# Au-delà De Votre Intuition

paradoxe des anniversaires

Lucas TÉCHER

2023

## I Introduction

Le **paradoxe des anniversaires** résulte de la question suivante : *Combien de personnes faut-il réunir pour avoir 50% de chance qu'au moins deux d'entre-elles aient leur anniversaire le même jour ?*

Avec une approche mathématiques, cela revient à trouver le nombre de personnes nécessaire pour que la probabilité de l'événement « au moins deux personnes ont leur anniversaire le même jour » est égal à 0.5.

Il est important ici de prendre en considération les mots "au moins" de la question, sans eux les calculs suivants ne sont pas corrects.
De plus pour la suite, nous supposons que toutes les années sont non bissextiles, prendre en compte le 29 février alourdirait inutilement les calculs. Et que toutes les dates d'anniversaires sont équiprobables (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de période dans l'année où il y a plus d'anniversaires).

## II Calcul de la probabilité

Considérons un groupe de $n$ personnes où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ ainsi que l'événement $E$ définie par :

$E$ : « Au moins deux personnes fêtent leur anniversaire le même jour »

On note $P_n(E)$ la probabilité de l'événement $E$ en fonction de $n$. Nous voulons calculer cette probabilité afin plus tard de trouver une valeur de $n$ entière qui vérifie $P_n(E) = 0.5$ (Voir III).

Pour ce faire nous allons étudier l'événement contraire de $E$, qu'on note et définie par :

$\bar{E}$ : « Tout le monde a un jour d'anniversaire différent »

Pour calculer la probabilité de cet événement, nous allons procéder par dénombrement : compter le nombre de possibilité de jours d'anniversaire pour $n$ personnes, ce qui est le nombre d'issue total. Et compter le nombre de possibilité de jours d'anniversaire mais où les $n$ personnes ont tous des jours d'anniversaires différents, ce qui est le nombre d'issue favorable à l'événement $\bar{E}$.

On divisera ensuite le nombre d'issue favorable à $\bar{E}$ par le nombre d'issue total.

Commençons par calculer le nombre de possibilité.
Il y a 365 jours possibles pour la première personne.
Pour la deuxième personne, il y a également 365 jours possibles.
De même pour la troisième personne. Etc.
Donc pour $n$ personnes, le nombre de possibilité de jours d'anniversaire est de

$$\underbrace{365 \times 365 \times \cdots \times 365}_{n \text{ facteurs}} = 365^n$$

Maintenant, il nous suffit de calculer le nombre de possibilité de jours d'anniversaires tous différents.
Il y a 365 jours possibles pour la première personne.
Pour la deuxième personne, il n'y a plus que 364 jours possibles.
Pour la troisième personne, 363 jours possibles. Etc.
Donc pour $n$ personnes, le nombre de possibilité de jours d'anniversaires tous différents est de

$$\underbrace{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - n + 1)}_{n \text{ facteurs}} \Leftrightarrow \frac{365!}{(365-n)!}$$

On a donc

$$P_n(\bar{E}) = \frac{365!}{(365-n)!} \times \frac{1}{365^n}$$

Or

$$P_n(E) + P_n(\bar{E}) = 1 \Rightarrow P_n(E) = 1 - P_n(\bar{E})$$

Donc

$$P_n(E) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!} \times \frac{1}{365^n}$$

## III Essais numériques

Pour déterminer une valeur de $n$ qui vérifie $P_n(E) = 0.5$, nous allons ici procéder par essai numérique.

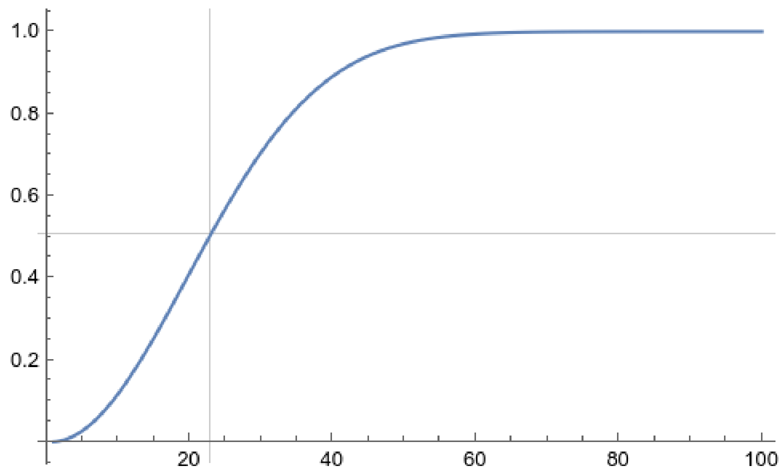
Exemple pour $n = 10$

$$\begin{aligned}
P_{10}(E) &= 1 - \frac{365!}{(365-10)!} \times \frac{1}{365^{10}} \\
&= 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - 10 + 1)}{365^{10}} \\
&= 1 - \frac{364 \times 363 \times 362 \times \cdots \times 356}{365^{9}} \\
&\approx 1 - 0.883 \\
&\approx 0.1169 \\
&\approx 12\%
\end{aligned}$$

Or, il se trouve que pour $n = 23$

$$
\begin{aligned}
P_{23}(E) &= 1 - \frac{365!}{(365-23)!} \times \frac{1}{365^{23}} \\
&= 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365-23+1)}{365^{23}} \\
&\approx 0.5073 \\
&\approx 50\%
\end{aligned}
$$

On peut visualiser approximativement la valeur de la probabilité $P$ pour d'autres valeurs de $n$ inférieur à 100 sur le graphique suivant :




On peut conclure en répondant à la question posée au départ. Il faut réunir **23** personnes pour avoir **50%** de chance qu'au moins deux d'entre elles fêtent leur anniversaire le même jour !