Au-delà De Votre Intuition

paradoxe des anniversaires

TECHER Lucas

2023

Introduction

Le **paradoxe des anniversaires** résulte de la question suivante :

"Combien de personnes faut-il réunir pour avoir 50% de chance qu'au moins deux d'entre-elles aient leur anniversaire le même jour ?"

Avec une approche mathématiques, cela revient à trouver le nombre de personnes nécessaire pour que la probabilité de l'événement *"au moins deux personnes ont leur anniversaire le même jour"* est égal à 0.5.

Remarques

- Il est important ici de prendre en considération les mots **au moins** de la question, sans eux les calculs suivants ne sont pas corrects.
- De plus pour la suite, nous supposons que toutes les années sont **non bissextiles**, prendre en compte le 29 février alourdirait inutilement les calculs.
- Et que toutes les dates d'anniversaires sont **équiprobables** (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de période dans l'année où il y a plus d'anniversaires).

Calcul de la probabilité

Considérons un groupe de n personnes où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ ainsi que l'événement E définie par :

E : *"Au moins deux personnes fêtent leur anniversaire le même jour"*

On note $P_n(E)$ la probabilité de l'événement E en fonction de n.

Nous voulons donc calculer cette probabilité afin plus tard de trouver une valeur de n entière qui vérifie $P_n(E) = 0.5$.

Calcul de la probabilité

Pour ce faire nous allons étudier l'événement contraire de E, qu'on note et définie par :

$$\bar{E} : \text{"Tout le monde a un jour d'anniversaire différent"}$$

Pour calculer la probabilité de cet événement, nous allons **procéder par dénombrement.**

Calcul de la probabilité

C'est-à-dire :

- Compter le nombre de possibilité de jours d'anniversaire pour n personnes, ce qui est le **nombre d'issue total**.
- Et compter le nombre de possibilité de jours d'anniversaire mais où les n personnes ont tous des jours d'anniversaires différents, ce qui est le **nombre d'issue favorable à l'événement** $\bar{E}$.

On divisera ensuite le nombre d'issue favorable à $\bar{E}$ par le nombre d'issue total (Calcul d'une probabilité équiprobable).

Calcul de la probabilité

Commençons par calculer le nombre de **possibilité total**.

Il y a 365 jours possibles pour la première personne.
Pour la deuxième personne, il y a également 365 jours possibles.
De même pour la troisième personne. Etc.

Donc pour n personnes, le nombre de possibilité de jours d'anniversaire est de

$$\underbrace{365 \times 365 \times \cdots \times 365}_{n \text{ facteurs}} = 365^n$$

Calcul de la probabilité

Maintenant, il nous suffit de calculer le nombre de **possibilité de jours d'anniversaires tous différents.**

Il y a 365 jours possibles pour la première personne.
Pour la deuxième personne, il n'y a plus que 364 jours possibles.
Pour la troisième personne, 363 jours possibles. Etc.

Calcul de la probabilité

Donc pour n personnes, le nombre de possibilité de jours d'anniversaires tous différents est de

$$\underbrace{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - n + 1)}_{n \text{ facteurs}} \Leftrightarrow \frac{365!}{(365-n)!}$$

Rappel : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$

Calcul de la probabilité

On a donc

$$P_n(\bar{E}) = \frac{365!}{(365-n)!} \times \frac{1}{365^n}$$

Or

$$P_n(E) + P_n(\bar{E}) = 1 \Rightarrow P_n(E) = 1 - P_n(\bar{E})$$

Donc

$$P_n(E) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!} \times \frac{1}{365^n}$$

Essais numériques

Pour déterminer une valeur de n qui vérifie $P_n(E) = 0.5$, nous allons ici procéder par essai numérique.

Essais numériques : pour $n = 10$

$$P_{10}(E) = 1 - \frac{365!}{(365-10)!} \times \frac{1}{365^{10}}$$

$$= 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - 10 + 1)}{365^{10}}$$

$$= 1 - \frac{364 \times 363 \times 362 \times \cdots \times 356}{365^{9}}$$

$$\approx 1 - 0.883$$

$$\approx 0.1169 \approx 12\%$$

Essais numériques : ...pour $n = 23$

$$P_{23}(E) = 1 - \frac{365!}{(365-23)!} \times \frac{1}{365^{23}}$$

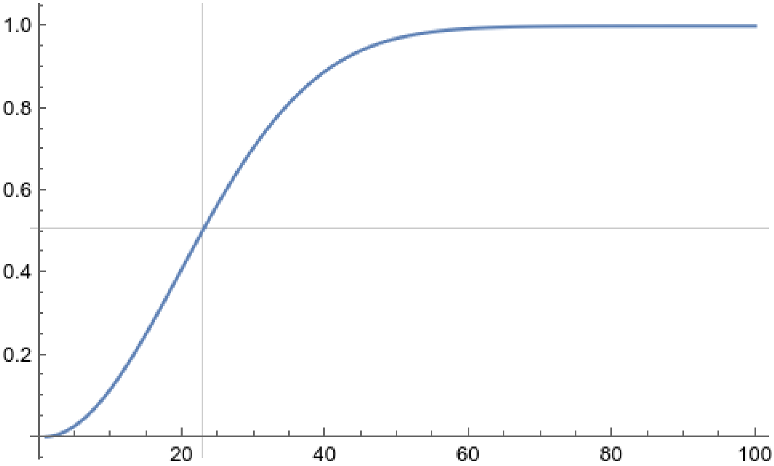
$$= 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - 23 + 1)}{365^{23}}$$

$$\approx 0.5073$$

$$\approx 50\%$$

Essais numériques

On peut visualiser approximativement la valeur de la probabilité P pour d'autres valeurs de n inférieur à 100 sur le graphique suivant :



Conclusion

On peut conclure en répondant à la question posée au départ. Il faut réunir **23** personnes pour avoir **50%** de chance qu'au moins deux d'entre elles fêtent leur anniversaire le même jour !

Je vous remercie pour votre écoute.

TECHER Lucas