第十讲　圆锥曲线的几何意义

【知识点】

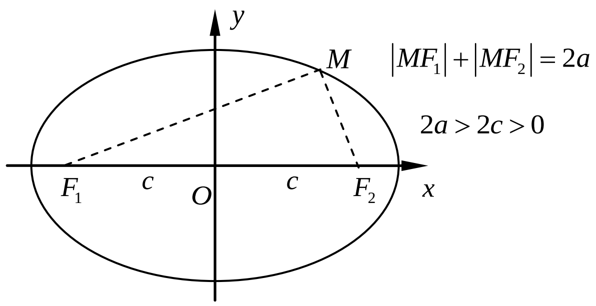
一．圆锥曲线

用一个垂直于圆锥的轴的平面截圆锥，截口曲线是一个圆．用一个不垂直于圆锥的轴的平面截圆锥，当截面与圆锥的轴夹角不同时，可以得到不同的截口曲线，它们分别是椭圆、抛物线、双曲线．因此我们通常把圆、椭圆、抛物线、双曲线统称为圆锥曲线．

二．椭圆

1．椭圆的第一定义：

平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的和等于常数（大于$|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做**椭圆**，这两个定点叫做**椭圆的焦点**，两焦点间的距离叫做**椭圆的焦距**．



在平面直角坐标系中，可以证明，焦点在 x 轴上（分别是 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$），且其上的任意一点到 F_1,F_2 的距离的和等于 $2a$（其中 $a>c>0$）的椭圆的方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ （a>b>0）$$

上面的方程称为**椭圆的标准方程**，其中 $c^2=a^2-b^2$．

该椭圆与 x 轴的两个交点为 $A_1(-a,0),A_2(a,0)$，与 y 轴的两个交点为 $B_1(0,-b),B_2(0,b)$，这四个交点叫做椭圆的**顶点**．线段 A_1A_2,B_1B_2 分别叫做椭圆的**长轴**和**短轴**，它们的长度分别等于 $2a$ 和 $2b$，a 和 b 分别叫做椭圆的**长半轴长**和**短半轴长**．

长半轴长 a 和半焦距 c 的相对大小可以刻画椭圆的扁平程度，我们把椭圆的焦距与长轴长的比 $\frac{c}{a}$ 称为椭圆的**离心率**，用 e 表示，即 $e=\frac{c}{a}$．

因为 $a>c>0$，所以 $0<e<1$．e 越接近 1，则 c 越接近 a，从而 b 越小，因此椭圆越扁；反之，e 越接近于 0，c 越接近于 0，从而 b 越接近于 a，这时椭圆就越接近于圆．

2．椭圆的第二定义：

到某定点 F 和某定直线 l 的距离之比为常数 e（$0<e<1$）的点的轨迹为椭圆．

其中 F 点叫做椭圆的**焦点**，l 叫做椭圆的**准线**，e 叫做椭圆的**离心率**.

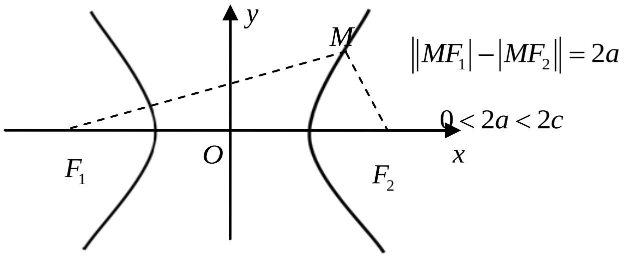
对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，左、右焦点坐标为 $(-c,0)$ 和 $(c,0)$，对应的准线 l 分别为 $x=-\frac{a^2}{c}$ 与 $x=\frac{a^2}{c}$，离心率 $e=\frac{c}{a}$.

若 $P(x,y)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）上任意一点，$F_1(-c,0),F_2(c,0)$ 是椭圆的焦点（$c>0$），e 是椭圆的离心率，则 $|PF_1|=a+e\cdot x,|PF_2|=a-e\cdot x$.

