

State Council of Educational Research & Training
Andhra Pradesh

MATHEMATICS

Semester (సెమిస్టర్) - 2

Class VII



MATHEMATICS

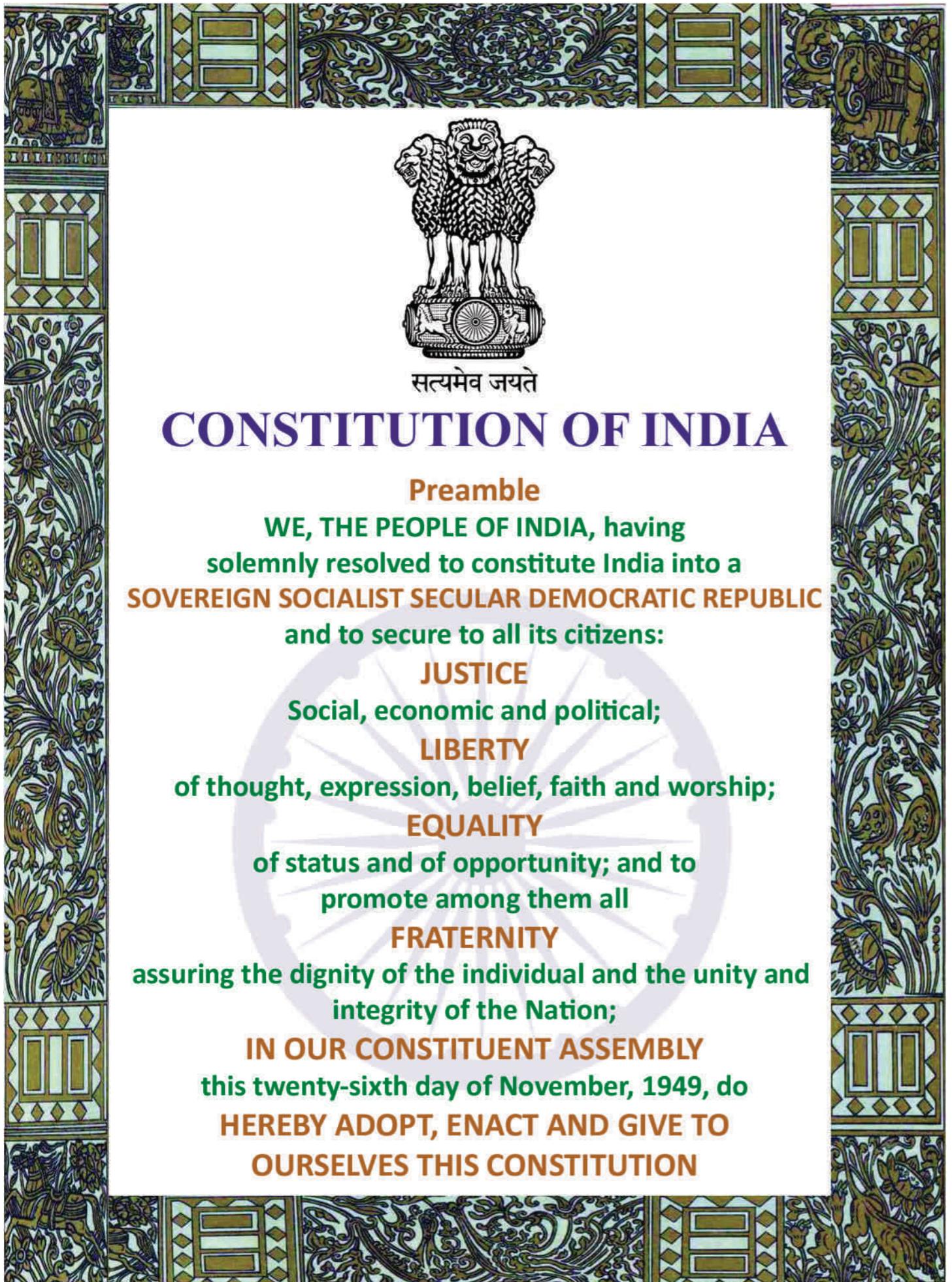
రాజతరాణి

Free distribution by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh



Semester (సెమిస్టర్) - 2





భారత రాజ్యంగం - పార విధాలు

1. రాజ్యంగమునకు బధ్యదై వుండుట, దాని ఆదర్శాలను, సంస్థలను, జాతీయ పతాకమును, జాతీయ గీతమును గౌరవించుట;
2. జాతీయ స్వాతంత్ర్య పోరాటమునకు స్వాద్వినిఖిన ఉన్నతాదర్శములను మనస్సుయందు ఉంచుకొని వాటిని అనుసరించుట;
3. భారత సార్వభౌమత్వం, ఐక్యత, అభిందతను సమర్పించుట మరియు సంరక్షించుట.
4. దేశమును రక్షించుట మరియు కోరినపుడు జాతికి సేవ చేయుట;
5. భారత ప్రజల మధ్య మత, భాష, ప్రాంతీయ, వర్గ వైవిధ్యములను అధిగమించి, సామరస్యమును, సోదర భావమును పెంపాందించుట, ప్రీల గౌరవం తగ్గించు ఆచారములను విడనాడుట;
6. మన ఉమ్మడి సంస్కృతినీ, సుసంపన్న సంప్రదాయాలను గౌరవించి రక్షించుట;
7. అడవులు, సరస్సులు, నదులు, అడవి జంతువులతో సహ ప్రాకృతిక పరిసరాలను కాపాడి అభివృద్ధి చేయుట మరియు సమస్త జీవుల యొదల కరుణార్థత కలిగి వుండుట.
8. శాస్త్రియ దృక్పథాన్ని, మానవతావాదాన్ని, జిజ్ఞాసను, సంస్కరణ తత్త్వాన్ని పెంపాందించుకొనటం;
9. ప్రజల ఆస్తిని సంరక్షించుట, హింసను విడనాడుట;
10. ప్రయత్నాలు, సాధనల ఉన్నతస్థాయిలను నిరంతరం అందుకొనునట్లుగా వైయుక్త, సమిష్ట కార్య రంగాలన్నింటిలో వ్రేష్ట కోసం, కృషి చేయుట ప్రాథమిక కర్తవ్యమై వుండవలెను.
11. ఆరు నుండి పద్మాలుగు సంవత్సరముల వయస్సు కలిగిన బాలునికి లేదా బాలికకు తలి తండ్రి లేదా సంరక్షకునిగావన్న వ్యక్తి తనబిడ్డ లేదా సందర్భానుసారము తన సంరక్షితునికి విద్యార్థునకు అపకాశములు కల్పించవలెను.

(అధికరణ 51 A)

విద్యాహక్కు చట్టం

6 నుండి 14 సంవత్సరముల పిల్లలందరికి ఉచిత నిర్వంద ఎలిమెంటరీ విద్యనందించడానికి ఉద్దేశించబడినవి. ఇది ఏప్రిల్ 1, 2010 నుండి అమల్లోకి వచ్చింది.

చట్టంలోని ముఖ్యంగాలు:

- పిల్లలందరికి అందుబాటులో పారశాలలను ఏర్పాటుచేయాలి.
- పారశాలలను మార్లిక వసతులను కల్పించాలి.
- పిల్లలందరిని వయస్సుకు తగిన తరగతిలో చేర్చించాలి.
- వయస్సుకు తగ్గ తరగతిలో చేర్చిన తర్వాత తోటి వారితో సమానంగా ఉండటానికి ప్రత్యేకశిక్షణ ఇప్పించాలి.
- ప్రత్యేక అపసరాలు కల్గిన పిల్లలకు సాధారణ పిల్లలతోపాటు విద్యకొనసాగించడానికి తగువసతులు విర్మాటలు చేయాలి.
- బడిలో చేర్చుకొనికి ఎలాంటి పరీక్షలు నిర్వహించరాదు. ఎటువంటి రుసుము, చార్టీలు వసూలు చేయరాదు.
- బడిలో చేర్చిన పిల్లల పేరు తీసివేయడం, అదే తరగతిలో కొనసాగించడం చేయరాదు.
- పిల్లల్ని శారీరకంగా, మానసికంగా హింసించరాదు.
- వయస్సు నిర్ధారణ పత్రం, ఇతర ధృవీకరణ పత్రాలు లేవేనే కారణం చేత పిల్లలకు బడిలో ప్రవేశాన్ని నిరాకరించరాదు.
- తగిన అర్ద తలున్న వారిని మాత్రమే ఉపాధ్యాయులుగా నియమించాలి.
- పిల్లలు నిర్దేశించిన సామాన్యాలు సాధించేలా బోధనాభ్యసనం, మూలాయంకనం ఉండాలి.
- ఎలిమెంటరీ విద్య పూర్తయేవరకు పిల్లలకు ఎలాంటి బోర్డు పరీక్షలు నిర్వహించరాదు.
- పద్మాలుగు సంవత్సరాలు పూర్తయినపుటికినీ, ఎలిమెంటరీ విద్య పూర్తయేవరకు పారశాలలో పిల్లలు కొనసాగవచ్చును.
- బలహీన వర్గాలకు, ప్రతికూల పరిస్థితులను ఎదుర్కొంటున్న బృందాలకు చెందిన పిల్లలు ఏ విధమైన విషక్తతకు గురికాకుండా చూడాలి.
- రాజ్యంగంలో పాంచవరిచిన విలువలకు అనుగుణంగా, విద్యార్థులను భయం, అందోళనకు గురిచేయసి రీతిలో వారి సర్వతోముఖ్యాభివృద్ధికి తోడ్పడే పార్యాప్రభాషిక రూపాందించాలి.

Mathematics

Textbook for Class VII

Semester - 2



**State Council of Educational Research & Training
Andhra Pradesh**



© Government of Andhra Pradesh, Amaravati

First Published 2023

All rights reserved

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

The copyright holder of this book is the Commissioner of School Education, Amaravati, Andhra Pradesh.

This book has been printed on 70 G.S.M. SS Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

Free distribution by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh

Printed in India
at the A.P. Govt. Text Book Press
Amaravati
Andhra Pradesh

MATHEMATICS

Class - VII Semester - 2

Text Book Development Committee

Sri Praveen Prakash I.A.S

Principal Secretary to Government
Department of School Education, AP

Sri S. Suresh Kumar I.A.S

Commissioner of School Education &
State Project Director, Samagra Shiksha, AP

Ms. Nidhi Meena I.A.S

Special Officer English Medium Project
O/o the Commissioner of School Education, AP

Dr. B. Pratap Reddy

MA., B.Ed., Ph.D.
Director, SCERT, AP

Sri K. Ravindranadh Reddy

M.A., B.Ed.
Director, Govt. Text book Press, AP

Programme Co-ordinator

Dr. G. Kesava Reddy

Prof. C&T, SCERT, AP

Subject Co-ordinators

Sri. Kathari Satish Babu

Faculty, SCERT, AP

Sri. Kesiraju Srinivas

Faculty, SCERT, AP

Sri. Sarikonda Satish

Faculty, SCERT, AP

Technical Co-ordinator

Dr. Ch.V.S. Ramesh Kumar

Faculty, SCERT-AP

Published by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh, Amaravati.

Translators

Sri **Gangalapudi Bhasker**, SA(Maths)
Z.P.H.S, Venkatagiri, Tirupathi Dt.

Sri **Pathivada Ravi Sankar**, SA(Maths)
Z.P.H.S, Komaragiri, Kakinada Dt

Sri **Syad Shahinsha**, SA(Maths)
Mpl.H.S, Ch.R.Palem, Bhimavaram, West Godavari Dt

Sri **Bhushanam Narasimha Prathap**, SA(Maths)
Z.P.H.S, Narasapuram, Ananthapuramu Dt.

Dr. **Chennamsetti Ramesh**, SA(Maths)
M.P.U.P.S, Vallabhabaopalem, Guntur Dt.

Sri **Rangam Reddy Sankara Narayana Reddy**, SA(Maths)
ZPHS, Nallamada, Sri Satya Sai Dt

Sri **Peddinti VLN Sri Ram**, SA(Maths)
Jn.Mpl.HS, Amalapuram, Dr.B.R. Ambedkar Konaseema Dt.

Smt. **Yasam Jaya Bharathi**, SA(Maths)
ZPHS(G), Giddalur, Prakasam Dt.

Sri **Gorthi VS Sastry**, SA(Maths)
ZPHS, Kollipadu, Srikakulam Dt.

Smt. **Cripati Radhika**, SA(Maths)
ZPGHS, Gooty, Ananatapuramu Dt.

Sri **Tupakula Murali**, SA(Maths)
ZPHS, Karakambadi, Tirupathi Dt.

Designing & Page Layout Durga Graphics, Bapatla.

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Dr H.K. Dewan for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

New Delhi
20 November 2006

Director
National Council of Educational
Research and Training

Rationalisation of Content in the Textbooks

In view of the COVID-19 pandemic, it is imperative to reduce content load on students. The National Education Policy 2020, also emphasises reducing the content load and providing opportunities for experiential learning with creative mindset. In this background, the NCERT has undertaken the exercise to rationalise the textbooks across all classes. Learning Outcomes already developed by the NCERT across classes have been taken into consideration in this exercise.

Contents of the textbooks have been rationalised in view of the following:

- Overlapping with similar content included in other subject areas in the same class
- Similar content included in the lower or higher class in the same subject
- Difficulty level
- Content, which is easily accessible to students without much interventions from teachers and can be learned by children through self-learning or peer-learning
- Content, which is irrelevant in the present context

This present edition, is a reformatted version after carrying out the changes given above.

FOREWORD

“The only way to learn Mathematics is to do Mathematics” - Paul Halmos

India has a rich tradition and several contributions to Mathematics, Since ancient times and the legacy has continued over generations by various means, Mathematics provides an effective way of building mental discipline and encourages logical reasoning and mental rigor. Besides this, mathematical knowledge also plays a crucial role in understanding the Content of other School Subjects in the School.

The New Educational policy (NEP), 2020, provides a platform to build, nurture, foster, encourage and multiply mathematical thinking. It's introduced the reforms needed to balance the need for 21st century employment and entrepreneurship, which is marked by critical, lateral and mathematical thinking.

As efforts are made in preparing high-quality bilingual text books and teaching-learning materials for mathematics, so that the students are enabled to think and speak about the subject both in their home language / mother tongue and English .

The State council of Educational Research and Training (SCERT), Andhra Pradesh (A.P.) has been adopting the National Council of Educational Research and Training (NCERT) Curriculum in the State Starting from the Academic year 2022-23, for the class VIII and now, it is for the class VII in this academic year, 2023-24, with the sole aim of preparing the Government School Students, hailing from even a very backward area, to compete on par with any corporate School student in this Competitive world.

We are thankful and indebted to our Honourable chief Minister Sri Y. S. Jagan Mohan Reddy who's committed for Systematic reforms and continuous improvement in quality education, in order to groom and see our students, as Global citizens, We extend our gratitude to our Hon'ble Minister for Education, Sri Botcha Satyanarayana for his continued support in this endeavour. Our special thanks to Sri Praveen Prakash, IAS, Principal Secretary to Government, Department of School Education, A.P., Sri. S. Suresh Kumar, IAS, Commissioner of School Education & State Project Director, Smagra Shiksha, A.P. and Ms. Nidhi Meena IAS,Special officer, English Medium Project, A.P., for their constant motivation and guidance.

We convey our sincere thanks to the translators who've carried out the translation work of NCERT class VII mathematics textbook, content into Telugu Language, we also thank our Editors, Subject Co-ordinators and DTP and Layout designers for their Contribution for the development of this textbook.

We invite Constructive feedback from the teachers, parents and Educationalists for further improvement of the text book, in the interest of student s' community.

“Teaching Mathematics is a journey, not a destination” Keep going ahead.

Dr. B. Pratap Reddy,
Director,
State Council of Educational
Research and Training
Andhra Pradesh

Preface

The National Curriculum Framework (NCF), 2005 suggests the need for developing the ability for mathematisation in the child. It points out that the aim of learning mathematics is not merely being able to do quantitative calculations but also to develop abilities in the child that would enable her/him to redefine her/his relationship with the World. The NCF-2005 also lays emphasis on development in the children logical abilities as well as abilities to comprehend space, spatial transformations and develop the ability to visualise both these. It recommends that mathematics needs to slowly move towards abstraction even though it starts from concrete experiences and models. The ability to generalise and perceive patterns is an important step in being able to relate to the abstract and logic governed nature of the subject.

We also know that most children in upper primary and secondary classes develop a fear of mathematics and it is one of the reasons for students not being able to continue in schools. NCF-2005 has also mentioned this problem and has therefore emphasised the need to develop a programme which is relevant and meaningful. The need for conceptualising mathematics teaching allows children to explore concepts as well as develop their own ways of solving problems. This also forms corner-stone of the principles highlighted in the NCF-2005.

In Class VI we have begun the process of developing a programme which would help children understand the abstract nature of mathematics while developing in them the ability to construct their own concepts. As suggested by NCF-2005, an attempt has been made to allow multiple ways of solving problems and encouraging children to develop strategies different from each other. There is an emphasis on working with basic principles rather than on memorisation of algorithms and short-cuts.

The Class VII textbook has continued that spirit and has attempted to use language which the children can read and understand themselves. This reading can be in groups or individual and at some places require help and support by the teacher. We also tried to include a variety of examples and opportunities for children to set problems. The appearance of the book has sought to be made pleasant by including many illustrations. The book attempts to engage the mind of the child actively and provides opportunities to use concepts and develop her/his own structures rather than struggling with unnecessarily complicated terms and numbers.

We hope that this book would help all children in their attempt to learn mathematics and would build in them the ability to appreciate its power and beauty. We also hope that this would enable to revisit and consolidate concepts and skills that they have learnt in the primary school. We hope to strengthen the foundation of mathematics, on which further engagement with studies as well as her daily life would become possible in an enriched manner.

The team in developing the textbook consists of many teachers who are experienced and brought to the team the view point of the child and the school. We also had people who have done research in learning of mathematics and those who have been writing textbooks for mathematics for many years. The team has tried to make an effort to remove fear of mathematics from the minds of children and make it a part of their daily routine even outside the school. We had many discussions and a review process with some other teachers of schools across the country. The effort by the team has been to accommodate all the comments. In the end, I would like to place on record our gratefulness to Prof Krishna Kumar, Director, NCERT, Prof G. Ravindra, Joint Director, NCERT and Prof Hukum Singh, Head, DESM, for giving opportunity to me and the team to work on this challenging task. I am also grateful to Prof J.V. Narlikar, Chairperson of the Advisory Group in Science and Mathematics for his suggestions. I am also grateful for the support of all those who were part of this team including Prof S.K. Singh Gautam, Dr V.P. Singh and Dr Ashutosh K. Wazalwar from NCERT, who have worked very hard to make this possible. In the end I must thank the Publication Department of NCERT for its support and advice and those from Vidya Bhawan who helped produce the book.

The process of developing materials is a continuous one and we would hope to make this book better. Suggestions and comments on the book are most welcome.

Dr H.K. Dewan
Chief Advisor
 Textbook Development Committee

A Note for the Teachers

This book is a continuation of the process and builds on what was initiated in Class VI. We had shared with you the main points reflected in NCF-2005. These include relating mathematics to a wider development of abilities in children, moving away from complex calculations and algorithms following, to understanding and constructing a framework of understanding. The mathematical ideas in the mind of the child grow neither by telling nor by merely giving explanations. For children to learn mathematics, to be confident in it and understand the foundational ideas, they need to develop their own framework of concepts. This would require a classroom where children discuss ideas, look for solutions of problems, set new problems and find not only their own ways of solving problems but also their own definitions with the language they can use and understand. These definitions need not be as general and complete as the standard ones.

In the mathematics class it is important to help children read with understanding the textbook and other references. The reading of materials is not normally considered to be related to learning of mathematics but learning mathematics any further would require the child to comprehend the text. The text in mathematics uses a language that has brevity. It requires the ability to deal with terseness and with symbols, to follow logical arguments and appreciate the need for keeping certain factors and constraints. Children need practice in translating mathematical statements into normal statements expressing ideas in words and vice-a-versa. We would require children to become confident of using language in words and also being able to communicate through mathematical statements.

Mathematics at the upper primary stage is a major challenge and has to perform the dual role of being both close to the experience and environment of the child and being abstract. Children often are not able to work in terms of ideas alone. They need the comfort of context and/or models linked to their experience to find meaning. This stage presents before us the challenge of engaging the children while using the contexts but gradually moving them away from such dependence. So while children should be able to identify the principles to be used in a contextual situation, they should not be dependent or be limited to contexts. As we progress further in the middle school there would be greater requirement from the child to be able to do this.

Learning mathematics is not about remembering solutions or methods but knowing how to solve problems. Problem-solving strategies give learners opportunities to think rationally, enabling them to understand and create methods as well as processes; they become active participants in the construction of new knowledge rather than being passive receivers. Learners need to identify and define a problem, select or design possible solutions and revise or redesign the steps, if required. The role of a teacher gets modified to that of a guide and facilitator. Students need to be provided with activities and challenging problems, along with sets of many problem-solving experiences.

On being presented a problem, children first need to decode it. They need to identify the knowledge required for attempting it and build a model for it. This model could be in the form of an illustration or a situation construct. We must remember that for generating proofs in geometry the figures constructed are also models of the ideal dimensionless figure. These diagrams are, however, more abstract than the concrete models required for attempting problems in arithmetic and algebra. Helping children to develop the ability to construct appropriate models by breaking up the problems and evolving their own strategies and analysis of problems is extremely important. This should replace prescriptive algorithms to solve problems.

Teachers are expected to encourage cooperative learning. Children learn a lot in purposeful conversation with each other. Our classrooms should develop in the students the desire and capacity to learn from each other rather than compete. Conversation is not noise and consultation is not cheating. It is a challenge to make possible classroom groups that benefit the most from being with each other

and in which each child contributes to the learning of the group. Teachers must recognise that different children and different groups will use distinct strategies. Some of these strategies would appear to be more efficient and some not as efficient. They would reflect the modelling done by each group and would indicate the process of thinking used. It is inappropriate to identify the best strategy or pull down incorrect strategies. We need to record all strategies adopted and analyse them. During this, it is crucial to discuss why some of the strategies are unsuccessful. The class as a group can improve upon the ineffective and unsuccessful strategies and correct them. This implies that we need to complete each strategy rather than discard some as incorrect or inappropriate. Exposures to a variety of strategies would deepen mathematical understanding and ability to learn from others. This would also help them to understand the importance of being aware of what one is doing.

Enquiry to understand is one of the natural ways by which students acquire and construct knowledge. The process can even begin with casual observations and end in generation and acquisition of knowledge. This can be aided by providing examples for different forms of questioning-explorative, open-ended, contextual, error detection etc. Students need to get exposed to challenging investigations. For example in geometry there could be things like, experimenting with suitable nets for solids, visualising solids through shadow play, slicing and elevations etc. In arithmetic we can make them explore relationships among members, generalise the relationships, discover patterns and rules and then form algebraic relations etc.

Children need the opportunity to follow logical arguments and find loopholes in the arguments presented. This will lead them to understand the requirement of a proof.

At this stage topics like Geometry are poised to enter a formal stage. Provide activities that encourage students to exercise creativity and imagination while discovering geometric vocabulary and relationships using simple geometric tools.

Mathematics has to emerge as a subject of exploration and creation rather than an exercise of finding answers to old and complicated problems. There is a need to encourage children to find many different ways to solve problems. They also need to appreciate the use of many alternative algorithms and strategies that may be adopted to solve a problem.

Topics like Integers, Fractions and Decimals, Symmetry have been presented here by linking them with their introductory parts studied in earlier classes. An attempt has been made to link chapters with each other and the ideas introduced in the initial chapters have been used to evolve concepts in the subsequent chapters. Please devote enough time to the ideas of negative integers, rational numbers, exploring statements in Geometry and visualising solids shapes.

We hope that the book will help children learn to enjoy mathematics and be confident in the concepts introduced. We want to recommend the creation of opportunity for thinking individually and collectively. Group discussions need to become a regular feature of mathematics classroom thereby making learners confident about mathematics and make the fear of mathematics a thing of past.

We look forward to your comments and suggestions regarding the book and hope that you will send interesting exercises, activities and tasks that you develop during the course of teaching, to be included in the future editions.

Textbook Development Committee

CHAIRPERSON, ADVISORY GROUP IN SCIENCE AND MATHEMATICS

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, Inter University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCCA), Ganeshkhind, Pune University, Pune, Maharashtra

CHIEF ADVISOR

H.K. Dewan, Vidya Bhawan Society, Udaipur, Rajasthan

CHIEF COORDINATOR

Hukum Singh, *Professor and Head (Retd.)*, DESM, NCERT, New Delhi

MEMBERS

Anjali Gupte, *Teacher*, Vidya Bhawan Public School, Udaipur, Rajasthan

Avantika Dam, *TGT*, CIE Experimental Basic School, Department of Education, Delhi

H.C. Pradhan, *Professor*, Homi Bhabha Centre for Science Education, TIFR, Mumbai, Maharashtra

Mahendra Shankar, *Lecturer (S.G.) (Retd.)*, NCERT, New Delhi

Meena Shrimali, *Teacher*, Vidya Bhawan Senior Secondary School, Udaipur, Rajasthan

R. Athmaraman, *Mathematics Education Consultant*, TI Matric Higher Secondary School and AMTI, Chennai, Tamil Nadu

S.K.S. Gautam, *Professor*, DESM, NCERT, New Delhi

Shradha Agarwal, *PGT*, Sir Padampat Singhania Education Centre, Kanpur (U.P.)

Srijata Das, *Senior Lecturer* in Mathematics, SCERT, New Delhi

V.P. Singh, *Reader (Retd.)*, DESM, NCERT, New Delhi

MEMBER-COORDINATOR

Ashutosh K. Wazalwar, *Professor*, DESM, NCERT, New Delhi

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop – Ms. Nirupma Sahni, *TGT*, Mahavir Digambar Jain Sr. Sec. School, Jaipur; Dr Roohi Fatima, *TGT*, Jamia Middle School, New Delhi; Ms. Deepti Mathur, *TGT*, Mother's International School, New Delhi; Shri K. Balaji, *TGT*, Kendriya Vidyalaya, Donimalai, Karnataka; Shri Amit Bajaj, *TGT*, CRPF Public School, Delhi; Ms. Omlata Singh, *TGT*, Presentation Convent Sr. Sec. School, Delhi; Shri Nagesh S. Mone, *TGT*, Dravid High School, Wai, Maharashtra; Shri Gorakh Nath Sharma, *PGT*, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Mesra, Ranchi, Jharkhand; Shri Ajay Kumar Singh, *TGT*, Ramjas Sr. Sec. School, No.3, Delhi; Ms. Ragini Subramanian, *TGT*, SRDF Vivekananda Vidyalaya, Chennai, Tamil Nadu; Shri Rajkumar Dhawan, *PGT*, Geeta Sr. Sec. School No.2, Delhi; Dr Sanjay Mudgil, *Lecturer*, CIET, NCERT, New Delhi; Dr. Sushma Jaireth, *Reader*, DWS, NCERT, New Delhi; Dr Mona Yadav, *Lecturer*, DWS, NCERT, New Delhi.

The Council acknowledges the comments/suggestions given by Dr Ram Avtar (*Retd. Professor*, NCERT) *Consultant*, DESM, NCERT, New Delhi, Dr R.P. Maurya, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi and Shri Sanjay Bolia, *Senior Teacher*, Vidya Bhawan Basic Secondary School, Udaipur, Rajasthan for the improvement of the content.

The Council acknowledges the support and facilities provided by Vidya Bhawan Society and its staff, Udaipur, for conducting workshops of the development committee at Udaipur, and to the Director, Centre for Science Education and Communication (CSEC), Delhi University for providing library help.

The Council acknowledges the academic and administrative support of Professor Hukum Singh, *Head*, DESM, NCERT, New Delhi.

The Council also acknowledges the efforts of S.M. Ikram, *DTP Operator*, Vidya Bhawan Society Udaipur; Sajjad Haider Ansari, Rakesh Kumar and Neelam Walecha, *DTP Operators*, Kanwar Singh, *Copy Editor*, NCERT; Abhimanyu Mohanty, *Proof Reader*, NCERT; Deepak Kapoor, *Computer Station Incharge*, DESM, NCERT for technical assistance, APC-office and the Administrative Staff, DESM, NCERT; and the Publication Department of the NCERT.

NATIONAL ANTHEM

*Jana gana mana adhinayaka jaya he
 Bharata bhagya vidhata
 Panjaba Sindhu Gujarata Maratha
 Dravida Utkala Banga
 Vindhya Himachala Yamuna Ganga
 uchchala jaladhi taranga
 Tava Subha name jage, tave subha
 asisa mage,
 gahe tava jaya gatha.
 Jana gana mangala dayaka jaya he
 Bharata bhagya vidhata.
 Jaya he, Jaya he, Jaya he,
 jaya jaya jaya jaya he.*

- Rabindranath Tagore

జాతీయ గీతం

జనగణమన అధినాయక జయహే!
 భారత భాగ్వతిధాతా!
 పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,
 త్రావిడ, ఉత్కృష్ట, వంగా!
 వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా!
 ఉష్ణల జలభి తరంగా!
 తవ శుభనామే జాగే!
 తవ శుభ ఆశిష మాగే
 గాహే తవ జయగాథా!
 జనగణ మంగళదాయక జయహే!
 భారత భాగ్వతిధాతా!
 జయహే! జయహే! జయహే!
 జయ జయ జయ జయహే!!

- రఘీంద్రానాథ్ రామార్

PLEDGE**ప్రతిజ్ఞ**

*India is my country. All Indians are my brothers and sisters.
 I love my country and I am proud of its rich and varied heritage.*

I shall always strive to be worthy of it.

*I shall give my parents, teachers and all elders respect,
 and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.*

To my country and my people, I pledge my devotion.

In their well-being and prosperity alone lies my happiness.

- Pydimarri Venkata Subba Rao

భారతదేశం నా మాత్రధూమి. భారతీయులందరూ నా సహాదరులు.
 నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ
 సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్పత పొందడానికి సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.
 నా తల్లిదండ్రుల్లి, ఉపాధ్యాయుల్లి, పెద్దలందల్లి గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితిను మర్చిదగా
 నడుచుకొంటాను. జంతువులపట్ల దయతో ఉంటాను.
 నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల నేపానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.
 వాలి శ్రీయేశ్వర్యద్వాలే నా ఆనందానికి ముఖాలం.

- పైడిమల్ వెంకటసుబ్బారావు

Isometric Dot Sheet

Contents

Chapter 8	Rational Numbers అకరణీయ సంఖ్యలు	2 - 41
Chapter 9	Perimeter and Area చుట్టూకొలత మరియు వైశాల్యం	42 - 73
Chapter 10	Algebraic Expressions బీజీయ సమాసాలు	74 - 93
Chapter 11	Exponents and Powers ఘూతాలు మరియు ఘూతాంకాలు	94 - 125
Chapter 12	Symmetry సామ్యవం	126 - 149
Chapter 13	Visualising Solid Shapes ఘనాకృతుల దృశ్యకరణ	150 - 181
	Answers జవాబులు	182 - 198
	Brain-Teasers మెదడుకు మేత	198 - 201

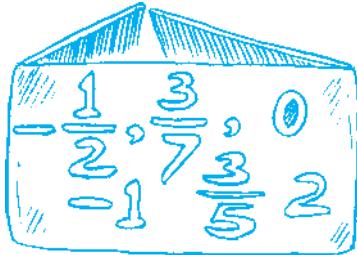


Teacher corner



Student corner

Rational Numbers



8.1 INTRODUCTION

You began your study of numbers by counting objects around you. The numbers used for this purpose were called counting numbers or natural numbers. They are 1, 2, 3, 4, ... By including 0 to natural numbers, we got the whole numbers, i.e., 0, 1, 2, 3, ... The negatives of natural numbers were then put together with whole numbers to make up integers. Integers are ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, We, thus, extended the number system, from natural numbers to whole numbers and from whole numbers to integers.

You were also introduced to fractions. These are numbers of the form $\frac{\text{numerator}}{\text{denominator}}$, where the numerator is either 0 or a positive integer and the denominator, a positive integer. You compared two fractions, found their equivalent forms and studied all the four basic operations of addition, subtraction, multiplication and division on them.

In this Chapter, we shall extend the number system further. We shall introduce the concept of rational numbers alongwith their addition, subtraction, multiplication and division operations.

8.2 NEED FOR RATIONAL NUMBERS

Earlier, we have seen how integers could be used to denote opposite situations involving numbers. For example, if the distance of 3 km to the right of a place was denoted by 3, then the distance of 5 km to the left of the same place could be denoted by -5. If a profit of ₹ 150 was represented by 150 then a loss of ₹ 100 could be written as -100.

There are many situations similar to the above situations that involve fractional numbers.

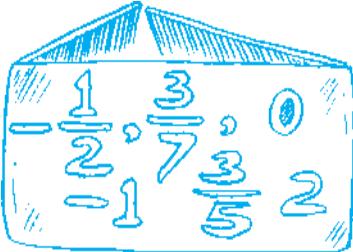
You can represent a distance of 750m above sea level as $\frac{3}{4}$ km. Can we represent 750m below sea level in km? Can we denote the distance of $\frac{3}{4}$ km below sea level by $\frac{-3}{4}$? We can

see $\frac{-3}{4}$ is neither an integer, nor a fractional number. We need to extend our number system to include such numbers.

అకరణీయ సంఖ్యలు



8.1 పరిచయం



మీ చుట్టూ ఉన్న వస్తువులను లెక్కించడం ద్వారా మీరు సంఖ్యల అధ్యయనాన్ని ప్రారంభించారు. ఈ ప్రయోజనం కోసం ఉపయోగించిన సంఖ్యలను గణన సంఖ్యలు లేదా సహజ సంఖ్యలు అని పిలుస్తారు. అవి 1, 2, 3, 4, ... సహజ సంఖ్యలకు 0 ను చేర్చడం ద్వారా, మనము పూర్ణాంకములు 0, 1, 2, 3, ... లను పొందాము, సహజ సంఖ్యల యొక్క బుఱి సంఖ్యలను పూర్ణాంకములకు కలిపిన పూర్ణ సంఖ్యలు ఏర్పడతాయి. పూర్ణ సంఖ్యలు ..., -3, -2, -1, -0, 1, 2, 3, సహజ సంఖ్యల నుండి పూర్ణాంకాలకు, పూర్ణాంకాలనుండి పూర్ణసంఖ్యలకు మనం సంఖ్య వ్యవస్థను విస్తరించాము.

లవము

మీకు భిన్నాలు కూడా పరిచయం చేయబడ్డాయి. ఇవి $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, 0, -1, \frac{3}{5}, 2$ లేదా ధన పూర్ణసంఖ్య మరియు హరము, ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య. మీరు రెండు భిన్నాలను పోల్చడం, వాటికి సమానమైన రూపాలను కనుగొనడం మరియు వాటిపై సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణించడం మరియు భాగహరం అనే నాలుగు ప్రాథమిక పరిక్రియలను అధ్యయనం చేశారు.

ఈ అధ్యాయంలో మనం సంఖ్య వ్యవస్థను మరింత విస్తరించాం. మనం అకరణీయ సంఖ్యల భావనను వాటి సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణించడం మరియు భాగహరములను పరిచయం చేశాం.

8.2 అకంటీయ సంఖ్యల అవసరం

ఇంతకు ముందు, సంఖ్యలతో కూడిన వ్యతిరేక పరిస్థితులను సూచించడానికి పూర్ణ సంఖ్యలను ఎలా ఉపయోగించవచ్చే మనం చూశాము. ఉదాహరణకు, ఒక ప్రదేశం నుండి కుడివైపుకు 3 కిలోమీటర్ల దూరాన్ని 3 ద్వారా సూచించినట్లయితే, అప్పుడు అదే ప్రదేశం నుండి ఎడమకు 5 కిలోమీటర్ల దూరాన్ని -5 ద్వారా సూచించవచ్చు. ఒకవేళ రూ 150 లాభాన్ని 150 ద్వారా సూచించినట్లయితే, అప్పుడు రూ 100 నష్టాన్ని -100 వలె రాయవచ్చు.

పై సందర్భాలను పోలిన అనేక సందర్భాలు భిన్నాలను కలిగి ఉన్నాయి.

మీరు సముద్ర మట్టానికి 750 మీటర్ల దూరాన్ని $\frac{3}{4}$ కి.మీ గా సూచిస్తారు. మనం సముద్ర మట్టానికి దిగువన

750 మీటర్లను కి.మీలో సూచించగలమా? సముద్రమట్టానికి దిగువన $\frac{3}{4}$ కి.మీ ఉన్న దూరాన్ని $\frac{-3}{4}$ తో మనం

సూచించగలమా? చూడండి $\frac{-3}{4}$ అనేది పూర్ణసంఖ్య కాదు మరియు భిన్న సంఖ్య కాదు. అటువంటి సంఖ్యలను చేర్చడానికి మన సంఖ్య వ్యవస్థను విస్తరించాల్సిన అవసరం ఉంది.

8.3 WHAT ARE RATIONAL NUMBERS?

The word ‘rational’ arises from the term ‘ratio’. You know that a ratio like 3:2 can also be written as $\frac{3}{2}$. Here, 3 and 2 are natural numbers.

Similarly, the ratio of two integers p and q ($q \neq 0$), i.e., $p:q$ can be written in the form $\frac{p}{q}$. This is the form in which rational numbers are expressed.

A rational number is defined as a number that can be expressed in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

Thus, $\frac{4}{5}$ is a rational number. Here, $p = 4$ and $q = 5$.

Is $\frac{-3}{4}$ also a rational number? Yes, because $p = -3$ and $q = 4$ are integers.

- You have seen many fractions like $\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, 1\frac{2}{3}$ etc. All fractions are rational numbers. Can you say why?
How about the decimal numbers like 0.5, 2.3, etc.? Each of such numbers can be written as an ordinary fraction and, hence, are rational numbers. For example, $0.5 = \frac{5}{10}$, $0.333 = \frac{333}{1000}$ etc.



TRY THESE

1. Is the number $\frac{2}{-3}$ rational? Think about it.
2. List ten rational numbers.

Numerator and Denominator

In $\frac{p}{q}$, the integer p is the numerator, and the integer q ($\neq 0$) is the denominator.

Thus, in $\frac{-3}{7}$, the numerator is -3 and the denominator is 7 .

Mention five rational numbers each of whose

- (a) Numerator is a negative integer and denominator is a positive integer.
- (b) Numerator is a positive integer and denominator is a negative integer.
- (c) Numerator and denominator both are negative integers.
- (d) Numerator and denominator both are positive integers.

- Are integers also rational numbers?

Any integer can be thought of as a rational number. For example, the integer -5 is a rational number, because you can write it as $\frac{-5}{1}$. The integer 0 can also be written as

$0 = \frac{0}{2}$ or $\frac{0}{7}$ etc. Hence, it is also a rational number.

Thus, rational numbers include integers and fractions.



8.3 అకరణీయ సంఖ్యలు అంటే ఏమిటి?

అకరణీయ అనే పదం ‘ratio’ అనే పదం నుండి ఉద్భవించింది. $3:2$ వంటి నిష్పత్తిని $\frac{3}{2}$ అని కూడా రాయవచ్చని మీకు తెలుసు. ఇక్కడ 3 మరియు 2 లు సహజ సంఖ్యలు.

ఇదేవిధంగా, p మరియు q ($q \neq 0$), అనే రెండు పూర్ణసంఖ్యల నిష్పత్తిని, అంటే $p:q$ ని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయచు. ఇది అకరణీయ సంఖ్యలను వ్యక్తికరించే రూపం. $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగల సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలు అందురు. ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$.

$\frac{4}{5}$ ఒక అకరణీయసంఖ్య. ఇక్కడ, $p = 4$ మరియు $q = 5$.

$\frac{-3}{4}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్య అగునా? అవును, ఎందుకంటే $p = -3$ మరియు $q = 4$ లు పూర్ణసంఖ్యలు.

- మీరు $\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, 1\frac{2}{3}$ మొదలైన అనేక భిన్నాలను చూశారు? భిన్నాలన్నీ అకరణీయసంఖ్యలు అగునా. ఎందుకో చెప్పగలరా...
0.5, 2.3, మొ... వంటి దశాంశ సంఖ్యల గురించి ఏమి చెప్పగలరు? అటువంటి ప్రతి సంఖ్యను కూడా సామాన్య భిన్నంగా రాయవచ్చ అందువల్ల అవి అకరణీయ సంఖ్యలు ..ఉదాహరణకు, $0.5 = \frac{5}{10}$, $0.333 = \frac{333}{1000}$ మొదలైనవి.



ప్రయత్నించండి

1. $\frac{2}{-3}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్యనా? దాని గురించి ఆలోచించండి. 2. పది అకరణీయ సంఖ్యల జాబితా రాయండి.

లవము మరియు హోరము

$\frac{p}{q}$ లో p ని లవము అనీ, మరియు q ($\neq 0$) ని హోరము అనీ అందురు.

$\frac{-3}{7}$, లో లవం -3 మరియు హోరము 7 .

ప్రతీ ఒక్క దానికి ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను పేర్కొనండి.

- (a) లవము అనేది బుఱ పూర్ణసంఖ్య మరియు హోరము అనేది ధన పూర్ణసంఖ్య .
- (b) లవము అనేది ధన పూర్ణసంఖ్య మరియు హోరము అనేది బుఱ పూర్ణసంఖ్య
- (c) లవము మరియు హోరము రెండూ బుఱ పూర్ణ సంఖ్యలు.
- (d) లవము మరియు హోరము రెండూ ధన పూర్ణ సంఖ్యలు.

- పూర్ణసంఖ్యలు కూడా అకరణీయ సంఖ్యలేనా?

పూర్ణ సంఖ్యను ఏదైనా అకరణీయ సంఖ్యగా భావించవచ్చ. ఉదాహరణకి, పూర్ణసంఖ్య -5 ఒక అకరణీయ

సంఖ్య, ఎందుకంటే మీరు దానిని $\frac{-5}{1}$. లా రాయవచ్చ. పూర్ణసంఖ్య 0 ను కూడా $0 = \frac{0}{2} = \frac{0}{7}$ మొదలైన

విధాలుగా రాయవచ్చ. అందువల్ల, ఇది కూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్య ..

అందువల్ల, అకరణీయ సంఖ్యలలో పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు భిన్నాలు ఉంటాయి.



Equivalent rational numbers

A rational number can be written with different numerators and denominators. For example,

consider the rational number $\frac{-2}{3}$.



$$\frac{-2}{3} = \frac{-2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{-4}{6}. \text{ We see that } \frac{-2}{3} \text{ is the same as } \frac{-4}{6}.$$

$$\text{Also, } \frac{-2}{3} = \frac{(-2) \times (-5)}{3 \times (-5)} = \frac{10}{-15}. \text{ So, } \frac{-2}{3} \text{ is also the same as } \frac{10}{-15}.$$

Thus, $\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6} = \frac{10}{-15}$. Such rational numbers that are equal to each other are said to be equivalent to each other.

$$\text{Again, } \frac{10}{-15} = \frac{-10}{15} \text{ (How?)}$$

By multiplying the numerator and denominator of a rational number by the same non zero integer, we obtain another rational number equivalent to the given rational number. This is exactly like obtaining equivalent fractions.

Just as multiplication, the division of the numerator and denominator by the same non zero integer, also gives equivalent rational numbers. For example,

$$\frac{10}{-15} = \frac{10 \div (-5)}{-15 \div (-5)} = \frac{-2}{3}, \quad \frac{-12}{24} = \frac{-12 \div 12}{24 \div 12} = \frac{-1}{2}$$

We write $\frac{-2}{3}$ as $-\frac{2}{3}$, $\frac{-10}{15}$ as $-\frac{10}{15}$, etc.

TRY THESE

Fill in the boxes:

$$(i) \frac{5}{4} = \frac{\square}{16} = \frac{25}{\square} = \frac{-15}{\square}$$

$$(ii) \frac{-3}{7} = \frac{\square}{14} = \frac{9}{\square} = \frac{-6}{\square}$$

8.4 POSITIVE AND NEGATIVE RATIONAL NUMBERS

Consider the rational number $\frac{2}{3}$. Both the numerator and denominator of this number are positive integers. Such a rational number is called a **positive rational number**. So, $\frac{3}{8}, \frac{5}{7}, \frac{2}{9}$ etc. are positive rational numbers.

TRY THESE

- Is 5 a positive rational number?
- List five more positive rational numbers.

The numerator of $\frac{-3}{5}$ is a negative integer, whereas the denominator is a positive integer. Such a rational number is called a **negative rational number**. So, $\frac{-5}{7}, \frac{-3}{8}, \frac{-9}{5}$ etc. are negative rational numbers.

సమానమైన అకరణీయ సంఖ్యలు

ఒక అకరణీయ సంఖ్యను విభిన్న లవములు మరియు హోరములతో ప్రాయివచ్చు. ఉదాహరణకి

అకరణీయ సంఖ్య $\frac{-2}{3}$ ను పరిగణించండి.



$$\frac{-2}{3} = \frac{-2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{-4}{6}, \frac{-2}{3}, \frac{-4}{6} \text{ లు ఒకటే అని చూడవచ్చు.}$$

$$\frac{-2}{3} = \frac{(-2) \times (-5)}{3 \times (-5)} = \frac{10}{-15}, \frac{-2}{3}, \frac{10}{-15} \text{ లు ఒకటే అని చూడవచ్చు.}$$

అందుకని, $\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6} = \frac{10}{-15}$. అటువంటి సమానమైన అకరణీయ సంఖ్యలను తుల్య అకరణీయ సంఖ్యలు అందురు

మరలా, $\frac{10}{-15} = \frac{-10}{15}$ (ఎందుకు?)

ఒక అకరణీయ సంఖ్య యొక్క లవము మరియు హోరములను సున్నాకాని ఒకే(శూన్యతర) పూర్ణసంఖ్యతో గుణించడం ద్వారా, ఇవ్వబడిన అకరణీయసంఖ్యకు సమానమైన మరొక అకరణీయ సంఖ్యను మనం పొందుతాం. ఇది ఖచ్చితంగా సమాన భీన్మాలను పొందడం వంటిది.

గుణించడం మాదిరిగానే, సున్నా కాని ఒకే పూర్ణసంఖ్య చేత లవము మరియు హోరములను భాగించడం ద్వారా కూడా సమానమైన అకరణీయ సంఖ్యలను ఇస్తుంది. ఉదాహరణకి,

$$\frac{10}{-15} = \frac{10 \div (-5)}{-15 \div (-5)} = \frac{-2}{3}, \quad \frac{-12}{24} = \frac{-12 \div 12}{24 \div 12} = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{-2}{3} \text{ ను } -\frac{2}{3}, \frac{-10}{15} \text{ ను } -\frac{10}{15}, \text{ మొటి గా రాయవచ్చు}$$

8.4 ధన మరియు బుఱ అకరణీయ సంఖ్యలు

$\frac{2}{3}$ అకరణీయ సంఖ్యను పరిగణించండి. ఈ సంఖ్య యొక్క లవము మరియు హోరము రెండూ ధన పూర్ణ సంఖ్యలు ఇటువంటి అకరణీయ సంఖ్యను ధన అకరణీయ సంఖ్య అంటారు. అందువల్ల $\frac{3}{8}, \frac{5}{7}, \frac{2}{9}$ మొటి ధన అకరణీయ సంఖ్యలు.

ప్రయత్నించండి

- 5 ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్యనా?
- మరో ఐదు ధన అకరణీయ సంఖ్యలను జాబితా రాయండి.

$\frac{-3}{5}$ లో లవము బుఱ పూర్ణ సంఖ్య, హోరము ధన పూర్ణ సంఖ్య. ఇటువంటి అకరణీయ సంఖ్యను బుఱ అకరణీయ సంఖ్య అంటారు.
కాబట్టి $\frac{-5}{7}, \frac{-3}{8}, \frac{-9}{5}$ మొటి బుఱ అకరణీయ సంఖ్యలు.

- Is $\frac{8}{-3}$ a negative rational number? We know that $\frac{8}{-3} = \frac{8 \times -1}{-3 \times -1} = \frac{-8}{3}$, and $\frac{-8}{3}$ is a negative rational number. So, $\frac{8}{-3}$ is a negative rational number.

Similarly, $\frac{5}{-7}, \frac{6}{-5}, \frac{2}{-9}$ etc. are all negative rational numbers. Note that

their numerators are positive and their denominators negative.

- The number 0 is neither a positive nor a negative rational number.

- What about $\frac{-3}{-5}$?

You will see that $\frac{-3}{-5} = \frac{-3 \times (-1)}{-5 \times (-1)} = \frac{3}{5}$. So, $\frac{-3}{-5}$ is a positive rational number.

Thus, $\frac{-2}{-5}, \frac{-5}{-3}$ etc. are positive rational numbers.

TRY THESE

- Is -8 a negative rational number?
- List five more negative rational numbers.



TRY THESE

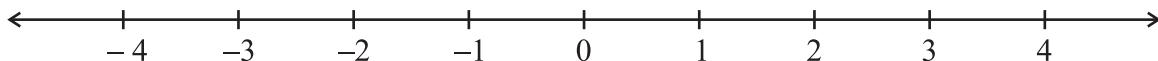
Which of these are negative rational numbers?

- (i) $\frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{3}{-5}$ (iv) 0 (v) $\frac{6}{11}$ (vi) $\frac{-2}{-9}$



8.5 RATIONAL NUMBERS ON A NUMBER LINE

You know how to represent integers on a number line. Let us draw one such number line.



The points to the right of 0 are denoted by + sign and are positive integers. The points to the left of 0 are denoted by – sign and are negative integers.

Representation of fractions on a number line is also known to you.

Let us see how the rational numbers can be represented on a number line.

Let us represent the number $-\frac{1}{2}$ on the number line.

As done in the case of positive integers, the positive rational numbers would be marked on the right of 0 and the negative rational numbers would be marked on the left of 0.

To which side of 0 will you mark $-\frac{1}{2}$? Being a negative rational number, it would be marked to the left of 0.

You know that while marking integers on the number line, successive integers are marked at equal intervals. Also, from 0, the pair 1 and -1 is equidistant. So are the pairs 2 and -2 , 3 and -3 .

- $\frac{8}{-3}$ ఒక బుఱ అకరణీయ సంఖ్యనా? $\frac{8}{-3} = \frac{8 \times -1}{-3 \times -1} = \frac{-8}{3}$ మరియు $\frac{-8}{3}$

ఒక బుఱ అకరణీయ సంఖ్య. కాబట్టి $\frac{-8}{3}$ ఒక బుఱ అకరణీయ సంఖ్య.

ఇదే విధంగా $\frac{5}{-7}, \frac{6}{-5}, \frac{2}{-9}$ మొదలైనవి అన్ని బుఱ అకరణీయ సంఖ్యలు. వాటి

లవములు. ధన మరియు వాటి హరములు బుఱ పూర్ణ సంఖ్యలు అని గమనించండి.

- సంఖ్య 0 అనేది ధన లేదా బుఱ అకరణీయ సంఖ్య కాదు.

- $\frac{-3}{-5}$ ఏమవుతుంది?

$\frac{-3}{-5} = \frac{-3 \times (-1)}{-5 \times (-1)} = \frac{3}{5}$..కాబట్టి $\frac{3}{5}$ ఒక ధన ఆకరణీయ సంఖ్య.

అందుకని, $\frac{-2}{-5}, \frac{-5}{-3}$ మొటివి ధన ఆకరణీయ సంఖ్యలు

ప్రయత్నించండి

1. -8 ఒక బుఱ అకరణీయ సంఖ్య?
2. మరో ఐదు బుఱ అకరణీయ సంఖ్యలను జాబితా రాయండి.



ప్రయత్నించండి

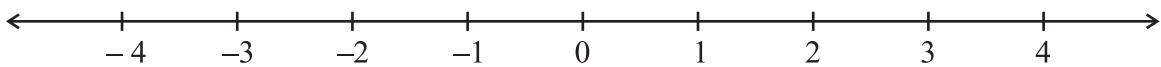
క్రిందివాటిలో ఏవి బుఱ అకరణీయ సంఖ్యలు?

- (i) $\frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{3}{-5}$ (iv) 0 (v) $\frac{6}{11}$ (vi) $\frac{-2}{-9}$



8.5 సంఖ్యారేఖపై అకరణీయ సంఖ్యలు

సంఖ్యారేఖపై పూర్ణ సంఖ్యలను ఎలా సూచించాలో మీకు తెలుసు. అటువంటి ఒక సంఖ్యారేఖను గేయండి.



0 కి కుడివైపున ఉన్న బిందువులు + గుర్తు ద్వారా సూచించబడతాయి మరియు అవి ధన పూర్ణ సంఖ్యలు. '0' కి ఎడమవైపున ఉన్న బిందువులు - గుర్తు ద్వారా సూచించబడతాయి మరియు అవి బుఱ పూర్ణ సంఖ్యలు. సంఖ్యారేఖపై భిన్నాలను సూచించటం కూడా మీకు తెలుసు. ఆకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై ఎలా సూచించవచ్చే చూద్దాం.

మనం సంఖ్యారేఖపై $-\frac{1}{2}$ సంఖ్యను సూచించాం.

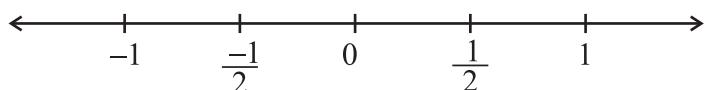
ధన పూర్ణ సంఖ్యల విషయంలో చేసినట్లుగా, ధన ఆకరణీయ సంఖ్యలు '0'కు కుడివైపున మరియు బుఱ ఆకరణీయ సంఖ్యలు '0' కు ఎడమవైపున గుర్తించబడతాయి.

మీరు '0' కు ఏ వైపున $-\frac{1}{2}$ ను గుర్తిస్తారు? ఇది బుఱ ఆకరణీయ సంఖ్య కావడం వల్ల, '0' కు ఎడమవైపున గుర్తించబడింది.

సంఖ్యారేఖపై పూర్ణ సంఖ్యలను గుర్తించేటప్పుడు, వరుస పూర్ణ సంఖ్యలు సమాన దూరాల వద్ద గుర్తించబడతాయనే విషయం మీకు తెలుసు.'0' నుండి 1 మరియు -1 లు సమాన దూరాలలో ఉంటాయి. ఇలాగే 2 మరియు -2, 3 మరియు -3 లు కూడా ఉంటాయి.

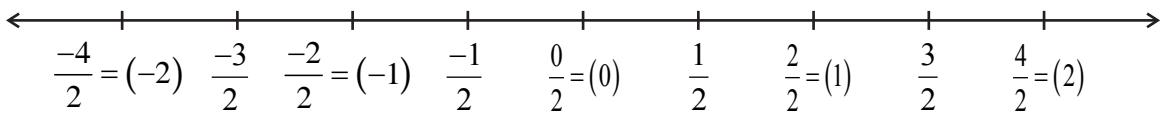
In the same way, the rational numbers $\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$ would be at equal distance from 0.

We know how to mark the rational number $\frac{1}{2}$. It is marked at a point which is half the distance between 0 and 1. So, $-\frac{1}{2}$ would be marked at a point half the distance between 0 and -1 .



We know how to mark $\frac{3}{2}$ on the number line. It is marked on the right of 0 and lies halfway between 1 and 2. Let us now mark $-\frac{3}{2}$ on the number line. It lies on the left of 0 and is at the same distance as $\frac{3}{2}$ from 0.

In decreasing order, we have, $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2} (= -1), \frac{-3}{2}, \frac{-4}{2} (= -2)$. This shows that $\frac{-3}{2}$ lies between -1 and -2 . Thus, $\frac{-3}{2}$ lies halfway between -1 and -2 .



Mark $\frac{-5}{2}$ and $\frac{-7}{2}$ in a similar way.

Similarly, $-\frac{1}{3}$ is to the left of zero and at the same distance from zero as $\frac{1}{3}$ is to the right. So as done above, $-\frac{1}{3}$ can be represented on the number line. Once we know how to represent $-\frac{1}{3}$ on the number line, we can go on representing $-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}$ and so on. All other rational numbers with different denominators can be represented in a similar way.



8.6 RATIONAL NUMBERS IN STANDARD FORM

Observe the rational numbers $\frac{3}{5}, \frac{-5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{-7}{11}$.

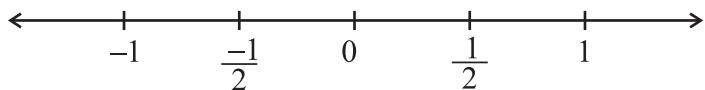
The denominators of these rational numbers are positive integers and 1 is the only common factor between the numerators and denominators. Further, the negative sign occurs only in the numerator.

Such rational numbers are said to be in **standard form**.

ఇదేవిధంగా, అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{1}{2}$ మరియు $-\frac{1}{2}$ లు '0' నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి.

$\frac{1}{2}$ అకరణీయ సంఖ్యను ఎలా గుర్తించాలో తెలుసు. ఇది '0' మరియు 1 ల మధ్య సగం దూరంలో

గుర్తించబడింది. కాబట్టి $-\frac{1}{2}$ అనేది '0' మరియు -1 ల మధ్య సగం దూరంలో గుర్తించ బడుతుంది.

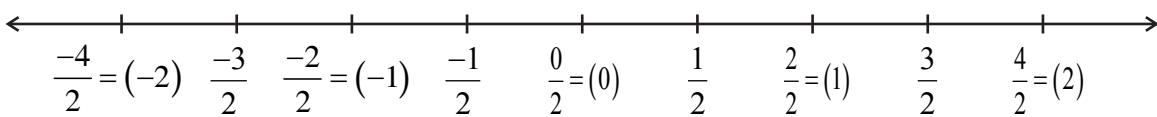


$\frac{3}{2}$ ను సంఖ్యారేఖపై ఎలా గుర్తించాలో మనకు తెలుసు. ఇది '0' యొక్క కుడివైపున 1 మరియు 2 మధ్య

సగం దూరంలో గుర్తించ బడింది. మనం ఇప్పుడు $-\frac{3}{2}$ ను సంఖ్యారేఖ పై గుర్తించాం. ఇది '0' నుండి $\frac{3}{2}$ కు గలదూరం లో '0' కు ఎడమ వైపున ఉంటుంది.

$-\frac{1}{2}, -\frac{2}{2} (= -1), -\frac{3}{2}, -\frac{4}{2} (= -2)$ లు అవరోహణక్రమంలో ఉన్నాయి. దీని నుండి $-\frac{3}{2}$ అనేది

-1 మరియు -2 . మధ్యఉంటుంది. కాబట్టి $-\frac{3}{2}$ అనేది -1 మరియు -2 మధ్య సమాన దూరంలో ఉంటుంది



ఇదేవిధంగా $\frac{-5}{2}$ మరియు $\frac{-7}{2}$ లను గుర్తించండి.

ఇదేవిధంగా, $-\frac{1}{3}$ ఇది సున్నాకు ఎడమవైపున ఉంటుంది మరియు $\frac{1}{3}$ సున్నా నుంచి అదే దూరంలో కుడివైపున ఉంటుంది. అందువల్ల పైన చేసినట్లుగా $-\frac{1}{3}$ ను సంఖ్యారేఖపై గుర్తించడం ఎలాగో తెలిస్తే చాలు, మనము $-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}$ మొగా వాటిని గుర్తించ వచ్చు. విభిన్న హరాలతో ఉన్న అన్ని ఇతర అకరణీయ సంఖ్యలను ఇదే విధంగా సూచించవచ్చు).



8.6 ప్రామాణిక రూపంలో అకరణీయ సంఖ్యలు

$\frac{3}{5}, \frac{-5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{-7}{11}$ అకరణీయ సంఖ్యలను పరిశీలించండి.

ఈ అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క హరాలు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు లవములు మరియు హరముల మధ్య ఏకైక ఉమ్మడి కారణంకం 1. ఇంకా, బుఱ గుర్తు లవములో మాత్రమే కనిపిస్తుంది.

అటువంటి అకరణీయ సంఖ్యలు ప్రామాణిక రూపంలో ఉన్నాయని చెబుతారు.

A rational number is said to be in the standard form if its denominator is a positive integer and the numerator and denominator have no common factor other than 1.

If a rational number is not in the standard form, then it can be reduced to the standard form.

Recall that for reducing fractions to their lowest forms, we divided the numerator and the denominator of the fraction by the same non zero positive integer. We shall use the same method for reducing rational numbers to their standard form.

EXAMPLE 1 Reduce $\frac{-45}{30}$ to the standard form.

SOLUTION We have, $\frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 3}{30 \div 3} = \frac{-15}{10} = \frac{-15 \div 5}{10 \div 5} = \frac{-3}{2}$

We had to divide twice. First time by 3 and then by 5. This could also be done as

$$\frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 15}{30 \div 15} = \frac{-3}{2}$$

In this example, note that 15 is the HCF of 45 and 30.

Thus, to reduce the rational number to its standard form, we divide its numerator and denominator by their HCF ignoring the negative sign, if any. (The reason for ignoring the negative sign will be studied in Higher Classes)

If there is negative sign in the denominator, divide by ‘– HCF’.

EXAMPLE 2 Reduce to standard form:

(i) $\frac{36}{-24}$

(ii) $\frac{-3}{-15}$

SOLUTION

(i) The HCF of 36 and 24 is 12.

Thus, its standard form would be obtained by dividing by –12.

$$\frac{36}{-24} = \frac{36 \div (-12)}{-24 \div (-12)} = \frac{-3}{2}$$

(ii) The HCF of 3 and 15 is 3.

$$\text{Thus, } \frac{-3}{-15} = \frac{-3 \div (-2)}{-15 \div (-3)} = \frac{1}{5}$$



TRY THESE

Find the standard form of (i) $\frac{-18}{45}$

(ii) $\frac{-12}{18}$



ఒక అకరణీయ సంఖ్య యొక్క హారము ఒక ధన పూర్తి సంఖ్య మరియు లవహరాలకు 1 తప్ప మరే ఇతర ఉమ్మడి కారణాంకం లేనట్లయితే దానిని ప్రామాణిక రూపంలో ఉన్నట్లుగా చేర్కొంటారు.

ఒకవేళ అకరణీయ సంఖ్య ప్రామాణిక రూపంలో లేనట్లయితే, అప్పుడు దానిని ప్రామాణిక రూపానికి మార్చవచ్చు.

భిన్నాలను వాటి కనిప్ప రూపాలకు తగ్గించడం కొరకు, మనం భిన్నం యొక్క లవమును మరియు హారమును సున్నాకాని ఒకే ధన పూర్తి సంఖ్య చే భాగించామని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. అకరణీయసంఖ్యలను వాటి ప్రామాణిక రూపానికి తగ్గించడానికి మనం అదే పద్ధతిని ఉపయోగిస్తాము.

ఉదాహరణ 1 $\frac{-45}{30}$ ను ప్రామాణిక రూపంలో రాయండి

$$\text{సాధన} \quad \frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 3}{30 \div 3} = \frac{-15}{10} = \frac{-15 \div 5}{10 \div 5} = \frac{-3}{2}$$

మనము రెండుసార్లు భాగించాల్సి వచ్చింది. మొదటిసారి 3తో తరువాత 5తో దీనిని ఇలా కూడా చేయవచ్చు.

$$\frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 15}{30 \div 15} = \frac{-3}{2}$$

ఈ ఉదాహరణలో, 15 అనేది 45 మరియు 30 యొక్క గ. సా. భా అని గమనించండి.

అందువల్ల, అకరణీయ సంఖ్యను దాని ప్రామాణిక రూపానికి తగ్గించడానికి, బుఱగుర్తును పట్టించుకోకుండా దాని లవము మరియు హారము లను వాటి గ. సా. భా చే భాగిస్తాము. (బుఱగుర్తును నిర్మక్కాం చేయడానికి గల కారణాన్ని పై తరగతుల్లో అధ్యయనం చేస్తారు)

ఒకవేళ హారములో నెగిటివ్ గుర్తు ఉన్నట్లయితే, ‘- గ. సా. భా’ చేత భాగిస్తాము.

ఉదాహరణ 2 ప్రామాణిక రూపంలోకి మార్చండి:

$$(i) \frac{36}{-24} \qquad (ii) \frac{-3}{-15}$$

సాధన

(i) 36 మరియు 24 యొక్క గ. సా. భా 12.

కాబట్టి, దీని యొక్క ప్రామాణిక రూపం వీటిని -12 చే భాగించడం ద్వారా పొందవచ్చు.



$$\frac{36}{-24} = \frac{36 \div (-12)}{-24 \div (-12)} = \frac{-3}{2}$$

(ii) 3 మరియు 15 యొక్క గ. సా. భా 3.

$$\text{కాబట్టి } \frac{-3}{-15} = \frac{-3 \div (-2)}{-15 \div (-3)} = \frac{1}{5}$$

ప్రయత్నించండి

$$(i) \frac{-18}{45} \qquad (ii) \frac{-12}{18} \quad \text{ల ప్రామాణిక రూపం కనుగొనుము}$$



8.7 COMPARISON OF RATIONAL NUMBERS

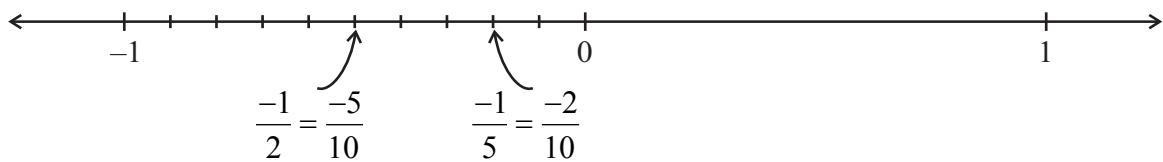
We know how to compare two integers or two fractions and tell which is smaller or which is greater among them. Let us now see how we can compare two rational numbers.

- Two positive rational numbers, like $\frac{2}{3}$ and $\frac{5}{7}$ can be compared as studied earlier in the case of fractions.
- Mary compared two negative rational numbers $-\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{5}$ using number line. She knew that the integer which was on the right side of the other integer, was the greater integer.

For example, 5 is to the right of 2 on the number line and $5 > 2$. The integer -2 is on the right of -5 on the number line and $-2 > -5$.

She used this method for rational numbers also. She knew how to mark rational numbers

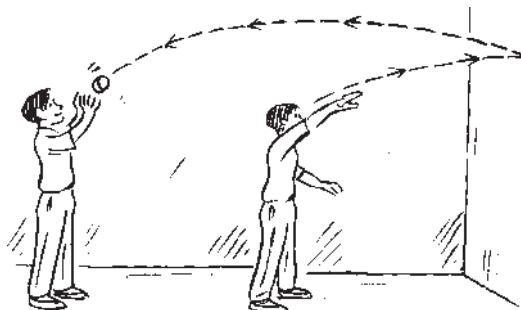
on the number line. She marked $-\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{5}$ as follows:



Has she correctly marked the two points? How and why did she convert $-\frac{1}{2}$ to $-\frac{5}{10}$ and $-\frac{1}{5}$ to $-\frac{2}{10}$? She found that $-\frac{1}{5}$ is to the right of $-\frac{1}{2}$. Thus, $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$ or $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$.

Can you compare $-\frac{3}{4}$ and $-\frac{2}{3}$? $-\frac{1}{3}$ and $-\frac{1}{5}$?

We know from our study of fractions that $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$. And what did Mary get for $-\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{5}$? Was it not exactly the opposite?



You will find that, $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ but $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$.

Do you observe the same for $-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{3}$ and $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5}$?

Mary remembered that in integers she had studied $4 > 3$ but $-4 < -3$, $5 > 2$ but $-5 < -2$ etc.

8.7 అకరణీయ సంఖ్యల పోలిక

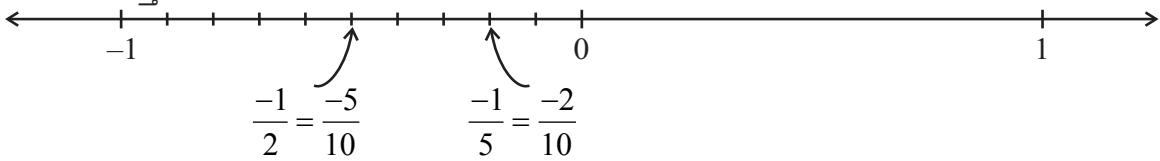
రెండు పూర్తి సంఖ్యలను లేదా రెండు భిన్నాలను ఎలా పోల్చాలో మనకు తెలుసు మరియు వాటిలో ఏది చిన్నది లేదా ఏది పెద్దది అని చెప్పవచ్చు. ఇప్పుడు మనం రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను ఎలా పోల్చవచ్చే చూదాం.

- ఇంతకు ముందు భిన్నాలను అధ్యయనం చేసినట్లుగా $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$ వంటి రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను పోల్చవచ్చు.
- మేరీ రెండు బుఱ అకరణీయ సంఖ్యలు $-\frac{1}{2}$ మరియు $-\frac{1}{5}$ లను సంఖ్యారేఖను ఉపయోగించి పోల్చింది. ఒక పూర్ణాంకానికి కుడి వైపున ఉన్న పూర్ణాంకం పెద్ద పూర్ణాంకం అని అమెకు తెలుసు. ఉదాహరణకు, 5 అనేది సంఖ్యారేఖపై 2 యొక్క కుడివైపున ఉంది. మరియు $5 > 2$. పూర్ణసంఖ్య -2 సంఖ్య రేఖపై -5 కు కుడివైపున ఉంటుంది మరియు $-2 > -5$.

అకరణీయ సంఖ్యలకు కూడా అమె ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించింది. అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖ

పై ఎలా గుర్తించాలో అమెకు తెలుసు. సంఖ్యారేఖపై అమె $-\frac{1}{2}$ మరియు $-\frac{1}{5}$ లను ఈ క్రింది విధంగా

గుర్తించింది:



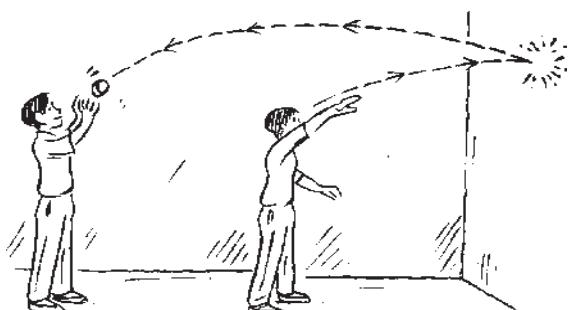
రెండు బిందువులను అమె సరిగ్గా గుర్తించిందా? అమె ఎలా $-\frac{1}{2}$ ను $-\frac{5}{10}$ మరియు $-\frac{1}{5}$ ను

$-\frac{2}{10}$ గాను ఎందుకు మార్చింది? అమె $-\frac{1}{5}$ అనేది $-\frac{1}{2}$ కు కుడివైపున కనుగొంది. అందువల్ల $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$

లేదా $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$.

$-\frac{3}{4}$ మరియు $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$ మరియు $-\frac{1}{5}$ లను పోల్చగలరా? భిన్నాల అధ్యయనం ద్వారా $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ అని

మనకు తెలుసు. $-\frac{1}{2}$ మరియు $-\frac{1}{5}$? నుండి మేరీ ఏమి గమనించింది? ఇది ఖచ్చితంగా వ్యతిరేఖం కాదా?



$\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ కానీ $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$ అని మీరు కనుగొంటారు.

$-\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}$ మరియు $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}$ లకు కూడా అదే గమనించారా?

తాను చదివిన పూర్ణసంఖ్యల నుండి $4 > 3$, $3 > 2$, $2 > 1$, $1 > 0$, $0 > -1$, $-1 > -2$, $-2 > -3$, $-3 > -4$, $-4 > -5$ అని అమె కనుగొంచారు.

- The case of pairs of negative rational numbers is similar. *To compare two negative rational numbers, we compare them ignoring their negative signs and then reverse the order.*

For example, to compare $-\frac{7}{5}$ and $-\frac{5}{3}$, we first compare $\frac{7}{5}$ and $\frac{5}{3}$.

We get $\frac{7}{5} < \frac{5}{3}$ and conclude that $\frac{-7}{5} > \frac{-5}{3}$.

Take five more such pairs and compare them.

Which is greater $-\frac{3}{8}$ or $-\frac{2}{7}$?; $-\frac{4}{3}$ or $-\frac{3}{2}$?

- Comparison of a negative and a positive rational number is obvious. A negative rational number is to the left of zero whereas a positive rational number is to the right of zero on a number line. So, a negative rational number will always be less than a positive rational number.

Thus, $-\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$.

- To compare rational numbers $\frac{-3}{-5}$ and $\frac{-2}{-7}$ reduce them to their standard forms and then compare them.

EXAMPLE 3 Do $\frac{4}{-9}$ and $\frac{-16}{36}$ represent the same rational number?

SOLUTION Yes, because $\frac{4}{-9} = \frac{4 \times (-4)}{9 \times (-4)} = \frac{-16}{36}$ or $\frac{-16}{36} = \frac{-16 + -4}{35 \div -4} = \frac{-4}{-9}$.



8.8 RATIONAL NUMBERS BETWEEN TWO RATIONAL NUMBERS

Reshma wanted to count the whole numbers between 3 and 10. From her earlier classes, she knew there would be exactly 6 whole numbers between 3 and 10. Similarly, she wanted to know the total number of integers between -3 and 3. The integers between -3 and 3 are -2, -1, 0, 1, 2. Thus, there are exactly 5 integers between -3 and 3.

Are there any integers between -3 and -2? No, there is no integer between -3 and -2. Between two successive integers the number of integers is 0.

- బుఱ అకరణీయ సంఖ్యల జతల విషయంలో కూడా ఇలాగే ఉంటుంది. రెండు బుఱ అకరణీయ సంఖ్యలను పోల్చుడానికి, వాటి బుఱ సంకేతాలను వట్టించు కోకుండా వాటిని పోల్చి, ఆపై (క్రమాన్ని మార్పు) చేస్తాము.

$-\frac{7}{5}$ మరియు $-\frac{5}{3}$ లను పోల్చుడానికి మనము మొదట $\frac{7}{5}$ మరియు $\frac{5}{3}$ లను పోల్చుతాము

$$\frac{7}{5} < \frac{5}{3} \text{ కావున } \frac{-7}{5} > \frac{-5}{3} \text{ అని నిర్ణయిస్తాము}$$

ఇలాంటి మరో ఐదు జతలను తీసుకోండి. మరియు వాటిని పోల్చండి.

