定性和半定量物理学 01：标度律

Order-of-Magnitude Physics 01: Scaling Laws

Lile Wang 王力乐

KIAA/PKU

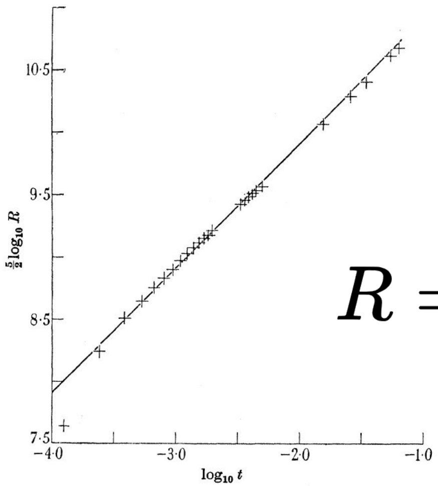
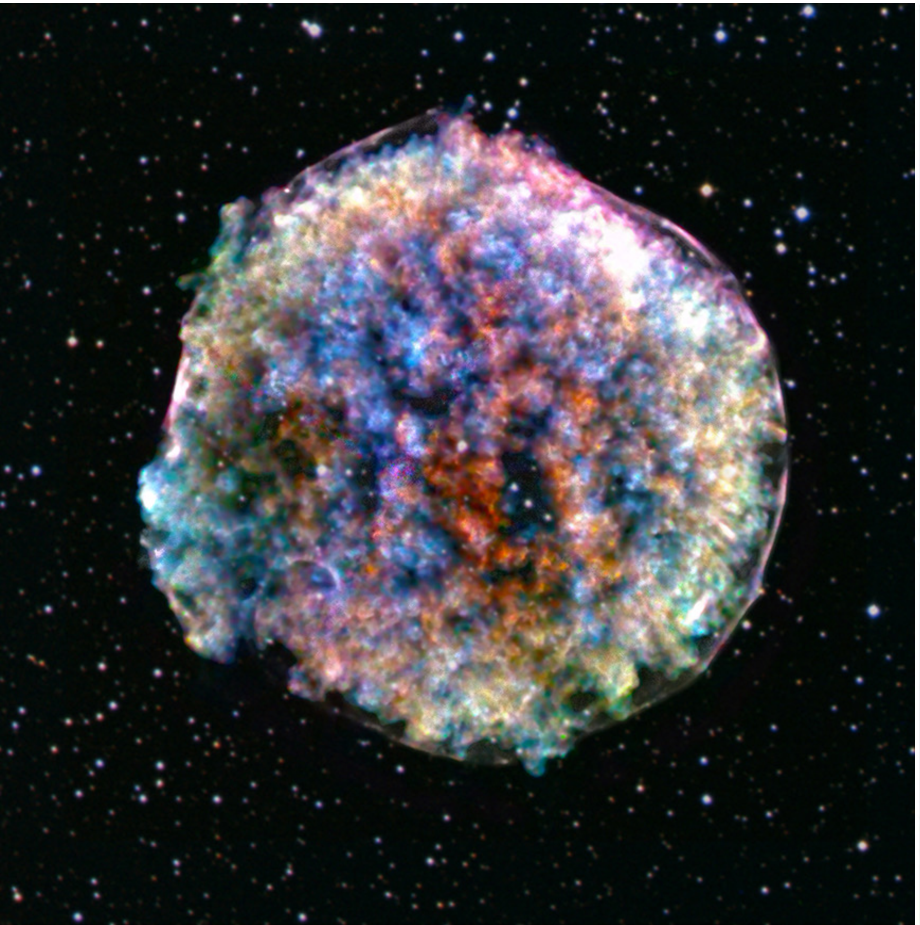
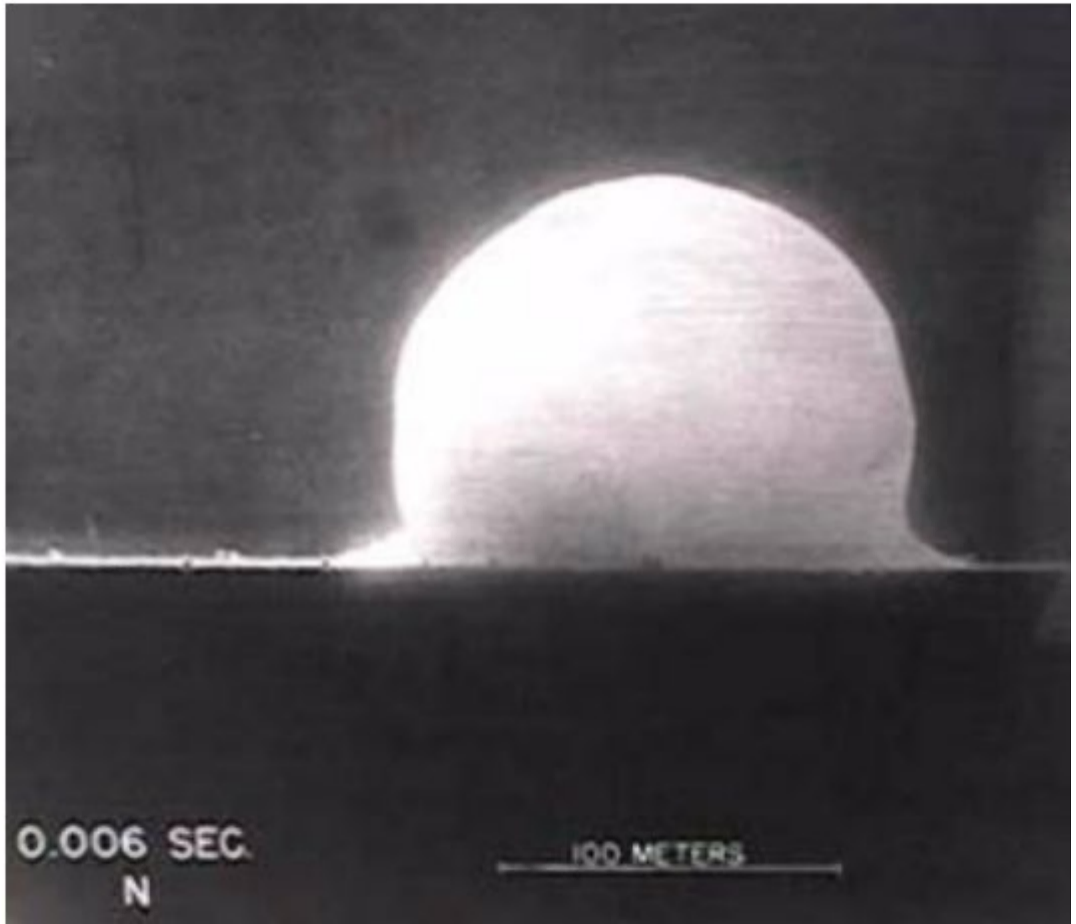
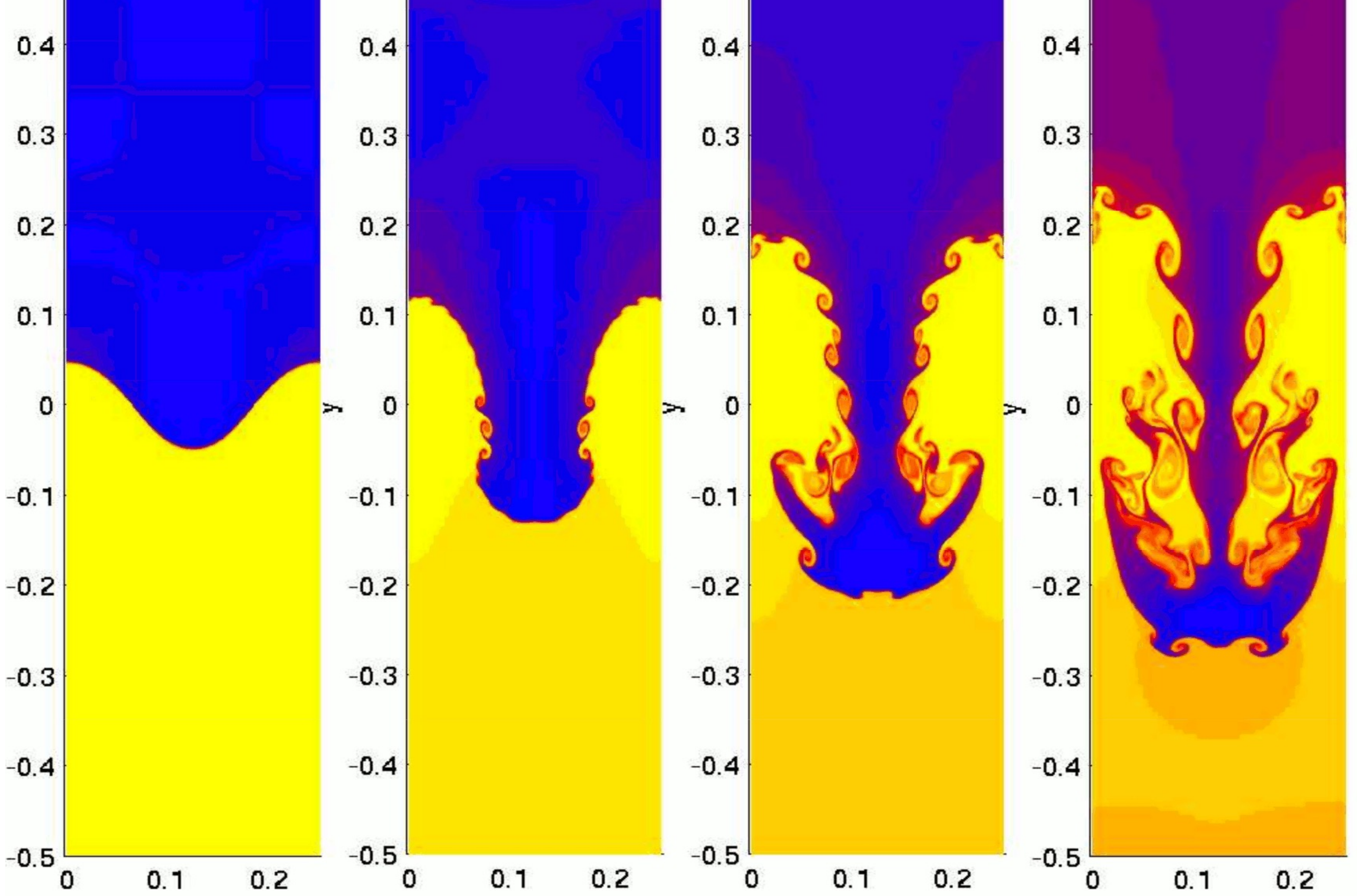


FIGURE 1. Logarithmic plot showing that $R^{\frac{5}{2}}$ is proportional to t.

