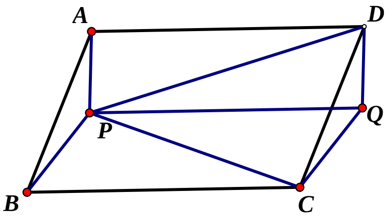
第九讲　几何变换

例1. 过点 P 作 PQ 平行等于 BC 平行等于 AD



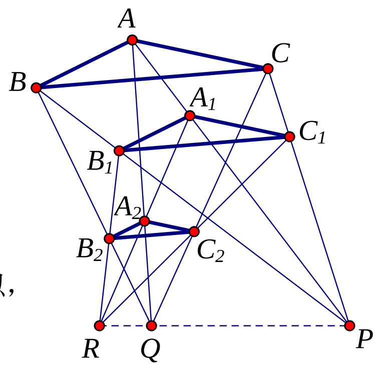
则可得平行四边形 $APQD$，与四边形 $PBCQ$ 均为平行四边形.

$\therefore \angle PAB=\angle PCB=\angle QPC$.

则可得 $PDQC$ 四点共圆，

从而 $\angle PBC=\angle PQC=\angle PDC$.

例2. （1）



$\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 平行或重合

$\triangle ABC$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 平行或重合

$\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 平行或重合，又它们不全等

因此 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 位似

（2）可推广（1）中的结论：

若三个图形 F_1 、F_2 、F_3 中满足：F_1 和 F_2 位似，F_1 和 F_3 位似，

则 F_2 和 F_3 位似.（或平移重合）

任取 F_1 中的两点 A_1 、B_1 . 在 F_2 、F_3 中的对应点为 A_2 、B_2 ，A_3 、B_3 .

对于 F_1 中的任一点 P_1 ，在 F_2 、F_3 中的对应点为 P_2 、P_3 .

则 $\triangle A_1B_1P_1$ 与 $\triangle A_2B_2P_2$ 位似，$\triangle A_1B_1P_1$ 与 $\triangle A_3B_3P_3$ 位似，

于是有 $\triangle A_2B_2P_2$ 与 $\triangle A_3B_3P_3$ 位似. 位似中心为 A_2A_3 与 B_2B_3 交点.

因此，F_2 与 F_3 位似.

下面考虑直线 PQ 和 $\triangle ABC$ 合起来得到图 Γ，

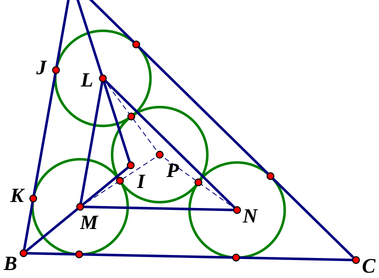
直线 PQ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 合起来得到图 Γ_1，

直线 PQ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 合起来得到图 Γ_2，

则 Γ 和 Γ_1 关于 P 位似，Γ 和 Γ_2 关于 Q 位似.

故 Γ_1 和 Γ_2 关于 R 位似，故 PQ 关于 R 位似得到本身.

于是 R 在直线 PQ 上.



例3. 连结 LM、MN、LN，同时设圆 L 和圆 M 在 AB 边上的切点分别为 J、K，则有

LJ 平行等于 MK，从而 $LMKJ$ 为平行四边形.

所以 $LM/\!/AB$，同理 $MN/\!/BC$，$LN/\!/AC$，

所以△ABC 与△LMN.

延长 AL、BM、CN 交于内心 I，

则△ABC 与△LMN 关于 I 位似.

有 P 点到 L、M、N 的距离均为两倍的圆 P 的半径.

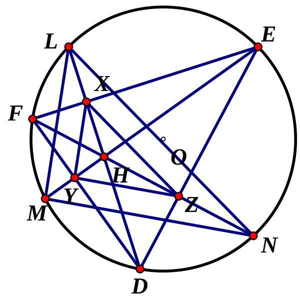
所以 P 点为△LMN 的外心．从而 P、O 恰为一组对应点 .

I、O、P 三点共线.

例4. 引理：△DEF 的三条高所在直线交外接圆于 L、M、N，则垂心 H 为△LMN 的内心，且三边分别与 D、E、F 对外接圆的切线平行.

