НИУ ВШЭ НН. Факультет ИМиКН. Методы анализа данных. Charge de cours: В. А. Калягин

Домашнее задание 1: данные, пропуски, выбросы, методы снижения размерности (PCA, MDS). **Вариант 14**.
Выполнил: **Игорь Рухович**

Импортируем необходимые библиотеки

In [ ]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
from matplotlib import pyplot as plt
import seaborn as sns
```

Код для чтения данных + общие переменные

In [ ]:
```
data_path = "../data/xls/"
filename = lambda number: f"22MAG_HW_1_v{number}.xls"
variants = range(1, 16)
my_variant = 14
random_state = 123
columns = [
    "Age (years)",
    "Family size",
    "Monthly income (RUB)",
    "Residence in the region (years)",
    "Car valuation (USD)",
    "Loan amount (x1000 RUB)",
]
dtypes = [
    int,
    int,
    float,
    float,
    float,
    int,
]
types_dict = {elem[0]: elem[1] for elem in zip(columns, dtypes)}

def read_specific_variant(number: int) -> pd.DataFrame:
    return pd.read_excel(data_path + filename(number), header=None, names=columns)

def read_all_variants(hue: int = None) -> pd.DataFrame:
    dfs = []
    for var in variants:
        new_df = read_specific_variant(var)
        if hue is not None:
            val = "14th variant" if hue == var else "others"
            new_df["data_from"] = val
        dfs.append(new_df)
        result = pd.concat(dfs, ignore_index=True)
    return result
```

Данные. Первичная обработка.

1. Рассмотрим данные

Для большей полноты картины для работы были взяты данные из всех 15 вариантов.
Для чистоты эксперимента, на всех графиках и преобразованиях будем отдельно помечать мой вариант (№14).
Создадим дополнительную колонку `data_from`, в которой разделим `14th variant` и `others`.
Рассмотрим первые строчки полных данных:

In [ ]:
```
df = read_all_variants(my_variant)