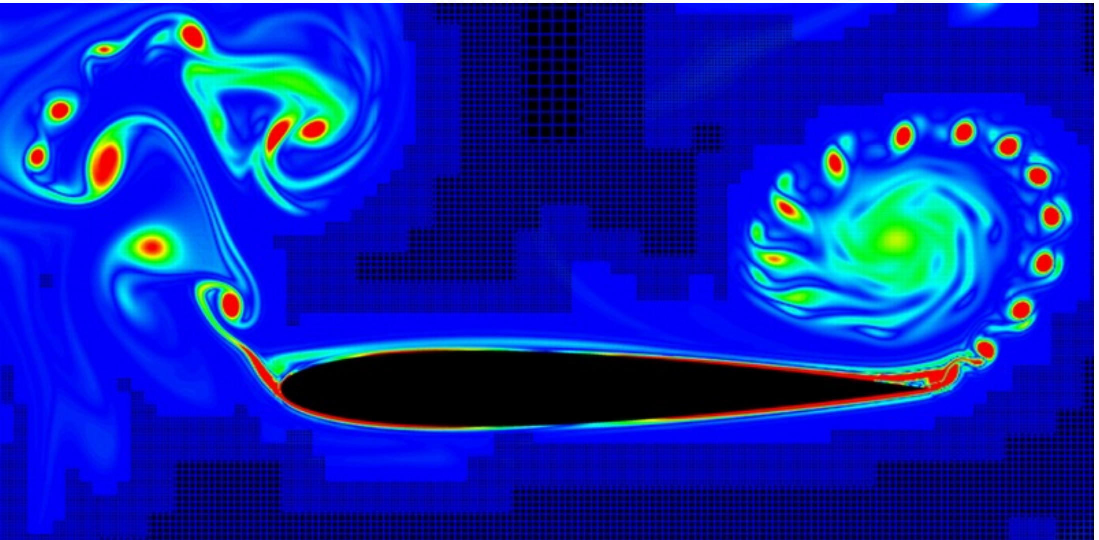
$$R = \beta\left(\frac{Et^2}{\rho_0}\right)^{1/5}$$

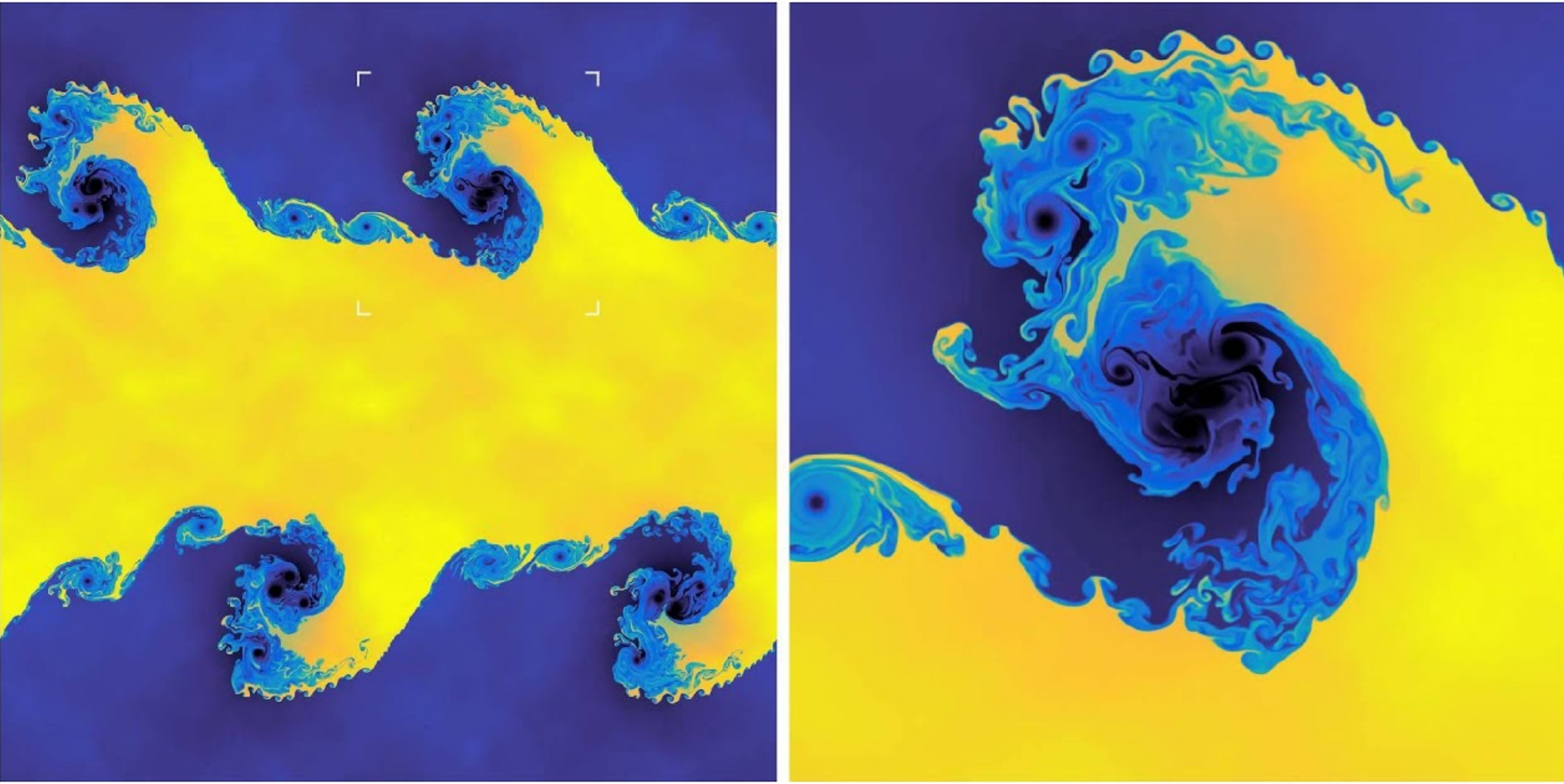






0.4 0.3 0.2 0.1 0 -0.1 -0.2 -0.3 -0.4 -0.5
0 0.1 0.2
0.4 0.3 0.2 0.1 0 -0.1 -0.2 -0.3 -0.4 -0.5
y
0 0.1 0.2
0.4 0.3 0.2 0.1 0 -0.1 -0.2 -0.3 -0.4 -0.5
y
0 0.1 0.2
0.4 0.3 0.2 0.1 0 -0.1 -0.2 -0.3 -0.4 -0.5
y
0 0.1 0.2



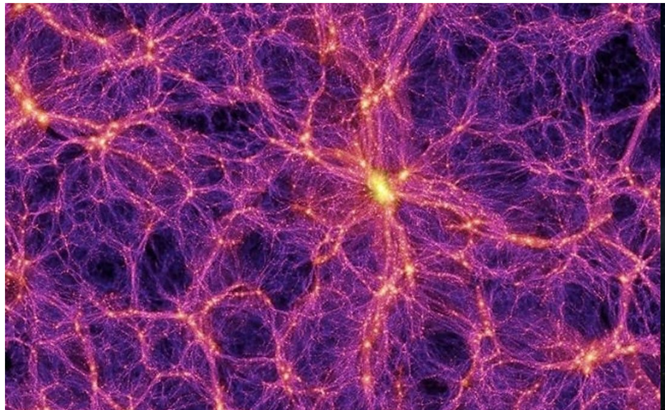


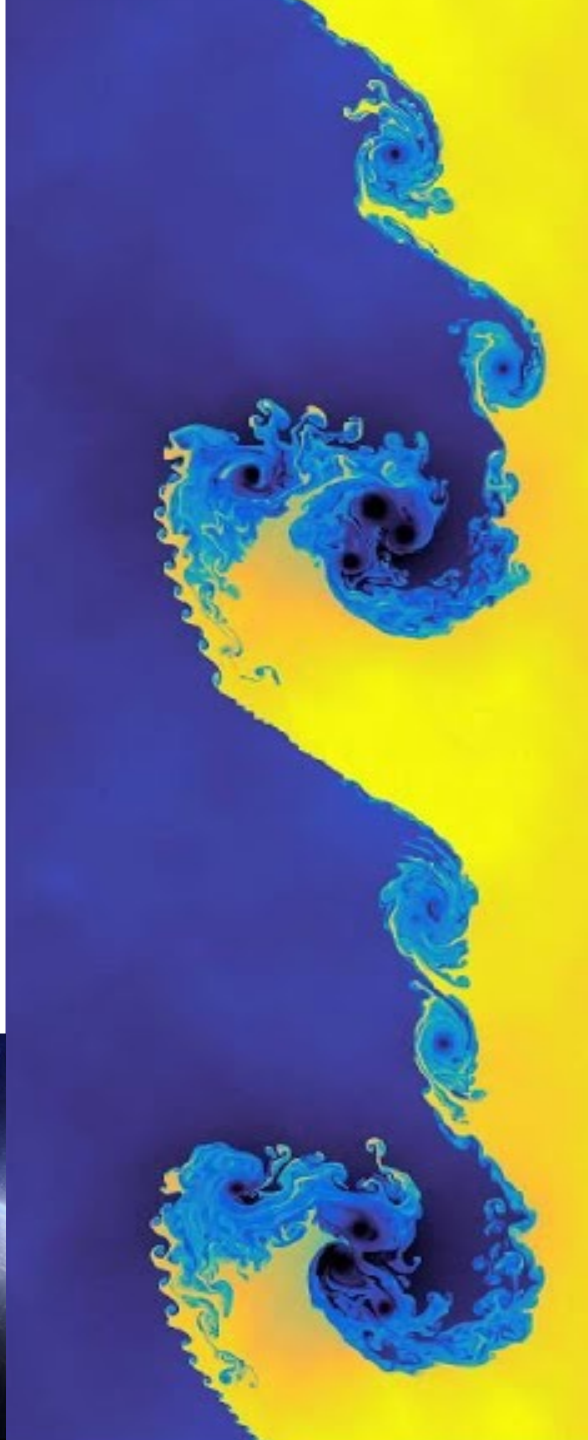
安德烈·尼古拉耶维奇·柯尔莫哥洛夫（1903--1987），苏联人

- 现代公理化概率论和统计学的奠基人
- 现代信息论的奠基人之一
- 在拓扑学方面也做出了重大贡献
- 泛函分析、逻辑学、动力系统、遗传学、气象学、弹道学、材料学（金属晶相）
- “我来苏联的一个特别目的是确定柯尔莫哥洛夫到底是一个人还是一个研究机构。”
- 今天只稍微说说他对湍流的贡献

如何表征湍流的性质？

- 将速度分布拆分成 $u = \langle u \rangle + \delta u$
- 总体平均速度 $\langle u \rangle$ 可消去（伽利略：我的我的！）
- δu：速度的“脉动分量”（其他物理量也有脉动分量）
- $\langle \delta u \rangle$ 是“平凡”的——按定义，数值一直为零
- $\langle \delta u^2 \rangle$ 稍好一些，但也太浪费信息了吧？
- $\xi(\vec{r}) \equiv \langle \delta u(\vec{x}) \delta u(\vec{x} + \vec{r}) \rangle_{\vec{x}}$ 才是最有效的表征方式，称为“两点相关函数”
- 从城市分布到大尺度结构

