第三讲　质数与合数

例1. 如果一个质数既可以表示成两个质数之和，又可以表示成两个质数之差，求所有这样的质数.

解：因为此质数大于 2，所以必定为奇数.

设此质数为 p，由已知条件 $p=p_1+p_2=p_3-p_4$，考虑奇偶性，可知 p_1,p_2 中有一个等于 2，且 $p_4=2$.

不妨设 $p_2=2$，于是 $p=p_1+2=p_3-2$，可知 p,p_1,p_2 除以 3 的余数互不相同，必有一个是 3 的倍数，只能是 3．因此 $p_1=3$，即满足条件的质数只有 5.

例2. 求所有的质数 p，使得 $2p+1$ 和 $4p+1$ 都是质数.

解：考虑 p 除以 3 的余数.

若 p 除以 3 余 1，则 $2p+1$ 是 3 的倍数，且大于 3，矛盾；

若 p 除以 3 余 2，则 $4p+1$ 是 3 的倍数，且大于 3，矛盾.

因此 p 只能是 3 的倍数，于是 $p=3$，经验证，满足要求.

例3. （1）求所有的整数 n，使得 $2n^2-3n-9$ 是质数.

（2）求所有的整数 n，使得 $2n^2-3n-9$ 可表示为 p^k 的形式，其中 p 为质数，k 为正整数.

（1）解：若 $2n^2-3n-9=(2n+3)(n-3)$ 为质数，则必有 $|2n+3|=1$ 或 $|n-3|=1$，分情况讨论即得满足条件的 n 为 $n=4$ 或 $n=-2$.

（2）解：若 $2n^2-3n-9=(2n+3)(n-3)=p^k$，则有 $|2n+3|=p^\alpha$，$|n-3|=p^\beta$，

注意到 $(2n+3,n-3)=(9,n-3)\in\{1,3,9\}$

若 $(2n+3,n-3)=1$，则 $|2n+3|$ 和 $|n-3|$ 分别为 1 和 p^k，讨论可得 $n=4,-2$；

若 $(2n+3,n-3)=3$，则 $p=3$，且 $|2n+3|$ 和 $|n-3|$ 分别为 3 和 3^{k-1}，讨论可得无解；

若 $(2n+3,n-3)=9$，则 $p=3$，且 $|2n+3|$ 和 $|n-3|$ 分别为 9 和 3^{k-2}，讨论可得 $n=-6,12$.

综上，满足要求的所有整数为 4,-2,-6,12.

例4. 给定正整数 a、b 和奇质数 p，其中 a,b 满足 $(a,b)=1$．求证：$\left(a+b,\dfrac{a^p+b^p}{a+b}\right)=1$ 或 p.

解：注意到 p 为奇数，因此有 $\dfrac{a^p+b^p}{a+b}=a^{p-1}-a^{p-2}b+a^{p-3}b^2-\cdots-ab^{p-2}+b^{p-1}$，

又由 $b\equiv -a\left(\operatorname{mod} a+b\right)$ 可得 $\dfrac{a^p+b^p}{a+b}\equiv pa^{p-1}\left(\operatorname{mod} a+b\right)$，

于是 $\left(a+b,\dfrac{a^p+b^p}{a+b}\right)=\left(a+b,pa^{p-1}\right)$

再由 $(a,a+b)=(a,b)=1$，即得 $\left(a+b,pa^{p-1}\right)=(a+b,p)=1$ 或 p.

例5. （1）求证：存在连续 100 个正整数，它们都是合数.

（2）求证：存在连续 100 个正整数，它们中恰好有 5 个质数.

（1）证：考虑连续 100 个正整数 $101!+k,k=2,3,\cdots 101$.

对每个 $2\le k\le 101$，$101!+k$ 都是 k 的倍数且大于 k，因此这 100 个正整数都是合数.

（2）证：用函数 $f(n)$ 表示从 n 开始连续 100 个正整数中质数的个数.

由（1）可知 $f(101!+2)=0$.

注意到 $f(1)>5$，而对任意正整数 n，都有 $\left|f(n+1)-f(n)\right|\le 1$.

因此一定存在正整数 m，$1<m<101!+2$，使得 $f(m)=5$.

例6. （1）求证：存在无穷多个质数 p，使得方程 $x^2+x+1=py$ 有整数解 (x,y).

（2）求证：存在无穷多个质数 p，使得方程 $x^2+x+2=py$ 有整数解 (x,y).

（1）证：对 $p=3$，方程有解 $(1,1)$.

反证法，假设只有有限个质数 p 满足题目条件，设所有满足条件的质数为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，

令 $x=p_1p_2\cdots p_n>1$，任取 x^2+x+1 的一个质因子 p，

则由 $p_i\mid x$ 可知 $\left(p_i,x^2+x+1\right)=1,1\le i\le n$，因此 $p\notin\left\{p_1,p_2,\cdots,p_n\right\}$.

但对 p，题目方程有解 $\left(x,\dfrac{x^2+x+1}{p}\right)$，矛盾.

命题得证.

（2）证：对 $p=2$，方程有解 $(0,1)$.

反证法，假设只有有限个质数 p 满足题目条件，设所有满足条件的质数为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，其中 $p_1=2$，$p_2,\cdots,p_n$ 为奇数.

令 $x=4p_1p_2\cdots p_n$，则 x^2+x+2 不是 4 的倍数且大于 2，因此不是 2 的幂.

任取 x^2+x+2 的一个奇质因子 p，则由 $p_i\mid x$ 可知 $\left(p_i,x^2+x+2\right)=1,2\le i\le n$，

因此 $p\notin\left\{p_1,p_2,\cdots,p_n\right\}$.

但对 p，题目方程有解 $\left(x,\dfrac{x^2+x+2}{p}\right)$，矛盾．

命题得证．

例7. 已知质数 p 和正整数 n 满足：$\prod_{k=1}^{n}\left(k^2+1\right)$ 能被 p^2 整除．求证：$p<2n$．

证：由 $p^2\mid\prod_{k=1}^{n}\left(k^2+1\right)$ 可知存在 i 使得 $p^2\mid i^2+1$ 或存在 $i<j$ 使得 $p\mid i^2+1$ 且 $p\mid j^2+1$．

若存在 i 使得 $p^2\mid i^2+1$，则有 $p^2\le i^2+1<(i+1)^2$，因此 $p<i+1\le n+1\le 2n$．

若存在 $i<j$ 使得 $p\mid i^2+1$ 且 $p\mid j^2+1$，则 $p\mid j^2-i^2$，即 $p\mid(j-i)(j+i)$，

于是有 $p\mid j-i$ 或 $p\mid j+i$．由 $j-i<j+i<2n$ 即得 $p<2n$．

例8. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，a_{n+1} 为 $a_1a_2\cdots a_n+1$ 的最大质因子．证明：该数列中任何一项都不等于 5．

证：由定义可知 $a_2=3$，且对所有 $n\ge 3$，a_n 都是奇数且不等于 3．

反证法，假设存在 n 使得 $a_n=5$，

则 $a_1a_2\cdots a_{n-1}+1$ 的质因子只能都是 5，即 $a_1a_2\cdots a_{n-1}+1=5^m$．

但由 $a_2,\cdots,a_{n-1}$ 都是奇数可知 $a_1a_2\cdots a_{n-1}+1\equiv 3\pmod 4$，而 $5^m\equiv 1\pmod 4$，矛盾．

命题得证．