Propiedades básicas de polinomios simétricos elementales y polinomios simétricos completos.

Emilio Ruiz Betanzos[1] and Gonzalez Serrano Luis Angel[2]

[1]Licenciatura en Fisica y Matemáticas, ESFM IPN, eruizb2000@alumno.ipn.mx
[2]Doctor en ciencias Fisicomátematicas, Departamento de Matemáticas, ESFM IPN, lgonzalezs@ipn.mx

15 de diciembre de 2025

Resumen

Este escrito fue realizado en conjunto con el Dr. Luis Angel González Serrano. Presentaremos algunas propiedades básicas muy bien conocidas sobre polinomios simétricos elementales y polinomios simétricos completos, mostraremos sus fórmulas recursivas y la relación que hay entre estos polinomios.

Índice

1. Preliminares **2**
- 1.1. Grupo Simétrico 2
- 1.2. Acciones de Grupos 2
- 1.3. Coeficientes de Cardano-Vieta 2

2. Polinomios Simétricos **3**
- 2.1. Polinomios Simétricos Elementales 4
- 2.2. Polinomios Simétricos Completos 7

3. Apéndices **10**

A. Polinomios Simétricos Elementales en Python (enfoque combinatorio) **10**

B. Polinomio Simétricos Completos en Python (usando libreria *pysymmpol*) **11**

1. Preliminares

1.1. Grupo Simétrico

Definición 1.1. Denotamos por S_x al grupo simétrico sobre el conjunto finito $X = \{x_1 \ldots x_n\}$, definido como el conjunto de todas las biyecciones de X en sí mismo, con la operación de composición de funciones. Es decir,

$$S_X = \{\, f : X \to X \mid f \text{ es biyectiva}\}.$$

Observación 1.1. En particular, si $|X| = n$, se identifica a S_X con el grupo simétrico S_n.

1.2. Acciones de Grupos

Definición 1.2. Sea G un grupo y X un conjunto no vacío. Decimos que X es un G**-conjunto**, o bien que G **actúa sobre** X, si existe un homomorfismo:

$$\varphi : G \to S_X, \qquad g \mapsto \varphi_g.$$

Observación 1.2. La definición anterior es equivalente a la existencia de una función:

$$\phi : G \times X \to X$$

tal que se cumplen las siguientes propiedades:

$$\phi(e_G, x) = x, \quad \forall x \in X.$$

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \forall x \in X,\ \forall g, h \in G.$$

Definición 1.3. Sea G un grupo y X un G-conjunto. Para cada $x \in X$ definimos el **estabilizador de** x **en** G como:

$$\mathrm{Est}_G(x) = \{\, g \in G \mid \varphi_g(x) = x\}.$$

Si no hay confusión respecto al grupo considerado, denotaremos simplemente al estabilizador de $x \in X$ por $\mathrm{Est}(x)$. En particular, si $\mathrm{Est}(x) = G$, diremos que x **es un punto fijo**.

1.3. Coeficientes de Cardano-Vieta

Sea $p(t)$ un polinomio de grado n en la variable t de la forma:

$$p(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_0$$

Supongamos $x_1, \ldots, x_n$ sus raíces. Entonces,

$$t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_o = (t - x_1) \cdots (t - x_n)$$

Comparando ambos lados de la igualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -(x_1 + \cdots + x_n) \\
a_{n-2} &= x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n \\
&\vdots \\
a_0 &= (-1)^n(x_1 \cdots x_n)
\end{aligned}$$

2. Polinomios Simétricos

Definamos la acción del grupo S_n sobre $P[X]$, el conjunto de polinomios en las variables de X, mediante la aplicación

$$\begin{aligned}
\varphi : S_n \times P[X] &\to P[X], \qquad (1) \\
(\sigma, p) &\mapsto p(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).
\end{aligned}$$

Definición 2.1. Sea X un conjunto de variables y S_n el grupo simétrico. Decimos que un polinomio $p \in P[X]$ es **simétrico** si

$$\sigma(p(X)) = p(X), \quad \forall \sigma \in S_n.$$

El conjunto de puntos fijos de $P[X]$ bajo la acción (1) es llamado **polinomios simétricos de** X.

Al conjunto de polinomios simétricos sobre el conjunto de variables X es denotado como $\Lambda(X)$. En si mismo, este tipo de polinomios cumple con ser un sub espacio vectorial de $P[X]$. Ahora mismo, no resulta muy relevante indicar un campo sobre el cual actúa, sin embargo se suele definir sobre el campo de los racionales $\mathbb{Q}$. Notemos de igual manera que, si bien estamos trabajando en un espacio vectorial, no se asume, y es importante recordar, que las variables no cumplen conmutatividad siempre.