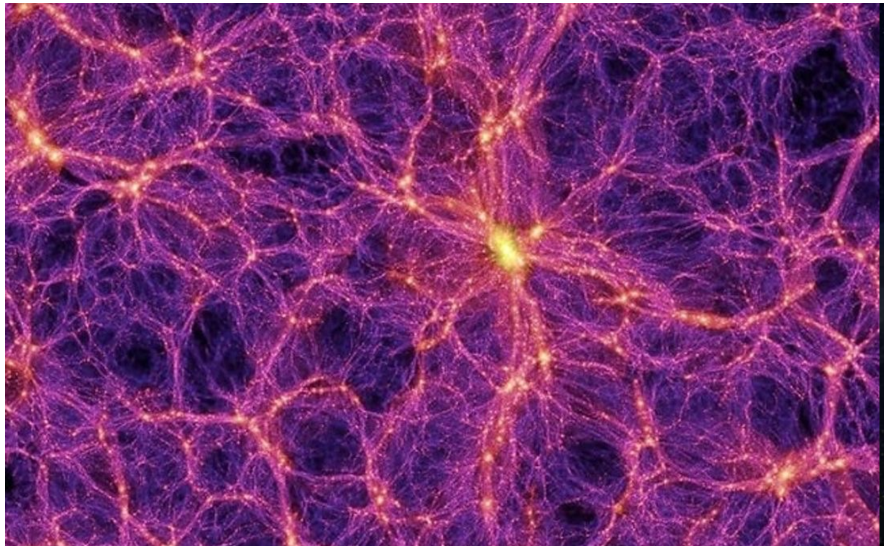


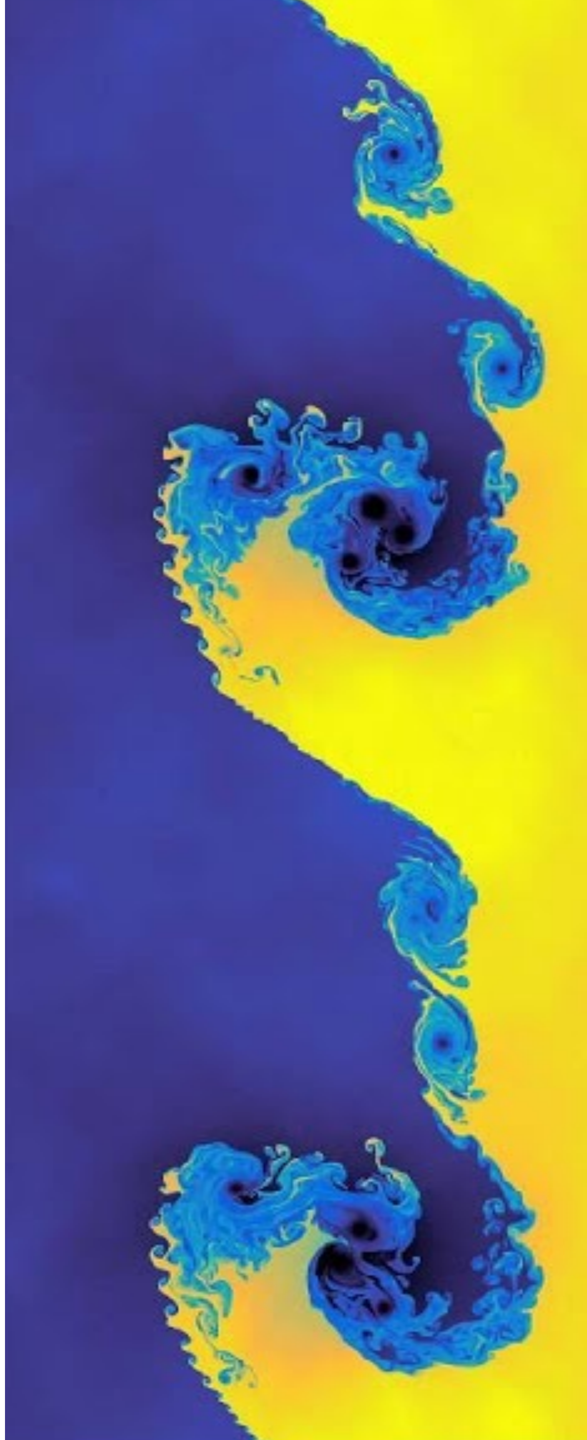


- 回忆上节课的量纲分析方法
- 基本量纲——老三样；物理量有哪几个？

  相关长度 l，两点相关函数 ξ（量纲是 $[L]^2[T]^{-2}$），

  单位质量单位时间的能量耗散 ϵ（量纲是 $[L]^2[T]^{-3}$）
- $n=m$，所以排除一个不进入问题的基本量纲——质量
- 唯一一个无量纲量： $\Pi=\xi^3\epsilon^{-2}l^{-2}$；显式： $\xi\propto(\epsilon l)^{2/3}$
- 略显不直观，所以……





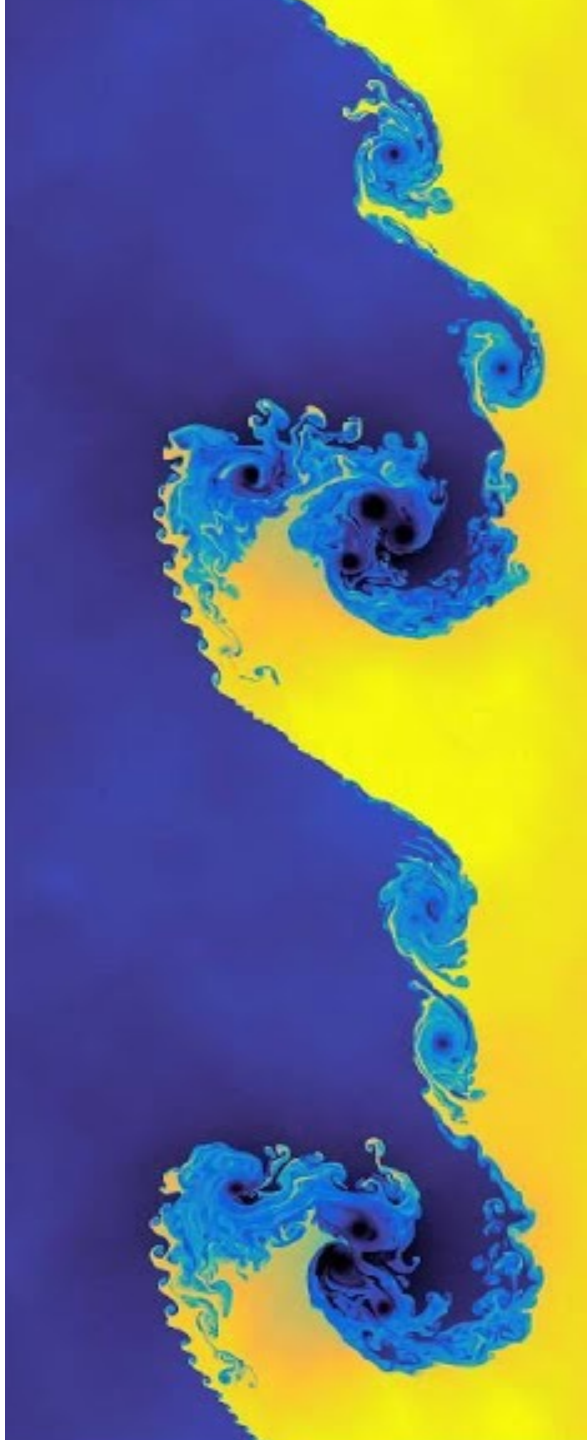
- 更直观的：功率谱，湍流能量在不同尺度的统计分布
- 物理图像：能量沿着不同尺度“向下传递”
- 要求：远不及注入尺度、远大于耗散尺度

  耗散尺度——回忆 $\nu \to [L]^2[T]^{-1}$， $l_{\mathrm{K}} = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$

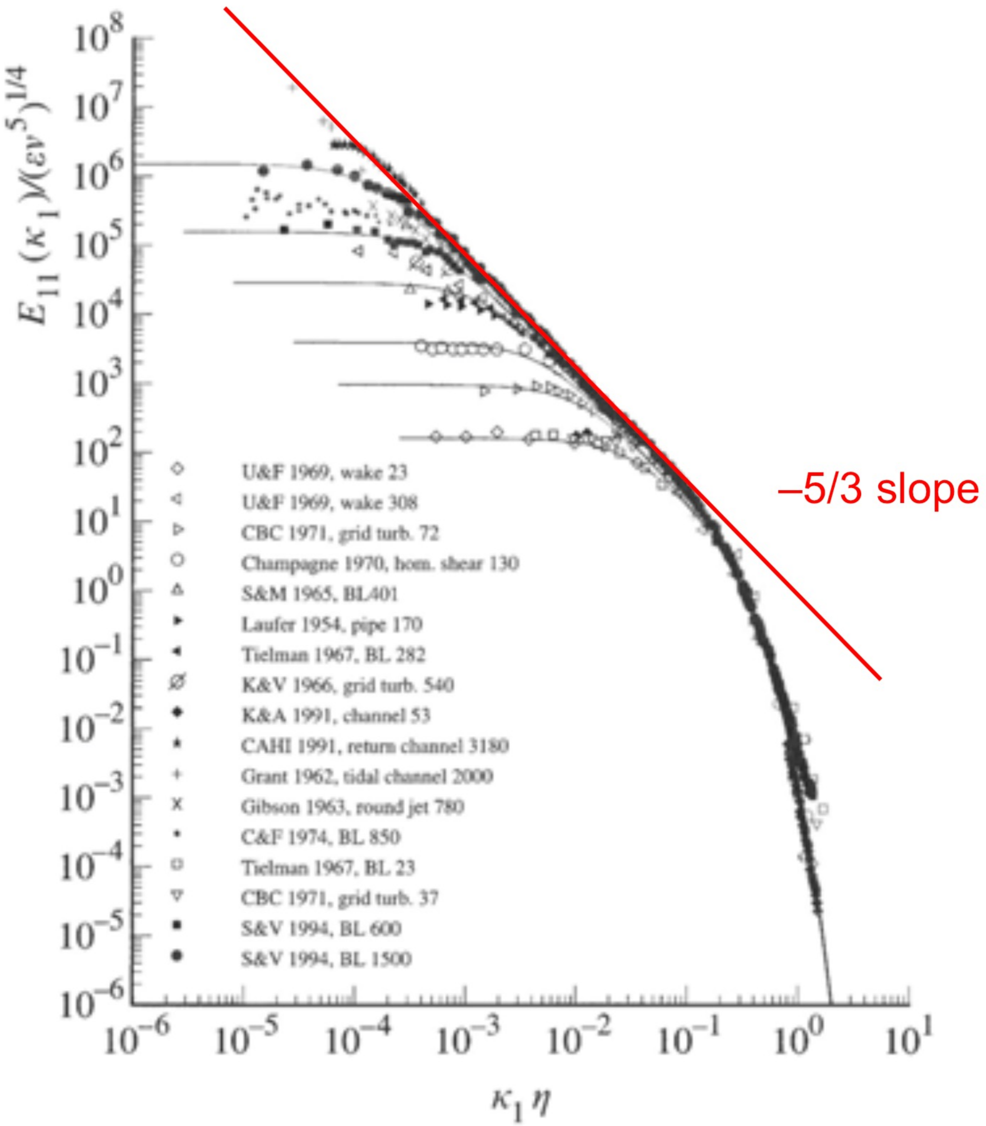
  回忆雷诺数 $\mathrm{Re} \equiv \rho l v/\eta = l v/\nu$，尺度越小粘滞越重要
- 将能谱定义为：分布在单位质量单位波数的能量