వీటిలో ఏది పెద్దది? $-\frac{3}{8}$ లేదా $-\frac{2}{7}$?; $-\frac{4}{3}$ లేదా $-\frac{3}{2}$?

- బుఱ మరియు ధన అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క పోలిక స్ఫ్రాంగా కనిపిస్తుంది. ఒక సంఖ్యారేఖాపై బుఱ అకరణీయ సంఖ్య సున్నాకు ఎడమవైపున ఉంటుంది, అయితే ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్య సున్నాకు కుడివైపున ఉంటుంది. కాబట్టి, బుఱ అకరణీయ సంఖ్య ఎల్లప్పుడూ ధన అకరణీయ సంఖ్య కంటే తక్కువగా ఉంటుంది.

కావున, $-\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$.

- $-\frac{3}{5}$ మరియు $-\frac{2}{7}$ అకరణీయ సంఖ్యలను పోల్చుడానికివాటిని వాటి యొక్క ప్రామాణిక రూపాలకు మార్చండి మరియు అప్పుడు వాటిని పోల్చండి.

ఉదాహరణ 3 $\frac{4}{-9}$ మరియు $\frac{-16}{36}$ ఒకే అకరణీయ సంఖ్యను సూచిస్తాయా?

సాధన అవును, ఎందుకంటే $\frac{4}{-9} = \frac{4 \times (-4)}{9 \times (-4)} = \frac{-16}{36}$ లేదా $\frac{-16}{36} = \frac{-16 + -4}{35 \div -4} = \frac{-4}{-9}$.

8.8 రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అకరణీయ సంఖ్యలు

రేప్పు 3 మరియు 10 ల మధ్య మొత్తం పూర్ణాంకాలను లెక్కించాలనుకుంది. ఆమె మునుపటి తరగతుల నుండి, 3 మరియు 10 మధ్య ఖచ్చితంగా 6 పూర్ణాంకములు ఉంటాయని ఆమెకు తెలుసు. ఇదేవిధంగా, ఆమె -3 మరియు 3 మధ్య మొత్తం పూర్ణ సంఖ్యలను తెలుసుకోవాలనుకుంది. -3 మరియు 3 మధ్య ఉండే పూర్ణ సంఖ్యలు $-2, -1, 0, 1, 2$. అందువల్ల, -3 మరియు 3 లమధ్య ఖచ్చితంగా 5 పూర్ణ సంఖ్యలు ఉన్నాయి.

-3 మరియు -2 మధ్య ఏదైనా పూర్ణ సంఖ్యలు ఉన్నాయా? లేవు, వాటి మధ్య పూర్ణసంఖ్యలు లేవు.

రెండు వరుస పూర్ణసంఖ్యల మధ్య పూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య ‘0’.





Thus, we find that number of integers between two integers are limited (finite). Will the same happen in the case of rational numbers also?

Reshma took two rational numbers $\frac{-3}{5}$ and $\frac{-1}{3}$.

She converted them to rational numbers with same denominators.

$$\text{So } \frac{-3}{5} = \frac{-9}{15} \text{ and } \frac{-1}{3} = \frac{-5}{15}$$

$$\text{We have } \frac{-9}{15} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-5}{15} \text{ or } \frac{-3}{5} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3}$$

She could find rational numbers $\frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15}$ between $\frac{-3}{5}$ and $\frac{-1}{3}$.

Are the numbers $\frac{-8}{15}, \frac{-7}{15}, \frac{-6}{15}$ the only rational numbers between $-\frac{3}{5}$ and $-\frac{1}{3}$?

$$\text{We have } \frac{-3}{5} < \frac{-18}{30} \text{ and } \frac{-8}{15} < \frac{-16}{30}$$

$$\text{And } \frac{-18}{30} < \frac{-17}{30} < \frac{-16}{30} \text{. i.e., } \frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15}$$

$$\text{Hence } \frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3}$$

So, we could find one more rational number between $\frac{-3}{5}$ and $\frac{-1}{3}$.

By using this method, you can insert as many rational numbers as you want between two different rational numbers.

$$\text{For example, } \frac{-3}{5} = \frac{-3 \times 30}{5 \times 30} = \frac{-90}{150} \text{ and } \frac{-1}{3} = \frac{-1 \times 50}{3 \times 50} = \frac{-50}{150}$$

We get 39 rational numbers $\left(\frac{-89}{150}, \dots, \frac{-51}{150} \right)$ between $\frac{-90}{150}$ and $\frac{-50}{150}$

i.e., between $\frac{-3}{5}$ and $\frac{-1}{3}$. You will find that the list is unending.

Can you list five rational numbers between $\frac{-5}{3}$ and $\frac{-8}{7}$?

We can find unlimited number of rational numbers between any two rational numbers.



TRY THESE

Find five rational numbers

between $\frac{-5}{7}$ and $\frac{-3}{8}$.



అందువల్ల, రెండు పూర్ణసంఖ్యల మధ్య పూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య పరిమితం అని మనం కనుగొంటాము. అకరణీయ సంఖ్యల విషయంలో కూడా ఇదే జరుగుతుందా?

చేప్పు రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{-3}{5}$ మరియు $\frac{-1}{3}$ లను తీసుకుంది.

అమె వాటిని ఒకే హరము గల అకరణీయ సంఖ్యలుగా మార్చింది.

$$\text{అందువల్ల} \quad \frac{-3}{5} = \frac{-9}{15} \text{ మరియు } \frac{-1}{3} = \frac{-5}{15}$$

$$\frac{-9}{15} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-5}{15} \text{ తేడా } \frac{-3}{5} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3}$$

అమె $[-\frac{3}{5}, \frac{-1}{3}]$ మరియు $[-\frac{8}{15}, -\frac{7}{15}, -\frac{6}{15}]$ ల మధ్య $\frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15}$ అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొంది.

$[-\frac{3}{5}, \frac{-1}{3}]$ మరియు $[-\frac{8}{15}, -\frac{7}{15}, -\frac{6}{15}]$ ల మధ్య $\frac{-8}{15}, \frac{-7}{15}, \frac{-6}{15}$ అకరణీయ సంఖ్యలు మౌత్తమే గలవా?

$$\text{మనకు} \quad \frac{-3}{5} < \frac{-18}{30} \text{ మరియు } \frac{-8}{15} < \frac{-16}{30}$$

$$\text{మరియు} \quad \frac{-18}{30} < \frac{-17}{30} < \frac{-16}{30} \text{ అనగా, } \frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15}$$

$$\text{అందువల్ల, } \frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3}$$

కాబట్టి, మనం $[-\frac{3}{5}, \frac{-1}{3}]$ మరియు $[-\frac{8}{15}, -\frac{7}{15}, -\frac{6}{15}]$.

ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించడం ద్వారా, రెండు విభిన్న అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య మీకు కావలసినన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు ఉండవచ్చు.

$$\text{ఉదాహరణకి, } \frac{-3}{5} = \frac{-3 \times 30}{5 \times 30} = \frac{-90}{150} \text{ మరియు } \frac{-1}{3} = \frac{-1 \times 50}{3 \times 50} = \frac{-50}{150}$$

$$\text{మనకు } \frac{-90}{150} \text{ మరియు } \frac{-50}{150} \text{ ల మధ్య, అంటే } \frac{-3}{5} \text{ మరియు } \frac{-1}{3} \text{ ల మధ్య } 39$$

అకరణీయసంఖ్యలు $\left(\frac{-89}{150}, \dots, \frac{-51}{150} \right)$ ఉంటాయి. జాబితా అంతంకాదని మీరు కనుగొంటారు.

మీరు $-\frac{5}{3}$ మరియు $-\frac{8}{7}$ ల మధ్య ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను రాయగలరా?

వీదోనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అపరిమితమైన అకరణీయ సంఖ్యలను మనం కనుగొనవచ్చు).

ప్రయత్నించండి

$-\frac{5}{7}$ మరియు $-\frac{3}{8}$ ల మధ్య ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనండి?

EXAMPLE 4 List three rational numbers between -2 and -1 .

SOLUTION Let us write -1 and -2 as rational numbers with denominator 5 . (Why?)

We have, $-1 = \frac{-5}{5}$ and $-2 = \frac{-10}{5}$

So, $\frac{-10}{5} < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < \frac{-5}{5}$ or $-2 < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < -1$

The three rational numbers between -2 and -1 would be, $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$

(You can take any three of $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}, \frac{-6}{5}$)

EXAMPLE 5 Write four more numbers in the following pattern:

$$\frac{-1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-3}{9}, \frac{-4}{12}, \dots$$

SOLUTION We have,

$$\frac{-2}{6} = \frac{-1 \times 2}{3 \times 2}, \frac{-3}{9} = \frac{-1 \times 3}{3 \times 3}, \frac{-4}{12} = \frac{-1 \times 4}{3 \times 4}$$

$$\text{or } \frac{-1 \times 1}{3 \times 1} = \frac{-1}{3}, \frac{-1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{-2}{6}, \frac{-1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{-3}{9}, \frac{-1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{-4}{12}$$

Thus, we observe a pattern in these numbers.

The other numbers would be $\frac{-1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{-5}{15}, \frac{-1 \times 6}{3 \times 6} = \frac{-6}{18}, \frac{-1 \times 7}{3 \times 7} = \frac{-7}{21}$.



EXERCISE 8.1

1. List five rational numbers between:

(i) -1 and 0 (ii) -2 and -1 (iii) $\frac{-4}{5}$ and $\frac{-2}{3}$ (iv) $-\frac{1}{2}$ and $\frac{2}{3}$

2. Write four more rational numbers in each of the following patterns:

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-6}{10}, \frac{-9}{15}, \frac{-12}{20}, \dots$ (ii) $\frac{-1}{4}, \frac{-2}{8}, \frac{-3}{12}, \dots$



ఉదాహరణ 4 -2 మరియు -1 ల మధ్య మూడు అకరణీయ సంఖ్యలను రాయండి.

సాధన -1 మరియు -2 లను 5 హరముగా గల అకరణీయ సంఖ్యలుగా రాయుము. (ఎందుకు?)

$$\text{మనకు, } -1 = \frac{-5}{5} \text{ మరియు } -2 = \frac{-10}{5}$$

$$\text{అందువల్ల, } \frac{-10}{5} < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < \frac{-5}{5} \text{ or } -2 < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < -1$$

-2 మరియు -1 ల మధ్య మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$

$(\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}, \frac{-6}{5})$ మీరు వీటిలో ఏవైనా మూడింటిని తీసుకోవచ్చు).

ఉదాహరణ 5 Wకింది వరుసలో మరో నాలుగు సంఖ్యలను రాయండి :

$$\frac{-1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-3}{9}, \frac{-4}{12}, \dots$$

సాధన మనకు,

$$\frac{-2}{6} = \frac{-1 \times 2}{3 \times 2}, \frac{-3}{9} = \frac{-1 \times 3}{3 \times 3}, \frac{-4}{12} = \frac{-1 \times 4}{3 \times 4}$$

$$\text{లేదా, } \frac{-1 \times 1}{3 \times 1} = \frac{-1}{3}, \frac{-1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{-2}{6}, \frac{-1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{-3}{9}, \frac{-1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{-4}{12}$$



కావున, ఈ సంఖ్యలలో ఒక క్రమాన్ని మనం గమనించవచ్చు.

$$\text{ఇతర సంఖ్యలు ఇలా ఉంటాయి } \frac{-1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{-5}{15}, \frac{-1 \times 6}{3 \times 6} = \frac{-6}{18}, \frac{-1 \times 7}{3 \times 7} = \frac{-7}{21}.$$

అభ్యాసం 8. 1

1. కింది వాటి మధ్య ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను రాయండి:

$$(i) -1 \text{ మరియు } 0 \quad (ii) -2 \text{ మరియు } -1 \quad (iii) \frac{-4}{5} \text{ మరియు } \frac{-2}{3} \quad (iv) -\frac{1}{2} \text{ మరియు } -\frac{2}{3}$$

2. కింది ప్రతి నమూనాలో మరో నాలుగు అకరణీయ సంఖ్యలను రాయండి.:

$$(i) \frac{-3}{5}, \frac{-6}{10}, \frac{-9}{15}, \frac{-12}{20}, \dots \quad (ii) \frac{-1}{4}, \frac{-2}{8}, \frac{-3}{12}, \dots$$



(iii) $\frac{-1}{6}, \frac{2}{-12}, \frac{3}{-18}, \frac{4}{-24}, \dots$

(iv) $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}, \frac{4}{-6}, \frac{6}{-9}, \dots$

3. Give four rational numbers equivalent to:

(i) $\frac{-2}{7}$

(ii) $\frac{5}{-3}$

(iii) $\frac{4}{9}$

4. Draw the number line and represent the following rational numbers on it:

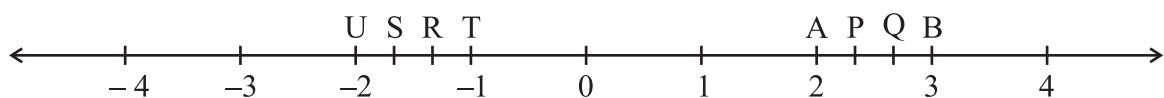
(i) $\frac{3}{4}$

(ii) $\frac{-5}{8}$

(iii) $\frac{-7}{4}$

(iv) $\frac{7}{8}$

5. The points P, Q, R, S, T, U, A and B on the number line are such that, TR = RS = SU and AP = PQ = QB. Name the rational numbers represented by P, Q, R and S.



6. Which of the following pairs represent the same rational number?

(i) $\frac{-7}{21}$ and $\frac{3}{9}$

(ii) $\frac{-16}{20}$ and $\frac{20}{-25}$

(iii) $\frac{-2}{-3}$ and $\frac{2}{3}$

(iv) $\frac{-3}{5}$ and $\frac{-12}{20}$

(v) $\frac{8}{-5}$ and $\frac{-24}{15}$

(vi) $\frac{1}{3}$ and $\frac{-1}{9}$

(vii) $\frac{-5}{-9}$ and $\frac{5}{-9}$

7. Rewrite the following rational numbers in the simplest form:

(i) $\frac{-8}{6}$

(ii) $\frac{25}{45}$

(iii) $\frac{-44}{72}$

(iv) $\frac{-8}{10}$

8. Fill in the boxes with the correct symbol out of $>$, $<$, and $=$.

(i) $\frac{-5}{7} \boxed{\quad} \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{-4}{5} \boxed{\quad} \frac{-5}{7}$

(iii) $\frac{-7}{8} \boxed{\quad} \frac{14}{-16}$

(iv) $\frac{-8}{5} \boxed{\quad} \frac{-7}{4}$

(v) $\frac{1}{-3} \boxed{\quad} \frac{-1}{4}$

(vi) $\frac{5}{-11} \boxed{\quad} \frac{-5}{11}$

(vii) $0 \boxed{\quad} \frac{-7}{6}$



(iii) $\frac{-1}{6}, \frac{2}{-12}, \frac{3}{-18}, \frac{4}{-24}, \dots$ (iv) $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}, \frac{4}{-6}, \frac{6}{-9}, \dots$

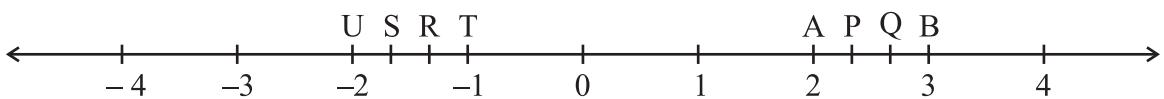
3. వీటికి సమానమైన నాలుగు అకరణీయ సంఖ్యలను ఇవ్వండి.:

(i) $\frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{5}{-3}$ (iii) $\frac{4}{9}$

4. సంఖ్యారేఖ గీయండి మరియు దానిపై కింది అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించండి.

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-5}{8}$ (iii) $\frac{-7}{4}$ (iv) $\frac{7}{8}$

5. బిందువులు P, Q, R, S, T, U, A మరియు B లు, $TR = RS = SU$ మరియు $AP = PQ = QB$ అగునట్లు సంఖ్యారేఖపై ఉన్నాయి. P, Q, R మరియు S లు సూచించే అకరణీయ సంఖ్యలను పేర్కొనండి.



6. కిందివాటిలో ఒకే అకరణీయ సంఖ్యను సూచించే జత ఏది?

(i) $\frac{-7}{21}$ మరియు $\frac{3}{9}$	(ii) $\frac{-16}{20}$ మరియు $\frac{20}{-25}$	(iii) $\frac{-2}{-3}$ మరియు $\frac{2}{3}$
(iv) $\frac{-3}{5}$ మరియు $\frac{-12}{20}$	(v) $\frac{8}{-5}$ మరియు $\frac{-24}{15}$	(vi) $\frac{1}{3}$ మరియు $\frac{-1}{9}$
(vii) $\frac{-5}{-9}$ మరియు $\frac{5}{-9}$		

7. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపం లో రాయండి.:

(i) $\frac{-8}{6}$ (ii) $\frac{25}{45}$ (iii) $\frac{-44}{72}$ (iv) $\frac{-8}{10}$

8. బాక్సులను $>$, $<$, మరియు $=$ స్వర్ణ గుర్తుతో నింపండి.

(i) $\frac{-5}{7} \boxed{\quad} \frac{2}{3}$	(ii) $\frac{-4}{5} \boxed{\quad} \frac{-5}{7}$	(iii) $\frac{-7}{8} \boxed{\quad} \frac{14}{-16}$
(iv) $\frac{-8}{5} \boxed{\quad} \frac{-7}{4}$	(v) $\frac{1}{-3} \boxed{\quad} \frac{-1}{4}$	(vi) $\frac{5}{-11} \boxed{\quad} \frac{-5}{11}$
(vii) $0 \boxed{\quad} \frac{-7}{6}$		



9. Which is greater in each of the following:

(i) $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$

(ii) $\frac{-5}{6}, \frac{-4}{3}$

(iii) $\frac{-3}{4}, \frac{2}{-3}$

(iv) $\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$

(v) $-3\frac{2}{7}, -3\frac{4}{5}$

10. Write the following rational numbers in ascending order:

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$

(ii) $\frac{-1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-4}{3}$

(iii) $\frac{-3}{7}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}$

8.9 OPERATIONS ON RATIONAL NUMBERS

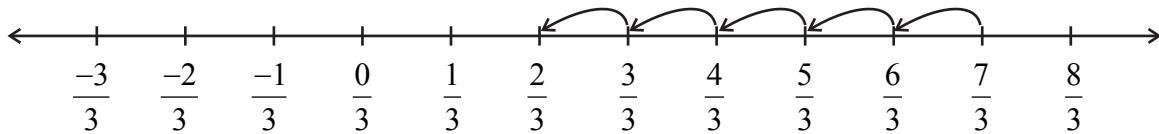
You know how to add, subtract, multiply and divide integers as well as fractions. Let us now study these basic operations on rational numbers.

8.9.1 Addition

- Let us add two rational numbers with same denominators, say $\frac{7}{3}$ and $\frac{-5}{3}$.

We find $\frac{7}{3} + \left(\frac{-5}{3}\right)$

On the number line, we have:



The distance between two consecutive points is $\frac{1}{3}$. So adding $\frac{-5}{3}$ to $\frac{7}{3}$ will

mean, moving to the left of $\frac{7}{3}$, making 5 jumps. Where do we reach? We reach at $\frac{2}{3}$.

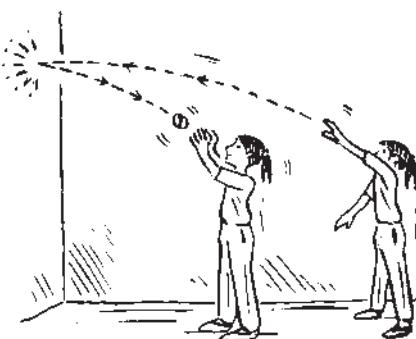
So, $\frac{7}{3} + \left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

Let us now try this way:

$$\frac{7}{3} + \frac{(-5)}{3} = \frac{7+(-5)}{3} = \frac{2}{3}$$

We get the same answer.

Find $\frac{6}{5} + \frac{(-2)}{5}$, $\frac{3}{7} + \frac{(-5)}{7}$ in both ways and check if you get the same answers.



9. కింది వాటిలో ఏది పెద్దది?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$

(ii) $\frac{-5}{6}, \frac{-4}{3}$

(iii) $\frac{-3}{4}, \frac{2}{-3}$

(iv) $\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$

(v) $-3\frac{2}{7}, -3\frac{4}{5}$

10. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను ఆరోహణ త్రమంలో రాయండి:

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$

(ii) $\frac{-1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-4}{3}$

(iii) $\frac{-3}{7}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}$

8.9 అకరణీయ సంఖ్యలపై పరిక్రియలు

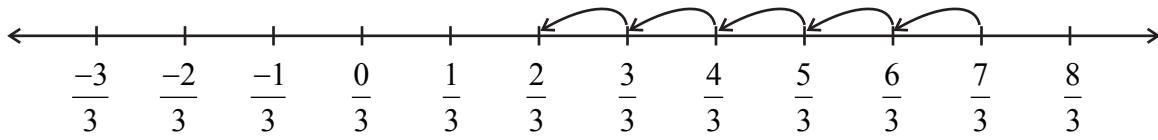
పూర్వ సంఖ్యలను అదేవిధంగా భిన్నాలను ఎలా కూడాలో, తీసివేయాలో, గుణించాలో మరియు భాగించాలో మీకు తెలుసు. అకరణీయ సంఖ్యలపై ఈ ప్రాథమిక పరిక్రియలను మనం ఇప్పుడు అధ్యయనం చేద్దాం.

8.9.1 సంకలనం

- ఒకే హరములతో గల రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను $\frac{7}{3}$ మరియు $\frac{-5}{3}$.

$$\frac{7}{3} + \left(\frac{-5}{3} \right)$$

సంఖ్యారేఖ పై కనుగొందాం:



రెండు వరస బిందువుల మధ్య దూరం $\frac{1}{3}$. కాబట్టి $\frac{-5}{3}$ ను $\frac{7}{3}$ కూ కలపడం. అంటే $\frac{7}{3}$, ఎడమ వైపుకు 5 స్థానాలు కదులుతుంది. మనం ఎక్కడికి చేరుకుంటాం? మనం $\frac{2}{3}$ వద్దకు చేరుకుంటాం.

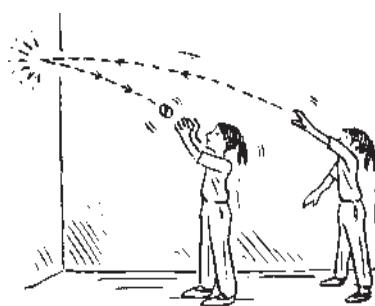
అందువల్ల, $\frac{7}{3} + \left(\frac{-5}{3} \right) = \frac{2}{3}$.

మనం ఇప్పుడు ఈ విధంగా ప్రయత్నించాం:

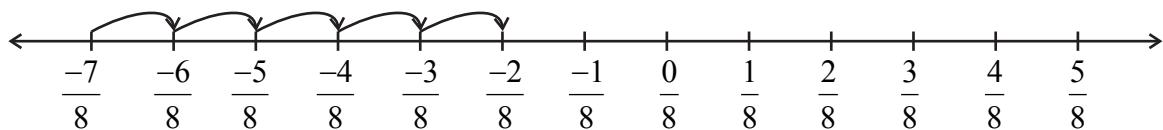
$$\frac{7}{3} + \frac{(-5)}{3} = \frac{7+(-5)}{3} = \frac{2}{3}$$

మనకు అదే సమాధానం వస్తుంది.

$\frac{6}{5} + \frac{(-2)}{5}, \frac{3}{7} + \frac{(-5)}{7}$ లను రెండు పద్ధతులలో కనుగొనండి. రెండు విధాలుగా మీరు ఒకే సమాధానాలు పొందుతున్నారా అని సరిచూడండి.



Similarly, $\frac{-7}{8} + \frac{5}{8}$ would be



What do you get?

Also, $\frac{-7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{-7+5}{8} = ?$ Are the two values same?



TRY THESE

Find: $\frac{-13}{7} + \frac{6}{7}, \frac{19}{5} + \left(\frac{-7}{5}\right)$

So, we find that while adding rational numbers with same denominators, we add the numerators keeping the denominators same.

Thus, $\frac{-11}{5} + \frac{7}{5} = \frac{-11+7}{5} = \frac{-4}{5}$

- How do we add rational numbers with different denominators? As in the case of fractions, we first find the LCM of the two denominators. Then, we find the equivalent rational numbers of the given rational numbers with this LCM as the denominator. Then, add the two rational numbers.



For example, let us add $\frac{-7}{5}$ and $\frac{-2}{3}$.

LCM of 5 and 3 is 15.

So, $\frac{-7}{5} = \frac{-21}{15}$ and $\frac{-2}{3} = \frac{-10}{15}$

Thus, $\frac{-7}{5} + \frac{(-2)}{3} = \frac{-21}{15} + \frac{(-10)}{15} = \frac{-31}{15}$

TRY THESE

Find:

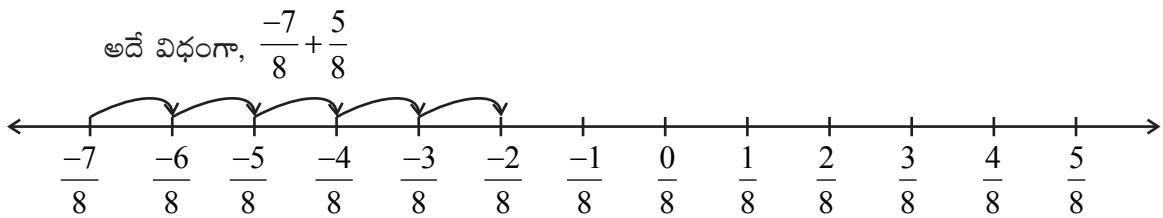
(i) $\frac{-3}{7} + \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{-5}{6} + \frac{-3}{11}$

Additive Inverse

What will be $\frac{-4}{7} + \frac{4}{7} = ?$

$\frac{-4}{7} + \frac{4}{7} = \frac{-4+4}{7} = 0$. Also, $\frac{4}{7} + \left(\frac{-4}{7}\right) = 0$.



మీకు ఏమి వచ్చింది?

అంతే కాకుండా, $\frac{-7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{-7+5}{8} = ?$ రెండు విలువలు సమానమేనా?



ప్రయత్నించండి

కనుగొనుము: $\frac{-13}{7} + \frac{6}{7}, \frac{19}{5} + \left(\frac{-7}{5}\right)$

కాబట్టి, ఒకే హరములతోగల అకరణీయ సంఖ్యలను సంకలనం చేసేటప్పుడు, హరములను అలాగే విధంగా ఉంచి లవములను సంకలనం చేస్తాము.

అందుకనీ, $\frac{-11}{5} + \frac{7}{5} = \frac{-11+7}{5} = \frac{-4}{5}$

- విభిన్న హరములతో అకరణీయ సంఖ్యలను మనం ఏవిధంగా కూడగలం? భిన్నాల విపుయంలో ఉండే విధంగా, మనం మొదట రెండు హరముల యొక్క క. సా. గు (LCM)ని కనుగొంటాము. తరువాత ఈ క. సా. గు (LCM) హరం గా ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క సమానమైన అకరణీయ సంఖ్యలను తీసుకొంటాం. తరువాత, రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను సంకలనం చేస్తాము. మరియు

ఉదాహరణకు, మనం $\frac{-7}{5}$ ఐరియు $\frac{-2}{3}$ లను సంకలనం చేద్దాము.

5 మరియు 3 క. సా. గు 15

కాబట్టి, $\frac{-7}{5} = \frac{-21}{15}$ మరియు $\frac{-2}{3} = \frac{-10}{15}$

కాబట్టి, $\frac{-7}{5} + \frac{(-2)}{3} = \frac{-21}{15} + \frac{(-10)}{15} = \frac{-31}{15}$



ప్రయత్నించండి

కనుగొనండి:

(i) $\frac{-3}{7} + \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{-5}{6} + \frac{-3}{11}$

సంకలన విలోపం

$\frac{-4}{7} + \frac{4}{7}$ లను సంకలనంచేస్తే ఏమి వస్తుంది?

$\frac{-4}{7} + \frac{4}{7} = \frac{-4+4}{7} = 0$. అలాగే, $\frac{4}{7} + \left(\frac{-4}{7}\right) = 0$.

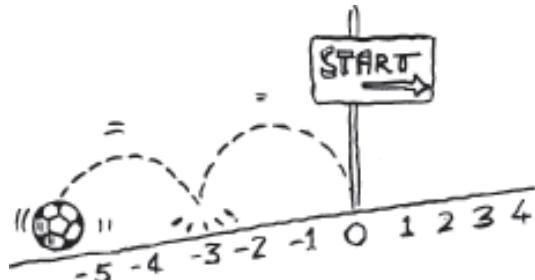
Similarly, $\frac{-2}{3} + \frac{2}{3} = 0 = \frac{2}{3} + \left(\frac{-2}{3}\right)$.

In the case of integers, we call -2 as the additive inverse of 2 and 2 as the additive inverse of -2 .

For rational numbers also, we call $\frac{-4}{7}$ as the **additive**

inverse of $\frac{4}{7}$ and $\frac{4}{7}$ as the additive inverse of $\frac{-4}{7}$. Similarly,

$\frac{-2}{3}$ is the additive inverse of $\frac{2}{3}$ and $\frac{2}{3}$ is the additive inverse of $\frac{-2}{3}$.



TRY THESE

What will be the additive inverse of $\frac{-3}{9}$, $\frac{-9}{11}$, $\frac{5}{7}$?

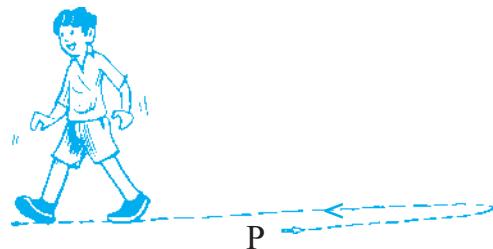
EXAMPLE 6 Satpal walks $\frac{2}{3}$ km from a place P, towards east and then from there $1\frac{5}{7}$ km towards west. Where will he be now from P?



SOLUTION Let us denote the distance travelled towards east by positive sign. So, the distances towards west would be denoted by negative sign.

Thus, distance of Satpal from the point P would be

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \left(-1\frac{5}{7}\right) &= \frac{2}{3} + \frac{(-12)}{7} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} + \frac{(-12) \times 3}{7 \times 3} \\ &= \frac{14 - 36}{21} = \frac{-22}{21} = -1\frac{1}{21} \end{aligned}$$



Since it is negative, it means Satpal is at a distance $1\frac{1}{21}$ km towards west of P.

8.9.2 Subtraction

Savita found the difference of two rational numbers $\frac{5}{7}$ and $\frac{3}{8}$ in this way:

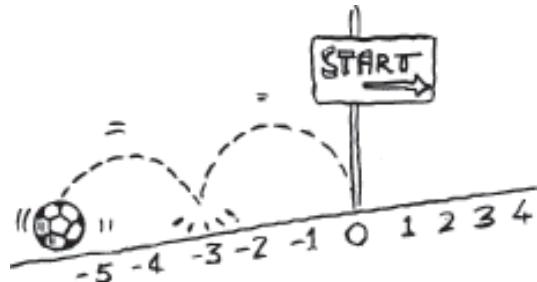
$$\frac{5}{7} - \frac{3}{8} = \frac{40 - 21}{56} = \frac{19}{56}$$

Farida knew that for two integers a and b she could write $a - b = a + (-b)$

$$\text{ఇదేవిధంగా, } \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} = 0 = \frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3} \right).$$

పూర్తసంఖ్యల విషయంలో, మనం -2 అనేది 2 యొక్క సంకలన విలోమంగా పిలుస్తాము. మరియు 2 అనేది -2 . యొక్క సంకలనవిలోమం.

అకరణీయ సంఖ్యలకు కూడా, మనం $\frac{-4}{7}$ ను $\frac{4}{7}$ యొక్క సంకలన విలోమంగా పిలుస్తాము మరియు $\frac{4}{7}$ అనేది $\frac{-4}{7}$ యొక్క సంకలన విలోమం.



విలోమంగా పిలుస్తాము మరియు $\frac{4}{7}$ అనేది $\frac{-4}{7}$ యొక్క సంకలన విలోమం. $\frac{-2}{3}$ అనేది $\frac{2}{3}$ యొక్క సంకలన విలోమం మరియు $\frac{2}{3}$ అనేది $\frac{-2}{3}$ యొక్క సంకలన విలోమం.

ప్రయత్నించండి

$\frac{-3}{9}, \frac{-9}{11}, \frac{5}{7}$ ల సంకలన విలోమాలు ఏవి?



ఉదాహరణ 6 సత్పాల్ ఒక ప్రదేశం P నుంచి $\frac{2}{3}$ కి.మీ. తూర్పు వైపు నడిచాడు, తరువాత అక్కడ నుండి $1\frac{5}{7}$ కి.మీ. పదమర వైపు నడిచాడు. అతడు ఇప్పుడు P నుంచి ఎక్కడ ఉంటాడు?

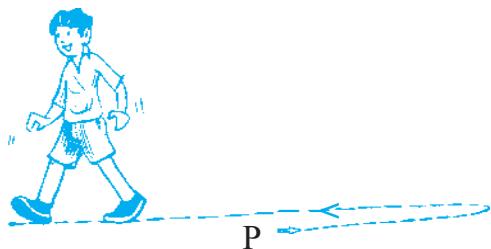
సాధన

తూర్పు వైపు ప్రయాణించిన దూరాన్ని ధన గుర్తు ద్వారా సూచిస్తాం. కాబట్టి, పశ్చిమం వైపు దూరం బుఱి గుర్తు ద్వారా సూచించబడుతుంది.

కాబట్టి, P చిందువు నుంచి సత్పాల్ యొక్క దూరం

$$\frac{2}{3} + \left(-1\frac{5}{7} \right) = \frac{2}{3} + \frac{(-12)}{7} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} + \frac{(-12) \times 3}{7 \times 3}$$

$$= \frac{14 - 36}{21} = \frac{-22}{21} = -1\frac{1}{21}$$



ఇది బుఱి సంఖ్య కనుక, సత్పాల్ P నుండి పశ్చిమం వైపు $1\frac{1}{21}$ కి.మీ. దూరంగా ఉన్నాడని అర్థం.

8.9.2 వ్యవకలనం

సవిత రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{5}{7}$ మరియు $\frac{3}{8}$ భేధాన్ని ఈ విధంగా కనుగొంది:

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{8} = \frac{40 - 21}{56} = \frac{19}{56}$$

ఫరీదాకు a మరియు b అనే రెండు పూర్తసంఖ్యలకు $a - b = a + (-b)$ అని తాను వ్రాయగలనని తెలుసు.

She tried this for rational numbers also and found, $\frac{5}{7} - \frac{3}{8} = \frac{5}{7} + \frac{(-3)}{8} = \frac{19}{56}$.

Both obtained the same difference.

Try to find $\frac{7}{8} - \frac{5}{9}$, $\frac{3}{11} - \frac{8}{7}$ in both ways. Did you get the same answer?

So, we say *while subtracting two rational numbers, we add the additive inverse of the rational number that is being subtracted, to the other rational number.*

$$\text{Thus, } 1\frac{2}{3} - 2\frac{4}{5} = \frac{5}{3} - \frac{14}{5} = \frac{5}{3} + \text{additive inverse of } \frac{14}{5} = \frac{5}{3} + \frac{(-14)}{5}$$

$$= \frac{-17}{15} = -1\frac{2}{15}.$$

What will be $\frac{2}{7} - \left(\frac{-5}{6}\right)$?

TRY THESE

Find:

$$(i) \frac{7}{9} - \frac{2}{5} \quad (ii) 2\frac{1}{5} - \frac{(-1)}{3}$$

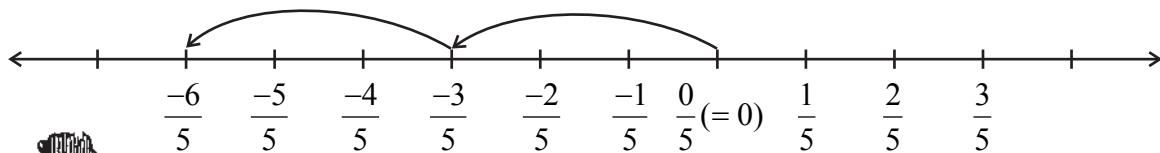


$$\frac{2}{7} - \left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{2}{7} + \text{additive inverse of } \left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{2}{7} + \frac{5}{6} = \frac{47}{42} = 1\frac{5}{42}$$

8.9.3 Multiplication

Let us multiply the rational number $\frac{-3}{5}$ by 2, i.e., we find $\frac{-3}{5} \times 2$.

On the number line, it will mean two jumps of $\frac{3}{5}$ to the left.



Where do we reach? We reach at $\frac{-6}{5}$. Let us find it as we did in fractions.

$$\frac{-3}{5} \times 2 = \frac{-3 \times 2}{5} = \frac{-6}{5}$$

We arrive at the same rational number.

Find $\frac{-4}{7} \times 3, \frac{-6}{5} \times 4$ using both ways. What do you observe?



అకరణీయ సంఖ్యల కోసం కూడా అమె దీన్ని ప్రయత్నించింది, $\frac{5}{7} - \frac{3}{8} = \frac{5}{7} + \frac{(-3)}{8} = \frac{19}{56}$.

ఇద్దరికి ఒకే భేధం వచ్చింది.

$\frac{7}{8} - \frac{5}{9}, \frac{3}{11} - \frac{8}{7}$ లను రెండు విధాలుగా కుసొనడానికి ప్రయత్నించండి. మీకు కూడా ఒకే జవాబు వచ్చిందా?

కాబట్టి, రెండు అకరణీయ సంఖ్యల వ్యవకలనం చేయునప్పుడు, తీసివేయబడుతున్న అకరణీయ సంఖ్య యొక్క సంకలన విలోవాన్ని మరొక అకరణీయ సంఖ్యకు కూడతాం.

$$\text{కాబట్టి, } 1\frac{2}{3} - 2\frac{4}{5} = \frac{5}{3} - \frac{14}{5} = \frac{5}{3} + \frac{14}{5} \text{ యొక్క సంకలన విలోవం} = \frac{5}{3} + \frac{(-14)}{5}$$

$$= \frac{-17}{15} = -1\frac{2}{15}.$$

$$\frac{2}{7} - \left(\frac{-5}{6} \right) \text{ ఎంత అవుతుంది?}$$

ప్రయత్నించండి

కుసొనండి:

$$(i) \frac{7}{9} - \frac{2}{5} \quad (ii) 2\frac{1}{5} - \frac{(-1)}{3}$$

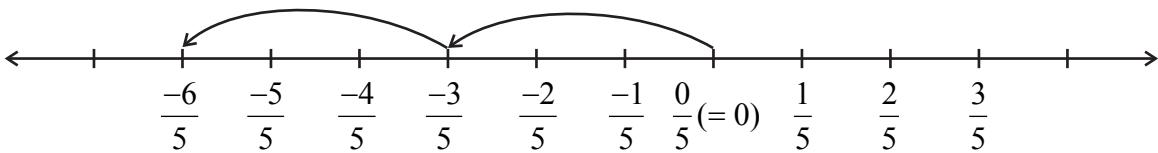


$$\frac{2}{7} - \left(\frac{-5}{6} \right) = \frac{2}{7} + \left(\frac{-5}{6} \right) \text{ యొక్క సంకలన విలోవం} = \frac{2}{7} + \frac{5}{6} = \frac{47}{42} = 1\frac{5}{42}$$

8.9.3 గుణకారం

అకరణీయ సంఖ్య $\frac{-3}{5}$ ను 2 చే గుణించాం, అనగా మనము $\frac{-3}{5} \times 2$ కుసొనాలి.

సంఖ్యారేఖపై, దీని అర్థం ఎడమ వైపు $\frac{3}{5}$ రెండు సార్లు దూకడం అని అర్థం.



మనం ఎక్కడికి చేరుకోవాలి? $\frac{-6}{5}$ ను చేరుకోవాలి. మనం దానిని భిన్నాలకు కుసొన్నట్టే కుసొందాం

$$\frac{-3}{5} \times 2 = \frac{-3 \times 2}{5} = \frac{-6}{5}$$

మనం అదే అకరణీయ సంఖ్యకు చేరుకుంటాము.



$\frac{-4}{7} \times 3, \frac{-6}{5} \times 4$ లను రెండు పద్ధతుల ద్వారా కుసొనుము. మీరు ఏమి గమనించారు?

So, we find that while multiplying a rational number by a positive integer, we multiply the numerator by that integer, keeping the denominator unchanged.

Let us now multiply a rational number by a negative integer,

$$\frac{-2}{9} \times (-5) = \frac{-2 \times (-5)}{9} = \frac{10}{9}$$

Remember, -5 can be written as $\frac{-5}{1}$.

$$\text{So, } \frac{-2}{9} \times \frac{-5}{1} = \frac{10}{9} = \frac{-2 \times (-5)}{9 \times 1}$$

$$\text{Similarly, } \frac{3}{11} \times (-2) = \frac{3 \times (-2)}{11 \times 1} = \frac{-6}{11}$$

$$\text{Based on these observations, we find that, } \frac{-3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{-3 \times 5}{8 \times 7} = \frac{-15}{56}$$

So, as we did in the case of fractions, we multiply two rational numbers in the following way:

Step 1 Multiply the numerators of the two rational numbers.

Step 2 Multiply the denominators of the two rational numbers.

Step 3 Write the product as $\frac{\text{Result of Step 1}}{\text{Result of Step 2}}$

$$\text{Thus, } \frac{-3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{-3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{-6}{35}.$$

$$\text{Also, } \frac{-5}{8} \times \frac{-9}{7} = \frac{-5 \times (-9)}{8 \times 7} = \frac{45}{56}$$

8.9.4 Division

We have studied reciprocals of a fraction earlier. What is the reciprocal of $\frac{2}{7}$? It will be

$\frac{7}{2}$. We extend this idea of reciprocals to non-zero rational numbers also.

The reciprocal of $\frac{-2}{7}$ will be $\frac{7}{-2}$ i.e., $\frac{-7}{2}$; that of $\frac{-3}{5}$ would be $\frac{-5}{3}$.

TRY THESE

What will be

$$(i) \frac{-3}{5} \times 7? \quad (ii) \frac{-6}{5} \times (-2)?$$



TRY THESE



Find:

$$(i) \frac{-3}{4} \times \frac{1}{7}$$

$$(ii) \frac{2}{3} \times \frac{-5}{9}$$

కాబట్టి, ఒక అకరణీయ సంఖ్యను ధన పూర్తసంఖ్యతో గుణించేటప్పుడు, లవమును పూర్త సంఖ్యచే గుణిస్తాము, హోరమును మార్చకుండా ఉంచుతాము.

ఇప్పుడు మనం ఒక అకరణీయ సంఖ్యను ఒక బుణ పూర్త సంఖ్యతో గుణిస్తాం.,

$$\frac{-2}{9} \times (-5) = \frac{-2 \times (-5)}{9} = \frac{10}{9}$$

-5 ను $\frac{-5}{1}$ అని ప్రాస్తామని అని గుర్తుకుతెచ్చుకోండి

కాబట్టి, $\frac{-2}{9} \times \frac{-5}{1} = \frac{10}{9} = \frac{-2 \times (-5)}{9 \times 1}$

ఇదే విధంగా, $\frac{3}{11} \times (-2) = \frac{3 \times (-2)}{11 \times 1} = \frac{-6}{11}$

ఈ పరిశీలనల ఆధారంగా, మనము $\frac{-3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{-3 \times 5}{8 \times 7} = \frac{-15}{56}$ అని కనుగొనవచ్చు.

కాబట్టి, భిన్నాల విషయంలో చేసినట్లుగా, మనం రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను ఈ క్రింది విధంగా గుణిస్తాము:

సోపానం 1 రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లవములను గుణించండి.

సోపానం 2 రెండు అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క హోరములను గుణించండి.

సోపానం 3 లభమును ఇలా రాయండి
$$\frac{\text{సోపానం 1 యొక్క ఫలితం}}{\text{సోపానం 2 యొక్క ఫలితం}}$$

అందుకని, $\frac{-3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{-3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{-6}{35}$.

అలాగే, $\frac{-5}{8} \times \frac{-9}{7} = \frac{-5 \times (-9)}{8 \times 7} = \frac{45}{56}$

8.9.4 భాగహారం

మనం ఇంతకు ముందు అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క వ్యుత్పత్తము గురించి అధ్యయనం చేసాము. $\frac{2}{7}$ యొక్క

గుణకార విలోపము ఎంత? అది $\frac{7}{2}$ అవుతుంది. మనము వ్యుత్పత్తము యొక్క ఈ అలోచనను సున్నా

కాని అకరణీయ సంఖ్యలకు కూడా విస్తరిస్తాము

$\frac{-2}{7}$ యొక్క వ్యుత్పత్తము $\frac{7}{-2}$ అనగా, $\frac{-7}{2}; \frac{-3}{5}$ యొక్క వ్యుత్పత్తము $\frac{-5}{3}$.

ప్రయత్నించండి

ఏమి జరుగుతుంది

(i) $\frac{-3}{5} \times 7?$ (ii) $\frac{-6}{5} \times (-2)?$



ప్రయత్నించండి

కనుగొనండి:



(i) $\frac{-3}{4} \times \frac{1}{7}$
(ii) $\frac{2}{3} \times \frac{-5}{9}$

TRY THESE

What will be the reciprocal of $\frac{-6}{11}$? and $\frac{-8}{5}$?

**Product of reciprocals**

The product of a rational number with its reciprocal is always 1.

$$\text{For example, } \frac{-4}{9} \times \left(\text{reciprocal of } \frac{-4}{9} \right)$$

$$= \frac{-4}{9} \times \frac{-9}{4} = 1$$

$$\text{Similarly, } \frac{-6}{13} \times \frac{-13}{6} = 1$$

Try some more examples and confirm this observation.

Savita divided a rational number $\frac{4}{9}$ by another rational number $\frac{-5}{7}$ as,

$$\frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{-5} = \frac{-28}{45}.$$

She used the idea of reciprocal as done in fractions.

Arpit first divided $\frac{4}{9}$ by $\frac{5}{7}$ and got $\frac{28}{45}$.

He finally said $\frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{-28}{45}$. How did he get that?

He divided them as fractions, ignoring the negative sign and then put the negative sign in the value so obtained.

Both of them got the same value $\frac{-28}{45}$. Try dividing $\frac{2}{3}$ by $\frac{-5}{7}$ both ways and see if you get the same answer.

This shows, *to divide one rational number by the other non-zero rational number we multiply the rational number by the reciprocal of the other.*

$$\text{Thus, } \frac{-6}{5} \div \frac{-2}{3} = \frac{6}{-5} \times \text{reciprocal of } \left(\frac{-2}{3} \right) = \frac{6}{-5} \times \frac{3}{-2} = \frac{18}{10}$$

ప్రయత్నించండి

$\frac{-6}{11}$ మరియు $\frac{-8}{5}$ ల గుణకార విలోపూలు ఏవి?



వ్యుత్పత్తముల లభం

ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు దాని వ్యుత్పత్తముల లభము ఎల్లప్పుడూ 1

$$\text{ఉదాహరణకి, } \frac{-4}{9} \times \left(\frac{-4}{9} \text{ యొక్క వ్యుత్పత్తము} \right)$$

$$= \frac{-4}{9} \times \frac{-9}{4} = 1$$

$$\text{ఇదేవిధంగా, } \frac{-6}{13} \times \frac{-13}{6} = 1$$

మరికొన్ని ఉదాహరణలు ప్రయత్నించండి మరియు దీనిని ధృవీకరించండి.

సవిత ఒక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{4}{9}$ ను మరొక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{-5}{7}$ తో ఇలా భాగించింది,

$$\frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{-5} = \frac{-28}{45}.$$

అమె భిన్నాలలో చేసిన విధంగా వ్యుత్పత్తమును ఉపయోగించింది.

$$\text{అర్పిత్త మొదట } \frac{4}{9} \text{ ను } \frac{5}{7} \text{ చే భాగించి } \frac{28}{45} \text{ పొందాడు.}$$

$$\text{చివరకు అతడు } \frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{-28}{45} \text{ అన్నాడు. అతను దానిని ఎలా పొందాడు? }$$

అతను వాటిని భిన్నాలుగా విభజించాడు, బుఱ గుర్తును విస్తరించి, తరువాత అలా పొందిన విలువలో బుఱ గుర్తును ఉంచాడు.

ఇద్దరికి ఒకే విలువ $\frac{-28}{45}$ లభించింది. రెండు పద్దతులు ఉపయోగించి $\frac{2}{3}$ ను $\frac{-5}{7}$ చే భాగించండి

ఒకే సమాధానం వచ్చిందేమో చూడండి.

ఒక అకరణీయ సంఖ్యను మరొక శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్యతో భాగించడానికి మనం అకరణీయ సంఖ్యను దాని యొక్క వ్యుత్పత్తముతో గుణిస్తాము.

$$\text{అందువల్ } \frac{-6}{5} \div \frac{-2}{3} = \frac{6}{-5} \times \left(\frac{-2}{3} \text{ యొక్క వ్యుత్పత్తము} \right) = \frac{6}{-5} \times \frac{3}{-2} = \frac{18}{10}$$

TRY THESE

Find: (i) $\frac{2}{3} \times \frac{-7}{8}$ (ii) $\frac{-6}{7} \times \frac{5}{7}$

**EXERCISE 8.2**

1. Find the sum:

(i) $\frac{5}{4} + \left(\frac{-11}{4} \right)$

(ii) $\frac{5}{3} + \frac{3}{5}$

(iii) $\frac{-9}{10} + \frac{22}{15}$

(iv) $\frac{-3}{-11} + \frac{5}{9}$

(v) $\frac{-8}{19} + \frac{(-2)}{57}$

(vi) $\frac{-2}{3} + 0$

(vii) $-2\frac{1}{3} + 4\frac{3}{5}$

2. Find

(i) $\frac{7}{24} - \frac{17}{36}$

(ii) $\frac{5}{63} - \left(\frac{-6}{21} \right)$

(iii) $\frac{-6}{13} - \left(\frac{-7}{15} \right)$

(iv) $\frac{-3}{8} - \frac{7}{11}$

(v) $-2\frac{1}{9} - 6$

3. Find the product:

(i) $\frac{9}{2} \times \left(\frac{-7}{4} \right)$

(ii) $\frac{3}{10} \times (-9)$

(iii) $\frac{-6}{5} \times \frac{9}{11}$

(iv) $\frac{3}{7} \times \left(\frac{-2}{5} \right)$

(v) $\frac{3}{11} \times \frac{2}{5}$

(vi) $\frac{3}{-5} \times \frac{-5}{3}$



4. Find the value of:

(i) $(-4) \div \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{-3}{5} \div 2$

(iii) $\frac{-4}{5} \div (-3)$

(iv) $\frac{-1}{8} \div \frac{3}{4}$

(v) $\frac{-2}{13} \div \frac{1}{7}$

(vi) $\frac{-7}{12} \div \left(\frac{-2}{13} \right)$

(vii) $\frac{3}{13} \div \left(\frac{-4}{65} \right)$

ప్రయత్నించండి

(i) $\frac{2}{3} \times \frac{-7}{8}$ (ii) $\frac{-6}{7} \times \frac{5}{7}$ లను కనుగొనండి



అభ్యాసం 8. 2

1. మొత్తం కనుగొనుము:

(i) $\frac{5}{4} + \left(\frac{-11}{4} \right)$

(ii) $\frac{5}{3} + \frac{3}{5}$

(iii) $\frac{-9}{10} + \frac{22}{15}$

(iv) $\frac{-3}{-11} + \frac{5}{9}$

(v) $\frac{-8}{19} + \frac{(-2)}{57}$

(vi) $\frac{-2}{3} + 0$

(vii) $-2\frac{1}{3} + 4\frac{3}{5}$

2. కనుగొనండి

(i) $\frac{7}{24} - \frac{17}{36}$

(ii) $\frac{5}{63} - \left(\frac{-6}{21} \right)$

(iii) $\frac{-6}{13} - \left(\frac{-7}{15} \right)$

(iv) $\frac{-3}{8} - \frac{7}{11}$

(v) $-2\frac{1}{9} - 6$



3. లబ్దం కనుగొనండి:

(i) $\frac{9}{2} \times \left(\frac{-7}{4} \right)$

(ii) $\frac{3}{10} \times (-9)$

(iii) $\frac{-6}{5} \times \frac{9}{11}$

(iv) $\frac{3}{7} \times \left(\frac{-2}{5} \right)$

(v) $\frac{3}{11} \times \frac{2}{5}$

(vi) $\frac{3}{-5} \times \frac{-5}{3}$

4. విలువను కనుగొనండి?

(i) $(-4) \div \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{-3}{5} \div 2$

(iii) $\frac{-4}{5} \div (-3)$

(iv) $\frac{-1}{8} \div \frac{3}{4}$

(v) $\frac{-2}{13} \div \frac{1}{7}$

(vi) $\frac{-7}{12} \div \left(\frac{-2}{13} \right)$

(vii) $\frac{3}{13} \div \left(\frac{-4}{65} \right)$

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. A number that can be expressed in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$, is called a rational number. The numbers $\frac{-2}{7}, \frac{3}{8}, 3$ etc. are rational numbers.
2. All integers and fractions are rational numbers.
3. If the numerator and denominator of a rational number are multiplied or divided by a non-zero integer, we get a rational number which is said to be equivalent to the given rational number. For example $\frac{-3}{7} = \frac{-3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{-6}{14}$. So, we say $\frac{-6}{14}$ is the equivalent form of $\frac{-3}{7}$. Also note that $\frac{-6}{14} = \frac{-6 \div 2}{14 \div 2} = \frac{-3}{7}$.
4. Rational numbers are classified as Positive and Negative rational numbers. When the numerator and denominator, both, are positive integers, it is a positive rational number. When either the numerator or the denominator is a negative integer, it is a negative rational number. For example, $\frac{3}{8}$ is a positive rational number whereas $\frac{-8}{9}$ is a negative rational number.
5. The number 0 is neither a positive nor a negative rational number.
6. A rational number is said to be in the standard form if its denominator is a positive integer and the numerator and denominator have no common factor other than 1.
- The numbers $\frac{-1}{3}, \frac{2}{7}$ etc. are in standard form.
7. There are unlimited number of rational numbers between two rational numbers.
8. Two rational numbers with the same denominator can be added by adding their numerators, keeping the denominator same. Two rational numbers with different denominators are added by first taking the LCM of the two denominators and then converting both the rational numbers to their equivalent forms having the LCM as the denominator. For example, $\frac{-2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{-16}{24} + \frac{9}{24} = \frac{-16+9}{24} = \frac{-7}{24}$. Here, LCM of 3 and 8 is 24.
9. While subtracting two rational numbers, we add the additive inverse of the rational number to be subtracted to the other rational number.

Thus, $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{7}{8} + \text{additive inverse of } \frac{2}{3} = \frac{7}{8} + \frac{(-2)}{3} = \frac{21+(-16)}{24} = \frac{5}{24}$.

మనం ఏమి చర్చించాం?

1. $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగల సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలు అంటారు. ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$. $\frac{-2}{7}, \frac{3}{8}, 3$ మొ.వి అకరణీయ సంఖ్యలు.
 2. అన్ని పూర్ణసంఖ్యలు మరియు భీన్మూలు అకరణీయ సంఖ్యలు.
 3. ఒక అకరణీయ సంఖ్యనందు లవము మరియు హోరమును వేరొక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య చే గుణించినా లేదా భాగించినా వచ్చే అకరణీయ సంఖ్య ఇచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యకు సమానముగా ఉంటుంది.
ఉదాహరణకు $\frac{-3}{7} = \frac{-3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{-6}{14}$. కాబట్టి $\frac{-6}{14}$ అనేది $\frac{-3}{7}$. కు సమానమైన రూపం. అంతే గాకుండా $\frac{-6}{14} = \frac{-6 \div 2}{14 \div 2} = \frac{-3}{7}$.
 4. అకరణీయ సంఖ్యలను ధన, బుఱ అకరణీయ సంఖ్యలుగా వర్గీకరిస్తారు. లవము మరియు హోరము రెండూ కూడా ధన పూర్ణసంఖ్యలు అయినప్పుడు, అది ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్య. లవము లేదా హోరము బుఱ పూర్ణ సంఖ్య అయినప్పుడు, అది బుఱ అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.
ఉదాహరణకి, $\frac{3}{8}$ ఇది ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్య అయితే $\frac{-8}{9}$ బుఱ అకరణీయ సంఖ్య. .
 5. '0' అనేది ధన లేదా బుఱ అకరణీయ సంఖ్య కాదు.
 6. ఒక అకరణీయ సంఖ్య లవము ధన సంఖ్య అయి, లవ, హోరములకు 1 తప్ప మరే ఉమ్మడి కారణాంకం లేకపోతే ఆ అకరణీయ సంఖ్య ప్రామాణిక రూపంలో ఉందని అంటాము. $\frac{-1}{3}, \frac{2}{7}$ మొ.వి ప్రామాణిక రూపంలో ఉన్నాయి.
 7. రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అపరిమితమైన అకరణీయ సంఖ్యలు ఉన్నాయి.
 8. ఒకే హోరము కలిగిన రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను హోరాన్ని అలాగే ఉంచి వాటి లవములను సంకలనం చేయడం ద్వారా కలుపవచ్చు. విభిన్న హోరాలతో కూడిన రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను మొదట రెండు హోరముల యొక్క క. సా. గు ని తీసుకొని, తరువాత రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను వాటి సమాన రూపాలకు మార్చడం ద్వారా సంకలనం చేస్తాము. ఉదాహరణకి,
- $$\frac{-2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{-16}{24} + \frac{9}{24} = \frac{-16+9}{24} = \frac{-7}{24}. \text{ ఇక్కడ } 3 \text{ మరియు } 8 \text{ ల యొక్క క.సా.గు } 24$$
9. రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను తీసివేస్తున్నప్పుడు, అకరణీయ సంఖ్య యొక్క సంకలన విలోమాన్ని ఇతర అకరణీయ సంఖ్యకు కలుపుతాము.

$$\text{అందుకని, } \frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{7}{8} + \frac{2}{3} \text{ యొక్క సంకలన విలోమం} = \frac{7}{8} + \frac{(-2)}{3} = \frac{21+(-16)}{24} = \frac{5}{24}.$$

10. To multiply two rational numbers, we multiply their numerators and denominators separately, and write the product as $\frac{\text{product of numerators}}{\text{product of denominators}}$.
11. To divide one rational number by the other non-zero rational number, we multiply the rational number by the reciprocal of the other. Thus,

$$\frac{-7}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{-7}{2} \times (\text{reciprocal of } \frac{4}{3}) = \frac{-7}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{-21}{8}$$



10. రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను గుణించడానికి, మనం వాటి లవము మరియు హరములను విడివిడిగా

గుణిస్తాము మరియు వాటి లబ్దంను $\frac{\text{లవముల లబ్దం}}{\text{హరముల లబ్దం}}$ అని రాస్తాము.

11. ఒక అకరణీయ సంఖ్యను సున్నా కాని అకరణీయ సంఖ్యతో భాగించడానికి, మనం అకరణీయ సంఖ్యను మరొకదాని వ్యుత్పత్తము తో గుణిస్తాము. అందుకని,

$$\frac{-7}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{-7}{2} \times \left(\frac{4}{3} \text{ యొక్క వ్యుత్పత్తము } \right) = \frac{-7}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{-21}{8}.$$



Perimeter and Area



Chapter 9

9.1 AREA OF A PARALLELOGRAM

We come across many shapes other than squares and rectangles.

How will you find the area of a land which is a parallelogram in shape?

Let us find a method to get the area of a parallelogram.

Can a parallelogram be converted into a rectangle of equal area?

Draw a parallelogram on a graph paper as shown in Fig 9.1(i). Cut out the parallelogram. Draw a line from one vertex of the parallelogram perpendicular to the opposite side [Fig 9.1(ii)]. Cut out the triangle. Move the triangle to the other side of the parallelogram.

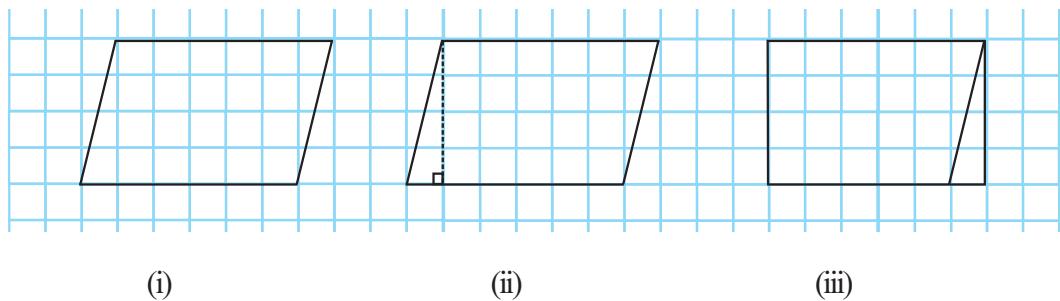


Fig 9.1

What shape do you get? You get a rectangle.

Is the area of the parallelogram equal to the area of the rectangle formed?

Yes, area of the parallelogram = area of the rectangle formed

What are the length and the breadth of the rectangle?

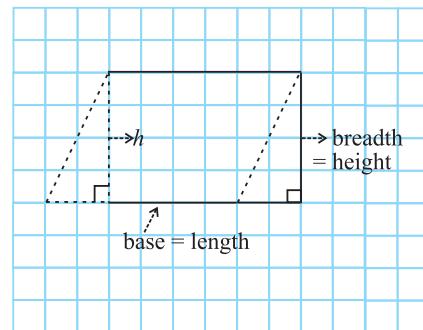


Fig 9.2

సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం



9.1 సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం

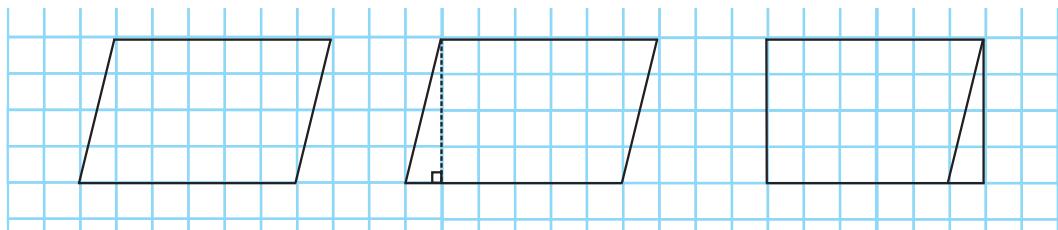
మనం చతుర్భుజాలు, దీర్ఘచతుర్భుజాలే కాకుండా చాలా ఆకారాలను చూశాం.

సమాంతర చతుర్భుజం ఆకారం లో ఉన్న భూమి యొక్క వైశాల్యాన్ని మీరు ఎలా కనుగొంటారు?

సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యాన్ని పొందటానికి ఒక పద్ధతి ని కనుక్కొందాం.

సమాంతర చతుర్భుజాన్ని సమాన వైశాల్యం గల దీర్ఘచతురప్రం గా మార్చవచ్చా?

పటం 9.1(i) లో చూపిన విధంగా గ్రాఫ్ వేపర్సై సమాంతర చతుర్భుజాన్ని గీయండి. సమాంతర చతుర్భుజాన్ని కత్తిరించండి. సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఒక శీర్షం నుండి ఎదుటి భుజంపైకి లంబాన్ని గీయండి [పటం. 9.1(ii)]. త్రిభుజాన్ని కత్తిరించండి. త్రిభుజాన్ని సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క మరొక వైపుకు తరలించండి.



(i)

(ii)

(iii)

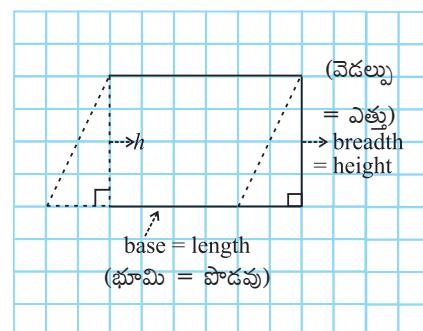
పటం 9.1

మీకు ఏ ఆకారం వచ్చింది? మీరు దీర్ఘచతుర్భుజాన్ని పొందుతారు.

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం ఏర్పడిన దీర్ఘచతురప్ర వైశాల్యానికి సమానంగా ఉందా?

అప్పుడు, సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = ఏర్పడిన దీర్ఘ చతురప్రం యొక్క వైశాల్యం

దీర్ఘచతురప్రం యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పులు ఎంత?



పటం 9.2

We find that the length of the rectangle formed is equal to the base of the parallelogram and the breadth of the rectangle is equal to the height of the parallelogram (Fig 9.2).

Now, Area of parallelogram = Area of rectangle

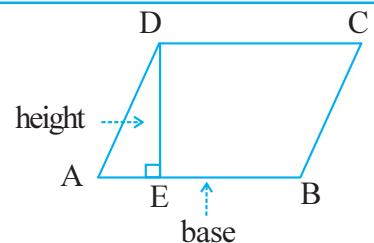
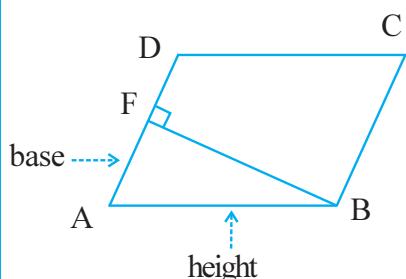
$$= \text{length} \times \text{breadth} = l \times b$$

But the length l and breadth b of the rectangle are exactly the base b and the height h , respectively of the parallelogram.

Thus, the area of parallelogram = base \times height = $b \times h$.

Any side of a parallelogram can be chosen as **base** of the parallelogram. The perpendicular dropped on that side from the opposite vertex is known as **height** (altitude). In the parallelogram ABCD, DE is

perpendicular to AB. Here AB is the base and DE is the height of the parallelogram.



In this parallelogram ABCD, BF is the perpendicular to opposite side AD. Here AD is the **base** and BF is the **height**.

Consider the following parallelograms (Fig 9.2).

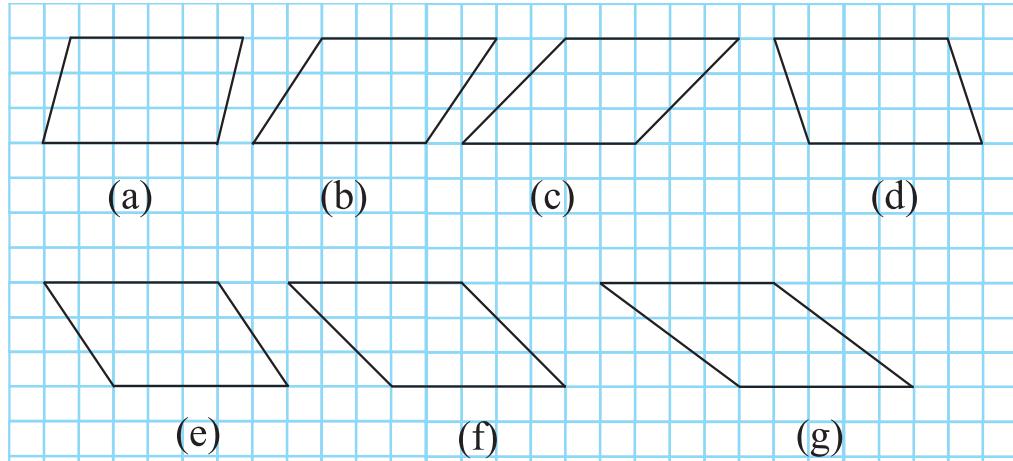


Fig 9.3

Find the areas of the parallelograms by counting the squares enclosed within the figures and also find the perimeters by measuring the sides.

ఏర్పడిన దీర్ఘచతురపుం యొక్క పొడవు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమికి సమానంగా ఉంటుందని మరియు దీర్ఘచతురపుం యొక్క వెడల్పు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తుకు సమానంగా ఉంటుందని మనము కనుగొంటాము (పటం 9.2).

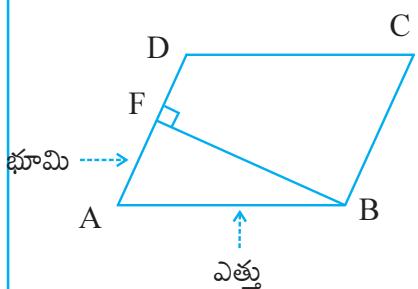
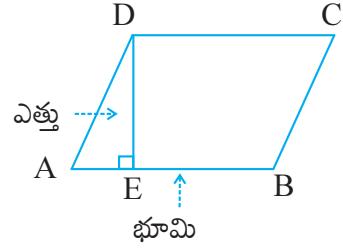
$$\text{ఇప్పుడు, సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం} = \text{దీర్ఘ చతురపుం యొక్క వైశాల్యం} \\ = \text{పొడవు} \times \text{వెడల్పు} = l \times b$$

కానీ దీర్ఘచతురపుం యొక్క పొడవు l వెడల్పు b ఖచ్చితంగా సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి b మరియు ఎత్తు h కు సమానం.

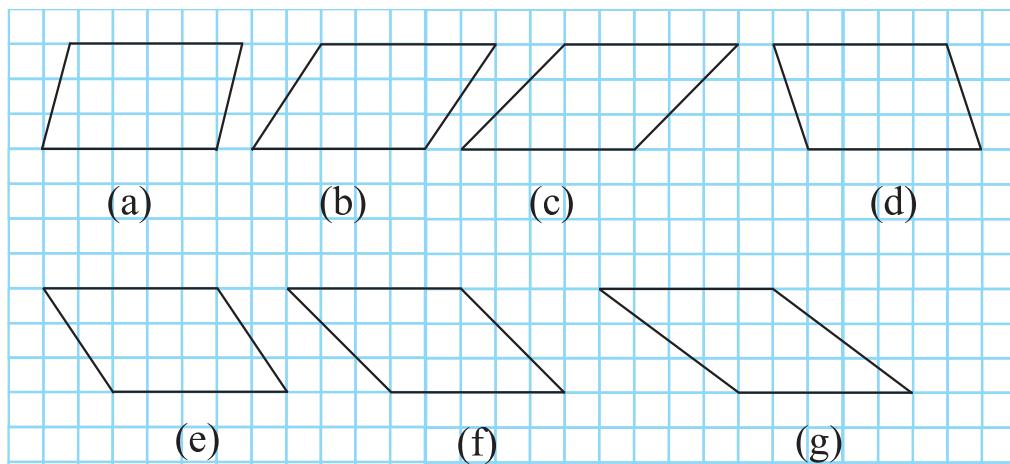
$$\text{అందువలన, సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం} = \text{భూమి} \times \text{ఎత్తు} = b \times h$$

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఒక భుజమునైనా సమాంతర చతుర్భుజానికి భూమిగా ఎంచుకోవచ్చు. ఎదురుగా ఉన్న శీర్షం నుండి భుజం మీదికి గేసిన లంబాన్ని ఎత్తు (ఉన్నతి) అంటారు. సమాంతరచతుర్భుజం ABCD లో DE అనునది AB కు లంబంగా ఉన్నది. ఇక్కడ భూమి AB మరియు DE సమాంతర చతుర్భుజ ఎత్తు.

సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో BF అనునది ఎదురు భుజం AD కు లంబంగా ఉన్నది. ఇక్కడ AD భూమి మరియు BF ఎత్తు.



కింది సమాంతర చతుర్భుజాలను పరిగణించండి (పటం 9.2)



పటం 9.3

సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలను లోపల ఉన్న చతురస్రాలను లెక్కించడం ద్వారా కనుగొనండి మరియు భుజాలను కొలవడం ద్వారా చుట్టుకొలతలను కూడా కనుగొనండి.

Complete the following table:

Parallelogram	Base	Height	Area	Perimeter
(a)	5 units	3 units	15 sq units	
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				
(f)				
(g)				

You will find that all these parallelograms have equal areas but different perimeters. Now, consider the following parallelograms with sides 7 cm and 5 cm (Fig 9.4).

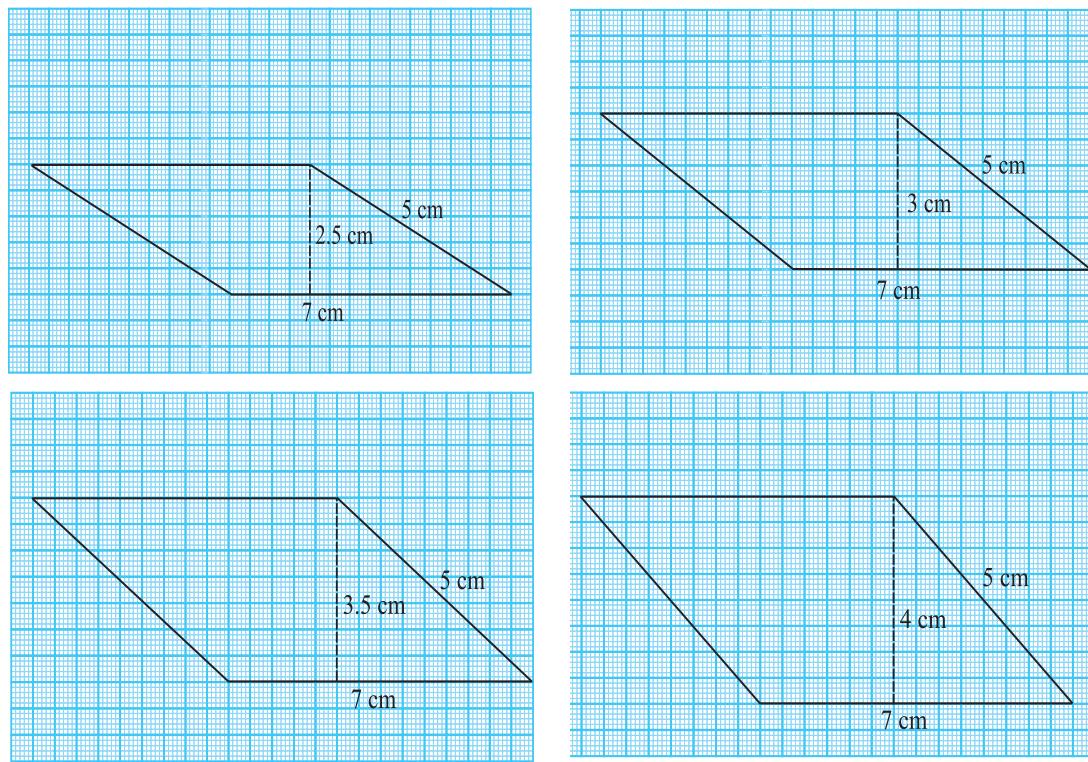


Fig 9.4

Find the perimeter and area of each of these parallelograms. Analyse your results.