df14 = read_specific_variant(my_variant)
df.head()
```

Out[ ]:

	Age (years)	Family size	Monthly income (RUB)	Residence in the region (years)	Car valuation (USD)	Loan amount (x1000 RUB)	data_from
0	38.0	2.0	22600.0	8.0	22000.0	NaN	others
1	47.0	2.0	11200.0	14.0	12000.0	119000.0	others
2	NaN	2.0	22500.0	9.0	22000.0	224000.0	others
3	51.0	3.0	16000.0	17.0	18000.0	173000.0	others
4	41.0	2.0	NaN	11.0	6000.0	57000.0	others

Соберём некоторые статистики: среднее, стандартное отклонение и каждый 25-й процентиль:

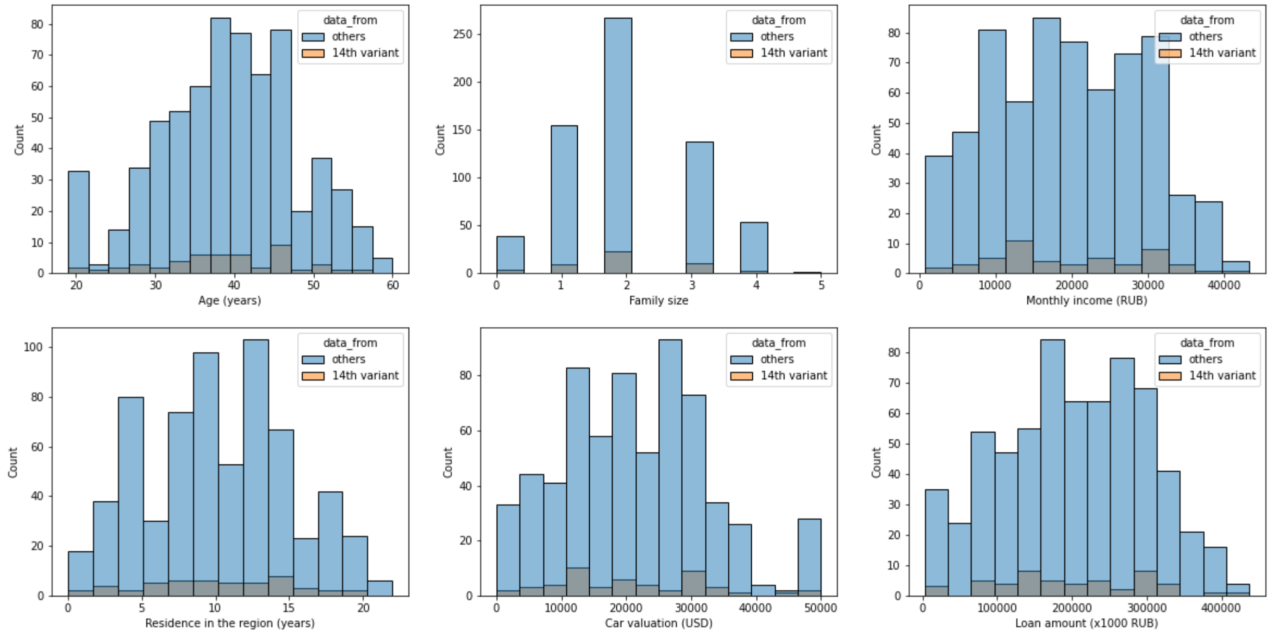
In [ ]:
```
df.describe()
```

Out[ ]:

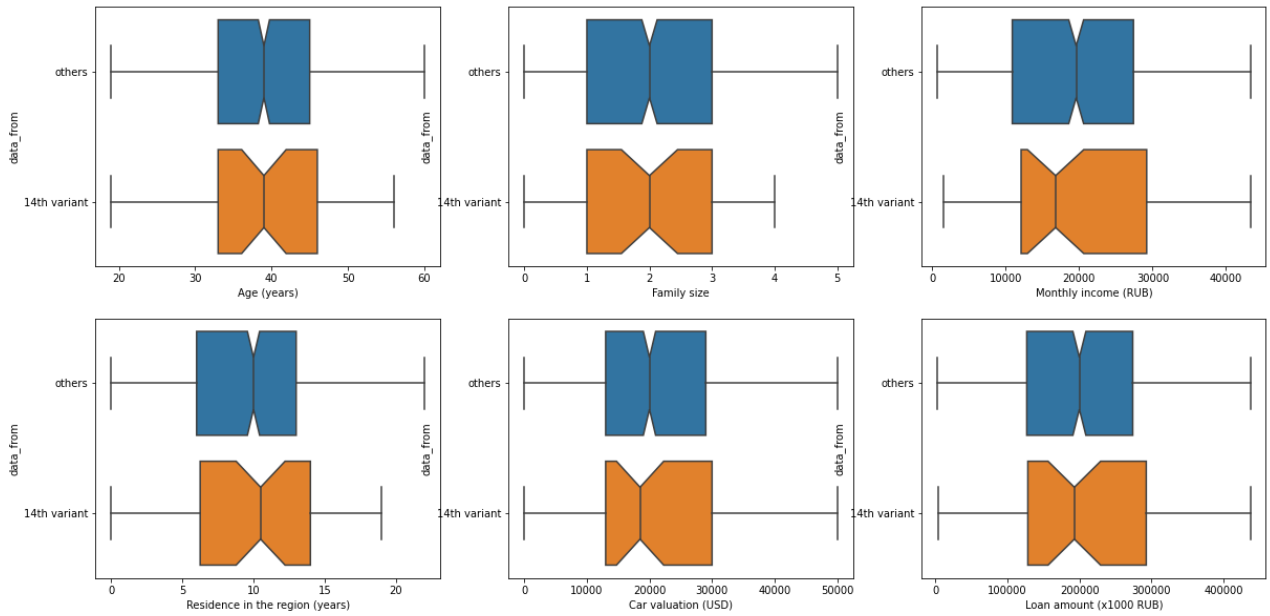
	Age (years)	Family size	Monthly income (RUB)	Residence in the region (years)	Car valuation (USD)	Loan amount (x1000 RUB)
count	699.000000	703.000000	702.000000	706.000000	702.000000	705.000000
mean	39.110157	2.021337	19445.299145	10.172805	21173.789174	201406.099291
std	8.784145	1.013217	9877.044344	4.828538	11278.272303	97600.870198
min	19.000000	0.000000	700.000000	0.000000	0.000000	3000.000000
25%	33.000000	1.000000	11300.000000	6.000000	13000.000000	127000.000000
50%	39.000000	2.000000	19550.000000	10.000000	20000.000000	200000.000000
75%	45.000000	3.000000	27850.000000	13.750000	29000.000000	274000.000000
max	60.000000	5.000000	43300.000000	22.000000	50000.000000	437000.000000

Дополнительно построим гистограммы распределения и диаграммы размаха для каждого признака, чтобы лучше понять их структуру и распределение.
Синим цветом построим графики **для полных данных**, **оранжевым** - для **варианта 14**.

In [ ]:
```python
fig, axs = plt.subplots(2, 3)
fig.set_size_inches(20,10)

for i in range(6):
    sns.histplot(data=df, x=columns[i], ax=np.ravel(axs)[i], hue="data_from")
```



In [ ]:
```python
fig, axs = plt.subplots(2, 3)
fig.set_size_inches(20,10)