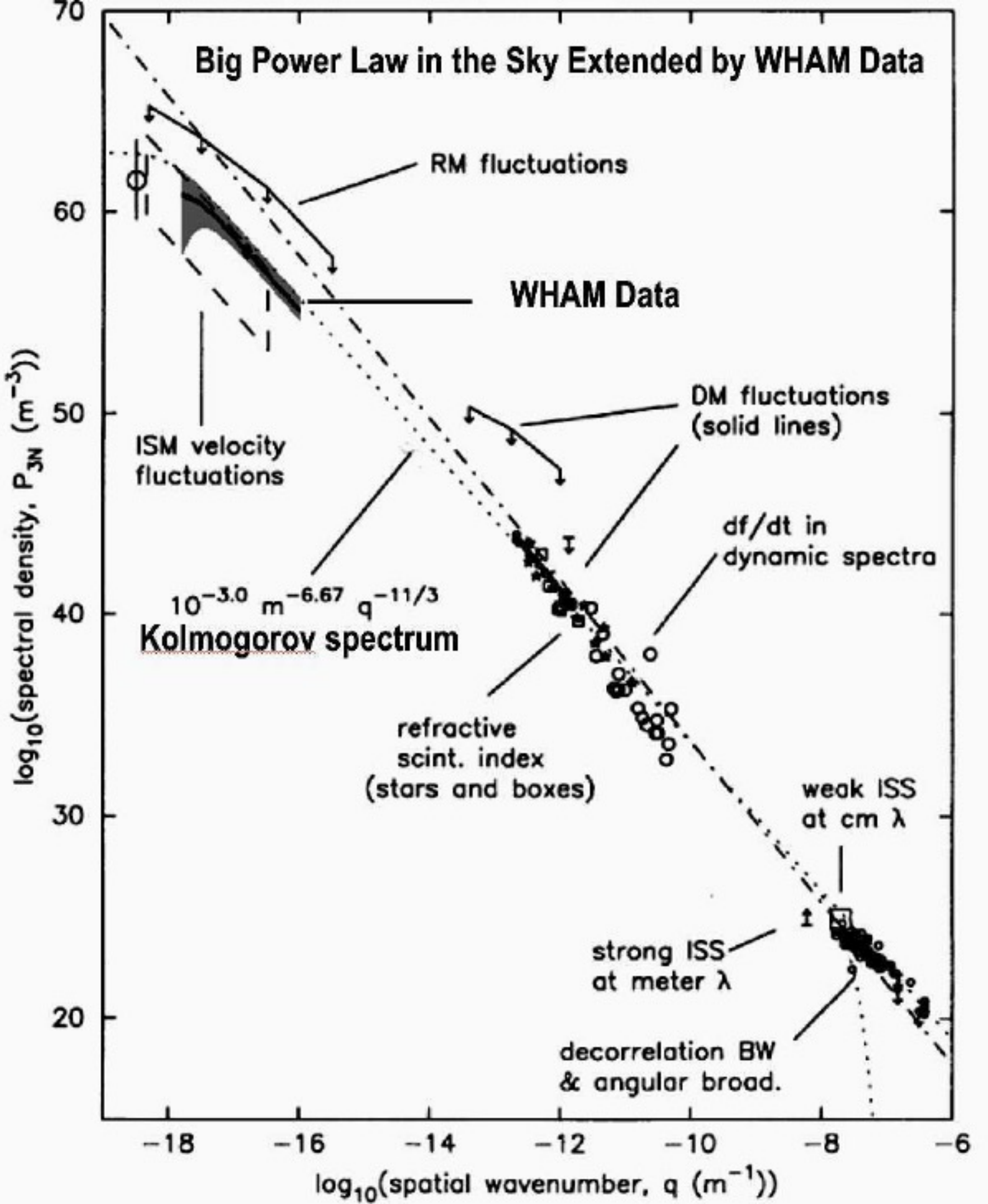
  （差不多某个尺度的漩涡中平均蕴藏了多少了能量）
- 能谱的量纲： $E(k)\mathrm{d}k \to [L]^2[T]^{-2}$

  （k 到 $k + \mathrm{d}k$ 区间内单位质量的能量）
- 共一个无量纲数： $E^3(k)\epsilon^{-2}k^5$，故 $E(k) \propto \epsilon^{2/3}k^{-5/3}$



- $E(k) \propto k^{-5/3}$ 的规律广泛成立
- 要求：不可压缩，远离粘滞尺度

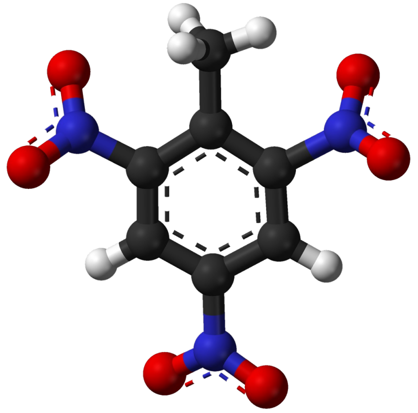





我们
要飞向
何方
我打算
待会去码头
整点薯条
译者： @推大石头 原作：falseknees.com
你误会我了伙计，我说的
是咱们这一辈子的终极目标。
归根结底，活着
是为了什么
为了
待会去码头
整点薯条


图恒宇
记住
没有薯条的码头
毫无意义！
马老师!!

TNT 当量：1 吨 TNT→ 10^6 kcal ≈ 10^3 kWh



我们天天吐槽

卡路里是什么辣鸡单位（1 cal = 4.18 J）

但是轮到现实记忆

卡路里勉强算是有点好用

比较烦的是燃烧学数据库，单位是 kcal/kmol

你计算自己的减肥食谱时所用的卡路里往往其实是千卡

老美还有个能量单位 BTU，是真的辣鸡——你们电费不也用 kWh 算嘛？！
还有飞机，垂直用英制，水平用海里，航图有用英里的，制造维护加油正在转公制
还有鱼雷、舰炮，测距用英制（码），射程和瞄准用公制，什么玩意儿嘛

薯条当量：1 包薯条→ 365 kcal ≈ 1.5 MJ

成年人平均每日消耗 2 Mcal → 6 包薯条

大耗子

一只海鸥　一天要整多少薯条？

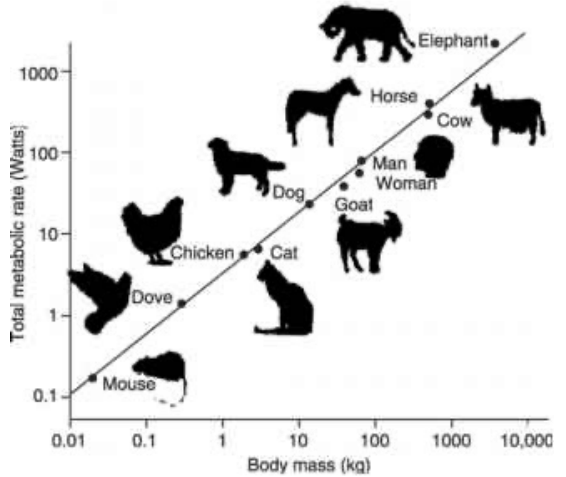
鹰

修勾

尼安德特人/晚期智人

（只要数量级）

- 最简单的思路：从散热出发，几何体的表面积：$S \propto l^2$，
  体重（代指身体质量，下同）$m \propto l^3$
  散热速率正比于表面积，故代谢功率 $P \propto S \propto m^{2/3}$



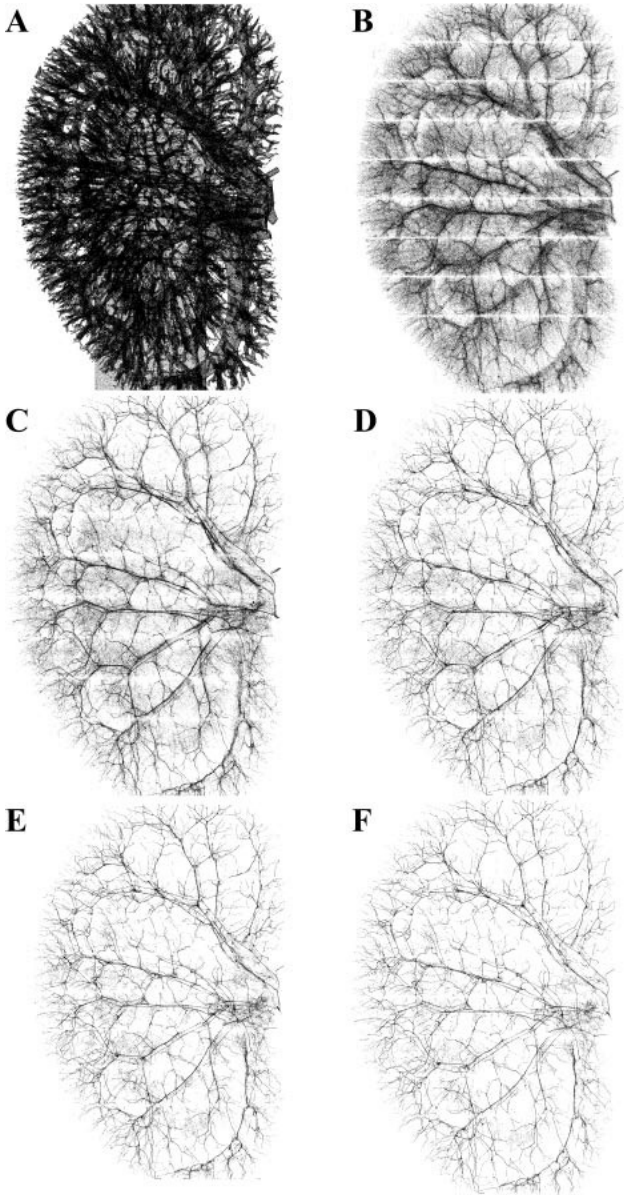
- 赵凯华老师的思路：身体的更好建模是圆柱
  - 弯曲时重力势能释放：$\Delta E_g \propto l\theta^2 \times r^2 l$
  - 弯曲时弹性势能增加：$\Delta E_\mathrm{e} \propto Yr^4\theta^2/l$
    这是一个量纲分析问题，考虑杨氏模量量纲 $[Y] = [M][L]^{-1}[T]^{-2}$，
    三个无量纲量： $\Pi_0 = \Delta E_e/(Yr^3)$， $\Pi_1 = l/r$， $\Pi_2 = \theta$
  - 抗弯折的临界长度使两者同等增加：$r^4\theta^2/l_c \propto r^2 l_c^2 \theta^2$，$l_c \propto r^{2/3}$
  - 此时 $m \propto r^2 l_c \propto r^{8/3}$，$S \propto rl \propto r^{5/3} \propto m^{5/8}$