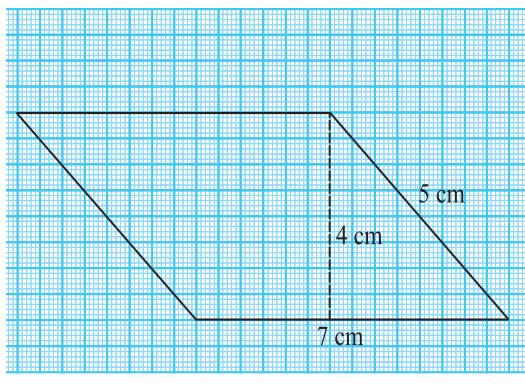
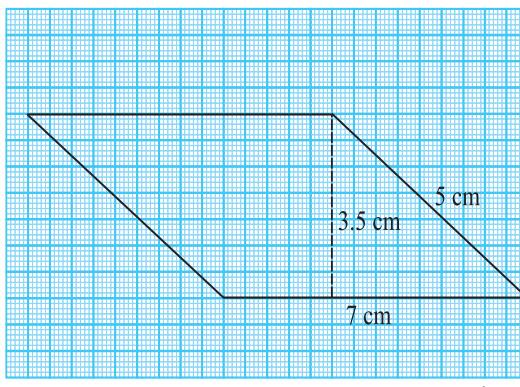
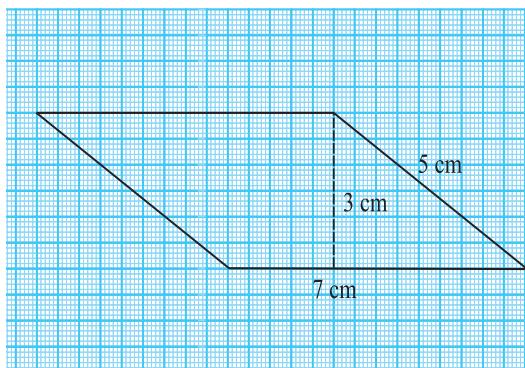
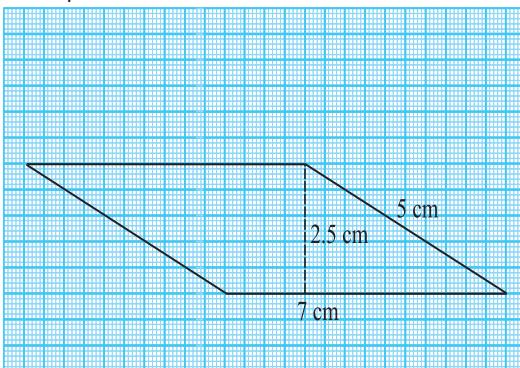
You will find that these parallelograms have different areas but equal perimeters.

To find the area of a parallelogram, you need to know only the base and the corresponding height of the parallelogram.

కింది పట్టికను పూర్తిచేయండి.

సమాంతర చతుర్భుజం	భూమి	ఎత్తు	వైశాల్యం	చుట్టుకొలత
(a)	5 యూనిట్లు	3 యూనిట్లు	15 చ.యూనిట్లు	
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				
(f)				
(g)				

ఈ సమాంతర చతుర్భుజాలన్నీ సమాన వైశాల్యాలను కలిగి ఉన్నాయి. కానీ వివిధ చుట్టుకొలతలు ఉన్నాయని మీరు కనుగొంటారు. 7 సెం.మీ. మరియు 5 సెం.మీ. భూజాలు కలిగిన కింది సమాంతర చతుర్భుజాలను పరిగణించండి. (పటం 9.4)



పటం 9.4

ఇవ్వబడిన సమాంతర చతుర్భుజాల చుట్టుకొలత, వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. మీ ఫలితాలను విశ్లేషించండి.

ఈ సమాంతర చతుర్భుజాలు వేర్వేరు వైశాల్యాలు కలిగి ఉన్నాయి కానీ చుట్టుకొలతలు సమానం అని మీరు కనుగొంటారు.

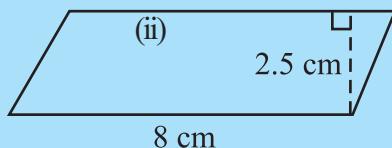
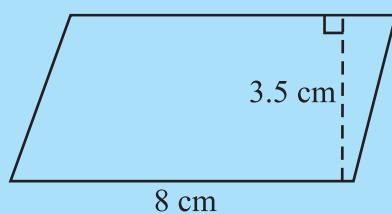
సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనడానికి, మీరు భూమి మరియు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క అనురూప ఎత్తును మాత్రమే తెలుసుకోవాలి.

TRY THESE

Find the area of following parallelograms:



(i)



(iii) In a parallelogram ABCD, AB = 7.2 cm and the perpendicular from C on AB is 4.5 cm.

9.2 AREA OF A TRIANGLE

A gardener wants to know the cost of covering the whole of a triangular garden with grass.

In this case we need to know the area of the triangular region.

Let us find a method to get the area of a triangle.

Draw a scalene triangle on a piece of paper. Cut out the triangle.

Place this triangle on another piece of paper and cut out another triangle of the same size.

So now you have two scalene triangles of the same size.

Are both the triangles congruent?

Superpose one triangle on the other so that they match.

You may have to rotate one of the two triangles.

Now place both the triangles such that a pair of corresponding sides is joined as shown in Fig 9.5.

Is the figure thus formed a parallelogram?

Compare the area of each triangle to the area of the parallelogram.

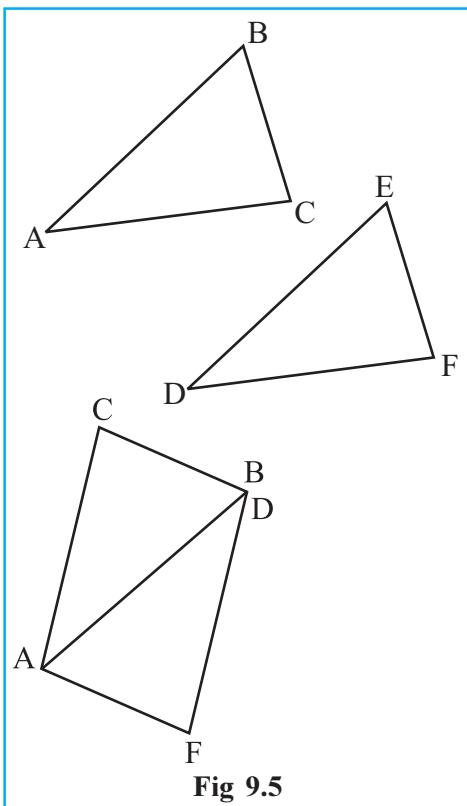
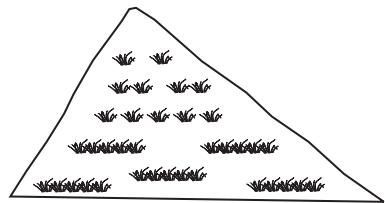
Compare the base and height of the triangles with the base and height of the parallelogram.

You will find that the sum of the areas of both the triangles is equal to the area of the parallelogram. The base and the height of the triangle are the same as the base and the height of the parallelogram, respectively.

$$\text{Area of each triangle} = \frac{1}{2} (\text{Area of parallelogram})$$

$$= \frac{1}{2} (\text{base} \times \text{height}) \quad (\text{Since area of a parallelogram} = \text{base} \times \text{height})$$

$$= \frac{1}{2} (b \times h) \quad (\text{or } \frac{1}{2} bh, \text{ in short})$$

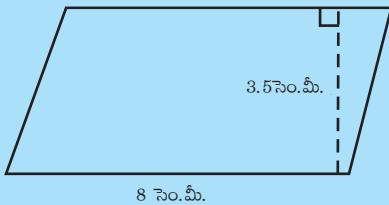
**Fig 9.5**

ప్రయుక్తివంచి

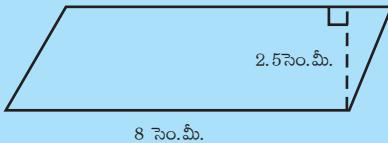
కింది సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి;



(i)



(ii)

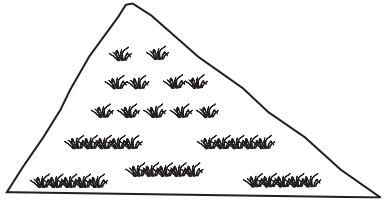


(iii) సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో $AB = 7.2$ సె.మీ. C నుండి AB మీదికి లంబం 4.5 సె.మీ.

9.2 త్రిభుజ వైశాల్యం

ఒక తోటమాలి త్రిభుజాకార తోట మొత్తాన్ని గడ్డితో కప్పి వేయడానికి అయ్యే ఖర్చును తెలుసుకోవాలనుకుంటున్నాడు.

ఈ సందర్భంలో మనం త్రిభుజాకార ప్రాంతం యొక్క వైశాల్యాన్ని తెలుసుకోవాలి.



త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యాన్ని పొందడానికి ఒక పద్ధతిని కనుగొందాం.

ఒక కాగితపు ముక్కపై విషమబాహు త్రిభుజాన్ని గీయండి. త్రిభుజాన్ని కత్తిరించండి.

ఈ త్రిభుజాన్ని మరొక కాగితపై ఉంచండి మరియు అదే పరిమాణంలో మరొక త్రిభుజాన్ని కత్తిరించండి.

కాబట్టి ఇప్పుడు మీరు ఒకే పరిమాణంలో రెండు విషమబాహు త్రిభుజాలను కలిగి ఉన్నారు. రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమా?

ఒక త్రిభుజాన్ని మరొకదానిపై ఉంచండి, తద్వారా అవి సరిపోలుతాయి. మీరు రెండు త్రిభుజాలలో ఒకదానిని ట్రమణం చేయాల్సి రావచ్చు.

ఇప్పుడు రెండు త్రిభుజాలను పటం 9.5 లో చూపిన విధంగా ఒక జత సదృశ భూజాలు కలిపేలా ఉంచండి.

ఆ విధంగా ఏర్పడిన పటం సమాంతర చతుర్భుజమా? ప్రతి త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యాన్ని సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యంతో పోల్చుండి.

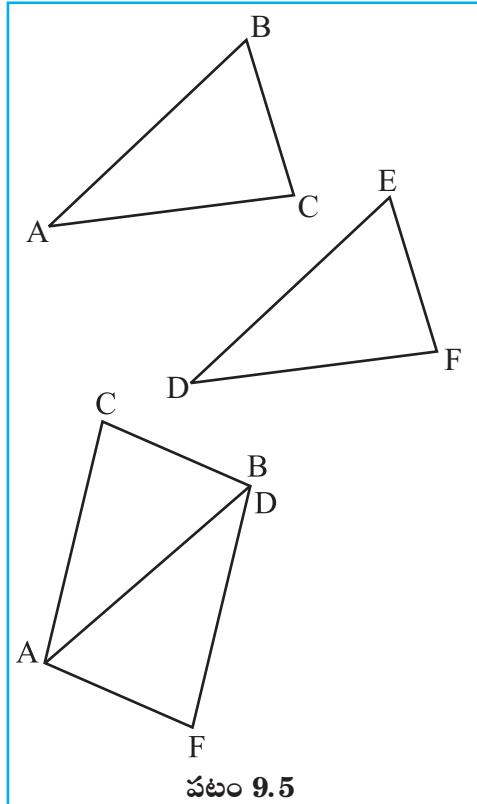
త్రిభుజాల భూమి, ఎత్తును సమాంతర చతుర్భుజ భూమి, ఎత్తుతో పోల్చుండి.

రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాల మొత్తం సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యానికి సమానం అని మీరు కనుగొంటారు. త్రిభుజం యొక్క భూమి, ఎత్తులు వరసగా నవాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి, ఎత్తుతో నవాంతర ఉంటాయి.

$\text{ప్రతి త్రిభుజ వైశాల్యం} = \frac{1}{2} (\text{సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం})$

$$= \frac{1}{2} (\text{భూమి} \times \text{ఎత్తు}) (\text{సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం} = \text{భూమి} \times \text{ఎత్తు})$$

$$= \frac{1}{2} (b \times h) \quad (\text{లేదా } \frac{1}{2} bh, \text{ సంక్లిప్తంగా)$$





TRY THESE

1. Try the above activity with different types of triangles.
2. Take different parallelograms. Divide each of the parallelograms into two triangles by cutting along any of its diagonals. Are the triangles congruent?

In the figure (Fig 9.6) all the triangles are on the base $AB = 6 \text{ cm}$.

What can you say about the height of each of the triangles corresponding to the base AB?

Can we say all the triangles are equal in area? Yes.

Are the triangles congruent also? No.

We conclude that **all the congruent triangles are equal in area but the triangles equal in area need not be congruent.**

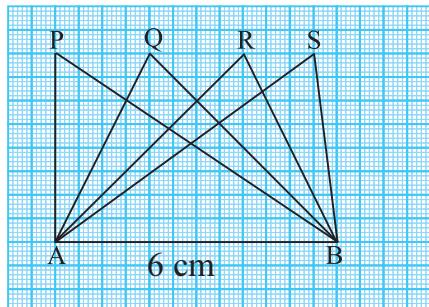


Fig 9.6

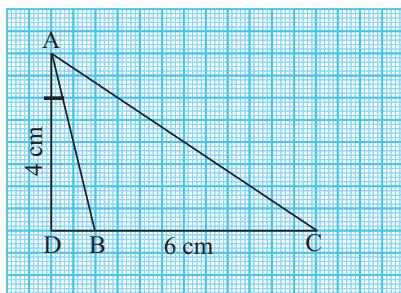


Fig 9.7

Consider the obtuse-angled triangle ABC of base 6 cm (Fig 9.7). Its height AD which is perpendicular from the vertex A is outside the triangle.

Can you find the area of the triangle?

EXAMPLE 1 One of the sides and the corresponding height of a parallelogram are 4 cm and 3 cm respectively. Find the area of the parallelogram (Fig 9.8).

SOLUTION Given that length of base (b) = 4 cm, height (h) = 3 cm

$$\begin{aligned} \text{Area of the parallelogram} &= b \times h \\ &= 4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

EXAMPLE 2 Find the height ' x ' if the area of the parallelogram is 24 cm^2 and the base is 4 cm.

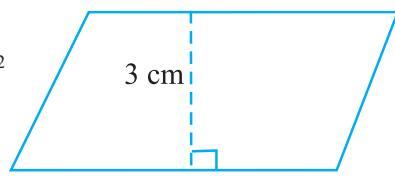


Fig 9.8

SOLUTION Area of parallelogram = $b \times h$

Therefore, $24 = 4 \times x$ (Fig 9.9)

$$\text{or } \frac{24}{4} = x \text{ or } x = 6 \text{ cm}$$

So, the height of the parallelogram is 6 cm.

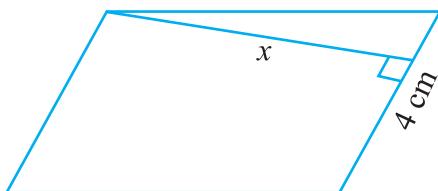


Fig 9.9



ప్రయత్నించండి

1. వివిధ రకాల త్రిభుజాలతో పై కృత్యాన్ని ప్రయత్నించండి.
2. విభిన్న సమాంతర చతుర్భుజాలను తీసుకోండి. ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజాన్ని దాని కర్దాలలో ఏదో ఒకదాని వెంబడి కత్తిరించడం ద్వారా రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించండి. త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉన్నాయా?

పటంలో (పటం. 9.6) అన్ని త్రిభుజాలు $AB = 6$

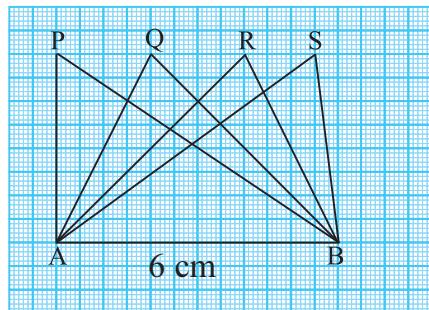
సెం.మీ. అనే భూమిపై ఉన్నాయి.

భూమి AB ఆధారంగా ప్రతి త్రిభుజం ఎత్తు గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

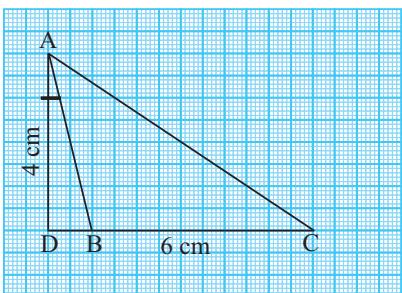
అన్ని త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానంగా ఉన్నాయని మనం చెప్పగలమా? అవును.

త్రిభుజాలు కూడా సర్వసమానంగా ఉన్నాయా? లేవు

అన్ని సర్వసమాన త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానంగా ఉన్నాయి కానీ సమాన వైశాల్యాలు గల త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉండవలసిన అవసరం లేదు అని మనం నిర్ణయించవచ్చు.



పటం 9.6



పటం 9.7

భూమి 6 సెం.మీ గా గల అధికకోణ త్రిభుజం ABC (పటం. 9.7) ని పరిగణించండి.

శీర్షం A నుండి లంబంగా ఉన్న దాని ఎత్తు AD త్రిభుజం వెలువల ఉంది.

మీరు త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనగలరా?

ఉధారణ 1 సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఒక భూజము మరియు అనురూప ఎత్తు వరుసగా 4 సెం.మీ మరియు 3 సెం.మీ. సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. (పటం. 9.8).



పటం 9.8

సాధన: భూజం పొడవు (b) = 4 సెం.మీ., ఎత్తు (h) = 3 సెం.మీ.

$$\begin{aligned} \text{సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం} &= b \times h \\ &= 4 \text{ సెం.మీ.} \times 3 \text{ సెం.మీ.} = 12 \text{ సెం.మీ.}^2 \end{aligned}$$

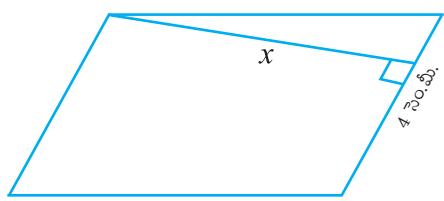
ఉధారణ 2 సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం 24 సెం.మీ.²

మరియు భూమి 4 సెం.మీ. అయితే ఎత్తు ‘ x ’

ని కనుగొనండి.

సాధన: సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం = $b \times h$

అందువలన, $24 = 4 \times x$ (పటం 9.9)



పటం 9.9

$$\text{లేదా } \frac{24}{4} = x \text{ లేదా } x = 6 \text{ సెం.మీ.}$$

కావున, సమాంతర చతుర్భుజం ఎత్తు 6 సెం.మీ.

EXAMPLE 3 The two sides of the parallelogram ABCD are 6 cm and 4 cm. The height corresponding to the base CD is 3 cm (Fig 9.10). Find the

- (i) area of the parallelogram. (ii) the height corresponding to the base AD.

SOLUTION

$$\begin{aligned}
 \text{(i) Area of parallelogram} &= b \times h \\
 &= 6 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2 \\
 \text{(ii) base } (b) &= 4 \text{ cm, height } = x \text{ (say),} \\
 \text{Area} &= 18 \text{ cm}^2 \\
 \text{Area of parallelogram} &= b \times x \\
 18 &= 4 \times x \\
 \frac{18}{4} &= x
 \end{aligned}$$

Therefore, $x = 4.5 \text{ cm}$

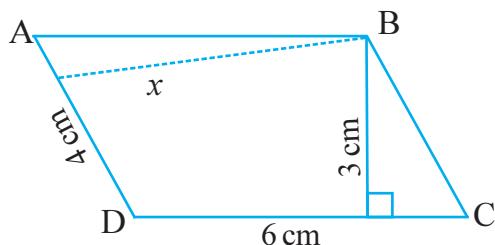
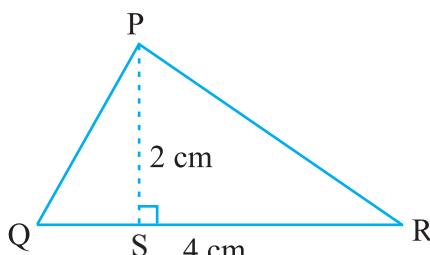


Fig 9.10

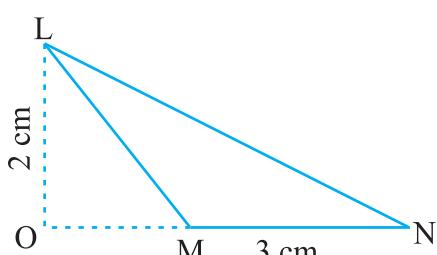
Thus, the height corresponding to base AD is 4.5 cm.

EXAMPLE 4 Find the area of the following triangles (Fig 9.11).



(i)

Fig 9.11



(ii)

SOLUTION

$$\begin{aligned}
 \text{(i) Area of triangle} &= \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} \times QR \times PS \\
 &= \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2 \\
 \text{(ii) Area of triangle} &= \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} \times MN \times LO \\
 &= \frac{1}{2} \times 3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$



ఉదాహరణ 3 సమాంతర చతుర్భుజం ABCD యొక్క రెండు భూజాలు 6 సె.మీ. మరియు 4 సె.మీ. భూమి CD కి అనురూప ఎత్తు 3 సె.మీ. (పటం 9.10). కింది వాటిని కనుగొనండి.

(i) సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం (ii) భూమి AD కి అనురూప ఎత్తు.

సాధన:

$$\begin{aligned} \text{(i) సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం} &= b \times h \\ &= 6 \text{ సె.మీ.} \times 3 \text{ సె.మీ.} = 18 \text{ సె.మీ.}^2 \end{aligned}$$

(ii) భూమి (b) = 4 సె.మీ., ఎత్తు = x (అనుకొనుము),

$$\text{వైశాల్యం} = 18 \text{ సె.మీ.}^2$$

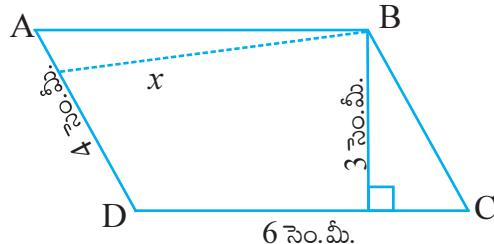
$$\text{సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం} = b \times x$$

$$18 = 4 \times x$$

$$\frac{18}{4} = x$$

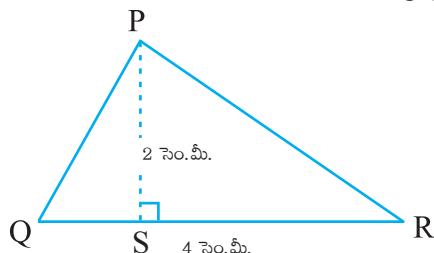
అందువలన,

$$x = 4.5 \text{ సె.మీ.}$$

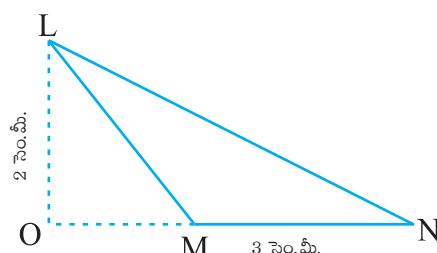


పటం 9.10

ఉదాహరణ 4 కింది త్రిభుజాల వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి (పటం 9.11).



(i)



పటం 9.11

(ii)

సాధన:

$$\begin{aligned} \text{(i) త్రిభుజ వైశాల్యం} &= \frac{1}{2} b h = \frac{1}{2} \times QR \times PS \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \text{ సె.మీ.} \times 2 \text{ సె.మీ.} = 4 \text{ సె.మీ.}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) త్రిభుజ వైశాల్యం} &= \frac{1}{2} b h = \frac{1}{2} \times MN \times LO \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \text{ సె.మీ.} \times 2 \text{ సె.మీ.} = 3 \text{ సె.మీ.}^2 \end{aligned}$$



EXAMPLE 5 Find BC, if the area of the triangle ABC is 36 cm^2 and the height AD is 3 cm (Fig 9.12).

SOLUTION Height = 3 cm, Area = 36 cm^2

$$\text{Area of the triangle ABC} = \frac{1}{2}bh$$

or $36 = \frac{1}{2} \times b \times 3$ i.e., $b = \frac{36 \times 2}{3} = 24 \text{ cm}$

So, $BC = 24 \text{ cm}$

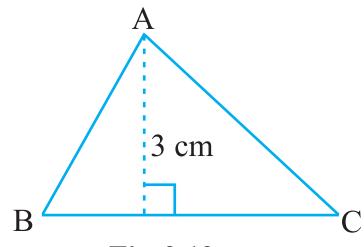


Fig 9.12

EXAMPLE 6 In ΔPQR , $PR = 8 \text{ cm}$, $QR = 4 \text{ cm}$ and $PL = 5 \text{ cm}$ (Fig 9.13). Find:

- (i) the area of the ΔPQR
- (ii) QM

SOLUTION

- (i) $QR = \text{base} = 4 \text{ cm}$, $PL = \text{height} = 5 \text{ cm}$

$$\text{Area of the triangle PQR} = \frac{1}{2}bh$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}^2$$

- (ii) $PR = \text{base} = 8 \text{ cm}$ $QM = \text{height} = ?$ $\text{Area} = 10 \text{ cm}^2$

$$\text{Area of triangle} = \frac{1}{2} \times b \times h \quad \text{i.e.,} \quad 10 = \frac{1}{2} \times 8 \times h$$

$$h = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5. \quad \text{So,} \quad QM = 2.5 \text{ cm}$$

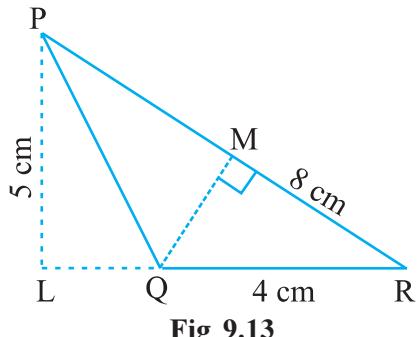


Fig 9.13



ఉదాహరణ 5

త్రిభుజం ABC వైశాల్యం 36 సెం.మీ.², ఎత్తు AD 3 సెం.మీ. అయితే BC ని కనుగొనండి.
(పటం 9.12)

సాధన: ఎత్తు = 3 సెం.మీ., వైశాల్యం = 36 సెం.మీ.²

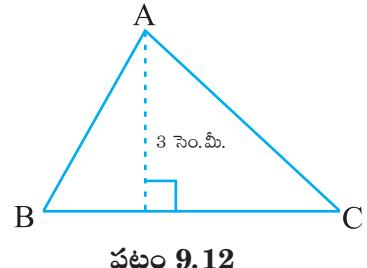
$$\text{ABC త్రిభుజ వైశాల్యం} = \frac{1}{2}bh$$

లేదా

$$36 = \frac{1}{2} \times b \times 3, \quad b = \frac{36 \times 2}{3} = 24 \text{ సెం.మీ.}$$

కావున,

$$BC = 24 \text{ సెం.మీ.}$$



పటం 9.12

ఉదాహరణ 6

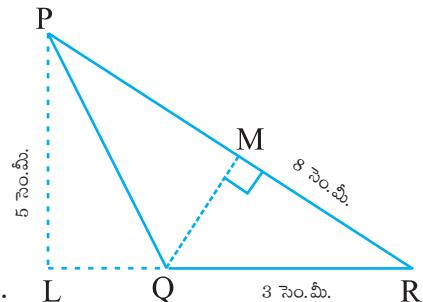
$\triangle PQR$ లో $PR = 8$ సెం.మీ. $QR = 4$ సెం.మీ., $PL = 5$ సెం.మీ. (పటం 9.13). కనుగొనము:

- (i) $\triangle PQR$ యొక్క వైశాల్యం (ii) QM

సాధన:

- (i) $QR = \text{భూమి} = 4$ సెం.మీ., $PL = \text{ఎత్తు} = 5$ సెం.మీ.

$$\text{త్రిభుజం వైశాల్యం } PQR = \frac{1}{2}bh$$



పటం 9.13

$$= \frac{1}{2} \times 4 \text{ సెం.మీ.} \times 5 \text{ సెం.మీ.} = 10 \text{ సెం.మీ.}^2$$

- (ii) $PR = \text{భూమి} = 8$ సెం.మీ. $QM = \text{ఎత్తు} = ?$ వైశాల్యం = 10 సెం.మీ.²

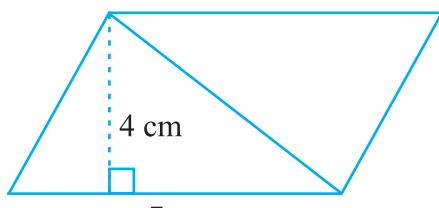
$$\text{త్రిభుజ వైశాల్యం} = \frac{1}{2} \times b \times h \quad \text{అంటే, } 10 = \frac{1}{2} \times 8 \times h$$

$$h = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5. \quad \text{కావున, } QM = 2.5 \text{ సెం.మీ.}$$

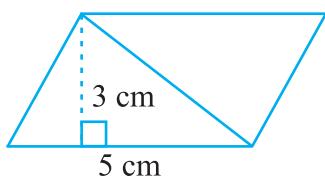


EXERCISE 9.1

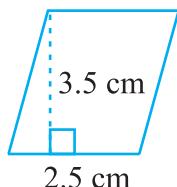
1. Find the area of each of the following parallelograms:



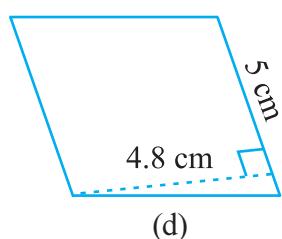
(a)



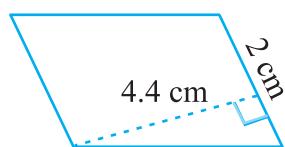
(b)



(c)

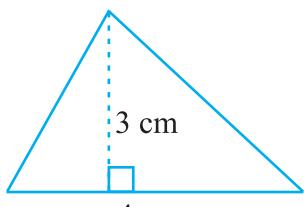


(d)

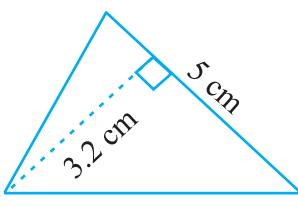


(e)

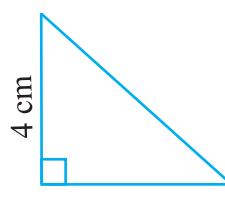
2. Find the area of each of the following triangles:



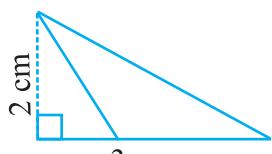
(a)



(b)



(c)



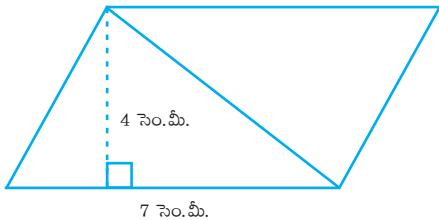
(d)

3. Find the missing values:

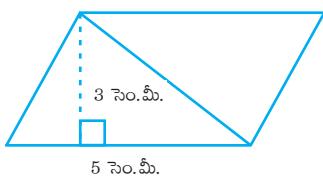
S.No.	Base	Height	Area of the Parallelogram
a.	20 cm		246 cm^2
b.		15 cm	154.5 cm^2
c.		8.4 cm	48.72 cm^2
d.	15.6 cm		16.38 cm^2

అభ్యాసం 9.1

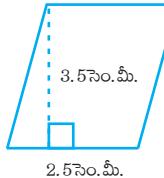
1. కింది ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి:



(a)



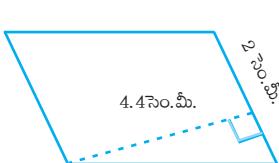
(b)



(c)

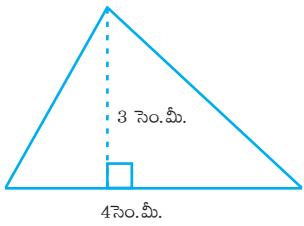


(d)

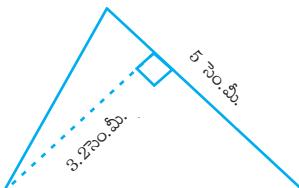


(e)

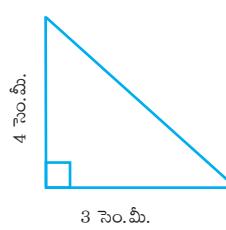
2. క్రింది ప్రతి త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి:



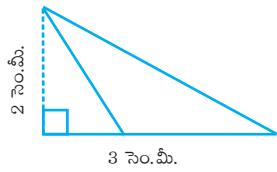
(a)



(b)



(c)



(d)

3. లోపించిన విలువలను కనుగొనండి.

క్ర.సం.	భూమి	ఎత్తు	సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం
a.	20 సెం.మీ.		246 సెం.మీ. ²
b.		15 సెం.మీ.	154.5 సెం.మీ. ²
c.		8.4 సెం.మీ.	48.72 సెం.మీ. ²
d.	15.6 సెం.మీ.		16.38 సెం.మీ. ²

4. Find the missing values:

Base	Height	Area of Triangle
15 cm	_____	87 cm ²
_____	31.4 mm	1256 mm ²
22 cm	_____	170.5 cm ²

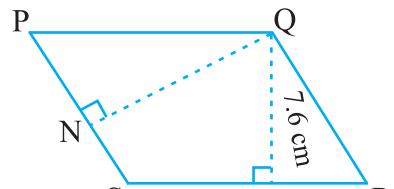


Fig 9.14

5. PQRS is a parallelogram (Fig 9.14). QM is the height from Q to SR and QN is the height from Q to PS. If SR = 12 cm and QM = 7.6 cm. Find:
- the area of the parallelogram PQRS
 - QN, if PS = 8 cm
6. DL and BM are the heights on sides AB and AD respectively of parallelogram ABCD (Fig 9.15). If the area of the parallelogram is 1470 cm², AB = 35 cm and AD = 49 cm, find the length of BM and DL.
7. $\triangle ABC$ is right angled at A (Fig 9.16). AD is perpendicular to BC. If AB = 5 cm, BC = 13 cm and AC = 12 cm, Find the area of $\triangle ABC$. Also find the length of AD.

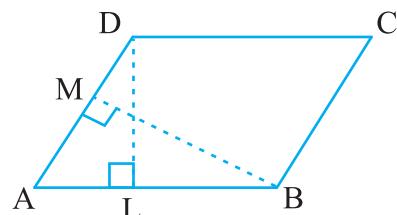


Fig 9.15

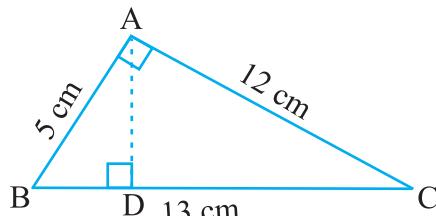


Fig 9.16

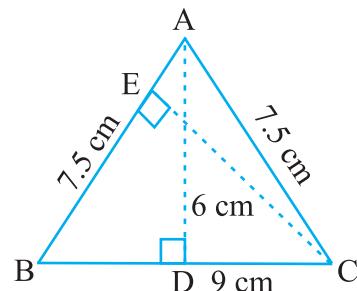


Fig 9.17

8. $\triangle ABC$ is isosceles with AB = AC = 7.5 cm and BC = 9 cm (Fig 9.17). The height AD from A to BC, is 6 cm. Find the area of $\triangle ABC$. What will be the height from C to AB i.e., CE?

9.3 CIRCLES

A racing track is semi-circular at both ends (Fig 9.18).

Can you find the distance covered by an athlete if he takes two rounds of a racing track? We need to find a method to find the distances around when a shape is circular.

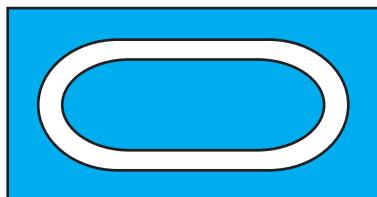
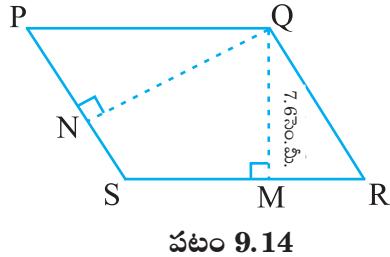


Fig 9.18

4. లోపించిన విలువలను కనుగొనండి.

భూమి	ఎత్తు	త్రిభుజ వైశాల్యం
15 సె.మీ.	_____	87 సె.మీ. ²
_____	31.4 సె.మీ.	1256 సె.మీ. ²
22 సె.మీ.	_____	170.5 సె.మీ. ²



పటం 9.14

5. PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం (పటం 9.14). Q నుండి SR కు గల ఎత్తు QM మరియు Q నుండి PS కు గల ఎత్తు QN. SR = 12 సె.మీ. మరియు QM = 7.6 సె.మీ. అయితే, కింది వాటిని కనుగొనండి:

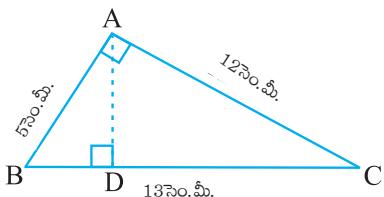
(a) PQRS సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం

(b) PS = 8 సె.మీ. అయితే QN

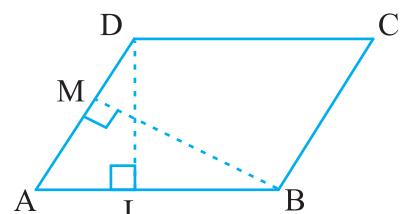
6. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD (పటం 9.15). యొక్క AB

మరియు AD భుజాలపై ఉన్న ఎత్తులు వరుసగా DL మరియు BM సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం 1470 సె.మీ.², AB = 35 సె.మీ. మరియు AD = 49 సె.మీ., అయితే BM మరియు DL పొడవులను కనుగొనండి.

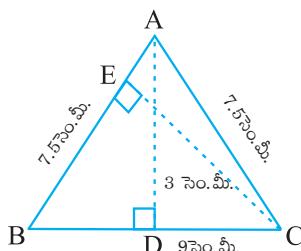
7. $\triangle ABC$, A వద్ద లంబకోణం కలిగి ఉంది. (పటం 9.16). BC కి లంబంగా AD ఉంది. AB = 5 సె.మీ. BC = 13 సె.మీ. మరియు AC = 12 సె.మీ. అయితే $\triangle ABC$ వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. AD యొక్క పొడవును కూడా కనుగొనండి.



పటం 9.16



పటం 9.15



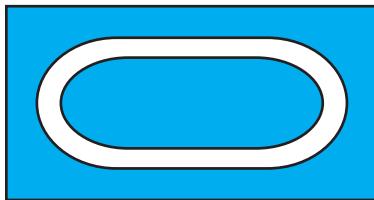
పటం 9.17

8. $\triangle ABC$ అనేది $AB = AC = 7.5$ సె.మీ. మరియు $BC = 9$ సె.మీ. (పటం 9.17) కలిగిన సమద్విభాగు త్రిభుజం. A నుండి BC మీదికి ఎత్తు AD 6 సె.మీ. $\triangle ABC$ యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. C నుండి AB మీదికి ఎత్తు, అంటే CE ఎంత?

9.3 వృత్తాలు

ఒక రేసింగ్ ట్రాక్ రెండు చివర్లలో అర్ధ వృత్తాకారంగా ఉంది (పటం 9.18).

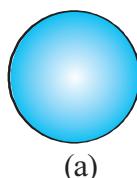
ఒక క్రీడాకారుడు రేసింగ్ ట్రాక్లో రెండు రౌండ్లు తీరిగి అతను ప్రయాణించే దూరాన్ని మీరు కనుగొనగలరా? ఒక ఆకారం వృత్తాకారంగా ఉన్నప్పుడు చుట్టూ ఉన్న దూరం కనుగొనడానికి మనం ఒక వద్దతిని కనుగొనడం అవసరం.



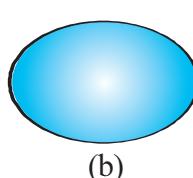
పటం 9.18

9.3.1 Circumference of a Circle

Tanya cut different cards, in curved shape from a cardboard. She wants to put lace around to decorate these cards. What length of the lace does she require for each? (Fig 9.19)



(a)



(b)



(c)

Fig 9.19

You cannot measure the curves with the help of a ruler, as these figures are not “straight”. What can you do?

Here is a way to find the length of lace required for shape in Fig 9.19(a). Mark a point on the edge of the card and place the card on the table. Mark the position of the point on the table also (Fig 9.20).

Now roll the circular card on the table along a straight line till the marked point again touches the table. Measure the distance along the line. This is the length of the lace required (Fig 9.21). It is also the distance along the edge of the card from the marked point back to the marked point.

You can also find the distance by putting a string on the edge of the circular object and taking all round it.

The distance around a circular region is known as its circumference.

Do This

Take a bottle cap, a bangle or any other circular object and find the circumference.

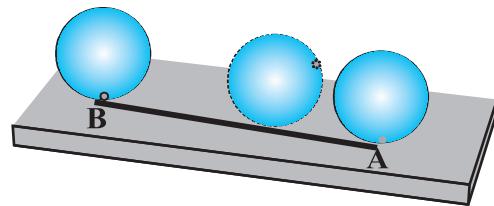
Now, can you find the distance covered by the athlete on the track by this method?

Still, it will be very difficult to find the distance around the track or any other circular object by measuring through string. Moreover, the measurement will not be accurate.

So, we need some formula for this, as we have for rectilinear figures or shapes.

Let us see if there is any relationship between the diameter and the circumference of the circles.

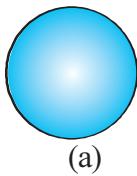
Consider the following table: Draw six circles of different radii and find their circumference by using string. Also find the ratio of the circumference to the diameter.

**Fig 9.20****Fig 9.21**

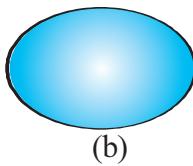
Circle	Radius	Diameter	Circumference	Ratio of Circumference to Diameter
1.	3.5 cm	7.0 cm	22.0 cm	$\frac{22}{7} = 3.14$

9.3.1 పృతం పరిధి

తాన్య అట్ట ముక్క నుండి వంపు ఆకారంలో వివిధ కార్డ్ లను కత్తిరించింది. అమె ఈ కార్డులను అలంకరించేందుకు చుట్టూ రంగు పట్టి వేయాలనుకుంటోంది. ప్రతిదానికి అమెకు ఎంత పొడవు రంగు పట్టి అవసరం? (పటం. 9.19)



(a)



(b)



(c)



పటం 9.20

పటం 9.19

మీరు స్నేలు సహాయంతో వక్రాలను కొలవలేరు, ఎందుకంటే ఈ ఆకారాలు సరళ రేఖలుగా లేవు. నీవు ఏమి చేయగలవు?

పటం 9.19(a) లో ఆకారానికి అవసరమైన రంగు పట్టి పొడవును కనుగొనడానికి ఇక్కడ ఒక మార్గం ఉంది. కార్డ్ అంచున ఒక బిందువును గుర్తించి, కార్డును బల్లపై ఉంచండి. బల్లపై బిందువు యొక్క స్థానాన్ని కూడా గుర్తించండి. (పటం 9.20)

గుర్తించబడిన బిందువు మళ్ళీ బల్లను తాకే వరకు ఇప్పుడు బల్ల పై వృత్తాకార కార్డ్ను సరళ రేఖా మార్గంలో దొర్లించండి. రేఖ వెంబడి దూరాన్ని కొలవండి. ఇది అవసరమైన రంగు పట్టి యొక్క పొడవు (పటం 9.21). ఇది గుర్తు పెట్టబడిన బిందువు నుండి గుర్తు పెట్టబడిన బిందువు వరకు కార్డ్ అంచున ఉన్న దూరం కూడా.

మీరు వృత్తాకార వస్తువు అంచుపై తీగను ఉంచడం మరియు దాని మొత్తం చుట్టూ తీసుకోవడం ద్వారా కూడా దూరాన్ని కనుగొనవచ్చు.

వృత్తాకార ప్రాంతం చుట్టూ ఉన్న దూరాన్ని దాని పరిధి అంటారు.

ఇవి చేయండి

ఒక బాటిల్ మూత, ఒక చేతి గాజు లేదా ఏదైనా ఇతర వృత్తాకార వస్తువు తీసుకొని పరిధిని కనుగొనండి.

ఇప్పుడు, మీరు ఈ పద్ధతి ద్వారా ట్రాక్ట్‌పై క్రీడాకారుడు పూర్తి చేసిన దూరాన్ని కనుగొనగలరా?

ఇప్పటికీ, తీగ ద్వారా కొలవడం ద్వారా ట్రాక్ట్ లేదా ఏదైనా ఇతర వృత్తాకార వస్తువు చుట్టూ ఉన్న దూరాన్ని కనుగొనడం చాలా కష్టం. అంతేకాక, కొలత ఖచ్చితమైనది కాదు.

కాబట్టి, రేఖాత్రంక పటాలు లేదా ఆకారాలకు ఉన్నట్టుగానే దీనికి కూడా మనకు ఒక సూత్రం అవసరం.

వృత్తాల వ్యాసం మరియు పరిధి మధ్య ఏదైనా సంబంధం ఉందా అని చూద్దాం.

కింది పట్టికను పరిగణించండి: వివిధ వ్యాసార్థాలతో ఆరు వృత్తాలను గీయండి, తీగను ఉపయోగించి వాటి పరిధి కనుగొనండి. పరిధి, వ్యాసం యొక్క నిప్పుత్తిని కూడా కనుగొనండి.



వృత్తం	వ్యాసార్థం	వ్యాసం	చుట్టూకొలత	పరిధి మరియు వ్యాసం యొక్క నిప్పుత్తి
1	3.5 సెం.మీ.	7.0 సెం.మీ.	22.0 సెం.మీ.	$\frac{22}{7} = 3.14$

2.	7.0 cm	14.0 cm	44.0 cm	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 cm	21.0 cm	66.0 cm	$\frac{66}{21} = 3.14$
4.	21.0 cm	42.0 cm	132.0 cm	$\frac{132}{42} = 3.14$
5.	5.0 cm	10.0 cm	32.0 cm	$\frac{32}{10} = 3.2$
6.	15.0 cm	30.0 cm	94.0 cm	$\frac{94}{30} = 3.13$

What do you infer from the above table? Is this ratio approximately the same? Yes.

Can you say that the circumference of a circle is always more than three times its diameter? Yes.

This ratio is a constant and is denoted by π (pi). Its approximate value is $\frac{22}{7}$ or 3.14.

So, we can say that $\frac{C}{d} = \pi$, where 'C' represents circumference of the circle and 'd' its diameter.

or $C = \pi d$

We know that diameter (d) of a circle is twice the radius (r) i.e., $d = 2r$

So, $C = \pi d = \pi \times 2r$ or $C = 2\pi r$.

TRY THESE



In Fig 9.22,

- (a) Which square has the larger perimeter?
- (b) Which is larger, perimeter of smaller square or the circumference of the circle?

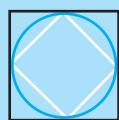


Fig 9.22

Do This



Take one each of quarter plate and half plate. Roll once each of these on a table-top. Which plate covers more distance in one complete revolution? Which plate will take less number of revolutions to cover the length of the table-top?

2.	7.0 సె.మీ.	14.0 సె.మీ.	44.0 సె.మీ.	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 సె.మీ.	21.0 సె.మీ.	66.0 సె.మీ.	$\frac{66}{21} = 3.14$
4.	21.0 సె.మీ.	42.0 సె.మీ.	132.0 సె.మీ.	$\frac{132}{42} = 3.14$
5.	5.0 సె.మీ.	10.0 సె.మీ.	32.0 సె.మీ.	$\frac{32}{10} = 3.2$
6.	15.0 సె.మీ.	30.0 సె.మీ.	94.0 సె.మీ.	$\frac{94}{30} = 3.13$

పై పట్టిక నుండి మీరు ఏమి డిఫోంచారు? ఈ నిష్పత్తి ఇంచుమించు ఒకేలా ఉందా? అవును?

ఈ వృత్తపరిధి ఎల్లప్పుడూ దాని వ్యాసానికి మూడు రెట్లు ఎక్కువ ఉంటుందని మీరు చెప్పగలరా? అవును.

ఈ నిష్పత్తి స్థిరము, దీనిని π (పై)తో సూచిస్తాము. దీని విలువ సుమారుగా $\frac{22}{7}$ లేదా 3.14.

కావున $\frac{C}{d} = \pi$ అని మనం చెప్పవచ్చు, ఇక్కడ ‘C’ వృత్త పరిధి మరియు దాని వ్యాసం ‘d’

లేదా

$$C = \pi d$$

వృత్త వ్యాసం (d) వ్యాసార్థానికి (r) రెండు రెట్లు అని మనకు తెలుసు. అంటే, $d = 2r$

కావున,

$$C = \pi d = \pi \times 2r$$

లేదా

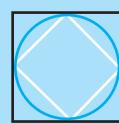
$$C = 2\pi r.$$

ప్రయత్నించండి



పటం 9.22 లో,

- (a) ఏ చతురస్రం ఎక్కువ చుట్టుకొలతను కలిగి ఉంది?
- (b) చిన్న చతురస్రం చుట్టుకొలత లేదా వృత్త పరిధులలో ఏది పెద్దది?



పటం 9.22

జ్ఞాన చేయండి



పొపు పేటు మరియు అర పేట్ ఒక్కక్కటి తీసుకోండి. బల్ల ఉపరితలంలో ప్రతి ఒక్కటి ఒకసారి దొర్లించండి. ఒక పూర్తి భ్రమణంలో ఏ పేట్ ఎక్కువ దూరాన్ని పూర్తి చేస్తుంది? బల్ల ఉపరితలం యొక్క పొడవును పూర్తి చేయడానికి ఏ పేట్ తక్కువ సంఖ్యలో భ్రమణాలను తీసుకుంటుంది?

EXAMPLE 7 What is the circumference of a circle of diameter 10 cm (Take $\pi = 3.14$)?

SOLUTION Diameter of the circle (d) = 10 cm

$$\begin{aligned}\text{Circumference of circle} &= \pi d \\ &= 3.14 \times 10 \text{ cm} = 31.4 \text{ cm}\end{aligned}$$

So, the circumference of the circle of diameter 10 cm is 31.4 cm.



EXAMPLE 8 What is the circumference of a circular disc of radius 14 cm?

$$\left(\text{Use } \pi = \frac{22}{7} \right)$$

SOLUTION Radius of circular disc (r) = 14 cm

$$\begin{aligned}\text{Circumference of disc} &= 2\pi r \\ &= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \text{ cm} = 88 \text{ cm}\end{aligned}$$

So, the circumference of the circular disc is 88 cm.

EXAMPLE 9 The radius of a circular pipe is 10 cm. What length of a tape is required to wrap once around the pipe ($\pi = 3.14$)?

SOLUTION Radius of the pipe (r) = 10 cm

Length of tape required is equal to the circumference of the pipe.

$$\begin{aligned}\text{Circumference of the pipe} &= 2\pi r \\ &= 2 \times 3.14 \times 10 \text{ cm} \\ &= 62.8 \text{ cm}\end{aligned}$$

Therefore, length of the tape needed to wrap once around the pipe is 62.8 cm.

EXAMPLE 10 Find the perimeter of the given shape (Fig 9.23) (Take $\pi = \frac{22}{7}$).

SOLUTION In this shape we need to find the circumference of semicircles on each side of the square. Do you need to find the perimeter of the square also? No. The outer boundary, of this figure is made up of semicircles. Diameter of each semicircle is 14 cm.

We know that:

$$\text{Circumference of the circle} = \pi d$$

$$\begin{aligned}\text{Circumference of the semicircle} &= \frac{1}{2} \pi d \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 14 \text{ cm} = 22 \text{ cm}\end{aligned}$$

Circumference of each of the semicircles is 22 cm

Therefore, perimeter of the given figure = $4 \times 22 \text{ cm} = 88 \text{ cm}$

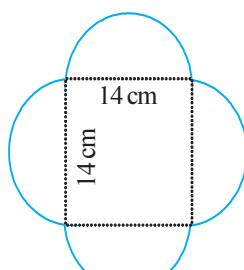


Fig 9.23

ఉదాహరణ 7

వ్యాసం 10 సెం.మీ. కలిగిన వృత్తపరిధి ఎంత? ($\pi = 3.14$ అని తీసుకోండి)?

సాధన:

వృత్తం యొక్క వ్యాసం (d) = 10 సెం.మీ.

$$\text{వృత్త పరిధి} = \pi d$$

$$= 3.14 \times 10 \text{ సెం.మీ.} = 31.4 \text{ సెం.మీ.}$$

కావున, వ్యాసం 10 సెం.మీ. కలిగిన వృత్తం యొక్క పరిధి 31.4 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 8 వ్యాసార్థం 14 సెం.మీ. వృత్తాకార ఘలకం యొక్క పరిధి ఎంత?

$$(\pi = \frac{22}{7} \text{ ను ఉపయోగించండి})$$

సాధన:

వృత్తాకార ఘలకం యొక్క వ్యాసార్థం (r) = 14 సెం.మీ.

$$\text{ఘలకం యొక్క పరిధి} = 2\pi r$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \text{ సెం.మీ.} = 88 \text{ సెం.మీ.}$$

కావున, వృత్తాకార ఘలకం యొక్క పరిధి 88 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 9

వృత్తాకార పైపు యొక్క వ్యాసార్థం 10 సెం.మీ. పైపు చుట్టూ ఒకసారి చుట్టుదానికి ఎంత పొడవు టేచ్ అవసరం ($\pi = 3.14$)?

సాధన:

పైపు యొక్క వ్యాసార్థం (r) = 10 సెం.మీ.

అవసరమైన టేచ్ పొడవు పైపు యొక్క పరిధికి సమానం

$$\text{పైపు యొక్క పరిధి} = 2\pi r$$

$$= 2 \times 3.14 \times 10 \text{ సెం.మీ.}$$

$$= 62.8 \text{ సెం.మీ.}$$

అందువలన, పైపు చుట్టూ ఒకసారి చుట్టుదానికి అవసరమైన టేచ్ పొడవు 62.8 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 10

జచ్చిన ఆకారం యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనండి (పటం 9.23)

$$(\pi = \frac{22}{7} \text{ గాటిసుకోండి}).$$

సాధన:

ఈ ఆకారంలో మనం చతురస్రం యొక్క ప్రతి భుజంపై ఉన్న అర్ధవృత్తాల యొక్క పరిధిలను కనుగొనాలి. మీరు చతురస్రపు చుట్టుకొలతను కూడా కనుగొనాల్సిన అవసరం ఉందా? లేదు. ఈ ఆకారం యొక్క బయటి సరిహద్దు అర్ధవృత్తాలతో రూపొందించ బడింది. ప్రతి అర్ధవృత్తం యొక్క వ్యాసం 14 సెం.మీ.

మనకు తెలుసు:

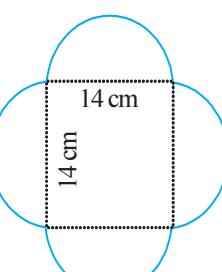
$$\text{వృత్తం యొక్క పరిధి} = \pi d$$

$$\text{అర్ధవృత్తం యొక్క పరిధి} = \frac{1}{2} \pi d$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 14 \text{ సెం.మీ.} = 22 \text{ సెం.మీ.}$$

అర్ధవృత్త పరిధి 22 సెం.మీ.

అందువలన, జచ్చిన ఆకారం యొక్క చుట్టుకొలత = 4×22 సెం.మీ. = 88 సెం.మీ.



పటం 9.23



EXAMPLE 11 Sudhanshu divides a circular disc of radius 7 cm in two equal parts.

What is the perimeter of each semicircular shape disc? (Use $\pi = \frac{22}{7}$)

SOLUTION To find the perimeter of the semicircular disc (Fig 9.24), we need to find

Given that radius (r) = 7 cm. We know that the circumference of circle = $2\pi r$

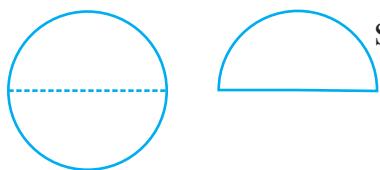


Fig 9.24

$$\begin{aligned} \text{So, the circumference of the semicircle} &= \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r \\ &= \frac{22}{7} \times 7 \text{ cm} = 22 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\text{So, the diameter of the circle} = 2r = 2 \times 7 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$$

Thus, perimeter of each semicircular disc = $22\text{ cm} + 14\text{ cm} = 36\text{ cm}$

9.3.2 Area of Circle

Consider the following:

- A farmer dug a flower bed of radius 7 m at the centre of a field. He needs to purchase fertiliser. If 1 kg of fertiliser is required for 1 square metre area, how much fertiliser should he purchase?
 - What will be the cost of polishing a circular table-top of radius 2 m at the rate of ₹ 10 per square metre?



Can you tell what we need to find in such cases, Area or Perimeter? In such cases we need to find the area of the circular region. Let us find the area of a circle, using graph paper.

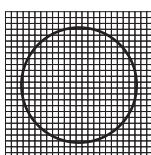


Fig. 9.25

Draw a circle of radius 4 cm on a graph paper (Fig 9.25). Find the area by counting the number of squares enclosed.

As the edges are not straight, we get a rough estimate of the area of circle by this method. There is another way of finding the area of a circle.

Draw a circle and shade one half of the circle [Fig 9.26(i)]. Now fold the circle into **eighths** and cut along the folds [Fig 9.26(ii)].

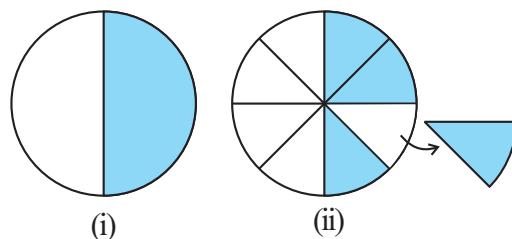


Fig 9.26

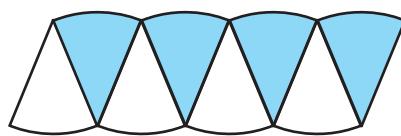


Fig 9.27

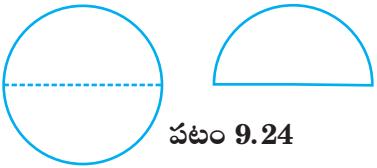
Arrange the separate pieces as shown, in Fig 9.27, which is roughly a parallelogram.

The more sectors we have, the nearer we reach an appropriate parallelogram.

ఉదాహరణ 11

సుదాంశు 7 సెం.మీ. వ్యాసార్థం ఉన్న వృత్తాకార డిస్క్సును రెండు సమాన భాగాలు చేశాడు. ఒకొక్క అర్ధ వృత్తాకారంలో ఉన్న డిస్క్ చుట్టుకొలత ఎంత? ($\pi = \frac{22}{7}$ ను ఉపయోగించండి.)

సాధనః



పటం 9.24

అర్థ వృత్తాకార డిస్కు (పటం 9.24) చుట్టూకొలతను కనుగొనడానికి,

ಇಚ್ಛಿನ ವ್ಯಾಸರೂಪ (r) = 7 ಸೆ.ಮೀ. ವೃತ್ತಂ ಯೊಕ್ಕ ಚುಟ್ಟುಕೊಲತೆ = $2\pi r$ ಅನಿ ತೆಲುಸು

$$\text{కావున, అర్ధ వృత్తం పరిధి} = \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \text{ సం.మీ.} = 22 \text{ సం.మీ.}$$

$$\text{కావున, వృత్తం యొక్క వ్యాసం} = 2r = 2 \times 7 \text{ సె.మీ.} = 14 \text{ సె.మీ.}$$

ఆందువలన, అర్థ వృత్తాకార డిస్క్ చుట్టుకొలత = 22 సె.మీ. + 14 సె.మీ. = 36 సె.మీ.

9.3.2 వృత్తం యొక్క వేశాల్యం

ಕಿಂದಿ ವಾಟೆನಿ ಪರಿಗಣಿಂಚಂಡಿ:

- ఒక టైప్ పొలం మధ్యలో 7 మీటర్ల వ్యాసార్థంతో పూల తోటకూరకు తవ్వాడు. అతను ఎరువులు కొనుగోలు చేయాలి. 1 చదరపు మీటరు విస్తృతానికి 1 కిలో ఎరువు అవసరమైతే, అతను ఎంత ఎరువు కొనుగోలు చేయాలి?
 - 2 మీటర్ల వ్యాసార్థం గల వృత్తాకార బల్ల ఉపరితలంను పాలిష్ చేయడానికి చదరపు మీటరుకు ₹ 10 చౌపున ఎంత ఖరువుతుంది?



A large circle is drawn on a grid background. The circle is perfectly circular and has a thin black outline. It is positioned in the center of the grid.

పటుం 9.25

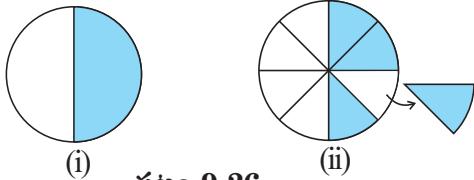
ఇటువంటి సందర్భాలలో వైశాల్యం లేదా చుట్టుకొలతలలో మనం ఏమి కనుగొనాలో మీరు చెప్పగలరా? ఇలాంటి సందర్భాలలో మనం వృత్తాకార ప్రాంతం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనవలసి

ಉಂಟುಂದಿ. **ಗ್ರಾಫ್** ಪೇಪರನಿ ಉಪಯೋಗಿಂಚಿ ವೃತ್ತಂ ಯೊಕ್ಕ ವೈಶಾಲ್ಯನ್ನು ಕನುಗೊನಂಡಿ.

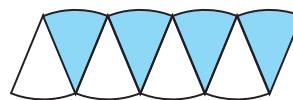
గ్రాఫ్ పేపర్‌పై 4 సెం.మీ. వ్యాసార్థం గల వృత్తాన్ని గీయుండి [పటం 9.26(i)]. వృత్తం లోపల చతురస్రాల సంఖ్యను లెక్కించడం ద్వారా వైశాల్యాన్ని కనుగొనడి.

అంచులు నిటారుగా లేనందున, మనం ఈ పద్ధతి ద్వారా వృత్తం యొక్క వైశాల్యాన్ని సుమారుగా అంచనా వేస్తాము. వృత్తం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగోనడానికి మరొక మార్గం ఉంది.

ఒక వృత్తాన్ని గీయండి, వృత్తంలో ఒక సగం పేడ్ చేయండి [పటం 9.26(i)]. ఇప్పుడు వృత్తమును ఎనిమిదవ వంతుకు మడిచి ఆ మడతల వెంబడి కత్తిరించండి. [పటం 9.26(ii)]



పటుం 9.26



పటం 9.27

పటుంగ. 9. 27 లో చూపిన విధంగా ఆ విడి భాగాలను అమర్యండి. ఇది దాదాపు సమాంతర చతుర్భుజం. మన దగ్గర ఎక్కువ సెక్టర్లు ఉంటే, మనం తగిన సమాంతర చతుర్భుజాన్ని పొందుతాము.

As done above if we divide the circle in 64 sectors, and arrange these sectors. It gives nearly a rectangle (Fig 9.28).

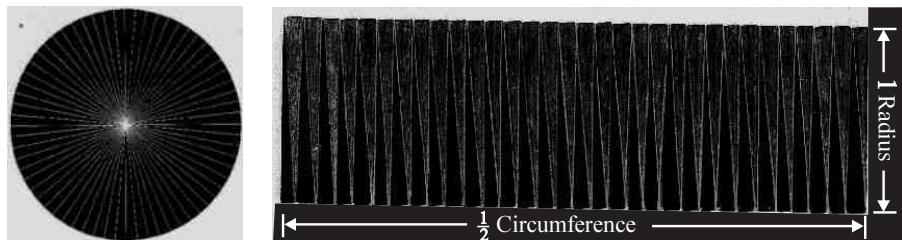


Fig 9.28

What is the breadth of this rectangle? The breadth of this rectangle is the radius of the circle, i.e., ' r '.

As the whole circle is divided into 64 sectors and on each side we have 32 sectors, the length of the rectangle is the length of the 32 sectors, which is half of the circumference. (Fig 9.28)

Area of the circle = Area of rectangle thus formed = $l \times b$

$$= (\text{Half of circumference}) \times \text{radius} = \left(\frac{1}{2} \times 2\pi r \right) \times r = \pi r^2$$

So, the area of the circle = πr^2

TRY THESE

Draw circles of different radii on a graph paper. Find the area by counting the number of squares. Also find the area by using the formula. Compare the two answers.



EXAMPLE 12 Find the area of a circle of radius 30 cm (use $\pi = 3.14$).

SOLUTION Radius, $r = 30$ cm

$$\text{Area of the circle} = \pi r^2 = 3.14 \times 30^2 = 2,826 \text{ cm}^2$$

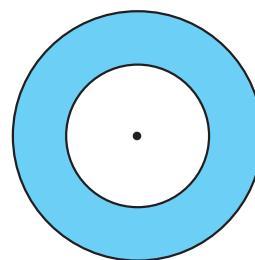
EXAMPLE 13 Diameter of a circular garden is 9.8 m. Find its area.

SOLUTION Diameter, $d = 9.8$ m. Therefore, radius $r = 9.8 \div 2 = 4.9$ m

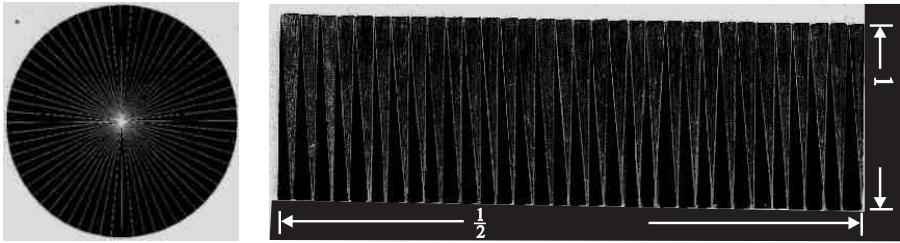
$$\text{Area of the circle} = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times (4.9)^2 \text{ m}^2 = \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \text{ m}^2 = 75.46 \text{ m}^2$$

EXAMPLE 14 The adjoining figure shows two circles with the same centre. The radius of the larger circle is 10 cm and the radius of the smaller circle is 4 cm.

- Find:
- the area of the larger circle
 - the area of the smaller circle
 - the shaded area between the two circles. ($\pi = 3.14$)



మనం వృత్తాన్ని 64 సెక్షార్లుగా విభజించి, ఈ సెక్షార్లను పైన చేసినట్లుగా అమర్చినట్లయితే, ఇది దాదాపు దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఇస్తుంది (పటం 9.28).



పటం 9.26

ఈ దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వెడల్పు ఎంత? ఈ దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వెడల్పు వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థం అంటే 'r'.

మొత్తం వృత్తం 64 సెక్షార్లుగా విభజించబడింది. ప్రతి వైపు మనకు 32 సెక్షార్లు ఉన్నాయి. దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు 32 సెక్షార్ల పొడవు అవుతుంది. ఇది చుట్టుకొలతలో సగం (పటం 9.28) వృత్త వైశాల్యం = ఈ విధంగా ఏర్పడిన దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యం = $l \times b$

$$= (\text{పరిధిలో సగం}) \times \text{వ్యాసార్థం} = \left(\frac{1}{2} \times 2\pi r \right) \times r = \pi r^2$$

$$\text{కావున, వృత్తం యొక్క వైశాల్యం} = \pi r^2$$

ప్రయత్నించండి

గ్రాఫ్ పేపర్స్‌పై వివిధ వ్యాసార్థాలతో వృత్తాలను గీయండి. చతురస్రాల సంఖ్యను లెక్కించడం ద్వారా మరియు సూత్రాన్ని ఉపయోగించి వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. రెండు సమాధానాలను సరిపోల్చండి.



ఉదాహరణ 12 వ్యాసార్థం 30 సె.మీ. ఉన్న వృత్తం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనండి.
($\pi = 3.14$ ఉపయోగించండి).

సాధన: వ్యాసార్థం, $r = 30$ సె.మీ.

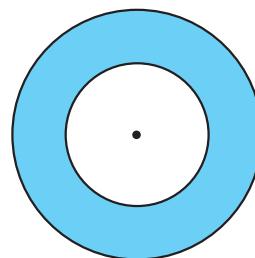
$$\text{వృత్త వైశాల్యం} = \pi r^2 = 3.14 \times 30^2 = 2,826 \text{ సె.మీ.}^2$$

ఉదాహరణ 13 వృత్తాకార తోట వ్యాసం 9.8 మీ. దాని వైశాల్యం కనుగొనుము.

సాధన: వ్యాసం, $d = 9.8$ మీ. అందువలన, వ్యాసార్థం $r = 9.8 \div 2 = 4.9$ మీ.

$$\text{వృత్త వైశాల్యం} = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times (4.9)^2 \text{ మీ.}^2 = \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \text{ మీ.}^2 = 75.46 \text{ మీ.}^2$$

ఉదాహరణ 14 ప్రక్కన ఉన్న పటం ఒకే కేంద్రం ఉన్న రెండు వృత్తాలను చూపుతున్నది. పెద్ద వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థం 10 సె.మీ. మరియు చిన్న వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థం 4 సె.మీ.



- (a) పెద్ద వృత్తం యొక్క వైశాల్యం
- (b) చిన్న వృత్తం యొక్క వైశాల్యం
- (c) రెండు వృత్తాల మధ్య ఉన్న పేడ చేసిన వైశాల్యం. కనుగొనండి ($\pi = 3.14$).

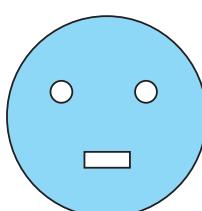
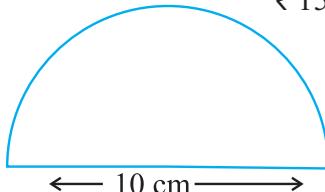
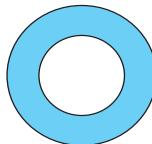
SOLUTION

- (a) Radius of the larger circle = 10 cm
So, area of the larger circle = πr^2
= $3.14 \times 10 \times 10 = 314 \text{ cm}^2$

(b) Radius of the smaller circle = 4 cm
Area of the smaller circle = πr^2
= $3.14 \times 4 \times 4 = 50.24 \text{ cm}^2$

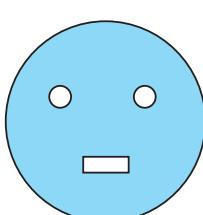
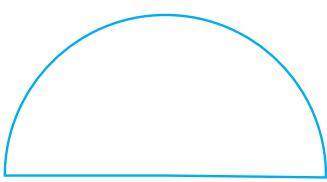
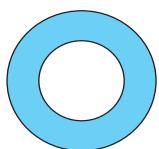
(c) Area of the shaded region = $(314 - 50.24) \text{ cm}^2 = 263.76 \text{ cm}^2$

EXERCISE 9.2

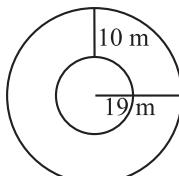
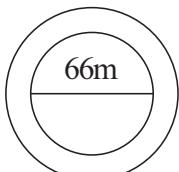


సంఘనః

ಅಭ್ಯಾಸಂ 9.2



11. A circle of radius 2 cm is cut out from a square piece of an aluminium sheet of side 6 cm. What is the area of the left over aluminium sheet? (Take $\pi = 3.14$)
12. The circumference of a circle is 31.4 cm. Find the radius and the area of the circle? (Take $\pi = 3.14$)
13. A circular flower bed is surrounded by a path 4 m wide. The diameter of the flower bed is 66 m. What is the area of this path? ($\pi = 3.14$)
14. A circular flower garden has an area of 314 m^2 . A sprinkler at the centre of the garden can cover an area that has a radius of 12 m. Will the sprinkler water the entire garden? (Take $\pi = 3.14$)
15. Find the circumference of the inner and the outer circles, shown in the adjoining figure? (Take $\pi = 3.14$)
16. How many times a wheel of radius 28 cm must rotate to go 352 m? (Take $\pi = \frac{22}{7}$)
17. The minute hand of a circular clock is 15 cm long. How far does the tip of the minute hand move in 1 hour. (Take $\pi = 3.14$)



WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. Area of a parallelogram = base \times height
2. Area of a triangle = $\frac{1}{2}$ (area of the parallelogram generated from it)

$$= \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{height}$$

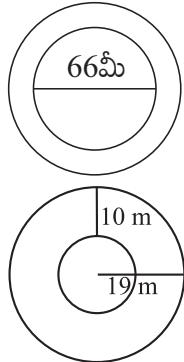
3. The distance around a circular region is known as its circumference.

Circumference of a circle = πd , where d is the diameter of a circle and $\pi = \frac{22}{7}$ or 3.14 (approximately).

