第六讲　数论中的构造问题 2

例1. 构造 $x_1=7$， $x_{n+1}=5\cdot x_1x_2\ldots x_n+2$（$n=1,2,\cdots$）.

下证对任意正整数 n，$(x_n,2)=1$，且 $1\le i<k\le n$ 时，$(x_i,x_k)=1$.

当 $n=1$ 时结论成立．若 $n<k$ 时结论成立，则 $n=k$ 时，由归纳假设，得

$(x_k,2)=(5x_1x_2\cdots x_{k-1}+2,2)=(5x_1x_2\cdots x_{k-1},2)=1$，$(x_i,x_k)=(x_i,5x_1x_2\cdots x_{k-1}+2)=(x_i,2)=1$.

综上，结论成立．故子数列 $\{x_n\}$ 满足要求.

对一般等差数列 $\{an+b\}$，取 $x_1=a+b$， $x_{n+1}=a\cdot(x_1x_2\cdots x_n)+b$（$n=1,2,\cdots$）即可.

例2. （1）我们用数学归纳法证明如下命题：可以将 1、2、……、2^n 排成一个序列，使得其中任意两项之间的数都不等于这两项的算术平均值.

$n=1$ 时，$(1,2)$ 即满足条件.

$n=k$ 时．若存在 1、2、……、2^k 的排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_{2^k})$ 满足条件.

$n=k+1$ 时，我们下面证明：

$(2a_1-1,2a_2-1,\cdots,2a_{2^k}-1,2a_1,2a_2,\cdots,2a_{2^k})$ 是 1、2、……、2^{k+1} 的一个排列，

且满足任意两项之间的数都不等于这两项的算术平均值.

一方面，由 $2a_1-1,2a_2-1,\cdots,2a_{2^k}-1$ 遍历 1、2、……、2^{k+1} 中的所有奇数，

而 $2a_1,2a_2,\cdots,2a_{2^k}$ 遍历 1、2、……、2^{k+1} 中的所有偶数，

可知 $(2a_1-1,2a_2-1,\cdots,2a_{2^k}-1,2a_1,2a_2,\cdots,2a_{2^k})$ 是 1、2、……、2^{k+1} 的一个排列.

另一方面，如果 $(2a_1-1,2a_2-1,\cdots,2a_{2^k}-1,2a_1,2a_2,\cdots,2a_{2^k})$ 中存在三项使得，

首尾两项的算术平均值等于中间项，有如下四种情况：

① $\dfrac{(2a_i-1)+(2a_j-1)}{2}=2a_k-1\ (i<k<j)$，则 $\dfrac{a_i+a_j}{2}=a_k$，与归纳假设矛盾.

② $\dfrac{(2a_i-1)+2a_j}{2}=2a_k-1\ (i<k<j)$，则 $2\,|\,2a_i-1$，矛盾.

③ $\dfrac{(2a_i-1)+2a_j}{2}=2a_k\ (i<k<j)$，则 $2\,|\,2a_i-1$，矛盾.

④ $\dfrac{2a_i+2a_j}{2}=2a_k\ (i<k<j)$，则 $\dfrac{a_i+a_j}{2}=a_k$，与归纳假设矛盾.

故 $(2a_1-1,2a_2-1,\cdots,2a_{2^k}-1,2a_1,2a_2,\cdots,2a_{2^k})$ 中任意两项之间的数都不等于这两项的算术平均值.

命题得证.

（2）由第（1）问的证明知，存在 1~128 的排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_{128})$ 满足条件.

我们把 $(a_1,a_2,\cdots,a_{128})$ 中大于 100 的数去掉，则剩下的数组成的排列 $(b_1,b_2,\cdots,b_{100})$ 任然满足条件.