- WEB 模型：从营养物质的分配入手
  - 如果毛细血管数量正比于体积，无法运抵末梢
  - 应当加入一个额外的维度，

    所以毛细血管数量满足 $N^4 \propto V^3$
  - 末梢毛细血管数量正比于能耗，

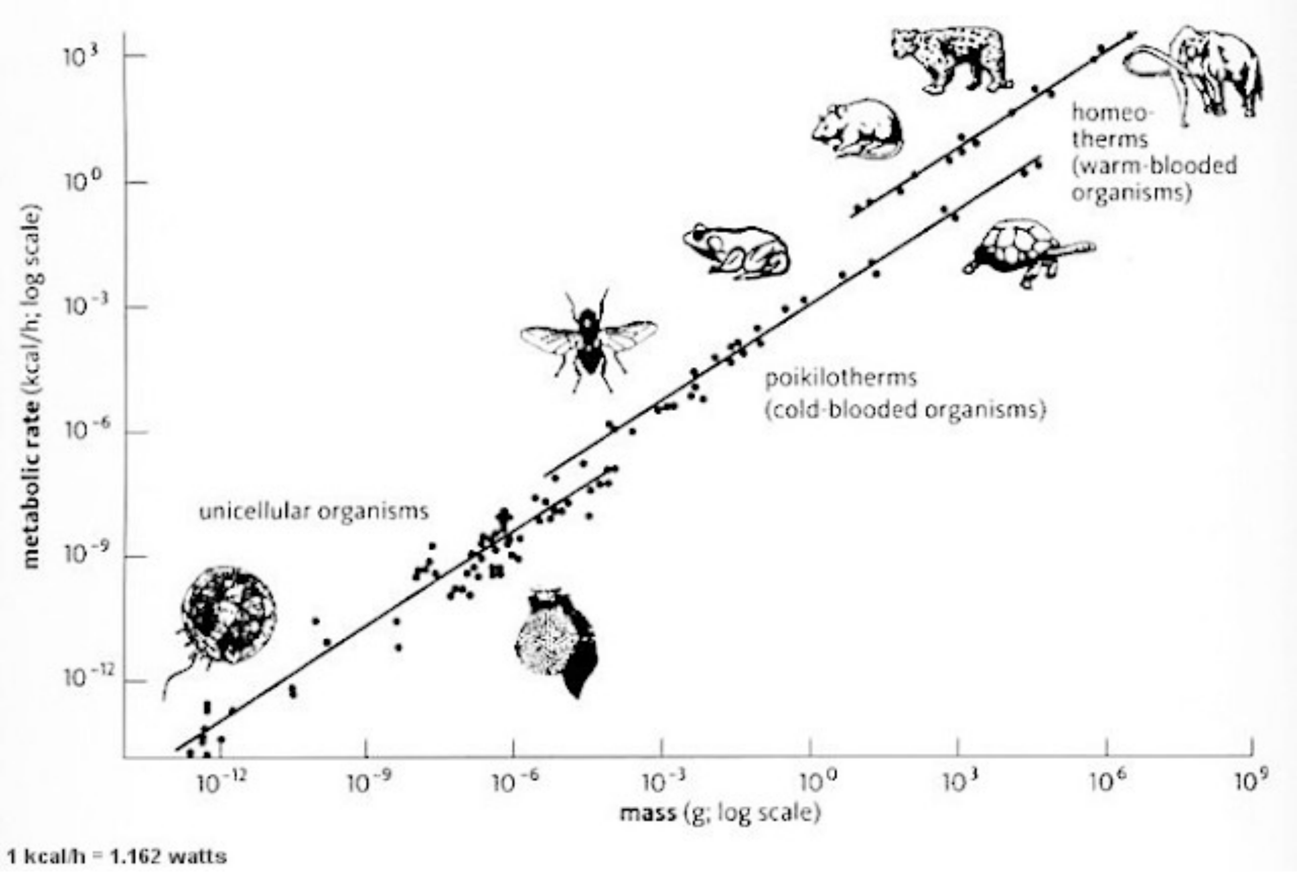
    故有 $P \propto V^{3/4} \propto m^{3/4}$
  - 教材中的“绕道”：认为肌肉构型相似、

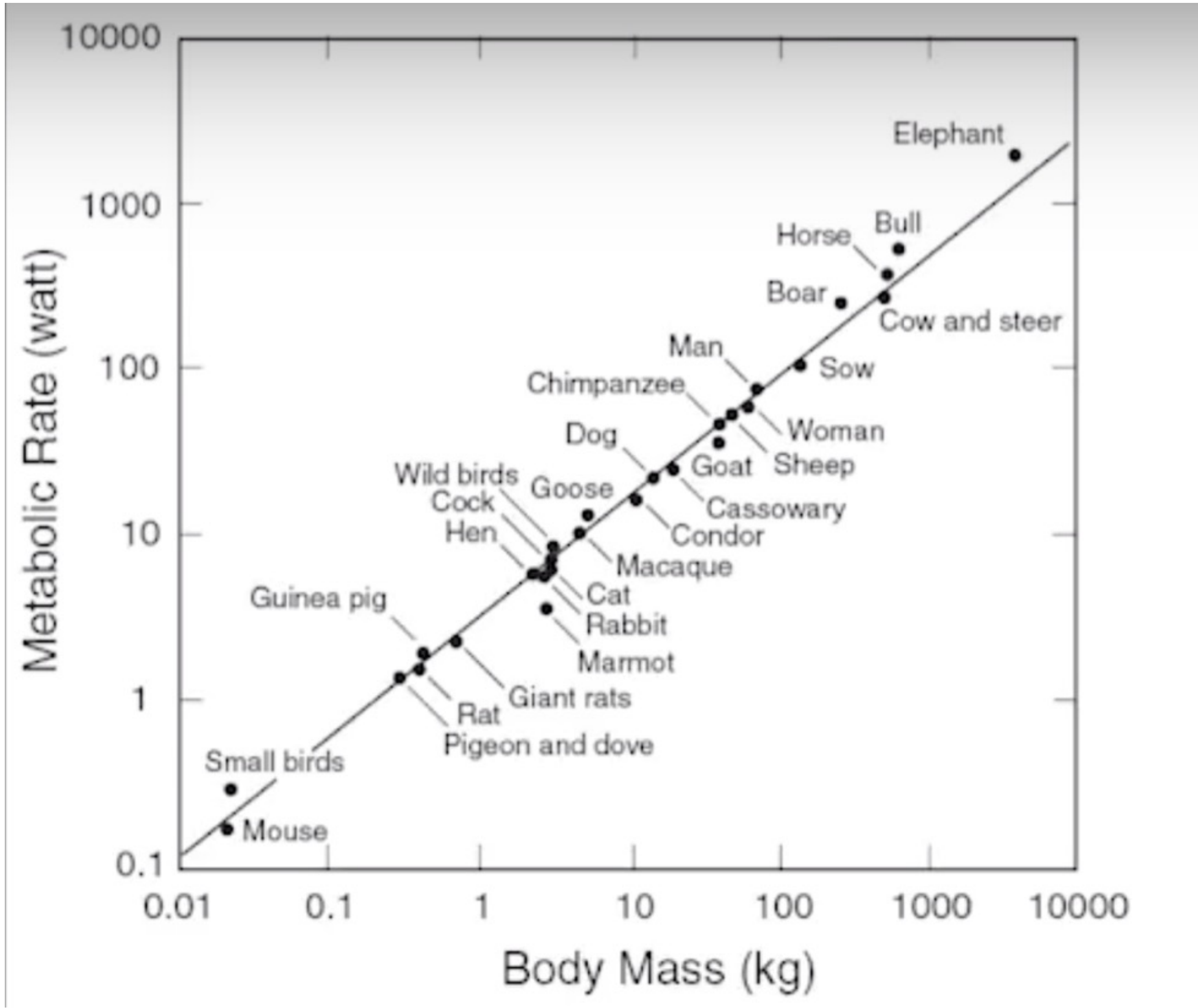
    功耗正比于肌肉面积：$P \propto r^2 \propto m^{3/4}$



- WEB 模型：从营养物质的分配入手
  - 教材中的“绕道”：

    认为肌肉构型相似、功耗正比于肌肉面积：$P \propto r^2 \propto m^{3/4}$





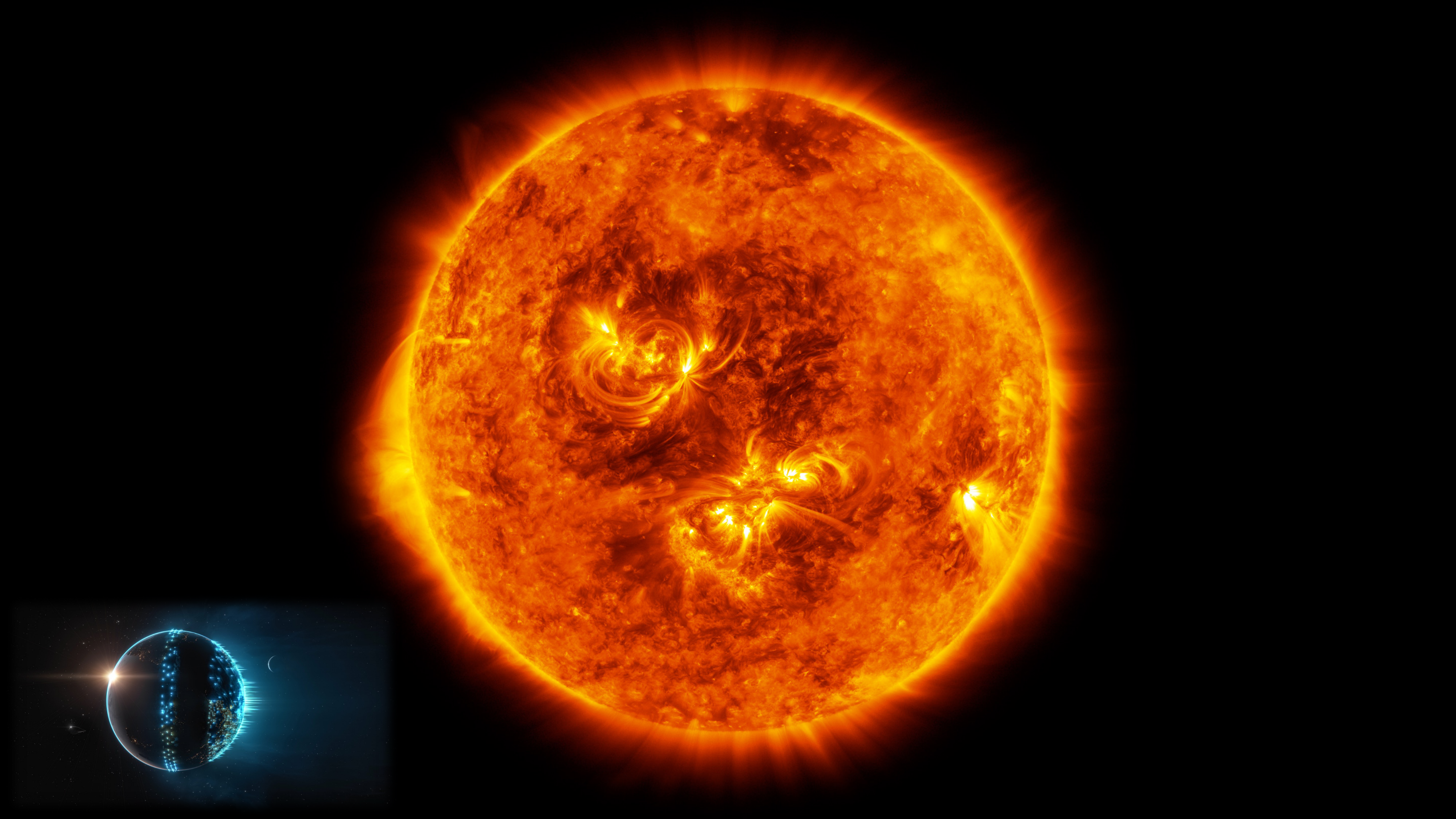
大耗子（0.1 kg）  0.05

海鸥（2 kg）  0.5

鹰（5 kg）  1

修勾（20 kg）  2.5

尼安德特/晚期智人（60 kg）  6



- 恒星的质量与光度之间的标度关系从何而来？
- 第一步：光度、星体平均能量密度 u、平均温度 T 的关系（来自辐射的径向扩散；注意 $D \propto c\lambda \propto (\rho\kappa)^{-1}$）

$$L = -4\pi R^2 D \left[\frac{\partial u}{\partial r}\right]_R \propto DR^2 \left[\frac{\partial u}{\partial r}\right]_R \sim DR^2 \left(\frac{u}{R}\right) \propto \frac{R^2}{\rho\kappa}\left(\frac{T^4}{R}\right)$$

