第四讲　数学归纳法

例1. 有$3\times 2017!$个点，任意三点不共线．将它们用线段两两连结起来，每条线段染上一种颜色，一共不超过 2017 种不同的颜色．求证：一定存在三个点，它们之间连线的颜色相同．

证：我们将证明：有$3\times n!$个点，任意三点不共线．将它们用线段两两连结起来，每条线段染上一种颜色，一共不超过n种不同的颜色．一定存在三个点，它们之间连线的颜色相同．

当$n=1$时，命题成立

若$n=k$时成立，考虑$n=k+1$时．

任取点A，它和其余$3\times(k+1)!-1$个点之间的连线被染成不超过$k+1$种颜色．

由抽屉原理，必有$3\times k!$个点与它连线的颜色相同．

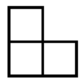
若这些点之间的连线使用该颜色，则命题成立．

若未使用该颜色，则这$3\times k!$个点之间使用了不超过k种颜色，由归纳假设，命题成立．

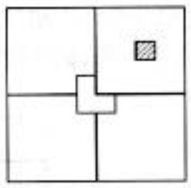
综上，对任意正整数n，命题得证．

取$n=2017$即为本题结论．

例2. 求证：在$2^n\times 2^n$的方格表中任意挖去一个小方格，剩下的部分总可以划分成若干由三个小方格组成的“L形”（如图所示）．



证：当$n=1$时，命题成立．



若$n=k$时命题成立，考虑$n=k+1$时．

如右图，将$2^{k+1}\times 2^{k+1}$的方格表划分为 4 个$2^k\times 2^k$的部分，

不妨设挖去的方格在右上部分，并在中间划分出图中的“L形”．

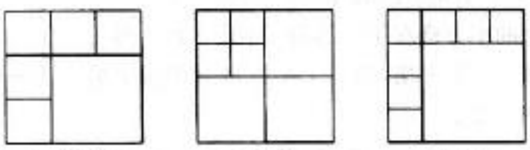
此时这 4 个$2^k\times 2^k$的部分均被挖去一个小方格．由归纳假设，它们均可划分成“L形”．

故此时命题成立．

综上，原命题得证．

例3. 对任意正整数n，$n\geq 6$，求证：每一个正方形都可以被分为n个小正方形．

证：当$n=6,7,8$时，如图，一个正方形可被分为n个小正方形，命题成立．



若$n=k$时命题成立，考虑$n=k+3$时．

先由归纳假设，将正方形划分为 k 个小正方形.

再任取一个小正方形，连结对边中点，可将其划分为 4 个小正方形.

此时原正方形一共被分为 $k+3$ 个小正方形，命题成立.

综上，对任意正整数 n，命题得证.

例4. 任给一个正整数 n，求证：n 一定可以表示成若干（可以只有 1 个）互不相同的斐波那契数之和.

注：斐波那契数是指斐波那契数列 $\{F_n\}$： $F_1=F_2=1$， $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ （ $n=1,2,\cdots$ ）中出现的数.

证：当 $n=1$ 时，命题成立.

若 $n<k$ 时命题成立，考虑 $n=k$ 时. 不妨设 $F_m\le k<F_{m+1}$.

若 $k=F_m$ ， 命题成立.

若 $k>F_m$ ，则 $0<k-F_m<F_{m+1}-F_m=F_{m-1}$ ，由归纳假设， $k-F_m$ 可以表示成若干互不相同的斐波那契数之和且这些数均小于 F_{m-1} . 于是再加上 F_m 后，这些斐波那契数的总和为 k ， 命题成立.

综上，对任意正整数 n，命题得证.

例5. 求证：任意一个真分数，均可以表示成若干个不同的正整数的倒数之和.

证：不妨假设这个真分数为 $\frac{n}{m}$ （n、m 为互质的正整数），我们对分子 n 进行归纳.

当 $n=1$ 时， $\frac{1}{m}$ 本身即为 m 的倒数，命题成立.

若 $n<k$ 时命题成立，考虑 $n=k$ 时.

注意必存在正整数 t，使得 $\frac{1}{t+1}<\frac{k}{m}<\frac{1}{t}$，此时 $\frac{k}{m}-\frac{1}{t+1}=\frac{k(t+1)-m}{m(t+1)}=\frac{k-(m-kt)}{m(t+1)}$

注意由 $\frac{k}{m}<\frac{1}{t}$ 可得 $m-kt>0$， 故 $\frac{k-(m-kt)}{m(t+1)}$ 的分子小于 k，由归纳假设，它可以表示成一些互不相同的正整数的倒数之和.

同时由 $\frac{k}{m}-\frac{1}{t+1}<\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\le\frac{1}{t+1}$ ，可知这些正整数都大于 $t+1$.

故上述正整数再加上 $t+1$ 后，其倒数之和恰好为 $\frac{k}{m}$. 命题成立.

综上，对任意正整数 n，命题得证.

例6. 设 $A_n=\left.3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\right\}n$重$3$， $B_n=\left.8^{8^{\cdot^{\cdot^{8}}}}\right\}n$重$8$. 求证： $A_{n+1}>B_n$.

证：加强命题，我们将证明： $A_{n+1}>3B_n$

当 $n=1$ 时， $A_2=27>24=3B_1$ ， 命题成立.

若 $n=k$ 时命题成立，考虑 $n=k+1$ 时.

由 $A_{k+2}=3^{A_{k+1}}>3^{3B_k}=27^{B_k}>24^{B_k}=3^{B_k}\cdot 8^{B_k}>3B_{k+1}$， 命题成立.

综上，对任意正整数 n，命题得证. 于是 $A_{n+1}>3B_n>B_n$.