第八讲　内心与内切圆

练1. △ABC 的面积和周长都被直线 l 所平分，求证：直线 l 必通过△ABC 的内心.

设 l 交 AB、AC 与 M、N，交∠A 的平分线于 I，

作 $ID\perp BC$ 于 D，$IE\perp AC$ 于 E，$IF\perp AB$ 于 F，

则 $IE=IF$，

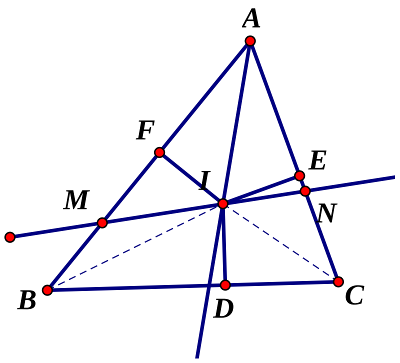
$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}p\cdot IE$.

$S_{\triangle MBI}+S_{\triangle INC}=\frac{1}{2}\left(AB+AC-p\right)\cdot IE=\frac{1}{2}\left(p-BC\right)\cdot IE$

记半周长为 p，由 l 平分周长和面积

得：$\frac{1}{2}p\cdot IE=\frac{1}{2}BC\cdot ID+\frac{1}{2}\left(p-BC\right)\cdot IE$，

于是 $ID=IE$，所以 I 是△ABC 内心.



练2. 已知△ABC 的内心为 I．P 为△ABC 内一点，满足 $\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB$.

求证：$AP\geq AI$ 且等号当且仅当 P、I 重合时取到.

由 $\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB$ 得：$\angle BPC=180^\circ-\frac{1}{2}(B+C)=\angle BIC$，

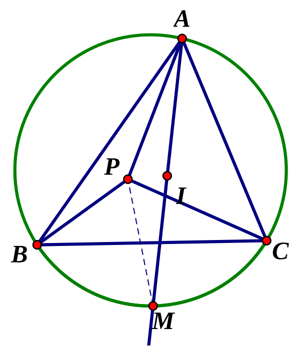
故 B、P、I、C 四点共圆.

延长 AI 交△ABC 外接圆于点 M，

则 $MI=MB=MC$，故 M 为 $BPIC$ 所在圆圆心.

$MI=MP$．由 $AP+PM\geq AM=AI+IM$，

得 $AP\geq AI$．取等号时点 P 在 AM 上，即 P、I 共线.



练3.（1）由 $\angle AIC=\angle AOC=120^\circ$，得 $AOIC$ 四点共圆，

且 $AOIC$ 外接圆半径为 R，$\angle OAI=\angle OAC-\angle IAC=30^\circ-\frac{\angle A}{2}$，

$\angle EBA=180^\circ-\angle BEA-\angle BAE=30^\circ-\frac{\angle A}{2}$，故 $IO=AE$.

（2）延长 AI 交圆 O 于 F，

记 $\theta=\angle ABE=30^\circ-\frac{A}{2}$，则 EF 为圆 O 直径，

$IO+IA+IC=AE+IA+IF=AE+AF$

$=2R\sin\theta+2R\cos\theta=2\sqrt{2}R\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

由 $0<\theta<30^\circ$，得 $2R<IO+IA+IC<\left(1+\sqrt{3}\right)R$.