第二讲　抽屉原理应用

例1. 求证：任意 7 个正整数中一定有两个数的和或差是 10 的倍数

证：如果这 7 个数中有两个数模 10 同余，则差为 10 的倍数，结论成立.

否则它们两两模 10 不同余，根据余数情况构造抽屉（1,9），（2,8），（3,7），（4,6），（5），（0）

由抽屉原理，必有两个数在同一抽屉中，此时这两数之和为 10 的倍数.

例2. （1）从 1~100 中最多能取多少个不同的数，使得其中任意有两个数的差都不为 9？

（2）从 1~100 中最多能取多少个不同的数，使得其中任意有两个数的差都不为 5 或 8？

（1）解：最多能选出 54 个数.

将 1~18 分组：（1,10），（2,11），（3,12），（4,13），（5,14），（6,15），（7,16），（8,17），（9,18）.

可知每组中最多选 1 个数，从而 1~18 中最多选 9 个数.

类似可得到 19~36，37~54，55~72，73~90，91~100 中也都只能选 9 个数．故最多选 54 个数.

最后选出所有形如$18k+1,18k+2,18k+3,\cdots,18k+9$的数（$k\in\mathbb{N}$），可知这 54 个数满足要求.

（2）解：最多能选出 47 个数.

将 1~13 按以下顺序排成一圈：1,6,11,3,8,13,5,10,2,7,12,4,9．可以发现任意相邻两数不能同时选取，故最多能从中选 6 个数．更一般的，任意连续 13 个数中都最多只能选 6 个数.

将 1~9 分组：（1,6），（2,7），（3,8），（4,9），（5）．可知每组中最多选 1 个数，从而 1~9 中最多选 5 个数．更一般的，任意连续 9 个数中都最多只能选 5 个数.

而 1-100 可分为 8 组，前 7 组每组都为连续 13 个数，剩下一组为连续 9 个数.

故最多选出$6\times7+5=47$个数.

最后选出所有模 13 余 1、4、5、7、8、11 的数，这 47 个数满足要求.

例3. 在边长为 1 的正方形中放入有限多个圆（这些圆之间可以重叠），所有圆的周长之和为 10．求证：存在一条直线至少和其中 4 个圆相交.

证：考虑所有圆在某一边上的投影，可知总长度$=\dfrac{10}{\pi}>3$，故一定有一段区域至少重叠 4 次.

过这部分区域作与该边垂直的直线，一定与 4 个圆相交.

例4. 给定正整数 n，将圆周上的所有点染成 n 种颜色之一．求证：一定存在一个梯形，它的四个顶点颜色相同．

证：取充分小的间距，在半圆内找出依次等距的 $(n+1)(n^2+1)$ 个点．

注意任意连续 $n+1$ 个点中有两个同色，故可将这些点分成 n^2+1 组，每组都至少有一对同色点．

注意这些同色点对之间的距离只有 n 种可能，颜色也只有 n 种可能，故不同情况只有 n^2 种．

由抽屉原理，一定有两组点对之间距离相等且同色，它们即为所求梯形的顶点．

例5. 狄利克雷定理（*Dirichlet's approximation theorem*）

对任意实数 α 和正整数 N，存在整数 m、n，使得 $|n\alpha - m| < \frac{1}{N}$，且 $1 \le n \le N$．

证：考虑 0、$\{\alpha\}$、$\{2\alpha\}$、……、$\{N\alpha\}$，它们均在 $[0,1)$ 上．

将 $[0,1)$ 分为 N 个区间 $\left[0,\frac{1}{N}\right),\left[\frac{1}{N},\frac{2}{N}\right),\left[\frac{2}{N},\frac{3}{N}\right),\cdots,\left[\frac{N-1}{N},1\right)$

由抽屉原理，必有两个在同一区间内，记为 $\{i\alpha\},\{j\alpha\}$（$0 \le i < j \le N$）

于是 $|\{i\alpha\}-\{j\alpha\}| < \frac{1}{N}$，即 $|(j-i)\alpha - ([j\alpha]-[i\alpha])| < \frac{1}{N}$

令 $n = j - i$，$m = [j\alpha]-[i\alpha]$ 即可．

例6. 设整数 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 满足 $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_8 \le 21$．求证：可以从这 8 个整数中找到 4 个数 a_i,a_j,a_k,a_m（$i<j<k<m$），使得 $a_i + a_m = a_j + a_k$．

证：考虑所有形如 $d_{i,j} = a_j - a_i$（$i<j$）的数，一共有 $C_8^2 = 28$ 个．

它们只能取 1 到 20 之间的整数，故由抽屉原理，其中必有两数相等．

若存在 $d_{i,j} = d_{k,m}$（i、j、k、m 互不相同），则命题成立．

否则只需考虑 $d_{i,j} = d_{j,k}$ 的情况．不妨设相同的一组为 $d_{i_1,j_1} = d_{j_1,k_1}$．

从这 28 个数中去掉 d_{i_1,j_1}，于是剩下 27 个数，同理其中必存在 $d_{i_2,j_2} = d_{j_2,k_2}$．

依次下去，还可以找到 $d_{i_3,j_3} = d_{j_3,k_3}$，$d_{i_4,j_4} = d_{j_4,k_4}$，……，$d_{i_8,j_8} = d_{j_8,k_8}$．（这些数有可能重复）

注意此时 $j_1,j_2,\cdots,j_8$ 不能取 1 或 8，故其中必有两个相等，不妨设为 $j_1 = j_2$．

此时有 $a_{i_1} + a_{k_1} = 2a_{j_1} = a_{i_2} + a_{k_2}$．注意 i_1,i_2,k_1,k_2 互不相同，取 $\{i,j,k,m\} = \{i_1,i_2,k_1,k_2\}$ 即可．

例7. 对任意 n 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，求证：其中一定存在若干个（可以只有一个）整数，它们的和是 n 的倍数．

证：记 $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$（$1 \le k \le n$）．若 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 中若有 n 的倍数，则命题成立．

否则 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 模 n 的余数只能是 $1 \sim n-1$．由抽屉原理，必存在 $1 \le i < j \le n$，使 $S_i \equiv S_j \pmod n$．

于是 $n \mid (S_j - S_i)$，即 $a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$ 为 n 的倍数，命题成立．