4. Area of a circle = πr^2 , where r is the radius of the circle.



11. 6 సెం.మీ. భజం గల చతురస్రాకారపు అల్యామినియం షీట్ నుండి 2 సెంటీమీటర్ల వ్యాసార్థం గల వృత్తం కత్తిరించబడింది. మిగిలిన అల్యామినియం షీట్ యొక్క వైశాల్యం ఎంత? ($\pi = 3.14$ తీసుకోండి)
12. వృత్త పరిధి 31.4 సెం.మీ. వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థం మరియు వైశాల్యాన్ని కనుగొనడి? ($\pi = 3.14$ తీసుకోండి)
13. ఒక వృత్తాకార పూల తోట చుట్టూ 4 మీ. వెడల్పుగల బాట ఉంది. పూల తోట యొక్క వ్యాసం 66 మీ. ఈ బాట యొక్క వైశాల్యం ఎంత? ($\pi = 3.14$)
14. వృత్తాకార పూల తోట 314 మీ² వైశాల్యం కలిగి ఉంది. తోట మధ్యలో ఉన్న స్ప్రింకల్ రెండు వ్యాసార్థం ఉన్న ప్రాంతాన్ని కవర్ చేయగలదు. స్ప్రింకల్ తోట మొత్తానికి నీళ్లిస్తుందా? ($\pi = 3.14$ తీసుకోండి)
15. ప్రక్క పటంలో చూపిన విధంగా లోపలి మరియు బయటి వృత్తాల చుట్టుకొలతను కనుగొనడి? ($\pi = 3.14$ తీసుకోండి)
16. 28 సెంటీమీటర్ల వ్యాసార్థం ఉన్న చక్రం 352 మీటర్ల వెళ్లాలంటే అది ఎన్నిసార్లు తిరగాలి? ($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకోండి)
17. వృత్తాకార గడియారం యొక్క నిమిషాల ముల్లు పొడవు 15 సెం.మీ. నిమిషాల ముల్లు యొక్క కొన 1 గంటలో ఎంత దూరం కదులుతుంది. ($\pi = 3.14$ తీసుకోండి)



మనం ఏం చర్చించాం?

- సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = భూమి × ఎత్తు
- త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ (ఆ త్రిభుజంలో ఏర్పడిన సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం)
 $= \frac{1}{2} \times \text{భూమి} \times \text{ఎత్తు}$
- వృత్తాకార ప్రాంతం చుట్టూ ఉన్న దూరాన్ని దాని వృత్త పరిధి అంటాం.
వృత్త పరిధి = πd , d వ్యాసం మరియు $\pi = \frac{22}{7}$
లేదా 3.14 (సుమారుగా).
- వృత్త వైశాల్యం = πr^2 , ఇచ్చట r వృత్త వ్యాసార్థం.



Algebraic Expressions



10.1 INTRODUCTION

We have already come across simple algebraic expressions like $x + 3$, $y - 5$, $4x + 5$, $10y - 5$ and so on. In Class VI, we have seen how these expressions are useful in formulating puzzles and problems. We have also seen examples of several expressions in the chapter on simple equations.

Expressions are a central concept in algebra. This Chapter is devoted to algebraic expressions. When you have studied this Chapter, you will know how algebraic expressions are formed, how they can be combined, how we can find their values and how they can be used.

10.2 HOW ARE EXPRESSIONS FORMED?

We now know very well what a variable is. We use letters x, y, l, m, \dots etc. to denote variables. A **variable** can take various values. Its value is not fixed. On the other hand, a **constant** has a fixed value. Examples of constants are: 4, 100, -17, etc.

We combine variables and constants to make algebraic expressions. For this, we use the operations of addition, subtraction, multiplication and division. We have already come across expressions like $4x + 5$, $10y - 20$. The expression $4x + 5$ is obtained from the variable x , first by multiplying x by the constant 4 and then adding the constant 5 to the product. Similarly, $10y - 20$ is obtained by first multiplying y by 10 and then subtracting 20 from the product.

The above expressions were obtained by combining variables with constants. We can also obtain expressions by combining variables with themselves or with other variables.

Look at how the following expressions are obtained:

$$x^2, 2y^2, 3x^2 - 5, xy, 4xy + 7$$

- (i) The expression x^2 is obtained by multiplying the variable x by itself;

$$x \times x = x^2$$

Just as 4×4 is written as 4^2 , we write $x \times x = x^2$. It is commonly read as x squared.

బీజియ సమానాలు



10.1 పరిచయం

$x + 3, y - 5, 4x + 5, 10y - 5$ వంటి సాధారణ బీజియ సమాసాలను మనం ఇప్పటికే చూశాం. పజిల్స్ మరియు సమస్యలను రూపొందించడంలో ఈ సమాసాలు ఎలా ఉపయోగపడతాయో మనం VI వ తరగతిలో చూశాం. సామాన్య సమీకరణాల అధ్యాయంలో అనేక సమాసాలు ఉదాహరణలను కూడా మనం చూశాం.

సమాసాలు బీజగణితంలో ఒక కేంద్ర భావన వంటివి. ఈ అధ్యాయం బీజగణిత సమాసాలకు అంకితం చేయబడింది. బీజగణిత సమాసాలు ఎలా ఏర్పడతాయి, వాటిని ఎలా కలపవచ్చు, వాటి విలువలను మనం ఎలా కనుగొనవచ్చు మరియు వాటిని ఎలా ఉపయోగించవచ్చే మీరు ఈ అధ్యాయాన్ని వదిలినప్పుడు తెలుసుకుంటారు.

10.2 సమాసాలు ఎలా ఏర్పడతాయి?

చరరాశి అంటే ఏమిటో మనకు ఇప్పుడు బాగా తెలుసు. మనం x, y, l, m, \dots వంటి అక్షరాలను ఉపయోగించి చరరాశులను సూచిస్తాం. ఒక చరరాశి వివిధ విలువలను తీసుకోవచ్చు. దాని విలువ స్థిరంగా లేదు. మరోపైపు, స్థిరరాశులు స్థిర విలువను కలిగి ఉంటాయి. స్థిరరాశులకు ఉదాహరణలు: $4, 100, -17$ మొదలైనవి.

బీజగణిత సమాసాలు చేయడానికి మనం చరరాశులను మరియు స్థిరరాశులను మిళితం చేస్తాం. దీని కోసం, మనం సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం మరియు భాగహర్షరాల వంటి ప్రక్రియలను ఉపయోగిస్తాం. మనం ఇప్పటికే $4x + 5, 10y - 20$ వంటి సమాసాలను చూశాము. x అనే చరరాశి నుంచి $4x + 5$ అనే సమాసం పొందుతాం. మొదట x ను స్థిరరాశి 4తో గుణించడం ద్వారా మరియు తరువాత లభ్యానికి స్థిరరాశి 5 ను కలపడం ద్వారా పొందవచ్చు. ఇదేవిధంగా, మొదట y ని 10తో గుణించి ద్వారా ఆ లబ్దం నుంచి 20 ని తీసివేయడం ద్వారా $10y - 20$ పొందుతాం.

చరరాశులను స్థిరరాశులతో కలపడం ద్వారా పై సమాసాలను పొందుతాం. చరరాశిని తమతో లేదా ఇతర చరరాశుతో కలపడం ద్వారా కూడా మనం సమాసాలను పొందవచ్చు.

కింది సమాసాలను ఎలా పొందమో చూడండి:

$$x^2, 2y^2, 3x^2 - 5, xy, 4xy + 7$$

- (i) x అనే చరరాశిని దానితోనే గుణించడం ద్వారా x^2 అనే సమాసాన్ని పొందవచ్చు.

$$x \times x = x^2$$

4×4 ను 4^2 అని ప్రాసినట్టే, $x \times x = x^2$ అని రాస్తాం. దీనిని సాధారణంగా x స్క్రైప్ట్ అని చదువుతాం.

Later, when you study the chapter ‘Exponents and Powers’ you will realise that x^2 may also be read as x raised to the power 2.

In the same manner, we can write $x \times x \times x = x^3$

Commonly, x^3 is read as ‘ x cubed’. Later, you will realise that x^3 may also be read as x raised to the power 3.

x, x^2, x^3, \dots are all algebraic expressions obtained from x .

- (ii) The expression $2y^2$ is obtained from y : $2y^2 = 2 \times y \times y$

Here by multiplying y with y we obtain y^2 and then we multiply y^2 by the constant 2.

- (iii) In $(3x^2 - 5)$ we first obtain x^2 , and multiply it by 3 to get $3x^2$.

From $3x^2$, we subtract 5 to finally arrive at $3x^2 - 5$.

- (iv) In xy , we multiply the variable x with another variable y . Thus, $x \times y = xy$.

- (v) In $4xy + 7$, we first obtain xy , multiply it by 4 to get $4xy$ and add 7 to $4xy$ to get the expression.

TRY THESE



Describe how the following expressions are obtained:

$$7xy + 5, x^2y, 4x^2 - 5x$$

10.3 TERMS OF AN EXPRESSION

We shall now put in a systematic form what we have learnt above about how expressions are formed. For this purpose, we need to understand what **terms** of an expression and their **factors** are.

Consider the expression $(4x + 5)$. In forming this expression, we first formed $4x$ separately as a product of 4 and x and then added 5 to it. Similarly consider the expression $(3x^2 + 7y)$. Here we first formed $3x^2$ separately as a product of 3, x and x . We then formed $7y$ separately as a product of 7 and y . Having formed $3x^2$ and $7y$ separately, we added them to get the expression.

You will find that the expressions we deal with can always be seen this way. They have parts which are formed separately and then added. Such parts of an expression which are formed separately first and then added are known as **terms**. Look at the expression $(4x^2 - 3xy)$. We say that it has two terms, $4x^2$ and $-3xy$. The term $4x^2$ is a product of 4, x and x , and the term $(-3xy)$ is a product of (-3) , x and y .

Terms are added to form expressions. Just as the terms $4x$ and 5 are added to form the expression $(4x + 5)$, the terms $4x^2$ and $(-3xy)$ are added to give the expression $(4x^2 - 3xy)$. This is because $4x^2 + (-3xy) = 4x^2 - 3xy$.

Note, the minus sign $(-)$ is included in the term. In the expression $4x^2 - 3xy$, we took the term as $(-3xy)$ and not as $(3xy)$. That is why we do not need to say that terms are ‘added or subtracted’ to form an expression; just ‘added’ is enough.

Factors of a term

We saw above that the expression $(4x^2 - 3xy)$ consists of two terms $4x^2$ and $-3xy$. The term $4x^2$ is a product of 4, x and x ; we say that 4, x and x are the factors of the term $4x^2$. A term is a product of its factors. The term $-3xy$ is a product of the factors -3 , x and y .

తరువాత మనం ఘూతాలు మరియు ఘూతాంకాలు అనే అధ్యాయాన్ని అధ్యయనం చేసేటప్పుడు x^2 ను, x ను ఘూతమును 2కు పెంచినట్లుగా (x raised to the power 2) చదువుతాం.

జదే విధంగా $x \times x \times x = x^3$ అని మనం రాయవచ్చు.

సాధారణంగా, x^3 ని ‘ x క్రూచ్చీ’ అని చదువుతారు. తరువాత, x ని ఘూతము 3 కి పెంచినట్లుగా (x raised to the power 3) చదవవచ్చని గ్రహిస్తాం.

x, x^2, x^3, \dots అన్ని బీజగణిత సమాసాలు x నుండి పొందబడ్డాయి.

- (ii) $2y^2$ అనే సమాసం y నుంచి పొందబడింది: $2y^2 = 2 \times y \times y$ ఇక్కడ y ని y తో గుణించడం ద్వారా మనం y^2 ను పొందుతాము మరియు తరువాత మనం y^2 ను స్థిరరాశి 2 తో గుణిస్తాం.
- (iii) $(3x^2 - 5)$ లో మనం మొదటగా x^2 ను పొందాలి, 3 చే గుణించగా $3x^2$ వచ్చును. $3x^2$ నుండి 5 ను తీసివేయగా చివరకు $3x^2 - 5$ వస్తుంది.
- (iv) xy లో, మనం చరరాశి x ని మరో చరరాశి y తో గుణిస్తాం. అందువలన, $x \times y = xy$
- (v) $4xy + 7$ లో, మనం మొదట xy ని పొందుతాము. $4xy$ ని పొందడానికి దానిని 4తో గుణించాలి, సమాసము పొందడానికి 7 ను $4xy$ కు కూడాాలి.

ప్రయత్నించండి



కింది సమాసాలు ఎలా ఏర్పడ్డాయో వివరించండి.
 $7xy + 5, x^2y, 4x^2 - 5x$

10.3 సమాసాలలోని పదాలు

సమాసాలు ఎలా ఏర్పడతాయనే దాని గురించి మనం పైన నేర్చుకున్నాము. వాటిని ఇప్పుడు ఒక క్రమబద్ధమైన రూపంలో ఉంచుదాం. సమాసం యొక్క పదాలు, వాటి కారణాంకాలు ఏమిటో మనం అర్థం చేసుకోవాలి.

$(4x + 5)$ సమాసాన్ని గమనించండి. ఈ సమాసాన్ని రూపొందించడంలో, మనం మొదట $4x$ ను విడిగా 4, x ల లబ్బంగా రూపొందించి దానికి 5 కలిపాము అదేవిధంగా $(3x^2 + 7y)$ సమాసాన్ని పరిగణించండి. ఇక్కడ మనం మొదట $3x^2$ ను విడిగా 3, x మరియు y యొక్క లబ్బంగా రూపొందించాం. అప్పుడు మనం 7 మరియు y యొక్క లబ్బంగా $7y$ ని విడిగా రూపొందించాం. $3x^2, 7y$ లను విడిగా ఏర్పరచిన తరువాత, సమాసంను పొందడానికి మనం వాటిని కలిపాము.

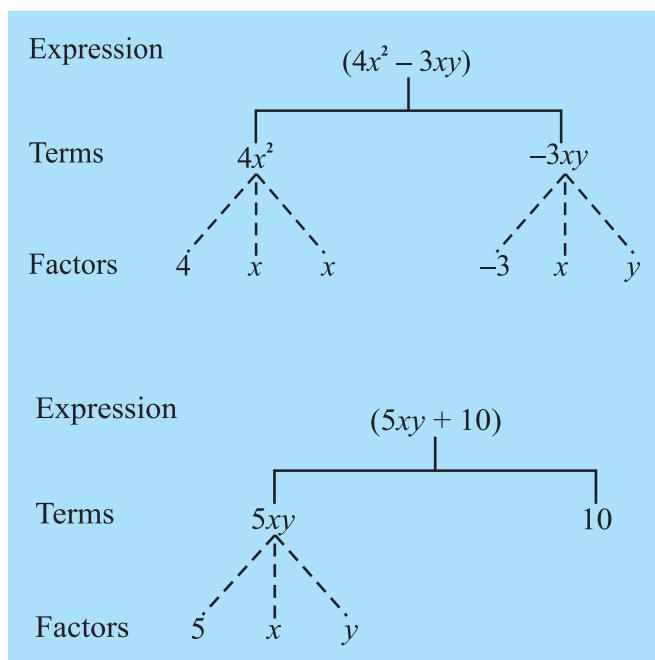
మనం వ్యవహరించే సమాసాలను ఈ విధంగా ఎల్లప్పుడూ చూడవచ్చని మీరు కనుగొంటారు. అవి విడిగా ఏర్పడిన భాగాలను కలిగి ఉంటాయి. తరువాత కలపబడతాయి. ఒక సమాసం యొక్క అటువంటి భాగాలు మొదట విడిగా ఏర్పడతాయి. తరువాత కలుపబడతాయి. వీటిని పదాలు అంటారు. అదేవిధంగా $(4x^2 - 3xy)$ సమాసాన్ని చూడండి. దీనికి $4x^2, -3xy$ అనే రెండు పదాలు ఉన్నాయని మనం చెపుతాం. $4x^2$ అనే పదం 4, x మరియు x , యొక్క లబ్బం, పదం $(-3xy)$ అనేది $(-3), x, y$ యొక్క లబ్బం.

సమాసాలను రూపొందించడానికి పదాలు కలుపబడతాయి. $(4x + 5)$ సమాసాన్ని రూపొందించడానికి $4x, 5$ అనే పదాలు కలుపుతాం. $(4x^2 - 3xy)$ సమాసాన్ని పొందడానికి $4x^2$ మరియు $(-3xy)$ అనే పదాలను కలుపుతాం. దీనికి కారణం $4x^2 + (-3xy) = 4x^2 - 3xy$.

గమనిక: తీసివేత గుర్తు $(-)$ పదంలో చేర్చబడింది. $4x^2 - 3xy$, సమాసంలో మనం పదాన్ని $(-3xy)$ గా తీసుకున్నాం. $(3xy)$ గా కాదు. అందుకే సమాసాన్ని రూపొందించడానికి పదాలు ‘కలపడం లేదా తీసివేయడం’ అని మనం చెప్పనపసరం లేదు. కేవలం ‘కలపడం’ సరిపోతుంది.

ఒక పదం యొక్క కారణాంకాలు

$(4x^2 - 3xy)$ సమాసం, $4x^2$ మరియు $-3xy$ అనే రెండు పదాలను కలిగి ఉంటుందని మనం పైన చూశాం. $4x^2$ అనే పదం 4, x మరియు x ల లబ్బము; 4, x లను $4x^2$ అనే పదానికి కారణాంకాలు అని చెప్పవచ్చు. పదం దాని కారణాంకాల లబ్బం. $-3xy$ అనే పదం $-3, x$ మరియు y అనే కారణాంకాల లబ్బం.



TRY THESE



- What are the terms in the following expressions? Show how the terms are formed. Draw a tree diagram for each expression:
 $8y + 3x^2, 7mn - 4, 2x^2y$.
- Write three expression each having 4 terms.

TRY THESE

Identify the coefficients of the terms of following expressions:

$$4x - 3y, a + b + 5, 2y + 5, 2xy$$

We can represent the terms and factors of the terms of an expression conveniently and elegantly by a tree diagram. The tree for the expression $(4x^2 - 3xy)$ is as shown in the adjacent figure.

Note, in the tree diagram, we have used dotted lines for factors and continuous lines for terms. This is to avoid mixing them.

Let us draw a tree diagram for the expression $5xy + 10$.

The factors are such that they cannot be further factorised. Thus we do not write $5xy$ as $5 \times xy$, because xy can be further factorised. Similarly, if x^3 were a term, it would be written as $x \times x \times x$ and not $x^2 \times x$. Also, remember that 1 is not taken as a separate factor.

Coefficients

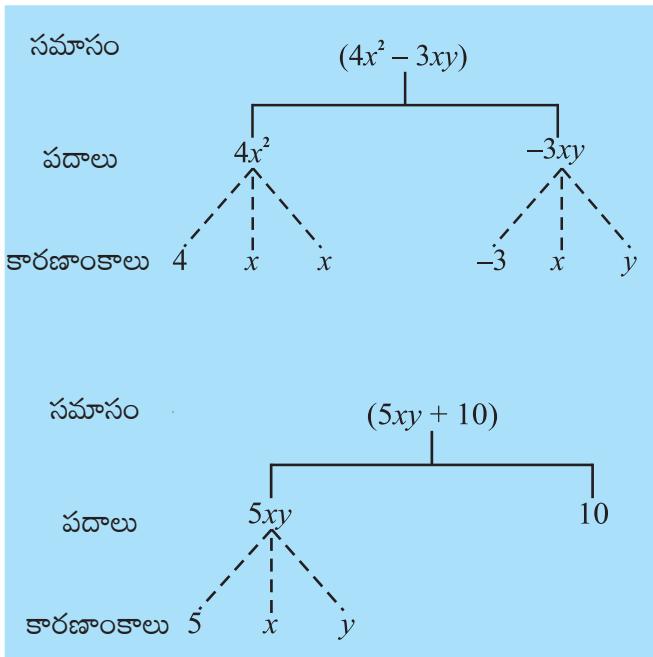
We have learnt how to write a term as a product of factors. One of these factors may be numerical and the others algebraic (i.e., they contain variables). The numerical factor is said to be the numerical coefficient or simply the **coefficient** of the term. It is also said to be the coefficient of the rest of the term (which is obviously the product of algebraic factors of the term). Thus in $5xy$, 5 is the coefficient of the term. It is also the coefficient of xy . In the term $10xyz$, 10 is the coefficient of xyz , in the term $-7x^2y^2$, -7 is the coefficient of x^2y^2 .

When the coefficient of a term is $+1$, it is usually omitted. For example, $1x$ is written as x ; $1x^2y^2$ is written as x^2y^2 and so on. Also, the coefficient (-1) is indicated only by the minus sign. Thus $(-1)x$ is written as $-x$; $(-1)x^2y^2$ is written as $-x^2y^2$ and so on.

Sometimes, the word ‘coefficient’ is used in a more general way. Thus we say that in the term $5xy$, 5 is the coefficient of xy , x is the coefficient of $5y$ and y is the coefficient of $5x$. In $10xy^2$, 10 is the coefficient of xy^2 , x is the coefficient of $10y^2$ and y^2 is the coefficient of $10x$. Thus, in this more general way, a coefficient may be either a numerical factor or an algebraic factor or a product of two or more factors. It is said to be the coefficient of the product of the remaining factors.

EXAMPLE 1 Identify, in the following expressions, terms which are not constants. Give their numerical coefficients:

$$xy + 4, 13 - y^2, 13 - y + 5y^2, 4p^2q - 3pq^2 + 5$$



ప్రయత్నించండి

- ఈ కింది వాటిలో పదాలు గురించి చెప్పండి. ఈ పదాలు ఎలా ఏర్పడ్డాయా వృక్ష చిత్రం ద్వారా తెలుపండి.
 $8y + 3x^2, 7mn - 4, 2x^2y.$
- నాలుగు పదాలు ఉండేట్లుగా మారు నమ్మించండి.



ప్రయత్నించండి

కింద ఇవ్వబడిన సమాసాలలో గుణకాలను గుర్తించండి.
 $4x - 3y, a + b + 5, 2y + 5, 2xy$

ఉదాహరణ 1

ఈ క్రింది సమాసాలలో స్థిరరాశులు కాని పదాలను గుర్తించండి. వాటి యొక్క సంభ్యా గుణకాలను ఇవ్వండి.

$$xy + 4, 13 - y^2, 13 - y + 5y^2, 4p^2q - 3pq^2 + 5$$

మనం ఒక సమాసం యొక్క పదాలను, పదాల యొక్క కారణాంకాలను అనుకూలంగా, అందంగా వృక్ష చిత్రం తో సూచించవచ్చు. $(4x^2 - 3xy)$ సమాసం కొరకు పక్షమున్న వృక్షచిత్రంలో మాపబడింది.

గమనిక: పటంలో బిందురూపంలో ఉన్న గీతలు కారణాంకాలను, పూర్తి రేఖ రూపంలో పున్న గీతలు పదాలను సూచిస్తాయి. ఇందువలన అవి కలిసిపోకుండా ఉంటాయి.

ఇప్పుడు $5xy + 10$ అనే సమాసానికి వృక్ష చిత్రాన్ని గీధ్యాం కారణాంకాలు మరింతగా కారణాంక విభజన చేయలేనివిగా ఉంటాయి. అందువల్ల మనం $5xy$ ని $5 \times xy$ గా రాయము, ఎందుకంటే xy ని మరింత కారణాంక విభజన చేయవచ్చు. ఇదేవిధంగా ఒకవేళ x^3 అనేది ఒక పదం అయితే, దానిని $x \times x \times x$ వలె రాయాలి మరియు $x^2 \times x$ గా కాదు. అలాగే, 1 ను ప్రత్యేక కారణాంకంగా తీసుకోకూడదని గుర్తుంచుకోండి.

గుణకాలు

కారణాంకాల లభ్యముగా ఒక పదాన్ని ఎలా రాయాలో మనం నేర్చుకున్నాం. ఈ కారణాంకాలలో ఒకది సంభ్యాపరంగా, మరికొన్ని బీజీయంగా ఉండవచ్చు. (అనగా, అవి చరరాశులను కలిగి ఉంటాయి) సంభ్యా కారణాంకాన్ని సంభ్యాగుణకం లేదా పదం యొక్క గుణకం అని అంటారు. ఇది మిగిలిన పదం యొక్క గుణకం అని కూడా చెప్పబడింది, (ఇది స్పష్టంగా పదం యొక్క బీజీయ కారణాంకాల లభ్యము). అందువల్ల $5xy$ లో, 5 అనేది పదం యొక్క గుణకం. ఇది xy యొక్క గుణకం కూడా. $10xyz$ అనే పదంలో, 10 అనేది xyz యొక్క గుణకం $-7x^2y^2$, పదంలో -7 అనేది x^2y^2 యొక్క గుణకం.

ఒక పదం యొక్క గుణకం $+1$ అయినప్పుడు, అది సాధారణంగా వదిలివేయబడుతుంది. ఉదాహరణకు, $1x$ ను x గా రాస్తారు; $1x^2y^2$ ను x^2y^2 గా రాస్తారు. అలాగే, గుణకం (-1) ను మైనన్ గుర్తు ద్వారా మాత్రమే సూచించబడుతుంది. ఈ విధంగా $(-1)x$ ను $-x$ గా రాస్తారు; $(-1)x^2y^2$ ను $-x^2y^2$ మొదలైనవిగా రాస్తారు.

కొన్నిసార్లు, ‘గుణకం’ అనే పదాన్ని సాధారణంగా ఉపయోగిస్తారు. ఈ విధంగా మనం $5xy$ అనే పదంలో, 5 అనేది xy యొక్క గుణకం, x అనేది $5y$ యొక్క గుణకం మరియు y అనేది $5x$ యొక్క గుణకం. $10xy^2$ లో, 10 అనేది xy^2 యొక్క గుణకం, x అనేది $10y^2$ యొక్క గుణకం మరియు y^2 అనేది $10x$ యొక్క గుణకం. అందువలన, ఈ మరింత సాధారణ పదాలిలో, ఒక గుణకం సంభ్యా కారకం లేదా కారణాంకం లేదా రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువక కారణాంకాల లభ్యం కావచ్చు. ఇది మిగిలిన కారణాంకాల లభ్యం యొక్క గుణకం అని చెప్పబడింది.

SOLUTION

S. No.	Expression	Term (which is not a Constant)	Numerical Coefficient
(i)	$xy + 4$	xy	1
(ii)	$13 - y^2$	$-y^2$	-1
(iii)	$13 - y + 5y^2$	$-y$ $5y^2$	-1 5
(iv)	$4p^2q - 3pq^2 + 5$	$4p^2q$ $-3pq^2$	4 -3

EXAMPLE 2

- (a) What are the coefficients of x in the following expressions?

$$4x - 3y, 8 - x + y, y^2x - y, 2z - 5xz$$

- (b) What are the coefficients of y in the following expressions?

$$4x - 3y, 8 + yz, yz^2 + 5, my + m$$

SOLUTION

- (a) In each expression we look for a term with x as a factor. The remaining part of that term is the coefficient of x .

S. No.	Expression	Term with Factor x	Coefficient of x
(i)	$4x - 3y$	$4x$	4
(ii)	$8 - x + y$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - y$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xz$	$-5xz$	$-5z$

- (b) The method is similar to that in (a) above.

S. No.	Expression	Term with factor y	Coefficient of y
(i)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
(ii)	$8 + yz$	yz	z
(iii)	$yz^2 + 5$	yz^2	z^2
(iv)	$my + m$	my	m

10.4 LIKE AND UNLIKE TERMS

When terms have the same algebraic factors, they are **like** terms. When terms have different algebraic factors, they are **unlike** terms. For example, in the expression $2xy - 3x + 5xy - 4$, look at the terms $2xy$ and $5xy$. The factors of $2xy$ are 2, x and y . The factors of $5xy$ are 5, x and y . Thus their algebraic (i.e., those which contain variables) factors are the same and

సాధన:

వ.సం.	సమాసము	పదం (స్థిర సంఖ్య కానిది)	సంఖ్య గుణకం
(i)	$xy + 4$	xy	1
(ii)	$13 - y^2$	$-y^2$	-1
(iii)	$13 - y + 5y^2$	$-y$ $5y^2$	-1 5
(iv)	$4p^2q - 3pq^2 + 5$	$4p^2q$ $-3pq^2$	4 -3

ఉదాహరణ 2

(a) కింది సమాసాలలో x యొక్క గుణకాలు ఏవి?

$$4x - 3y, 8 - x + y, y^2x - y, 2z - 5xz$$

(b) కింది సమాసాలలో y యొక్క గుణకాలు ఏవి?

$$4x - 3y, 8 + yz, yz^2 + 5, my + m$$

సాధన:

(a) ప్రతి సమాసంలోను మనం x ను ఒక కారణాంకంగా ఉన్న పదం కోసం చూశాం. ఆ పదం యొక్క మిగిలిన భాగం x యొక్క గుణకం.

వ.సం.	సమాసము	x కారణాంకంగా గల పదం	x యొక్క గుణకం
(i)	$4x - 3y$	$4x$	4
(ii)	$8 - x + y$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - y$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xz$	$-5xz$	$-5z$

(b) ఈ పద్ధతి (a) లో మాదిరిగానే ఉంటుంది.

వ.సం.	సమాసము	y కారణాంకంగా గల పదం	y యొక్క గుణకం
(i)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
(ii)	$8 + yz$	yz	z
(iii)	$yz^2 + 5$	yz^2	z^2
(iv)	$my + m$	my	m

10.4 సజ్ఞాతి మరియు విజ్ఞాతి పదాలు

పదాలు ఒకే బీజీయ కారణాంకాలను కలిగి ఉంటే అవి సజ్ఞాతి పదాలు. పదాలు వేర్చేరు బీజీయ కారణాంకాలను కలిగివుంటే అవి విజ్ఞాతి పదాలు. ఉదా: $2xy - 3x + 5xy - 4$ సమాసంలో $2xy, 5xy$. పదాలను చూడండి. $2xy$ యొక్క కారణాంకాలు $2, x$ మరియు y . $5xy$ యొక్క కారణాంకాలు $5, x$ మరియు y . అందువలన వాటి బీజీయ కారణాంకాలు (అంటే, చరరాశులను కలిగివున్నవి)

TRY THESE

Group the like terms together from the following:

$12x, 12, -25x, -25, -25y, 1, x, 12y, y$



hence they are **like** terms. On the other hand the terms $2xy$ and $-3x$, have different algebraic factors. They are **unlike** terms. Similarly, the terms, $2xy$ and 4 , are unlike terms. Also, the terms $-3x$ and 4 are unlike terms.

10.5 MONOMIALS, BINOMIALS, TRINOMIALS AND POLYNOMIALS

An expression with only one term is called a **monomial**; for example, $7xy, -5m, 3z^2, 4$ etc.

TRY THESE

Classify the following expressions as a monomial, a binomial or a trinomial: $a, a + b, ab + a + b, ab + a + b - 5, xy, xy + 5, 5x^2 - x + 2, 4pq - 3q + 5p, 7, 4m - 7n + 10, 4mn + 7$.



An expression which contains two unlike terms is called a **binomial**; for example, $x + y, m - 5, mn + 4m, a^2 - b^2$ are binomials. The expression $10pq$ is not a binomial; it is a monomial. The expression $(a + b + 5)$ is not a binomial. It contains three terms.

An expression which contains three terms is called a **trinomial**; for example, the expressions $x + y + 7, ab + a + b, 3x^2 - 5x + 2, m + n + 10$ are trinomials. The expression $ab + a + b + 5$ is, however not a trinomial; it contains four terms and not three. The expression $x + y + 5x$ is not a trinomial as the terms x and $5x$ are like terms.

In general, an expression with one or more terms is called a **polynomial**. Thus a monomial, a binomial and a trinomial are all polynomials.

EXAMPLE 3 State with reasons, which of the following pairs of terms are of like terms and which are of unlike terms:

- | | | | |
|--------------------|---------------------|--------------------|----------------|
| (i) $7x, 12y$ | (ii) $15x, -21x$ | (iii) $-4ab, 7ba$ | (iv) $3xy, 3x$ |
| (v) $6xy^2, 9x^2y$ | (vi) $pq^2, -4pq^2$ | (vii) $mn^2, 10mn$ | |

SOLUTION

S. No.	Pair	Factors	Algebraic factors same or different	Like/Unlike terms	Remarks
(i)	$7x$ $12y$	$7, x \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$ $12, y \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$	Different	Unlike	The variables in the terms are different.
(ii)	$15x$ $-21x$	$15, x \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$ $-21, x \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$	Same	Like	
(iii)	$-4ab$ $7ba$	$-4, a, b \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$ $7, a, b \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$	Same	Like	Remember $ab = ba$

ప్రయత్నించండి

కింది వాటి నుండి సజ్ఞాతి పదాలను కలిపి గ్రూప్ చేయండి.

$$12x, 12, -25x, -25, -25y, 1, x, 12y, y$$



ఒకే విధంగా ఉంటాయి. అందువలననే అవి సజ్ఞాతి పదాలు.
 $2xy, -3x$ అనే పదాలు వేర్యేరు బీజగణిత కారణాంకాలు
 కలిగివున్నాయి. అవి విజాతి పదాలు. ఇదేవిధంగా $2xy, 4$ విజాతి పదాలు. అలాగే $-3x, 4$ పదాలు విజాతి పదాలు.

10.5 ఏకపది, ద్విపది, త్రిపది మరియు బహుపదులు

ఒకే ఒక పదంతో కూడిన సమాసాన్ని ఏకపది అంటారు. ఉదా: $7xy, -5m, 3z^2, 4$ మొదలగునవి.

రెండు విజాతి పదాలను కలిగివున్న సమాసాన్ని ద్విపది అంటారు. ఉదాహరణకు $x + y, m - 5, mn$
 $+ 4m, a^2 - b^2$ లు ద్విపదులు. $10pq$ అనే పదబంధ ద్విపదం కాదు;
 ఇది ఏకపది. $(a + b + 5)$ అనే సమాసం ద్విపది కాదు. ఇందులో
 మూడు పదాలు ఉన్నాయి.

ప్రయత్నించండి

కింద ఇవ్వబడిన సమాసాలు
 ఏకపది, ద్విపది, త్రిపది గా
 వర్గీకరించండి: $a, a + b, ab$
 $+ a + b, ab + a + b - 5,$
 $xy, xy + 5, 5x^2 - x + 2, 4pq$
 $- 3q + 5p, 7, 4m - 7n +$
 $10, 4mn + 7.$



మూడు పదాలను కలిగి ఉన్న ఒక సమాసాన్ని త్రిపది అంటారు.
 ఉదాహరణకు $x + y + 7, ab + a + b, 3x^2 - 5x + 2, m + n + 10$
 అనే సమాసాలు త్రిపదులు. $ab + a + b + 5$ అనే సమాసం ఎలాగైనా
 త్రిపది కాదు; దీనిలో నాలుగు పదాలు ఉన్నాయి మరియు మూడు కాదు.
 $x + y + 5x$ అనే సమాసం త్రిపది కాదు, ఎందుకంటే x మరియు $5x$
 అనే పదాలు సజ్ఞాతి పదాలు.

సాధారణంగా, ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ పదాలతో కూడిన
 సమాసమును బహుపది అంటారు. అందువలన ఏకపది, ద్విపది మరియు త్రిపది అన్నీ బహుపదులే.

ఉదాహరణ 3 కింద ఇవ్వబడిన పదాల జతలలో ఏవి సజ్ఞాతి పదాలో, ఏవి విజాతి పదాలో
 కారణాలను పేర్కొస్తాండి.

- | | | | |
|--------------------|---------------------|--------------------|----------------|
| (i) $7x, 12y$ | (ii) $15x, -21x$ | (iii) $-4ab, 7ba$ | (iv) $3xy, 3x$ |
| (v) $6xy^2, 9x^2y$ | (vi) $pq^2, -4pq^2$ | (vii) $mn^2, 10mn$ | |

సాధన:

వ.సం.	జత	కారణాంకాలు	ఒకే విధమైన లేదా భిన్నమైన బీజీయ కారణాంకాలు	సజ్ఞాతి/ విజాతి పదాలు	వ్యాఖ్య
(i)	$7x$ $12y$	$7, x$ $12, y$	$\left. \begin{matrix} 7, x \\ 12, y \end{matrix} \right\}$	భిన్నమైనవి	పదాలలోని చరరాశులు వేరు వేరుగా (భిన్నంగా ఉన్నాయి)
(ii)	$15x$ $-21x$	$15, x$ $-21, x$	$\left. \begin{matrix} 15, x \\ -21, x \end{matrix} \right\}$	ఒకే విధమైనవి	సజ్ఞాతి
(iii)	$-4ab$ $7ba$	$-4, a, b$ $7, a, b$	$\left. \begin{matrix} -4, a, b \\ 7, a, b \end{matrix} \right\}$	ఒకే విధమైనవి	గుర్తుకు తెచ్చుకోండి $ab = ba$

(iv)	$3xy$ $3x$	$3, x, y$ $3, x$	Different	Unlike	The variable y is only in one term.
(v)	$6xy^2$ $9x^2y$	$6, x, y, y$ $9, x, x, y$	Different	Unlike	The variables in the two terms match, but their powers do not match.
(vi)	pq^2 $-4pq^2$	$1, p, q, q$ $-4, p, q, q$	Same	Like	Note, numerical factor 1 is not shown

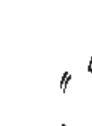
Following simple steps will help you to decide whether the given terms are like or unlike terms:

- (i) Ignore the numerical coefficients. Concentrate on the algebraic part of the terms.
 - (ii) Check the variables in the terms. They must be the same.
 - (iii) Next, check the powers of each variable in the terms. They must be the same.

Note that in deciding like terms, two things do not matter (1) the numerical coefficients of the terms and (2) the order in which the variables are multiplied in the terms.

EXERCISE 10.1

1. Get the algebraic expressions in the following cases using variables, constants and arithmetic operations.

 - (i) Subtraction of z from y .
 - (ii) One-half of the sum of numbers x and y .
 - (iii) The number z multiplied by itself.
 - (iv) One-fourth of the product of numbers p and q .
 - (v) Numbers x and y both squared and added.
 - (vi) Number 5 added to three times the product of numbers m and n .
 - (vii) Product of numbers y and z subtracted from 10.
 - (viii) Sum of numbers a and b subtracted from their product.



2. (i) Identify the terms and their factors in the following expressions

Show the terms and factors by tree diagrams.

(a) $x - 3$

$$(b) \quad 1 + x + x^2$$

(c) $v - v^3$

(d) $5xv^2 + 7x^2v$

$$(e) -ab + 2b^2 - 3a^2$$

- (ii) Identify terms and factors in the expressions given below:

$$(a) -4x + 5$$

$$(b) -4x + 5y$$

$$(c) \quad 5v + 3v^2$$

(d) $xv + 2x^2v^2$

(e) $pq + q$

$$(f) \quad 1.2 ab - 2.4 b + 3.6 a$$

(iv)	$3xy$ $3x$	$3, x, y$ $3, x$	భిన్నమైనవి	విజాతి	చరరాశి y ఒక పదంలో మాత్రమే ఉంది.
(v)	$6xy^2$ $9x^2y$	$6, x, y, y$ $9, x, x, y$	భిన్నమైనవి	విజాతి	రెండు పదాలలోని చరరాశులు సరిపోయాయి. కానీ వాటి ఘూతంకాలు జత కాలేదు.
(vi)	pq^2 $-4pq^2$	$1, p, q, q$ $-4, p, q, q$	ఒకే విధమైనవి	సజాతి	గమనిక, సంఖ్యాగుణకం 1 చూపబడలేదు

జచ్చిన పదాలు సజాతి లేదా విజాతి పదాలలో నీర్చయించడానికి కింది ఉన్న సరళమైన సోపానాలు మీకు సహాయపడతాయి.

- (i) సంఖ్యా గుణకాలను విస్మరించండి. పదం యొక్క బీజీయ భాగంపై దృష్టి పెట్టండి.
- (ii) పాదాలలోని చరరాశులను తనిటీ చేయండి. ఒకే రకమైన వాటిని గుర్తించండి.
- (iii) తరువాత, పదంలలోని ప్రతి చరరాశి యొక్క ఘూతాలను తనిటీ చేయ్యండి. అవి ఒకే విధంగా ఉండాలి.

గమనిక: సజాతి పదాలను నీర్చయించేటప్పుడు రెండు విషయాలు ముఖ్యమైనవని గమనించండి. (1) పదాల సంఖ్యా గుణకాలు మరియు (2) పదాలలో చరరాశులు గుణించబడిన క్రమం

అభ్యర్థం 10.1

- చరరాశి, స్థిరాంకాలు మరియు అంకగణిత ప్రక్రియలు ఉపయోగించి కింది సందర్భాలకు బీజగణిత సమాపొలను పొందండి.
 - y నుండి z ను తీసివేయడం.
 - x మరియు y సంఖ్యల మొత్తంలో సగం.
 - z అనే సంఖ్య తనకు తానే గుణించబడింది.
 - p మరియు q సంఖ్యల లబ్ధంలో నాలగింట ఒక వంతు.
 - x మరియు y అనే సంఖ్యలు రెండు వర్గం చేయబడి కలపబడినాయి.
 - m మరియు n సంఖ్యల లబ్ధానికి మూడు రెట్లకు సంఖ్య 5 కలుపబడింది.
 - y మరియు z సంఖ్యల యొక్క లబ్ధం 10 నుంచి తీసివేయబడింది.
 - a మరియు b సంఖ్యల మొత్తం వాటి లబ్ధం నుండి తీసివేయబడింది.
- (i) ఈ క్రింది సమాపొలలో పదాలు మరియు వాటి కారణాంకాలను గుర్తించండి. వృక్ష చిత్రాల ద్వారా పదాలు మరియు కారణాంకాలను చూపించండి.

(a) $x - 3$	(b) $1 + x + x^2$	(c) $y - y^3$
(d) $5xy^2 + 7x^2y$	(e) $-ab + 2b^2 - 3a^2$	
- (ii) కింద ఇవ్వబడిన సమాపొల పదాలు మరియు కారణాంకాలు గుర్తించండి.

(a) $-4x + 5$	(b) $-4x + 5y$	(c) $5y + 3y^2$
(d) $xy + 2x^2y^2$	(e) $pq + q$	(f) $1.2 ab - 2.4 b + 3.6 a$



(g) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ (h) $0.1 p^2 + 0.2 q^2$

3. Identify the numerical coefficients of terms (other than constants) in the following expressions:

(i) $5 - 3t^2$	(ii) $1 + t + t^2 + t^3$	(iii) $x + 2xy + 3y$
(iv) $100m + 1000n$	(v) $-p^2q^2 + 7pq$	(vi) $1.2 a + 0.8 b$
(vii) $3.14 r^2$	(viii) $2(l + b)$	(ix) $0.1 y + 0.01 y^2$

4. (a) Identify terms which contain x and give the coefficient of x .

(i) $y^2x + y$	(ii) $13y^2 - 8yx$	(iii) $x + y + 2$
(iv) $5 + z + zx$	(v) $1 + x + xy$	(vi) $12xy^2 + 25$
(vii) $7x + xy^2$		

- (b) Identify terms which contain y^2 and give the coefficient of y^2 .

(i) $8 - xy^2$	(ii) $5y^2 + 7x$	(iii) $2x^2y - 15xy^2 + 7y^2$
----------------	------------------	-------------------------------

5. Classify into monomials, binomials and trinomials.

(i) $4y - 7z$	(ii) y^2	(iii) $x + y - xy$	(iv) 100
(v) $ab - a - b$	(vi) $5 - 3t$	(vii) $4p^2q - 4pq^2$	(viii) $7mn$
(ix) $z^2 - 3z + 8$	(x) $a^2 + b^2$	(xi) $z^2 + z$	
(xii) $1 + x + x^2$			

6. State whether a given pair of terms is of like or unlike terms.

(i) $1, 100$	(ii) $-7x, \frac{5}{2}x$	(iii) $-29x, -29y$
(iv) $14xy, 42yx$	(v) $4m^2p, 4mp^2$	(vi) $12xz, 12x^2z^2$

7. Identify like terms in the following:

(a) $-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yx, 20x^2y, -6x^2, y, 2xy, 3x$

(b) $10pq, 7p, 8q, -p^2q^2, -7qp, -100q, -23, 12q^2p^2, -5p^2, 41, 2405p, 78qp, 13p^2q, qp^2, 701p^2$

10.6 FINDING THE VALUE OF AN EXPRESSION

We know that the value of an algebraic expression depends on the values of the variables forming the expression. There are a number of situations in which we need to find the value of an expression, such as when we wish to check whether a particular value of a variable satisfies a given equation or not.

We find values of expressions, also, when we use formulas from geometry and from everyday mathematics. For example, the area of a square is l^2 , where l is the length of a side of the square. If $l = 5$ cm., the area is 5^2 cm 2 or 25 cm 2 ; if the side is 10 cm, the area is 10^2 cm 2 or 100 cm 2 and so on. We shall see more such examples in the next section.

(g) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ (h) $0.1 p^2 + 0.2 q^2$

3. కింది సమాసాలలో పదాల యొక్క సంఖ్య గుణకాలను (స్థిరరాశులు కాకుండా) గుర్తించండి.

- (i) $5 - 3t^2$
- (ii) $1 + t + t^2 + t^3$
- (iii) $x + 2xy + 3y$
- (iv) $100m + 1000n$
- (v) $-p^2q^2 + 7pq$
- (vi) $1.2 a + 0.8 b$
- (vii) $3.14 r^2$
- (viii) $2(l+b)$
- (ix) $0.1 y + 0.01 y^2$

4. (a) x ను కలిగి ఉన్న పదాలను గుర్తించండి. మరియు x యొక్క గుణకాన్ని గుర్తించండి.

- (i) $y^2x + y$
- (ii) $13y^2 - 8yx$
- (iii) $x + y + 2$
- (iv) $5 + z + zx$
- (v) $1 + x + xy$
- (vi) $12xy^2 + 25$
- (vii) $7x + xy^2$

(b) y^2 ను కలిగి ఉన్న పదాలను గుర్తించండి. మరియు y^2 యొక్క గుణకాన్ని గుర్తించండి.

- (i) $8 - xy^2$
- (ii) $5y^2 + 7x$
- (iii) $2x^2y - 15xy^2 + 7y^2$

5. ఏకపదులు, ద్విపదులు మరియు త్రిపదులుగా వర్గీకరించండి.

- (i) $4y - 7z$
- (ii) y^2
- (iii) $x + y - xy$
- (iv) 100
- (v) $ab - a - b$
- (vi) $5 - 3t$
- (vii) $4p^2q - 4pq^2$
- (viii) $7mn$
- (ix) $z^2 - 3z + 8$
- (x) $a^2 + b^2$
- (xi) $z^2 + z$
- (xii) $1 + x + x^2$

6. ఇవ్వబడిన పదాల జత సజాతి పదాల లేక విజాతి పదాల పేర్కొనండి.

- (i) $1, 100$
- (ii) $-7x, \frac{5}{2}x$
- (iii) $-29x, -29y$
- (iv) $14xy, 42yx$
- (v) $4m^2p, 4mp^2$
- (vi) $12xz, 12x^2z^2$

7. ఈ క్రింది వాటిలో సజాతి పదాలు గుర్తించండి.

- (a) $-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yx, 20x^2y, -6x^2, y, 2xy, 3x$
- (b) $10pq, 7p, 8q, -p^2q^2, -7qp, -100q, -23, 12q^2p^2, -5p^2, 41, 2405p, 78qp, 13p^2q, qp^2, 701p^2$

10.6 బీజీయ సమాసాల విలువ కనుగొనుట

బీజీయ సమాసాలు యొక్క విలువ సమాసాలు రూపొందించే చరరూశి యొక్క విలువలపై ఆధారపడి ఉంటుందని మనకు తెలుసు. ఒక సమాసాలు యొక్క విలువను మనం కనుగొనాల్సిన అనేక సందర్భాలు ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు ఒక నిర్ధిష్ట విలువ యొక్క విలువను మనం తనిటీ చేయాలకున్నప్పుడు చరరూశి ఇవ్వబడ్డ సమీకరణాన్ని సంతృప్తి పరుస్తుంది. లేదా సంతృప్తి చెందదు.

జ్యామితి మరియు రోజువారీ గణితం నుండి సూత్రాలను ఉపయోగించినప్పుడు కూడా సమాసాల విలువలను మనం కనుగొంటాం. ఉదాహరణకు ఒక చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం l^2 , ఇక్కడ l అనేది చతురస్రం యొక్క ఒక భుజం పొడవు. ఒకవేళ $l = 5$ సెం.మీ. వైశాల్యం 5^2 సెం.మీ.² లేదా 25 సెం.మీ.²; ఒకవేళ భుజం 10 సెం.మీ. అయితే దాని వైశాల్యం 10^2 సెం.మీ.² లేదా 100 సెం.మీ.² మొదలైనవి, అటువంటి మరికొన్ని ఉదాహరణలు తరువాత విభాగంలో చూస్తాం.

EXAMPLE 4

Find the values of the following expressions for $x=2$.

- (i) $x + 4$
- (ii) $4x - 3$
- (iii) $19 - 5x^2$
- (iv) $100 - 10x^3$

SOLUTION

Putting $x=2$

- (i) In $x + 4$, we get the value of $x + 4$, i.e.,
 $x + 4 = 2 + 4 = 6$
- (ii) In $4x - 3$, we get
 $4x - 3 = (4 \times 2) - 3 = 8 - 3 = 5$
- (iii) In $19 - 5x^2$, we get
 $19 - 5x^2 = 19 - (5 \times 2^2) = 19 - (5 \times 4) = 19 - 20 = -1$
- (iv) In $100 - 10x^3$, we get
 $100 - 10x^3 = 100 - (10 \times 2^3) = 100 - (10 \times 8)$ (Note $2^3 = 8$)
 $= 100 - 80 = 20$

**EXAMPLE 5**

Find the value of the following expressions when $n = -2$.

- (i) $5n - 2$
- (ii) $5n^2 + 5n - 2$
- (iii) $n^3 + 5n^2 + 5n - 2$

SOLUTION

- (i) Putting the value of $n = -2$, in $5n - 2$, we get,
 $5(-2) - 2 = -10 - 2 = -12$
- (ii) In $5n^2 + 5n - 2$, we have,
 for $n = -2$, $5n - 2 = -12$
 and $5n^2 = 5 \times (-2)^2 = 5 \times 4 = 20$ [as $(-2)^2 = 4$]
 Combining,
 $5n^2 + 5n - 2 = 20 - 12 = 8$
- (iii) Now, for $n = -2$,
 $5n^2 + 5n - 2 = 8$ and
 $n^3 = (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$
 Combining,
 $n^3 + 5n^2 + 5n - 2 = -8 + 8 = 0$

We shall now consider expressions of two variables, for example, $x + y$, xy . To work out the numerical value of an expression of two variables, we need to give the values of both variables. For example, the value of $(x + y)$, for $x = 3$ and $y = 5$, is $3 + 5 = 8$.

ఉదాహరణ 4 $x = 2$ కొరకు దిగువ సమాసాల విలువలను కనుగొనండి.

- (i) $x + 4$ (ii) $4x - 3$ (iii) $19 - 5x^2$
 (iv) $100 - 10x^3$

సాధన: $x = 2$ అయిన

- (i) $x + 4$ లో, $x + 4$ యొక్క విలువను మనం పొందుతాం. అనగా
 $x + 4 = 2 + 4 = 6$

(ii) $4x - 3$ లో,
 $4x - 3 = (4 \times 2) - 3 = 8 - 3 = 5$

(iii) $19 - 5x^2$ లో,
 $19 - 5x^2 = 19 - (5 \times 2^2) = 19 - (5 \times 4) = 19 - 20 = -1$

(iv) $100 - 10x^3$ లో,
 $100 - 10x^3 = 100 - (10 \times 2^3) = 100 - (10 \times 8)$ (గమనిక
 $= 100 - 80 = 20$



ఉదాహరణ 5 $n = -2$ అయినప్పుడు కింది సమాసాలు విలువను కనుగొనండి.

- (i) $5n - 2$ (ii) $5n^2 + 5n - 2$ (iii) $n^3 + 5n^2 + 5n - 2$

సాధన:

- (i) $n = -2$, అప్పించగా $5n - 2$
 $5(-2) - 2 = -10 - 2 = -12$

(ii) $5n^2 + 5n - 2$ లో,
 $n = -2$ అయితే, $5n - 2 = -12$
 మరియు $5n^2 = 5 \times (-2)^2 = 5 \times 4 = 20$ [$(-2)^2 = 4$ కనుక]
 కలుపగా
 $5n^2 + 5n - 2 = 20 - 12 = 8$

(iii) ఇప్పుడు $n = -2$,
 $5n^2 + 5n - 2 = 8$ మరియు
 $n^3 = (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

మనం ఇప్పుడు రెండు చరరాశుల సమాసాలను పరిశీలిద్దాం. ఉదాహరణకు $x + y$, xy . రెండు చరరాశి యొక్క సమాసాలు యొక్క సంఖ్య విలువను తెలుసుకోవడానికి, మనం రెండు చరరాశుల యొక్క విలువలను ఇవ్వాలి. ఉదాహరణకు $x = 3$ మరియు $y = 5$ కొరకు $(x + y)$ యొక్క విలువ అయితే $3 + 5 = 8$.

EXAMPLE 6 Find the value of the following expressions for $a=3, b=2$.

- (i) $a+b$ (ii) $7a-4b$ (iii) $a^2+2ab+b^2$
 (iv) a^3-b^3

SOLUTION Substituting $a=3$ and $b=2$ in

- (i) $a+b$, we get
 $a+b = 3+2 = 5$
- (ii) $7a-4b$, we get
 $7a-4b = 7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13.$
- (iii) $a^2+2ab+b^2$, we get
 $a^2+2ab+b^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2 = 9 + 2 \times 6 + 4 = 9 + 12 + 4 = 25$
- (iv) a^3-b^3 , we get
 $a^3-b^3 = 3^3 - 2^3 = 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 = 9 \times 3 - 4 \times 2 = 27 - 8 = 19$

EXERCISE 10.2



- If $m=2$, find the value of:
 (i) $m-2$ (ii) $3m-5$ (iii) $9-5m$
 (iv) $3m^2-2m-7$ (v) $\frac{5m}{2} \square 4$
- If $p=-2$, find the value of:
 (i) $4p+7$ (ii) $-3p^2+4p+7$ (iii) $-2p^3-3p^2+4p+7$
- Find the value of the following expressions, when $x=-1$:
 (i) $2x-7$ (ii) $-x+2$ (iii) x^2+2x+1
 (iv) $2x^2-x-2$
- If $a=2, b=-2$, find the value of:
 (i) a^2+b^2 (ii) a^2+ab+b^2 (iii) a^2-b^2
- When $a=0, b=-1$, find the value of the given expressions:
 (i) $2a+2b$ (ii) $2a^2+b^2+1$ (iii) $2a^2b+2ab^2+ab$
 (iv) a^2+ab+2
- Simplify the expressions and find the value if x is equal to 2
 (i) $x+7+4(x-5)$ (ii) $3(x+2)+5x-7$
 (iii) $6x+5(x-2)$ (iv) $4(2x-1)+3x+11$
- Simplify these expressions and find their values if $x=3, a=-1, b=-2$.
 (i) $3x-5-x+9$ (ii) $2-8x+4x+4$

ఉదాహరణ 6 $a = 3, b = 2$ అయితే కింది సమాసాల విలువలు కనుగొనండి.

(i) $a + b$ (ii) $7a - 4b$ (iii) $a^2 + 2ab + b^2$

(iv) $a^3 - b^3$

సాధన: $a = 3$ మరియు $b = 2$ లను ప్రతిక్షేపించగా

(i) $a + b,$

$$a + b = 3 + 2 = 5 \text{ ను పొందుతాం}$$

(ii) $7a - 4b,$

$$7a - 4b = 7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13 \text{ ను పొందుతాం.}$$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2,$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2 = 9 + 2 \times 6 + 4 = 9 + 12 + 4 = 25 \text{ ను పొందుతాం.}$$

(iv) $a^3 - b^3,$

$$a^3 - b^3 = 3^3 - 2^3 = 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 = 9 \times 3 - 4 \times 2 = 27 - 8 = 19 \text{ ను పొందుతాం.}$$

అభ్యాసం 10.2



1. $m = 2$, అయితే

(i) $m - 2$ (ii) $3m - 5$ (iii) $9 - 5m$

(iv) $3m^2 - 2m - 7$ (v) $\frac{5m}{2} \square 4$ ల విలువలను కనుగొనండి.

2. $p = -2$ అయితే,

(i) $4p + 7$ (ii) $-3p^2 + 4p + 7$ (iii) $-2p^3 - 3p^2 + 4p + 7$

ల విలువలను కనుగొనండి.

3. $x = -1$ అయితే కింది సమాసాల విలువలను కనుగొనండి.

(i) $2x - 7$ (ii) $-x + 2$ (iii) $x^2 + 2x + 1$

(iv) $2x^2 - x - 2$

4. $a = 2, b = -2$ అయితే,

(i) $a^2 + b^2$ (ii) $a^2 + ab + b^2$ (iii) $a^2 - b^2$ ల విలువలను కనుగొనండి.

5. $a = 0, b = -1$ అయితే, కింది సమాసాల విలువలను కనుగొనండి.

(i) $2a + 2b$ (ii) $2a^2 + b^2 + 1$ (iii) $2a^2b + 2ab^2 + ab$ (iv) $a^2 + ab + 2$

6. కింది సమాసాలను సూక్ష్మకరించండి. $x = 2$ అయితే, దాని విలువ కనుగొనండి.

(i) $x + 7 + 4(x - 5)$ (ii) $3(x + 2) + 5x - 7$

(iii) $6x + 5(x - 2)$ (iv) $4(2x - 1) + 3x + 11$

7. కింది సమాసాలను సూక్ష్మకరించండి $x = 3, a = -1, b = -2$ అయినప్పుడు వాటి విలువలు కనుగొనండి.

(i) $3x - 5 - x + 9$ (ii) $2 - 8x + 4x + 4$

- (iii) $3a + 5 - 8a + 1$ (iv) $10 - 3b - 4 - 5b$
 (v) $2a - 2b - 4 - 5 + a$
8. (i) If $z = 10$, find the value of $z^3 - 3(z - 10)$.
 (ii) If $p = -10$, find the value of $p^2 - 2p - 100$
9. What should be the value of a if the value of $2x^2 + x - a$ equals to 5, when $x = 0$?
10. Simplify the expression and find its value when $a = 5$ and $b = -3$.

$$2(a^2 + ab) + 3 - ab$$

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

- Algebraic expressions are formed from **variables** and **constants**. We use the operations of **addition**, **subtraction**, **multiplication** and **division** on the variables and constants to form expressions. For example, the expression $4xy + 7$ is formed from the variables x and y and constants 4 and 7. The constant 4 and the variables x and y are multiplied to give the product $4xy$ and the constant 7 is added to this product to give the expression.
- Expressions are made up of **terms**. Terms are **added** to make an expression. For example, the addition of the terms $4xy$ and 7 gives the expression $4xy + 7$.
- A term is a **product of factors**. The term $4xy$ in the expression $4xy + 7$ is a product of factors x , y and 4. Factors containing variables are said to be **algebraic factors**.
- The **coefficient** is the numerical factor in the term. Sometimes anyone factor in a term is called the coefficient of the remaining part of the term.
- Any expression with one or more terms is called a **polynomial**. Specifically a one term expression is called a **monomial**; a two-term expression is called a **binomial**; and a three-term expression is called a **trinomial**.
- Terms which have the same algebraic factors are **like terms**. Terms which have different algebraic factors are **unlike terms**. Thus, terms $4xy$ and $-3xy$ are like terms; but terms $4xy$ and $-3x$ are not like terms.
- In situations such as solving an equation and using a formula, we have to **find the value of an expression**. The value of the expression depends on the value of the variable from which the expression is formed. Thus, the value of $7x - 3$ for $x = 5$ is 32, since $7(5) - 3 = 35 - 3 = 32$.



- (iii) $3a + 5 - 8a + 1$ (iv) $10 - 3b - 4 - 5b$
(v) $2a - 2b - 4 - 5 + a$
8. (i) $z = 10$ అయితే, $z^3 - 3(z - 10)$ విలువను కనుగొనండి.
(ii) $p = -10$ అయితే, $p^2 - 2p - 100$ విలువను కనుగొనండి.
9. $x = 0$ అయినప్పుడు $2x^2 + x - a$ విలువ 5 అయితే a విలువ ఎంత?
10. కింది సమాసాన్ని సూక్ష్మికరించండి $a = 5$ మరియు $b = -3$ అయినప్పుడు దాని విలువ కనుగొనండి.

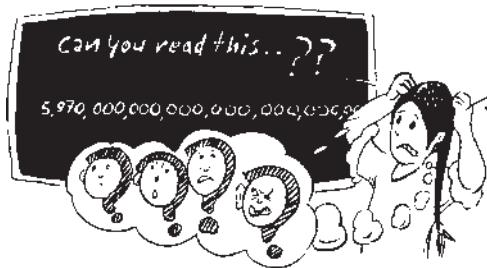
$$2(a^2 + ab) + 3 - ab$$

మనం ఏమి చర్చించాం?

- బీజీయ సమాసాలు చరరాశులు మరియు స్థిరరాశులు నుండి ఏర్పడతాయి. మనం వ్యక్తికరణలను రూపొందించడానికి చరరాశులు మరియు స్థిరరాశులపై కూడిక, తీసివేత, గుణకారం మరియు భాగహారం యొక్క కార్యకలాపాలను ఉపయోగిస్తాం. ఉదాహరణకు, $4xy + 7$ అనే వ్యక్తికరణ చరరాశులు x మరియు y మరియు స్థిరరాశులు 4 మరియు 7 నుండి ఏర్పడింది. స్థిరరాశి 4 మరియు చరరాశులు x మరియు y మరియు $4xy$ గుణించబడి ఫలితానికి $4xy$ వస్తుంది. మరియు స్థిరరాశి 7 ఈ ఫలితానికి కలపబడుతుంది.
- సమాసాలు అనేది పదాలతో ఏర్పడుతుంది. సమాసాలు పొందడానికి పదాలను కలుపుతాం. ఉదాహరణకు, $4xy$ మరియు 7 పదాలను కలపగా $4xy + 7$ అనే సమాసం వస్తుంది.
- పదం అనేది కారణాంకాల లభ్యం. $4xy + 7$ అనే సమాసంలోని $4xy$ అనే పదం x, y మరియు 4 కారణాంకాల యొక్క లభ్యం. చరరాశులు కలిగి ఉన్న కారణాంకాలు బీజీయ కారణాంకాలుగా చెప్పబడతాయి.
- గుణకం అనేది పదంలోని సంఖ్యా కారణాంకం. కొన్నిసార్లు ఒక పదంలో ఏదైనా కారణాంకాన్ని పదం యొక్క మిగిలిన భాగం యొక్క గుణకం అంటారు.
- ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ కారణాంకాలు కలిగిన ఏదైనా సమాసాన్ని జమలపది అంటారు. ప్రత్యేకంగా ఒక పదం కలిగిన దానిని ఏకపది అంటారు. రెండు పదాలు కలిగిన సమాసాన్ని ద్విపది అంటారు. మరియు మూడు పదాలను కలిగిన సమాసాన్ని త్రిపది అంటారు.
- ఒకే బీజీయ కారణాంకాలు కలిగిన పదాలను సజాతి పదాలు అంటారు. వేరు బీజీయ కారణాంకాలు కలిగిన పదాలను విజాతి పదాలు అంటారు. ఈ విధంగా, $4xy$ మరియు $-3xy$ అనే పదాలు సజాతి పదాలు కాని $4xy$ మరియు $-3x$ అనే పదాలు సజాతి పదాలు కాదు.
- సమీకరణాన్ని సాధించడంలో మరియు సూత్రాన్ని ఉపయోగించడం వంటి సందర్భాల్లో, మనం సమాసం యొక్క విలువను కనుగొనవలసి ఉంటుంది. సమాసం యొక్క విలువ సమాసం ఏర్పడిన చరరాశి విలువపై ఆధారపడి ఉంటుంది. అందువలన, $x=5$ కనుక $7x-3$ విలువ, $(5)-3=35-3 = 32$.



Exponents and Powers



11.1 INTRODUCTION

Do you know what the mass of earth is? It is 5,970,000,000,000,000,000,000 kg!

Can you read this number?

Mass of Uranus is 86,800,000,000,000,000,000,000 kg.
Which has greater mass, Earth or Uranus?

Distance between Sun and Saturn is 1,433,500,000,000 m and distance between Saturn and Uranus is 1,439,000,000,000 m. Can you read these numbers? Which distance is less?

These very large numbers are difficult to read, understand and compare. To make these numbers easy to read, understand and compare, we use exponents. In this Chapter, we shall learn about exponents and also learn how to use them.

11.2 EXPONENTS

We can write large numbers in a shorter form using exponents.

$$\text{Observe } 10,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$$

The short notation 10^4 stands for the product $10 \times 10 \times 10 \times 10$. Here '10' is called the **base** and '4' the **exponent**. The number 10^4 is read as **10 raised to the power of 4** or simply as **fourth power of 10**. 10^4 is called the **exponential form** of 10,000.

We can similarly express 1,000 as a power of 10. Note that

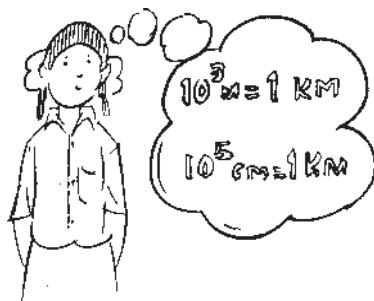
$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$$

Here again, 10^3 is the exponential form of 1,000.

$$\text{Similarly, } 1,00,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$$

10^5 is the exponential form of 1,00,000

In both these examples, the base is 10; in case of 10^3 , the exponent is 3 and in case of 10^5 the exponent is 5.



ఘూతాలు మరియు

ఘూతాంకాలు



11.1 పరిచయం

భూమి ప్రవృత్తాలి ఎంతో మీకు తెలుసా? ? ఇది $5,970,000,000,000,000,000,000,000,000$ కి. ట్రా! ఈ సంఖ్యను మీరు చదవగలరా? యునెస్‌గ్రహం ప్రవృత్తాలి $86,800,000,000,000,000,000,000,000$ కి. ట్రా. దేని ప్రవృత్తాలి ఎక్కువ, భూమి లేక యునెస్?

సూర్యుడు మరియు శనిల మధ్య దూరం $1,433,500,000,000$ మీ. మరియు శని, యునెసల మధ్య దూరం $1,439,000,000,000$ మీ. మీరు ఈ సంఖ్యలను చదవగలరా? ఏది తక్కువ దూరం?

ఈ పెద్ద సంఖ్యలను చదవడం, అర్థం చేసుకోవడం మరియు పోల్చుడం చాలా కష్టం. ఈ పెద్ద సంఖ్యలను తేలికగా చదవడం, అర్థం చేసుకోవడం మరియు పోల్చుడానికి మనం ఘూతాంకాలు ఉపయోగిస్తాం. ఈ అధ్యాయంలో, ఘూతాంకాలు, వాటిని ఉపయోగించటం గురించి నేర్చుకుందాం.

11.2 ఘూతాంకాలు

ఘూతాంకాలు ఉపయోగించి పెద్ద సంఖ్యలను సంక్లిష్ట రూపంలో రాయవచ్చు.

$$10,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 \text{ ని గమనించండి.}$$

గుణకారం $10 \times 10 \times 10 \times 10$ ని సంజ్ఞారూపంలో 10^4 గా రాస్తారు. ఇక్కడ ‘10’ ని భూమి అని, ‘4’ ని ఘూతంకం అని పిలుస్తారు. సంఖ్య 10^4 ను **10 యొక్క 4వ ఘూతం లేదా సూక్తంగా 10 యొక్క 4 వ ఘూతం అని చదువుతాం** 10^4 సంఖ్యని 10,000 యొక్క ఘూతరూపం అని అంటాం.

అదేవిధంగా 1000 ని 10 యొక్క ఘూతరూపంలో రాయవచ్చు.

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3 \text{ అని గమనించండి.}$$

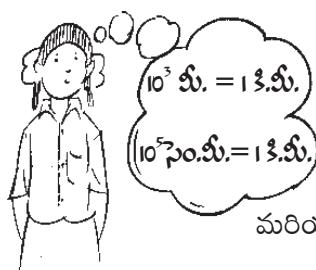
ఇక్కడ 10^3 అనేది 1,000 యొక్క ఘూతరూపం.

$$\text{అదేవిధంగా } 1,00,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$$

10^5 అనేది 1,00,000 యొక్క ఘూతరూపం

ఈ రెండు ఉదాహరణల్లో 10^3 లో ఘూతాంకం 3 భూమి 10;

ఈ 10^5 లో ఘూతాంకం 5.



మరియు 10^5 లో ఘూతాంకం 5.

We have used numbers like 10, 100, 1000 etc., while writing numbers in an expanded form. For example, $47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$

This can be written as $4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1$.

Try writing these numbers in the same way 172, 5642, 6374.

In all the above given examples, we have seen numbers whose base is 10. However the base can be any other number also. For example:

$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ can be written as $81 = 3^4$, here 3 is the base and 4 is the exponent.

Some powers have special names. For example,

10^2 , which is 10 raised to the power 2, also read as ‘10 squared’ and

10^3 , which is 10 raised to the power 3, also read as ‘10 cubed’.

Can you tell what 5^3 (5 cubed) means?

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

So, we can say 125 is the third power of 5.

What is the exponent and the base in 5^3 ?

Similarly, $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$, which is the fifth power of 2.

In 2^5 , 2 is the base and 5 is the exponent.

In the same way,

$$243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

$$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$



TRY THESE

Find five more such examples, where a number is expressed in exponential form. Also identify the base and the exponent in each case.



You can also extend this way of writing when the base is a negative integer.

What does $(-2)^3$ mean?

It is $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

Is $(-2)^4 = 16$? Check it.

Instead of taking a fixed number let us take any integer a as the base, and write the numbers as,

$a \times a = a^2$ (read as ‘ a squared’ or ‘ a raised to the power 2’)

$a \times a \times a = a^3$ (read as ‘ a cubed’ or ‘ a raised to the power 3’)

$a \times a \times a \times a = a^4$ (read as a raised to the power 4 or the 4th power of a)

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$ (read as a raised to the power 7 or the 7th power of a)
and so on.

$a \times a \times a \times b \times b$ can be expressed as a^3b^2 (read as a cubed b squared)

సంఖ్యలనువిస్తరణరూపంలో రాయడానికి $10, 100, 1000$ మొదలైన సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తాం.

$$\text{ఉండాహరణకు } 47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

$$\text{దీనిని } 4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1 \text{ గా రాయవచ్చు.}$$

$172, 5642, 6374$. ఈ సంఖ్యలను ఈ విధంగా రాయడానికి ప్రయత్నించండి.

పైన తెలిపిన అన్ని ఉండాహరణలలో భూమి 10 గా సంఖ్యలను గమనించాం. కొన్ని సందర్భాలలో భూమి వేర్పేరు సంఖ్యలుగా వుండవచ్చు. ఉండాహరణకు

$$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \text{ ని } 81 = 3^4 \text{గా రాయవచ్చు, భూమి } 3 \text{ మరియు } 4 \text{ ఫూతం.}$$

కొన్ని ఫూతాంకాలకు ప్రత్యేకమైన పేర్లు ఉన్నాయి. ఉండాహరణకు

$$10^2 \text{ ని } 10 \text{ యొక్క } 2\text{వ ఫూతానికి పెంచబడింది అని దీనిని } 10 \text{ స్క్వార్ }$$

అని చదువుతారు మరియు 10^3 ని 10 యొక్క 3 వ ఫూతానికి పెంచబడింది.

అని, దీనిని 10 క్యాబ్ట్ అని చదువుతారు.

5^3 (5 క్యాబ్ట్) అర్థం ఏమిటో మీరు చెప్పగలరా ?

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

కనుక, 5 యొక్క 3 వ ఫూతం 125 అని చెప్పవచ్చు?

5^3 లో ఫూతాంకం మరియు భూమి ఏవి ?

ఇదేవిధంగా $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$, ఇది 2 యొక్క 5 వ ఫూతం

2^5 లో భూమి 2 , ఫూతం 5 .

ఇదేవిధంగా, $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

$$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$



ప్రయత్నించండి

ఫూతాంక రూపంలో వ్యక్తపరచగల మరొక 5 ఉండాహరణలు రాయండి. ప్రతి సంఖ్యకు భూమిని మరియు ఫూతాంకాన్ని గుర్తించండి.

భూమి బుఱ పూర్ణ సంఖ్య అయినప్పటికి ఇదే పద్ధతిని పాటించవచ్చు. $(-2)^3$ అర్థం ఏమిటి?

$$\text{అనగా } (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

$(-2)^4 = 16$ అవుతుందా? పరీక్షించండి?



ఒక స్థిర సంఖ్యకు బదులుగా ఏదైనా ఒక పూర్ణ సంఖ్య a ను భూమిగా తీసుకొని ఆ సంఖ్యలను ఈ విధంగా రాయండి.

$$a \times a = a^2 \text{ ('} a \text{ వర్గం') అని లేదా '} a \text{ ని } 2\text{వ ఫూతానికి పెంచబడింది' అని చదువుతారు)$$

$$a \times a \times a = a^3 \text{ ('} a \text{ ఘనం') అని లేదా '} a \text{ ని } 3\text{వ ఫూతానికి పెంచబడింది' అని చదువుతారు)$$

$$a \times a \times a \times a = a^4 \text{ ('} a \text{ యొక్క } 4\text{వ వర్గం') అని లేదా '} a \text{ ని } 4\text{వ ఫూతానికి పెంచబడింది' అని చదువుతారు)$$

.....

$a \times a \times a \times a \times a = a^7$ (' a యొక్క $7\text{వ వర్గం$ ' అని లేదా ' a ని $7\text{వ ఫూతానికి పెంచబడింది'$ అని చదువుతారు)

మరియు మొదలైనవి.

$a \times a \times a \times b \times b$ ని $a^3 b^2$ తో సూచిస్తారు. (దీనిని a క్యాబ్ట్ b స్క్వార్ అని చదువుతారు)

TRY THESE

Express:

- 729 as a power of 3
- 128 as a power of 2
- 343 as a power of 7



$a \times a \times b \times b \times b \times b$ can be expressed as a^2b^4 (read as a squared into b raised to the power of 4).

EXAMPLE 1 Express 256 as a power 2.

SOLUTION We have $256 = 2 \times 2$.
So we can say that $256 = 2^8$

EXAMPLE 2 Which one is greater 2^3 or 3^2 ?

SOLUTION We have, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ and $3^2 = 3 \times 3 = 9$.

Since $9 > 8$, so, 3^2 is greater than 2^3

EXAMPLE 3 Which one is greater 8^2 or 2^8 ?

