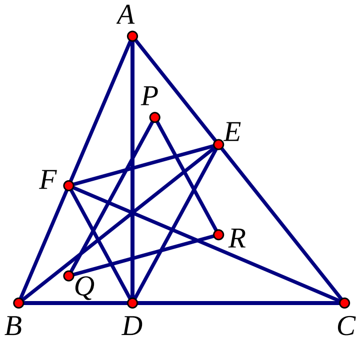
第十一讲　垂心与欧拉线

例1. $\triangle ABC$ 的三条高分别是 AD、BE、CF．$\triangle AEF$、$\triangle BDF$、$\triangle CDE$ 的垂心分别为 P、Q、R．

求证：$\triangle PQR\cong\triangle DEF$．



证明：设 ABC 垂心为 H，则 $HFQD$ 与 $HERD$ 均为平行四边形．

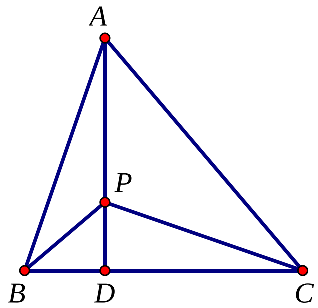
从而 $FQ\parallel HD\parallel ER$，且 $FQ=HD=ER$，故 $EFQR$ 为平行四边形，

从而 $EF=QR$，同理 $DF=PR$， $DE=PQ$．

从而 $\triangle PQR\cong\triangle DEF$．

例2. 如图，$\triangle ABC$ 中，$AB<AC$，AD 为 BC 边上的高．P 为 AD 上一点，满足 $\angle ABP=\angle ACP$．

求证：P 是 $\triangle ABC$ 的垂心．

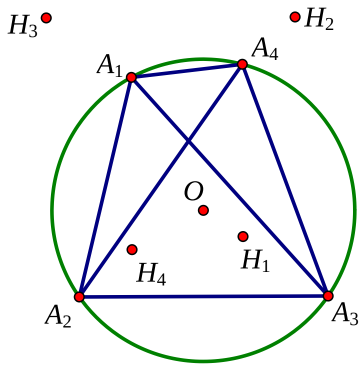


证明：作 B 关于 D 的对称点 B'，则 B' 在 DC 上，且 $ACB'P$ 四点共圆．

则 $\angle PAC=\angle PB'B=\angle PBB'$，结合 $PA\perp BC$，易知 $PB\perp AC$．

故 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心．

例3. 设 $A_1A_2A_3A_4$ 为圆 O 的内接四边形，H_1、H_2、H_3、H_4 依次为 $\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心．求证：H_1、H_2、H_3、H_4 四点共圆，并请指出该圆的圆心位置．



证明：连 A_2H_1，A_1H_2，取 A_3A_4 的中点 M，连 OM．

由常用结论知 $A_2H_1\parallel OM$，$A_2H_1=2OM$，$A_1H_2\parallel OM$，$A_1H_2=2OM$，

从而 $H_1H_2A_1A_2$ 是平行四边形，故 $H_1H_2\parallel A_1A_2$，$H_1H_2=A_1A_2$．

同理可知，$H_2H_3\parallel A_2A_3$，$H_2H_3=A_2A_3$；

$H_3H_4\parallel A_3A_4$，$H_3H_4=A_3A_4$；$H_4H_1\parallel A_4A_1$，$H_4H_1=A_4A_1$．

从而易知 $A_1H_1,A_2H_2,A_3H_3,A_4H_4$ 相互平分，从而 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $H_1H_2H_3H_4$ 中心对称，由四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 有外接圆知，四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 也有外接圆．

取 H_3H_4 的中点 M_1，作 $M_1O_1\perp H_3H_4$，且 $M_1O_1=MO$，则点 O_1 即为四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 的外接圆圆心．

例4. $\triangle ABC$ 中，O 为外心，三条高 AD、BE、CF 交于点 H，直线 ED 和 AB 交于点 M，FD 和 AC 交于点 N．求证：（1）$OB\perp DF$，$OC\perp DE$；（2）$OH\perp MN$．

证明：（1）由 $\angle AFC=\angle ADC=90^\circ$ 得 $AFDC$ 共圆，

于是 $\angle BFD+\angle OBF=\angle ACB+(90^\circ-\frac{1}{2}\angle AOB)=$

$\angle ACB+(90^\circ-\angle ACB)=90^\circ$

故 $OB\perp DF$，同理 $OC\perp DE$；

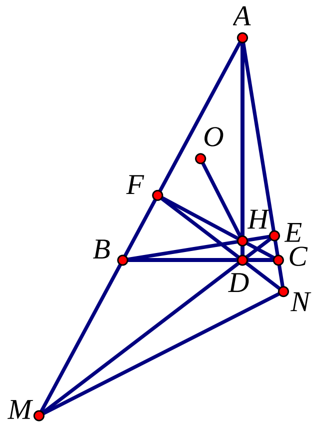
（2）由九点圆性质知△DEF 外心为 OH 中点 V.

由 $ABDE$ 共圆，得：$MD\cdot ME=MB\cdot MA$，

故 M 在圆 V 与圆 O 的根轴上；

同理 N 在圆 V 与圆 O 的根轴上；

由根轴与连心线垂直，得：$MN\perp OV$



例5. 如图，锐角△ABC 的垂心为 H，BC、CA、AB 边的中点分别为 D、E、F. 以 D 为圆心，DH 为半径的圆交 BC 于 A_1,A_2. 类似的，我们得到 B_1,B_2,C_1,C_2. 求证：A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 六点共圆.

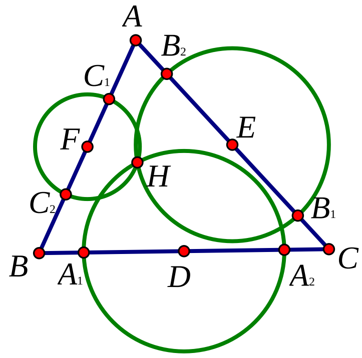
证明：取 AH 中点 P，则 $PH\,/\!/\,OD$(都与 BC 垂直)，

$PH=\frac{1}{2}AH=OD$，故 $PHDO$ 为平行四边形；

∴考虑到平行四边形四条边的平方和等于对角线平方和，

有 $OA_1^2=OD^2+DA_1^2=OD^2+DH^2=\frac{PD^2+OH^2}{2}=\frac{AO^2+OH^2}{2}$ 定值，

故 A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 六点共圆



例6. 如图，在△ABC 中，H 为垂心，M 为 BC 中点. 连结 MH，过 H 点作 MH 的垂线，分别交 AB、AC 于点 E、F. 证明：$HE=HF$.

证明：延长 HM 与外接圆交于 D，则 $HBDC$ 为平行四边形

而 H、E、B、D 共圆，H、F、C、D 共圆，

由 $\angle HED=\angle HBD=\angle HCD=\angle HFD$

故 $HE=HF$.