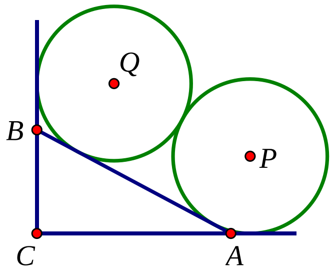
第十二讲　　几何计算问题

练1. 设半径为 r.

由勾股定理 $AB=\sqrt{30^2+16^2}=34$，故 $\sin\angle BAC=\frac{8}{17}$，

$\cos\angle BAC=\frac{15}{17}$.



于是 $\cot\angle BAP=\tan\frac{\angle BAC}{2}=\frac{\frac{8}{17}}{1+\frac{15}{17}}=\frac{1}{4}$，

类似可求得 $\cot\angle ABQ=\frac{3}{5}$. 于是 $\frac{1}{4}r+2r+\frac{3}{5}r=34$，从而 $r=\frac{680}{57}$.

练2. 设△APE、△BPF、△CPD 的面积分别为 x、y、z.

利用面积关系可得 $\frac{x}{1}=\frac{1+y}{1+z}$，$\frac{y}{1}=\frac{1+z}{1+x}$，$\frac{z}{1}=\frac{1+x}{1+y}$，

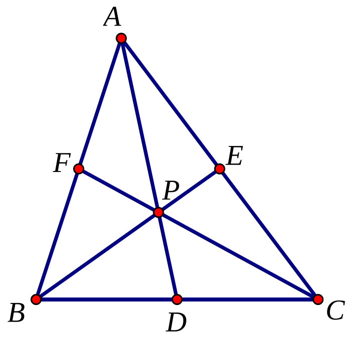
于是 $xyz=1$.

不妨 x 最小，若 $x<1$，则 $1+y<1+z$，

从而 $y<z$，$(1+z)(1+y)<(1+x)^2$，矛盾.

故 $x=y=z=1$.

$S_{\triangle ABC}=6$.

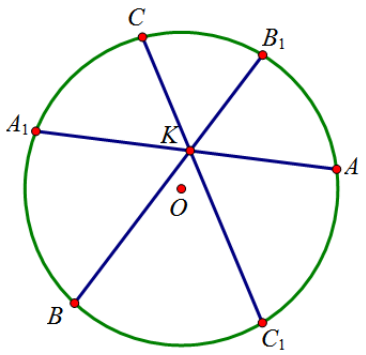


练3. 设 O 为圆心，若 O 与 K 重合，则结论显然成立.

若 O 与 K 不重合，从 O 分别向弦 AA_1,BB_1,CC_1 作垂线 OM，OP，OT.

记 $\angle OKT=\alpha$，则 $KM=KO\cos\left(60^\circ+\alpha\right)$，

$KP=KO\cos\left(60^\circ-\alpha\right)$，$KT=KO\cos\alpha$.



由于 $\cos\left(60^\circ-\alpha\right)+\cos\left(60^\circ+\alpha\right)=\cos\alpha$

于是可得 $KM+KP=KT$　　①

又 $KM=\frac{1}{2}(KA-KA_1)$　　②

且 $KP=\frac{1}{2}(KB-KB_1)$　　③

及 $KT=\frac{1}{2}(KC_1-KC)$　　④

将②③④代入①即得 $KA+KB+KC=KA_1+KB_1+KC_1$.