第二讲　剩余系

练1. 若$(a,n)=1$，则不存在 k，使得$a^k\equiv 0\pmod n$．若$(a,n)>1$，则不存在 k，使得$a^k\equiv 1\pmod n$．

故不存在满足要求的 a、n.

练2. 所有不超过 2015 且与 2015 互质的全体正整数共有$\varphi(2015)$个.

由$2015=5\times 13\times 31$可得$\varphi(2015)=1440$.

注意$(k,2015)=(2015-k,2015)$，故所有这些数可以首尾配对，每对之和都是 2015.

故总和为$2015\times 720=1450800$.

练3. 由 p 为奇质数，可得$1\equiv -(p-1)\pmod p$，$2\equiv -(p-2)\pmod p$，……

故$1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(p-2)^2\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\pmod p$

练4. 若对于 1~n 的任意排列 b、c，均有$n!\nmid\left(S(b)-S(c)\right)$．则当 a 取遍所有排列时（共 $n!$ 个），$S(a)$模 $n!$ 互不相同，故组成模 $n!$ 的一个完系.

于是$\sum S(a)\equiv 1+2+\cdots+n!\equiv\frac{n!}{2}\pmod{n!}$.

但另一方面$\sum S(a)=\sum\sum_{i=1}^{n}k_ia_i=\sum_{i=1}^{n}k_i\left[(n-1)!\sum_{j=1}^{n}j\right]\equiv\frac{n+1}{2}\cdot n!\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i\equiv 0\pmod{n!}$.

矛盾，故原命题成立.