# 第十一讲　调和点列初步

**例1.** $A$、$B$、$C$、$D$ 四点为调和点列

$$\Leftrightarrow \frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB} \Leftrightarrow \frac{S_{\triangle OCA}}{S_{\triangle OCB}}=\frac{S_{\triangle ODA}}{S_{\triangle ODB}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}OA\cdot OC\cdot\sin\angle AOC}{\frac{1}{2}OC\cdot OB\cdot\sin\angle BOC}=\frac{\frac{1}{2}OA\cdot OD\cdot\sin\angle AOD}{\frac{1}{2}OD\cdot OB\cdot\sin\angle BOD}$$

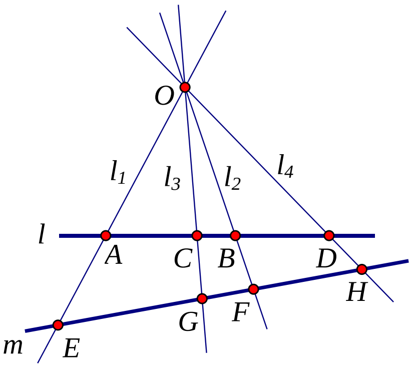
$$\Leftrightarrow \sin\angle AOC\cdot\sin\angle BOD=\sin\angle AOD\cdot\sin\angle BOD$$

上式只与 $l_1$ 、$l_2$ 、$l_3$ 、$l_4$ 有关．与 $l$ 无关．

由此可知：$E$、$F$、$G$、$H$ 是调和点列

$$\Leftrightarrow \sin\angle AOC\cdot\sin\angle BOD=\sin\angle AOD\cdot\sin\angle BOD$$

$\Leftrightarrow$ $A$、$B$、$C$、$D$ 四点为调和点列．

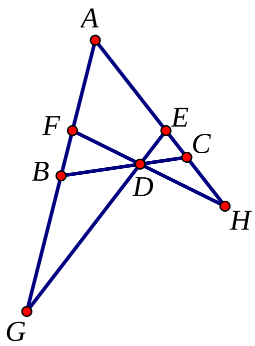



**例2.** 由 $A$、$B$、$F$、$G$ 是调和点列

可得：$DA$、$DB$、$DF$、$DG$ 为调和线束，

考虑直线 $AH$，截 $DA$、$DB$、$DF$、$DG$ 得到 $A$、$C$、$H$、$E$

因此 $A$、$C$、$E$、$H$ 是调和点列．



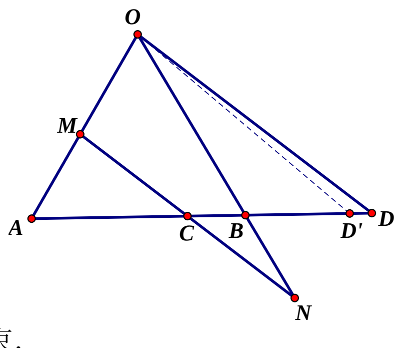

**例3.** 解一：过 $O$ 作 $MN$ 平行线，交直线 $AD$ 于点 $D'$

下证 $D'$ 与 $D$ 重合

$$\frac{AC}{AD'}=\frac{CM}{OD'}=\frac{CN}{OD'}=\frac{BC}{BD'}$$

因此 $A$、$B$、$C$、$D'$ 为调和点列．

又 $A$、$B$、$C$、$D$ 为调和点列，所以 $D=D'$，$MN /\!/ OD$．




解二：若 $MN$ 与 $OD$ 不平行，则不妨设 $MN$ 与 $OD$ 交于点 $P$．

由 $A$、$B$、$C$、$D$ 为调和点列可知 $OA$、$OB$、$OC$、$OD$ 为调和线束．

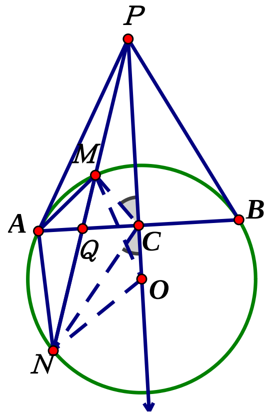
考虑直线 $MN$，分别交 $OA$、$OB$、$OC$、$OD$ 于 $M$、$N$、$C$、$P$，