- 第二步：星体平均温度与质量的关系（来自流体力学平衡）

$$\frac{p}{R} \sim \left[\frac{\partial p}{\partial r}\right]_{R/2} \sim \frac{GM\rho}{R^2};\ T \propto \left(\frac{p}{\rho}\right) \sim \frac{GM}{R}$$

- 第三步：把上面两步结果结合起来（注意 $\rho \sim M/R^3$）

$$L \propto \frac{R^4}{M\kappa}\left(\frac{M}{R}\right)^4 \propto \kappa^{-1}M^3$$

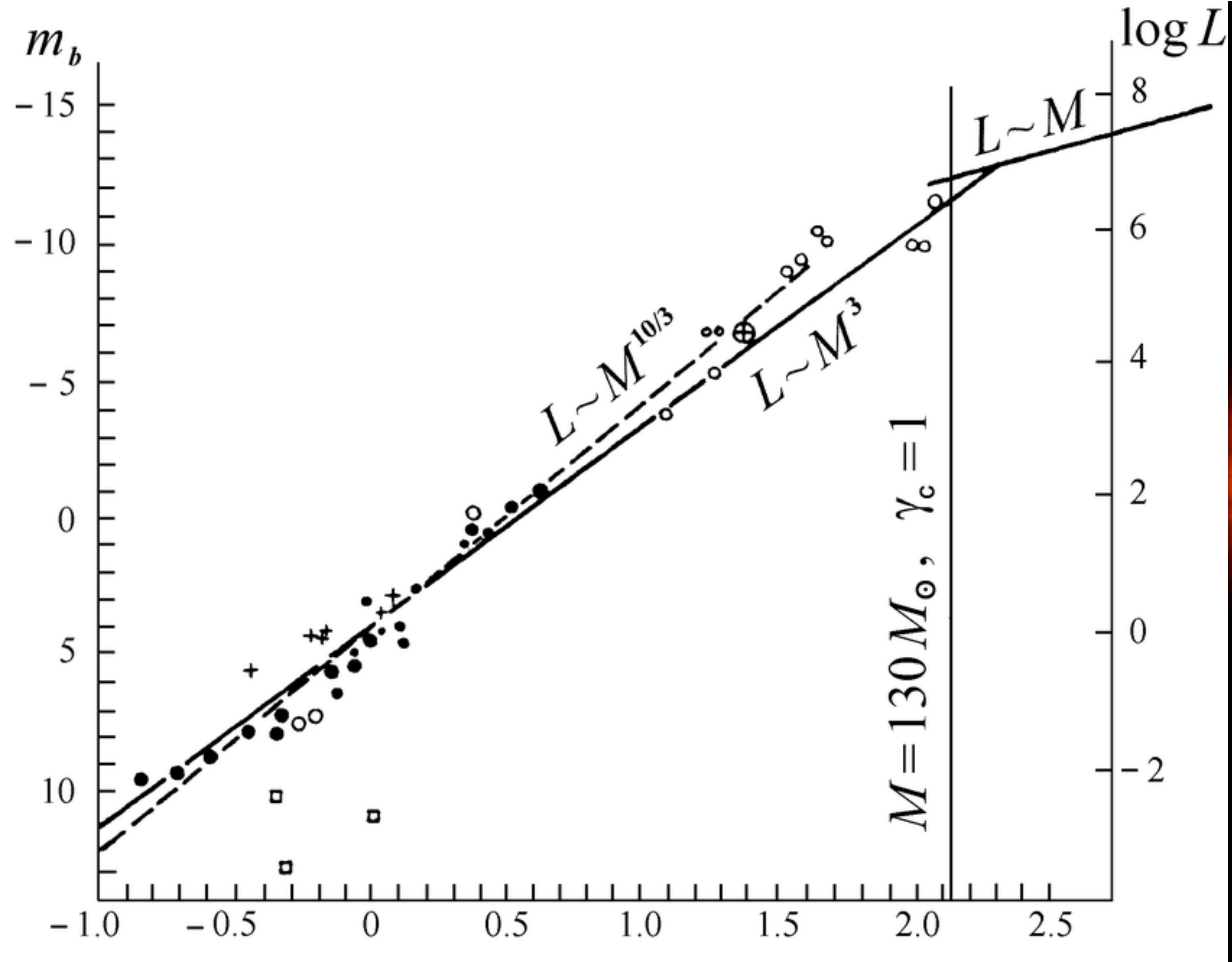
- 恒星的质量与光度之间的标度关系从何而来？
- 第三步：把上面两步结果结合起来（注意 $\rho \sim M/R^3$ ）

$$L \propto \frac{R^2}{\rho k}\left(\frac{T^4}{R}\right) \propto \frac{R^4}{Mk}\left(\frac{M}{R}\right)^4 \propto \kappa^{-1} M^3$$

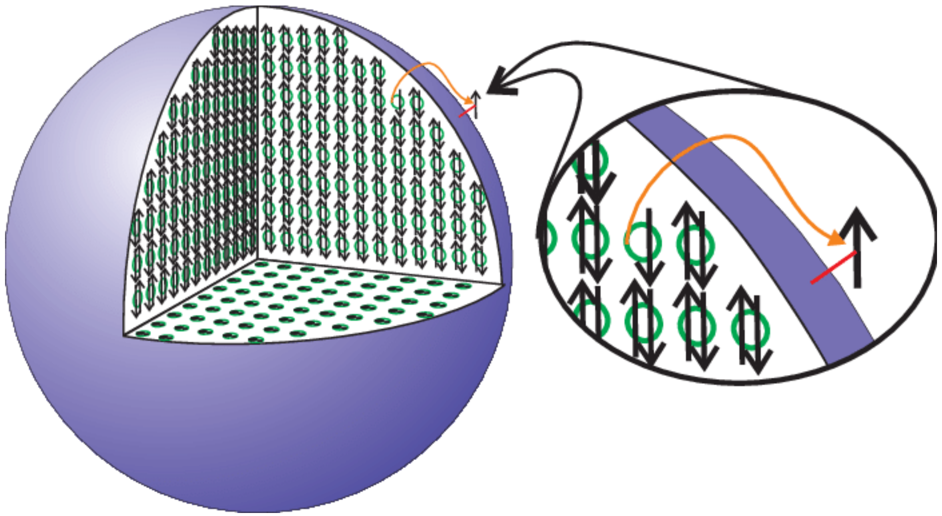
- 如果辐射基本都是与自由电子相互作用，κ 与温度无关（也叫“自由电子提供不透明度”）：$L \propto M^3$（经典结果）
- 如果系统辐射压绝对主导，流体静力平衡关系及后果变成：

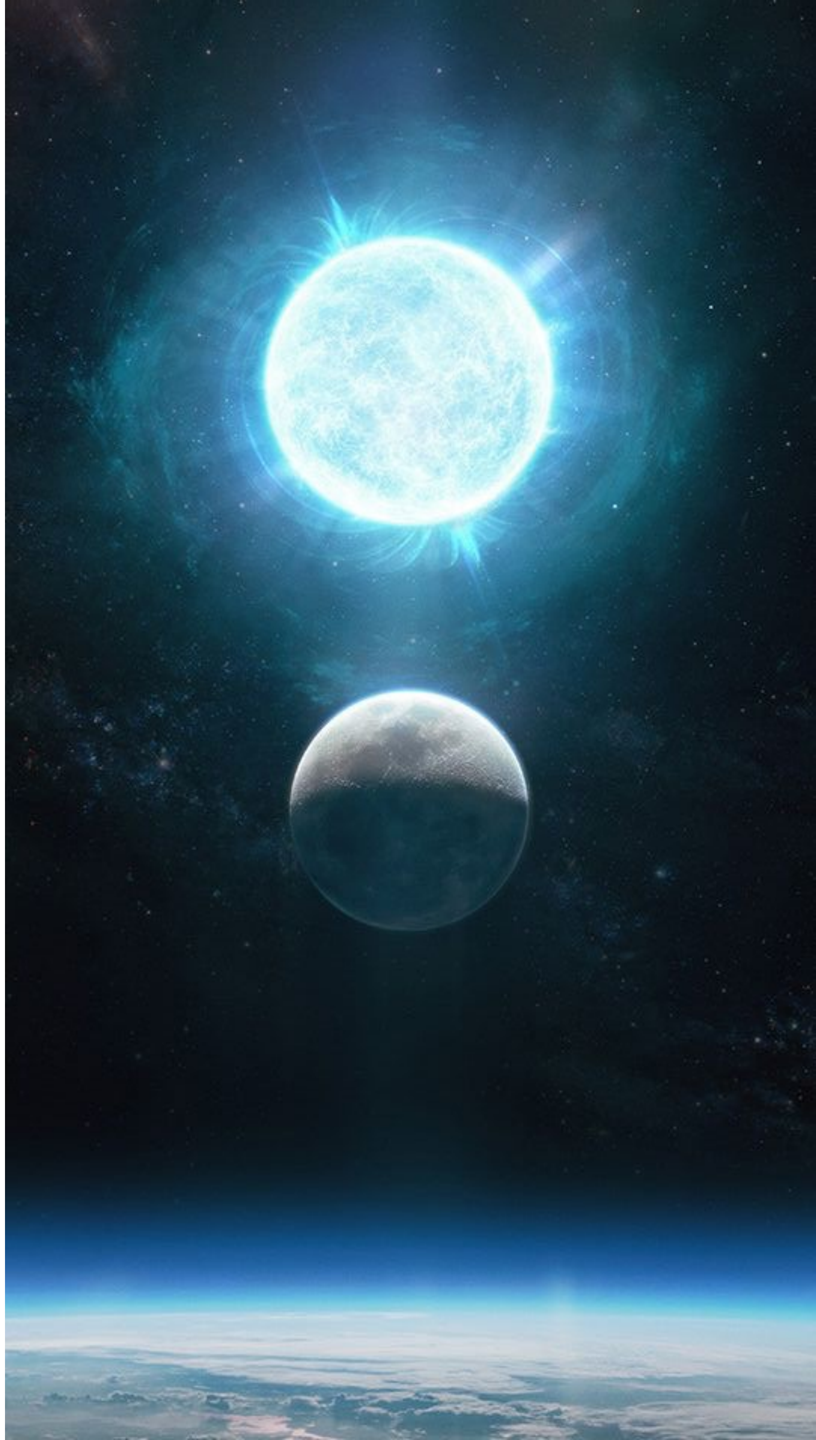
$$T^4 \propto p \propto \frac{GM\rho}{R} \propto \frac{GM^2}{R^4}; \quad L \propto \frac{RT^4}{\rho k} \propto \kappa^{-1}\frac{R^4}{M}\frac{M^2}{R^4} \sim \kappa^{-1} M$$