SOLUTION $8^2 = 8 \times 8 = 64$

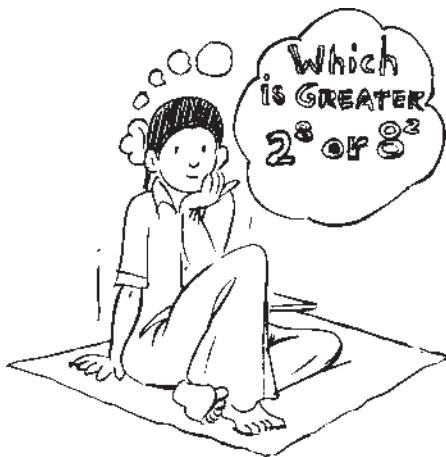
$2^8 = 2 \times 2 = 256$

Clearly, $2^8 > 8^2$

EXAMPLE 4 Expand a^3b^2 , a^2b^3 , b^2a^3 , b^3a^2 . Are they all same?

SOLUTION

$$\begin{aligned} a^3b^2 &= a^3 \times b^2 \\ &= (a \times a \times a) \times (b \times b) \\ &= a \times a \times a \times b \times b \\ a^2b^3 &= a^2 \times b^3 \\ &= a \times a \times b \times b \times b \\ b^2a^3 &= b^2 \times a^3 \\ &= b \times b \times a \times a \times a \\ b^3a^2 &= b^3 \times a^2 \\ &= b \times b \times b \times a \times a \end{aligned}$$



Note that in the case of terms a^3b^2 and a^2b^3 the powers of a and b are different. Thus a^3b^2 and a^2b^3 are different.

On the other hand, a^3b^2 and b^2a^3 are the same, since the powers of a and b in these two terms are the same. The order of factors does not matter.

Thus, $a^3b^2 = a^3 \times b^2 = b^2 \times a^3 = b^2a^3$. Similarly, a^2b^3 and b^3a^2 are the same.

EXAMPLE 5 Express the following numbers as a product of powers of prime factors:

(i) 72

(ii) 432

(iii) 1000

(iv) 16000

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

SOLUTION

$$\begin{aligned} (i) \quad 72 &= 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 9 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2 \end{aligned}$$

Thus, $72 = 2^3 \times 3^2$ (required prime factor product form)

100 EXPONENTS AND POWERS

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad 432 &= 2 \times 216 = 2 \times 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 2 \times 54 \\
 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9 \\
 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \\
 \text{or} \quad 432 &= 2^4 \times 3^3 \quad (\text{required form})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad 1000 &= 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125 \\
 &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \\
 \text{or} \quad 1000 &= 2^3 \times 5^3
 \end{aligned}$$

Atul wants to solve this example in another way:

$$\begin{aligned}
 1000 &= 10 \times 100 = 10 \times 10 \times 10 \\
 &= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \quad (\text{Since } 10 = 2 \times 5) \\
 &= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5
 \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad 1000 = 2^3 \times 5^3$$

Is Atul's method correct?

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad 16,000 &= 16 \times 1000 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1000 = 2^4 \times 10^3 \quad (\text{as } 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2) \\
 &= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5) = 2^4 \times 2^3 \times 5^3 \\
 &\quad (\text{Since } 1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5) \\
 &= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5) \\
 \text{or,} \quad 16,000 &= 2^7 \times 5^3
 \end{aligned}$$

EXAMPLE 6 Work out $(1)^5$, $(-1)^3$, $(-1)^4$, $(-10)^3$, $(-5)^4$.

SOLUTION

$$\text{(i)} \quad \text{We have } (1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

In fact, you will realise that 1 raised to any power is 1.

$$\text{(ii)} \quad (-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$$

$$\text{(iii)} \quad (-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$$

$(-1)^{\text{odd number}}$	$= -1$
$(-1)^{\text{even number}}$	$= +1$

You may check that (-1) raised to any **odd** power is (-1) , and (-1) raised to any **even** power is $(+1)$.

$$\text{(iv)} \quad (-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$$

$$\text{(v)} \quad (-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$$

EXERCISE 11.1

1. Find the value of:

$$\text{(i)} \quad 2^6 \qquad \text{(ii)} \quad 9^3 \qquad \text{(iii)} \quad 11^2 \qquad \text{(iv)} \quad 5^4$$

2. Express the following in exponential form:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} \quad 6 \times 6 \times 6 \times 6 & \text{(ii)} \quad t \times t & \text{(iii)} \quad b \times b \times b \times b \\
 \text{(iv)} \quad 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7 & \text{(v)} \quad 2 \times 2 \times a \times a & \text{(vi)} \quad a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad 432 &= 2 \times 216 = 2 \times 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 2 \times 54 \\
 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9 \\
 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3
 \end{aligned}$$

లేదా $432 = 2^4 \times 3^3$ (కావాల్సిన రూపం)

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad 1000 &= 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125 \\
 &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5
 \end{aligned}$$

లేదా $1000 = 2^3 \times 5^3$

అతుల్ ఈ సమస్యను మరోవిధంగా సాధించాడు:

$$\begin{aligned}
 1000 &= 10 \times 100 = 10 \times 10 \times 10 \\
 &= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \quad (\text{కనుక } 10 = 2 \times 5) \\
 &= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5
 \end{aligned}$$

లేదా $1000 = 2^3 \times 5^3$

అతుల్ సాధించిన పద్ధతి స్వీచ్ఛనా ?

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad 16,000 &= 16 \times 1000 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1000 = 2^4 \times 10^3 \quad (\text{కనుక } 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2) \\
 &= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5) = 2^4 \times 2^3 \times 5^3 \\
 &\quad (\text{కనుక } 1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5) \\
 &= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)
 \end{aligned}$$

లేదా $16,000 = 2^7 \times 5^3$

ఉదాహరణ 6 సాధించండి $(1)^5, (-1)^3, (-1)^4, (-10)^3, (-5)^4$.

సాధన: (i) $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

వాస్తవానికి 1 ఏ ఫూతానికి పెంచబడినా దాని విలువ 1 అని మీరు గ్రహిస్తారు.

(ii) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$

(iii) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$

(-1) ని ఏ బేసి ఫూతానికి పెంచబడితే దాని విలువ (-1),

మరియు (-1) ని ఏ సరి ఫూతానికి పెంచబడితే దాని విలువ (+1) అని మీరు గమనించవచ్చు.

(iv) $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$

(v) $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$

(-1) బేసి సంఖ్య	$= -1$
(-1) సరి సంఖ్య	$= +1$

అభ్యాసం 11.1

1. కింది వాటి విలువలు కనుక్కోండి:

(i) 2^6 (ii) 9^3 (iii) 11^2 (iv) 5^4

2. కింది వాటిని ఫూతాంక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$	(ii) $t \times t$	(iii) $b \times b \times b \times b$
(iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$	(v) $2 \times 2 \times a \times a$	(vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$



3. Express each of the following numbers using exponential notation:
- 512
 - 343
 - 729
 - 3125
4. Identify the greater number, wherever possible, in each of the following?
- 4^3 or 3^4
 - 5^3 or 3^5
 - 2^8 or 8^2
 - 100^2 or 2^{100}
 - 2^{10} or 10^2
5. Express each of the following as product of powers of their prime factors:
- 648
 - 405
 - 540
 - 3,600
6. Simplify:
- 2×10^3
 - $7^2 \times 2^2$
 - $2^3 \times 5$
 - 3×4^4
 - 0×10^2
 - $5^2 \times 3^3$
 - $2^4 \times 3^2$
 - $3^2 \times 10^4$
7. Simplify:
- $(-4)^3$
 - $(-3) \times (-2)^3$
 - $(-3)^2 \times (-5)^2$
 - $(-2)^3 \times (-10)^3$
8. Compare the following numbers:
- 2.7×10^{12} ; 1.5×10^8
 - 4×10^{14} ; 3×10^{17}

11.3 LAWS OF EXPONENTS

11.3.1 Multiplying Powers with the Same Base

(i) Let us calculate $2^2 \times 2^3$

$$\begin{aligned} 2^2 \times 2^3 &= (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3} \end{aligned}$$

Note that the base in 2^2 and 2^3 is same and the sum of the exponents, i.e., 2 and 3 is 5

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad (-3)^4 \times (-3)^3 &= [(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)] \times [(-3) \times (-3) \times (-3)] \\ &= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \\ &= (-3)^7 \\ &= (-3)^{4+3} \end{aligned}$$

Again, note that the base is same and the sum of exponents, i.e., 4 and 3, is 7

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad a^2 \times a^4 &= (a \times a) \times (a \times a \times a \times a) \\ &= a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6 \end{aligned}$$

(Note: the base is the same and the sum of the exponents is $2 + 4 = 6$)

Similarly, verify:

$$4^2 \times 4^2 = 4^{2+2}$$

$$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3}$$



3. క్రింద ఇచ్చిన సంఖ్యలను ఘూత రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

 - 512
 - 343
 - 729
 - 3125

4. ఈ క్రింది ప్రతివాటిలో, పెద్ద సంఖ్య ఏదో సాధ్యమైనవోట గుర్తించండి.

 - 4^3 లేదా 3^4
 - 5^3 లేదా 3^5
 - 2^8 లేదా 8^2
 - 100^2 లేదా 2^{100}
 - 2^{10} లేదా 10^2

5. ఈ క్రింది ప్రతి వాటిని, ప్రధాన కారణంకాల లభ్యంగా ఘూత రూపంలో రాయండి.

 - 648
 - 405
 - 540
 - 3,600

6. సూక్ష్మకరించండి:

 - 2×10^3
 - $7^2 \times 2^2$
 - $2^3 \times 5$
 - 3×4^4
 - 0×10^2
 - $5^2 \times 3^3$
 - $2^4 \times 3^2$
 - $3^2 \times 10^4$

7. సూక్ష్మకరించండి:

 - $(-4)^3$
 - $(-3) \times (-2)^3$
 - $(-3)^2 \times (-5)^2$
 - $(-2)^3 \times (-10)^3$

8. క్రింది సంఖ్యలను పోల్చండి:

 - $2.7 \times 10^{12}; 1.5 \times 10^8$
 - $4 \times 10^{14}; 3 \times 10^{17}$

11.3 ఫూతాంక న్యాయాలు

11.3.1 ఒకే భూమి గల ఫూతాల గుణకారం

(i) $2^2 \times 2^3$ విలువను లెక్కించాం.

$$\begin{aligned}2^2 \times 2^3 &= (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \\&= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3}\end{aligned}$$

2^2 మరియు 2^3 ల భూమి సమానం మరియు ఫూతాంకాల మొత్తం $3+2=5$ అని మనం గమనించాం.

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad (-3)^4 \times (-3)^3 &= [(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)] \times [(-3) \times (-3) \times (-3)] \\
 &= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \\
 &= (-3)^7 \\
 &= (-3)^{4+3}
 \end{aligned}$$

మరల, భూముల సమానం మరియు ఘూతాంకాల మొత్తం $4+3=7$ అని గమనించండి.

$$\text{(iii)} \quad a^2 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a) \\ \equiv a \times a \times a \times a \times a \times a \equiv a^6$$

(సూచన: ఇకడ భూమి ఒకటే మరియు పూతాంకాల మొత్తం $2 + 4 = 6$)

ಇದೆ ವಿಧಂಗಾ, ಸರಿಮಾಡಂಡಿ.

$$4^2 \times 4^2 = 4^{2+2}$$

$$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3}$$

Can you write the appropriate number in the box.

$$(-11)^2 \times (-11)^6 = \quad (-11) \square$$

$b^2 \times b^3 = b \square$ (Remember, base is same; b is any integer).

$c^3 \times c^4 = c \square$ (c is any integer)

$$d^{10} \times d^{20} = d \square$$

From this we can generalise that for any non-zero integer a , where m and n are numbers,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

TRY THESE



Simplify and write in exponential form:

- (i) $2^5 \times 2^3$
- (ii) $p^3 \times p^2$
- (iii) $4^3 \times 4^2$
- (iv) $a^3 \times a^2 \times a^7$
- (v) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$
- (vi) $(-4)^{100} \times (-4)^{20}$

Caution!

Consider $2^3 \times 3^2$

Can you add the exponents? No! Do you see ‘why’? The base of 2^3 is 2 and base of 3^2 is 3. The bases are not same.

11.3.2 Dividing Powers with the Same Base

Let us simplify $3^7 \div 3^4$?

$$\begin{aligned} 3^7 \div 3^4 &= \frac{3^7}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3} \\ &= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{7-4} \end{aligned}$$

Thus

$$3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$$

(Note, in 3^7 and 3^4 the base is same and $3^7 \div 3^4$ becomes 3^{7-4})

Similarly,

$$\begin{aligned} 5^6 \div 5^2 &= \frac{5^6}{5^2} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5} \\ &= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 5^{6-2} \end{aligned}$$

or

$$5^6 \div 5^2 = 5^{6-2}$$

Let a be a non-zero integer, then,

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a = a^2 = a^{4-2}$$

or

$$a^4 \div a^2 = a^{4-2}$$

Now can you answer quickly?

$$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$$

$$7^9 \div 7^6 = 7 \square$$

$$a^8 \div a^5 = a \square$$

మీరు సరైన సంఖ్యను పెట్టేలో రాయగలరా?

$$(-11)^2 \times (-11)^6 = (-11) \square$$

$b^2 \times b^3 = b$ భూమి సమానం; b ఏదైనా ఒక పూర్ణసంఖ్య అని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

$$c^3 \times c^4 = c \square \quad (c \text{ ఏదైనా ఒక పూర్ణసంఖ్య})$$

$$d^{10} \times d^{20} = d \square$$

దీని నుండి a ఏదైనా ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య, ఇక్కడ m మరియు n లు పూర్ణాంకాలైన మరం క్రిందివిధంగా సాధారణీకరించవచ్చు,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ప్రయత్నించండి



సూక్ష్మికరించి, ఫూత
రూపంలో రాయండి:

- (i) $2^5 \times 2^3$
- (ii) $p^3 \times p^2$
- (iii) $4^3 \times 4^2$
- (iv) $a^3 \times a^2 \times a^7$
- (v) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$
- (vi) $(-4)^{100} \times (-4)^{20}$

గమనిక !

$$\text{తీసుకోండి } 2^3 \times 3^2$$

మీరు ఫూతాంకాలను కూడగలరా? కూడలేము ‘ఎందుకని’ అని మీరు గమనించారా? 2^3 లో భూమి 2 మరియు 3^2 లో భూమి 3. భూములు సమానం కాదు.

11.3.2 ఒకే భూమి గల ఫూతాల భాగావోరం

సూక్ష్మికరించాం. $3^7 \div 3^4$?

$$3^7 \div 3^4 = \frac{3^7}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{7-4}$$

$$\text{కావున } 3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$$

(గమనిక 3^7 మరియు 3^4 లలో భూములు సమానం మరియు $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$ అవుతుంది)

ఇదేవిధంగా,

$$5^6 \div 5^2 = \frac{5^6}{5^2} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5}$$

$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 5^{6-2}$$

$$\text{లేదా } 5^6 \div 5^2 = 5^{6-2}$$

a ఒక శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య అనుకోండి, అప్పుడు

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a = a^2 = a^{4-2}$$

$$\text{లేదా } a^4 \div a^2 = a^{4-2}$$

ఇప్పుడు మీరు క్రింది వాటికి జవాబును వెంటనే చెప్పగలరా?

$$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$$

$$7^9 \div 7^6 = 7 \square$$

$$a^8 \div a^5 = a \square$$

TRY THESE

Simplify and write in exponential form: (eg., $11^6 \div 11^2 = 11^4$)

- (i) $2^9 \div 2^3$ (ii) $10^8 \div 10^4$
- (iii) $9^{11} \div 9^7$ (iv) $20^{15} \div 20^{13}$
- (v) $7^{13} \div 7^{10}$

For non-zero integers b and c ,

$$b^{10} \div b^5 = b^{\square}$$

$$c^{100} \div c^{90} = c^{\square}$$

In general, for any non-zero integer a ,

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

where m and n are whole numbers and $m > n$.

11.3.3 Taking Power of a Power

Consider the following

$$\text{Simplify } (2^3)^2; (3^2)^4$$

Now, $(2^3)^2$ means 2^3 is multiplied two times with itself.

$$\begin{aligned} (2^3)^2 &= 2^3 \times 2^3 \\ &= 2^{3+3} \text{ (Since } a^m \times a^n = a^{m+n}) \\ &= 2^6 = 2^{3 \times 2} \end{aligned}$$

Thus

$$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2}$$

Similarly

$$\begin{aligned} (3^2)^4 &= 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \\ &= 3^{2+2+2+2} \\ &= 3^8 \text{ (Observe 8 is the product of 2 and 4).} \\ &= 3^{2 \times 4} \end{aligned}$$



Can you tell what would $(7^2)^{10}$ would be equal to?

$$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$$

$$(3^2)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8$$

$$\text{So, } (7^2)^{10} = 7^{2 \times 10} = 7^{20}$$

$$\begin{aligned} (a^2)^3 &= a^{2 \times 3} = a^6 \\ &= a^{m \times 3} = a^{3m} \end{aligned}$$

From this we can generalise for any non-zero integer ' a ', where ' m ' and ' n ' are whole numbers,

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

TRY THESE

Simplify and write the answer in exponential form:

- (i) $(6^2)^4$ (ii) $(2^2)^{100}$
- (iii) $(7^{50})^2$ (iv) $(5^3)^7$



ప్రయత్నించండి



సూక్ష్మికరించి, ఘూత రూపంలో రాయండి:
(ఉదా., $11^6 \div 11^2 = 11^4$)

- (i) $2^9 \div 2^3$
- (ii) $10^8 \div 10^4$
- (iii) $9^{11} \div 9^7$
- (iv) $20^{15} \div 20^{13}$
- (v) $7^{13} \div 7^{10}$

11.3.3 ఘూతం యొక్క ఘూతం

కింది వాటిని పరిశీలించండి

$$(2^3)^2; (3^2)^4 \text{ లను సూక్ష్మికరించండి.}$$

$(2^3)^2$ అంటే 2^3 అనేది అదే సంఖ్యతో రెండు సార్లు గుణించబడింది.

$$\begin{aligned}(2^3)^2 &= 2^3 \times 2^3 \\ &= 2^{3+3} \text{ (ఎందుకనగా } a^m \times a^n = a^{m+n}) \\ &= 2^6 = 2^{3 \times 2}\end{aligned}$$

కాబట్టి

$$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2}$$

ఇదేవిధంగా

$$\begin{aligned}(3^2)^4 &= 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \\ &= 3^{2+2+2+2} \\ &= 3^8 \text{ (8 అనేది 2 మరియు 4 ల లభం అని గమనించండి).} \\ &= 3^{2 \times 4}\end{aligned}$$



$(7^2)^{10}$ దేనికి సమానమో మీరు చెప్పగలరా?

$$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$$

$$(3^2)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8$$

కావున,
 $(7^2)^{10} = 7^{2 \times 10} = 7^{20}$

$$\begin{aligned}(a^2)^3 &= a^{2 \times 3} = a^6 \\ &= a^{m \times 3} = a^{3m}\end{aligned}$$

దీని నుండి క్రింది విధంగా మనం సాధారణికరించవచ్చు. ‘ a ’, ఏదైనా ఘూతేతర పూర్ణ సంఖ్య మరియు ‘ m ’ మరియు ‘ n ’ లు పూర్ణాంకాలైన పూర్ణ సంఖ్య మరియు ‘ m ’ మరియు ‘ n ’ లు పూర్ణాంకాలైన

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

ప్రయత్నించండి

సూక్ష్మికరించి, ఘూత రూపంలో రాయండి.

(i) $(6^2)^4$

(ii) $(2^2)^{100}$

(iii) $(7^{50})^2$

(iv) $(5^3)^7$



EXAMPLE 7 Can you tell which one is greater $(5^2) \times 3$ or $(5^2)^3$?

SOLUTION $(5^2) \times 3$ means 5^2 is multiplied by 3 i.e., $5 \times 5 \times 3 = 75$

but $(5^2)^3$ means 5^2 is multiplied by itself three times i.e.,

$$5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^6 = 15,625$$

Therefore $(5^2)^3 > (5^2) \times 3$

11.3.4 Multiplying Powers with the Same Exponents

Can you simplify $2^3 \times 3^3$? Notice that here the two terms 2^3 and 3^3 have different bases, but the same exponents.

Now,

$$\begin{aligned} 2^3 \times 3^3 &= (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3) \\ &= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \\ &= 6 \times 6 \times 6 \\ &= 6^3 \quad (\text{Observe } 6 \text{ is the product of bases } 2 \text{ and } 3) \end{aligned}$$

Consider $4^4 \times 3^4$

$$\begin{aligned} &= (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) \\ &= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \\ &= 12 \times 12 \times 12 \times 12 \\ &= 12^4 \end{aligned}$$

Consider, also, $3^2 \times a^2$

$$\begin{aligned} &= (3 \times 3) \times (a \times a) \\ &= (3 \times a) \times (3 \times a) \\ &= (3 \times a)^2 \\ &= (3a)^2 \quad (\text{Note: } 3 \times a = 3a) \end{aligned}$$

Similarly, $a^4 \times b^4$

$$\begin{aligned} &= (a \times a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b) \\ &= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \\ &= (a \times b)^4 \\ &= (ab)^4 \quad (\text{Note } a \times b = ab) \end{aligned}$$

In general, for any non-zero integer a

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

(where m is any whole number)



TRY THESE

Put into another form using $a^m \times b^m = (ab)^m$:

- (i) $4^3 \times 2^3$ (ii) $2^5 \times b^5$
- (iii) $a^2 \times t^2$ (iv) $5^6 \times (-2)^6$
- (v) $(-2)^4 \times (-3)^4$

SOLUTION

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad (2 \times 3)^5 &= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \\ &= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) \\ &= 2^5 \times 3^5 \end{aligned}$$

ఉదాహరణ 7 $(5^2) \times 3$ లేదా $(5^2)^3$ లలో ఏది పెద్దదో మీరు చెప్పగలరా?

సాధన: $(5^2) \times 3$ అనగా 5^2 అనేది, 3 చే గుణించబడుతుంది అనగా $5 \times 5 \times 3 = 75$

కానీ $(5^2)^3$ అనగా 5^2 సంఖ్యను అదే సంఖ్య 3 సార్లు గుణిస్తున్నది.

$$\text{అనగా } 5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^6 = 15,625$$

$$\text{అందువలన, } (5^2)^3 > (5^2) \times 3$$

13.3.4 ఒకే ఫూతాంకం గల ఫూతాలను గుణించడం

$2^3 \times 3^3$ ను సూక్ష్మికరించగలరా? 2^3 మరియు 3^3 అనే రెండు పదాలు వేర్చేరు భూములు మరియు ఒకే ఫూతాంకాలు కలిగి ఉన్నాయని గమనించండి.

$$\text{ఇప్పుడు} \quad 2^3 \times 3^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$$

$$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$$

$$= 6 \times 6 \times 6$$

$$= 6^3 \quad (6 \text{ అనేది భూములైన } 2 \text{ మరియు } 3\text{ల లభ్యం})$$

$$4^4 \times 3^4 = (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$$

$$= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3)$$

$$= 12 \times 12 \times 12 \times 12$$

$$= 12^4$$

$$3^2 \times a^2 = (3 \times 3) \times (a \times a)$$

$$= (3 \times a) \times (3 \times a)$$

$$= (3 \times a)^2$$

$$= (3a)^2 \quad (\text{గమనిక: } 3 \times a = 3a)$$

$$\text{ఇదేవిధంగా, } a^4 \times b^4 = (a \times a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b)$$

$$= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)$$

$$= (a \times b)^4$$

$$= (ab)^4 \quad (\text{గమనిక: } a \times b = ab)$$

సాధారణంగా a, b లు ఏపైనా రెండు శూన్యేతర పూర్త సంఖ్యలు అయితే

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

(m ఏదైనా ఒక ఫూర్చాంకం అయిన)

ఉదాహరణ 8 క్రింది వాటిని ఫూత రూపంలో తెల్పండి.

$$(i) \quad (2 \times 3)^5$$

$$(ii) \quad (2a)^4$$

$$(iii) \quad (-4m)^3$$

సాధన:

$$(i) \quad (2 \times 3)^5 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \\ = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) \\ = 2^5 \times 3^5$$



ప్రయత్నించండి

$a^m \times b^m = (ab)^m$ ని ఉపయోగించి

మరొక రూపంలో రాయండి:

$$(i) \quad 4^3 \times 2^3 \quad (ii) \quad 2^5 \times b^5$$

$$(iii) \quad a^2 \times t^2 \quad (iv) \quad 5^6 \times (-2)^6$$

$$(v) \quad (-2)^4 \times (-3)^4$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad (2a)^4 &= 2a \times 2a \times 2a \times 2a \\
 &= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (a \times a \times a \times a) \\
 &= 2^4 \times a^4 \\
 \text{(iii)} \quad (-4m)^3 &= (-4 \times m)^3 \\
 &= (-4 \times m) \times (-4 \times m) \times (-4 \times m) \\
 &= (-4) \times (-4) \times (-4) \times (m \times m \times m) = (-4)^3 \times (m)^3
 \end{aligned}$$

11.3.5 Dividing Powers with the Same Exponents

TRY THESE

Put into another form

using $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$:

- (i) $4^5 \div 3^5$
- (ii) $2^5 \div b^5$
- (iii) $(-2)^3 \div b^3$
- (iv) $p^4 \div q^4$
- (v) $5^6 \div (-2)^6$

Observe the following simplifications:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \frac{2^4}{3^4} &= \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \\
 \text{(ii)} \quad \frac{a^3}{b^3} &= \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3
 \end{aligned}$$

From these examples we may generalise

$$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \text{ where } a \text{ and } b \text{ are any non zero integers}$$

and m is a whole number.

EXAMPLE 9 Expand: (i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)^5$

SOLUTION

$$\text{(i)} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$$

$$\text{(ii)} \quad \left(\frac{-4}{7}\right)^5 = \frac{(-4)^5}{7^5} = \frac{(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4)}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}$$

● Numbers with exponent zero

Can you tell what $\frac{3^5}{3^5}$ equals to?

$$\frac{3^5}{3^5} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = 1$$

by using laws of exponents

What is a^0 ?

Observe the following pattern:

$$\begin{aligned}
 2^6 &= 64 \\
 2^5 &= 32 \\
 2^4 &= 16 \\
 2^3 &= 8 \\
 2^2 &= ? \\
 2^1 &= ? \\
 2^0 &= ?
 \end{aligned}$$

You can guess the value of 2^0 by just studying the pattern!

You find that $2^0 = 1$

If you start from $3^6 = 729$, and proceed as shown above finding $3^5, 3^4, 3^3, \dots$ etc, what will be $3^0 = ?$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad (2a)^4 &= 2a \times 2a \times 2a \times 2a \\
 &= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (a \times a \times a \times a) \\
 &= 2^4 \times a^4 \\
 \text{(iii)} \quad (-4m)^3 &= (-4 \times m)^3 \\
 &= (-4 \times m) \times (-4 \times m) \times (-4 \times m) \\
 &= (-4) \times (-4) \times (-4) \times (m \times m \times m) = (-4)^3 \times (m)^3
 \end{aligned}$$

13.3.5 ఒకే ఫూతాంకం గల ఫూతాలను భాగించండి.

క్రింది సూక్ష్మకరణాలను గమనించండి:

$$\text{(i)} \quad \frac{2^4}{3^4} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{a^3}{b^3} = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

ఈ ఉదాహరణల నుండి ఈ విధంగా సాధారణీకరించవచ్చు.

$$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (\text{ఇక్కడ } a \text{ మరియు } b \text{ లు ఏవైనా శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు } m \text{ ఏదైనా ఒక పూర్ణాంకం})$$

$$\text{ఉదాహరణ 9} \quad \text{విష్టరించండి} \quad \text{(i)} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^4 \quad \text{(ii)} \quad \left(\frac{-4}{7}\right)^5$$

సాధన:

$$\text{(i)} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$$

$$\text{(ii)} \quad \left(\frac{-4}{7}\right)^5 = \frac{(-4)^5}{7^5} = \frac{(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4)}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}$$

● ఫూతాంకం సున్నగా గల సంఖ్యలు

$\frac{3^5}{3^5}$ దేనికి సమానమో మీరు చెప్పగలరా?

$$\frac{3^5}{3^5} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = 1$$

ఫూతాంక న్యాయాలను ఉపయోగించి

ప్రయత్నించండి

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad \text{ను}$$

ఉపయోగించి మరో రూపంలో రాయండి.

- (i) $4^5 \div 3^5$
- (ii) $2^5 \div b^5$
- (iii) $(-2)^3 \div b^3$
- (iv) $p^4 \div q^4$
- (v) $5^6 \div (-2)^6$

a^0 ఎంత ?

కింది క్రమాన్ని పరిశీలించండి. ?

$$2^6 = 64$$

$$2^5 = 32$$

$$2^4 = 16$$

$$2^3 = 8$$

$$2^2 = ?$$

$$2^1 = ?$$

$$2^0 = ?$$

ఈ క్రమాన్ని పరిశీలించడం ద్వారా 2^0 యొక్క విలువను ఊహించగలరు.

$2^0 = 1$ అని మీరు తెలుసుకొన్నారు.

ఈ క్రమాన్ని పరిశీలించడం ద్వారా

$3^6 = 729$, నుండి మొదలు పెట్టి పైన

తెలిపిన విధంగా $3^5, 3^4, 3^3, \dots$ మొ.

కనుగోంటూ పోతే $3^0 =$ విలువ ఎంత

అవుతుంది. ?

$$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$$

So

$$3^0 = 1$$

Can you tell what 7^0 is equal to?

$$7^3 \div 7^3 = 7^{3-3} = 7^0$$

And

$$\frac{7^3}{7^3} = \frac{7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7} = 1$$

Therefore

$$7^0 = 1$$

Similarly

$$a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$$

And

$$a^3 \div a^3 = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a} = 1$$

Thus

$$a^0 = 1 \text{ (for any non-zero integer } a\text{)}$$

So, we can say that any number (except 0) raised to the power (or exponent) 0 is 1.



11.4 MISCELLANEOUS EXAMPLES USING THE LAWS OF EXPONENTS

Let us solve some examples using rules of exponents developed.

EXAMPLE 10 Write exponential form for $8 \times 8 \times 8 \times 8$ taking base as 2.

SOLUTION We have, $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$

But we know that

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

Therefore

$$8^4 = (2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$$

$$= 2^{3 \times 4}$$

[You may also use $(a^m)^n = a^{mn}$]

$$= 2^{12}$$

EXAMPLE 11 Simplify and write the answer in the exponential form.

$$(i) \left(\frac{3^7}{3^2} \right) \times 3^5$$

$$(ii) 2^3 \times 2^2 \times 5^5$$

$$(iii) (6^2 \times 6^4) \div 6^3$$

$$(iv) [(2^2)^3 \times 3^6] \times 5^6$$

$$(v) 8^2 \div 2^3$$

SOLUTION

$$(i) \left(\frac{3^7}{3^2} \right) \times 3^5 = (3^{7-2}) \times 3^5$$

$$= 3^5 \times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$$

$$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$$

కావున,
 $3^0 = 1$

7^0 దేనికి సమానమో చెప్పగలరా?

$$7^3 \div 7^3 = 7^{3-3} = 7^0$$

మరియు

$$\frac{7^3}{7^3} = \frac{7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7} = 1$$

$$7^0 = 1$$

ఇదేవిధంగా

$$a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$$

మరియు

$$a^3 \div a^3 = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a} = 1$$

కాబట్టి

$$a^0 = 1 \text{ (} a \text{ ఏదైనా ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య)}$$

కావున, ఏదైనా ఒక సంఖ్య (0 కాకుండా) నున్నా ఫూతానికి కలిగివున్న దాని విలువ 1 అవుతుంది.



13.4 ఫూతాంక న్యాయాలను ఉపయోగించి కొన్ని ఉదాహరణలు

ఫూతాంక న్యాయాలను ఉపయోగించి కొన్ని ఉదాహరణలను సాధించాం.

ఉదాహరణ 10 $8 \times 8 \times 8 \times 8$ ని 2 భూమిగా ఫూత రూపంలో రాయండి.

సాధన: $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$ అని ఇవ్వబడింది.

కానీ,

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

అందువలన

$$8^4 = (2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$$

$$= 2^{3 \times 4} [(a^m)^n = a^{mn} \text{ ఈ న్యాయాన్ని కూడా ఉపయోగించవచ్చు] \\ = 2^{12}$$

ఉదాహరణ 11 సూక్ష్మికరించి, జవాబుని ఫూత రూపంలో రాయండి:

$$(i) \left(\frac{3^7}{3^2} \right) \times 3^5 \quad (ii) \quad 2^3 \times 2^2 \times 5^5 \quad (iii) \quad (6^2 \times 6^4) \div 6^3$$

$$(iv) \quad [(2^2)^3 \times 3^6] \times 5^6 \quad (v) \quad 8^2 \div 2^3$$

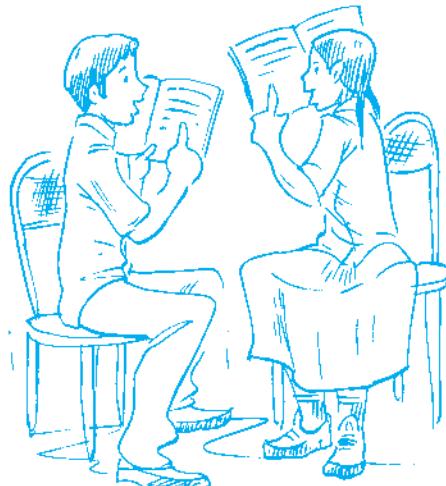
సాధన:

$$(i) \quad \left(\frac{3^7}{3^2} \right) \times 3^5 = (3^{7-2}) \times 3^5 \\ = 3^5 \times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & 2^3 \times 2^2 \times 5^5 = 2^{3+2} \times 5^5 \\ & = 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad & (6^2 \times 6^4) \div 6^3 = 6^{2+4} \div 6^3 \\ & = \frac{6^6}{6^3} = 6^{6-3} = 6^3 \\ \text{(iv)} \quad & \left[(2^2)^3 \times 3^6 \right] \times 5^6 = [2^6 \times 3^6] \times 5^6 \\ & = (2 \times 3)^6 \times 5^6 \\ & = (2 \times 3 \times 5)^6 = 30^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(v)} \quad & 8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \\ \text{Therefore } & 8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3 \\ & = 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3 \end{aligned}$$



EXAMPLE 12 Simplify:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} \quad \frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} & \text{(ii)} \quad 2^3 \times a^3 \times 5a^4 & \text{(iii)} \quad \frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2} \end{array}$$

SOLUTION

(i) We have



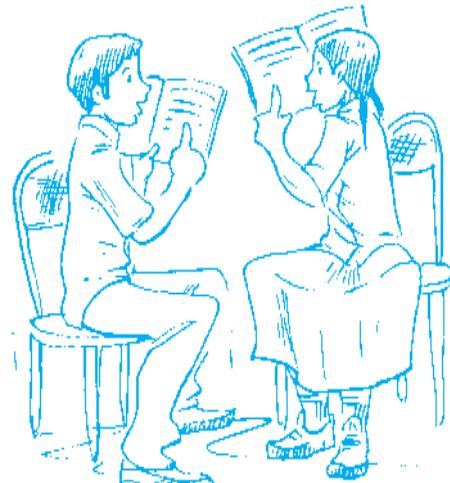
$$\begin{aligned} \frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} &= \frac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3} \\ &= \frac{(2^2)^4 \times (3)^4 \times 3^{2 \times 3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{2 \times 3} \times 3^3} = \frac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3} \\ &= \frac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}} = \frac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6} \\ &= 2^{10-9} \times 3^{10-6} = 2^1 \times 3^4 \\ &= 2 \times 81 = 162 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & 2^3 \times a^3 \times 5a^4 = 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4 \\ & = 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4 = 8 \times 5 \times a^{3+4} \\ & = 40 a^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & 2^3 \times 2^2 \times 5^5 = 2^{3+2} \times 5^5 \\ & = 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad & (6^2 \times 6^4) \div 6^3 = 6^{2+4} \div 6^3 \\ & = \frac{6^6}{6^3} = 6^{6-3} = 6^3 \\ \text{(iv)} \quad & \left[(2^2)^3 \times 3^6 \right] \times 5^6 = [2^6 \times 3^6] \times 5^6 \\ & = (2 \times 3)^6 \times 5^6 \\ & = (2 \times 3 \times 5)^6 = 30^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(v)} \quad & 8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \\ \text{అవున } & 8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3 \\ & = 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3 \end{aligned}$$



ఉదాహరణ 12 సూక్ష్మకరించండి:

$$\text{(i)} \quad \frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} \qquad \text{(ii)} \quad 2^3 \times a^3 \times 5a^4 \qquad \text{(iii)} \quad \frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$$

సాధన:

(i)



$$\begin{aligned} \frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} &= \frac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3} \\ &= \frac{(2^2)^4 \times (3)^4 \times 3^{2 \times 3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{2 \times 3} \times 3^3} = \frac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3} \\ &= \frac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}} = \frac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6} \\ &= 2^{10-9} \times 3^{10-6} = 2^1 \times 3^4 \\ &= 2 \times 81 = 162 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & 2^3 \times a^3 \times 5a^4 = 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4 \\ & = 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4 = 8 \times 5 \times a^{3+4} \\ & = 40 a^7 \end{aligned}$$

116 EXPONENTS AND POWERS

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2} = \frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{3^2 \times (2^2)^2} = \frac{2 \times 2^5 \times 3^4}{3^2 \times 2^{2 \times 2}} \\
 & = \frac{2^{1+5} \times 3^4}{2^4 \times 3^2} = \frac{2^6 \times 3^4}{2^4 \times 3^2} = 2^{6-4} \times 3^{4-2} \\
 & = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36
 \end{aligned}$$

Note: In most of the examples that we have taken in this Chapter, the base of a power was taken an integer. But all the results of the chapter apply equally well to a base which is a rational number.

EXERCISE 11.2

1. Using laws of exponents, simplify and write the answer in exponential form:

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------|--|
| (i) $3^2 \times 3^4 \times 3^8$ | (ii) $6^{15} \div 6^{10}$ | (iii) $a^3 \times a^2$ |
| (iv) $7^x \times 7^2$ | (v) $(5^2)^3 \div 5^3$ | (vi) $2^5 \times 5^5$ |
| (vii) $a^4 \times b^4$ | (viii) $(3^4)^3$ | (ix) $(2^{20} \div 2^{15}) \times 2^3$ |
| (x) $8^t \div 8^2$ | | |



2. Simplify and express each of the following in exponential form:

- | | | |
|--|--|--|
| (i) $\frac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3 \times 32}$ | (ii) $\left((5^2)^3 \times 5^4 \right) \div 5^7$ | (iii) $25^4 \div 5^3$ |
| (iv) $\frac{3 \times 7^2 \times 11^8}{21 \times 11^3}$ | (v) $\frac{3^7}{3^4 \times 3^3}$ | (vi) $2^0 + 3^0 + 4^0$ |
| (vii) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$ | (viii) $(3^0 + 2^0) \times 5^0$ | (ix) $\frac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3}$ |
| (x) $\left(\frac{a^5}{a^3} \right) \times a^8$ | (xi) $\frac{4^5 \times a^8 b^3}{4^5 \times a^5 b^2}$ | (xii) $(2^3 \times 2)^2$ |

3. Say true or false and justify your answer:

- | | | |
|------------------------------------|------------------|------------------------------|
| (i) $10 \times 10^{11} = 100^{11}$ | (ii) $2^3 > 5^2$ | (iii) $2^3 \times 3^2 = 6^5$ |
| (iv) $3^0 = (1000)^0$ | | |

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2} = \frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{3^2 \times (2^2)^2} = \frac{2 \times 2^5 \times 3^4}{3^2 \times 2^{2 \times 2}} \\
 & = \frac{2^{1+5} \times 3^4}{2^4 \times 3^2} = \frac{2^6 \times 3^4}{2^4 \times 3^2} = 2^{6-4} \times 3^{4-2} \\
 & = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36
 \end{aligned}$$

గమనిక: ఈ అధ్యాయంలో మనం తీసుకున్న చాలా ఉదాహరణలలో, భూమి యొక్క ఫూతాన్ని పూర్ణ సంఖ్య తీసుకోబడింది. కానీ ఈ అధ్యాయంలోని అన్ని రకాల ఫలితాలు అకరణీయ సంఖ్యలు భూములుగాగల వాటికి కూడా వర్తిస్తాయి.

అభ్యాసం 11.2

1. ఫూతాంక న్యాయాలను ఉపయోగించి సూక్ష్మకరించండి. జవాబులను ఫూత రూపంలో రాయండి.

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------|--|
| (i) $3^2 \times 3^4 \times 3^8$ | (ii) $6^{15} \div 6^{10}$ | (iii) $a^3 \times a^2$ |
| (iv) $7^x \times 7^2$ | (v) $(5^2)^3 \div 5^3$ | (vi) $2^5 \times 5^5$ |
| (vii) $a^4 \times b^4$ | (viii) $(3^4)^3$ | (ix) $(2^{20} \div 2^{15}) \times 2^3$ |
| (x) $8^t \div 8^2$ | | |



2. క్రింది వాటిని సూక్ష్మకరించండి. ఫూత రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

$$\text{(i)} \quad \frac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3 \times 32} \qquad \text{(ii)} \quad \left((5^2)^3 \times 5^4 \right) \div 5^7 \qquad \text{(iii)} \quad 25^4 \div 5^3$$

$$\text{(iv)} \quad \frac{3 \times 7^2 \times 11^8}{21 \times 11^3} \qquad \text{(v)} \quad \frac{3^7}{3^4 \times 3^3} \qquad \text{(vi)} \quad 2^0 + 3^0 + 4^0$$

$$\text{(vii)} \quad 2^0 \times 3^0 \times 4^0 \qquad \text{(viii)} \quad (3^0 + 2^0) \times 5^0 \qquad \text{(ix)} \quad \frac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3}$$

$$\text{(x)} \quad \left(\frac{a^5}{a^3} \right) \times a^8 \qquad \text{(xi)} \quad \frac{4^5 \times a^8 b^3}{4^5 \times a^5 b^2} \qquad \text{(xii)} \quad (2^3 \times 2)^2$$

3. సత్యమో, అసత్యమో తెలిపి మీ జవాబును సమర్థించండి:

- | | | |
|------------------------------------|------------------|------------------------------|
| (i) $10 \times 10^{11} = 100^{11}$ | (ii) $2^3 > 5^2$ | (iii) $2^3 \times 3^2 = 6^5$ |
| (iv) $3^0 = (1000)^0$ | | |

4. Express each of the following as a product of prime factors only in exponential form:
- 108×192
 - 270
 - 729×64
 - 768
5. Simplify:

$$(i) \frac{(2^5)^2 \times 7^3}{8^3 \times 7}$$

$$(ii) \frac{25 \times 5^2 \times t^8}{10^3 \times t^4}$$

$$(iii) \frac{3^5 \times 10^5 \times 25}{5^7 \times 6^5}$$



11.5 DECIMAL NUMBER SYSTEM

Let us look at the expansion of 47561, which we already know:

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

We can express it using powers of 10 in the exponent form:

$$\text{Therefore, } 47561 = 4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

(Note $10,000 = 10^4$, $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$ and $1 = 10^0$)

Let us expand another number:

$$\begin{aligned} 104278 &= 1 \times 100,000 + 0 \times 10,000 + 4 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1 \\ &= 1 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \\ &= 1 \times 10^5 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \end{aligned}$$

Notice how the exponents of 10 start from a maximum value of 5 and go on decreasing by 1 at a step from the left to the right upto 0.

11.6 EXPRESSING LARGE NUMBERS IN THE STANDARD FORM

Let us now go back to the beginning of the chapter. We said that large numbers can be conveniently expressed using exponents. We have not as yet shown this. We shall do so now.

- Sun is located $300,000,000,000,000,000,000$ m from the centre of our Milky Way Galaxy.
- Number of stars in our Galaxy is $100,000,000,000$.
- Mass of the Earth is $5,976,000,000,000,000,000,000$ kg.

These numbers are not convenient to write and read.

To make it convenient we use powers.

Observe the following:

$$59 = 5.9 \times 10 = 5.9 \times 10^1$$

$$590 = 5.9 \times 100 = 5.9 \times 10^2$$

$$5900 = 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$$

$$59000 = 5.9 \times 10000 = 5.9 \times 10^4 \text{ and so on.}$$

TRY THESE

Expand by expressing powers of 10 in the exponential form:

- 172
- 5,643
- 56,439
- 1,76,428

4. క్రింది వాటిని ప్రథాన కారణాంకాల లభ్యంగా ఫూత రూపంలో వ్యక్తపరచండి:

- (i) 108×192
- (ii) 270
- (iii) 729×64
- (iv) 768

5. సూక్ష్మికరించండి:

$$(i) \frac{(2^5)^2 \times 7^3}{8^3 \times 7} \quad (ii) \frac{25 \times 5^2 \times t^8}{10^3 \times t^4} \quad (iii) \frac{3^5 \times 10^5 \times 25}{5^7 \times 6^5}$$

13.5 దశాంశ సంఖ్యామానం



విస్తరణ రూపం మీకు ముందుగానే తెలుసుకదా 47561 యొక్క విస్తరణ రూపాన్ని గమనించండి.

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

మనం దీనిని 10 యొక్క ఫూతాంక రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చు.

$$\text{కావున , } 47561 = 4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

(గమనిక: $10,000 = 10^4$, $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$, $1 = 10^0$)

మరియు సంఖ్యను విస్తరించాం.

$$\begin{aligned} 104278 &= 1 \times 100,000 + 0 \times 10,000 + 4 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1 \\ &= 1 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \\ &= 1 \times 10^5 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \end{aligned}$$

10 యొక్క ఫూతం విలువ 5 నుండి మొదలుపెట్టి 1 సంఖ్యను తగ్గిస్తూ అవరోహణ క్రమంలో ఎడవ నుండి కుడివైపుకు 0 వచ్చేవరకు రాయండి.

13.6 పెద్ద సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచుట

మనం ఈ అధ్యాయం ప్రారంభంలోకి వెళ్లాం. ఫూతాంకాలను ఉపయోగించి పెద్ద సంఖ్యలను సౌకర్యవంతంగా వ్యక్తపరచవచ్చని మనం చెప్పుకున్నాం. దీనిని మనం ఇంతవరకూ చూపలేదు. మనం ఇప్పుడే చేద్దాం.

1. సూర్యుడు పాలపుంత కేంద్రం నుండి $300,000,000,000,000,000,000,000$ మీ. దూరంలో ఉన్నాడు.
2. మన నక్షత్రమండలంలో $100,000,000,000$ నక్షత్రాలు ఉన్నాయి.
3. భూమి ద్రవ్యరా�ి $5,976,000,000,000,000,000,000,000$ కి.గ్రా.

ఇలాంటి పెద్ద సంఖ్యలను రాయడం, చదవడం కష్టం. ఇది సులభతరం కావాలంటే ఫూతాలను ఉపయోగించి రాయాలి.

కింది వాటిని గమనించండి:

$$59 = 5.9 \times 10 = 5.9 \times 10^1$$

$$590 = 5.9 \times 100 = 5.9 \times 10^2$$

$$5900 = 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$$

$$59000 = 5.9 \times 10000 = 5.9 \times 10^4 \text{ ఇంకా మరెన్నో}$$

ప్రయత్నించండి

10 యొక్క ఫూతంగా విస్తరణ

రూపంలో వ్యక్తపరచండి:

- (i) 172
- (ii) 5,643
- (iii) 56,439
- (iv) 1,76,428

We have expressed all these numbers in the **standard form**. Any number can be expressed as a decimal number between 1.0 and 10.0 including 1.0 multiplied by a power of 10. Such a form of a number is called its **standard form**. Thus,

$$5,985 = 5.985 \times 1,000 = 5.985 \times 10^3 \text{ is the standard form of } 5,985.$$

Note, 5,985 can also be expressed as 59.85×100 or 59.85×10^2 . But these are not the standard forms, of 5,985. Similarly, $5,985 = 0.5985 \times 10,000 = 0.5985 \times 10^4$ is also not the standard form of 5,985.

We are now ready to express the large numbers we came across at the beginning of the chapter in this form.

The distance of Sun from the centre of our Galaxy i.e.,

$300,000,000,000,000,000,000$ m can be written as

$$3.0 \times 100,000,000,000,000,000,000 = 3.0 \times 10^{20} \text{ m}$$

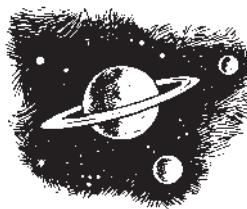
Now, can you express $40,000,000,000$ in the similar way?

Count the number of zeros in it. It is 10.

$$\text{So, } 40,000,000,000 = 4.0 \times 10^{10}$$

$$\text{Mass of the Earth} = 5,976,000,000,000,000,000,000,000 \text{ kg}$$

$$= 5.976 \times 10^{24} \text{ kg}$$



Do you agree with the fact, that the number when written in the standard form is much easier to read, understand and compare than when the number is written with 25 digits?

Now,

$$\text{Mass of Uranus} = 86,800,000,000,000,000,000,000,000 \text{ kg}$$

$$= 8.68 \times 10^{25} \text{ kg}$$

Simply by comparing the powers of 10 in the above two, you can tell that the mass of Uranus is greater than that of the Earth.

The distance between Sun and Saturn is $1,433,500,000,000$ m or 1.4335×10^{12} m. The distance between Saturn and Uranus is $1,439,000,000,000$ m or 1.439×10^{12} m. The distance between Sun and Earth is $149,600,000,000$ m or 1.496×10^{11} m.

Can you tell which of the three distances is smallest?

EXAMPLE 13 Express the following numbers in the standard form:

- | | |
|-----------------|---------------------|
| (i) 5985.3 | (ii) 65,950 |
| (iii) 3,430,000 | (iv) 70,040,000,000 |

SOLUTION

- | |
|--|
| (i) $5985.3 = 5.9853 \times 1000 = 5.9853 \times 10^3$ |
| (ii) $65,950 = 6.595 \times 10,000 = 6.595 \times 10^4$ |
| (iii) $3,430,000 = 3.43 \times 1,000,000 = 3.43 \times 10^6$ |
| (iv) $70,040,000,000 = 7.004 \times 10,000,000,000 = 7.004 \times 10^{10}$ |



ఈ సంఖ్యలన్నిటినీ ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచాం. ఏ సంఖ్యనెనా 1.0 తో సహా 1.0 మరియు 10.0 ల మధ్య గల దశాంశ మరియు 10 ఘూతాల లభ్యంగా వ్యక్తపరచవచ్చు. సంఖ్యారూపాన్ని ప్రామాణిక రూపం అంటారు. ఆ విధంగా

$$5,985 = 5.985 \times 1,000 = 5.985 \times 10^3 \text{ ఇది } 5,985 \text{ ప్రామాణిక రూపం.}$$

$5,985$ ను 59.85×100 లేదా 59.85×10^2 . ఈ విధంగా కూడా వ్యక్తపరచవచ్చు. కానీ ఇవి $5,985$ యొక్క ప్రామాణిక రూపం కాదు. అదేవిధంగా, $5,985 = 0.5985 \times 10,000 = 0.5985 \times 10^4$ ఇది కూడా $5,985$ యొక్క ప్రామాణిక రూపం కాదు.

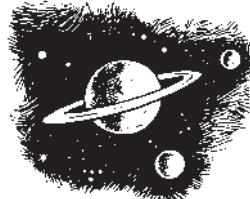
ఈ అధ్యాయం ప్రారంభంలో చూసిన పెద్ద సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచడానికి సిద్ధంగా ఉన్నాం. మన నక్షత్ర మండల కేంద్రం నుండి సూర్యానికి గల దూరం $300,000,000,000,000,000,000$ మీ. ని $3.0 \times 100,000,000,000,000,000,000$ మీ. = 3.0×10^{20} మీ. గా రాయవచ్చు.

$40,000,000,000$ ను కూడా ఈ విధంగా వ్యక్తపరచగలరా?

ఈ సంఖ్యలోని సున్నాలను లెక్కించండి. అవి 10 ఉన్నాయి.

$$\text{కావున, } 40,000,000,000 = 4.0 \times 10^{10}$$

$$\begin{aligned} \text{భూమి ద్రవ్యరాశి} &= 5,976,000,000,000,000,000,000,000 \text{ కి.గ్రా.} \\ &= 5.976 \times 10^{24} \text{ కి.గ్రా.} \end{aligned}$$



ఈ సంఖ్యను 25 అంకెలతో రాయటం కన్నా ప్రామాణిక రూపంలో రాయటం, అర్థం చేసుకోవడం మరియు పోల్చటం సులభం. ఈ విషయంతో మీరు ఏకీభవిస్తారా?

ఇప్పుడు,

$$\begin{aligned} \text{యురేనస్ ద్రవ్యరాశి} &= 86,800,000,000,000,000,000,000,000 \text{ కి.గ్రా.} \\ &= 8.68 \times 10^{25} \text{ కి.గ్రా.} \end{aligned}$$

పై రెండింటిలో 10 ఘూతాలు పోల్చడం వలన యురేనస్ ద్రవ్యరాశి అనేది భూమి ద్రవ్యరాశి కంటే ఎక్కువ అని, మనం చెప్పగలం.

సూర్యుడు మరియు శనిల మధ్య దూరం $1,433,500,000,000$ మీ. లేదా 1.4335×10^{12} మీ. ఈని మరియు యురేనస్ మధ్య దూరం $1,439,000,000,000$ మీ. లేదా 1.439×10^{12} మీ. సూర్యుడు మరియు భూమిల మధ్య దూరం $149,600,000,000$ మీ. లేదా 1.496×10^{11} మీ.

ఈ మూడు దూరాలలో అతి తక్కువ దూరం ఏదో మీరు చెప్పగలరా?

ఉదాహరణ 13 కింది సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

- | | |
|-----------------|---------------------|
| (i) 5985.3 | (ii) 65,950 |
| (iii) 3,430,000 | (iv) 70,040,000,000 |

సాధన:

- | |
|--|
| (i) $5985.3 = 5.9853 \times 1000 = 5.9853 \times 10^3$ |
| (ii) $65,950 = 6.595 \times 10,000 = 6.595 \times 10^4$ |
| (iii) $3,430,000 = 3.43 \times 1,000,000 = 3.43 \times 10^6$ |
| (iv) $70,040,000,000 = 7.004 \times 10,000,000,000 = 7.004 \times 10^{10}$ |



A point to remember is that one less than the digit count (number of digits) to the left of the decimal point in a given number is the exponent of 10 in the standard form. Thus, in 70,040,000,000 there is no decimal point shown; we assume it to be at the (right) end. From there, the count of the places (digits) to the left is 11. The exponent of 10 in the standard form is $11 - 1 = 10$. In 5985.3 there are 4 digits to the left of the decimal point and hence the exponent of 10 in the standard form is $4 - 1 = 3$.

EXERCISE 11.3

1. Write the following numbers in the expanded forms:

279404, 3006194, 2806196, 120719, 20068

2. Find the number from each of the following expanded forms:

(a) $8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

(b) $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^0$

(c) $3 \times 10^4 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^0$

(d) $9 \times 10^5 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1$

3. Express the following numbers in standard form:

(i) 5,00,00,000

(ii) 70,00,000

(iii) 3,18,65,00,000

(iv) 3,90,878

(v) 39087.8

(vi) 3908.78

4. Express the number appearing in the following statements in standard form.

(a) The distance between Earth and Moon is 384,000,000 m.

(b) Speed of light in vacuum is 300,000,000 m/s.

(c) Diameter of the Earth is 1,27,56,000 m.

(d) Diameter of the Sun is 1,400,000,000 m.

(e) In a galaxy there are on an average 100,000,000,000 stars.

(f) The universe is estimated to be about 12,000,000,000 years old.

(g) The distance of the Sun from the centre of the Milky Way Galaxy is estimated to be 300,000,000,000,000,000 m.

(h) 60,230,000,000,000,000,000 molecules are contained in a drop of water weighing 1.8 gm.

(i) The earth has 1,353,000,000 cubic km of sea water.

(j) The population of India was about 1,027,000,000 in March, 2001.



గుర్తుంచుకోవాల్సిన అంశం ఏమిటంటే, ఇచ్చిన సంఖ్యలో దశాంశ బిందువుకు ఎడమవైపు ఉన్న అంకెల సంఖ్య కంటే ఒకటి తక్కువగా ఉన్న సంఖ్య ఉంటే అది ప్రామాణిక రూపంలో 10 యొక్క ఫూతాంకం అవుతుంది. అందువలన, $70,040,000,000$ లో దశాంశ బిందువు చూపబడలేదు; అది (కుడివైపు) చివర ఉంటుందని మనం డోహిస్తో. అక్కడ నుండి, ఎడమవైపు ఉన్న అంకెలు 11 . ప్రామాణిక రూపంలో 10 యొక్క ఫూతాంకం $11 - 1 = 10$. సంఖ్య 5985.3 లో దశాంశ బిందువుకు ఎడమవైపున 4 అంకెలు ఉన్నాయి కనుక ప్రామాణిక రూపంలో 10 యొక్క ఫూతాంకం $4 - 1 = 3$.

అభ్యాసం 11.3

1. క్రింది సంఖ్యలను విస్తరణ రూపంలో రాయండి:

279404, 3006194, 2806196, 120719, 20068

2. విస్తరణ రూపంలో ఇవ్వబడిన ప్రతి దానికి వాటి సంఖ్యలను కనుగొనండి:

- (a) $8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$
- (b) $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^0$
- (c) $3 \times 10^4 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^0$
- (d) $9 \times 10^5 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1$



3. క్రింది సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

- | | | |
|-----------------|----------------|----------------------|
| (i) 5,00,00,000 | (ii) 70,00,000 | (iii) 3,18,65,00,000 |
| (iv) 3,90,878 | (v) 39087.8 | (vi) 3908.78 |

4. క్రింది వాక్యాలలో కనబడే సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

- (a) భూమి మరియు చంద్రుని మధ్య దూరం $384,000,000$ మీ.
- (b) శూన్యంలో కాంతి వేగం $300,000,000$ మీ. / సె.
- (c) భూమి వ్యాసం $1,27,56,000$ మీ.
- (d) సూర్యుని వ్యాసం $1,400,000,000$ మీ.
- (e) ఒక సక్కుతుమండలంలోని సుమారుగా గల సక్కుత్రాలు $100,000,000,000$.
- (f) విశ్వం యొక్క వయస్సు సుమారుగా $12,000,000,000$ సంవత్సరాలుగా అంచనా వేయబడింది.
- (g) సూర్యుని నుండి పాలవుంత కేంద్రానికి మధ్య గల దూరం $300,000,000,000,000,000,000$ మీ. అని అంచనా వేయబడింది.
- (h) 1.8 గ్రా. ల బరువు గల ఒక నీటి బిందువులో $60,230,000,000,000,000,000,000$ అఱవులు కలవని అంచనా వేయబడింది.
- (i) భూమిపై గల సముద్రపు నీరు $1,353,000,000$ క్యాబిక్ కి.మీ.
- (j) మార్చి 2001 లో భారతదేశ జనాభా సుమారుగా $1,027,000,000$.

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

- Very large numbers are difficult to read, understand, compare and operate upon. To make all these easier, we use exponents, converting many of the large numbers in a shorter form.
- The following are exponential forms of some numbers?

$$10,000 = 10^4 \text{ (read as 10 raised to 4)}$$

$$243 = 3^5, 128 = 2^7.$$

Here, 10, 3 and 2 are the bases, whereas 4, 5 and 7 are their respective exponents. We also say, 10,000 is the 4th power of 10, 243 is the 5th power of 3, etc.

- Numbers in exponential form obey certain laws, which are:

For any non-zero integers a and b and whole numbers m and n ,

$$(a) a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(b) a^m \div a^n = a^{m-n}, \quad m > n$$

$$(c) (a^m)^n = a^{mn}$$

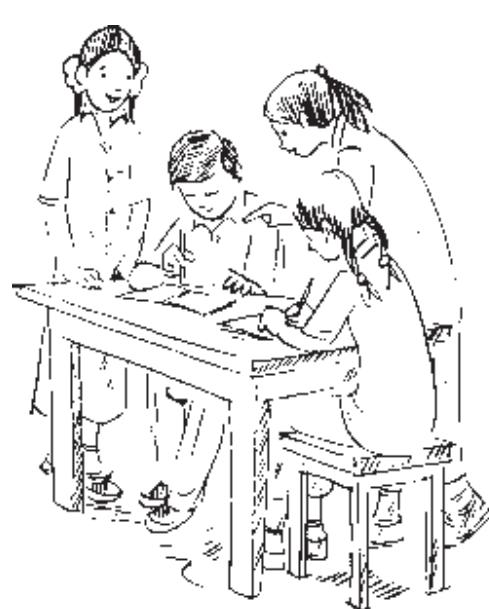
$$(d) a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$(e) a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(f) a^0 = 1$$

$$(g) (-1)^{\text{even number}} = 1$$

$$(-1)^{\text{odd number}} = -1$$



మనం ఏం చర్చించాం?

- చాలా పెద్ద సంఖ్యలను చదవడం, అర్థం చేసుకోవడం, పోల్చడం మరియు వాటిపై పరిశ్రమలు చేయడం కష్టం. వీటన్నింటినీ సులభతరం చేయడానికి, మనం ఘూతాంకాలను ఉపయోగించి అనేక పెద్ద సంఖ్యలను కనిప్పు రూపంలోకి మారుస్తాం.
- క్రిందివి కొన్ని సంఖ్యల ఘూతాంక రూపాలు

$$10,000 = 10^4 \quad (10 \text{ ని } 4 \text{ వ ఘూతానికి పెంచబడింది అని చదువుతారు)$$

$$243 = 3^5, \quad 128 = 2^7.$$

ఇచ్చట 10, 3 మరియు 2 లు ఘూతాలు 4, 5 మరియు 7 లు వరుసగా వాటి ఘూతాంకాలు 10,000 అనేది 10 యొక్క 4వ ఘూతం, 243 అనేది 3 యొక్క 5వ ఘూతాంకం మొదలైనవి.

- ఘూతాంక రూపంలో ఉన్న సంఖ్యలు కొన్ని న్యాయాలను పాటిస్తాయి. a మరియు b లు ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్యలు m మరియు n లు పూర్ణాంకాలైన,

$$(a) \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(b) \quad a^m \div a^n = a^{m-n}, \quad m > n$$

$$(c) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(d) \quad a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$(e) \quad a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b} \right)^m$$

$$(f) \quad a^0 = 1$$

$$(g) \quad (-1)^{\text{సహస్ర సంఖ్య}} = 1$$

$$(-1)^{\text{బేసి సంఖ్య}} = -1$$

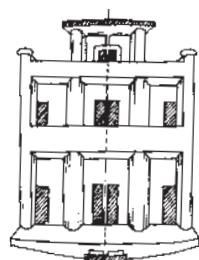


Symmetry

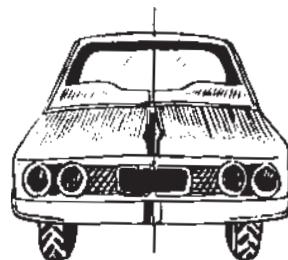


12.1 INTRODUCTION

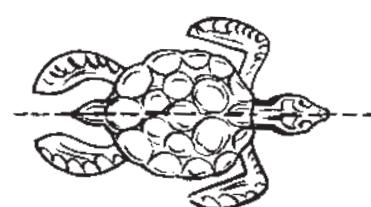
Symmetry is an important geometrical concept, commonly exhibited in nature and is used almost in every field of activity. Artists, professionals, designers of clothing or jewellery, car manufacturers, architects and many others make use of the idea of symmetry. The beehives, the flowers, the tree-leaves, religious symbols, rugs, and handkerchiefs — everywhere you find symmetrical designs.



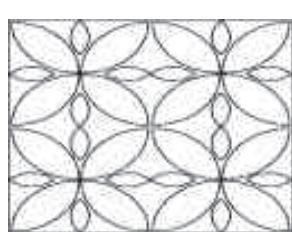
Architecture



Engineering



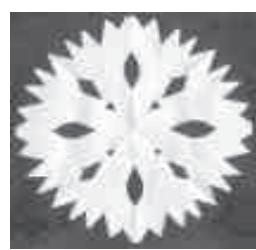
Nature



Compose a picture-album showing symmetry.



Create some colourful Ink-dot devils



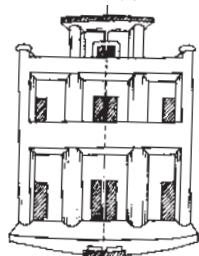
Make some symmetrical paper-cut designs.

సౌష్టవం

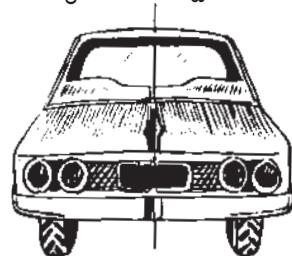


12.1 పరిచయం

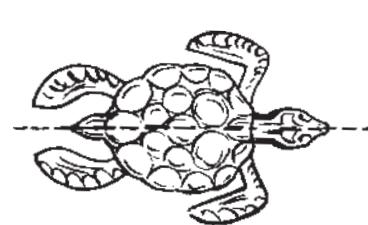
సౌష్టవం అనేది ఒక ముఖ్యమైన రేభాగణిత భావన, ఇది సాధారణంగా ప్రకృతిలో ప్రదర్శించబడుతుంది మరియు దాదాపు ప్రతి కార్యాచరణరంగంలో ఉపయోగించబడుతుంది. కళాకారులు, నిపుణులు, దుస్తులు లేదా ఆభరణాల డిజైనర్లు, కారు తయారీదారులు, వాస్తుశిల్పులు మరియు చాలా మంది సౌష్టవం అనే ఆలోచనను ఉపయోగిస్తారు. తేనెపట్టులు, పువ్వులు, చెట్లు ఆకులు, మతపరమైన చివ్వీలు, రగ్గులు మరియు చేతి రుమాళ్లు - మీరు ప్రతిచోటూ సౌష్టవ రూపకల్పనలను కనుగొంటారు.



అర్ధపీఠాలు



ఆంజనీరింగ్

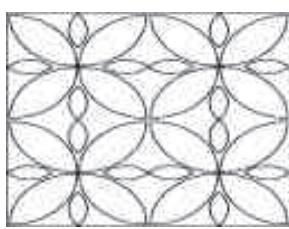


ప్రకృతి

మీ మునుపటి తరగతిలో మీరు ఇప్పటికే రేఖ సౌష్టవం యొక్క ‘అనుభూతిని’ పొందారు.

ఒక పటం యొక్క రెండు భాగాలు ఒకే విధంగా ఉండేటట్లు, ఒక రేఖ వెంబడి పటం మడతపెట్టబడి ఉంటే, ఆ పటంకు ఒక రేఖ సౌష్టవం ఉంటుంది.

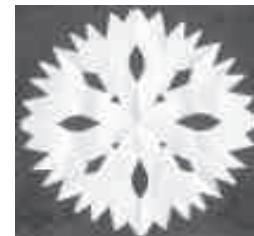
మీరు ఈ ఆలోచనలను గుర్తు చేసుకోవాలనుకోవచ్చు. మీకు సహాయపడే కొన్ని కృత్యాలు ఇక్కడ ఉన్నాయి.



సౌష్టవాన్ని చూపించే పిక్చర్
అల్గోరియం కంపోజెంట్ చేయండి.



కొన్ని రంగురంగుల ఇంక్
డాట్ డెవిల్స్ సృష్టించండి.

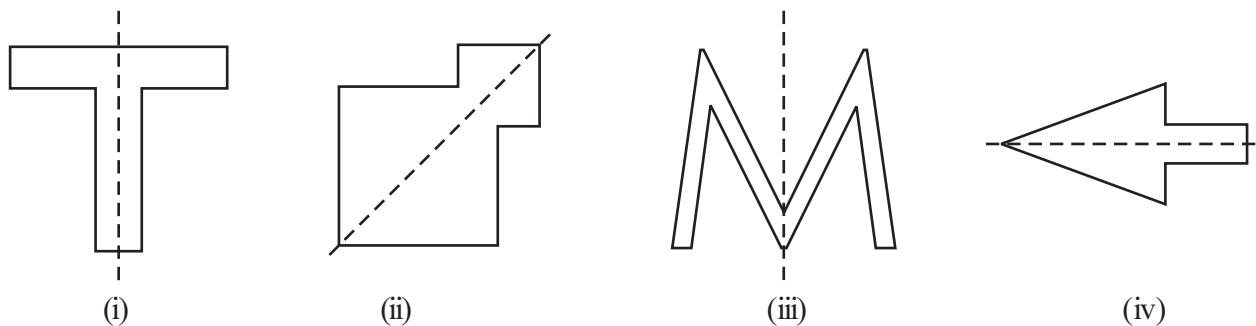


కొన్ని సౌష్టవంగా కత్తిరించిన కాగితపు
డిజైన్సును తయారు చేయండి

128 SYMMETRY

Enjoy identifying lines (also called axes) of symmetry in the designs you collect.

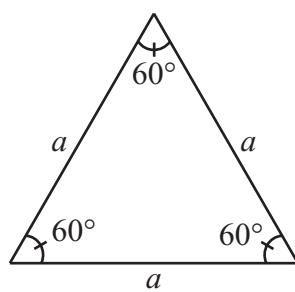
Let us now strengthen our ideas on symmetry further. Study the following figures in which the lines of symmetry are marked with dotted lines. [Fig 12.1 (i) to (iv)]

**Fig 12.1****12.2 LINES OF SYMMETRY FOR REGULAR POLYGONS**

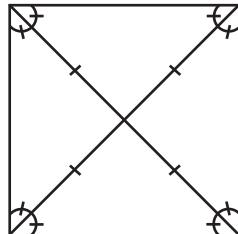
You know that a polygon is a closed figure made of several line segments. The polygon made up of the least number of line segments is the triangle. (Can there be a polygon that you can draw with still fewer line segments? Think about it).

A polygon is said to be regular if all its sides are of equal length and all its angles are of equal measure. Thus, an equilateral triangle is a regular polygon of three sides. Can you name the regular polygon of four sides?

An equilateral triangle is regular because each of its sides has same length and each of its angles measures 60° (Fig 12.2).

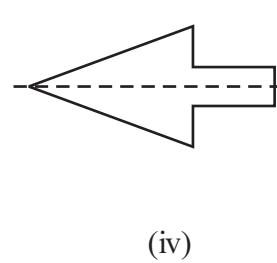
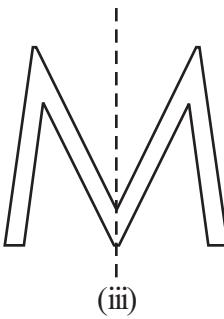
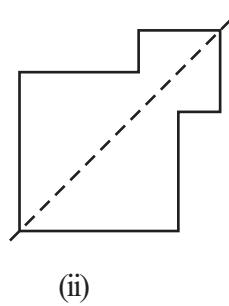
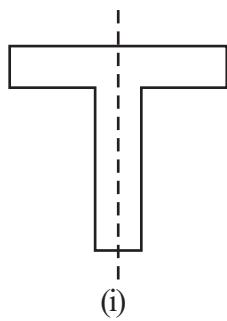
**Fig 12.2**

A square is also regular because all its sides are of equal length and each of its angles is a right angle (i.e., 90°). Its diagonals are seen to be perpendicular bisectors of one another (Fig 12.3).

**Fig 12.3**

మీరు నేకరించే డిజెనలో సౌష్టవం యొక్క రేఖలను (అణ్ణలు అని కూడా పిలుస్తారు) గుర్తించడాన్ని ఆస్యాదించండి.

సౌష్టవంపై మన ఆలోచనలను ఇప్పుడు మరింత బలోపేతం చేద్దాం. సౌష్టవ రేఖలను చుక్కల రేఖలతో మార్కు చేయబడ్డ దిగువ పటాలను అధ్యయనం చేయండి. [పటం 12.1 (i) to (iv)]



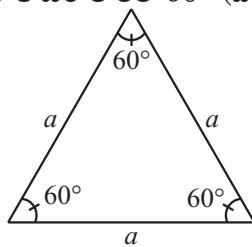
పటం 12.1

12.2 క్రమ బహుభుజిల సౌష్టవ రేఖలు

బహుభుజి అనేక రేఖాఖండాలతో తయారు చేయబడిన సంవృత పటం అని మీకు తెలుసు. అతి తక్కువ రేఖాఖండాలతో ఏర్పడిన బహుభుజి త్రిభుజం అగును. (ఇంకా తక్కువ రేఖాఖండాలతో గీయగల బహుభుజి ఉండా? దాని గురించి ఆలోచించండి).

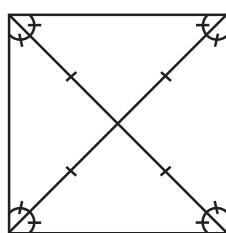
బహుభుజి యొక్క అన్ని భుజాలు సమాన పొడవు మరియు అన్ని కోణాలు సమాన కొలతను కలిగి ఉంటే దానిని క్రమ బహుభుజిగా పేర్కొంటారు. అందువల్ల, సమబాహు త్రిభుజం మూడు భుజాల గల క్రమ బహుభుజి అగును. నాలుగు భుజాల గల క్రమ బహుభుజి పేరు చెప్పగలరా?

ఒక సమబాహు త్రిభుజం క్రమ బహుభుజిగా ఆవుతుంది. ఎందుకంటే దాని భుజాలు ఒకే పొడవును కలిగి ఉంటుంది మరియు దాని యొక్క ప్రతి కోణం కోణం 60° (పటం 12.2).



పటం 12.2

ఒక చతురంగం కూడా క్రమం బహుభుజి అగును. ఎందుకంటే దాని భుజాలన్నీ సమాన పొడవును కలిగి ఉంటాయి మరియు దాని కోణాలు ప్రతి ఒక్కటి లంబ కోణం (అనగా 90°) అగును. దీని కర్ణాలు ఒకదానికొకటి లంబసమద్విఖండన రేఖలుగా కనిపిస్తున్నాయి. (పటం 12.3)



పటం 12.3

If a pentagon is regular, naturally, its sides should have equal length. You will, later on, learn that the measure of each of its angles is 108° (Fig 12.4).