Ejemplo 2.1. Sea $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Consideremos los siguientes polinomios en $P[X]$:

$$\begin{aligned}
p(x_1, x_2, x_3) &= x_1, \\
q(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3, \\
r(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_2x_1.
\end{aligned}$$

Consideremos los siguientes polinomios en Veamos que $p \notin \Lambda(X)$. En efecto, pues si tomamos $\sigma = (1\ 2) \in S_3$ tenemos que:

$$\sigma(p(X)) = \sigma(x_1) = x_{\sigma(1)} = x_2 \neq p(X).$$

En cambio, nótese que cualquier permutación $\sigma \in S_3$, cumple que $\sigma(q(X)) = q(X)$, pues se cumple que:

$$\sigma(q(X)) = \sigma(x_1 + x_2 + x_3) = x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)} + x_{\sigma(3)},$$

Ya que σ es permutación, $x_{\sigma(j)} = x_{\sigma(k)}$ si y solo si $j = k$. Por lo tanto

$$x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)} + x_{\sigma(3)} = x_1 + x_2 + x_3, \ \forall \sigma \in S_3$$

Así pues, $q(X) \in \Lambda(X)$. Finalmente, veamos que $r(X)$ tiene una estructura similar a $q(X)$, sin embargo, no es simétrico para ese número de variables (por ejemplo, para $\sigma = (3\ 2\ 1)$, tenemos que $\sigma(r(X)) = x_3x_1 + x_1x_3 \neq r(X)$); de hecho, $r(X)$ es simétrico para $X = \{x_1, x_2\}$.

2.1. Polinomios Simétricos Elementales

Definición 2.2. Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de variables. Para cada $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, definimos **el polinomio simétrico elemental de grado** m como sigue:

$$e_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_m}.$$

Es decir, el polinomio simétrico elemental de grado m, es la suma de monomios homogéneos de grado m en las variables $x_1, \ldots, x_n$ (como se eligen m de las n variables, el número de sumandos es $\binom{n}{m}$"). A

Ejemplo 2.2. Los primeros polinomios simétricos elementales en las variables x_1, x_2, x_3 según la Definición 2.2 son:

$$e_0(x_1, x_2, x_3) = 1$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$e_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$$

Por convención, se define $e_0(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Sin embargo, ¿Que ocurre con $e_m(x_1, \ldots, x_n)$ cuando $m > n$? Como ya mencionamos anteriormente, el número de sumandos en $e_m(x_1, \ldots, x_n)$ es de $\binom{n}{m}$, lo cual esta solamente definido para los casos donde $n \geq m$, por lo cual, se define como $e_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$ para $m > n$. Por lo tanto en el ejemplo anterior, $e_4(x_1, x_2, x_3) = 0$.

A continuación daremos una de las propiedades mas importantes de los polinomios simétricos elementales, así como su deducción a partir de diferentes enfoques matemáticos.

Proposición 2.1. *Sean $x_1, \ldots, x_{n+1}$ variables y $m, n \in \mathbb{N}$ $(m \leq n)$, entonces:*

$$e_{m+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = e_{m+1}(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1}e_m(x_1, \ldots, x_n)$$

Demostración. La demostración se realizará desde un enfoque combinatorio. Observamos que

$$e_{m+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_{m+1}\leq n+1} x_{j_1}\cdots x_{j_{m+1}}.$$

La idea intuitiva es, separar la suma en aquellos términos que tengan como factor común a x_{n+1} (de la Definición 2.2, sabemos que existen dichos términos). Separar un factor común de x_{n+1} se podría hacer limitando los valores de $j_k \leq n$ para $k \in \{1,\ldots,m+1\}$, por lo que:

$$\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_{m+1}\leq n+1} x_{j_1}\cdots x_{j_{m+1}} = \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_{m+1}\leq n} x_{j_1}\cdots x_{j_{m+1}} + r(x_1,\ldots,x_{n+1}) \tag{2}$$

Con $r(x_1,\ldots,x_{n+1})$ un polinomio que contiene todos los términos con factor común x_{n+1}, mas aún, este será una suma de aquellos términos con factor común x_{n+1}, y, por ello, sus variables se verán limitadas de la forma $j_k \leq n$ para $k \in \{1,\ldots,m\}$. Por lo tanto (5) se convierte en:

$$\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_{m+1}\leq n+1} x_{j_1}\cdots x_{j_{m+1}} = \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_{m+1}\leq n} x_{j_1}\cdots x_{j_{m+1}} + x_{n+1}\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_m\leq n} x_{j_1}\cdots x_{j_m} \tag{3}$$

$$\Rightarrow e_{m+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = e_{m+1}(x_1,\ldots,x_n) + x_{n+1}e_m(x_1,\ldots,x_n) \tag{4}$$

□

En el Apéndice [B] se integra un código en Python el calculo de polinomios simétricos de cualquier orden y conjunto de variables desde el punto de vista combinatorio. Ahora daremos un enfoque recursivo sobre la construcción de este tipo de polinomios.

