第五讲 数论中的构造问题 1

例1. 即构造 $abcde=(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)(e-1)$.

为了简化问题，可设 $b=a-1,c=b-1,d=c-1,e=d-1,a=e-1$，即 $ae=(a-4)(e-1)$.

故只需 $a+4e=4$，取 $a=8,e=-1$，从而 $(a,b,c,d,e)=(8,7,6,5,-1)$.

验证 $8\times7\times6\times5\times(-1)=-1680=(8-1)\times(7-1)\times(6-1)\times(5-1)\times(-1-1)$.

故结论成立.

例2. 设 $k=[\lg n]+1$，则 $10^k>n$，则在 1234567890×10^k，$1234567890\times10^k+1$，…，$1234567890\times10^k+(n-1)$ 这连续 n 个正整数中，必有一个数为 n 的倍数，令这个数为 m，则数 m 在十进制表示下包含 0~9 这十个数字.

例3. 要使得 $p\mid(2^n-n)$，只需要 $2^n\equiv n\pmod p$，加强命题 $\begin{cases}2^n\equiv1\pmod p\\ n\equiv1\pmod p\end{cases}$ 若 $p=2$，则 n 为偶数即可. $p>2$ 时，由费马小定理，$2^{p-1}\equiv1\pmod p$，故 $p-1\mid n$ 时，均有 $2^n\equiv1\pmod p$，$\therefore$ 只需找出 n，使 $\begin{cases}n\equiv0\pmod{p-1}\\ n\equiv1\pmod p\end{cases}$ 成立，由中国剩余定理，令 $n=kp(p-1)-(p-1)$（$k\in\mathbb{N}^*$）即可.

例4. 解一：令 $1^n\equiv1,2^n\equiv2,3^n\equiv3,\cdots,m^n\equiv m\pmod p$，

即 $a_1\cdot1^n+a_2\cdot2^n+\cdots+a_m\cdot m^n\equiv a_1+2a_2+\cdots+ma_m\pmod p$.

取 p 为 $a_1+2a_2+\cdots+ma_m$ 的质因子. 由费马小定理 $a^p\equiv a\pmod p\Rightarrow a^{k(p-1)+1}\equiv a\pmod p$.

取 n 为 $n=k(p-1)+1,(k\in N^*)$.

解二：$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m>1$，故任取 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m$ 的一个质因子 p，

则 $i^p\equiv i\pmod p$，从而 $i^{p^k}=\left(i^{p^{k-1}}\right)^p\equiv i^{p^{k-1}}\equiv\cdots\equiv i\pmod p$，

于是 $a_1\cdot1^{p^k}+a_2\cdot2^{p^k}+\cdots+a_m\cdot m^{p^k}\equiv a_1+2a_2+\cdots+ma_m\equiv0\pmod p$，故取 $n=p^k$ 即可.

例5. 解一：从简单情况找规律，归纳构造，$A_1=\{1,2\}$，设取出的 2^n 个数组成集合 A_n.

当 $n=1$ 时，构造 $A_1=\{1,2\}$.

若 $n=k$ 时，满足要求的集合为 A_k，则 $n=k+1$ 时，构造 $A_{k+1}=A_k\cup\{x+3^k\mid x\in A_k\}$.

证明：当 $n=1$ 时，A_1 满足.

当 $n=k$ 时，A_k 满足.

若 $n=k$ 时，A_k 满足，考虑 $n=k+1$ 时.

若存在 $p<q<r,p,q,r\in A_{k+1}.2q=p+r$.

当 $p,q,r\in A_k$. 则与归纳假设矛盾.

当 $p,q\in A_k$， $r\in\left\{x+3^k\mid x\in A_k\right\}$.

则 $r-q\geq 1+3^k-\frac{3^k+1}{2}=\frac{3^k+1}{2}$，

$q-p\leq\frac{3^k+1}{2}-1=\frac{3^k-1}{2}<r-q$. 矛盾.

当 $p\in A_k;q,r\in\left\{x+3^k\mid x\in A_k\right\}$， $p,q,r\in\left\{x+3^k\mid x+A_k\right\}$ 均矛盾.

综上，得证.

解二：直接构造，将该数列中的每个数均减一，在该数列中取出 2^n 个数，这些数中三进制下只含数字 0、1.

例6. 解：二重数为 10^n+1 的倍数， $n=\overline{a_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_k}=\overline{a_1a_2\cdots a_k}\times\left(10^k+1\right)$，且 $\overline{a_1a_2\cdots a_k}<10^k$.

找出质数 p 使得 $p^2\mid 10^k+1$. $p=2,3,5$ 时显然不行，在 $p=7$ 时，找出 k，使得 $49\mid 10^k+1$.

$10^k\equiv -1\pmod{49}$， $10^{2k}\equiv 1\pmod{49}$， $10^{\varphi(49)}\equiv 1\pmod{49}$， $10^{42}\equiv 1\pmod{49}$.

$k=21$ 时， $10^{21}\equiv 100^{10}\cdot 10\equiv 2^{10}\cdot 10\equiv 10240\equiv -1\pmod{49}$

$\overline{a_1a_2a_3\cdots a_k}=\frac{10^{21}+1}{49}\cdot 36$， $n=\frac{36}{49}\cdot\left(10^{21}+1\right)^2=\overline{a_1a_2\cdots a_{21}a_1a_2\cdots a_{21}}$.

取 $k=21(2m+1),10^k\equiv(-1)^{2m+1}\equiv -1\pmod{49}$，

$n=\frac{36}{49}\left(10^k+1\right)^2$ 即可.

例7. 有 0 就加上一个倍数填上 0.

对 2^k 的倍数 t，若从右往左数前 s 位均不为 0，第 $s+1$ 位是 0.

构造 $t+10^s\cdot 2^k$，则该数仍为 2^k 的倍数且从右向左数前 $s+1$ 位均不为 0.

这样可以构造出 2^k 的倍数 t，从右往左数前 k 位均不为 0，设这 k 位为 $\overline{x_1x_2\cdots x_k}$.

注意 $t\equiv\overline{x_1x_2\cdots x_a}\left(\bmod 10^a\right)$，故有 $t\equiv\overline{x_1x_2\cdots x_a}\left(\bmod 2^a\right)$，

于是 $\overline{x_1x_2\cdots x_k}$ 为 2^k 的倍数且所有数字不为 0.