- 如果不透明度服从 Kramers，$\kappa \propto \rho T^{-7/2}$：$L \propto M^{5.5} R^{-0.5}$
- 极大质量（$M > 100\ M$ ）恒星寿命基本不变；
  其他情况，恒星寿命随质量增加而快速减少


m_b
$\log L$
$L \sim M$
$L \sim M^{10/3}$
$L \sim M^3$
$M = 130\,M_\odot,\ \gamma_c = 1$
−15
−10
−5
0
5
10
8
6
4
2
0
−2
−1.0
−0.5
0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5

- 前面的推导，压强总是与温度有关的（不甚严谨）
  气体（等离子）压强：$p \propto T$；辐射压： $p \propto T^4$
- 压强与温度几乎无关的情况？简并压（泡利：我的！）
- 相空间（粒子动量和空间坐标联合张成的空间）的
  一个格子 “体积”为 $\hbar^d$（d 为空间维数）
- 给定平均间距 d，费米子会试图尽可能
  占据最低的能量，但一山只容二虎： $p_F^3 d^3 \sim \hbar^3$
- 粒子的非相对论动能： $E \sim NE_F \propto p_F^2 \propto d^{-2} \propto n^{2/3}$
- 压强的物理图像是啥？
  动量的转移效率；
  体积变化的做功效率：
  $p \sim -(\partial E/\partial V) \propto n^{5/3}$





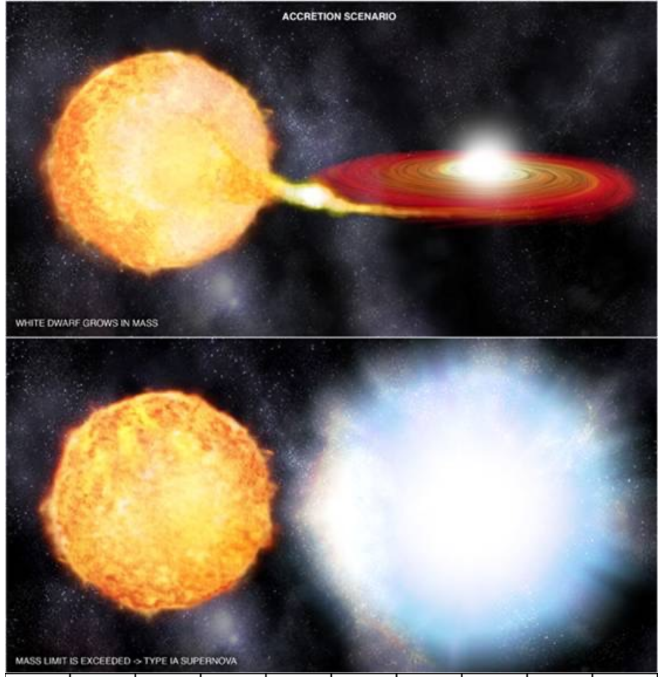
- 压强（体积变化的做功效率）：$p \propto (\partial E/\partial V) \propto n^{5/3} \propto \rho^{5/3}$
- 回忆前面的估计方法，就星体“平均情况”而言：

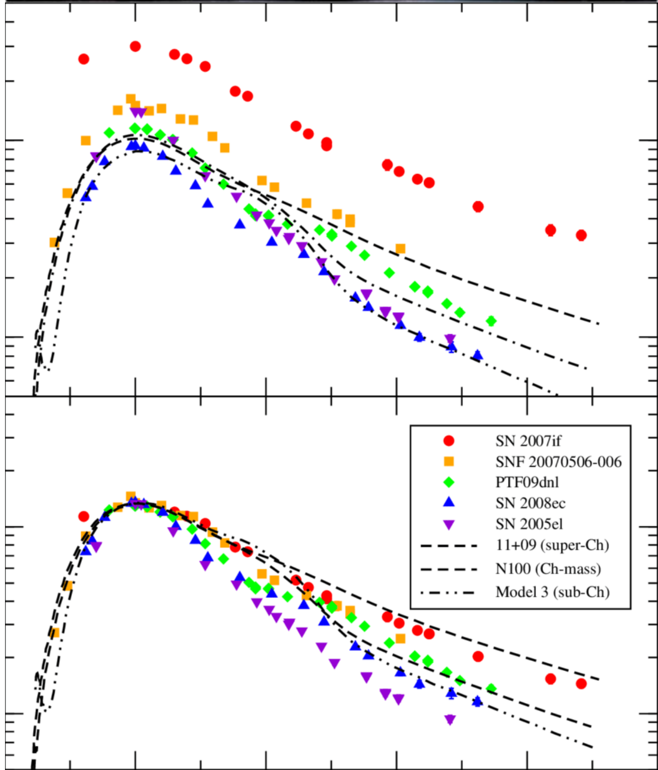
$$\frac{p}{R} \sim \frac{\partial p}{\partial r} \sim \frac{GM\rho}{R^2}, \rho \sim \frac{M}{R^3};$$

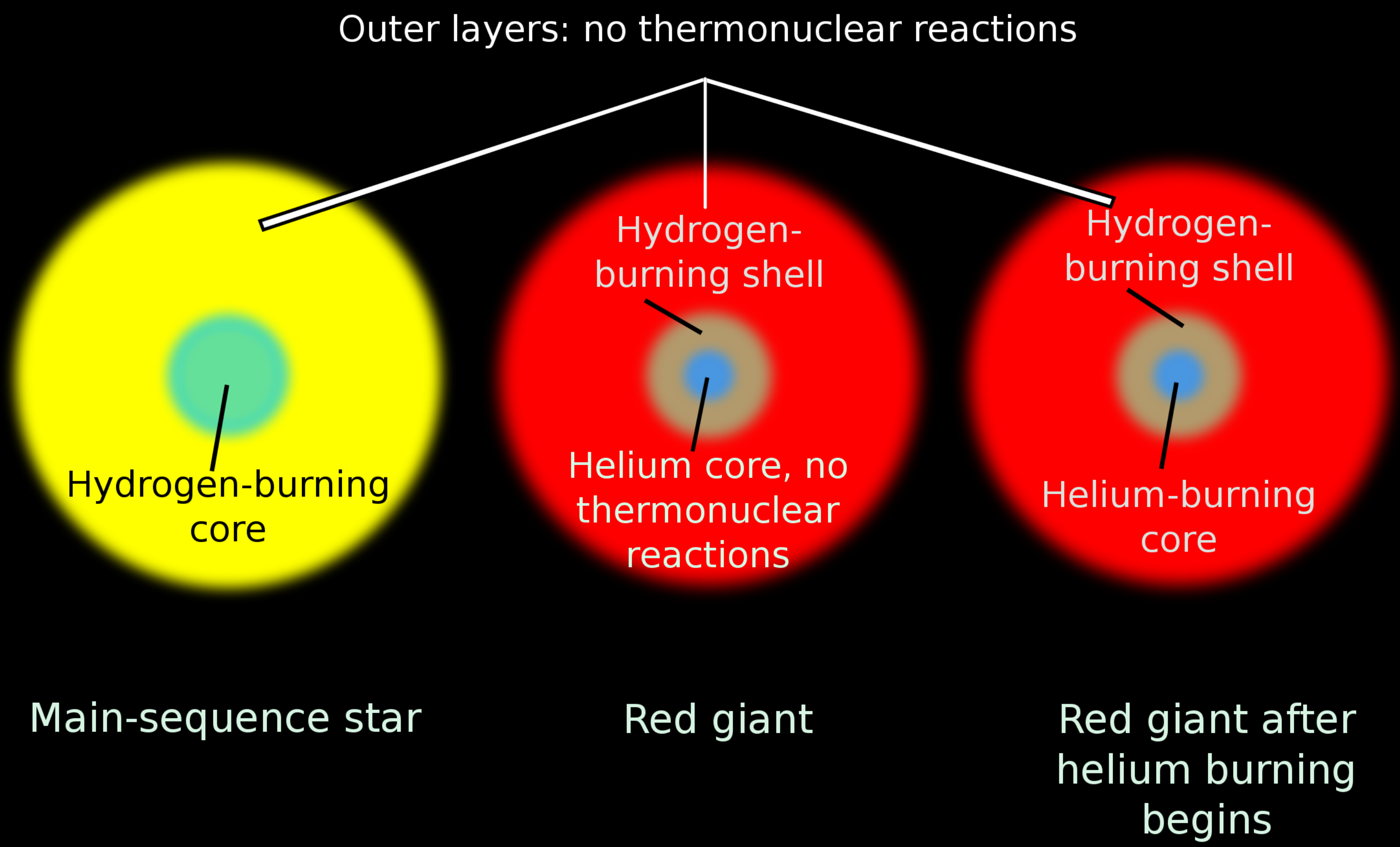
- 把 p 等同起来：$(M/R^3)^{5/3} \propto M^2/R^4$，进而：$R \propto M^{-1/3}$
- 自引力简并物质的奇怪特性之一：

  质量越大，半径越小——不用那么极端，行星就有
- 如果考虑相对论性的粒子动能：$E \propto p_F \propto d^{-1} \propto n^{1/3}$，

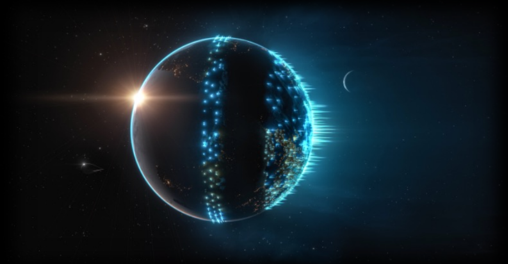
  给出压强：$p \propto (\partial E/\partial V) \propto n^{4/3}$，比非相对论“软”
- 星体中心附近，对抗引力所需压强：$p_g \propto M^2 R^{-4}$
- 非相对论：$p \propto M^{5/3} R^{-5}$；相对论：$p \propto M^{4/3} R^{-4}$
- 相对论性找不到平衡点——Ia 型超新星（？）