Definición 2.3. Definimos la **función generadora de polinomios simétricos elementales** como sigue:

$$E(x_1,\ldots,x_n)(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} e_j(x_1,\ldots,x_n)t^j$$

Podemos ver la definición anterior como un polinomio de variable t cuyos coeficientes son los polinomios simétricos, similar a una combinación lineal de los polinomios simétricos elementales. Notemos además que, la suma contiene tantos sumandos como enteros (una infinidad), sin embargo, sabemos que para valores $j > n$, $e_j(x_1,\ldots,x_n) = 0$, por lo tanto, podemos reescribir la Definición 2.3 como:

$$E(x_1,\ldots,x_n)(t) = \sum_{j=0}^{n} e_j(x_1,\ldots,x_n)t^j \tag{5}$$

Desarrollemos la expresión (5) para $n+1$ y recordando el resultado de la Proposición 2.1.

$$\begin{aligned}
E(x_1,\ldots,x_{n+1})(t) &= \sum_{j=0}^{n+1} e_j(x_1,\ldots,x_{n+1})t^j \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n+1} e_j(x_1,\ldots,x_{n+1})t^j \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n+1} [e_j(x_1,\ldots,x_n) + x_{n+1}e_{j-1}(x_1,\ldots,x_n)]t^j \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n+1} e_j(x_1,\ldots,x_n)t^j + x_{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} e_{j-1}(x_1,\ldots,x_n)t^j
\end{aligned}$$

Ya que $e_{n+1}(x_1,\ldots,x_n) = 0$ y ademas $1 = e_0(x_1,\ldots,x_n)t^0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{j=1}^{n+1} e_j(x_1,\ldots,x_n)t^j + x_{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} e_{j-1}(x_1,\ldots,x_n)t^j &= \sum_{j=0}^{n} e_j(x_1,\ldots,x_n) + x_{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} e_{j-1}(x_1,\ldots,x_n)t^{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} e_j(x_1,\ldots,x_n) + x_{n+1}t\sum_{j=0}^{n} e_j(x_1,\ldots,x_n)t^j \\
&= E(x_1,\ldots,x_n)(t) + x_{n+1}tE(x_1,\ldots,x_n)(t) \\
&= (1 + x_{n+1}t)E(x_1,\ldots,x_n)(t)
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos enunciar este resultado.

Proposición 2.2. *Sea*

$$E(x_1,\ldots,x_{n+1})(t) = \sum_{j=0}^{n+1} e_j(x_1,\ldots,x_{n+1})t^j$$

la función generadora de polinomios simétricos elementales para $n+1$ variables, entonces.

$$E(x_1,\ldots,x_{n+1})(t) = (1 + x_{n+1}t)E(x_1,\ldots,x_n)(t)$$

Demostración. La demostración es todo el desarrollo anterior. □

Gracias al resultado de la Proposición 2.2, podemos dar una equivalencia en la Definición 2.3.

Proposición 2.3. *La función generadora $E(x_1,\ldots,x_n)$ puede escribirse como:*

$$E(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{j=1}^{n}(1 + x_jt)$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número de variables n. Veamos que para

$k = 1$ se tiene que:

$$E(x_1)(t) = \sum_{j=0}^{1} e_j(x_1)t^j$$
$$= 1 + x_1 t$$

Supongamos el resultado para $k = n$, es decir.

$$E(x_1, \ldots, x_n)(t) = \prod_{j=1}^{n} (1 + x_j t)$$

Ahora bien, retomando el resultado de la Proposición 2.2.

$$\begin{aligned} E(x_1, \ldots, x_{n+1})(t) &= (1 + x_{n+1}t)E(x_1, \ldots, x_n)(t) \\ &= (1 + x_{n+1}t) \prod_{j=1}^{n} (1 + x_j t) \\ &= \prod_{j=1}^{n+1} (1 + x_j t) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la proposición se cumple para $k = n+1$ y luego para cualquier $n \in \mathbb{N}$, completando la prueba. $\square$

2.2. Polinomios Simétricos Completos

Como mencionamos anteriormente, no se asume la conmutatividad de las variables sobre las cuales se definen los polinomios simétricos elementales, además, no se han considerando aquellos casos donde las variables utilizadas se repiten. Para ello, definamos otro tipo de polinomio simétrico.

