第一讲　整除的基本性质

【知识点】

1、整除

对于给定的整数 a、b（$b>0$），存在唯一的整数 n 和 r，满足 $a=nb+r$ 且 $0\le r<b$．其中 r 叫做 a 被 b 除所得的余数．

当 $r=0$ 时，我们称 a 能被 b 整除，记为 $b\mid a$，此时称 a 为 b 的倍数，b 为 a 的约数．

当 $r\ne 0$ 时，我们称 a 不能被 b 整除，记为 $b\nmid a$．

利用整除的定义，我们有如下重要性质：

若 $c\mid a,c\mid b$，则对于任意整数 m、n，$c\mid ma+nb$．（即 c 整除 a、b 的任意一个“线性组合”）

2、质数与合数

对任意大于 1 的正整数 n，如果除 1 与 n 之外没有其它的正约数，那么称 n 为质数（素数）．否则称 n 为合数．这样，我们把正整数分成了三类：1，质数，合数．

质数的性质，是数论研究中最核心的内容之一，有许多与质数有关的问题目前正有待于解决．

3、算术基本定理 *Fundamental Theorem of Arithmetic*

任何大于 1 的整数都可以分解成质数的乘积，且如果不计质数的次序，这种分解是唯一的．即对任意大于 1 的正整数 n，都存在唯一的一种质因数分解形式：

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}$$

这里 $p_1<p_2<\cdots<p_k$ 为质数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为正整数．

算术基本定理又称唯一分解定理．

当 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}$ 时，我们有如下结论：

（1）n 的正约数个数 $d(n)=\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)$．

（2）n 的所有正约数之和

$$\begin{aligned}\sigma(n)&=\left(1+p_1+\cdots+p_1^{\alpha_1}\right)\left(1+p_2+\cdots+p_2^{\alpha_2}\right)\cdots\left(1+p_k+\cdots+p_k^{\alpha_k}\right)\\&=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}\end{aligned}.$$

【例题】

例1. （1）已知 x、y 为整数，$2x-3y$ 是 7 的倍数，求证：$x+2y$ 是 7 的倍数.

（2）已知 x、y 为整数，$4x-y$ 是 3 的倍数，求证：$4x^2+7xy+7y^2$ 是 9 的倍数.

（1）解：由 $7\mid(2x+3y)$，$7\mid 7y$，可得 $2x+4y=(2x-3y)+7y$ 是 7 的倍数.

即 $2(x+2y)$ 含有质因子 7．故 $x+2y$ 含有质因子 7，即 $7\mid x+2y$．

（2）解：注意 $4x^2+7xy+7y^2=(4x-y)(x+2y)+9y^2$．

由 $x+2y=(4x-y)-3x-3y$，故 $3\mid x+2y$．于是 $9\mid(4x-y)(x+2y)$，$9\mid 4x^2+7xy+7y^2$．

例2. 求最大的正整数 n，使得 $n+10\mid n^3+100$．

解：由 $n^3+1000=(n+10)(n^2-10n+100)$，知 $n+10\mid n^3+1000$．

从而 $n+10\mid(n^3+1000)-(n^3+100)$，即 $n+10\mid 900$．

所以 $n+10\le 900$，从而 $n\le 890$．

$n=890$ 时，$900\mid 704969100$，符合要求．故 n 的最大值为 890.

例3. 求出刚好含有 10 个约数的所有两位数，并求出每个数的所有约数之和.

设两位数 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 满足要求．由于 n 有 10 个约数，故 n 恰有 5 个正约数.

故 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)=5$．只可能 $\alpha_1=4$，即 $n=p^4$（p 为质数）

枚举可得 $2^4=16$，$3^4=81$，$5^4=625>100$．

故 n 只能为 16 或 81，注意到它们的所有约数之和均为 0（正约数和负约数对应为相反数）.

4、最大公约数

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\ge 2)$ 是 n 个正整数，若正整数 d 是这 n 个数中每一个数的约数，则称 d 为这 n 个正整数的公约数．所有公约数中最大的一个，称为这 n 个正整数的最大公约数，记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$．

容易看出，最大公约数有以下性质成立：

（1）若 $a\mid b$，则 $(a,b)=a$．

（2）对于任意正整数 m，$(a,b)=(a,ma+b)$．

（3）对于任意正整数 m，$(ma,mb)=m\cdot(a,b)$．

对于性质 2，m 也可以为 0 或负整数，而在性质 3 中，m 可以是负整数，但不能为 0.

若 $(a,b)=1$，则称正整数 a 和 b 互质．有如下重要性质（**裴蜀定理**）:

对正整数 a、b，若存在整数 m、n，使得 $ma+nb=1$，则有 a、b 互质.