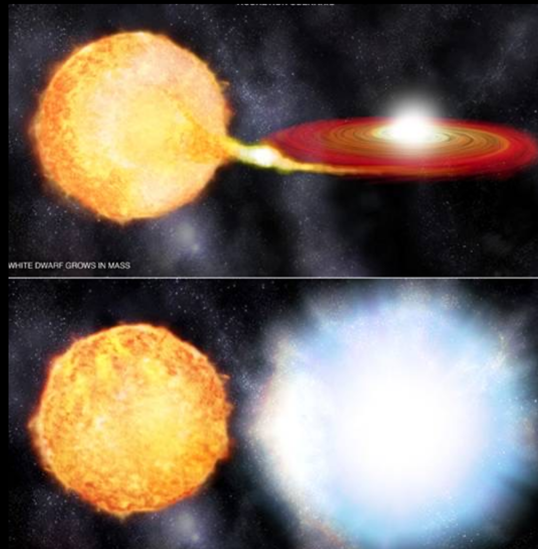




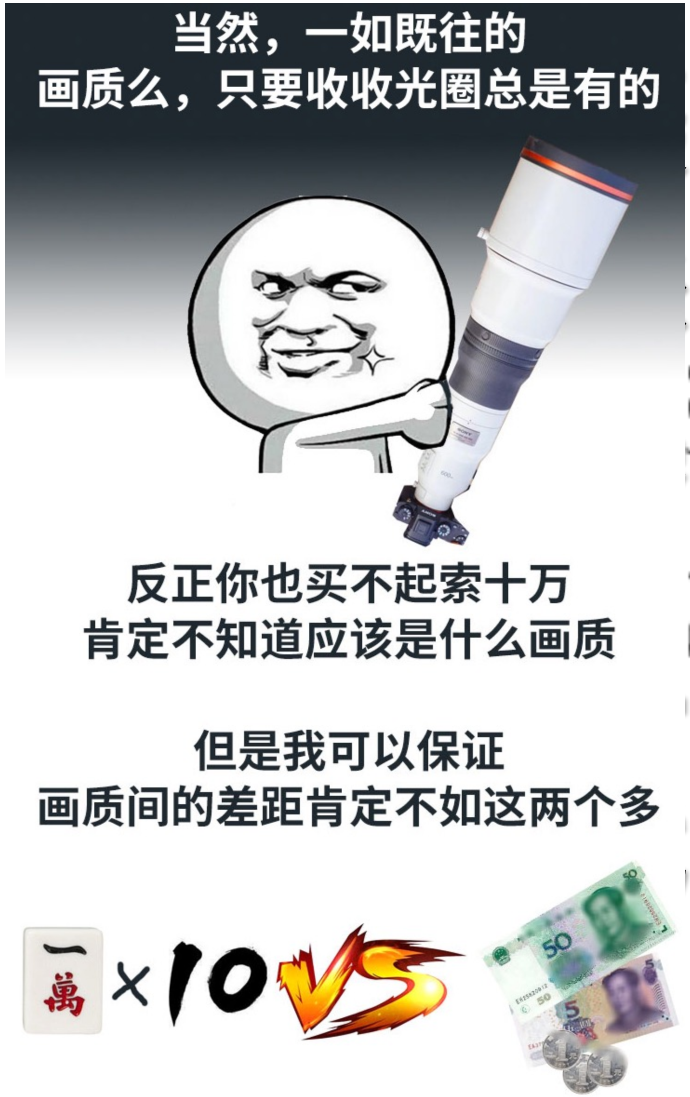


- 氢核燃尽时，核心堆积简并氦
- 氦越堆越多，核心终于点燃
- 简并物质的压强与温度几乎无关
  核燃烧开始但没有负反馈！
- 温度急剧上升（闪！）
- 直至热波长短于粒子间距，
  不再处于简并态

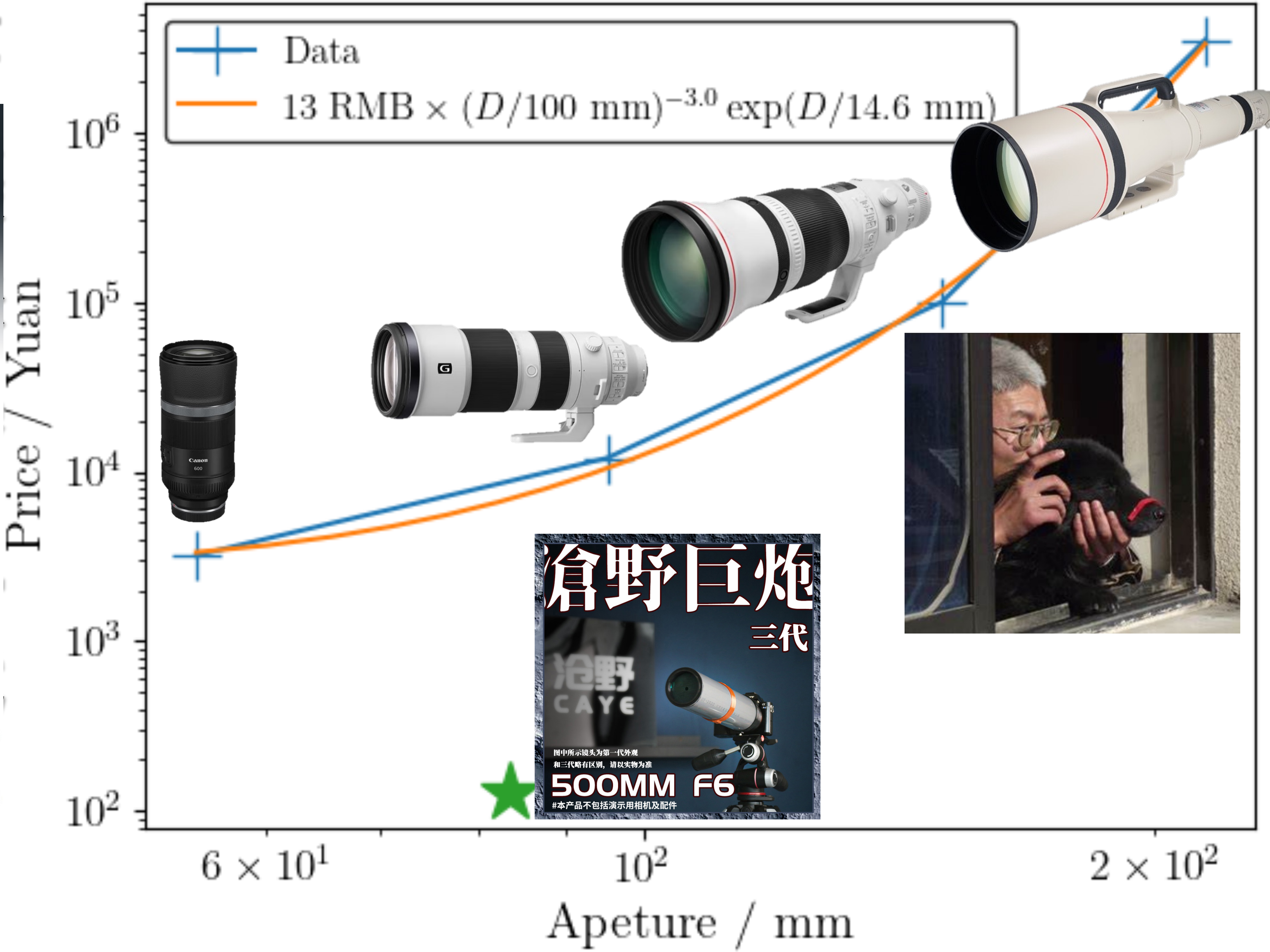




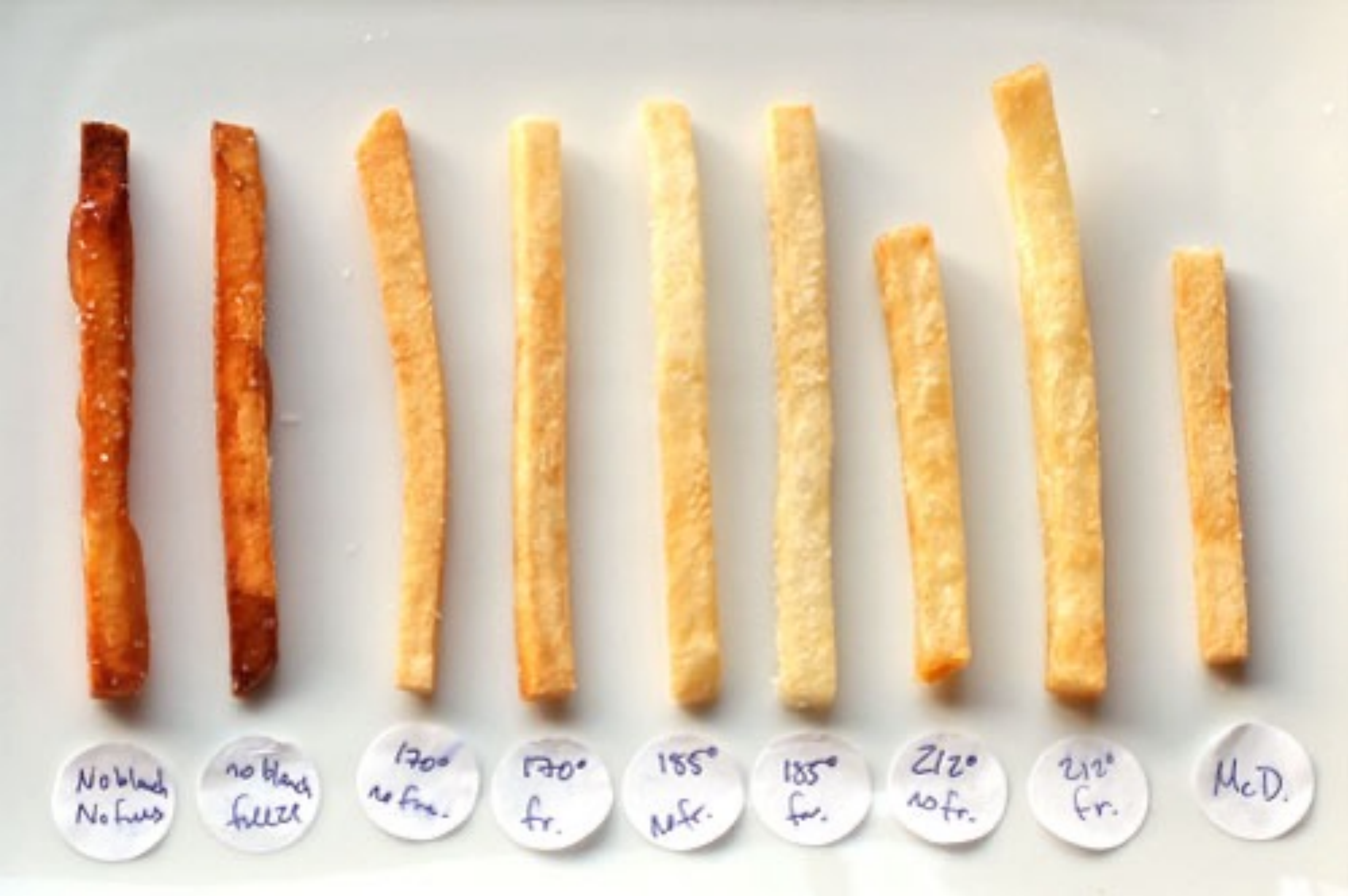
摄影标度律



当然，一如既往的
画质么，只要收收光圈总是有的
反正你也买不起索十万
肯定不知道应该是什么画质
但是我可以保证
画质间的差距肯定不如这两个多
一
萬
×10
VS
50
5



Data
13 RMB × (D/100 mm)^−3.0 exp(D/14.6 mm)
Price / Yuan
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
Apeture / mm
6×10^1
10^2
2×10^2
Canon
600
G
沧野巨炮
三代
沧野
CAYE
图中所示镜头为第一代外观
和三代略有区别，请以实物为准
500MM F6
#本产品不包括演示用相机及配件


No blanch No fuss
no blanch freeze
170° no fr.
170° fr.
185° no fr.
185° fr.
212° no fr.
212° fr.
McD.

谢谢大家