p\nmid k!$，则由

$$\begin{aligned}k!\mathrm{C}_m^k&=\prod_{i=1}^k(m-k+i)\\&\equiv\prod_{i=1}^k\left[i+tl(k!)\right]\\&\equiv\prod_{i=1}^k i\\&\equiv k!\pmod p\end{aligned}$$

即 p 不整除上式，故 $p\nmid C_m^k$.

若 $p\mid k!$，设 $\alpha\ge 1$ 使 $p^\alpha\mid k!$，但 $p^{\alpha+1}\nmid k!$．则 $p^{\alpha+1}\mid l(k!)$．故由

$$\begin{aligned}k!\mathrm{C}_m^k&=\prod_{i=1}^k(m-k+i)\\&\equiv\prod_{i=1}^k\left[i+tl(k!)\right]\\&\equiv\prod_{i=1}^k i\\&\equiv k!\pmod{p^{\alpha+1}}\end{aligned}$$

及 $p^\alpha\mid k!$，且 $p^{\alpha+1}\nmid k!$，知 $p^\alpha\mid k!\mathrm{C}_m^k$ 且 $p^{\alpha+1}\nmid k!\mathrm{C}_m^k$．从而 $p\nmid \mathrm{C}_m^k$.