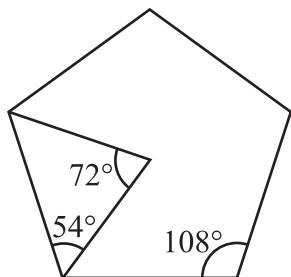


Fig 12.4

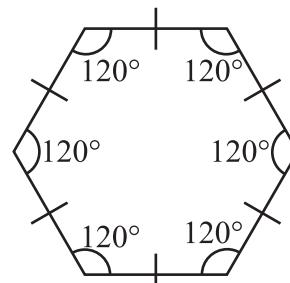


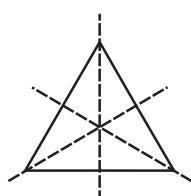
Fig 12.5

A regular hexagon has all its sides equal and each of its angles measures 120° . You will learn more of these figures later (Fig 12.5).

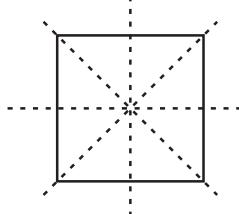
The regular polygons are symmetrical figures and hence their lines of symmetry are quite interesting.

Each regular polygon has as many lines of symmetry as it has sides [Fig 12.6 (i) - (iv)]. We say, they have multiple lines of symmetry.

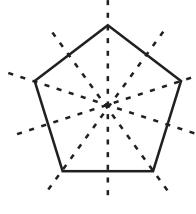
three lines of symmetry

Equilateral Triangle
(i)

four lines of symmetry

Square
(ii)

five lines of symmetry

Regular Pentagon
(iii)

six lines of symmetry

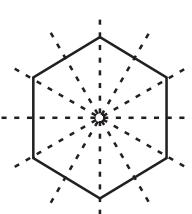
Regular Hexagon
(iv)

Fig 12.6

Perhaps, you might like to investigate this by paper folding. Go ahead!

The concept of line symmetry is closely related to mirror reflection. A shape has line symmetry when one half of it is the mirror image of the other half (Fig 12.7). A mirror line, thus, helps to visualise a line of symmetry (Fig 12.8).

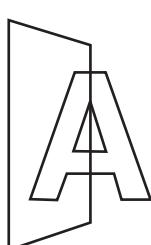
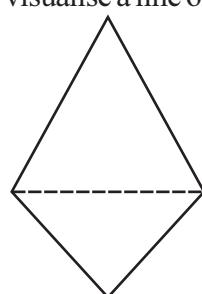
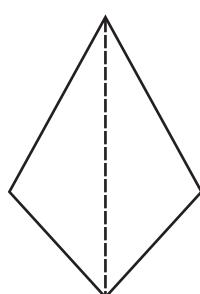


Fig 12.7



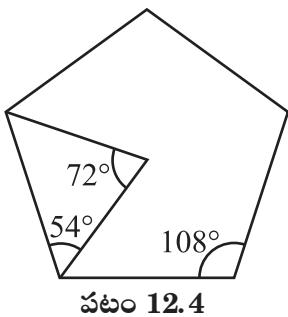
Is the dotted line a mirror line? No.



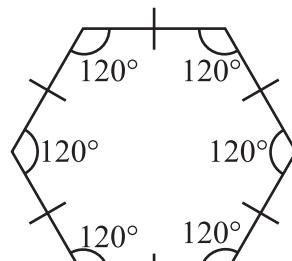
Is the dotted line a mirror line? Yes.

Fig 12.8

పంచభుజి ఒక బహుభుజి అయితే, సహజంగానే, దాని భుజాలు సమాన పొడవును కలిగి ఉండాలి. తరువాత, దాని ప్రతి కోణం కొలత 108° (పటం 12.4) అని మీరు నేర్చుకుంటారు.



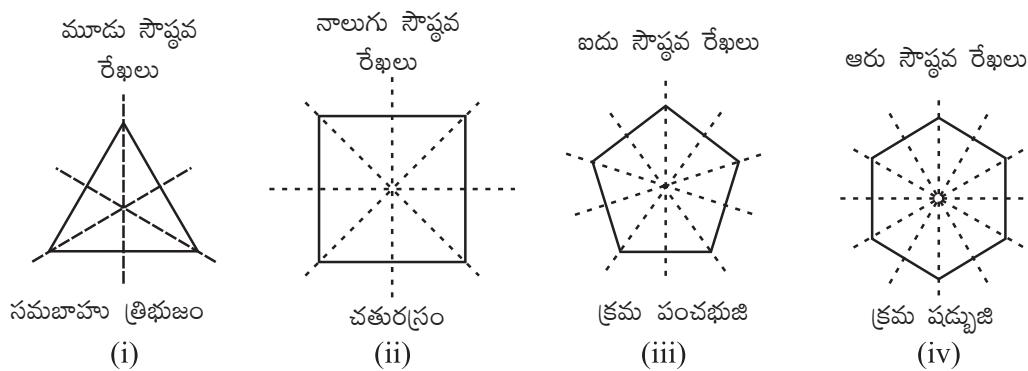
పటం 12.4



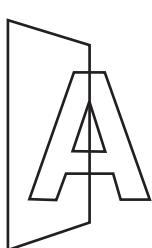
పటం 12.5

ఒక క్రమపద్ధుజి దాని యొక్క అన్ని భుజాలను సమానంగా కలిగి ఉంటుంది మరియు దాని యొక్క ప్రతి కోణం కొలత 120° . ఈ బహుభుజిల గురించి మీరు తరువాత మరింతగా నేర్చుకుంటారు. (పటం 12.5).

క్రమ బహుభుజాలు సౌష్టవ ఆకారాలు, అందువల్ల వాటి సౌష్టవ రేఖలు చాలా ఆసక్తికరంగా ఉంటాయి, ప్రతి క్రమ బహుభుజి భుజాల సంఖ్యకు సమానంగా సౌష్టవ రేఖలను కలిగి ఉంటుంది. [పటం 12.6 (i) అవి చాలా సౌష్టవరేఖలను కలిగి ఉన్నాయని మనం చెబుతాము.



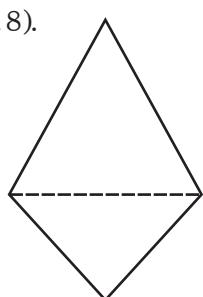
పటం 12.6



పటం 12.7

బహుశా, మీరు దీనిని కాగితం మడతపెట్టడం ద్వారా పరిశోధించవచ్చు. ముందుకు సాగండి!

రేఖ సౌష్టవం అనే భావన అద్దం పరావర్తనంతో దగ్గరి సంబంధం కలిగి ఉంటుంది. ఒక ఆకారంలో సగం మరొక సగం యొక్క అద్దం ప్రతిబింబం అయినప్పుడు ఒక ఆకారం రేఖ సౌష్టవాన్ని కలిగి ఉంటుంది. (పటం 12.7). అందువల్ల, ఒక ప్రతిబింబ రేఖ సౌష్టవ రేఖను దృశ్యరూపం చేయడానికి సహాయపడుతుంది (పటం 12.8).



పటం 12.8

చుక్కల రేఖ ప్రతిబింబ రేఖ అవుతుందా? కాదు

చుక్కల రేఖ ప్రతిబింబ రేఖ అవుతుందా? అవును

While dealing with mirror reflection, care is needed to note down the left-right changes in the orientation, as seen in the figure here (Fig 12.9).

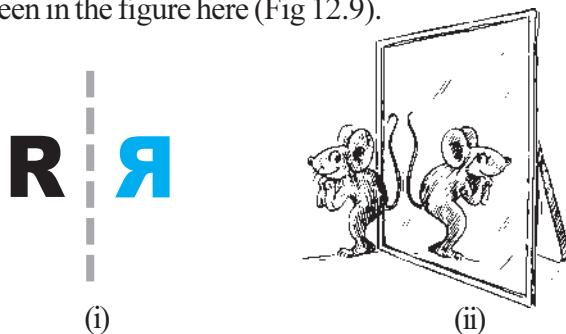
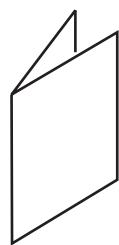


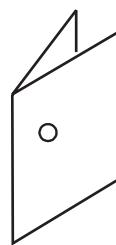
Fig 12.9

The shape is same, but the other way round!

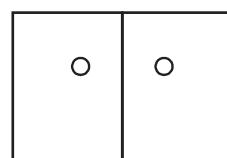
Play this punching game!



Fold a sheet into two halves



Punch a hole



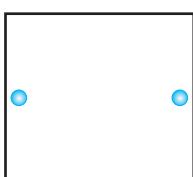
two holes about the
symmetric fold.

Fig 12.10

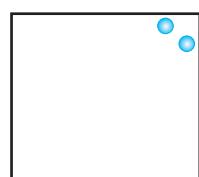
The fold is a line (or axis) of symmetry. Study about punches at different locations on the folded paper and the corresponding lines of symmetry (Fig 12.10).

EXERCISE 12.1

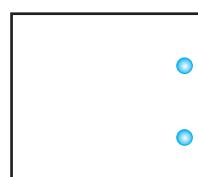
- Copy the figures with punched holes and find the axes of symmetry for the following:



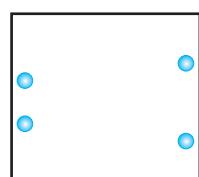
(a)



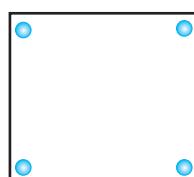
(b)



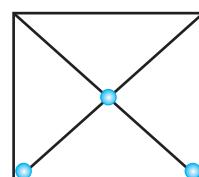
(c)



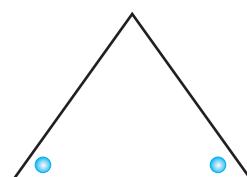
(d)



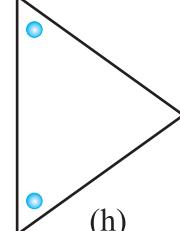
(e)



(f)



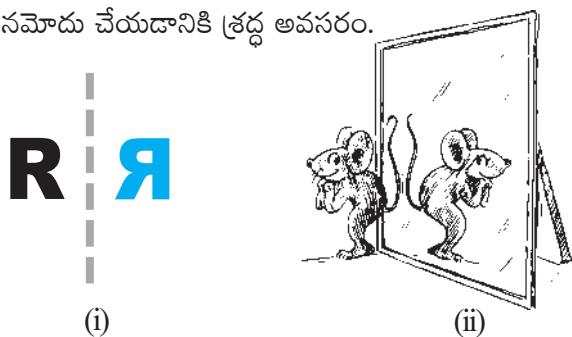
(g)



(h)



దర్శణ పరావర్తనంతో వ్యవహారించేటప్పుడు, ఇక్కడ పటంలో (పటం 12.9) చూసినట్లుగా దిశాక్రమంలో ఎడమ-కుడి మార్పులను నమోదు చేయడానికి త్రచ్ఛ అవసరం.



పటం 12.9

ఆకారం ఒకేలా ఉంటుంది, కానీ మరొక విధంగా ఇంకో వైపుకు తిరిగి ఉంది!

ఈ పంచింగ్ గేమ్సు ఆడండి.

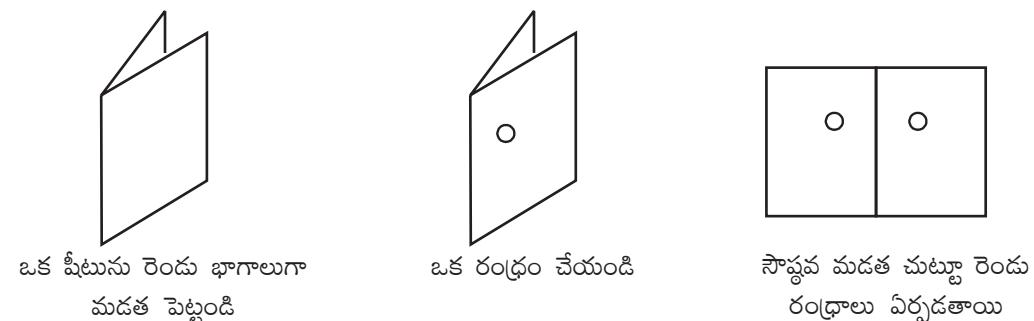
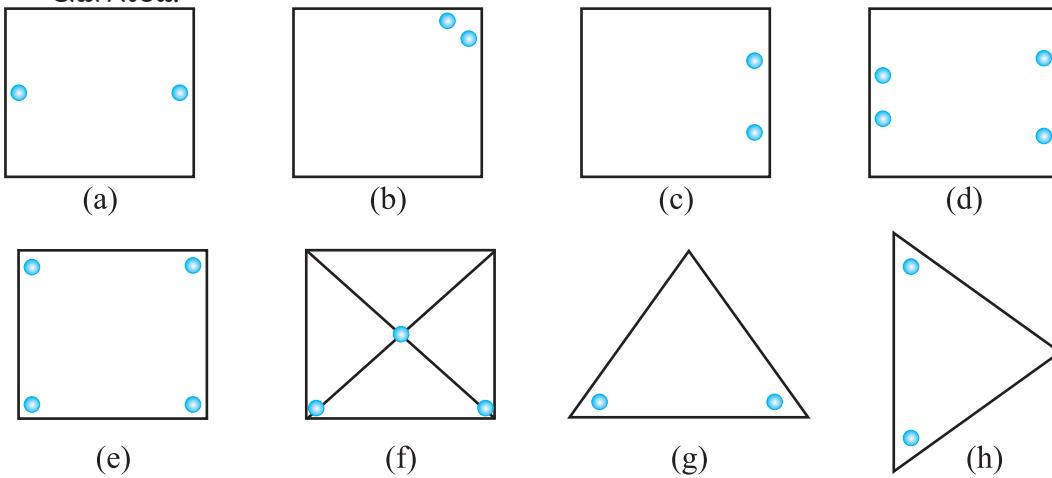


Fig 12.10

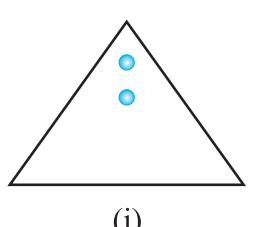
మడత అనేది సౌష్టవం యొక్క రేఖ (లేదా ఆక్షం). మడత పెట్టిన కాగితంపై వివిధ ప్రదేశాలలో పంచ చేసిన రంధ్రాలు మరియు సంబంధిత సౌష్టవ రేఖల గురించి అధ్యయనం చేయండి (పటం 14.10).

అభ్యాసం 12.1

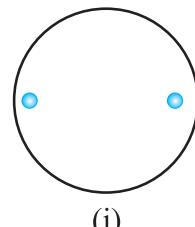
1. పంచ చేసిన రంధ్రాలతో గల ఇదే బొమ్మలను మరల గీయండి. ఈ క్రింది వాటికి సౌష్టవాక్షాలను కనుగొనడి:



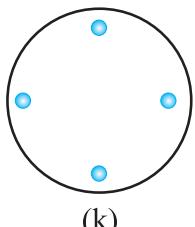
134 SYMMETRY



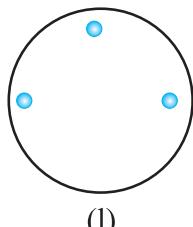
(i)



(j)

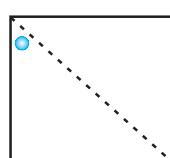


(k)

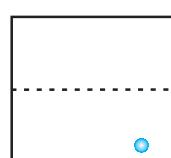


(l)

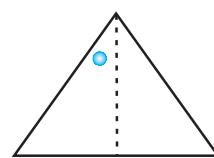
2. Given the line(s) of symmetry, find the other hole(s):



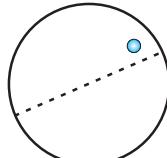
(a)



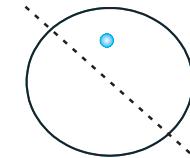
(b)



(c)



(d)



(e)

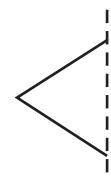
3. In the following figures, the mirror line (i.e., the line of symmetry) is given as a dotted line. Complete each figure performing reflection in the dotted (mirror) line. (You might perhaps place a mirror along the dotted line and look into the mirror for the image). Are you able to recall the name of the figure you complete?



(a)



(b)



(c)



(d)

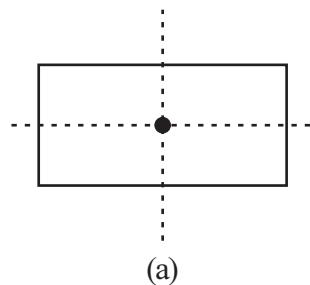


(e)

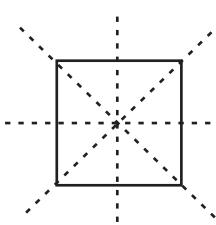


(f)

4. The following figures have more than one line of symmetry. Such figures are said to have multiple lines of symmetry.



(a)



(b)

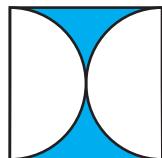


(c)

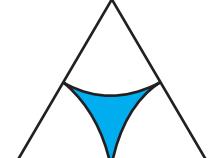
Identify multiple lines of symmetry, if any, in each of the following figures:



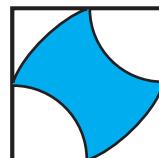
(a)



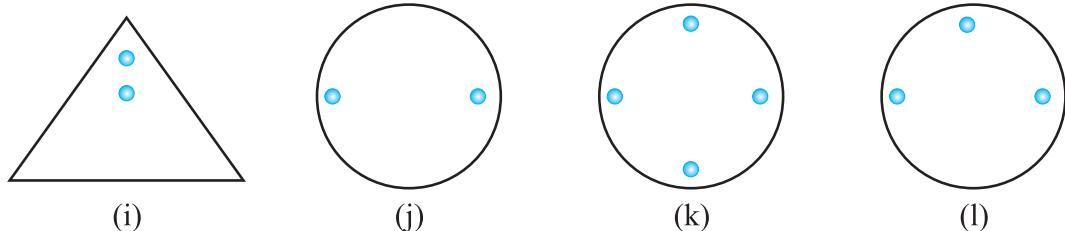
(b)



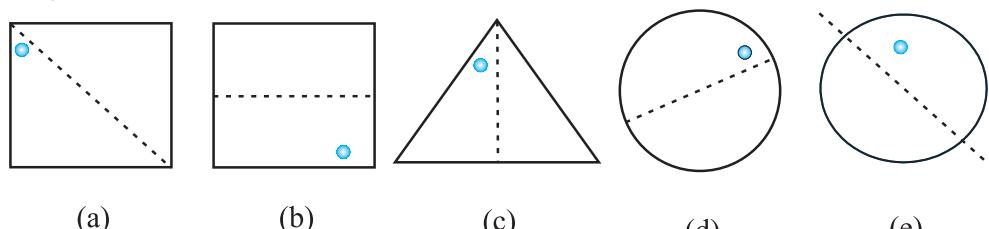
(c)



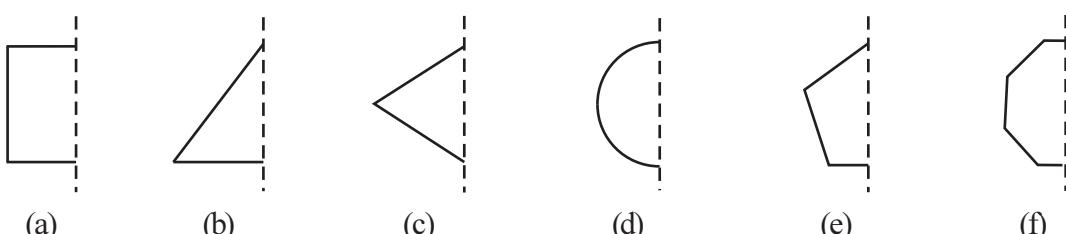
(d)



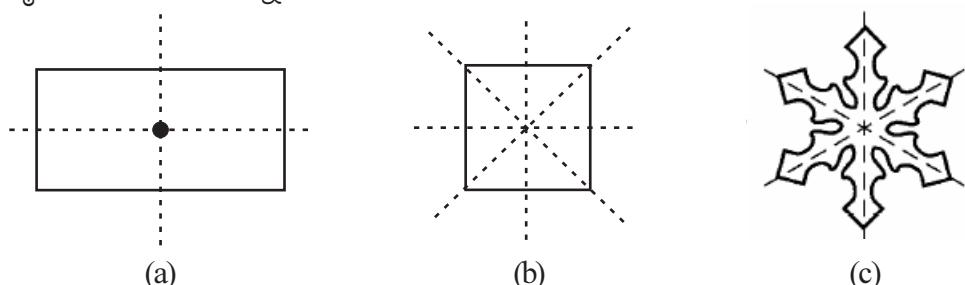
2. సౌష్టవం యొక్క రేఖలు ఇచ్చారు. మరొకరంద్రాన్ని (రంద్రాలను) కనుగొనండి:



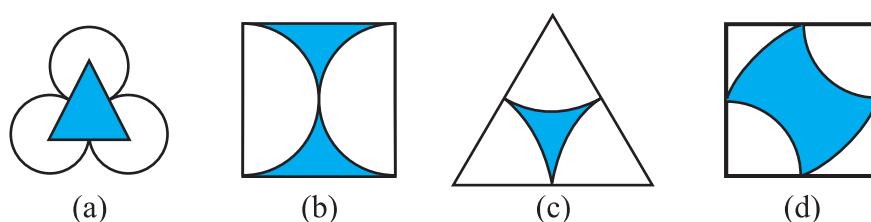
3. దిగువపటాల్లో, ప్రతిబింబాలు (అనగా, సౌష్టవ రేఖ) చుక్కల రేఖగా ఇవ్వబడింది. చుక్కల (ప్రతిబింబం) రేఖలో పరావర్తనం ప్రదర్శించే ప్రతి చిత్రాన్ని పూర్తి చేయండి. (మీకు చుక్కల రేఖ వెంట ఒక అద్దం ఉంచి మరియు చిత్రం కోసం అద్దంలోకి చూడవచ్చు). మీరు పూర్తి చేసిన పటం యొక్క పేరును గుర్తు తెచ్చుకోగలరా?



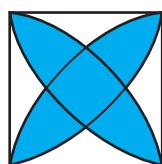
4. క్రింది చిత్రాలు ఒకటి కంటే ఎక్కువ సౌష్టవ రేఖలను కలిగి ఉన్నాయి. ఇటువంటి చిత్రాలు బహుళ సౌష్టవ రేఖలను కలిగి ఉన్నాయని అంటారు.



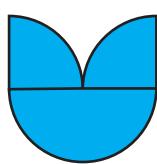
5. క్రింది ప్రతి పటంలో సౌష్టవం యొక్క బహుళ సౌష్టవరేఖలు ఏమైన వుంటే వాటిని గుర్తించండి.



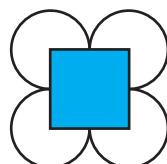
136 SYMMETRY



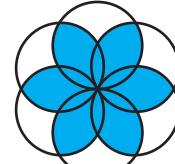
(e)



(f)



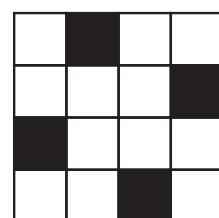
(g)



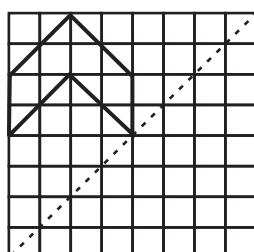
(h)

5. Copy the figure given here.

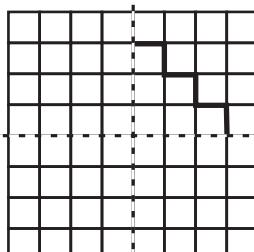
Take any one diagonal as a line of symmetry and shade a few more squares to make the figure symmetric about a diagonal. Is there more than one way to do that? Will the figure be symmetric about both the diagonals?



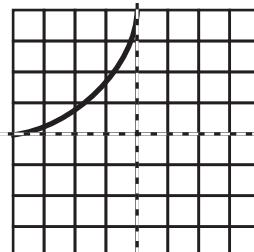
6. Copy the diagram and complete each shape to be symmetric about the mirror line(s):



(a)



(b)



(c)

7. State the number of lines of symmetry for the following figures:

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------|------------------------|
| (a) An equilateral triangle | (b) An isosceles triangle | (c) A scalene triangle |
| (d) A square | (e) A rectangle | (f) A rhombus |
| (g) A parallelogram | (h) A quadrilateral | (i) A regular hexagon |
| (j) A circle | | |

8. What letters of the English alphabet have reflectional symmetry (i.e., symmetry related to mirror reflection) about.

- | | |
|--|-------------------------|
| (a) a vertical mirror | (b) a horizontal mirror |
| (c) both horizontal and vertical mirrors | |

9. Give three examples of shapes with no line of symmetry.

10. What other name can you give to the line of symmetry of
(a) an isosceles triangle? (b) a circle?

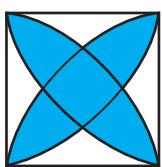
12.3 ROTATIONAL SYMMETRY

What do you say when the hands of a clock go round?

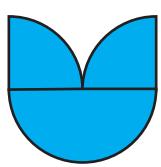
You say that they rotate. The hands of a clock rotate in only one direction, about a fixed point, the centre of the clock-face.

Rotation, like movement of the hands of a clock, is called a clockwise rotation; otherwise it is said to be anticlockwise.

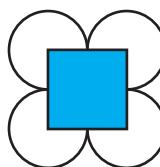




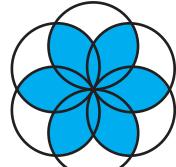
(e)



(f)



(g)

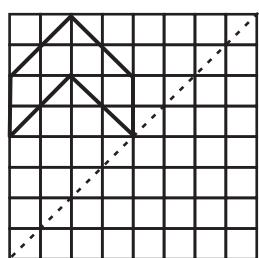
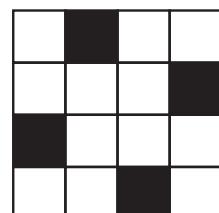


(h)

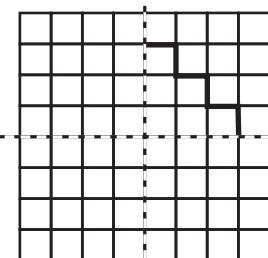
5. ఇక్కడ ఇవ్వబడ్డ పటాన్ని మరలా గీయండి.

ఏదైనా ఒక కర్ణాన్ని సొప్పవ రేఖగా తీసుకోండి మరియు పటం కర్ణం చుట్టూ సొప్పవంగా ఉండటానికి మరికొన్ని చతురస్రాకారాలను పేడ్ చేయండి. ఇలా చేయడానికి ఒకటి కంటే ఎక్కువ మార్గాలు ఉన్నాయా? పటం రెండు కర్ణాల పరంగా సొప్పవంగా ఉంటుందా?

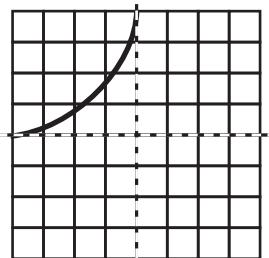
6. ఇదే పటాన్ని మరలా గీయండి మరియు అద్దం రేఖ(లు) దృష్టి సొప్పవంగా ఉండేలా ప్రతి ఆకారాన్ని పూర్తి చేయండి.



(a)



(b)



(c)

7. క్రింది పటాల సొప్పవ రేఖల సంఖ్యను పేరొన్నండి:

- | | | |
|-------------------------|------------------------------|---------------------------|
| (a) ఒక సమఖాహా త్రిభుజం | (b) ఒక సమాద్యి బాహా త్రిభుజం | (c) ఒక విషమ బాహా త్రిభుజం |
| (d) ఒక చతురప్రం | (e) ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారం | (f) ఒక రాంబస్ |
| (g) ఒక సమాంతర చతుర్భుజం | (h) ఒక చతుర్భుజం | (i) ఒక త్రమ సాధారణ షడ్యజి |
| (j) ఒక వృత్తం | | |

8. ఆంగ్ర అక్షరమాల లోని ఏ అక్షరాలు పరావర్తన సొప్పవాన్ని కలిగి ఉంటాయి (అనగా, ప్రతిచింబ పరావర్తనానికి సంబంధించిన సొప్పవం).

- | | |
|--------------------------------------|---------------------|
| (a) ఒక నిలవు అద్దం | (b) ఒక సమాంతర అద్దం |
| (c) సమాంతర మరియు నిలవు అద్దాలు రెండూ | |

9. సొప్పవ రేఖ లేని ఆకారాలకు మూడు ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

10. (a) ఒక సమాద్యి బాహా త్రిభుజం (b) ఒక వృత్తం
ల సొప్పవ రేఖలకు మీరు వేరే ఏ వేరు పెట్టగలరు?

12.3 భ్రమణ సొప్పవం

గడియారం యొక్క ముల్లు చుట్టూ తిరుగుతున్నప్పుడు మీరు ఏమి చెబుతారు?

అవి భ్రమణంలో వున్నాయని మీరు చెబుతారు. ఒక గడియారం యొక్క ముల్లుగడియారం కేంద్రం వద్ద ఒక స్థిర బిందువు ఆధారంగా ఒక దిశలో మాత్రమే తిరుగుతాయి.

భ్రమణ, గడియారం ముల్లు చలన దిశలో వలె ఉంటే దానిని సవ్య దిశలో భ్రమణం అని, అట్లా కాకపోతే అపసవ్య దిశలో భ్రమణం అని అంటారు.



What can you say about the rotation of the blades of a ceiling fan? Do they rotate clockwise or anticlockwise? Or do they rotate both ways?

If you spin the wheel of a bicycle, it rotates. It can rotate in either way: both clockwise and anticlockwise. Give three examples each for (i) a clockwise rotation and (ii) anticlockwise rotation.

When an object rotates, its shape and size do not change. The rotation turns an object about a fixed point. This fixed point is the **centre of rotation**. What is the centre of rotation of the hands of a clock? Think about it.

The angle of turning during rotation is called the **angle of rotation**. A full turn, you know, means a rotation of 360° . What is the degree measure of the angle of rotation for (i) a half-turn? (ii) a quarter-turn?

A half-turn means rotation by 180° ; a quarter-turn is rotation by 90° .

When it is 12 O'clock, the hands of a clock are together. By 3 O'clock, the minute hand would have made three complete turns; but the hour hand would have made only a quarter-turn. What can you say about their positions at 6 O'clock?

Have you ever made a paper windmill? The Paper windmill in the picture looks symmetrical (Fig 12.11); but you do not find any line of symmetry. No folding can help you to have coincident halves. However if you rotate it by 90° about the fixed point, the windmill will look exactly the same. We say the windmill has a **rotational symmetry**.

Fig 12.11

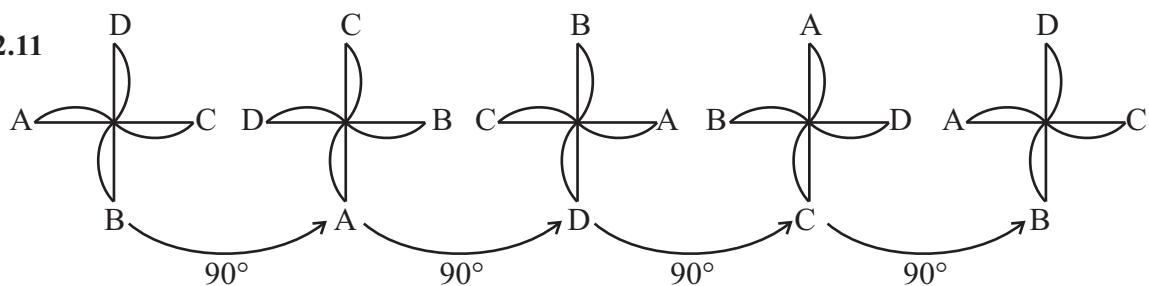


Fig 12.12

In a full turn, there are precisely **four positions** (on rotation through the angles 90° , 180° , 270° and 360°) when the windmill looks exactly the same. Because of this, we say it has a rotational symmetry of order 4.

Here is one more example for rotational symmetry.

Consider a square with P as one of its corners (Fig 12.13).

Let us perform quarter-turns about the centre of the square marked **x**.

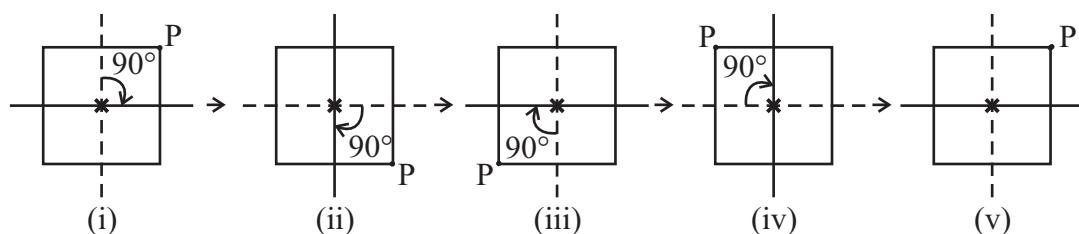


Fig 12.13

సీలింగ్ ఫ్యాన్ యొక్క రెక్కల భ్రమణం గురించి మీరు ఏమి చెబుతారు? అవి సవ్య దిశలో తిరుగుతాయా లేదా అపసవ్య దిశలో తిరుగుతాయా? లేదా అవి రెండు దిశలలో తిరుగుతాయా?

మీరు సైకిల్ యొక్క చక్రాన్ని తిప్పితే, అది భ్రమణం చెందుతుంది. ఇది రెండు విధాలుగా సవ్య దిశలో మరియు అపసవ్య దిశలోనే విధంగానైనా తిరుగుతుంది. (i) సవ్య దిశలో భ్రమణం మరియు (ii) అపసవ్య దిశలో భ్రమణానికి మూడు ఉడాహరణలు ఇవ్వండి.

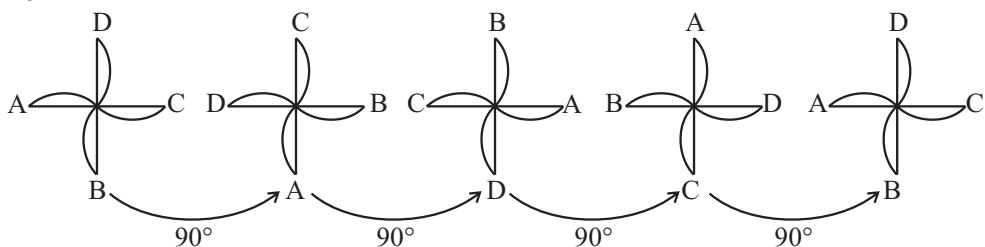
ఒక వస్తువు భ్రమణం చెందినప్పుడు, దాని ఆకారం మరియు పరిమాణం మారవు. భ్రమణం ఒక వస్తువును ఒక స్థిర బిందువు చుట్టూ తిప్పుతుంది. ఈ స్థిర బిందువు భ్రమణం యొక్క కేంద్రం. గడియారం యొక్క ముల్లు భ్రమణ కేంద్రం ఎది? దీని గురించి ఆలోచించండి.

భ్రమణ సమయంలో తిరిగే కోణాన్ని భ్రమణ కోణం అంటారు. మీకు తెలుసా, పూర్తి భ్రమణం అంటే 360° భ్రమణం అని మీకు తెలుసు. (i) అర్ధ భ్రమణం (ii) ఒక పాపు భ్రమణంల భ్రమణ కోణపు కొలఱింత?

అర్ధ భ్రమణం అంటే 180° భ్రమణం అని అర్థం; ఒక పాపు భ్రమణం 90° భ్రమణాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

12 గంటలు అయినప్పుడు, ఒక గడియారం యొక్క ముల్లు కలిసి ఉంటాయి. 3 గంటలప్పుడు, నిమిపం ముల్లు మూడు పూర్తి భ్రమణాలు తిరుగుతుంది; కానీ, గంటల ముల్లుపాపు భ్రమణం మాత్రమే చేస్తుంది. 6 గంటలకు వాటి స్థానాల గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

మీరు ఎప్పుడైనా కాగితం గాలిమరను తయారు చేశారా? చిత్రంలోని కాగితం గాలిమర సౌష్టవంగా కనిపిస్తుంది (పటం 12.11); కానీ మీరు ఏ సౌష్టవం రేఖను కనుగొనలేదు. ఏ విధంగా మడతపెట్టడం కూడా మీకు ఒకేరకమైన అర్ధ భాగాలను కలిగి ఉండటానికి సహాయపడదు. అయితే మీరు దానిని స్థిర బిందువు చుట్టూ 90° తిప్పినట్టయితే, గాలిమర సరిగ్గా ఒకే విధంగా కనిపిస్తుంది. గాలిమరకు భ్రమణ సౌష్టవం ఉండని మనం చెప్పవచ్చును.

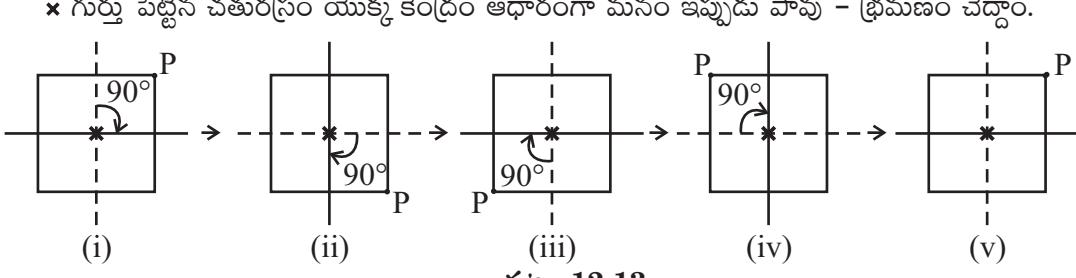


పటం 12.12

పూర్తి భ్రమణంలో, గాలిమర సరిగ్గా నాలుగు స్థానాలు (90° , 180° , 270° మరియు 360° కోణాల భ్రమణంలో) వద్ద ఖచ్చితంగా గాలిమర ఒకే విధంగా కనిపిస్తుంది. ఈ కారణంగా, ఇది 4 వ పరిమాణ భ్రమణ సౌష్టవానికి ఇక్కడ మరొక ఉడాహరణ ఉంది.

ఒక మూల P పున్న ఒక చతురస్రాన్ని తీసుకోండి (పటం 12.13).

* గుర్తు పెట్టిన చతురస్రం యొక్క కేంద్రం ఆధారంగా మనం ఇప్పుడు పాపు - భ్రమణం చేద్దాం.



పటం 12.13

Fig 12.13 (i) is the initial position. Rotation by 90° about the centre leads to Fig 12.13 (ii). Note the position of P now. Rotate again through 90° and you get Fig 12.13 (iii). In this way, when you complete four quarter-turns, the square reaches its original position. It now looks the same as Fig 12.13 (i). This can be seen with the help of the positions taken by P.

Thus a square has a **rotational symmetry of order 4** about its centre. Observe that in this case,

- (i) The centre of rotation is the centre of the square.
- (ii) The angle of rotation is 90° .
- (iii) The direction of rotation is clockwise.
- (iv) The order of rotational symmetry is 4.

TRY THESE

1. (a) Can you now tell the order of the rotational symmetry for an equilateral triangle? (Fig 12.14)

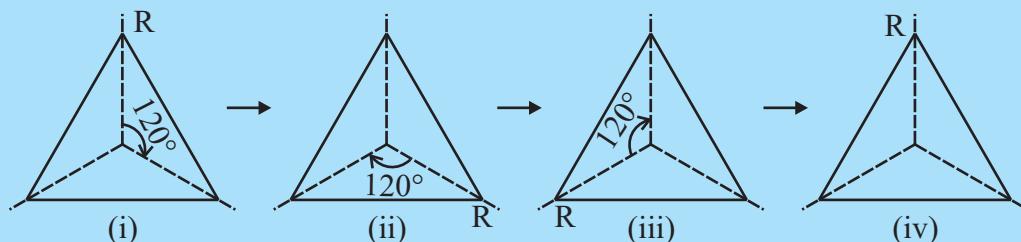


Fig 12.14



- (b) How many positions are there at which the triangle looks exactly the same, when rotated about its centre by 120° ?
2. Which of the following shapes (Fig 12.15) have rotational symmetry about the marked point.

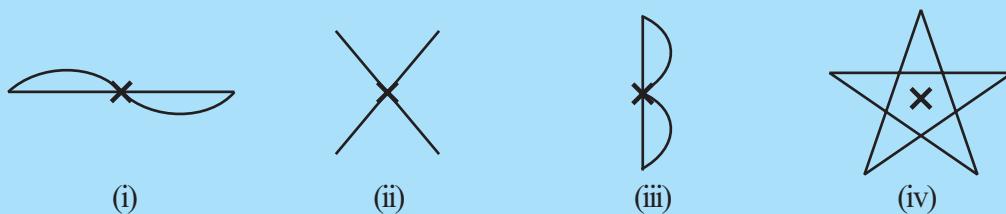


Fig 12.15

Do This

Draw two identical parallelograms, one-ABCD on a piece of paper and the other A' B' C' D' on a transparent sheet. Mark the points of intersection of their diagonals, O and O' respectively (Fig 12.16).

Place the parallelograms such that A' lies on A, B' lies on B and so on. O' then falls on O.



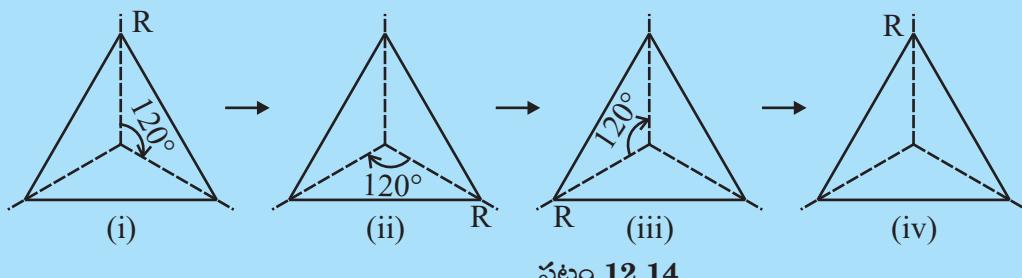
పటం 12.13 (i) అనేది ప్రథమ స్థానం. కేంద్రం చుట్టూ 90° భ్రమణం చేసినప్పుడు పటం 12.13 (ii)కు దారితీస్తుంది. ఇప్పుడు P యొక్క స్థానాన్ని గమనించండి. 90° గుండా తిరిగి తిప్పండి మరియు మీరు పటం 12.13 (iii)ను పొందుతారు. ఈ విధంగా, మీరు నాలుగు పావు భ్రమణాలను పూర్తి చేసినప్పుడు, చతురప్రందాని అసలు స్థానానికి చేరుకుంటుంది. ఇది ఇప్పుడు పటం 12.13 (i)మాదిరిగానే కనిపిస్తుంది. దీనిని P స్థానాల సహాయంతో చూడవచ్చును.

ఆందువల్ల ఒక చతురస్రం దాని కేంద్రం చుట్టూ 4 వ పరిమాణ భ్రమణ సౌష్టవాన్ని కలిగి ఉంటుంది. ఈ సందర్భంలో గమనించండి,

- (i) భ్రమణం యొక్క కేంద్రం చతురప్రం యొక్క కేంద్రం అగును.
 - (ii) భ్రమణ కోణం 90° .
 - (iii) భ్రమణ దిశ సవ్యదిశ లో ఉంటుంది.
 - (iv) భ్రమణ సౌస్థల పరిమాణం 4 అగును.

ప్రయత్నించండి

1. (a) సమఖ్యల త్రిభుజం యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణాన్ని మీరు ఇప్పుడు చెప్పగలరా? (పటం 12.14)

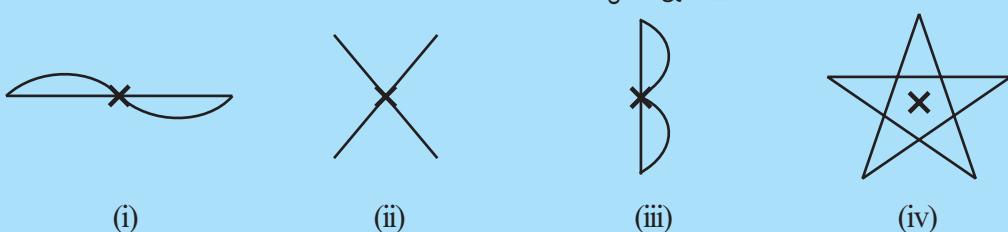


పటం 12.14

A black and white line drawing of a young girl with short hair, wearing a light-colored shirt. She is looking down at a small object she is holding in her hands. The style is simple and illustrative.

(b) త్రిభుజంను దాని కేంద్రం చుట్టూ 120° త్రిప్పినవ్వుడు, ఖచ్చితంగా ఒకే విధంగా కనిపించే స్థానాలు ఎన్ని ఉన్నాయి?

2. ఈ కింది ఆకారాలలో (పటం 12.15) ఏవి భ్రమణ సౌష్టవాన్ని గుర్తించిన బిందువు ఆధారంగా కలిగి ఉన్నాయి.



పట్టం 12.15

ಇವಿ ಚೆಯಂಡಿ

బిభేదమైన రెండు సమాంతర చతుర్యజాలను గీయండి, వాటిలో ఒకటి ABCD ని ఒక కాగితం ముక్కపై మరియు మరొకటి A' B' C' D' ని పారదర్శక పీటు పై గీయండి. వాటి కర్ణాల యొక్క ఖండన బిందువులను వరుసగా O లేదా మరియు O' (పటం 12.16)లుగా గుర్తించండి.

A పై A' ఉండేటట్లు, B ను B' పై ఉండేటట్లు సమాంతర చతుర్భుజాలను ఉంచండి. అప్పుడు O పై O' మీద ఉంటుంది.



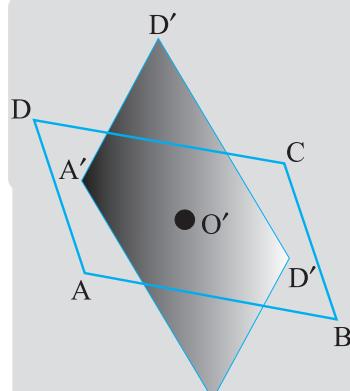


Fig 12.16

Stick a pin into the shapes at the point O.

Now turn the transparent shape in the clockwise direction.

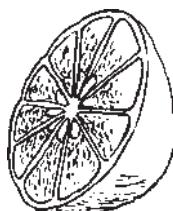
How many times do the shapes coincide in one full round?

What is the order of rotational symmetry?

The point where we have the pin is the centre of rotation. It is the intersecting point of the diagonals in this case.

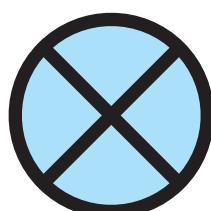
Every object has a rotational symmetry of order 1, as it occupies same position after a rotation of 360° (i.e., one complete revolution). Such cases have no interest for us.

You have around you many shapes, which possess rotational symmetry (Fig 12.17).



Fruit

(i)



Road sign

(ii)



Wheel

(iii)

Fig 12.17

For example, when you slice certain fruits, the cross-sections are shapes with rotational symmetry. This might surprise you when you notice them [Fig 12.17(i)].

Then there are many road signs that exhibit rotational symmetry. Next time when you walk along a busy road, try to identify such road signs and find about the order of rotational symmetry [Fig 12.17(ii)].

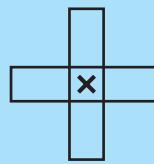
Think of some more examples for rotational symmetry. Discuss in each case:

- (i) the centre of rotation (ii) the angle of rotation
- (iii) the direction in which the rotation is affected and
- (iv) the order of the rotational symmetry.

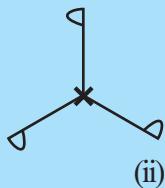
TRY THESE



Give the order of the rotational symmetry of the given figures about the point marked \times (Fig 12.18).



(i)

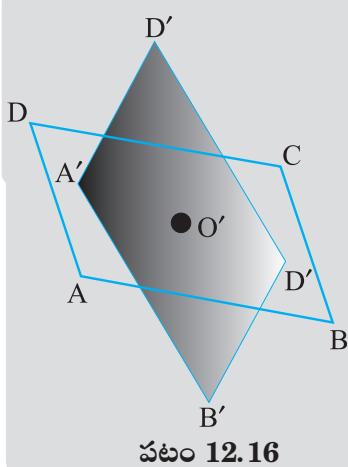


(ii)



(iii)

Fig 12.18



ఆకారాల్లో బిందువు O వద్ద పిన్ని గుచ్ఛండి.

జప్పుడు పారదర్శక ఆకారాన్ని సవ్య దిశలో తిప్పండి.

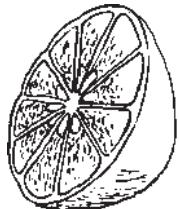
ఒక పూర్తి భ్రమణంలో ఆకారాలు ఎన్నిసార్లు ఏకీభవిస్తాయి?

భ్రమణ సౌష్టవం పరిమాణం ఎంత?

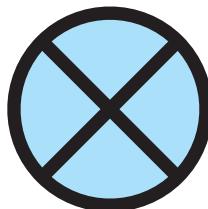
పిన్ ఉన్న బిందువు మనకు భ్రమణం యొక్క కేంద్రం అగును. ఈ సందర్భంలో ఇది కర్ణాల యొక్క ఖండన బిందువు అగును.

ప్రతి వస్తువు 360° (అంటే ఒక సంపూర్ణ భ్రమణ) తరువాత అదే స్థానాన్ని చేరును. కాబట్టి, ప్రతి వస్తువుకు భ్రమణ సౌష్టవం పరిమాణం 1 అగును. ఇలాంటి సందర్భాలు మనకు ఆసక్తి కలిగించవు.

మీ చుట్టూ అనేక ఆకారాలు ఉన్నాయి. ఇవి భ్రమణ సౌష్టవాన్ని కలిగి ఉన్నాయి (పటం 12.17).



పండు
(i)



రహదారి (చిహ్నం)
(ii)



చక్రము
(iii)

పటం 12.17

ఉదాహరణకు, మీరు కొన్ని పండ్లను ముక్కలుగా చేసినప్పుడు, ఆ ఆకారాల మధ్యచేచ్చ భ్రమణ సౌష్టవం కలిగి ఉంటాయి. మీరు వాటిని గమనించినప్పుడు ఇది మీకు ఆశ్చర్యం కలగవచ్చు [పటం 12.17(i)].

భ్రమణ సౌష్టవాన్ని ప్రదర్శించే అనేక రహదారి సంకేతాలు ఉన్నాయి. ఈసారి మీరు రద్దిగా ఉండే రహదారి వెంట నడుస్తున్నప్పుడు, అటువంటి రహదారి చిహ్నాలను గుర్తించడానికి ప్రయత్నించండి మరియు వాటి భ్రమణ సౌష్టవం యొక్క పరిమాణం గురించి తెలుసుకోండి [పటం 12.17(ii)].

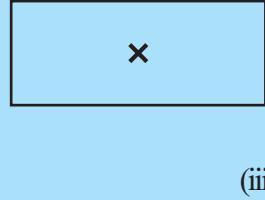
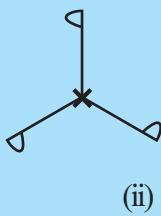
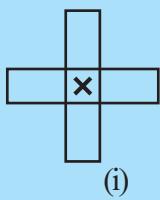
భ్రమణ సౌష్టవానికి మరికొన్ని ఉదాహరణల గురించి ఆలోచించండి. ప్రతి సందర్భంలో క్రింది వాటిని చర్చించండి:

(i) భ్రమణ కేంద్రం	(ii) భ్రమణ కోణం
(iii) భ్రమణం ప్రభావితమయ్యే దిశ మరియు	(iv) భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం.

ప్రయత్నించండి



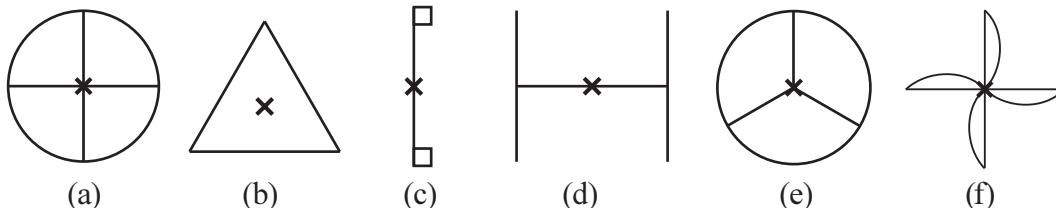
జప్పుబడ్డ పటాల భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం \times గుర్తు చేయబడ్డ బిందువు ఆధారంగా రాయండి (పటం 12.17).



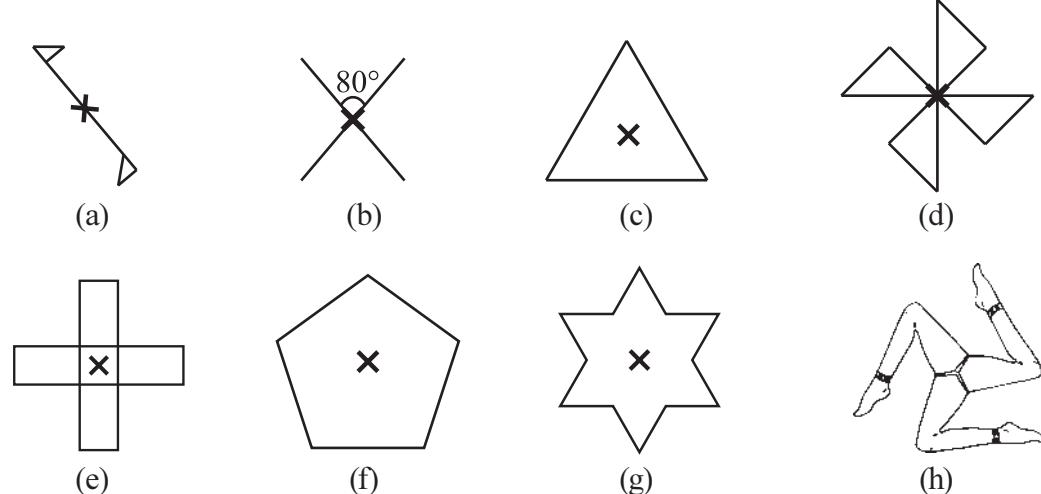
పటం 12.18

EXERCISE 12.2

1. Which of the following figures have rotational symmetry of order more than 1:



2. Give the order of rotational symmetry for each figure:

**12.4 LINE SYMMETRY AND ROTATIONAL SYMMETRY**

You have been observing many shapes and their symmetries so far. By now you would have understood that some shapes have only line symmetry, some have only rotational symmetry and some have both line symmetry and rotational symmetry.

For example, consider the square shape (Fig 12.19).

How many lines of symmetry does it have?

Does it have any rotational symmetry?

If ‘yes’, what is the order of the rotational symmetry?

Think about it.

The circle is the most perfect symmetrical figure, because it can be rotated around its centre through any angle and at the same time it has unlimited number of lines of symmetry. Observe any circle pattern. Every line through the centre (that is every diameter) forms a line of (reflectional) symmetry and it has rotational symmetry around the centre for every angle.

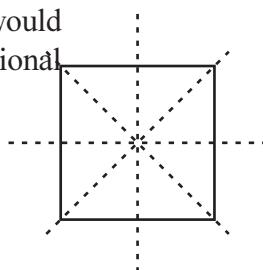
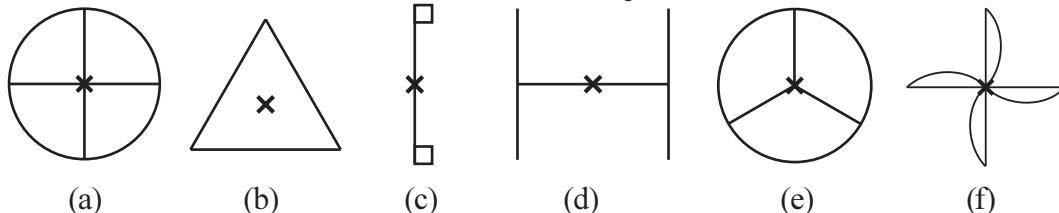


Fig 12.19

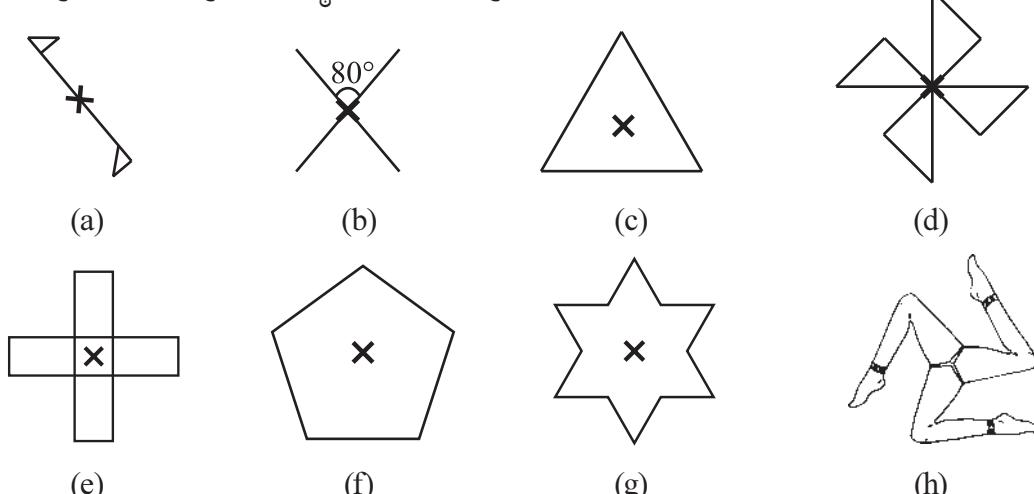


అభ్యాసం 12.2

1. ఈ క్రింది పటాలలో ఏది 1 కంటే ఎక్కువ భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం కలిగి ఉంది:



2. ప్రతి పటంకు భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం వ్రాయండి.



12.4 రేఖా సౌష్టవం మరియు భ్రమణ సౌష్టవం

మీరు ఇప్పటివరకు అనేక ఆకారాలను మరియు వాటి సౌష్టవాలను గమనిస్తున్నారు. కొన్ని ఆకారాలు రేఖ సౌష్టవాన్ని మాత్రమే కలిగి ఉన్నాయని, కొన్ని భ్రమణ సౌష్టవాన్ని మాత్రమే కలిగి ఉన్నాయని మరియు కొన్ని రేఖ సౌష్టవం మరియు భ్రమణ సౌష్టవం రెండింటినీ కలిగి ఉన్నాయని మీరు ఇప్పటికే అర్థం చేసుకున్నారు.

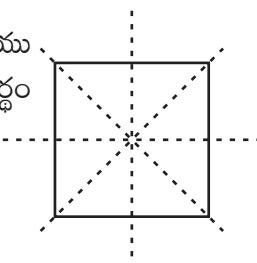
ఉదాహరణకు, చతురంగాకార ఆకారాన్ని తీసుకోండి (పటం 12.19).

దీనికి ఎన్ని సౌష్టవ రేఖలు ఉన్నాయి?

దీనికి ఏదైనా భ్రమణ సౌష్టవం ఉందా?

ఒకవేళ ‘అవును’ అయితే, భ్రమణ సౌష్టవం పరిమాణం ఏమిటి? దీని గురించి ఆలోచించండి.

వృత్తం అత్యంత పరిపూర్వుమైన సౌష్టవ పటం, ఎందుకంటే ఇది ఏ కోణం ద్వారా అయినా దాని కేంద్రం చుట్టూ తిరగవచ్చు మరియు అదే సమయంలో దీనికి అపరిమిత సంఖ్యలో సౌష్టవరేఖలు ఉంటాయి. ఏదైనా వృత్తం నమూనాను గమనించండి. కేంద్రం గుండా వెళ్ళి ప్రతి రేఖ(అంటే ప్రతి వ్యాసం) రేఖా (పరావర్తన) సౌష్టవంను ఏర్పరుస్తుంది మరియు ఇది కేంద్రం చుట్టూ ప్రతి కోణం వద్ద భ్రమణ సౌష్టవాన్ని కలిగి ఉంటుంది.



పటం 12.19



Do This

Some of the English alphabets have fascinating symmetrical structures. Which capital letters have just one line of symmetry (like **E**)? Which capital letters have a rotational symmetry of order 2 (like **I**)?

By attempting to think on such lines, you will be able to fill in the following table:

Alphabet Letters	Line Symmetry	Number of Lines of Symmetry	Rotational Symmetry	Order of Rotational Symmetry
Z	No	0	Yes	2
S				
H	Yes		Yes	
O	Yes		Yes	
E	Yes			
N			Yes	
C				

EXERCISE 12.3

1. Name any two figures that have both line symmetry and rotational symmetry.
2. Draw, wherever possible, a rough sketch of
 - (i) a triangle with both line and rotational symmetries of order more than 1.
 - (ii) a triangle with only line symmetry and no rotational symmetry of order more than 1.
 - (iii) a quadrilateral with a rotational symmetry of order more than 1 but not a line symmetry.
 - (iv) a quadrilateral with line symmetry but not a rotational symmetry of order more than 1.
3. If a figure has two or more lines of symmetry, should it have rotational symmetry of order more than 1?
4. Fill in the blanks:



Shape	Centre of Rotation	Order of Rotation	Angle of Rotation
Square			
Rectangle			
Rhombus			
Equilateral Triangle			
Regular Hexagon			
Circle			
Semi-circle			

ఇవి చేయండి



కొన్ని ఆంగ్ల అక్షరాలు మనోహరమైన సౌష్టవ నిర్మాణాలను కలిగి ఉన్నాయి. ఏ ఆంగ్ల పెద్ద అక్షరాలు ఒకే ఒక రేఖా సౌష్టవంను కలిగి ఉంటాయి. (E వంటివి)? ఏ పెద్ద అక్షరాలు 2 పరిమాణం గల భ్రమణ సౌష్టవాన్ని కలిగి ఉంటాయి (I వంటివి)?

అటువంటి రేఖల గురించి ఆలోచించడానికి ప్రయత్నం చేయడం ద్వారా మీరు క్రింది పద్ధీకను నింపగలరు.

ఆంగ్ల పెద్ద అక్షరాలు	రేఖా సౌష్టవం	సౌష్టవ రేఖల సంఖ్య	భ్రమణ సౌష్టవం	భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం
Z	కాదు	0	అవును	2
S				
H	అవును		అవును	
O	అవును		అవును	
E	అవును			
N			అవును	
C				

అభ్యాసం 12.3

1. రేఖ సౌష్టవం మరియు భ్రమణ సౌష్టవం రెండింటినీ కలిగి ఉన్న ఏవైనా రెండు పటాలను పేర్కొనండి.
2. సాధ్యమైనంత వరకు, వీటికి చిత్తు పటాలను గీయండి.
 - (i) రేఖా సౌష్టవం మరియు భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం 1 కంటే ఎక్కువుగా గల ఒక త్రిభుజం.
 - (ii) ఒక సౌష్టవరేఖ మరియు భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం 1 కంటే ఎక్కువుగా లేని ఒక త్రిభుజం.
 - (iii) 1 కంటే ఎక్కువ పరిమాణం గల భ్రమణ సౌష్టవాన్ని కలిగి, రేఖ సౌష్టవం కలిగి ఉండని ఒక చతుర్భుజం.
 - (iv) ఒక రేఖ సౌష్టవం కలిగి, 1 కంటే ఎక్కువ పరిమాణం గల భ్రమణ సౌష్టవం లేని ఒక చతుర్భుజం
3. ఒకవేళ ఒక పటానికి రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సౌష్టవ రేఖలు ఉన్నట్లయితే, దానికి 1 కంటే ఎక్కువ పరిమాణం గల భ్రమణ సౌష్టవం ఉంటుందా?
4. క్రింది భాశీలను పూరించండి:

ఆకారం	భ్రమణ కేంద్రం	భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం	భ్రమణ కోణం
చతుర్భుజం			
దీర్ఘచతుర్భుజం			
రాంబస్			
సమబాహు త్రిభుజం			
క్రమ షడ్యజి			
వృత్తం			
అర్ధ వృత్తం			

5. Name the quadrilaterals which have both line and rotational symmetry of order more than 1.
6. After rotating by 60° about a centre, a figure looks exactly the same as its original position. At what other angles will this happen for the figure?
7. Can we have a rotational symmetry of order more than 1 whose angle of rotation is
 - (i) 45°
 - (ii) 17°

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. A figure has **line symmetry**, if there is a line about which the figure may be folded so that the two parts of the figure will coincide.
2. Regular polygons have equal sides and equal angles. They have multiple (i.e., more than one) lines of symmetry.
3. Each regular polygon has as many lines of symmetry as it has sides.

Regular Polygon	Regular hexagon	Regular pentagon	Square	Equilateral triangle
Number of lines of symmetry	6	5	4	3

4. Mirror reflection leads to symmetry, under which the left-right orientation have to be taken care of.
5. Rotation turns an object about a fixed point.
This fixed point is the **centre of rotation**.
The angle by which the object rotates is the **angle of rotation**.
A half-turn means rotation by 180° ; a quarter-turn means rotation by 90° . Rotation may be clockwise or anticlockwise.
6. If, after a rotation, an object looks exactly the same, we say that it has a **rotational symmetry**.
7. In a complete turn (of 360°), the number of times an object looks exactly the same is called the **order of rotational symmetry**. The order of symmetry of a square, for example, is 4 while, for an equilateral triangle, it is 3.
8. Some shapes have only one line of symmetry, like the letter E; some have only rotational symmetry, like the letter S; and some have both symmetries like the letter H.
The study of symmetry is important because of its frequent use in day-to-day life and more because of the beautiful designs it can provide us.

5. 1 కంటే ఎక్కువ రేఖ మరియు భ్రమణ సౌష్టవాన్ని కలిగి ఉన్న చతుర్భుజాల పేర్లు ఏమిటి?
6. ఒక కేంద్రం చుట్టూ 60° తిరిగిన తరువాత, ఒక పటం దాని అసలు స్థానం మాదిరిగానే కనిపిస్తుంది. ఏ ఇతర కోణాల్లో పటానికి ఇదేమాదిరిగా జరుగుతుంది?
7. భ్రమణ కోణం (i) 45° (ii) 17° గా కలిగి ఉన్న వాటికి మనం 1 కంటే ఎక్కువ భ్రమణ సౌష్టవాన్ని కనుగొనగలమా ?

మనం ఏం చర్చించాం?

1. ఒకవేళ పటం యొక్క రెండు భాగాలు ఏకీభవించే విధంగా ఆ బొమ్మను మడతపెట్టే రేఖ ఉన్నట్లయితే ఆ పటానికి రేఖా సౌష్టవం ఉంటుంది.
2. క్రమ బహుభుజాలు సమాన భుజాలు మరియు సమాన కోణాలను కలిగి ఉంటాయి. అవి బహుళ (అసగా, ఒకటి కంటే ఎక్కువ) సౌష్టవ రేఖలను కలిగి ఉంటాయి.
3. ప్రతి క్రమ బహుభుజికి ఎన్ని భుజాలున్నాయో అన్ని సౌష్టవ రేఖలను కలిగి ఉంటుంది.

క్రమ బహుభుజి	క్రమ షడ్ఫృజి	క్రమ పంచభుజి	చతురప్రం	సమబాహు త్రిభుజం
సౌష్టవ రేఖల సంఖ్య	6	5	4	3

4. దర్శణ ప్రతిబింబం సౌష్టవానికి దారితీస్తుంది, దీని కింద ఎడమ-కుడి దిశను జాగ్రత్తగా చూసుకోవాలి.
5. భ్రమణం ఒక వస్తువును ఒక స్థిర బిందువు చుట్టూ త్రిప్పుతుంది. ఈ స్థిరబిందువు భ్రమణం యొక్క కేంద్రం అగును. వస్తువు తిరిగే కోణం భ్రమణ కోణం.

అర్థ భ్రమణం అంటే 180° భ్రమణం; పొవు భ్రమణం అంటే 90° భ్రమణం. భ్రమణం సవ్య దిశలో లేదా అపసవ్య దిశలో ఉండవచ్చ.

6. ఒక వస్తువు భ్రమణం తర్వాత సరిగ్గా అదే విధంగా కనిపిస్తే, దానికి భ్రమణ సౌష్టవం ఉందని మనం చెబుతాం.
7. ఒక పూర్తిభ్రమణంలో (360°), ఒక వస్తువు సరిగ్గా అదే విధంగా ఎన్నిసార్లు కనిపిస్తుందో ఆ సంఖ్యను భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం అంటారు. ఉదాహరణకు, ఒక చతురప్రం యొక్క సౌష్టవ పరిమాణం 4 కాగా, సమబాహు త్రిభుజానికి అది 3 అగును.
8. కొన్ని ఆకారాలు E అక్షరం వలె సౌష్టవం యొక్క ఒకే ఒకసౌష్టవ రేఖను కలిగి ఉంటాయి; కొన్నింటిలో S అనే అక్షరంకు వలె భ్రమణ సౌష్టవం మాత్రమే కలిగి ఉంటాయి; మరియు కొన్నింటిలో H అనే అక్షరం వాదిరిగా రెండు సౌష్టవాలు ఉంటాయి. ఇది రోజువారీ జీవితంలో తరచుగా ఉపయోగించబడుతుంది మరియు ఇది మనకు అందించే అందమైన డిజైన్ కారణంగా సౌష్టవం యొక్క అధ్యయనం చాలా ముఖ్యమైనది.

Visualising Solid Shapes



13.1 INTRODUCTION: PLANE FIGURES AND SOLID SHAPES

In this chapter, you will classify figures you have seen in terms of what is known as *dimension*.

In our day to day life, we see several objects like books, balls, ice-cream cones etc., around us which have different shapes. One thing common about most of these objects is that they all have some length, breadth and height or depth.

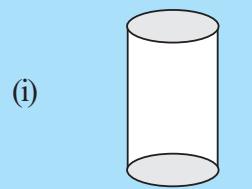
That is, they all occupy space and have three dimensions.

Hence, they are called three dimensional shapes.

Do you remember some of the three dimensional shapes (i.e., solid shapes) we have seen in earlier classes?

TRY THESE

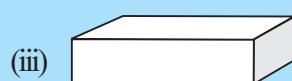
Match the shape with the name:



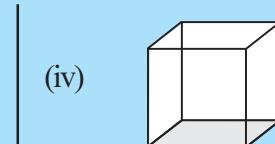
(a) Cuboid



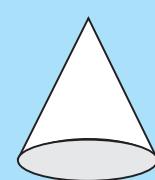
(b) Cylinder



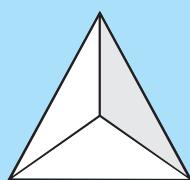
(c) Cube



(iv)



(v)



(d) Sphere



(e) Pyramid

Fig 13.1



ఘనాకృతుల దృశ్యకరణ

15.1 పరిచయం: సమతల పటాలు మరియు ఘనాకృతులు

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు చూసిన పటాలను వాని కొలత ఆధారంగా వర్ణికరిస్తారు.

మన దైనందిన జీవితంలో, పుస్తకాలు, బంతులు, ఐస్ ట్రీమ్ కోన్ల వంటి అనేక వేర్వేరు ఆకారాల వస్తువులను మన పరిసరాలలో చూస్తూ ఉంటాము. చాలావరకు ఈ వస్తువులలో ఉన్న సాధారణ విషయం ఏమిటంచే ఇవన్నీ కొంత పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు లేక లోతును కలిగి ఉంటాయి.

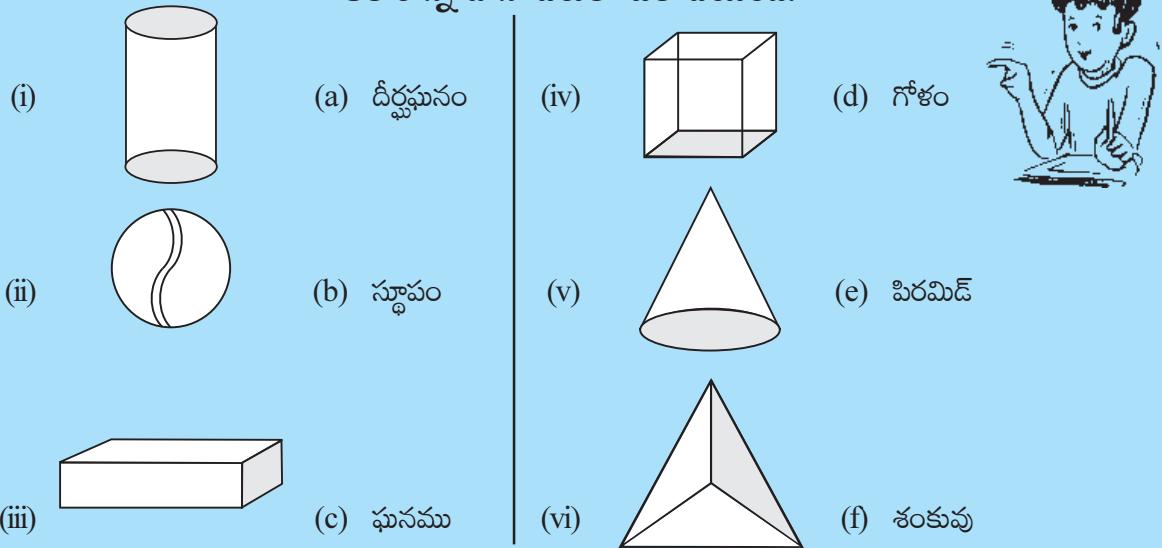
అనగా ఇవన్నీ కొంత స్థలాన్ని ఆక్రమిస్తాయి మరియు మూడు కొలతలను కలిగి ఉంటాయి.

కాబట్టి వీటిని త్రిమితీయ ఆకారాలు అని అంటారు.

క్రింది తరగతిలో చూసిన లేక నేర్చుకున్న కొన్ని త్రిమితీయ ఆకారాలు (ఘనాకృతులు) మీకు గుర్తు ఉన్నాయా?

ప్రయత్నించండి

ఆకారాన్ని దాని పేరుతో జత చేయండి:



152 VISUALISING SOLID SHAPES

Try to identify some objects shaped like each of these.

By a similar argument, we can say figures drawn on paper which have only length and breadth are called two dimensional (i.e., plane) figures. We have also seen some two dimensional figures in the earlier classes.