三．双曲线

1．双曲线的第一定义

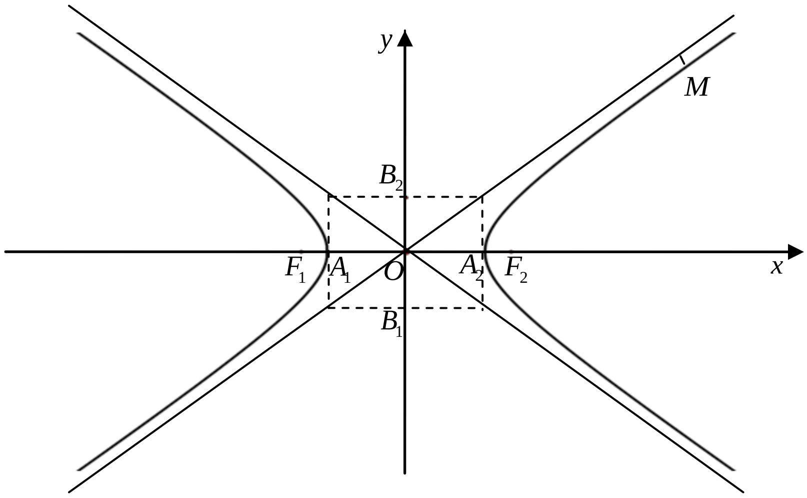
平面内与两个定点的距离的差的绝对值等于常数（小于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做**双曲线**，这两个定点叫做双曲线的**焦点**，两焦点间的距离叫做双曲线的**焦距**.



在平面直角坐标系中，可以证明，焦点在 x 轴上（分别是 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$），且其上的任意一点到 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于 $2a$（其中 $c>a>0$）的双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$$

上面的方程称为**双曲线的标准方程**，其中 $c^2=a^2+b^2$.



$A_1(-a,0),A_2(a,0)$ 是上述双曲线与 x 轴的两个交点．这两个交点叫做双曲线的**顶点**.

该双曲线和 y 轴没有交点，但我们也在 y 轴上标示出点 $B_1(0,-b),B_2(0,b)$.

线段 A_1A_2 叫做双曲线的**实轴**，它的长等于 $2a$，a 叫做双曲线的**实半轴长**；线段 B_1B_2 叫做双曲线的**虚轴**，

它的长等于 $2b$，b 叫做双曲线的**虚半轴长**.

经过 A_1,A_2 作 y 轴的平行线 $x=\pm a$．经过 B_1,B_2 作 x 轴的平行线 $y=\pm b$．四条直线围成一个矩形．矩形的两条对角线所在直线的方程是 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$．双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的各支向外延伸时，与这两条直线逐渐接近，我们把这两条直线叫做双曲线的**渐近线**．双曲线与它的渐近线无限接近，但永不相交．

与椭圆类似，双曲线的焦距与实轴长的比 $\frac{c}{a}$，叫做双曲线的**离心率**．因为 $c>a>0$，所以双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}>1$．

2．双曲线的第二定义：

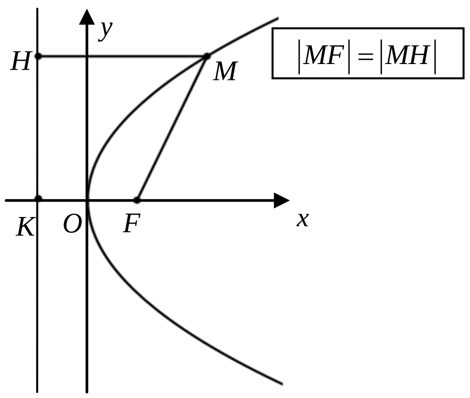
到某定点 F 和某定直线 l 的距离之比为常数 e $(e>1)$ 的点的轨迹为双曲线．其中 F 点叫做双曲线的焦点，l 叫做双曲线的准线，e 叫做双曲线的离心率．