因此 $M$、$N$、$C$、$P$ 为调和点列．

即 $\dfrac{PM}{PN}=\dfrac{CM}{CN}=1$ 这与 $PM\neq PN$ 矛盾．

**例4.** 解一：由切线性质可知$\triangle PAM \backsim \triangle PNA$

$$\frac{PM}{PN}=\left(\frac{PM}{PA}\right)\cdot\left(\frac{PA}{PN}\right)=\left(\frac{MA}{NA}\right)^2$$ （也可以用$\frac{PM}{PN}=\frac{S_{\triangle PAM}}{S_{\triangle PNA}}$）

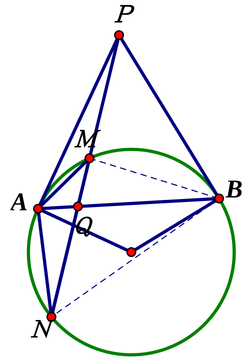



同理可得$\frac{PM}{PN}=\left(\frac{MB}{NB}\right)^2$

因此$\left(\frac{PM}{PN}\right)^2=\left(\frac{MA}{NA}\right)^2\left(\frac{MB}{NB}\right)^2$ 即$\frac{PM}{PN}=\frac{MA\cdot MB}{NA\cdot NB}$

而$\frac{QM}{QN}=\frac{S_{\triangle AMB}}{S_{\triangle ANB}}=\frac{\frac{1}{2}MA\cdot MB\cdot\sin\angle AMB}{\frac{1}{2}NA\cdot NB\cdot\sin\angle ANB}=\frac{MA\cdot MB}{NA\cdot NB}=\frac{PM}{PN}$

所以，$P$、$Q$、$M$、$N$为调和点列.




解二：
连$PO$与$AB$交于点$C$.
圆幂定理加射影定理可知
$PM\cdot PN=PA^2=PC\cdot PD$
从而$M$、$N$、$O$、$C$四点共圆.
$\angle NCO=\angle NMO=\angle MNO=\angle PCM$，$PC$为$\angle NCM$的外角.
又$PC\perp CQ$，
所以$CQ$为$\angle NCM$的内角，$P$、$Q$、$M$、$N$为调和点列.

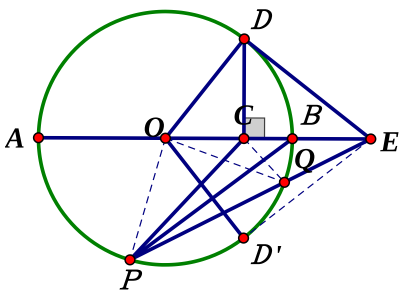
**例5.** 解一：作$D$点关于直线$AE$的对称点$D'$，则$D'$在圆$O$上，

$DD'\perp AE$

从而由例四的结论可知，$A$、$B$、$C$、$E$为调和点列.

又$PA\perp PB$

所以$PB$、$PA$为$\angle CPE$的内外角平分线.




解二：连$PE$交圆$O$异于$P$点的点$Q$.

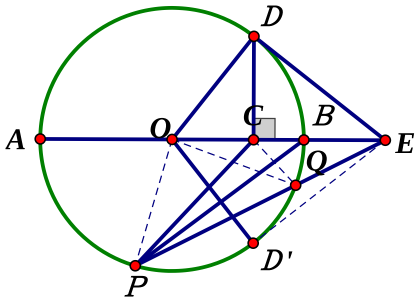
则由圆幂定理和射影定理可知：

$EP\cdot EQ=ED^2=CE\cdot EO$

进而可得$P$、$Q$、$C$、$O$四点共圆.

$\angle BPQ=\frac{1}{2}\angle BOQ=\frac{1}{2}\angle CPQ$.

所以$PB$、$PA$为$\angle CPE$的内外角平分线.



**例6.** $\triangle AEF$ 中，利用塞瓦定理 $\frac{XE}{XF}\cdot\frac{FD}{DA}\cdot\frac{AB}{BE}=1$

直线 $BDY$ 截 $\triangle AEF$

利用梅涅劳斯定理，$\frac{YE}{YF}\cdot\frac{FD}{DA}\cdot\frac{AB}{BE}=1$

因此 $\frac{EX}{XF}=\frac{EY}{YF}$

故 $E$、$F$、$X$、$Y$ 为调和点列

于是 $AE$、$AX$、$AF$、$AY$ 为调和线束，

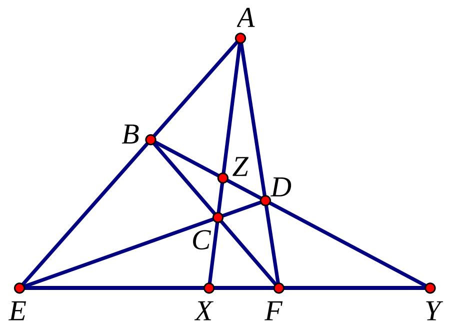
考虑直线 $BY$ 与 $AE$、$AF$、$AX$、$AY$ 交于点 $B$、$D$、$Z$、$Y$