证明：

$\angle LNF=\angle LDF=90°-\angle EFD=\angle FEM=\angle FNM$



从而，FN 平分 $\angle LNM$

同理可得，EM 平分 $\angle FED$ ，LD 平分 $\angle MLN$

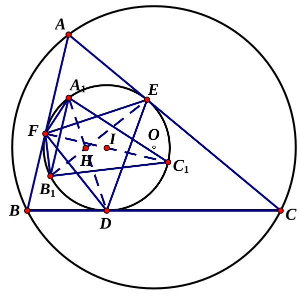
从上 H 为△LMN 的内心.

同时 $LF=FM$ ，F 为弧 LM 的中点，所以 $OF\perp LM$

LM 平行于切于点 F 的切线.

由此可知，引理得证.

回到原题，延长 DH、EH、FH 交内切圆于 A_1、B_1 、C_1 ．由引理，H 为△LMN 内心，且△LMN 三边分别与△ABC 三边平行.



于是△LMN 与△ABC 位似．注意 H、I 分别为△LMN 内心、外心，I、O 分别为△ABC 内心、外心，记位似中心为 P.

则 H、I、P 三点共线，I、O、P 三点共线.

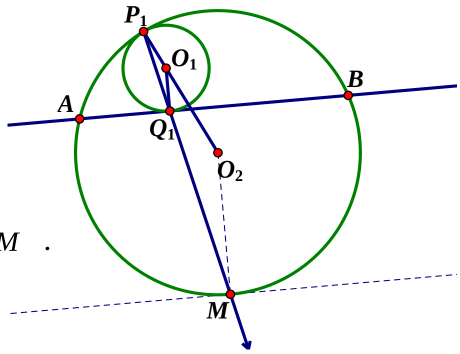
故 H、I、O 共线.

例5. 解一：记 P_1Q_1 与圆的异于 P_1 点的交点为 M.

注意到两圆关于公切点位似，从而 Q_1 与 M 为对应点.

由 $O_2M\ /\!/\ O_1Q_1$ ，$O_1Q_1\perp AB$ 得 $O_2M\perp AB$

从而 M 为弧 AB 中点.



回到原题，圆 C_1 和 C_2 与圆 O 的切点分别为 P_1 、P_2 .

圆 C_1 和 C_2 与线段 AB 的切点分别为 Q_1 、Q_2 .

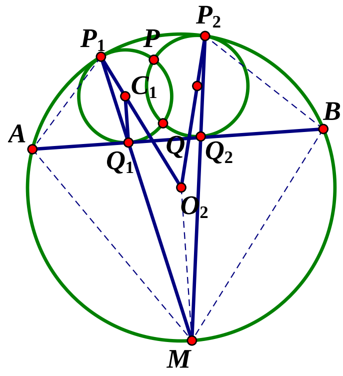
则 $\angle Q_1AM=\angle AP_1M,\angle Q_1MA=\angle AMP_1$ △ AQ_1M ≌△ P_1AM .

$MA^2=MQ_1\cdot MP_1$

同理可得 $MB^2 = MQ_2 \cdot MP_2$.

又 $MA = MB$ ，所以 $MQ_1 \cdot MP_1 = MQ_2 \cdot MP_2$，

M 在圆 C_1 和 C_2 的根轴上.



解二：作反演变换，反演中心为 M，反演系数为 MA^2.

A 变为 A，B 变为 B.

过 M 的圆变为不过 M 的直线．则圆 O 变成直线 AB

图中弧 AB 变成线段 AB

设圆 C_1 变成圆 C_1' ，则圆 C_1' 与弧 AB、线段 AB 均相切.

于是，圆 C_1' 只能为圆 C_1.（不完全严谨).

同理，圆 C_2' 也只能为圆 C_2 ．因此，P 与 Q 是反演变化的对应点.

于是，P、Q 共线.

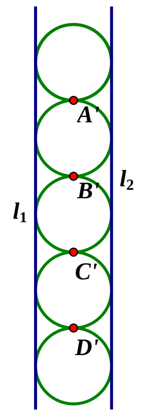
例6. 记两圆圆心分别为 O_1 、O_2 .

以 P 为反演中心作反演变换.

则圆 O_1 变为直线 l_1 ，圆 O_2 变为直线 l_2 .

则 $PQ_1 \perp l_1$ ，$PQ_2 \perp l_2$

于是 $l_1 // l_2$.



夹在两圆之间的五个圆反演之后变成另外五个圆，

都与 l_1、l_2 相切，且依次相切.

因此，这五个圆为等圆，切点 A'、B' 、C' D' 共线.

那么，A、B、C、D 在过 P 点的圆上.