第四讲　代数式中的整除问题

练1. 由抽屉原理，这 4 个数中必有两个数模 3 同余，则它们的差是 3 的倍数.

这 4 个数中若有两个数模 4 同余，则它们的差是 4 的倍数．否则必为两个奇数和两个偶数，则两个奇数的差和两个偶数的差都是 2 的倍数，乘积仍为 4 的倍数.

故该式能被 12 整除.

练2. 注意 $n^2+5n+16=(n-4)^2+13n$ 且 $169=13^2$.

假设结论成立，则 $13\mid(n-4)^2$，于是 $13\mid n-4$.

此时 $169\mid(n-4)^2$，故 $169\mid 13n$，于是 $13\mid n$．这与 $13\mid n-4$ 矛盾.

练3. 设 $x-y=m$，$y-z=n$，则 $z-x=-m-n$.

本题即证 $m^5+n^5+(-m-n)^5$ 能被 $5mn(-m-n)$ 整除.

而 $m^5+n^5+(-m-n)^5=-5mn(m+n)\left(m^2+mn+n^2\right)$．综上即可得证.

练4. 注意 $(2000-67)\mid(P(2000)-P(67))$，即 $1933\mid(P(2000)-78)$，而 $P(2000)>0$，故 $P(2000)\geq 78$.

故最小值为 78．取 $a=b=c=0$，$d=78$ 满足要求.

练5. 由 n 为偶数，可得 $x^2-y^2\mid x^n-y^n$．故 $x+y\mid x^n-y^n$.

因为 $(x,y)=1$，故 $(x+y,y)=1$，故 $\left(x+y,y^n\right)=1$，$\left(x+y,2y^n\right)\leq 2$.

由于 $xy\neq 1$，故 $x+y\geq 3$，从而 $x+y\nmid 2y^n$.

于是 $x+y\nmid\left(x^n-y^n+2y^n\right)$，命题得证.