对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，左、右焦点坐标为 $(-c,0)$ 和 $(c,0)$，对应的准线 l 分别为 $x=-\frac{a^2}{c}$ 与 $x=\frac{a^2}{c}$，离心率 $e=\frac{c}{a}$．

若 $P(x,y)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a,b>0$）上任意一点，$F_1(-c,0),F_2(c,0)$ 是双曲线的焦点（$c>0$），e 是双曲线的离心率，则 $|PF_1|=|a+e\cdot x|,|PF_2|=|a-e\cdot x|$．

四．抛物线

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l（F 不在直线 l 上）距离相等的点的轨迹叫做**抛物线**，点 F 叫做**抛物线的焦点**，直线 l 叫做**抛物线的准线**.



我们取经过点 F 且垂直于直线 l 的直线为 x 轴，垂足为 K，并使原点与线段 KF 的中点重合，建立直角坐标系 xOy.

设 $|KF|=p(p>0)$，则焦点 F 的坐标为 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线 l 的方程 $x=-\frac{p}{2}$.

可求出**抛物线的标准方程**为：

$$y^2=2px(p>0).$$

此抛物线关于 x 轴对称，我们把抛物线的对称轴叫做抛物线的**轴**.

抛物线和它的轴的交点叫做抛物线的**顶点**．此抛物线的顶点就是坐标原点．

抛物线上点 M 到焦点的距离和它到准线的距离的比叫做抛物线的**离心率**，用 e 表示，由定义知 $e=1$．

若 $M\left(x,y\right)$ 是抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$ 上任意一点，$F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 是抛物线的焦点，则 MF 称为抛物线在点 M 处的**焦半径**，$\left|MF\right|=x+\frac{p}{2}$．

五．圆锥曲线总结

	椭圆	双曲线	抛物线
定义	1：到两定点距离和为定值 2：到某定点 F 和某定直线 l 的距离之比为常数 e	1：到两定点距离差为定值 2：到某定点 F 和某定直线 l 的距离之比为常数 e	到某定点 F 和某定直线 l（F 不在直线 l 上）的距离相等
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a,b>0$）	$y^2=2px$
焦点	$F_1\left(-c,0\right)$，$F_2\left(c,0\right)$ $c^2=a^2-b^2$	$F_1\left(-c,0\right)$，$F_2\left(c,0\right)$ $c^2=a^2+b^2$	$\left(\frac{p}{2},0\right)$
离心率 e	$e=\frac{c}{a},0<e<1$	$e=\frac{c}{a},e>1$	$e=1$
准线	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$x=-\frac{p}{2}$

【例题】

例1. 设 F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P 是椭圆上一点，且 $\left|PF_1\right|:\left|PF_2\right|=2:1$．求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积．

例2. 设椭圆 Γ 的两个焦点是 F_1,F_2，过点 F_1 的直线与 Γ 交于点 P,Q．若 $\left|PF_2\right|=\left|F_1F_2\right|$，且 $3\left|PF_1\right|=4\left|QF_1\right|$，求椭圆 Γ 的短轴与长轴的比值．

例3. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，点 $F(1,0)$， $A(-1,-1)$．设 P 为椭圆 C 上的任意一点，求 $|AP|+2|PF|$ 的最小值，以及取最小值时点 P 的坐标.

例4. 双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，左、右焦点分别为 F_1,F_2，过点 F_2 作一直线与双曲线 C 的右半支交于点 P、Q，使得 $\angle F_1PQ=90°$，求 $\triangle F_1PQ$ 的内切圆半径.

例5. 已知点 P 在双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 上，并且 P 到这条双曲线的右准线的距离恰是 P 到这条双曲线的两个焦点的距离的等差中项，求点 P 的横坐标.

例6. 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，A、B 是抛物线上的两个动点，且满足 $\angle AFB=\frac{\pi}{3}$．设线段 AB 的中点 M 在 l 上的投影为 N，求 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值.