Definición 2.4. Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de variables y $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, definimos **el polinomio simétrico completo de grado** m como:

$$h_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_m \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_m}$$

Observación 2.1. Notemos que la Definición 2.5 admite repeticiones en las variables de cada sumando, y asumiendo la conmutatividad de estas mismas, podemos reescribir el polinomio simétrico completo de grado m como:

$$h_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{k_1 + \cdots + k_m = m \\ k_1, \ldots, k_m \geq 0}} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m} \tag{6}$$

No resulta tan complicado notar la similitud en las Definiciones 2.5 y 2.2. Esto no es ninguna coincidencia, pues mas adelante daremos algunas propiedades de los polinomios simétricos completos que guardan estrecha relación con los polinomios simétricos elementales; de hecho,

algunas demostraciones serán mediante procedimientos análogos.
Nuevamente, por convención, se define $h_0(x_1, \ldots, x_n) = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.3. Para las variables x_1, x_2, x_3 los primeros polinomios simétricos completos son:

$$h_0(x_1, x_2, x_3) = 1$$

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$h_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

Retomando el mismo cuestionamiento que con los polinomios simétricos elementales, podemos preguntarnos cuantos sumandos tendrá la Definición 2.5.Notemos que a diferencia de los polinomios simétricos elementales, $h_m(x_1, \ldots, x_n)$ esta bien definido para valores $m > n$, y lo que crea la diferencia en este caso son los valores para j_k, pues pueden tomar el valor de 0 o bien repetirse para todo $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Entonces, tenemos n formas de elegir elementos entre 0 y n con libertad de repetición, por lo tanto existen $n+m-1$ elementos los cuales podemos elegir; siendo así $\binom{m+n-1}{n}$ el número de sumandos para $h_m(x_1, \ldots, x_n)$ (este número coincide con el número total de particiones para cada $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ que incluyen al 0, véase (6)).

De manera análoga y teniendo como referencia a los polinomios simétricos elementales, daremos una herramienta similar a la función generadora para los polinomios simétricos completos que facilitara su manejo.

Definición 2.5. La función generadora de polinomios simétricos completos se define como:

$$H(x_1, \ldots, x_n)(t) = \sum_{j \geq 0} h_j(x_1, \ldots, x_n)t^j$$

A diferencia de la función generadora para polinomios simétricos elementales, $H(x_1, \ldots, x_n)$ puede verse como un polinomio en la variable t con coeficientes $h_j(x_1, \ldots, x_n)$ para $j \geq 0$, por lo que contiene infinitos términos y no puede ser reescrita como una suma acotada.

Proposición 2.4. *Sean $x_1, \ldots, x_{n+1}$ variables. Entonces, se cumple que:*

$$H(x_1, \ldots, x_n)(t) = (1 - x_{n+1}t)H(x_1, \ldots, x_{n+1})(t)$$

Demostración. Sabemos que:

$$\begin{aligned}
H(x_1,\ldots,x_{n+1})(t) &= \sum_{j\geq 0} h_j(x_1,\ldots,x_{n+1})t^j \\
&= 1+\sum_{j\geq 0} h_{j+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})t^{j+1} \\
&= 1+\sum_{j\geq 0}[h_{j+1}(x_1,\ldots,x_n)+x_{n+1}h_j(x_1,\ldots,x_{n+1})]t^{j+1} \\
&= \sum_{j\geq 0} h_{j+1}(x_1,\ldots,x_n)+x_{n+1}t\sum_{j\geq 0} h_j(x_1,\ldots,x_{n+1})t^j \\
&= H(x_1,\ldots,x_n)(t)+x_{n+1}H(x_1,\ldots,x_{n+1})(t)
\end{aligned}$$

□

Analicemos la demostración de la Proposición 2.4. Notemos que la propiedad:

$$h_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)=h_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)+x_{n+1}h_m(x_1,\ldots,x_{n+1}) \tag{7}$$

Fue utilizada sin haberla demostrado con anterioridad. A partir de este momento, es importante notar la similitud que comparten los polinomios simétricos completos y elementales, pues las demostraciones y propiedades que tiene cada uno de ellos, son bastante similares; en este caso, podemos recurrir a la Proposición 2.1 para demostrar (7).

