第一讲 不定方程的基本方法

练1. 原式整理得 $y=\dfrac{41x-17}{25}=2x-\dfrac{9x+17}{25}$，设 $\dfrac{9x+17}{25}=z$，可得 $x=\dfrac{25z-17}{9}=3z-2-\dfrac{2z-1}{9}$

设 $\dfrac{2z-1}{9}=w$，可得 $z=\dfrac{9w+1}{2}=4w+\dfrac{w+1}{2}$.

设 $w=2t+1$，依次可得 $z=9t+5$， $x=25t+12$， $y=41t+19$

此题要求正整数解，故 $t\in\mathbb{N}$.

练2. 原式整理得 $(x+y)(y-2)=2$，故有：$\begin{cases}x+y=1\\y-2=2\end{cases}$，$\begin{cases}x+y=2\\y-2=1\end{cases}$，$\begin{cases}x+y=-1\\y-2=-2\end{cases}$，$\begin{cases}x+y=-2\\y-2=-1\end{cases}$

依次解得 $(x,y)=(-3,4)(-1,3)(-1,0)(-3,1)$.

练3. $y=1$ 时无解.

$y\geq 2$ 时考虑模 4，右式模 4 余 1，故 x 为偶数.

设 $x=2k$ 可得 $5\cdot 2^y=3^{2k}-1=\left(3^k+1\right)\left(3^k-1\right)$

故 $3^k+1=5\cdot 2^a,3^k-1=2^b$ 或 $3^k-1=5\cdot 2^a,3^k+1=2^b$

于是 $5\cdot 2^a-2=2^b$ 或 $5\cdot 2^a+2=2^b$. 故 a、b 中必有一个为 1.

各种情况逐一试算可知 $k=2$，从而 $x=y=4$.

练4. 注意 $x=0$ 时 $y=2$， $x=1$ 时无解，而 $x\geq 2$ 时 y 为奇数.

由题可得 $(y+1)(y-1)=2^x\left(2^{x+1}+1\right)$，此时 $(y+1,y-1)=2$，故 $y+1$ 和 $y-1$ 中有一个是 2 的倍数，另一个 2^{x-1} 的倍数，设为 $k\cdot 2^{x-1}$. 整理可得 $\left(k^2-8\right)2^{x-2}=k+1$ 或 $\left(8-k^2\right)2^{x-2}=k-1$

估算大小可得 $k=3$， $x=4$.

故此题解为 $(x,y)=(0,2)(4,23)$.

练5. 设 $p-q=n$，则 $p+q=n^3$， $q=\dfrac{n^3-n}{2}=\dfrac{n(n-1)(n+1)}{2}$.

于是 q 必为 3 的倍数，故 $q=3$，从而 $p=5$.

练6. 反证，若方程存在正整数解 (x_0,y_0,z_0)，不妨设这 3 个数的最大公约数为 1.

模 3 可得 x_0 为 3 的倍数，设 $x_0=3x_1$，则 $9x_1^3-y_0^3-3z_0^3=0$.

同理模 3 可得 y_0 为 3 的倍数，设 $y_0=3y_1$，则 $3x_1^3-9y_1^3-z_0^3=0$.

再模 3 发现 z_0 为 3 的倍数，这和我们的假设矛盾，故原方程无正整数解.