第六讲　基本数字问题

例1. 一个三位数的三个数字互不相同且都不是 0，将这三个数字任意排列形成的所有三位数之和减去这个三位数，结果是 2437．原来这个三位数是多少？

解：设这个三位数为$\overline{abc}$，则$222(a+b+c)-100a-10b-c=2437$.

于是$2437+123\le 222(a+b+c)\le 2437+987$，从而得到$12\le a+b+c\le 15$.

若$a+b+c=12$，则$\overline{abc}=222\times 12-2437=227$，此时$2+2+7\ne 12$，不合题意.

若$a+b+c=13$，则$\overline{abc}=222\times 13-2437=449$，此时$4+4+9\ne 13$，不合题意.

若$a+b+c=14$，则$\overline{abc}=222\times 14-2437=671$，此时$6+7+1=14$，满足要求.

若$a+b+c=15$，则$\overline{abc}=222\times 15-2437=893$，此时$8+9+3\ne 15$，不合题意.

综上可得三位数是 671.

例2. 记$A=5555^{2000}$，A 的所有数字之和等于 B，B 的所有数字之和等于 C，C 的所有数字之和等于 D．求 D 的值.

解：由模 9 余数特征可得$A\equiv B\equiv C\equiv D\equiv 4(\bmod 9)$，此时$A<10000^{2000}=10^{8000}$，$B\le 8000\times 9=72000$，$C<7+9+9+9+9=43$，$D<4+9=13$，故$D=4$.

例3. 将正整数 N 接写在每一个正整数的右边，如果得到的新数都能被 N 整除，那么称 N 为“魔术数”，在小于 130 正整数中，“魔术数”有多少个？

解：设 N 有 k 位，则将 N 写在数字 1 的后面，得到10^k+N.

于是$N|10^k$．在小于 130 的数中，k 只能取 1、2、3.

对应的 N 为 10 的一位数约数，100 的两位数约数和 1000 的三位数约数.

此时 N 可能为 1、2、5、10、20、25、50、100、125．检验可知这些数均满足要求.

故这样的魔术数有 9 个.

例4. 将 11~99 这 89 个两位数按照任意顺序排成一列，得到一个 178 位数，求证：所得到的多位数不可能是 2 的整数次幂.

证：利用$100\equiv 1(\bmod 11)$，可得该数$\equiv 11+12+13+\cdots+99\equiv 0(\bmod 11)$.

故该多位数是 11 的倍数，所以不可能是 2 的整数次幂.

例5. 假设 1984 在 n 进制中恰好记为三位数 $\overline{abc}$． 且 $a+b+c=1+9+8+4$． 试求所有可能的 n.

解：由题意 $1984=\left(\overline{abc}\right)_n$，则 $(100)_n\le 1984<(1000)_n$，从而 $n^2\le 1984<n^3$，解得 $12\le n\le 44$．
同时由 $an^2+bn+c=1984$，得 $an^2+bn+c\equiv a+b+c\left(\bmod n-1\right)$，可得 $(n-1)|(1984-22)$．
而 $1984-22=1962=2\times 3^2\times 109$，再由 $11\le n-1\le 43$，从而只能是 $n-1=18$， $n=19$．
当 $n=19$ 时，$1984=(598)_{19}$，检验满足条件．综上所述， $n=19$．

例6. 一个正整数表示成二进制后，如果其中数字 1 出现偶数次，我们就称这样的数是“好数”．求前 2017 个“好数”总和．

解：注意 $4n,4n+1,4n+2,4n+3$ 表示成二进制后，末两位数字分别是 00、01、10、11．
故其中好数个数与总和恰占全部的一半．
于是 4 ~ 4035 中恰有 2016 个好数，且之和为 $(4+5+\cdots+4035)\div 2=4071312$．
而 1~3 中只有 3 是好数，故前 2017 个好数总和为 $3+4071312=4071315$．