第七讲　函数性质的应用

例1. 已知函数 $f(x)=x^3+\log_2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

（1）判断 $f(x)$ 的奇偶性.

（2）对于实数 a,b，若 $a+b>0$，求证：$f(a)+f(b)>0$.

解:（1）注意 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$.

且 $f(-x)=-x^3+\log_2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-x^3+\log_2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-x^3-\log_2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-f(x)$.

故 $f(x)$ 为奇函数.

（2）当 $x\geq 0$ 时，可得 $f(x)$ 单调递增.

对任意 $x_1<x_2\leq 0$，有 $-x_1>-x_2\geq 0$，故 $f(x_1)=-f(-x_1)<-f(-x_2)=f(x_2)$.

于是 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增．所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增.

由 $a+b>0$ 可得 $a>-b$，于是 $f(a)>f(-b)=-f(b)$，所以 $f(a)+f(b)>0$.

例2. 函数 $f(x)=\left|x^2-a\right|$ 在区间 $[-1,1]$ 内的最大值为 $M(a)$，求 $M(a)$ 的最小值.

解：由 $f(1)=|1-a|$，$f(0)=|a|$，故 $M(a)\geq\max\{|1-a|,|a|\}$. 于是 $M(a)\geq\dfrac{|1-a|+|a|}{2}\geq\dfrac{1}{2}|1-a+a|=\dfrac{1}{2}$.

取 $a=\dfrac{1}{2}$，注意 $y=x^2-\dfrac{1}{2}$ 在区间 $[-1,1]$ 上的值域为 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$，于是 $f(x)=\left|x^2-\dfrac{1}{2}\right|$ 的最大值为 $\dfrac{1}{2}$.

综上可知 $M(a)$ 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

例3. 若奇函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，是否存在实数 m，使 $f(\cos 2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)>0$ 对任意实数 θ 恒成立？若存在，求出 m 的范围；若不存在，说明理由.

解：由例 1 结论，知题中不等式等价于 $\cos 2\theta-3+4m-2m\cos\theta>0$.

令 $\cos\theta=t$，本题即要求 $g(t)=t^2-mt+2m-2>0$ 在 $-1\leq t\leq 1$ 时恒成立.

变形可得 $(2-t)m>2-t^2$，即 $m>\dfrac{2-t^2}{2-t}$ 在 $-1\leq t\leq 1$ 时恒成立.

由 $\dfrac{2-t^2}{2-t}=2+t-\dfrac{2}{2-t}=4-(2-t)-\dfrac{2}{2-t}\leq 4-2\sqrt{2}$，可得 m 的取值范围是 $\left(4-2\sqrt{2},+\infty\right)$.

例4. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)$ 的反函数恰为 $f^{-1}(x+1)$，且 $f(1)=4007$，求 $f(1998)$.

解：对 $y=f^{-1}(x+1)$，其反函数为 $x=f^{-1}(y+1)$，变形得 $f(x)=y+1$，即 $y=f(x)-1$.

从而得到 $f(x+1)=f(x)-1$．再由 $f(1)=4007$，可得 $f(1998)=2010$.

例5. 已知函数 $f(x)$ 满足：

① $f(0)=0$；

②对任意 $x,y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，都有 $f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$；

③当 $x\in(-1,0)$ 时，都有 $f(x)>0$.

求证：$f\left(\frac{1}{19}\right)+f\left(\frac{1}{29}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n^2+7n+11}\right)>f\left(\frac{1}{4}\right)$，其中 n 为正整数.

解：当 $x,y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，$\frac{1}{x},\frac{1}{y}\in(-1,0)\cup(0,1)$. $\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{xy}}\right)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

由条件②，可得 $x,y\in(-1,0)\cup(0,1)$ 时，$f(x)+f(y)=f$

故当 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ 时，$f(x)+f(-x)=f(0)=0$.

再由条件①，可得 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是奇函数.

结合③，可得 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<0$.

由 $f\left(\frac{1}{n^2+7n+11}\right)=f\left(\frac{(-n-4)+(n+3)}{1+(-n-4)(n+3)}\right)=f\left(\frac{1}{n+3}\right)+f\left(-\frac{1}{n+4}\right)=f\left(\frac{1}{n+3}\right)-f\left(\frac{1}{n+4}\right)$

可得 $f\left(\frac{1}{19}\right)+f\left(\frac{1}{29}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n^2+7n+11}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{n+4}\right)>f\left(\frac{1}{4}\right)$.

例6. 已知函数 $f(x)(0\le x\le 1)$ 满足如下条件：

① $f(0)=f(1)=0$；

②对任意 x、$y\in[0,1]$，$x\ne y$，均有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$.

求证：对任意 $x,y\in[0,1]$，均有 $|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}$.

证：对 $x,y\in[0,1]$，若 $|x-y|\le\frac{1}{2}$，由条件②可得 $|f(x)-f(y)|<|x-y|\le\frac{1}{2}$，命题成立.

若 $|x-y|>\frac{1}{2}$，不妨设 $x<y$，则有：

$|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(0)+f(1)-f(y)|\le|f(x)-f(0)|+|f(1)-f(y)|<x+1-y=1-(y-x)<\frac{1}{2}$.

综上即可得证.

例7. 设函数 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ 是严格递增的，且对每个 $n\in\mathbb{N}^*$，都有 $f(f(n))=kn$，这里 k 为给定的正整数.

求证：对一切 $n\in\mathbb{N}^*$，都有 $\frac{2kn}{k+1}\le f(n)\le\frac{(k+1)n}{2}$.

证：由 $f(n)$ 严格递增，可得 $1\le f(1)<f(2)<f(3)<\cdots<f(n)<\cdots$.

故比 $f(n)$ 小的正整数至少有 $n-1$ 个，于是 $f(n)\ge n$.

对任意 $m>n$，由 $f(n)<f(n+1)<f(n+2)<\cdots<f(m)$，可得 $f(m)-f(n)\ge m-n$.

所以 $f(f(n))-f(n)\ge f(n)-n$，于是 $2f(n)\le n+f(f(n))=(k+1)n$，即 $f(n)\le\frac{(k+1)n}{2}$.

再由 $kn=f(f(n))\le\frac{k+1}{2}f(n)$，整理可得 $f(n)\ge\frac{2kn}{k+1}$.

综上，不等关系得证.