Así, un cuestionamiento valido de hacerse, es acerca de la "jerarquía"de la Proposición 2.1 y de la propiedad (7), pues en el caso de polinomios simétricos elementales, se demostró antes de definir su función generadora, caso contrario a los polinomios simétricos completos, donde primero definimos la función generadora, y con ella pudimos dar esta propiedad.

Para poder dar una explicación a esta aparente paradoja, analicemos la construcción y propiedades de las funciones generadoras para ambos tipos de polinomios.

Proposición 2.5. *La función generadora $H(x_1,\ldots,x_n)(t)$ puede reescribirse como:*

$$H(x_1,\ldots,x_n)(t)=\prod_{j=1}^{n}(1-x_jt)^{-1}$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número de variables. Para $k=1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
H(x_1)(t) &= \sum_{j\geq 0} h_j(x_1)t^j \\
&= \sum_{j\geq 0}(x_1t)^j \\
&= \frac{1}{1-x_1t}
\end{aligned}$$

Luego, como hipótesis de inducción supongamos el resultado para $k = n$. Finalmente, usando el resultado de la Proposición 2.4 tenemos que:

$$\begin{aligned} H(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= \frac{H(x_1, \ldots, x_n)}{1 - x_{n+1}t} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^{n} (1 - x_j t)^{-1}}{1 - x_{n+1}t} \\ &= \prod_{j=1}^{n+1} (1 - x_j t)^{-1} \end{aligned}$$

Asi se cumple para todo $k \in \mathbb{N}$, terminando la prueba. $\square$

Retomando el apartado de Preliminares 1.3, podemos notar que la construcción de la función generadora para los polinomios simétricos elementales tiene cierta similitud con los coeficientes de Cardano-Vieta del polinomio en la variable t que representa. En efecto, véase que al igualar los coeficientes de $E(x_1, \ldots, x_n)(t)$ y del polinomio utilizado los coeficientes de Cardano-Vieta, se tiene que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple:

$$e_j(x_1, \ldots, x_n) = a_{n-j}$$

De este modo hemos respondido a la pregunta que se dejo anteriormente; indicando que, los resultados de la Proposición 2.1 y (7) son invariantes bajo la definición que se utilice para ambos tipos de polinomios, es decir, es una propiedad cuya interpretación combinatoria, recursiva y algebraica es *equivalente*. Mas aún, el siguiente resultado muestra la estrecha relación que aguarda entre si la construcción de ambas formulas y su motivación.

Proposición 2.6. *Sean $x_1, \ldots, x_n$ variables, entonces:*

$$E(x_1, \ldots, x_n)(-t)(H)(x_1, \ldots, x_n)(t) = 1$$

Demostración. Basta con sustituir en el resultado de la Proposición 2.3, $t \mapsto -t$, y comparar con el resultado obtenido en la Proposición 2.6 para ver que son inversos. $\square$

3. Apéndices

A. Polinomios Simétricos Elementales en Python (enfoque combinatorio)

```
    # GIVEN A LIST OF VARIABLES, RETURNS THE PRODUCT
def mk_prdct(s) :
    term = ''
    for j in s :
        term += f'x{j}'
    return term
```

```


# CREATE THE ELEMENTAL SYMETRIC POLYNOMIAL OF GRADE m IN THE VARIABLES
    "X={x_{1},...,x_{n}}"
def mk_se_pol(m, x) :
    n = len(x)
    e_m = f'e_{m}='
    if m < 0 or m > n :
        # e_{0} = 1
        e_m += '1'
        return e_m
    # ONLY THE TERMS WITH m FACTORS
    factors = [f for f in get_subsets(x) if len(f) == m]
    k = 0
    for s in factors :
        e_m += mk_prdct(s)
        k+=1
        if k != len(factors) :
            e_m += '+'
    return e_m


# RETURN THE POWER SET OF THE SET X
def get_subsets(x) :
    n = len(x)
    subsets = []
    for j in range(2**n) :
        pj = []
        for k in range(n) :
            if j >> k & 1 :
                pj.append(x[k])
        subsets.append(pj)
    return subsets
```

B. Polinomio Simétricos Completos en Python (usando libreria *pysymmpol*)

```
from pysymmpol import create_miwa, HomogeneousPolynomial

# CREATE THE DISCRETE VARIABLES x1,x2,x3
# YOU CAN CHANGE THE VALUES OF m AND n
n = 3
homogeneous = [sy.HomogeneousPolynomial(i) for i in range(n+1)]

m = 2
x = np.array(sp.symbols(f'x1:{m+1}'))

```

```
t = {j: sum(x**j)/j for j in range(1, n+1)}
for a in homogeneous:
    display(a.explicit(t, True))
```