从而 $BDZY$ 构成调和点列

于是 $EB$、$ED$、$EZ$、$EY$ 为调和线束，

考虑直线 $AX$ 与 $EB$、$ED$、$EZ$、$EY$ 的交点 $A$、$C$、$Z$、$X$.

从而 $ACZX$ 构成调和点列



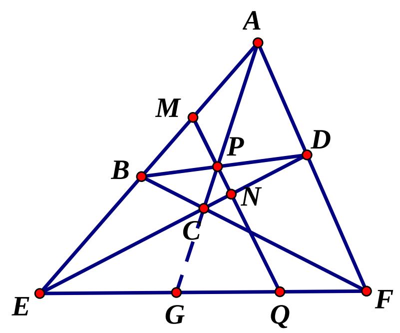

**例7.** 延长 $AC$ 交 $BD$ 于点 $G$，则 $A$、$C$、$P$、$G$ 为调和点列.

于是 $EA$、$ED$、$EP$、$EF$ 为调和线束知，

考虑直线 $MQ$ 分别交 $EA$、$ED$、$EP$、$EF$，于 $M$、$N$、$P$、$Q$

所以 $M$、$N$、$P$、$Q$ 为调和点列

从而 $\frac{1}{MP}+\frac{1}{MQ}=\frac{2}{MN}$ .

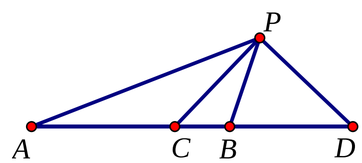



**例8.** 引理：

若 $A$、$B$、$C$、$D$ 为调和点列，

且有 $PC\perp PD$，则 $PC$，$PD$ 为 $\angle APB$ 的

内外角平分线.




回到原题：证明：延长 $AC$ 交 $EF$ 于点 $G$.

则 $A$、$C$、$P$、$G$ 为调和点列.

又有 $PO\perp GO$

因此 $OP$、$OG$ 为 $\angle AOC$ 内外角平分线.

$\angle AOP=\angle COP$ .

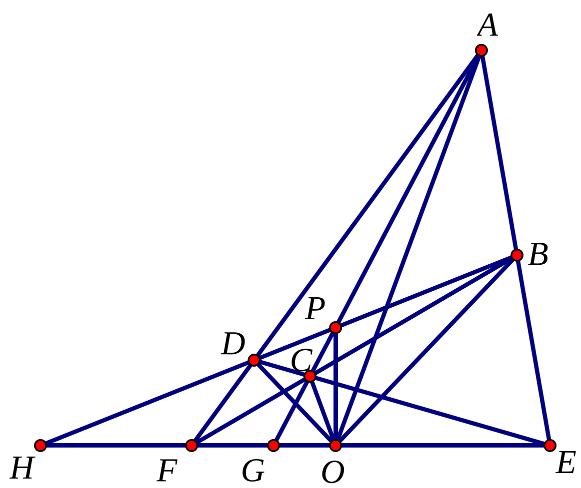
1，$BD$ 与 $EF$ 不平行

延长 $BD$、$EF$ 交于点 $H$，则有

$B$、$D$、$P$、$H$ 为调和点列.

又 $PO\perp HO$

因此，$OP$、$OH$ 为 $\angle BOD$ 的内外角平分线.



于是 $\angle BOP=\angle DOP$

作和可得 $\angle BOC=\angle AOD$．

2，若 $BD\,//\,EF$，则

$\dfrac{EF}{BD}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{EG}{BP}$，$\dfrac{EF}{BD}=\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{EG}{PD}$

由上面两个式子可以得到 $BP=PD$

又 $PO\perp EF$，所以 $PO\perp BD$

从而$\triangle BOD$ 为等腰三角形，$\angle BOP=\angle DOP$

作和可得 $\angle BOC=\angle AOD$．

综上，结论成立.