第三讲　从费马小定理谈起

练1.（1）由费马小定理，$7^{12}\equiv 1(\bmod 13)$，故 $7^{1000}\equiv 7^4\equiv 49^2\equiv(-3)^2\equiv 9(\bmod 13)$．

（2）注意 $\varphi(99)=60$，由欧拉定理 $4^{2015}\equiv 2^{4030}\equiv 2^{10}\equiv 1024\equiv 34(\bmod 99)$．

练2. 注意 $504=7\times 8\times 9$，且 7、8、9 两两互质．

由费马小定理 $7\mid(n^7-n)$，故 $n^9-n^3=n^2(n^7-n)$ 是 7 的倍数．

若 n 为偶数，则 n^3 是 8 的倍数；若 n 为奇数，则 n^6 是完全平方数，模 8 余 1，于是 n^6-1 是 8 的倍数，故 n^9-n^3 是 8 的倍数．

若 $3\mid n$，则 $9\mid n^2$；若 $3\nmid n$，则 $(n,9)=1$，由 $\varphi(9)=6$ 和欧拉定理可得 $9\mid n^6-1$．

综上即可得证．

练3. 若 $p\mid n$，取 $x=p$ 即可．

否则 $(p,n)=1$，取 $x\equiv n(\bmod p)$，且 $x\equiv 1(\bmod p-1)$．

由中国剩余定理，上述同余方程组显然有正整数解．

则 $x^x\equiv x^{x-1}\cdot x\equiv x\equiv n(\bmod p)$，$x^x\equiv 1^x\equiv 1(\bmod x-1)$．

类似有 $x^{x^x}\equiv n(\bmod p)$，$x^{x^x}\equiv 1(\bmod x-1)$，……

故这样的 x 满足要求．

练4. 不妨设 $m<n$，则 $2015^m\equiv 2015^n(\bmod 10000)$．即 $2015^m\equiv 2015^n(\bmod 625)$，$2015^m\equiv 2015^n(\bmod 16)$．

易知 $m\geq 4$ 时 $2015^m\equiv 2015^n(\bmod 625)$．

而 $2015^{n-m}\equiv 1(\bmod 16)$，可得 $15^{n-m}\equiv 1(\bmod 16)$．

试算易得 $\mathrm{ord}_{16}(15)=2$，故 $2\mid n-m$．故 $m+n$ 的最小值为 $4+6=10$．

练5. $n=1$ 时显然满足要求．

若 $n\neq 1$，考虑 n 的最小质因子 p，由于 3^n-1 不是 3 的倍数可得 $p\neq 3$

于是 $p\mid 3^{p-1}-1$．故 $p\mid 3^{(n,p-1)}-1$．但由于 p 为最小质因子，故 $(n,p-1)=1$．

于是 $p\mid 2$，所以 $p=2$．但这与 n 为奇数矛盾．

故满足要求的 n 只有一个，就是 1．