Match the 2 dimensional figures with the names (Fig 13.2):

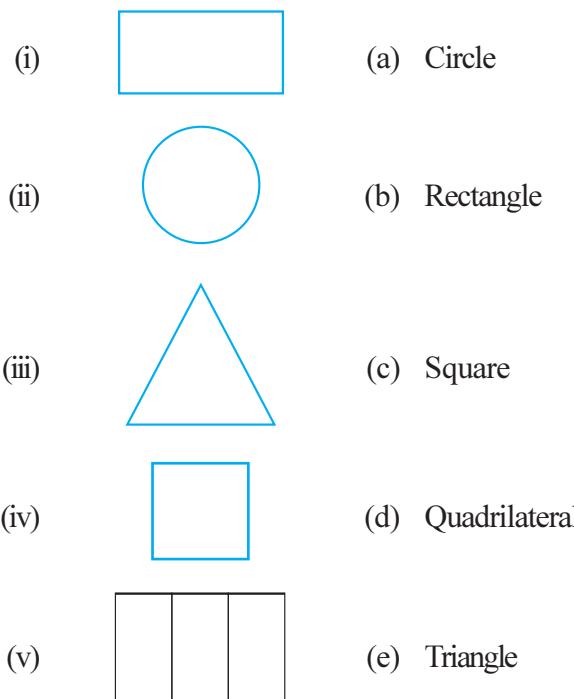


Fig 13.2

Note: We can write 2-D in short for 2-dimension and 3-D in short for 3-dimension.

13.2 FACES, EDGES AND VERTICES

Do you remember the Faces, Vertices and Edges of solid shapes, which you studied earlier? Here you see them for a cube:

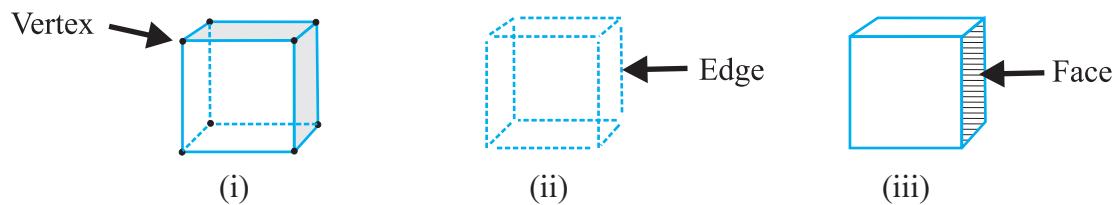


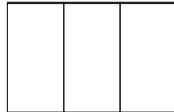
Fig 13.3

The 8 corners of the cube are its **vertices**. The 12 line segments that form the skeleton of the cube are its **edges**. The 6 flat square surfaces that are the skin of the cube are its **faces**.

ఇలాంటి ఆకారాలలో గల కొన్ని వస్తువులను గుర్తించడానికి ప్రయత్నించండి.

ఇదే విధమైన వాదన ద్వారా, పొడవు మరియు వెడల్పు మాత్రమే ఉన్న కాగితంపై గేచిన బొమ్మలను ద్విమితీయ (అనగా సమతల) పటాలు అని అంటారు. క్రింది తరగతిలో మనం కొన్ని రకాల ద్విమితీయ పటాలను చూశాము.

ద్విమితీయ పటాలను వాటి పేర్లతో జత చేయండి. (పటం 13.2):

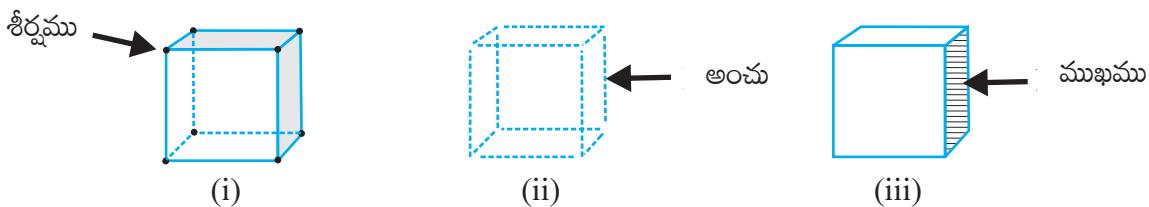
- | | | |
|-------|---|--------------------|
| (i) |  | (a) వృత్తము |
| (ii) |  | (b) దీర్ఘచతురప్రము |
| (iii) |  | (c) చతురస్రం |
| (iv) |  | (d) చతుర్భజం |
| (v) |  | (e) త్రిభుజం |

పటం 13.2

గమనిక: ద్విమితీయ ఆకారాలను 2-D అని త్రిమితీయ ఆకారాలను 3-D అని క్లప్పంగా రాశ్శాము.

15.2 ముఖాలు, అంచులు మరియు శీర్షాలు

మీరు క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్న ఫునాకారాల యొక్క ముఖాలు, శీర్షాలు మరియు అంచులు మీకు గుర్తున్నాయా? ఇక్కడ మీరు ఫునం యొక్క ముఖాలు, శీర్షాలు మరియు అంచులు చూస్తారు.



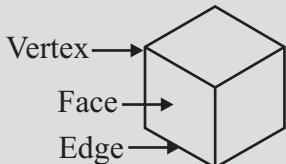
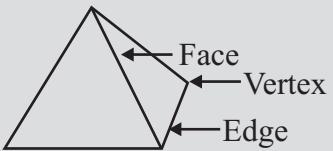
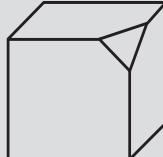
పటం 13.3

ఫునం యొక్క 8 మూలలను ఎనిమిది శీర్షాలు అని, ఫునం యొక్క ఆకారాన్ని ఏర్పరచు 12 రేఖాఖండాలను ఫునం యొక్క అంచులు అని అంటారు. ఫునానికి ఉపరితలంపై ఉండే ఆరు సమతల చతురస్రాలను ఫునం యొక్క ముఖాలు అంటారు.

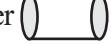
Do This

Complete the following table:

Table 13.1

				
Faces (F)	6	4		
Edges (E)	12			
Vertices (V)	8	4		



Can you see that, the two dimensional figures can be identified as the faces of the three dimensional shapes? For example a cylinder  has two faces which are circles, and a pyramid, shaped like this  has triangles as its faces.

We will now try to see how some of these 3-D shapes can be visualised on a 2-D surface, that is, on paper.

In order to do this, we would like to get familiar with three dimensional objects closely. Let us try forming these objects by making what are called nets.

13.3 NETS FOR BUILDING 3-D SHAPES

Take a cardboard box. Cut the edges to lay the box flat. You have now a **net** for that box. A net is a sort of skeleton-outline in 2-D [Fig13.4 (i)], which, when folded [Fig13.4 (ii)], results in a 3-D shape [Fig13.4 (iii)].

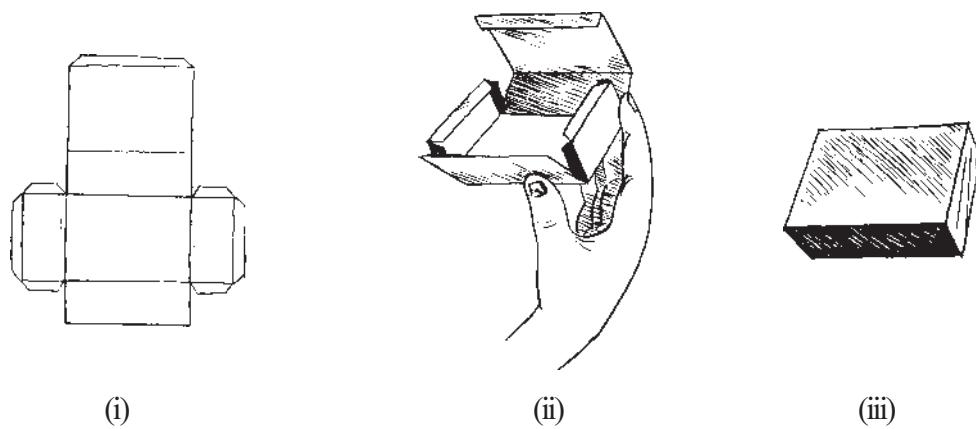


Fig 13.4

ఇది చేయండి

కింది పట్టికను పూరించండి.

	పట్టిక 13.1		
	శీర్షం	ముఖం	అంచు
ముఖాలు (F)	6	4	
అంచులు (E)	12		
శీర్షాలు (V)	8	4	



ద్విమితీయ పటాలను త్రిమితీయ పటాల యొక్క ముఖాలుగా గుర్తించబడ్డాయని ఫీరు గమనించగలిగారా? ఉదాహరణకు స్తాపము  వృత్తాలను రెండు ముఖాలుగా కలిగింది.

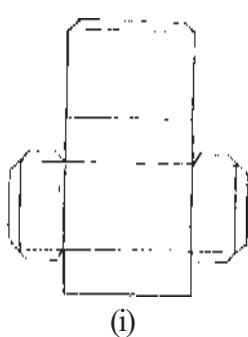
మరియు ఇలాంటి ఆకారంలో ఉన్న  ఒక పిరమిడ్ త్రిభుజములను దాని ముఖాలుగా కలిగి ఉంటుంది.

త్రిమితీయ ఆకారాలలో కొన్నింటిని ద్విమితీయ తలంపై (అనగా కాగితం) ఎలా చూపవచ్చునో చూడటానికి మనం ఇప్పుడు ప్రయత్నించాం.

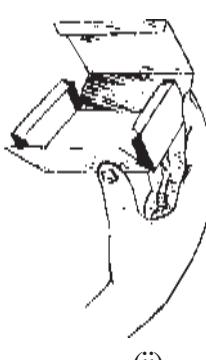
దీనిని చేయడానికి మనము త్రిమితీయ వస్తువుల గురించి నిశితంగా తెలుసుకోవాలి. వలలు అని పిలవబడే వాటిని చేయడం ద్వారా ఈ వస్తువులను రూపొందించటానికి ప్రయత్నించాం.

13.3 త్రిమితీయ ఆకారాలను నిర్మించడానికి వలలు

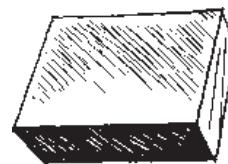
ఈ దళసరి కాగితంతో చేసిన ఒక పెట్టెను తీసుకోండి. దాని అంచుల వెంబడి కత్తిరించి సమతల పటము ఏర్పడేటట్లు చేయండి. ఇలా ఏర్పడిన దానిని ఆ పెట్టె యొక్క వల అని అంటారు. పటం 13.4 (i)లో చూపినట్లు వల అనేది ద్విమితీయ తలంలో ఉన్న ఆకారం యొక్క అంచుల రూపము వంటిది. దానిని మడచినప్పుడు పటం 13.4 (ii)లో ఉన్నట్లు త్రిమితీయ ఆకారం వస్తుంది. చివరకు పటం 15.4 (iii)లో ఉన్నట్లు పెట్టె ఆకారం ఏర్పడుతుంది.



(i)



(ii)



(iii)

పటం 13.4

156 VISUALISING SOLID SHAPES

Here you got a **net** by suitably separating the edges. Is the reverse process possible?

Here is a net pattern for a box (Fig 13.5). Copy an enlarged version of the net and try to make the box by suitably folding and gluing together. (You may use suitable units). The box is a solid. It is a 3-D object with the shape of a cuboid.

Similarly, you can get a net for a cone by cutting a slit along its slant surface (Fig 13.6).

You have different nets for different shapes. Copy enlarged versions of the nets given (Fig 13.7) and try to make the 3-D shapes indicated. (You may also like to prepare skeleton models using strips of cardboard fastened with paper clips).

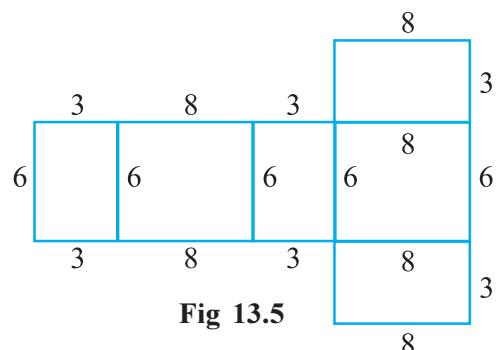
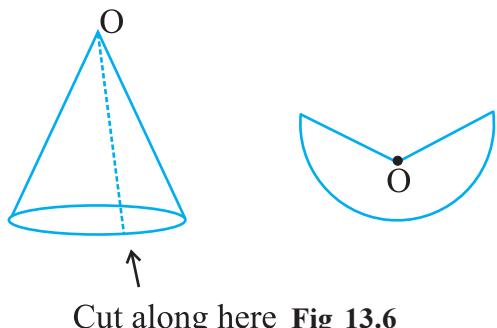


Fig 13.5



Cut along here Fig 13.6

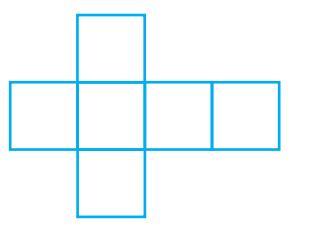
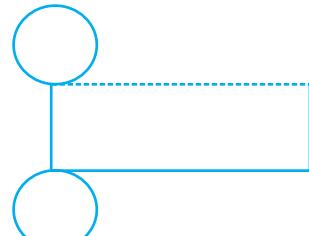
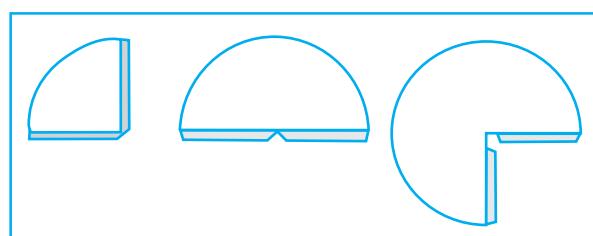
Cube
(i)Cylinder
(ii)Cone
(iii)

Fig 13.7

We could also try to make a net for making a pyramid like the Great Pyramid in Giza (Egypt) (Fig 13.8). That pyramid has a square base and triangles on the four sides.

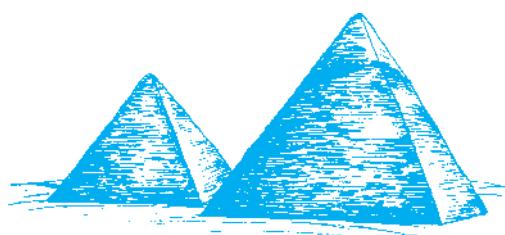


Fig 13.8

See if you can make it with the given net (Fig 13.9).

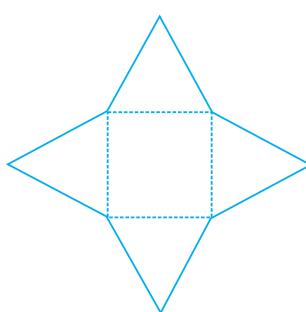


Fig 13.9

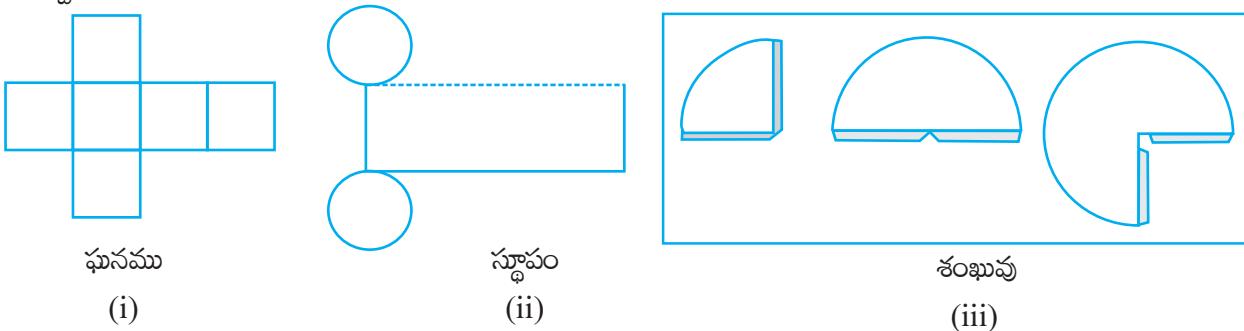
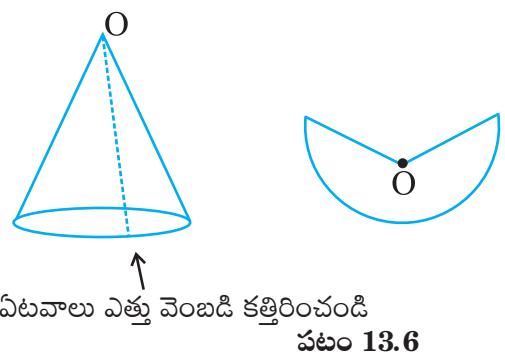
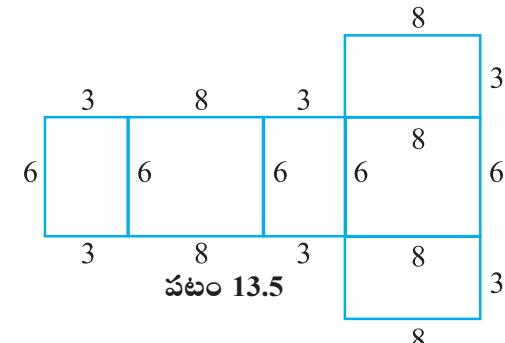
అంచులను వేరు చేయడం ద్వారా వలను పొందవచ్చు దీని విపర్యయం సాధ్యమేనా?

జక్కడ ఒక పెట్టె యొక్క వల రూపం ఇవ్వబడినది (పటం 13.5) దానిని కాగితంపై గేసి కత్తిరించి ఒక దళసరి కాగితంపై అంటించండి. అంచుల వెంబడి మడచి జిగురుతో అంటించి ఒక పెట్టెను తయారు చేయండి. మీరు తగిన యూనిట్ల కొలతను ఉపయోగించ వచ్చును.

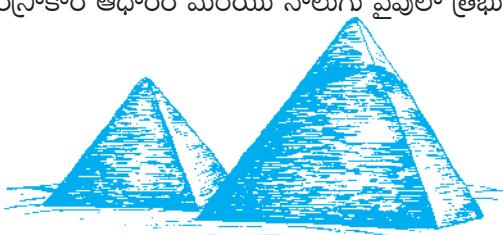
ఇలా ఏర్పడిన పెట్టె ఫున వస్తువు. ఇది దీర్ఘ ఫునాకారంలో ఉన్న ఒక త్రిమితీయ వస్తువు.

జదే విధంగా శంఖు ఆకృతిలో ఉన్న ఐస్ ట్రీమ్ కాగితపు క్రూను తీసుకొని పటంలో చూపినట్లు దాని ఏటవాలు ఎత్తు వెంబడి జాగ్రత్తగా కత్తిరించండి. ఇలా చేయగా మీకు శంఖువు యొక్క వల, పటం 13.6లో చూపినట్లు ఏర్పడుతుంది.

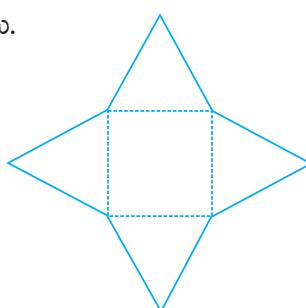
విభిన్న ఆకృతులకు విభిన్న వలలుఉంటాయి. పటం 13.7 లో ఇవ్వబడిన వల యొక్క నకలు తీసుకొని ఆకారాలను తయారు చేయడానికి ప్రయత్నించండి కాగితపు క్లిప్పులతో బిగించిన దళసరి అట్టముక్కలను ఉపయోగించి ఇచ్చిన త్రిమితీయ రూపాలకు వలలను తయారు చేయటకు కూడా మీరు సిద్ధ పడవచ్చును.



గిజా (ఉజిప్పు) లో ఉన్న గొప్ప పిరమిడ్ ను తయారు చేయటకు, వలను చేయడానికి మనం ప్రయత్నించవచ్చు. పిరమిడ్కు చతురస్రాకార ఆధారం మరియు నాలుగు వైపులా త్రిభుజాలు ఉన్నాయి.



పటం 13.8



పటం 13.9

ఇవ్వబడిన వలతో మీరు దీనిని తయారు చేయగలరో లేదో చూడండి. (పటం 13.9).

TRY THESE

Here you find four nets (Fig 13.10). There are two *correct* nets among them to make a tetrahedron. See if you can work out which nets will make a tetrahedron.

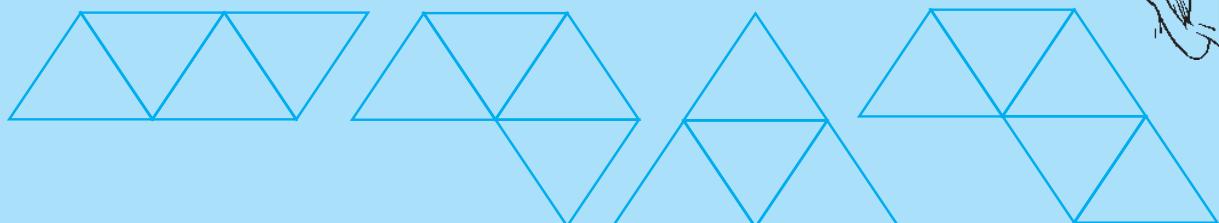
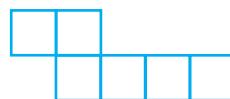


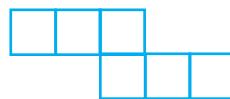
Fig 13.10

**EXERCISE 13.1**

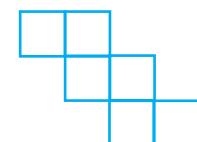
1. Identify the nets which can be used to make cubes (cut out copies of the nets and try it):



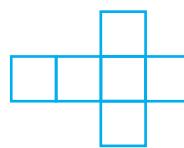
(i)



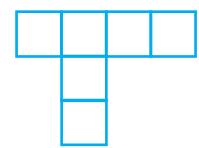
(ii)



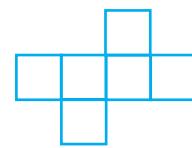
(iii)



(iv)

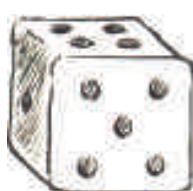


(v)

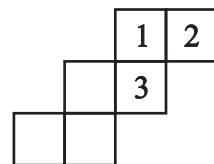
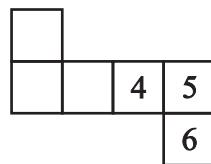


(vi)

2. Dice are cubes with dots on each face. Opposite faces of a die always have a total of seven dots on them.



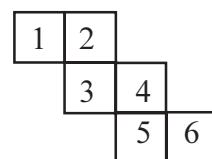
Here are two nets to make dice (cubes); the numbers inserted in each square indicate the number of dots in that box.



Insert suitable numbers in the blanks, remembering that the number on the opposite faces should total to 7.

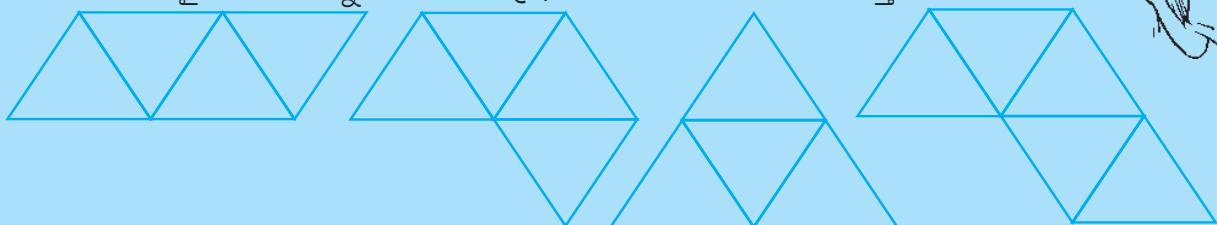
3. Can this be a net for a die?

Explain your answer.



ప్రయత్నించండి

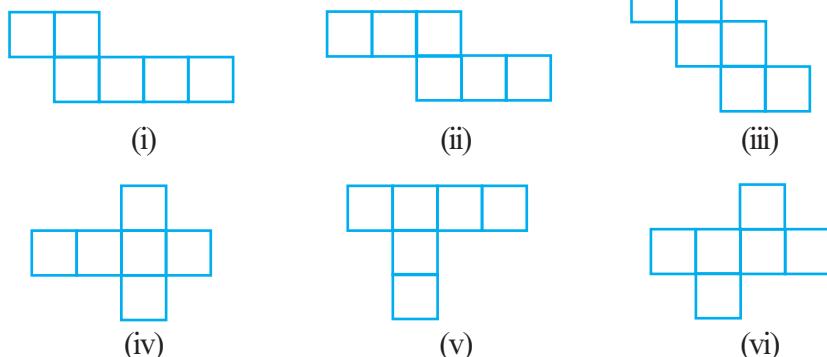
జక్కడ నాలుగు వలలు ఉన్నాయి. ఇందులో త్రిభుజాకార పిరమిడ్సు తయారుచేయడానికి కింది ఇచ్చిన వాటిలో రెండు సరైన వలలు ఉన్నాయి. ఏ వలలు త్రిభుజాకార పిరమిడ్సు తయారుచేస్తాయో చూడండి.



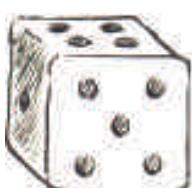
పటం 13.10

అభ్యాసం 13.1

- సమఫునములు తయారు చేయడానికి ఉపయోగించే వలలను గుర్తించండి (వలల నమూనాలను కత్తిరించండి మరియు ప్రయత్నించండి).



- సమఫునాకార పాచికలు అనేవి ప్రతి తలంపై బిందువులను కలిగిన సమఫునం. ఒక పాచిక యొక్క ఎదురెదురు ముఖాలపై ఉన్న బిందువుల మొత్తం 7 కు సమానంగా ఉంటుంది.



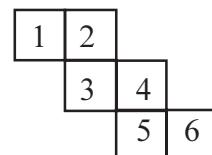
ప్రతీ చతురప్రంలో చొప్పించిన సంఖ్యలు ఆ పెట్టే లోని చుక్కల సంఖ్యను సూచిస్తాయి. జక్కడ సమఫునాకార పాచికలను తయారు చేయడానికి రెండు వలలు జప్పాబడినవి.



ప్రతీ చతురప్రంలో రాసిన సంఖ్యలు ఆ పెట్టే లోని చుక్కల సంఖ్యను సూచిస్తాయి. భారీ గడులలో సరియైన సంఖ్యలో బిందువులను గుర్తించండి.

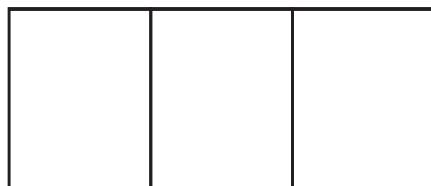
ఎదుచెడుటి ముఖాల సంఖ్యల మొత్తం 7 వచ్చేలా భారీలలో సరియైన సంఖ్యలుంచండి.

- ఇచ్చిన పటం ఒక పాచికను తయారుచేయు వల అవుతుందా? మీ సమాధానాన్ని వివరించండి.

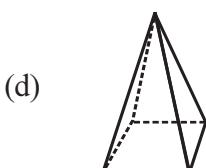
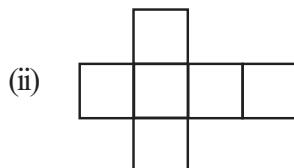
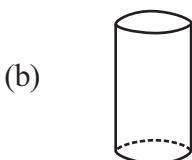
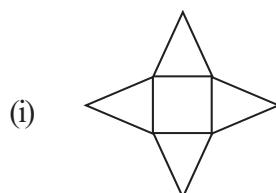
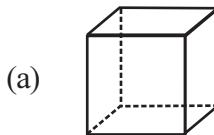


160 VISUALISING SOLID SHAPES

4. Here is an incomplete net for making a cube. Complete it in at least two different ways. Remember that a cube has six faces. How many are there in the net here? (Give two separate diagrams. If you like, you may use a squared sheet for easy manipulation.)



5. Match the nets with appropriate solids:



Play this game

You and your friend sit back-to-back. One of you reads out a net to make a 3-D shape, while the other attempts to copy it and sketch or build the described 3-D object.

13.4 DRAWING SOLIDS ON A FLAT SURFACE

Your drawing surface is paper, which is flat. When you draw a solid shape, the images are somewhat distorted to make them appear three-dimensional. It is a visual illusion. You will find here two techniques to help you.

13.4.1 Oblique Sketches

Here is a picture of a cube (Fig 13.11). It gives a clear idea of how the cube looks like, when seen from the front. You do not see certain faces. In the drawn picture, the lengths

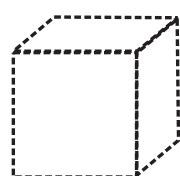
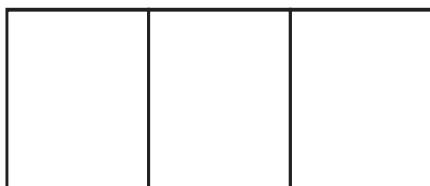
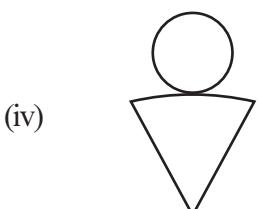
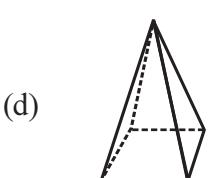
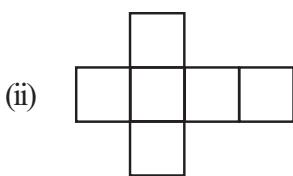
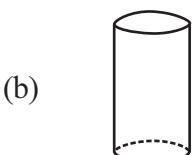
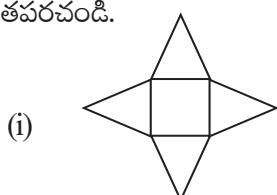
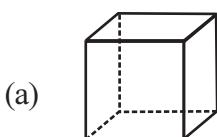


Fig 13.11

4. ఒక ఘనం తయారు చేయటకు ఒక అసంహార్ణ వల ఇవ్వబడింది. కనీసం రెండు పద్ధతులలో ఈ వలను హర్షించేయండి. ఘనానికి ఆరు ముఖాలుంటాయని గుర్తుకుతెచ్చుకొండి. ఈ వలలో ఎన్ని ముఖాలున్నాయి?
- (రెండు వేర్వేరు పటాలు గీయండి మీకు నచ్చినట్టేతే, చతురస్రాకార కాగితాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.



5. సంబంధిత వలలను ప్రక్కన ఇచ్చిన ఘనక్రూతులతో జతపరచండి.



ఈ అట అడండి.

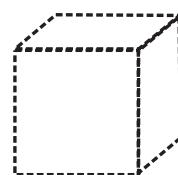
మీరు, మీమిత్రుడు వీపు భాగాలు అనేటట్లు కూర్చోండి. మీలో ఒకరు ఒక త్రిమితీయ ఆకారాన్ని తయారు చేయడానికి కావలసిన వల రూపాన్ని చదవండి. రెండవ వారు దాని నకలు చేసి మరియు గీసి ఇవ్వడం ద్వారా త్రిమితీయ ఆకారాన్ని నిర్మించాలి.

13.4 ఘనాకారాలను సమతలంపై గీయడం

మనం పటాలను గీసే కాగితం ఒక సమతలం. ఒక ఘనాకారాన్ని దీనిపై గీసినప్పుడు విరూపం చెంది త్రిమితీయ ఆకారాన్ని పొందినది. ఇది కేవలం దృశ్య భ్రాంతి మాత్రమే. ఇక్కడ మనం ఒక త్రిమితీయ ఆకారాన్ని ఒక సమతలంపై గీయడానికి రెండు పద్ధతులను ఉపయోగిస్తాము.

13.4.1 ఏటవాలు రేఖా చిత్రాలు

ఇక్కడ ఒక సమ ఘనం పటం ఇవ్వబడింది. (పటం 13.11). దీనిని ముందు నుండి చూస్తే ఎలా కన్నిస్తుందో ఈ పటం చూడగానే అర్థమవుతుంది. నిజానికి మనం ఘనం యొక్క అన్ని తలాలను పటంలో



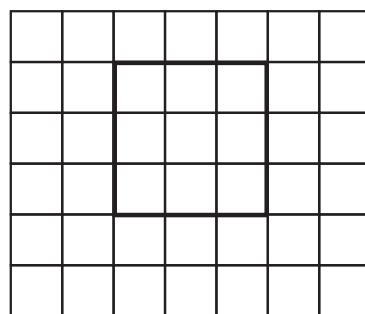
పటం 13.11

162 VISUALISING SOLID SHAPES

are not equal, as they should be in a cube. Still, you are able to recognise it as a cube. Such a sketch of a solid is called an **oblique sketch**.

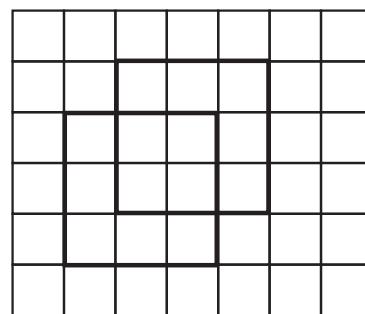
How can you draw such sketches? Let us attempt to learn the technique.

You need a squared (lines or dots) paper. Initially practising to draw on these sheets will later make it easy to sketch them on a plain sheet (without the aid of squared lines or dots!) Let us attempt to draw an oblique sketch of a $3 \times 3 \times 3$ (each edge is 3 units) cube (Fig 13.12).



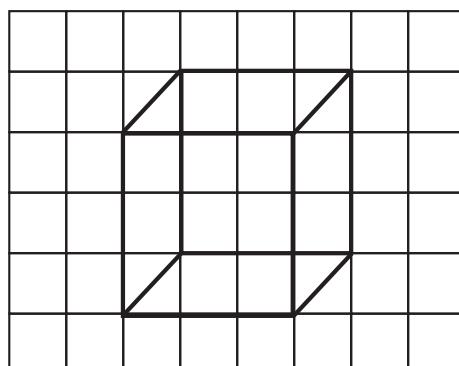
Step 1

Draw the **front** face.



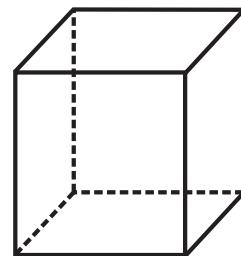
Step 2

Draw the **opposite** face. Sizes of the faces have to be same, but the sketch is somewhat off-set from step 1.



Step 3

Join the corresponding corners



Step 4

Redraw using dotted lines for hidden edges. (It is a convention)
The sketch is ready now.

Fig 13.12

In the oblique sketch above, did you note the following?

- (i) The sizes of the front faces and its opposite are same; and
- (ii) The edges, which are all equal in a cube, appear so in the sketch, though the actual measures of edges are not taken so.

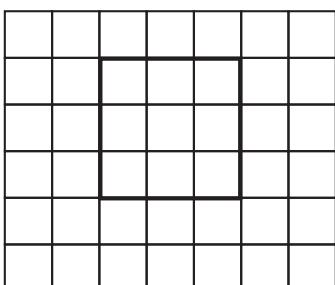
You could now try to make an oblique sketch of a cuboid (remember the faces in this case are rectangles)

Note: You can draw sketches in which measurements also agree with those of a given solid. To do this we need what is known as an **isometric sheet**. Let us try to

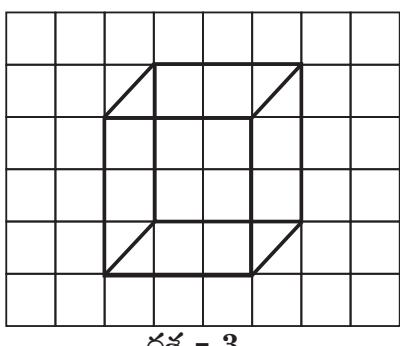
చూడలేము. ఒక ఘనంలో అన్ని అంచుల పొడవులు ఘనాకృతుల దృశ్యకరణ సమానం కాదు. అయిని దీనిని చూడగానే మనం ఒక ఘనం అని గుర్తు పడతాము. ఇటువంటి పటాలనే ఏటవాలు రేఖాచిత్రాలు అంటారు.

మీరు ఇలాంటి చిత్రాలను ఎలా గేయగలరు? వీటిని గేసే పద్ధతిని నేర్చుకునేందుకు ప్రయత్నించాం.

మొదట గళ్ళ కాగితాలపై వీటిని సాధన చేస్తే తర్వాత తెల్ల కాగితాలపై కూడా సులభంగా గేయవచ్చును. ఇప్పుడు మనం $3 \times 3 \times 3$ కొలతలు గల (అనగా ప్రతి అంచు 3 యూనిట్లు) ఒక ఘనానికి ఏటవాలు రేఖాచిత్రం గేంచాం. (పటం 13.12)

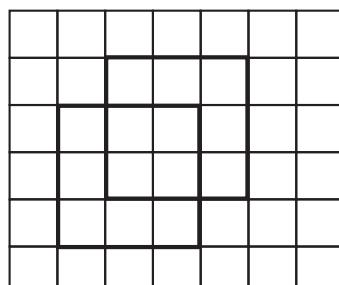


ఎదురు ముఖాన్ని గేయండి

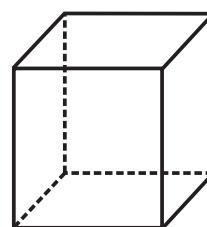


దశ - 3

సంబంధిత మూలలను కలపండి



ఎదురు ముఖాన్ని గేయండి అదే కొలతలతో గేచిన ముఖానికి వెనుక ముఖాన్ని గేయండి. ముఖాల పరిమాణాలు ఒకే విధంగా ఉండాలి ఇది కొంచెం పక్కకు గేయండి.



దశ - 4

ఈ పటాన్ని తిరిగి గేయండి. కనిపించని అంచులను చుక్కల రేఖలతో గేయండి. ఇదే మనకు కావలసిన చిత్రము.

పటం 13.12

ఈ ఏటవాలు చిత్రంలో మీరు ఈ క్రింది అంశాలను గమనించారా?

- ముందు మరియు దాని వెనుక ఉండే తలాలు ఒకే లాగా ఉంటాయి. మరియు
- ఒక ఘనం లో అంచులు ఏ విధంగా ఒకే కొలతను కలిగి ఉంటాయో అదేవిధంగా ఈ చిత్రంలో కూడా కొలతలు తీసుకుని గేయకపోయినా అంచులన్నీ సమానంగా ఉన్నట్లు కనిపిస్తాయి.

ఇప్పుడు మీరు ఒక దీర్ఘఘనానికి ఏటవాలు చిత్రాన్ని గేయడానికి ప్రయత్నించండి. (ఇలా నిర్మించేటప్పుడు ఒక దీర్ఘఘనం ముఖాలన్నీ దీర్ఘ చతురస్రాలని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి).

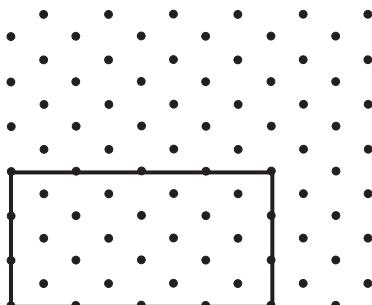
గమనిక: ఘనాలను ఇచ్చిన కొలతలతో ఉండేటట్లు కూడా మనం చిత్రాలను గేయవచ్చు. ఇలా గేయడానికి మనకు తుల్య బిందు కాగితం కావాలి. మనం దీనిని గేయడానికి ప్రయత్నించాం.

make a cuboid with dimensions 4 cm length, 3 cm breadth and 3 cm height on given isometric sheet.

13.4.2 Isometric Sketches

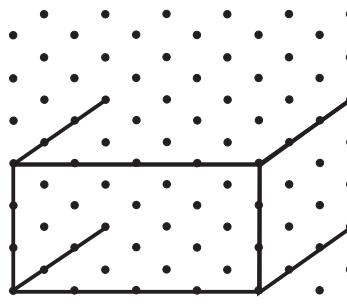
Have you seen an isometric dot sheet? (A sample is given at the end of the book). Such a sheet divides the paper into small equilateral triangles made up of dots or lines. *To draw sketches in which measurements also agree with those of the solid*, we can use isometric dot sheets. [Given on inside of the back cover (3rd cover page).]

Let us attempt to draw an isometric sketch of a cuboid of dimensions $4 \times 3 \times 3$ (which means the edges forming length, breadth and height are 4, 3, 3 units respectively) (Fig 13.13).



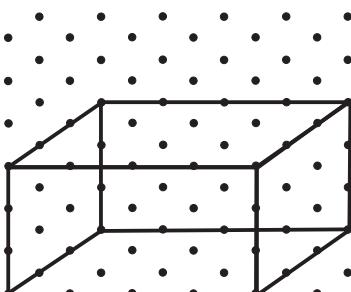
Step 1

Draw a rectangle to show the front face.



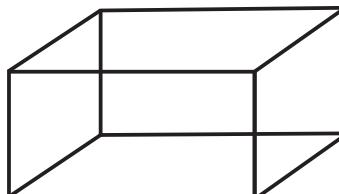
Step 2

Draw four parallel line segments of length 3 starting from the four corners of the rectangle.



Step 3

Connect the matching corners with appropriate line segments.



Step 4

This is an isometric sketch of the cuboid.

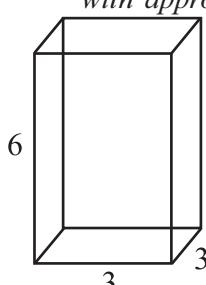


Fig 13.14 (i)

Note that the measurements are of exact size in an isometric sketch; this is not so in the case of an oblique sketch.

EXAMPLE 1 Here is an oblique sketch of a cuboid [Fig 13.14(i)]. Draw an isometric sketch that matches this drawing.

SOLUTION Here is the solution [Fig 13.14(ii)]. Note how the measurements are taken care of.

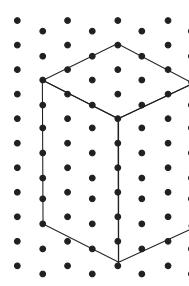


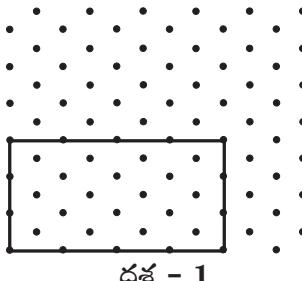
Fig 13.14 (ii)

ఇప్పుడు మనం పొడవు 4 సెం.మీ వెడల్పు 3 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 3 సెం.మీ కొలతలు గల ఒక దీర్ఘ ఫునాన్ని తుల్య బిందు కాగితంపై గేయండి.

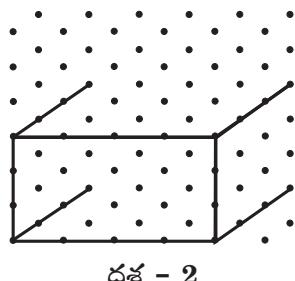
13.4.2 తుల్య రేఖా చిత్రాలు

మీరు తుల్య బిందు కాగితాన్ని చూశారా? (ఈ పుస్తకం చివర ఒక నమూనా ఇవ్వబడింది). ఈ కాగితం అంతా చిన్న చిన్న సమఖాహు త్రిభుజ ఆకారాలు ఉండేటట్లు బిందువులు లేదా గీతలు గేయబడి ఉంటుంది. ఫునాలను ఇచ్చిన కొలతలతో ఉండేటట్లు కూడా మనం చిత్రాలను గేయవచ్చు. ఇలా గేయడానికి మనం తుల్యబిందు కాగితాలను ఉపయోగించవచ్చు. (పుస్తకం చివర పేజీ లోపలి భాగంలో ఇవ్వబడింది. 3 వ కవర్ పేజీ)

ఇప్పుడు మనం ఇప్పుడు మనం $4 \times 3 \times 3$ కొలతలు గల (అనగా పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు వరుసగా 4 యూనిట్లు 3 యూనిట్లు మరియు 3 యూనిట్లు) దీర్ఘఫునాన్ని గేధ్యాం. (పటం 13.13).

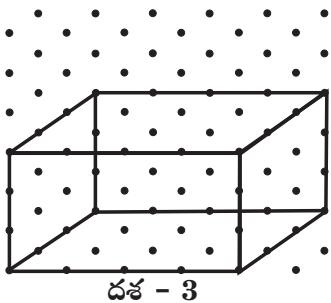


దశ - 1



దశ - 2

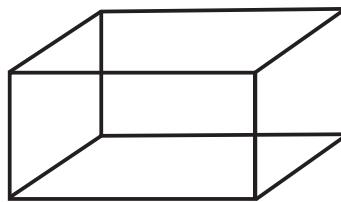
ఎదురుగా ఉండే ముఖాన్ని సూచించే
ఒక దీర్ఘ చతురస్రాన్ని గేయండి



దశ - 3

సంబంధిత శీర్షాలను రేఖా ఖండాలచే కలపండి

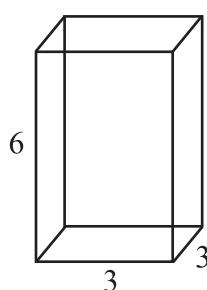
దీర్ఘచతురస్రము నాలుగు శీర్షముల నుండి
నాలుగు సమాంతర రేఖా ఖండాలను
3 యూనిట్ల కొలతతో గేయండి.



దశ - 4

ఇదే మనకు కావలసిన దీర్ఘ ఫునము
యొక్క తుల్య రేఖా చిత్రం

పటం 13.13



పటం 13.14 (i)

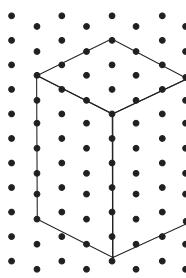
మీరు తుల్యరేఖా చిత్రాలలో ఇచ్చిన కొలతలతో ఖచ్చితంగా సమానంగా ఉండే కొలతలు గల ఫునాకార పటాలను గమనించవచ్చు. కానీ ఏటవాలు చిత్రంలో ఇలా ఉండదు.

ఉధారణ 7

సాధన:

ఒక దీర్ఘ ఫునానికి ఏటవాలు చిత్రం ఇక్కడ ఇవ్వబడినది [పటం 13.14(i)] దానికి సరిపడే ఒక తుల్యరేఖా చిత్రాన్ని గేయండి.

సాధన ఇక్కడ సాధన ఉన్నది. (పటం 13.14(ii) కొలతలను జాగ్రత్తగా ఎలా తీసుకోవాలో గమనించండి. [పటం 13.14(ii)]]



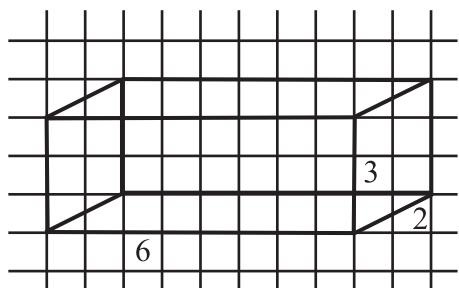
పటం 13.14 (ii)

How many units have you taken along (i) ‘length’? (ii) ‘breadth’? (iii) ‘height’? Do they match with the units mentioned in the oblique sketch?

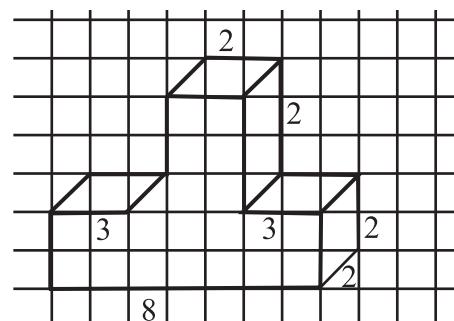


EXERCISE 13.2

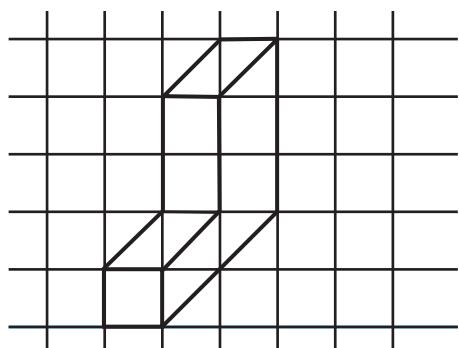
1. Use isometric dot paper and make an isometric sketch for each one of the given shapes:



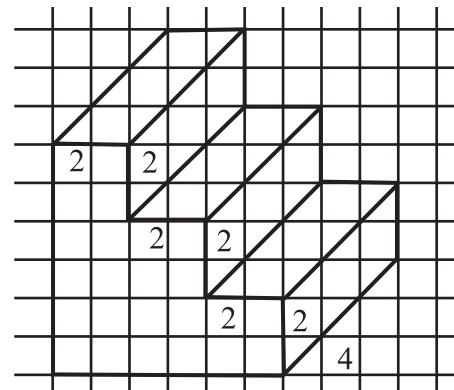
(i)



(ii)



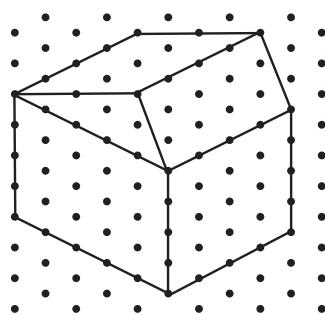
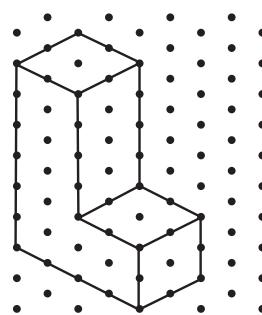
(iii)



(iv)

Fig 13.15

2. The dimensions of a cuboid are 5 cm, 3 cm and 2 cm. Draw three different isometric sketches of this cuboid.
3. Three cubes each with 2 cm edge are placed side by side to form a cuboid. Sketch an oblique or isometric sketch of this cuboid.
4. Make an oblique sketch for each one of the given isometric shapes:

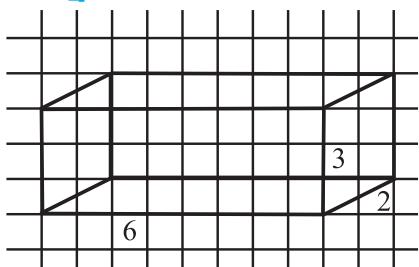


(i) 'పొడవు'? (ii) 'వెడల్పు'? (iii) 'ఎత్తు'? ఈ ప్రమాణాలు ఏటవాలు రేఖాచిత్రంలో పేర్కొనిన ప్రమాణాలతో సరిపోతాయా?

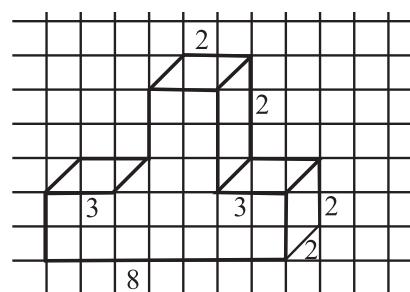


అభ్యాసం 13.2

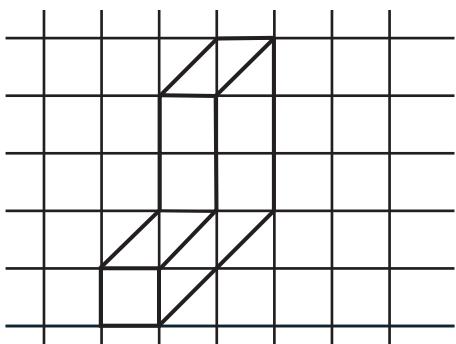
1. కింద ఇచ్చిన ఆకారాలకు తుల్య బిందు కాగితాన్ని ఉపయోగించి తుల్య రేఖా చిత్రాలను గీయండి.



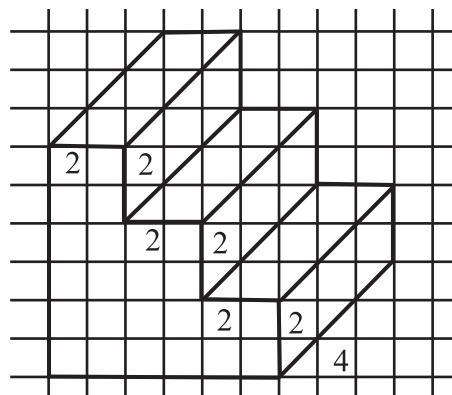
(i)



(ii)



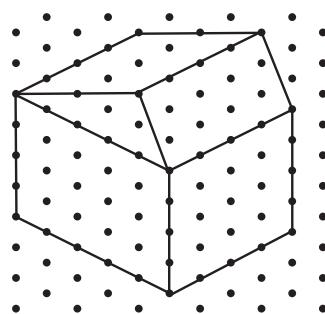
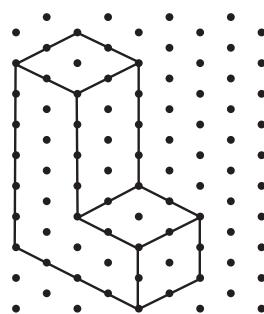
(iii)



(iv)

పటం 13.15

- ఒక దీర్ఘ ఫునం కొలతలు 5. సెం.మీ., 3 సెం. మీ. మరియు 2 సెం.మీ. దీనికి మూడు విభిన్న తుల్య రేఖా చిత్రాలను గీయండి.
- 2 సెం.మీ అంచుగా గల మూడు ఫునములు వరుసగా ఒకదాని పక్షపత్ర ఒకటి సంచబడ్డాయి అవ్యాప్త ఎర్పడిన దీర్ఘఫునానికి ఏటవాలు రేఖా చిత్రము లేదా తుల్య రేఖా చిత్రాన్ని గీయండి.
- కింద ఇప్పబడిన తుల్యరేఖా చిత్రాలకు ఏటవాలు రేఖాచిత్రాలను గీయండి.



168 VISUALISING SOLID SHAPES

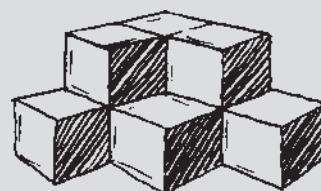
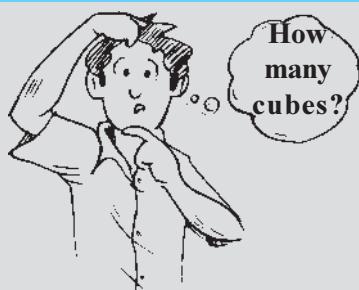
5. Give (i) an oblique sketch and (ii) an isometric sketch for each of the following:

- A cuboid of dimensions 5 cm, 3 cm and 2 cm. (Is your sketch unique?)
- A cube with an edge 4 cm long.

An isometric sheet is attached at the end of the book. You could try to make on it some cubes or cuboids of dimensions specified by your friend.

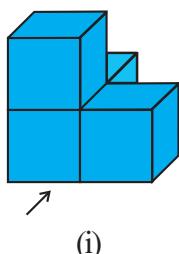
13.4.3 Visualising Solid Objects

Do This

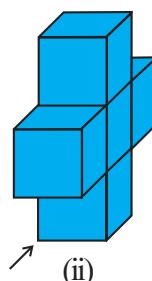


Sometimes when you look at combined shapes, some of them may be hidden from your view.

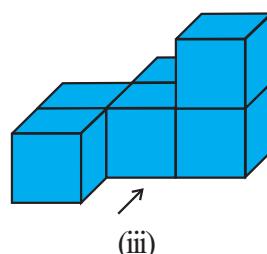
Here are some activities you could try in your free time to help you visualise some solid objects and how they look. Take some cubes and arrange them as shown in Fig 13.16.



(i)



(ii)



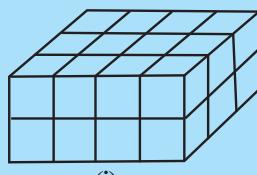
(iii)

Fig 13.16

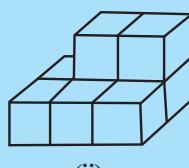
Now ask your friend to guess how many cubes there are when observed from the view shown by the arrow mark.

TRY THESE

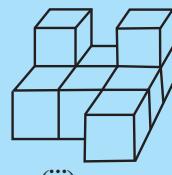
Try to guess the number of cubes in the following arrangements (Fig 13.17).



(i)



(ii)



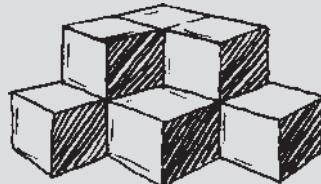
(iii)

Fig 13.17

5. కింద ఇచ్చిన ఆకారాలకు ఏటవాలు రేఖా చిత్రం మరియు తుల్య రేఖా చిత్రాలను గీయండి.
- 5 సెం.మీ 3 సెం.మీ 2 సెం.మీ కొలతలు గల ఒక దీర్ఘ ఫునము (ఇలా మీకు ఒకపే చిత్రం ఏర్పడుతుందా? ఆలోచించండి)
 - అంచు 4 సెం.మీ కొలత గల ఫునం.
- చివరలో తల్లు బిందు కాగితం ఇవ్వబడినది. మీ స్నేహితుడు పేర్కొన్న ఫునాలు లేక దీర్ఘఫునాలు యొక్క ఆకారాలను దానిపై తయారు చేయడానికి మీరు ప్రయత్నించవచ్చును.

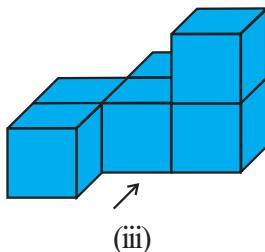
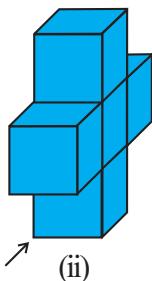
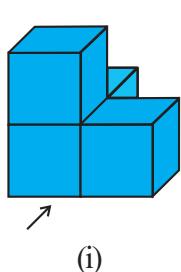
13.4.3 మన వస్తువుల దృష్టీకరణ

ఇది చేయండి



కొన్ని సందర్భాలలో ఆకారాల కూర్చులను గమనిస్తే కొన్ని ఆకారాలు దాగి ఉండి మనకు కనపడకపోవచ్చు.

అటువంటి ఆకారాలను నిశితంగా పరిశీలించి అర్థం చేసుకోవడానికి ఇక్కడ కొన్ని కృత్యాలు ఇవ్వబడ్డాయి.
కొన్ని ఫునాలను తీసుకొని కింది పటాలలో పటం 13.16.చూపినట్లు అమర్చండి.

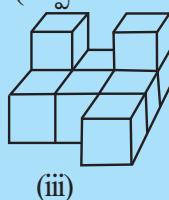
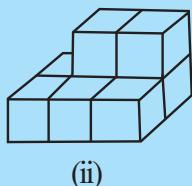
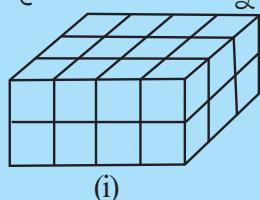


పటం 13.16

బాణం గుర్తు ద్వారా చూపించబడిన వైపు నిశితంగా పరిశీలించి ఎన్ని ఫునాలు ఉన్నాయో మీ స్నేహితుడిని డఱిపాంచి చెప్పమనండి

ప్రయత్నించండి

కింది అమరికలో ఎన్ని ఫునాలు ఉన్నాయో అంచనా వేసి చెప్పండి. (చెప్పండి 13.17).



పటం 13.17

Such visualisation is very helpful. Suppose you form a cuboid by joining such cubes. You will be able to guess what the length, breadth and height of the cuboid would be.

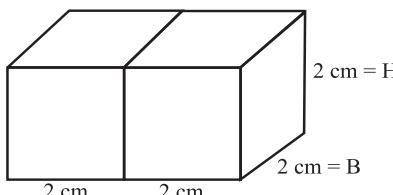


Fig 13.18

EXAMPLE 2 If two cubes of dimensions 2 cm by 2cm by 2cm are placed side by side, what would the dimensions of the resulting cuboid be?

SOLUTION

As you can see (Fig 13.18) when kept side by side, the length is the only measurement which increases, it becomes $2 + 2 = 4$ cm.

The breadth = 2 cm and the height = 2 cm.

TRY THESE

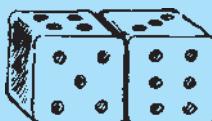


Fig 13.19

- Two dice are placed side by side as shown: Can you say what the total would be on the face opposite to
 - $5 + 6$
 - $4 + 3$
 (Remember that in a die sum of numbers on opposite faces is 7)
- Three cubes each with 2 cm edge are placed side by side to form a cuboid. Try to make an oblique sketch and say what could be its length, breadth and height.

13.5 VIEWING DIFFERENT SECTIONS OF A SOLID

Now let us see how an object which is in 3-D can be viewed in different ways.

13.5.1 One Way to View an Object is by Cutting or Slicing

Slicing game

Here is a loaf of bread (Fig 13.20). It is like a cuboid with a square face. You ‘slice’ it with a knife.

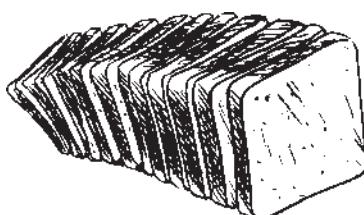


Fig 13.20

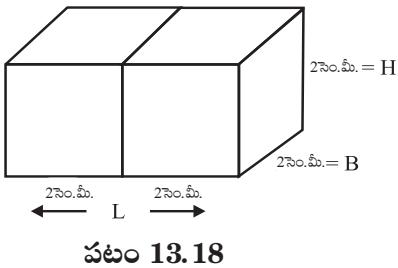
When you give a ‘vertical’ cut, you get several pieces, as shown in the Figure 13.20. Each face of the piece is a square! We call this face a ‘cross-section’ of the whole bread. The cross section is nearly a square in this case.

Beware! If your cut is not ‘vertical’ you may get a different cross section! Think about it. The boundary of the cross-section you obtain is a plane curve. Do you notice it?

A kitchen play

Have you noticed cross-sections of some vegetables when they are cut for the purposes of cooking in the kitchen? Observe the various slices and get aware of the shapes that result as cross-sections.

ఇటువంటి దృశ్యకరణ ఏర్పరచుకోవడం మనకు చాలా ఉపయోగకరం. ఉదాహరణకు మీరు కొన్ని ఘనాలను పక్కపక్కనే ఉంచి ఒక దీర్ఘ ఘనాన్ని తయారు చేసారనుకుండాం. ఆ దీర్ఘఘనాన్నికి పొదవు, వెడల్పు, ఎత్తు ఎంత ఉంటాయో మీరు అంచనా వేయగలుగుతారు.



పటం 13.18

ఉదాహరణ 2: 2 సెం.మీ., 2 సెం.మీ., 2 సెం.మీ కొలతలు గల రెండు ఘనాలు వక్కపక్కనే ఉంచగా ఏర్పడిన దీర్ఘఫునము కొలతలు ఎంత ఉంటాయి?

సాధన: రెండు ఘనాలు ప్రక్క ప్రక్కన ఉంచినప్పుడు కేవలం పొడవు మాత్రమే పెరగడాన్ని మీరు గమనిస్తారు (పటం 13.18) పొడవు = $2 + 2 = 4$ సెం.మీ.

వెడల్పు = 2 సెం.మీ. మరియు పొడవు = 2 సెం.మీ.

ప్రయత్నించండి

పటం 13.19



పటం 13.19

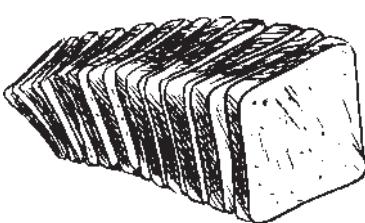
13.5 ఒక ఘనం యొక్క వివిధ భాగాలను చూచుట

ఇప్పుడు మనం ఒక త్రిమితీయ ఆకారంలో ఉన్న ఒక వస్తువును ఎన్ని రకాలుగా, ఎలా చూడవచ్చునో నేర్చాడు.

13.5.1 ఇచ్చిన వస్తువును అడ్డంగా లేదా పలుచని ముక్కలుగా కోసం చూడటం ఒక పద్ధతి పలుచని ముక్కలుగా కతిరించే ఆట

ఇక్కడ ఒక రొట్టెడంది. (పటం 13.20) చూపిన విధంగా ఇది చతురస్రాకార ముఖం గల ఒక దీర్ఘపునంలా ఉంది. దీనిని చాకుతో పలుచని ముక్కలుగా కోయండి. నిలవుగా కోసినప్పుడు పటంలో చూపినట్లు అనేక ముక్కలు ఏర్పడతాయి. ప్రతి ముక్కయొక్క ముఖం ఒక చతురస్రం. ఈ ముఖాన్ని మనం మొత్తం రొట్టె యొక్క ఒక అడ్డకోత అంటాము. అడ్డకోత ఇంచుమించుగా ఒక చతురస్రం.

పటం 13.20



మీరు చేసే ఈ కోత నిలువు కాకపోతే ఉంటే ఏర్పడే అద్భుత వేరుగా ఏర్పడే ప్రమాదం ఉంది. దాని గురించి ఆలోచించండి. ఇలా ఏర్పడిన నిలువు కోత అంచు ఒక సమతల వాకం అనే విషయాన్ని మీరు గమనించురా?

ఒక వంటింటి ఆట

కొన్ని కూరగాయలను వంటగదిలో వంట చేయడానికి తరిగినప్పుడు ఏర్పడే వాటి అడ్డుకోతను మీరు గమనించారా? వివిధ రకాల ముక్కలను పరిశీలించి ఏర్పడే అడ్డుకోతలను వాటి ఆకారాలను తెలుసుకోండి.

Play this

Make clay (or plasticine) models of the following solids and make vertical or horizontal cuts. Draw rough sketches of the cross-sections you obtain. Name them wherever you can.



Fig 13.21

EXERCISE 13.3



Fig. 13.22

13.5.2 Another Way is by Shadow Play

A shadow play

Shadows are a good way to illustrate how three-dimensional objects can be viewed in two dimensions. Have you seen a **shadow play**? It is a form of entertainment using solid articulated figures in front of an illuminated back-drop to create the illusion of moving images. It makes some indirect use of ideas in Mathematics.

You will need a source of light and a few solid shapes for this activity. (If you have an overhead projector, place the solid under the lamp and do these investigations.)

Keep a torchlight, *right in front* of a Cone. What type of shadow does it cast on the screen? (Fig 13.23)

The solid is three-dimensional; what is the dimension of the shadow?

If, instead of a cone, you place a cube in the above game, what type of shadow will you get?

Experiment with different positions of the source of light and with different positions of the solid object. Study their effects on the shapes and sizes of the shadows you get.

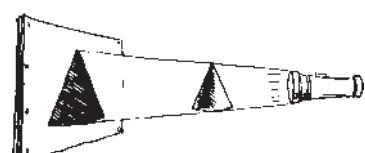


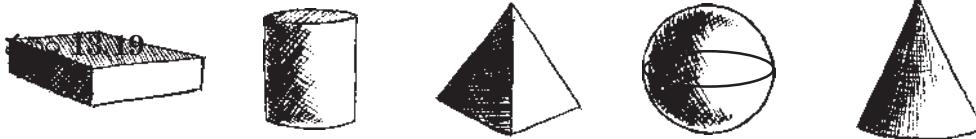
Fig 13.23



(i)

ఆడంబి

కింద ఇచ్చిన ఘనాలకు బంక మట్టితో (లేదా ప్లాస్టిక్) నమూనాలు తయారు చేయండి. వాటిని నిలవుగా మరియు అడ్డంగా కోయండి. ఇలా ఏర్పడిన కోతలకు చిత్తు పటాలను గేసి, తెలిసిన వాటికి పేర్లు రాయండి.

**అభ్యాసం 13.3****1. కింద ఇచ్చిన ఘనాలకు**

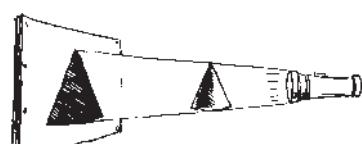
- | | | |
|---------------------------|--|--------------|
| (i) నిలవుకోత మరియు | (ii) అడ్డుకోత చేయగా ఏమి ఏర్పడతాయి? | |
| (a) ఒక ఇటుక | (b) ఒక గుండ్రని ఆపిల్ | (c) ఒక పాచిక |
| (d) ఒక స్ఫూర్హాకార గొట్టం | (e) శంకు ఆకృతిలో ఉన్న ఐస్క్రీమ్ గొట్టం | |

**13.5.2 నీడలతో ఆడటం మరొక పద్ధతి****ఒక నీడతో ఆట**

త్రిమితీయ ఆకారాలకు చెందిన వస్తువులను ద్విమితీయపటాలుగా చూడటానికి వాటి నీడలు చాలా ఉపయోగపడతాయి. మీరు ఎప్పుడైనా నీడతో ఆట చూసారా? కాంతి పుంజ మార్గంలో ఘనాకారాలను రకరకాలుగా కదుల్పుతూ నీడలు కదులుతున్నట్లు భ్రాంతి కలిగించే ఒక రకమైన వినోద సాధనము ఈ నీడ చిత్రాలతో ఆట. దీనిలో గణిత భావనల పరోక్ష వినియోగం ఉంటుంది.

**పటం 13.22**

ఈ కృత్యము చేయడానికి మీకు ఒక కాంతి జనకము మరియు ఘనాకార వస్తువులు కావాలి. (మీకు ఓవర్ పోడ్ ప్రాజెక్టర్ పుంటే, మన వస్తువులను దీపము క్రింద వుంచి ఈ పరిశోధనలు చేయము.)

**పటం****13.23**

ఘనాకార వస్తువు త్రిమితీయమైనది. మరి నీడ సంగతి ఏమిటి?



శంకువుకు బదులుగా, ఒక సమఘనాన్ని వుంచితే ఏ విధమైన నీడ ఏర్పడుతుంది?

కాంతి జనక స్థానాన్ని ఘనాకార వస్తువు స్థానాన్ని మార్చుతూ ప్రయోగాలు చేయండి. ఏర్పడిన నీడలలోని వస్తువుల ఆకారాలు, పరిమాణాలపై ఈ స్థాన మార్పుల ప్రభావాన్ని అధ్యయనం చేయండి.

మీరు ఇప్పటికే ఈ వినోదాత్మక ప్రయోగాన్ని ప్రయత్నించి ఉంటారు. పటం 13.24 (i) లో చూపినట్లు, మధ్యాంత్ర సమయంలో సూర్యుడు దాని ఔనెన ఉన్నప్పుడు ఒక గుండ్రని ప్లేట్‌ను ఎండ సూర్యకిరణాల మార్గంలో ఉంచండి. ఎటువంటి నీడ ఏర్పడటం మీరు గమనించారు?

**(i)**

174 VISUALISING SOLID SHAPES

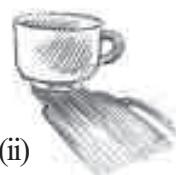
Will it be same during



(a) forenoons?



(b) evenings?



(ii)



(iii)

Fig 13.24 (i) - (iii)

Study the shadows in relation to the position of the Sun and the time of observation.

EXERCISE 13.4

1. A bulb is kept burning just right above the following solids. Name the shape of the shadows obtained in each case. Attempt to give a rough sketch of the shadow. (You may try to experiment first and then answer these questions).



A ball

(i)



A cylindrical pipe

(ii)

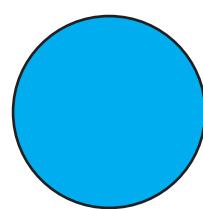


A book

(iii)

2. Here are the shadows of some 3-D objects, when seen under the lamp of an overhead projector. Identify the solid(s) that match each shadow. (There may be multiple answers for these!)

A circle



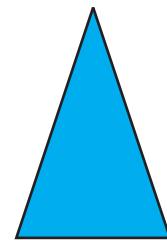
(i)

A square



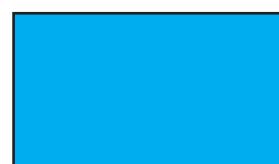
(ii)

A triangle



(iii)

A rectangle



(iv)

అన్ని సందర్భాలలో సమానంగా ఉన్నాయా?



(a) ఉదయం?



(b) సాయంత్రం?



(ii)



(iii)

పటం 13.24 (i) - (iii)

సూర్యుడు వున్న స్థానము, మనము పరిశీలనా కాలాలను దృష్టిలో వుంచుకొని నీడలను అధ్యయనం చేయండి.

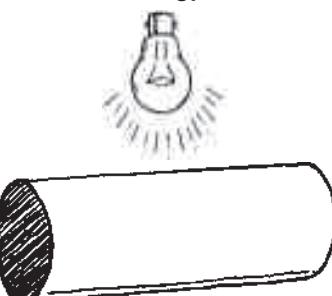
అభ్యాసం 13.4

1. కింద యిచ్చిన ఘనాకార వస్తువుల పై ఒక విద్యుత్ బల్బు వెలుగుతూ వుంది. అప్పు ఏర్పడిన నీడల ఆకారాల పేర్లను తెలపండి. ఆ నీడ చిత్రాల చిత్రు పటాలను గీయడానికి ప్రయత్నించండి. (మొదట వీటిని ప్రయోగం చేయడానికి ప్రయత్నించి తరువాత క్రింది ప్రత్యులకు సమాధానాలు ప్రాయండి).



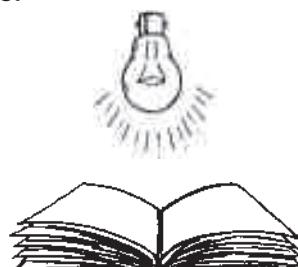
బంతి

(i)



ఒక స్ఫూపాకార గొట్టం

(ii)

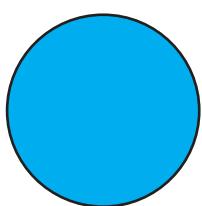


ఒక పుస్తకం

(iii)

2. కింద కొన్ని త్రిమితీయ వస్తువులను ఓవర్ హెడ్ ప్రోజెక్టర్ దీపం క్రింద పెట్టగా ఏర్పడిన నీడలు యివ్వబడ్డాయి. ప్రతీ నీడ ఏర్పడటానికి కారణమయ్యే త్రిమితీయ వస్తువులను గుర్తుపట్టండి (వీటికి అనేక సమాధానాలు వుండవచ్చును)

ఒక వృత్తం



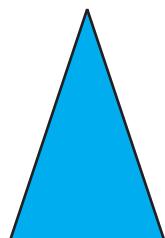
(i)

ఒక చతురస్రం



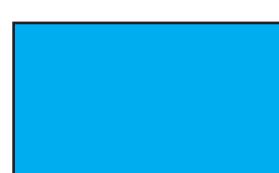
(ii)

ఒక త్రిభుజం



(iii)

ఒక దీర్ఘచతురస్రం



(iv)

3. Examine if the following are true statements:

 - (i) The cube can cast a shadow in the shape of a rectangle.
 - (ii) The cube can cast a shadow in the shape of a hexagon.