反之，当正整数 a、b 互质时，必存在整数 m、n，使得 $ma+nb=1$.

在互质关系中，我们常常利用这些性质：

（1）若$(c,a)=1$，$c\mid ab$，则$c\mid b$．

（2）若$b\mid a,c\mid a,(b,c)=1$，则$bc\mid a$．

（3）若$(a,c)=1$，则$(a,bc)=(a,b)$．

5、最小公倍数

设$a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\geq 2)$是$n$个正整数，若正整数$d$是这$n$个正整数中每一个数的倍数，则称$d$为这$n$个数的公倍数．所有公倍数中最小的一个，称为这$n$个整数的最小公倍数，记作$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$．

常用性质：对于任意两个正整数a、b，我们有$(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b$．

例4. 计算：$(2^{200}-1,2^{88}-1)$．

引理一：若$a,m,n\in\mathbb{N}^*$，$a\geq 2$，$m\mid n$，则$(a^m-1)\mid(a^n-1)$．

设$n=mk$，则$a^n-1=(a^m)^k-1=(a^m-1)(a^{m(k-1)}+a^{m(k-2)}+\cdots+a^m+1)$．

故$(a^m-1)\mid(a^n-1)$．

引理二：若$a,m,n\in\mathbb{N}^*$，$a\geq 2$，$m>n$，则$(a^m-1,a^n-1)=(a^{m-n}-1,a^n-1)$．

$(a^m-1,a^n-1)=(a^m-1-a^{m-n}(a^n-1),a^n-1)=(a^{m-n}-1,a^n-1)$．

回到原题，有$(2^{200}-1,2^{88}-1)=(2^{112}-1,2^{88}-1)=(2^{24}-1,2^{88}-1)=(2^{24}-1,2^{64}-1)=(2^{24}-1,2^{40}-1)$

$=(2^{24}-1,2^{16}-1)=(2^8-1,2^{16}-1)=2^8-1=255$．

例5. 正整数a、b、c、d满足$ab=cd$，证明：$a+b+c+d$不是质数．

设$(a,c)=m$，则$a=mx,b=my$，其中$x,y\in\mathbb{N}^*$且$(x,y)=1$，

所以$mxb=myd$，即$xb=yd$．于是$y\mid xb$，再由$(x,y)=1$可得$y\mid b$，设$b=ny$，可得$d=nx$

于是$a+b+c+d=mx+ny+my+nx=(m+n)(x+y)$．

此时$m+n$和$x+y$均为大于1的整数，故它不是质数．

例6. 是否存在两个不同的正整数a、b，使得$[a,a+5]=[b,b+5]$？

若存在正整数a、b满足要求，则$\dfrac{a(a+5)}{(a,a+5)}=\dfrac{b(b+5)}{(b,b+5)}$．

注意$(a,a+5)=(a,5)=1$或5，$(b,b+5)=(b,5)=1$或5．

若$(a,a+5)=(b,b+5)$，则$a(a+5)=b(b+5)$，变形可得$(a-b)(a+b+5)=0$．这不可能．

若$(a,a+5)\neq(b,b+5)$，不妨设$(a,a+5)=1$，$(b,b+5)=5$．

从而$(a,5)=(a+5,5)=1$，$(b,5)=(b+5,5)=5$，于是$5\nmid[a,a+5]$但$5\mid[b,b+5]$．这不可能．

综上可知这样的正整数不存在．

例7. 求所有的正整数 a、b、c（$a<b<c$），使得其中任意两个数的乘积加 1 都能被第三个数整除.

由题意 $a\mid bc+1$，$b\mid ca+1$，$c\mid ab+1$．从而 $abc\mid(ab+1)(bc+1)(ca+1)$．

展开可得 $abc\mid ab+bc+ca+1$．于是 $abc\le ab+bc+ca+1$．

注意 $ab<bc$，$ca<bc$，故 $ab+bc+ca+1<3bc$，从而 $a<3$．

若 $a=1$，则 $b\mid c+1$，$c\mid b+1$．

于是 $c\le b+1$，再由 $c>b$ 可得 $c=b+1$，从而 $b\mid b+2$，所以 $b=2$．此时求得 $\begin{cases}a=1\\b=2\\c=3\end{cases}$．

若 $a=2$，则 $b\mid 2c+1$，$c\mid 2b+1$．

由 $c\ge b+1$ 可得 $2c\ge 2b+2>2b+1$．

故只可能 $c=2b+1$．从而 $b\mid 4b+3$，所以 $b=3$．此时求得 $\begin{cases}a=2\\b=3\\c=7\end{cases}$．

综上可得此题的两组解.