若不然，存在 $\dfrac{b_i+b_j}{2}=b_k\ (i<k<j)$，

不妨设 b_i,b_j,b_k 对应到 $(a_1,a_2,\cdots,a_{128})$ 中的 a_{i_1},a_{j_1},a_{k_1}，则 $\dfrac{a_{i_1}+a_{j_1}}{2}=a_{k_1}$，

因为去掉数不改变数与数之间的先后关系，则$\left(i_1 < k_1 < j_1\right)$，这与假设矛盾．

命题得证．

例3. （1）解：构造数列$\{b_n\}$满足$b_1 = 2$，$b_{n+1} = b_n^2 + b_n$（$n = 1,2,\cdots$）

令$\{a_n\}$满足$a_1 = 3$，$a_n = 2b_{n-1}$（$n = 2,3,\cdots$），下证$n \geq 2$时，$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \left(a_n + 1\right)^2$．

$n = 2$时，由$a_1^2 + a_2^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2$，命题成立．

若$n = k$时命题成立，则$n = k + 1$时，

$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k+1}^2 = \left(a_k + 1\right)^2 + a_{k+1}^2 = \left(2b_k + 1\right)^2 + 4b_{k+1}^2 = 4b_{k+1}^2 + 4b_{k+1} + 1 = \left(2b_{k+1} + 1\right)^2 = \left(a_{k+1} + 1\right)^2$

综上即可得证．

（2）解：当$n = 3$时，$6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$．

当$n = 4$时，$20^3 = 11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3$．

若$n = k$时成立，有$m^3 = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3$（$a_1 > a_2 > \cdots > a_k$）．则当$n = k + 2$时，

有$\left(6m\right)^3 = \left(6a_1\right)^3 + \left(6a_2\right)^3 + \cdots + \left(6a_{k-1}\right)^3 + \left(5a_k\right)^3 + \left(4a_k\right)^3 + \left(3a_k\right)^3$，命题成立．

例4. 解一：8、9 是好数对，第二组是 288 和 289．

若a_n和$a_n + 1$是好数对

则$4a_n\left(a_n + 1\right)$与$4a_n\left(a_n + 1\right) + 1 = \left(2a_n + 1\right)^2$都是好数

解二：利用$1 = a_n^2 - 8b_n^2 = \left(3a_n + 8b_n\right)^2 - 8\left(a_n + 3b_n\right)^2 = a_{n+1}^2 - 8b_{n+1}^2$和数列递增可以得到．

例5. 对正整数n（$n \geq 2$），证明存在n个不同的正整数满足要求．

当$n = 2$时，取 1、2 即可．

若$n = k$时，$a_1, a_2, \cdots, a_k$满足要求，则$n = k + 1$时．

取$M = a_1 a_2 \cdots a_n$，考虑$M, M + a_1, M + a_2, \cdots, M + a_k$这$k + 1$个数．

注意$\left(M, M + a_i\right) = a_i$，且$\left(a_i, a_j\right) \mid \left(M + a_i, M + a_j\right)$，$\left(M + a_i, M + a_j\right) \leq \left|a_j - a_i\right|$

可知这些数也满足要求．综上即可得证．

例6. 首先$x = 1, y = 1$是符合条件的一组整数解．

其次，如果(x, y)是符合条件的一组解．有$x \leq y$，那么考察整数对(x, y)，其中$y^2 + m = xx_1$①．

显然，由①可知，x_1与y的任何素公约数都是m的约数，又由条件（2），$y \nmid x^2 m$，则这个素公约数也是x的约数．因此，有$\left(x_1, y\right) = 1$．

由①式及条件（2）可得$x^2\left(x_1^2 + m\right) = \left(xx_1\right)^2 + x^2 m = \left(y^2 + m\right)^2 + x^2 m = y^4 + 2my^2 + m\left(x^2 + m\right)$是$y$的倍数．

由于$(x, y) = 1$．因此$y \mid x_1^2 + m$．从而$\left(x_1, y\right)$满足条件（1），（2），（3）．且$x_1 > y \geq x$．

再由①式又得$\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right), \cdots$，且$x < x_1 < x_2 < \cdots, y < y_1 < y_2 < \cdots$这一过程可无限多次进行下去．故而得证．