13.5.3 A Third Way is by Looking at it from Certain Angles to Get Different Views

One can look at an object standing in front of it or by the side of it or from above. Each time one will get a different view (Fig 13.25).

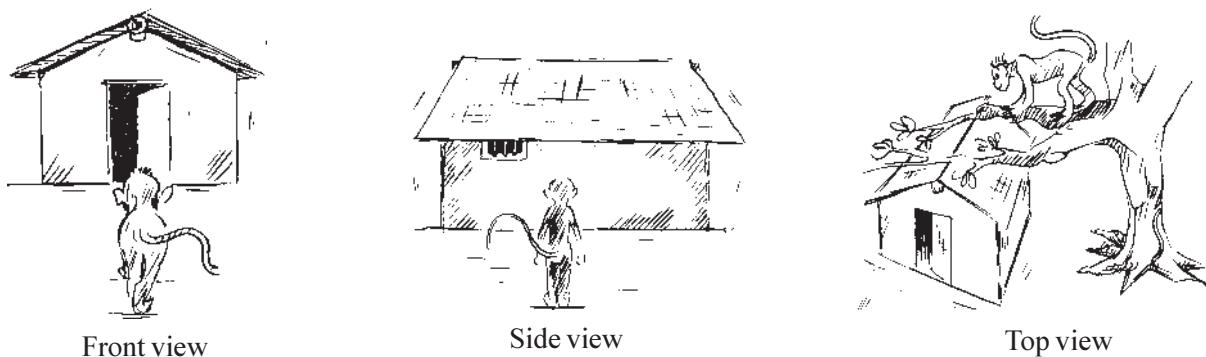


Fig 13.25

Here is an example of how one gets different views of a given building. (Fig 13.26)

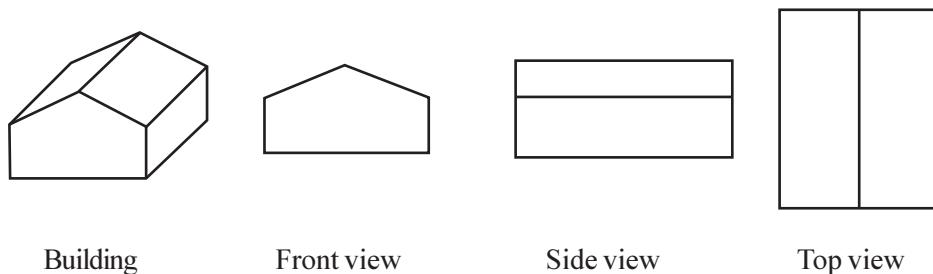


Fig 13.26

You could do this for figures made by joining cubes.

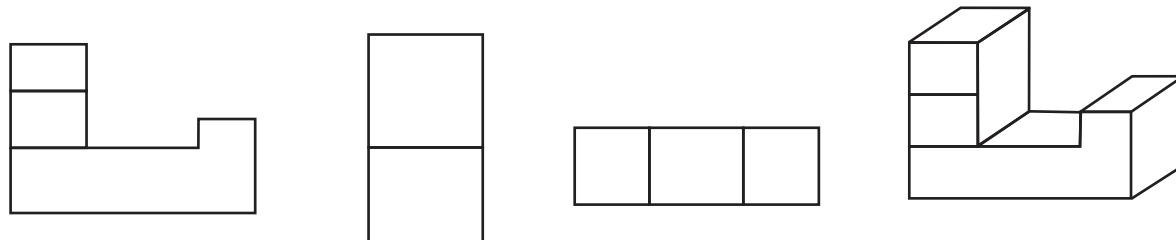


Fig 13.27

Try putting cubes together and then making such sketches from different sides.

3. దిగువ పేర్కొన్న వాక్యాలు నిజమూ కాదా అని పరిశీలించండి.

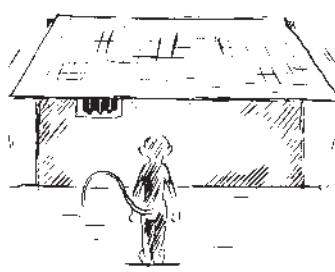
- (i) ఘనము దీర్ఘచతురస్రాకార నీడను ఏర్పరచును.
- (ii) ఘనము షడ్యజాకార నీడను ఏర్పరచును.

13.5.3 మూడవ పద్ధతి ఆకారాన్ని వివిధ కోణాల నుండి చూసి వివిధ వీక్షణాలను పొందడం

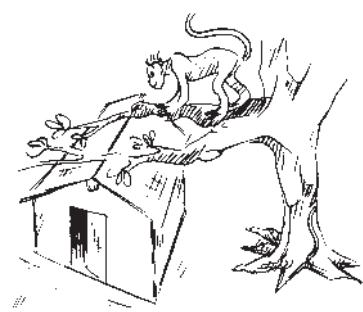
ఒక వస్తువు దాని ముందు లేదా దాని పక్కన లేదా పై నుండి చూడవచ్చు. ప్రతిసారి ఒక భిన్నమైన దృశ్యాన్ని పొందతారు. (పటం 13.25)



ముందు నుండి చూసినప్పుడు



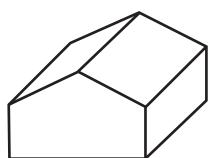
పక్కనుండి చూసినప్పుడు



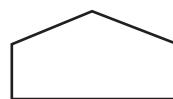
పై నుండి చూసినప్పుడు

పటం 13.25

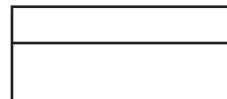
ఇచ్చిన భవనం యొక్క విభిన్న వీక్షణాలను పొందటానికి ఒక ఉదాహరణ. (పటం 13.26)



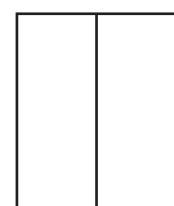
భవనం



ముందు నుండి చూసినప్పుడు



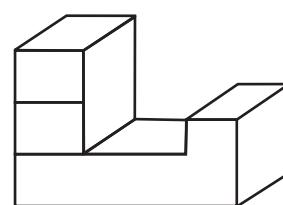
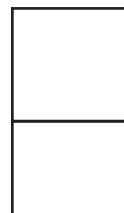
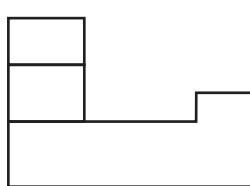
పక్కనుండి చూసినప్పుడు



పై నుండి చూసినప్పుడు

పటం 13.26

ఘనాలను కలపడం ద్వారా ఈ పటాలను పొందవచ్చును.

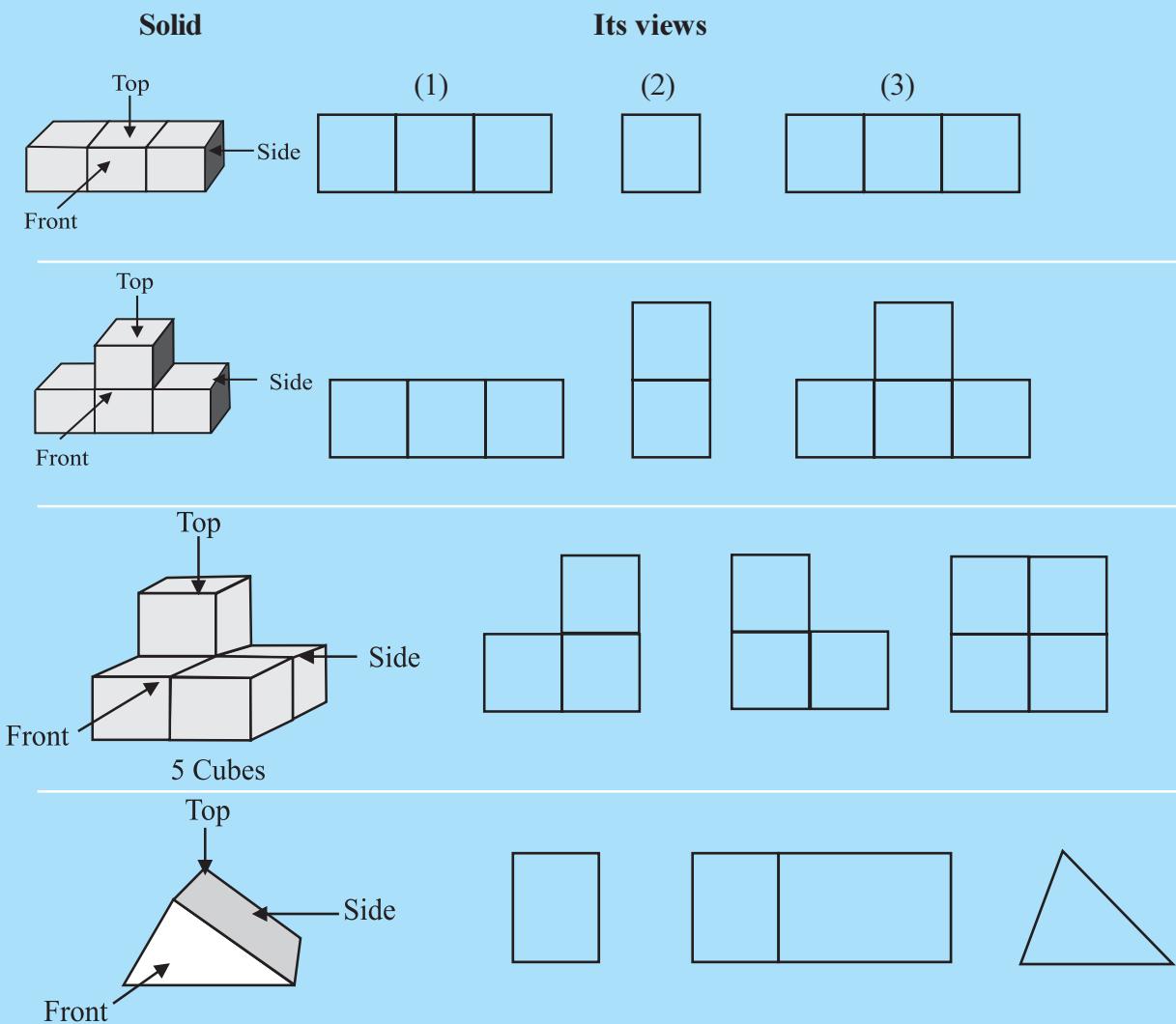


పటం 13.27

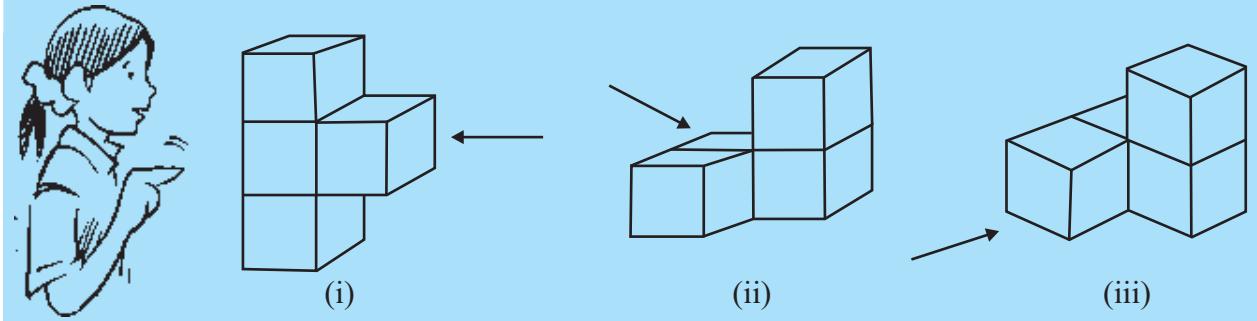
ఘనాలన్నింటిని కలిపి ఉంచి ఆ పై వివిధ వైపుల నుండి ఇటువంటి పటాలను తయారుచేయండి.

TRY THESE

1. For each solid, the three views (1), (2), (3) are given. Identify for each solid the corresponding top, front and side views.

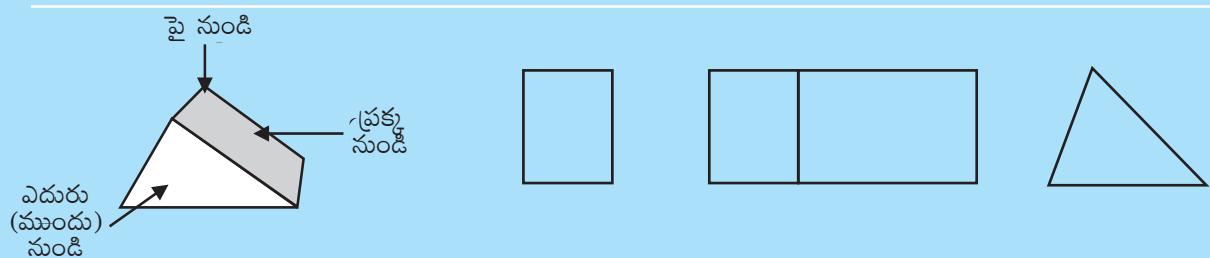
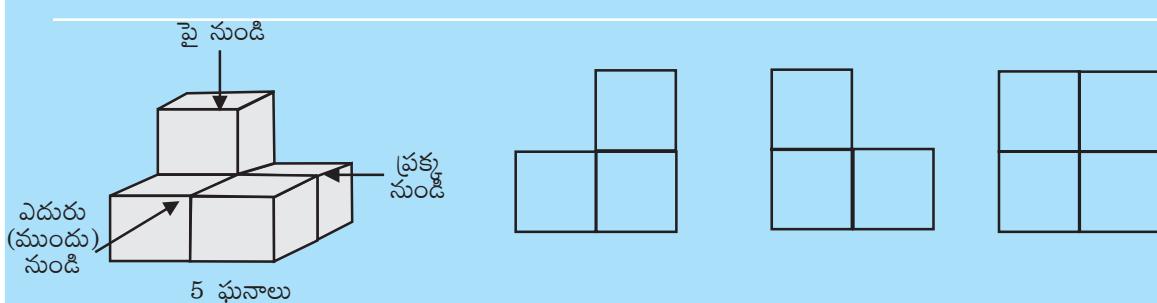
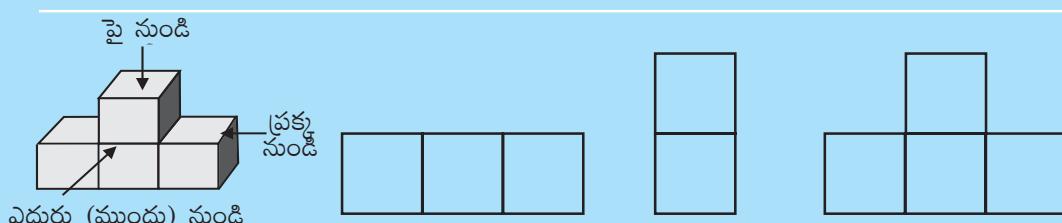
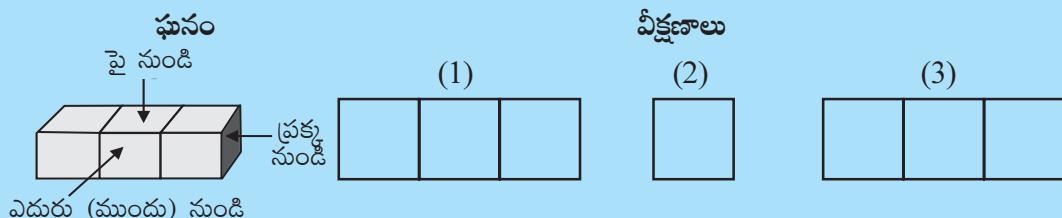


2. Draw a view of each solid as seen from the direction indicated by the arrow.

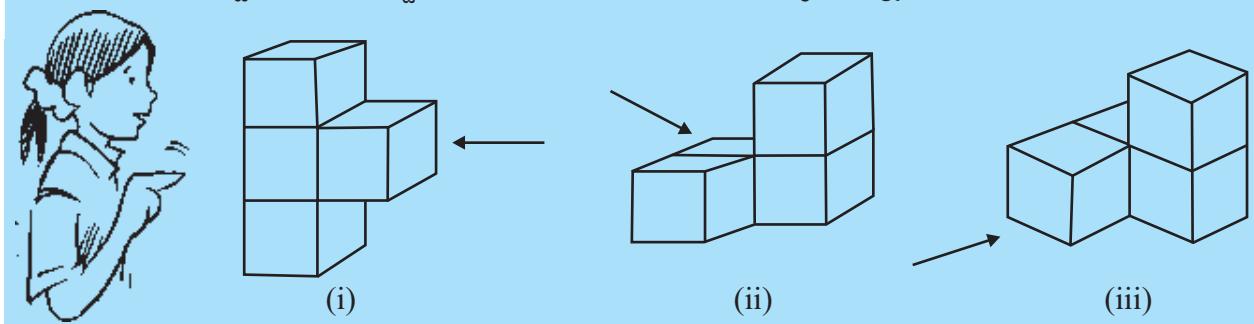


ప్రయత్నించండి

1. ప్రతి ఘనానికి మూడు వీక్షణాలు (1), (2), (3) ఇవ్వబడ్డాయి. ప్రతి ఘనానికి సంబంధించిన పై నుండి, ఎదురు మరియు ప్రక్క వీక్షణాలను గుర్తించండి.



2. బాటం గుర్తు ద్వారా సూచించబడ్డ దిశ నుండి చూసి ప్రతి ఘనం యొక్క పటాన్ని గీయండి.



WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. The circle, the square, the rectangle, the quadrilateral and the triangle are examples of **plane figures**; the cube, the cuboid, the sphere, the cylinder, the cone and the pyramid are examples of **solid shapes**.
2. Plane figures are of **two-dimensions (2-D)** and the solid shapes are of three-dimensions **(3-D)**.
3. The corners of a solid shape are called its **vertices**; the line segments of its skeleton are its **edges**; and its flat surfaces are its **faces**.
4. A **net** is a skeleton-outline of a solid that can be folded to make it. The same solid can have several types of nets.
5. Solid shapes can be drawn on a flat surface (like paper) realistically. We call this **2-D representation of a 3-D solid**.
6. Two types of sketches of a solid are possible:
 - (a) An **oblique sketch** does not have proportional lengths. Still it conveys all important aspects of the appearance of the solid.
 - (b) An **isometric sketch** is drawn on an isometric dot paper, a sample of which is given at the end of this book. In an isometric sketch of the solid the measurements kept proportional.
7. **Visualising solid shapes** is a very useful skill. You should be able to see ‘hidden’ parts of the solid shape.
8. Different sections of a solid can be viewed in many ways:
 - (a) One way is to view by cutting or **slicing** the shape, which would result in the cross-section of the solid.
 - (b) Another way is by observing a 2-D **shadow** of a 3-D shape.
 - (c) A third way is to look at the shape from different angles; the **front-view**, the **side-view** and the **top-view** can provide a lot of information about the shape observed.



మనం ఏమి చర్చించాము?

1. వృత్తము, చతురస్రము, దీర్ఘచతురస్రము, చతుర్భుజము మరియు త్రిభుజము మొదలైనవి సమతల పటాలు ఉదాహరణలు. సమఫునం, దీర్ఘఫునం, గోళం, స్క్రాపం, శంకువు మరియు పిరమిడ్ అనేవి ఫునాక్షతులకు ఉదాహరణలు.
2. సమత పటాలు ద్విమితీయం (2-D)గానూ, ఫునాక్షతులు త్రిమితీయం (3-D) గానూ ఉంటాయి.
3. ఫునాక్షతుల మూలాలను శీర్శాలు అని, ఘనం యొక్క ఆకారాన్ని ఏర్పరచు రేఖా ఖండాలను అంచులని, సమతలాలను ముఖాలని అంటారు.
4. ఒక ఘనాన్ని దాని అంచులు వెంబడి మడవగా ఏర్పడిన దానిని వల రూపము అంటారు. ఒకే ఘనానికి అనేక రూపాల్లో వలలు ఉంటాయి.
5. ఘనాక్షతులను సమతలాలు (కాగితం వంటివి) పైన వాస్తవికంగా గీయవచ్చు. దీనిని త్రిమితీయ (3-D) ఆకారాల ద్విమితీయ (2-D) రూపాలు అంటారు.
6. రెండు పద్ధతుల్లో ఘనాకారాలను గీయడం సాధ్యం.
 - (a) ఏటవాలు రేఖాచిత్రాలలో పొడవులు అనుపాతంలో ఉండవు. కానీ ఇది ఘనరూపానికి సంబంధించి అనేక అంశాలను తెలియజేస్తుంది.
 - (b) తుల్య రేఖాచిత్రాలను తుల్య బిందు కాగితం పైన గీస్తాము. (పుస్తకం చివర ఒక సమూనా ఇవ్వబడినది) ఘనాల తుల్య రేఖాచిత్రాలలో కొలతలు అనుపాతంలో ఉంటాయి.
7. ఘన వస్తువులకు ఊహచిత్రాల నేర్పరచడం చాలా ఉపయోగకరమైన సైపుణ్యం. ఘనాక్షతులలో దాగివున్న భాగాలను కూడా చూడవచ్చు.
8. ఒక ఘనము యొక్క వివిధ భాగాలను చూపుట
 - (a) ఇచ్చిన వస్తువును అడ్డంగా పలుచని ముక్కలుగా కోసి చూడటం ఒక పద్ధతి. దానివలన ఘనం యొక్క అడ్డు కొలతను చూడవచ్చు.
 - (b) త్రిమితీయ (3-D) ఆకారాల నీడను ద్విమితీయ (2-D) ఆకారంలో గమనించడం మరొక మార్గం.
 - (c) వివిధ కోణాల నుండి ఆకారాన్ని చూడడం మూడో మార్గం. ముందు వీక్షణం, పక్క నుండి వీక్షణం మరియు పై నుండి వీక్షణాలు చాలా సమాచారాన్ని అందించగలవు.



ANSWERS

EXERCISE 8.1

1. (i) $\frac{-2}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{7}$

(ii) $\frac{-3}{2}, \frac{-5}{3}, \frac{-8}{5}, \frac{-10}{7}, \frac{-9}{5}$

(iii) $\frac{-35}{45} \left(= \frac{-7}{9} \right), \frac{-34}{45}, \frac{-33}{45} \left(= \frac{-11}{15} \right), \frac{-32}{45}, \frac{-31}{45}$

(iv) $\frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

2. (i) $\frac{-15}{25}, \frac{-18}{30}, \frac{-21}{35}, \frac{-24}{40}$

(ii) $\frac{-4}{16}, \frac{-5}{20}, \frac{-6}{24}, \frac{-7}{28}$

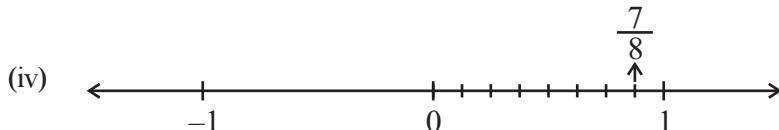
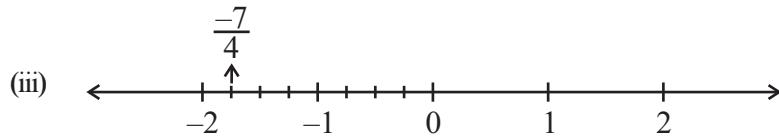
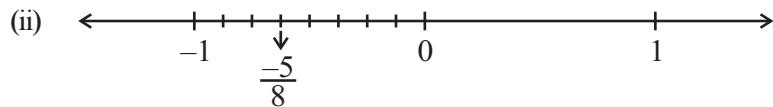
(iii) $\frac{5}{-30}, \frac{6}{-36}, \frac{7}{-42}, \frac{8}{-48}$

(iv) $\frac{8}{-12}, \frac{10}{-15}, \frac{12}{-18}, \frac{14}{-21}$

3. (i) $\frac{-4}{14}, \frac{-6}{21}, \frac{-8}{28}, \frac{-10}{35}$

(ii) $\frac{10}{-6}, \frac{15}{-9}, \frac{20}{-12}, \frac{25}{-15}$

(iii) $\frac{8}{18}, \frac{12}{27}, \frac{16}{36}, \frac{28}{63}$



5. P represents $\frac{7}{3}$ Q represents $\frac{8}{3}$ R represents $\frac{-4}{3}$ S represents $\frac{-5}{3}$

6. (ii), (iii), (iv), (v)

7. (i) $\frac{-4}{3}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-11}{18}$ (iv) $\frac{-4}{5}$

8. (i) $<$ (ii) $<$ (iii) $=$ (iv) $>$ (v) $<$ (vi) $=$ (vii) $>$

9. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}$ (iii) $\frac{2}{-3}$ (iv) $\frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}$

10. (i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{-4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{9}$ (iii) $\frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{7}$

జవాబులు

అభ్యాసం 8.1

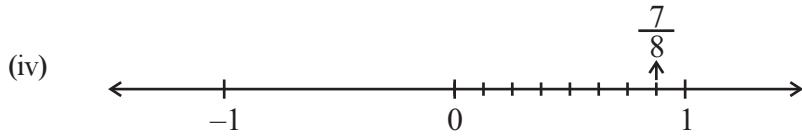
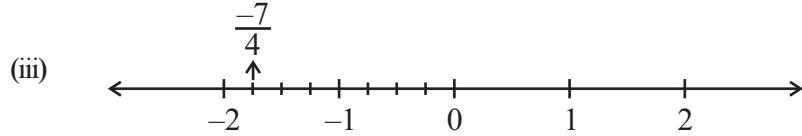
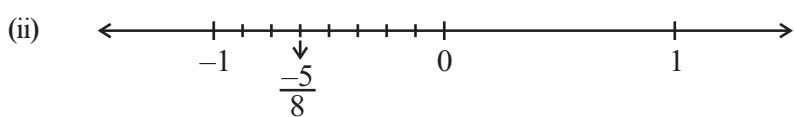
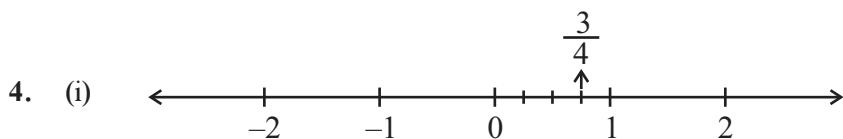
1. (i) $\frac{-2}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{-3}{2}, \frac{-5}{3}, \frac{-8}{5}, \frac{-10}{7}, \frac{-9}{5}$

(iii) $\frac{-35}{45} \left(= \frac{-7}{9} \right), \frac{-34}{45}, \frac{-33}{45} \left(= \frac{-11}{15} \right), \frac{-32}{45}, \frac{-31}{45}$ (iv) $\frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

2. (i) $\frac{-15}{25}, \frac{-18}{30}, \frac{-21}{35}, \frac{-24}{40}$ (ii) $\frac{-4}{16}, \frac{-5}{20}, \frac{-6}{24}, \frac{-7}{28}$

(iii) $\frac{5}{-30}, \frac{6}{-36}, \frac{7}{-42}, \frac{8}{-48}$ (iv) $\frac{8}{-12}, \frac{10}{-15}, \frac{12}{-18}, \frac{14}{-21}$

3. (i) $\frac{-4}{14}, \frac{-6}{21}, \frac{-8}{28}, \frac{-10}{35}$ (ii) $\frac{10}{-6}, \frac{15}{-9}, \frac{20}{-12}, \frac{25}{-15}$ (iii) $\frac{8}{18}, \frac{12}{27}, \frac{16}{36}, \frac{28}{63}$



5. P అనేది $\frac{7}{3}$ ను సూచిస్తుంది Q అనేది $\frac{8}{3}$ ను సూచిస్తుంది R అనేది $\frac{-4}{3}$ ను సూచిస్తుంది S అనేది $\frac{-5}{3}$ ను సూచిస్తుంది

6. (ii), (iii), (iv), (v)

7. (i) $\frac{-4}{3}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-11}{18}$ (iv) $\frac{-4}{5}$

8. (i) $<$ (ii) $<$ (iii) $=$ (iv) $>$ (v) $<$ (vi) $=$ (vii) $>$

9. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}$ (iii) $\frac{2}{-3}$ (iv) $\frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}$

10. (i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{-4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{9}$ (iii) $\frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{7}$

EXERCISE 8.2

1. (i) $\frac{-3}{2}$ (ii) $\frac{34}{15}$ (iii) $\frac{17}{30}$ (iv) $\frac{82}{99}$
 (v) $\frac{-26}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3}$ (vii) $\frac{34}{15}$
2. (i) $\frac{-13}{72}$ (ii) $\frac{23}{63}$ (iii) $\frac{1}{195}$ (iv) $\frac{-89}{88}$ (v) $\frac{-73}{9}$
3. (i) $\frac{-63}{8}$ (ii) $\frac{-27}{10}$ (iii) $\frac{-54}{55}$ (iv) $\frac{-6}{35}$ (v) $\frac{6}{55}$
 (vi) 1
4. (i) - 6 (ii) $\frac{-3}{10}$ (iii) $\frac{4}{15}$ (iv) $\frac{-1}{6}$ (v) $\frac{-14}{13}$
 (vi) $\frac{91}{24}$ (vii) $\frac{-15}{4}$

EXERCISE 9.1

1. (a) 28 cm^2 (b) 15 cm^2 (c) 8.75 cm^2 (d) 24 cm^2 (e) 8.8 cm^2
 2. (a) 6 cm^2 (b) 8 cm^2 (c) 6 cm^2 (d) 3 cm^2
 3. (a) 12.3 cm (b) 10.3 cm (c) 5.8 cm (d) 1.05 cm
 4. (a) 11.6 cm (b) 80 cm (c) 15.5 cm
 5. (a) 91.2 cm^2 (b) 11.4 cm
 6. length of BM = 30cm ; length of DL = 42 cm
 7. Area of $\triangle ABC = 30 \text{ cm}^2$; length of AD = $\frac{60}{13} \text{ cm}$
 8. Area of $\triangle ABC = 27 \text{ cm}^2$; length of CE = 7.2 cm

EXERCISE 9.2

1. (a) 88 cm (b) 176 mm (c) 132 cm
 2. (a) 616 mm^2 (b) 1886.5 m^2 (c) $\frac{550}{7} \text{ cm}^2$
 3. $24.5 \text{ m}; 1886.5 \text{ m}^2$ 4. $132 \text{ m}; ₹ 528$ 5. 21.98 cm^2
 6. $4.71 \text{ m}; ₹ 70.65$ 7. 25.7 cm 8. $₹ 30.14$ (approx.) 9. $7 \text{ cm}; 154 \text{ cm}^2; 11\text{cm}; \text{circle.}$
 10. 536 cm^2 11. 23.44 cm^2 12. $5 \text{ cm}; 78.5 \text{ cm}^2$ 13. 879.20 m^2
 14. Yes 15. $119.32 \text{ m}; 56.52\text{m}$ 16. 200 Times 17. 94.2 cm

అభ్యాసం 8.2

1. (i) $\frac{-3}{2}$ (ii) $\frac{34}{15}$ (iii) $\frac{17}{30}$ (iv) $\frac{82}{99}$
 (v) $\frac{-26}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3}$ (vii) $\frac{34}{15}$
2. (i) $\frac{-13}{72}$ (ii) $\frac{23}{63}$ (iii) $\frac{1}{195}$ (iv) $\frac{-89}{88}$ (v) $\frac{-73}{9}$
3. (i) $\frac{-63}{8}$ (ii) $\frac{-27}{10}$ (iii) $\frac{-54}{55}$ (iv) $\frac{-6}{35}$ (v) $\frac{6}{55}$
 (vi) 1
4. (i) - 6 (ii) $\frac{-3}{10}$ (iii) $\frac{4}{15}$ (iv) $\frac{-1}{6}$ (v) $\frac{-14}{13}$
 (vi) $\frac{91}{24}$ (vii) $\frac{-15}{4}$

అభ్యాసం 9.1

1. (a) 28 సెం.మీ² (b) 15 సెం.మీ² (c) 8.75 సెం.మీ² (d) 24 సెం.మీ² (e) 8.8 సెం.మీ²
 2. (a) 6 సెం.మీ² (b) 8 సెం.మీ² (c) 6 సెం.మీ² (d) 3 సెం.మీ²
 3. (a) 12.3 సెం.మీ (b) 10.3 సెం.మీ (c) 5.8 సెం.మీ (d) 1.05 సెం.మీ
 4. (a) 11.6 సెం.మీ (b) 80 సెం.మీ (c) 15.5 సెం.మీ
 5. (a) 91.2 సెం.మీ (b) 11.4 సెం.మీ
 6. BM పొడవు = 30 సెం.మీ; DL పొడవు = 42 సెం.మీ

7. ΔABC వైశాల్యము = 30 సెం.మీ²; AD పొడవు = $\frac{60}{13}$ సెం.మీ

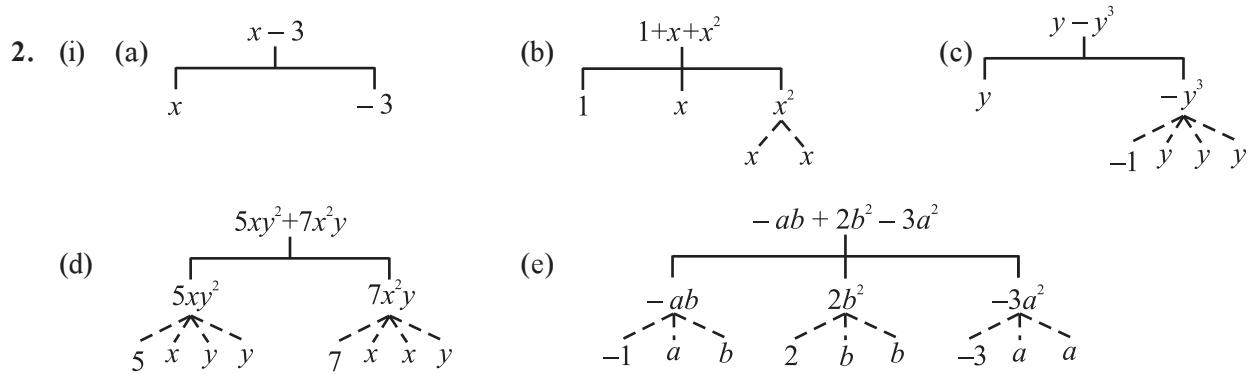
8. ΔABC వైశాల్యము = 27 సెం.మీ²; CE పొడవు = 7.2 సెం.మీ

అభ్యాసం 9.2

1. (a) 88 సెం.మీ² (b) 176 మి.మీ (c) 132 సెం.మీ
 2. (a) 616 మి.మీ² (b) 1886.5 మీ² (c) $\frac{550}{7}$ సెం.మీ²
 3. 24.5 మీ; 1886.5 మీ² 4. 132 మీ; ₹ 528 5. 21.98 సెం.మీ²
 6. 4.71 మీ; ₹ 70.65 7. 25.7 సెం.మీ 8. ₹ 30.14 (సుమారుగా) 9. 7 సెం.మీ; 154 సెం.మీ²; 11 సెం.మీ; వృత్తము
 10. 536 సెం.మీ² 11. 23.44 సెం.మీ² 12. 5 సెం.మీ; 78.5 సెం.మీ² 13. 879.20 మీ²
 14. అవును 15. 119.32 మీ; 56.52 మీ 16. 200 రెట్లు 17. 94.2 సెం.మీ

EXERCISE 10.1

1. (i) $y - z$ (ii) $\frac{1}{2}(x + y)$ (iii) z^2 (iv) $\frac{1}{4}pq$ (v) $x^2 + y^2$ (vi) $5 + 3mn$
 (vii) $10 - yz$ (viii) $ab - (a + b)$

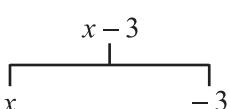


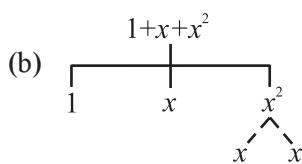
(ii)	Expression	Terms	Factors
(a)	$-4x + 5$	$-4x$ 5	$-4, x$ 5
(b)	$-4x + 5y$	$-4x$ $5y$	$-4, x$ $5, y$
(c)	$5y + 3y^2$	$5y$ $3y^2$	$5, y$ $3, y, y$
(d)	$xy + 2x^2y^2$	xy $2x^2y^2$	x, y $2, x, x, y, y$
(e)	$pq + q$	pq q	p, q q
(f)	$1.2ab - 2.4b + 3.6a$	$1.2ab$ $-2.4b$ $3.6a$	$1.2, a, b$ $-2.4, b$ $3.6, a$
(g)	$\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}x$ $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}, x$ $\frac{1}{4}$
(h)	$0.1p^2 + 0.2q^2$	$0.1p^2$ $0.2q^2$	$0.1, p, p$ $0.2, q, q$

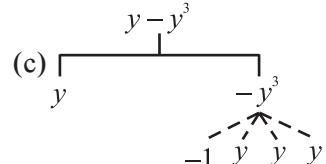
ಅಭ್ಯಾಸಂ 10.1

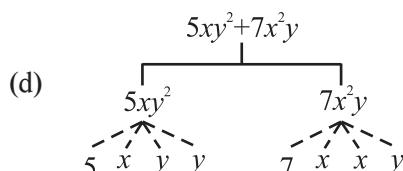
1. (i) $y - z$ (ii) $\frac{1}{2}(x + y)$ (iii) z^2 (iv) $\frac{1}{4}pq$ (v) $x^2 + y^2$ (vi) $5 + 3$ ಮೀ.

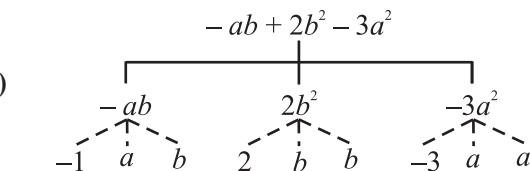
(vii) $10 - yz$ (viii) $ab - (a + b)$

2. (i) (a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

(ii)

	ಸರ್ವಾಂಶಮು	ಪದಾಲು	ಕಾರಣಾಂಕಮುಲು
(a)	$-4x + 5$	$-4x$ 5	$-4, x$ 5
(b)	$-4x + 5y$	$-4x$ 5y	$-4, x$ 5, y
(c)	$5y + 3y^2$	$5y$ $3y^2$	$5, y$ $3, y, y$
(d)	$xy + 2x^2y^2$	xy $2x^2y^2$	x, y $2, x, x, y, y$
(e)	$pq + q$	pq q	p, q q
(f)	$1.2ab - 2.4b + 3.6a$	$1.2ab$ $-2.4b$ $3.6a$	$1.2, a, b$ $-2.4, b$ $3.6, a$
(g)	$\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}x$ $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}, x$ $\frac{1}{4}$
(h)	$0.1p^2 + 0.2q^2$	$0.1p^2$ $0.2q^2$	$0.1, p, p$ $0.2, q, q$

3.

	Expression	Terms	Coefficients
(i)	$5 - 3t^2$	$- 3 t^2$	-3
(ii)	$1 + t + t^2 + t^3$	t	1
		t^2	1
		t^3	1
(iii)	$x + 2xy + 3y$	x	1
		$2xy$	2
		$3y$	3
(iv)	$100m + 1000n$	$100m$	100
		$1000n$	1000
(v)	$- p^2q^2 + 7pq$	$- p^2q^2$	-1
		$7pq$	7
(vi)	$1.2a + 0.8b$	$1.2 a$	1.2
		$0.8 b$	0.8
(vii)	$3.14r^2$	$3.14r^2$	3.14
(viii)	$2(l + b)$	$2l$	2
		$2b$	2
(ix)	$0.1y + 0.01y^2$	$0.1y$	0.1
		$0.01y^2$	0.01

4. (a)

	Expression	Terms with x	Coefficient of x
(i)	$y^2x + y$	y^2x	y^2
(ii)	$13y^2 - 8yx$	$- 8yx$	$- 8y$
(iii)	$x + y + 2$	x	1
(iv)	$5 + z + zx$	zx	z
(v)	$1 + x + xy$	x	1
		xy	y
(vi)	$12xy^2 + 25$	$12xy^2$	$12y^2$
(vii)	$7 + xy^2$	xy^2	y^2

(b)

	Expression	Terms with y^2	Coefficient of y^2
(i)	$8 - xy^2$	$- xy^2$	$- x$
(ii)	$5y^2 + 7x$	$5y^2$	5
(iii)	$2x^2y - 15xy^2 + 7y^2$	$- 15xy^2$ $7y^2$	$- 15x$ 7

3.

	సమానము	వదాలు	గుణకాలు
(i)	$5 - 3t^2$	$- 3 t^2$	-3
(ii)	$1 + t + t^2 + t^3$	t t^2 t^3	1 1 1
(iii)	$x + 2xy + 3y$	x $2xy$ $3y$	1 2 3
(iv)	$100m + 1000n$	$100m$ $1000n$	100 1000
(v)	$- p^2q^2 + 7pq$	$- p^2q^2$ $7pq$	-1 7
(vi)	$1.2a + 0.8b$	$1.2 a$ $0.8 b$	1.2 0.8
(vii)	$3.14r^2$	$3.14r^2$	3.14
(viii)	$2(l + b)$	$2l$ $2b$	2 2
(ix)	$0.1y + 0.01y^2$	$0.1y$ $0.01y^2$	0.1 0.01

4. (a)

	సమానము	x కలిగి ఉన్న వదాలు	x యొక్క గుణకం
(i)	$y^2x + y$	y^2x	y^2
(ii)	$13y^2 - 8yx$	$- 8yx$	$- 8y$
(iii)	$x + y + 2$	x	1
(iv)	$5 + z + zx$	zx	z
(v)	$1 + x + xy$	x xy	1 y
(vi)	$12xy^2 + 25$	$12xy^2$	$12y^2$
(vii)	$7 + xy^2$	xy^2	y^2

(b)

	సమానము	y^2 కలిగి ఉన్న వదాలు	y^2 యొక్క గుణకం
(i)	$8 - xy^2$	$- xy^2$	$- x$
(ii)	$5y^2 + 7x$	$5y^2$	5
(iii)	$2x^2y - 15xy^2 + 7y^2$	$- 15xy^2$ $7y^2$	$- 15x$ 7

5. (i) binomial (ii) monomial (iii) trinomial (iv) monomial
 (v) trinomial (vi) binomial (vii) binomial (viii) monomial
 (ix) trinomial (x) binomial (xi) binomial (xii) trinomial
6. (i) like (ii) like (iii) unlike (iv) like
 (v) unlike (vi) unlike
7. (a) $-xy^2, 2xy^2, -4yx^2, 20x^2y, 8x^2, -11x^2, -6x^2, 7y, y, -100x, 3x, -11yx, 2xy$.
 (b) $10pq, -7qp, 78qp, 7p, 2405p, 8q, -100q, -p^2q^2, 12q^2p^2, -23, 41, -5p^2, 701p^2, 13p^2q, qp^2$

EXERCISE 10.2

1. (i) 0 (ii) 1 (iii) -1 (iv) 1 (v) 1
2. (i) -1 (ii) -13 (iii) 3 3. (i) -9 (ii) 3 (iii) 0 (iv) 1
4. (i) 8 (ii) 4 (iii) 0 5. (i) -2 (ii) 2 (iii) 0 (iv) 2
6. (i) $5x - 13; -3$ (ii) $8x - 1; 15$ (iii) $11x - 10; 12$ (iv) $11x + 7; 29$
7. (i) $2x+4; 10$ (ii) $-4x + 6; -6$ (iii) $-5a + 6; 11$ (iv) $-8b + 6; 22$ (v) $3a - 2b - 9; -8$
8. (i) 1000 (ii) 20 9. -5 10. $2a^2 + ab + 3; 38$

EXERCISE 11.1

1. (i) 64 (ii) 729 (iii) 121 (iv) 625
2. (i) 6^4 (ii) t^2 (iii) b^4 (iv) $5^2 \times 7^3$ (v) $2^2 \times a^2$ (vi) $a^3 \times c^4 \times d$
3. (i) 2^9 (ii) 7^3 (iii) 3^6 (iv) 5^5
4. (i) 3^4 (ii) 3^5 (iii) 2^8 (iv) 2^{100} (v) 2^{10}
5. (i) $2^3 \times 3^4$ (ii) 5×3^4 (iii) $2^2 \times 3^3 \times 5$ (iv) $2^4 \times 3^2 \times 5^2$
6. (i) 2000 (ii) 196 (iii) 40 (iv) 768 (v) 0
 (vi) 675 (vii) 144 (viii) 90000
7. (i) -64 (ii) 24 (iii) 225 (iv) 8000
8. (i) $2.7 \times 10^{12} > 1.5 \times 10^8$ (ii) $4 \times 10^{14} < 3 \times 10^{17}$

EXERCISE 11.2

1. (i) 3^{14} (ii) 6^5 (iii) a^5 (iv) 7^{x+2} (v) 5^3 (vi) $(10)^5$
 (vii) $(ab)^4$ (viii) 3^{12} (ix) 2^8 (x) 8^{t-2}
2. (i) 3^3 (ii) 5^3 (iii) 5^5 (iv) 7×11^5 (v) 3^0 or 1 (vi) 3
 (vii) 1 (viii) 2 (ix) $(2a)^2$ (x) a^{10} (xi) a^3b (xii) 2^8
3. (i) False; $10 \times 10^{11} = 10^{12}$ and $(100)^{11} = 10^{22}$ (ii) False; $2^3 = 8, 5^2 = 25$
 (iii) False; $6^5 = 2^5 \times 3^5$ (iv) True; $3^0 = 1, (1000)^0 = 1$
4. (i) $2^8 \times 3^4$ (ii) $2 \times 3^3 \times 5$ (iii) $3^6 \times 2^6$ (iv) $2^8 \times 3$ 5. (i) 98 (ii) $\frac{5t^4}{8}$ (iii) 1

ಅಭ್ಯಾಸಂ 10.2

అభ్యాసం 11.1

- 1.** (i) 64 (ii) 729 (iii) 121 (iv) 625

2. (i) 6^4 (ii) t^2 (iii) b^4 (iv) $5^2 \times 7^3$ (v) $2^2 \times a^2$ (vi) $a^3 \times c^4 \times d$

3. (i) 2^9 (ii) 7^3 (iii) 3^6 (iv) 5^5

4. (i) 3^4 (ii) 3^5 (iii) 2^8 (iv) 2^{100} (v) 2^{10}

5. (i) $2^3 \times 3^4$ (ii) 5×3^4 (iii) $2^2 \times 3^3 \times 5$ (iv) $2^4 \times 3^2 \times 5^2$

6. (i) 2000 (ii) 196 (iii) 40 (iv) 768 (v) 0
 (vi) 675 (vii) 144 (viii) 90000

7. (i) - 64 (ii) 24 (iii) 225 (iv) 8000

8. (i) $2.7 \times 10^{12} > 1.5 \times 10^8$ (ii) $4 \times 10^{14} < 3 \times 10^{17}$

ಅಭ್ಯಾಸಂ 11.2

1. (i) 3^{14} (ii) 6^5 (iii) a^5 (iv) 7^{x+2} (v) 5^3 (vi) $(10)^5$
 (vii) $(ab)^4$ (viii) 3^{12} (ix) 2^8 (x) 8^{t-2}

2. (i) 3^3 (ii) 5^3 (iii) 5^5 (iv) 7×11^5 (v) 3^0 (vi) 1
 (vii) 1 (viii) 2 (ix) $(2a)^2$ (x) a^{10} (xi) a^3b (xii) 2^8

3. (i) అప్పుడో; $10 \times 10^{11} = 10^{12}$ మరియు $(100)^{11} = 10^{22}$ (ii) అప్పుడో; $2^3 = 8, 5^2 = 25$
 (iii) అప్పుడో; $6^5 = 2^5 \times 3^5$ (iv) సత్కుండా; $3^0 = 1, (1000)^0 = 1$

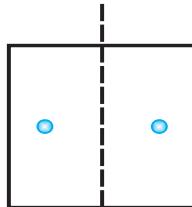
4. (i) $2^8 \times 3^4$ (ii) $2 \times 3^3 \times 5$ (iii) $3^6 \times 2^6$ (iv) $2^8 \times 3$ 5. (i) 98 (ii) $\frac{5t^4}{8}$ (iii) 1

EXERCISE 11.3

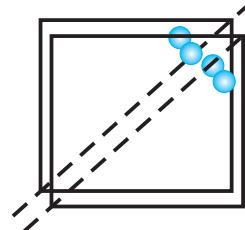
1. $279404 = 2 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
 $3006194 = 3 \times 10^6 + 0 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
 $2806196 = 2 \times 10^6 + 8 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$
 $120719 = 1 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0$
 $20068 = 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 8 \times 10^0$
2. (a) 86045 (b) 405302 (c) 30705 (d) 900230
 3. (i) 5×10^7 (ii) 7×10^6 (iii) 3.1865×10^9 (iv) 3.90878×10^5
 (v) 3.90878×10^4 (vi) 3.90878×10^3
 4. (a) 3.84×10^8 m (b) 3×10^8 m/s (c) 1.2756×10^7 m (d) 1.4×10^9 m
 (e) 1×10^{11} (f) 1.2×10^{10} years (g) 3×10^{20} m (h) 6.023×10^{22}
 (i) 1.353×10^9 km³ (j) 1.027×10^9

EXERCISE 12.1

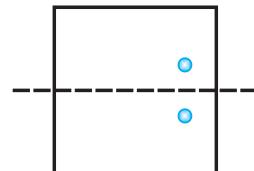
1.



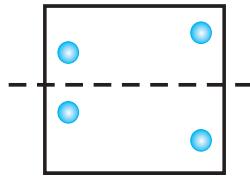
(a)



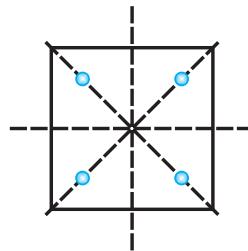
(b)



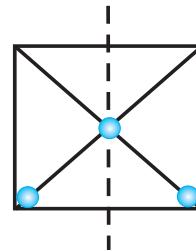
(c)



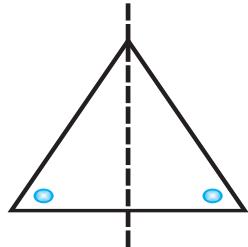
(d)



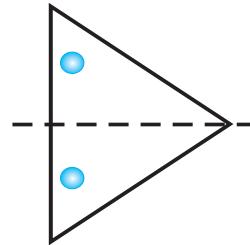
(e)



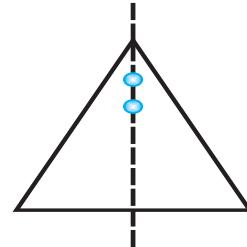
(f)



(g)



(h)



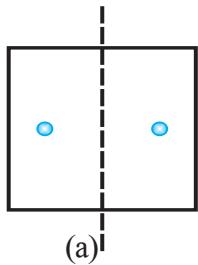
(i)

అభ్యాసం 11.3

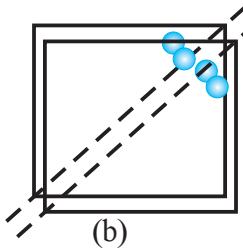
1. $279404 = 2 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
 $3006194 = 3 \times 10^6 + 0 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
 $2806196 = 2 \times 10^6 + 8 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$
 $120719 = 1 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0$
 $20068 = 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 8 \times 10^0$
2. (a) 86045 (b) 405302 (c) 30705 (d) 900230
 3. (i) 5×10^7 (ii) 7×10^6 (iii) 3.1865×10^9 (iv) 3.90878×10^5
 (v) 3.90878×10^4 (vi) 3.90878×10^3
 4. (a) 3.84×10^8 మీ (b) 3×10^8 మీ/సె (c) 1.2756×10^7 మీ (d) 1.4×10^9 మీ
 (e) 1×10^{11} (f) 1.2×10^{10} సంవత్సరాలు (g) 3×10^{20} మీ (h) 6.023×10^{22}
 (i) 1.353×10^9 కి.మీ.³ (j) 1.027×10^9

అభ్యాసం 12.1

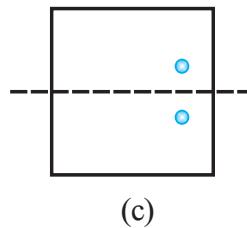
1.



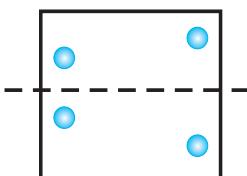
(a)



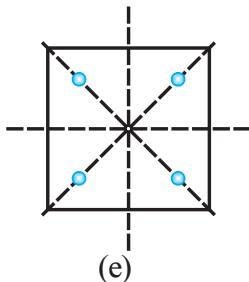
(b)



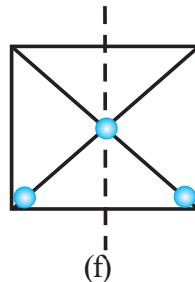
(c)



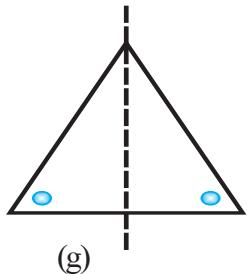
(d)



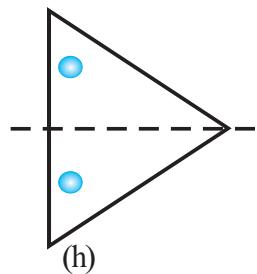
(e)



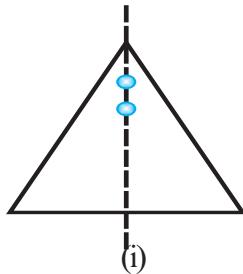
(f)



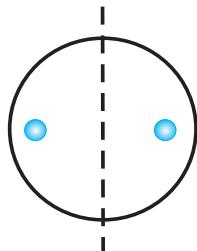
(g)



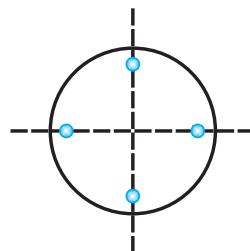
(h)



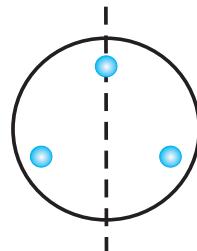
(i)



(j)

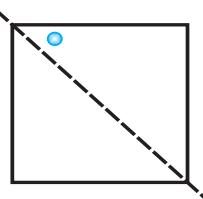


(k)

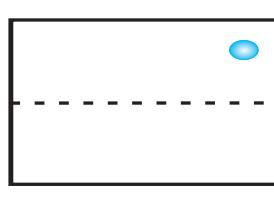


(l)

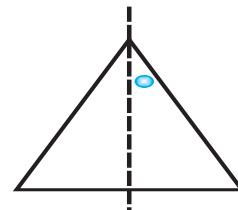
2.



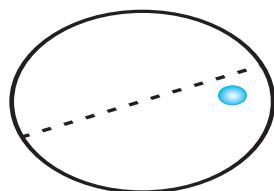
(a)



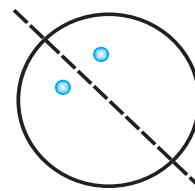
(b)



(c)

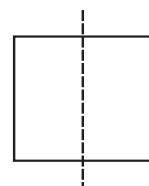


(d)

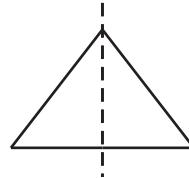


(e)

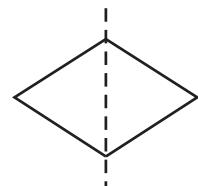
3.



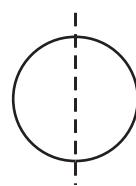
(a) Square



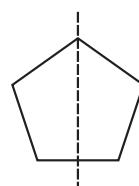
(b) Triangle



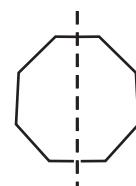
(c) Rhombus



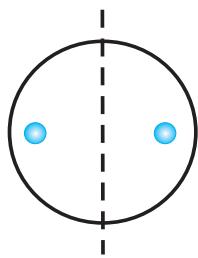
(d) Circle



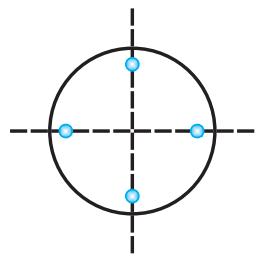
(e) Pentagon



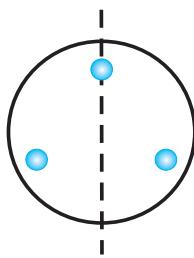
(f) Octagon



(j)

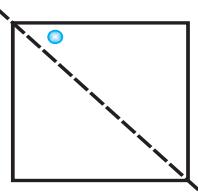


(k)

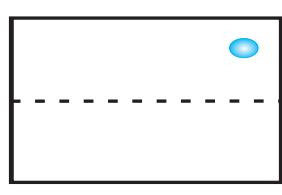


(l)

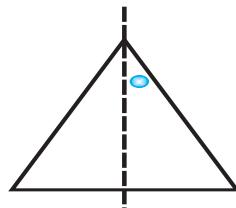
2.



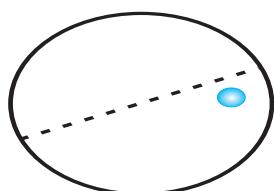
(a)



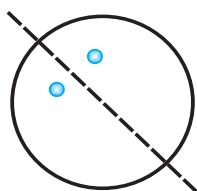
(b)



(c)

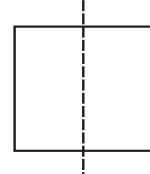


(d)

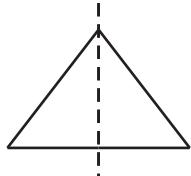


(e)

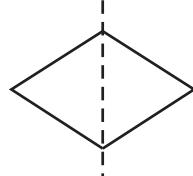
3.



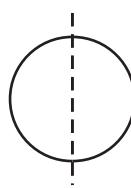
(a) చతురంగము



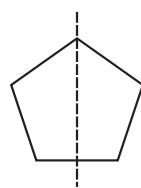
(b) త్రిభుజము



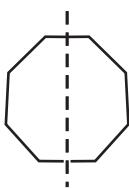
(c) రాంబస్



(d) వృత్తము

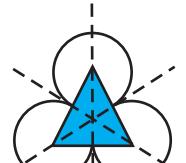


(e) పంచభుజి

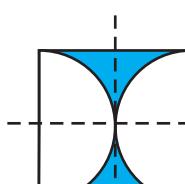


(f) అష్టభుజి

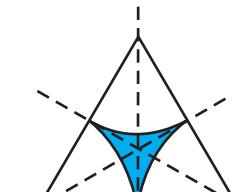
4.



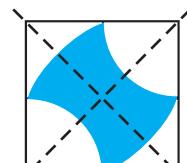
(a)



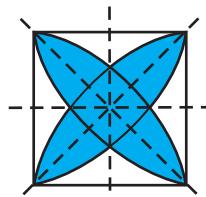
(b)



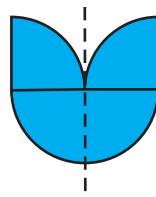
1
(c)



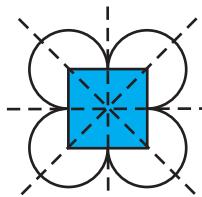
(d)



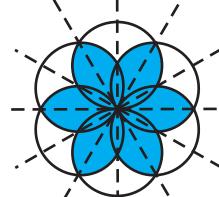
(e)



(f)



(g)



(h)

7. (a) 3 (b) 1 (c) 0 (d) 4 (e) 2 (f) 2
(g) 0 (h) 0 (i) 6 (j) Infinitely many

8. (a) A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y (b) B, C, D, E, H, I, O, X
(c) O, X, I, H

10. (a) Median (b) Diameter

EXERCISE 12.2

1. (a), (b), (d), (e), (f)
2. (a) 2 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 4 (f) 5
 (g) 6 (h) 3

EXERCISE 12.3

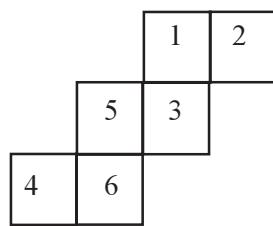
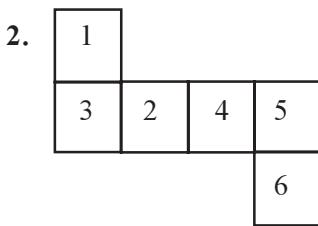
3. Yes 5. Square 6. $120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 360^\circ$
7. (i) Yes (ii) No

EXERCISE 13.1

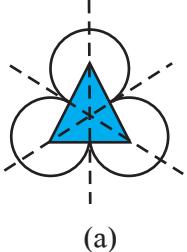
1. Nets in (ii), (iii), (iv), (vi) form cubes.

- 1

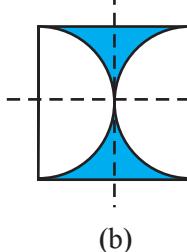
- | | | | | |
|--|--|--|--|--|
| | | | | |
| | | | | |



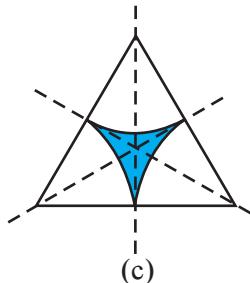
4.



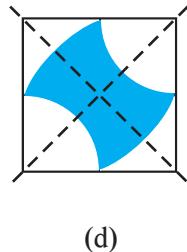
(a)



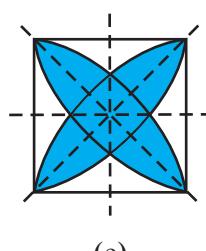
(b)



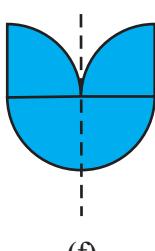
(c)



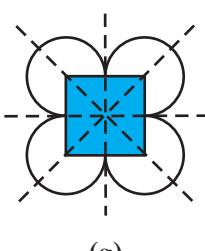
(d)



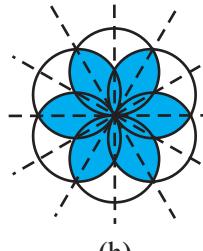
(e)



(f)



(g)



(h)

7. (a) 3 (b) 1 (c) 0 (d) 4 (e) 2 (f) 2
 (g) 0 (h) 0 (i) 6 (j) అనంతమైన
 8. (a) A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y (b) B, C, D, E, H, I, O, X
 (c) O, X, I, H
 10. (a) మధ్యగతం (b) వ్యాసము

అభ్యాసం 12.2

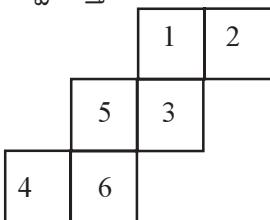
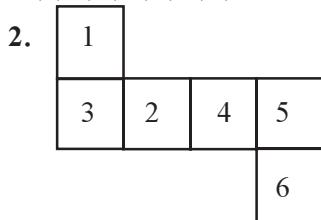
1. (a), (b), (d), (e), (f)
 2. (a) 2 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 4 (f) 5
 (g) 6 (h) 3

అభ్యాసం 12.3

3. అవును 5. చతురపు 6. $120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 360^\circ$
 7. (i) అవును (ii) కాదు

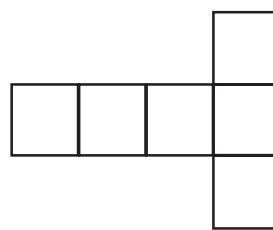
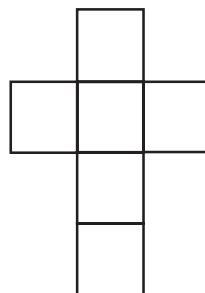
అభ్యాసం 13.1

1. (ii), (iii), (iv), (vi) వల రూపాలు ఘనాలను ఏర్పరుస్తాయి.



3. No, because one pair of opposite faces will have 1 and 4 on them whose total is not 7, and another pair of opposite faces will have 3 and 6 on them whose total is also not 7.

4. Three faces



5. (a) (ii) (b) (iii) (c) (iv) (d) (i)



BRAIN-TEASERS

1. Solve the number riddles:

(i) Tell me who I am! Who I am!

Take away from me the number eight,
Divide further by a dozen to come up with
A full team for a game of cricket!

(ii) Add four to six times a number,

To get exactly sixty four!
Perfect credit is yours to ask for

If you instantly tell the score!



2. Solve the teasers:

(i) There was in the forest an old Peepal tree

The grand tree had branches ten and three

On each branch there lived birds fourteen

Sparrows brown, crows black and parrots green!

Twice as many as the parrots were the crows

And twice as many as the crows were the sparrows!

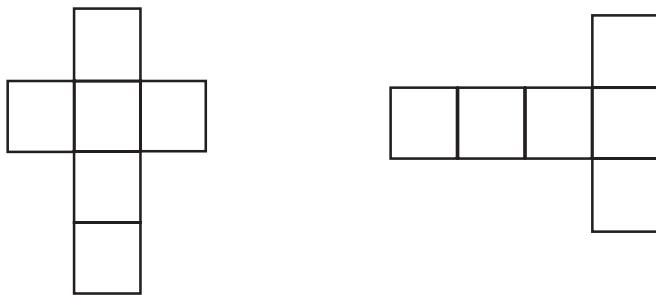
We wonder how many birds of each kind

Aren't you going to help us find?

(ii) I have some five-rupee coins and some two-rupee coins. The number of two-rupee coins is twice the number of five-rupee coins. The total money I have is 108 rupees. So how many five-rupee coins do I have? And how many two-rupee coins?

3. I have 2 vats each containing 2 mats. 2 cats sat on each of the mats. Each cat wore 2 funny old hats. On each hat lay 2 thin rats. On each rat perched 2 black bats. How many things are in my vats?

3. లేదు, ఎందుకంటే ఒక జత ఎదురెదురు ముఖాలపై 1 మరియు 4 ఉంటాయి. వాటి మొత్తం 7 కాదు, మరొక జత ఎదురెదురు ముఖాలపై 3 మరియు 6 కలిగి ఉంటే వాటి మొత్తం కూడా 7 కాదు.
 4. మూడు ముఖాలు



5. (a) (ii) (b) (iii) (c) (iv) (d) (i)

మెదడుకు మేత

1. పొదుపు కథలు విప్పండి:

 - (i) నేనెవరో చెప్పు! నేను ఎవరు!
నా నుండి ఎనిమిది సంఖ్యను తీసివేయండి,
ముందుకు రావడానికి డజనుతో మరింత విభజించండి
క్రికెట్ ఆట కోసం పూర్తి జట్టు!!
 - (ii) సంఖ్యకు నాలుగు నుండి ఆరు సార్లు జోడించండి,
సరిగొ అరవై నాలుగు పొందడానికి!
అడగడానికి పర్ఫాఫ్ట్ క్రిడిట్ మీదే
మీరు తక్కుంమే సోడ్ర్ చెబితే!!

2. టీజర్లెను పరిష్కరించండి:

 - (i) అడవిలో హేత రావిచెట్టు ఉండేది
పెద్ద చెట్టుకు పది మరియు మూడు కొమ్మలు ఉన్నాయి,
ఒక్కో కొమ్మాపై పద్మాలుగు పక్కలు ఉండేవి
గోధుమ రంగు పిచ్చుకలు, నల్ల కాకులు మరియు ఆకుపచ్చ చిలుకలు!
చిలుకల కంటే రెండింతలు కాకులు
మరియు కాకుల కంటే రెండింతలు పిచ్చుకలు!
ఒక్కో రకమైన పక్కలు ఎన్ని ఉన్నాయో మనం ఆశ్చర్యపోతున్నాం
మీరు కనుగొనడంలో మాకు సహాయం చేయగలరా?
 - (ii) నా దగ్గర కొన్ని బదు రూపాయల నాటేలు మరియు కొన్ని రెండు రూపాయల నాటేలు ఉన్నాయి. రెండు రూపాయల నాటేల సంఖ్య బదు రూపాయల నాటేల సంఖ్య కంటే రెండింతలు. నా దగ్గర ఉన్న మొత్తం డబ్బు 108 రూపాయలు.
ఖతే నా దగ్గర ఎన్ని బదు రూపాయల నాటేలు ఉన్నాయి? మరి రెండు రూపాయల నాటేలు ఎన్ని?

3. నా దగ్గర 2 వాటీలు ఒక్కాక్కటి 2 మూటలు ఉన్నాయి. ఒక్కో చాప మీద 2 పిల్లలు కూర్చున్నాయి. ప్రతి పిల్లి 2 ఘనీ పాత టోపీలను ధరించింది. ప్రతి టోపీపై 2 సన్నని ఎలుకలు ఉంటాయి. ప్రతి ఎలుక మీద 2 నల్ల గబ్బిలాలు ఉన్నాయి. నా వాటీలో ఎన్ని వసువులు ఉన్నాయి?





200 MATHEMATICS

4. Twenty-seven small cubes are glued together to make a big cube. The exterior of the big cube is painted yellow in colour. How many among each of the 27 small cubes would have been painted yellow on
 - (i) only one of its faces?
 - (ii) two of its faces?
 - (iii) three of its faces?
5. Rahul wanted to find the height of a tree in his garden. He checked the ratio of his height to his shadow's length. It was 4:1. He then measured the shadow of the tree. It was 15 feet. So what was the height of the tree?
6. A woodcutter took 12 minutes to make 3 pieces of a block of wood. How much time would be needed to make 5 such pieces?
7. A cloth shrinks 0.5% when washed. What fraction is this?
8. Smita's mother is 34 years old. Two years from now mother's age will be 4 times Smita's present age. What is Smita's present age?
9. Maya, Madhura and Mohsina are friends studying in the same class. In a class test in geography, Maya got 16 out of 25. Madhura got 20. Their average score was 19. How much did Mohsina score?

Answers

1. (i) 140 (ii) 10
2. (i) Sparrows: 104, crows: 52, Parrots: 26
 (ii) Number of ₹ 5 coins = 12, Number of ₹ 2 coins = 24
3. 124
4. (i) 6 (ii) 10 (iii) 8
5. 60 feet
6. 24 minutes
7. $\frac{1}{200}$
8. 7 years
9. 21

4. ఇరవై ఏడు చిన్న కూబ్లను అతికించి పెద్ద కూబ్లను తయారు చేస్తారు. పెద్ద కూబ్ యొక్క వెలుపలి భాగం పసుపు రంగులో పెయింట్ చేయబడింది. ప్రతి 27 చిన్న ఘనాలలో ఎన్ని
 (i) దాని ముఖాలలో ఒకటి మాత్రమే?
 (ii) దాని రెండు ముఖాలు?
 (iii) దాని మూడు ముఖాలు? పసుపు రంగులో పెయింట్ చేయబడి ఉంటాయి.
5. రాహల్ తన తోటలోని చెట్టు ఎత్తును కనుగొనాలనుకున్నాడు. అతను తన ఎత్తు మరియు నీడ పొడవు నిష్పత్తిని సరిచూశాడు. ఇది 4:1. ఆ తర్వాత చెట్టు నీడను కొలిచాడు. 15 అడుగులు ఉండేది. కాబట్టి చెట్టు ఎత్తు ఎంత?
6. ఒక చెక్క కట్టర్ 3 చెక్క ముక్కలను తయారు చేయడానికి 12 నిమిషాలు పట్టింది. అలాంటి 5 ముక్కలు చేయడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది?
7. ఒక గుడ్డ ఉటికినప్పుడు 0.5% తగిపోతుంది. దీని భీన్నం ఎంత?
8. స్కూల్ తల్లి వయసు 34 ఏళ్లు. ఇప్పటి నుండి రెండు సంవత్సరాల తరువాత తల్లి వయస్సు స్కూల్ ప్రస్తుత వయస్సు కంటే 4 రెళ్లు ఉంటుంది. స్కూల్ ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?
9. మాయ, మధుర, మొహసినా ఒకే తరగతి చదువుతున్న స్నేహితులు. భోగోళిక శాస్త్రంలో తరగతి పరీక్షలో, మాయకు 25కి 16 వచ్చాయి. మధురకు 20 వచ్చాయి. వారి సగటు సోర్కు 19. మొహసినా ఎంత సోర్కు చేసింది?

సమాధానాలు

1. (i) 140 (ii) 10
2. (i) పిచ్చుకలు: 104, కాకులు: 52, చిలుకలు: 26
 (ii) ₹ 5 నాటేల సంఖ్య = 12, ₹ 2 నాటేల సంఖ్య = 24
3. 124 4. (i) 6 (ii) 12 (iii) 8 5. 60 అడుగులు
6. 20 నిమిషాలు 7. $\frac{1}{200}$ 8. 9 సంవత్సరాలు 9. 21



FUNDAMENTAL DUTIES

Fundamental duties: It shall be the duty of every citizen of India-

- (a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;
- (b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;
- (c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;
- (d) to defend the country and render national service when called upon to do so;
- (e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;
- (f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;
- (g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers and wild life, and to have compassion for living creatures;
- (h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;
- (i) to safeguard public property and to abjure violence.
- (j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;
- (k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be ward between the age of six and fourteen years;

- **Constitution of India,**
Part IV A (Article 51 A)

Right of Children to Free and Compulsory Education (RTE) Act, 2009

The RTE Act provides for the right of children to free and Compulsory Education to every child in the age group of 6 – 14 years which came into force from 1st April 2010 in Andhra Pradesh.

Important provisions of RTE Act

- Ensure availability of schools within the reach of the children.
- Improve School infrastructure facilities.
- Enroll children in the class appropriate to his / her age.
- Children have a right to receive special training in order to be at par with other children.
- Providing appropriate facilities for the education of children with special needs on par with other children.
- No child shall be liable to pay any kind of fee or charges or expenses which may prevent him or her from pursuing and completing the elementary education. No test for admitting the children in schools.
- No removal of name and repetition of the child in the same class.
- No child admitted in a school shall be held back in any class or expel from school till the completion of elementary education.
- No child shall be subjected to physical punishment or mental harassment.
- Admission shall not be denied or delayed on the ground that the transfer and other certificates have not been provided on time.
- Eligible candidates alone shall be appointed as teachers.
- The teaching learning process and evaluation procedures shall promote achievement of appropriate competencies.
- No board examinations shall be conducted to the children till the completion of elementary education.
- Children can continue in the schools even after 14 years until completion of elementary education.
- No discrimination and related practices towards children belonging to backward and marginalized communities.
- The curriculum and evaluation procedures must be in conformity with the values enshrined in the constitution and make the child free of fear and anxiety and help the child to express views freely.