for i in range(6):
    sns.boxplot(data=df, x=columns[i], ax=np.ravel(axs)[i], notch=True, y="data_from", whis=1.5)
```



Отметим, что визуально гистограммы распределения всех признаков **напоминают нормальное с некоторыми отклонениями**.

Диаграммы размаха говорят нам о том, что **бОльшая часть** данных по всем признакам **сосредоточена вокруг медианы**, причём **чем больше данных** берётся для рассмотрения, **тем ближе к центру** они группируются
(синие участки "уже" оранжевых, тогда как "усы" у синих шире)

Отдельно заметим, что все данные лежат на расстоянии ≤ 1.5 ширины "ящика" (`whis=1.5`), поскольку ни один из графиков не содержит "точек" за "усами"

2. Работа с пропусками

Наши данные содержат пропуски.
На рисунке ниже можно посмотреть процент пропусков в каждой колонке. Это порядка 5%

In [ ]:
```
print(f"Total row count: {df.shape[0]}")
df.isna().sum() / df.shape[0] * 100
```

Out[ ]:
```
Total row count: 744
Age (years)                      6.048387
Family size                      5.510753
Monthly income (RUB)             5.645161
Residence in the region (years)  5.107527
Car valuation (USD)              5.645161
Loan amount (x1000 RUB)          5.241935
data_from                        0.000000
dtype: float64
```

Для варианта 14:

In [ ]:
```
print(f"Total row count: {df14.shape[0]}")
df14.isna().sum() / df14.shape[0] * 100
```

Out[ ]:
```
Total row count: 52
Age (years)                      5.769231
Family size                      5.769231
Monthly income (RUB)             5.769231
Residence in the region (years)  3.846154
Car valuation (USD)              3.846154
Loan amount (x1000 RUB)          3.846154
dtype: float64
```

Для работы с пропусками попробуем применить алгоритм максимизации правдоподобия.
More info: https://en.wikipedia.org/wiki/Expectation%E2%80%93maximization_algorithm

В открытых источниках была найдена библиотека с возможностью свободного использования для заполнения пропуском с помощью EM-алгоритма.
Source: https://github.com/eltonlaw/impyute

Данная реализация содержит всего один гиперпараметр `loops` - количество итераций EM. Значение по умолчанию - 50.
Поскольку исходный код реализации предельно прост, а нам хочется получить дополнительный контроль над работой, было принято решение скопировать код и модифицировать его, добавив возможность настраивать критерий остановки и фиксировать состояние генератора чисел от запуска к запуску.

In [ ]:
```
def find_null(data):
    """ Finds the indices of all missing values.

    Parameters
    ----------
    data: numpy.ndarray
        Data to impute.

    Returns
    -------
    List of tuples
        Indices of all missing values in tuple format; (i, j)

    """
    null_xy = np.argwhere(np.isnan(data))
    return null_xy

def em(data, loops=50, stopping_criteria=0.1, random_state=0):
    """ Imputes given data using expectation maximization.

    E-step: Calculates the expected complete data log likelihood ratio.
    M-step: Finds the parameters that maximize the log likelihood of the
    complete data.

    Parameters
    ----------
    data: numpy.nd.array
        Data to impute.
    loops: int
        Number of em iterations to run before breaking.
    inplace: boolean
        If True, operate on the numpy array reference

    Returns
    -------
    numpy.nd.array
        Imputed data.
```

```
    """
    np.random.seed(random_state)
    null_xy = find_null(data)
    for x_i, y_i in null_xy:
        col = data[:, int(y_i)]
        mu = col[~np.isnan(col)].mean()
        std = col[~np.isnan(col)].std()
        col[x_i] = np.random.normal(loc=mu, scale=std)
        previous, i = 1, 1
        for i in range(loops):
            # Expectation
            mu = col[~np.isnan(col)].mean()
            std = col[~np.isnan(col)].std()
            # Maximization
            col[x_i] = np.random.normal(loc=mu, scale=std)
            # Break out of loop if likelihood doesn't change at least 10%
            # and has run at least 5 times
            delta = (col[x_i]-previous)/previous
            data[x_i][y_i] = col[x_i]
            if i > 5 and delta < stopping_criteria:
                break
            previous = col[x_i]
    return data
```

Опытным путём было установлено, что 100 итераций на каждое пропущенное значение, а также указанный ниже критерий ранней остановки неплохо подходят для генерации данных (гистограммы распределения данных с заполненными пропусками визуально стали похожи на исходные)

In [ ]:
```
df_wo_missing = df.copy()
df_wo_missing.loc[:,:"Loan amount (x1000 RUB)"] = em(df.loc[:,:"Loan amount (x1000 RUB)"].to_numpy(),
                                                     loops=10**2, stopping_criteria=1e-8, random_state=random_state)
df_wo_missing.describe()
```

Out[ ]:

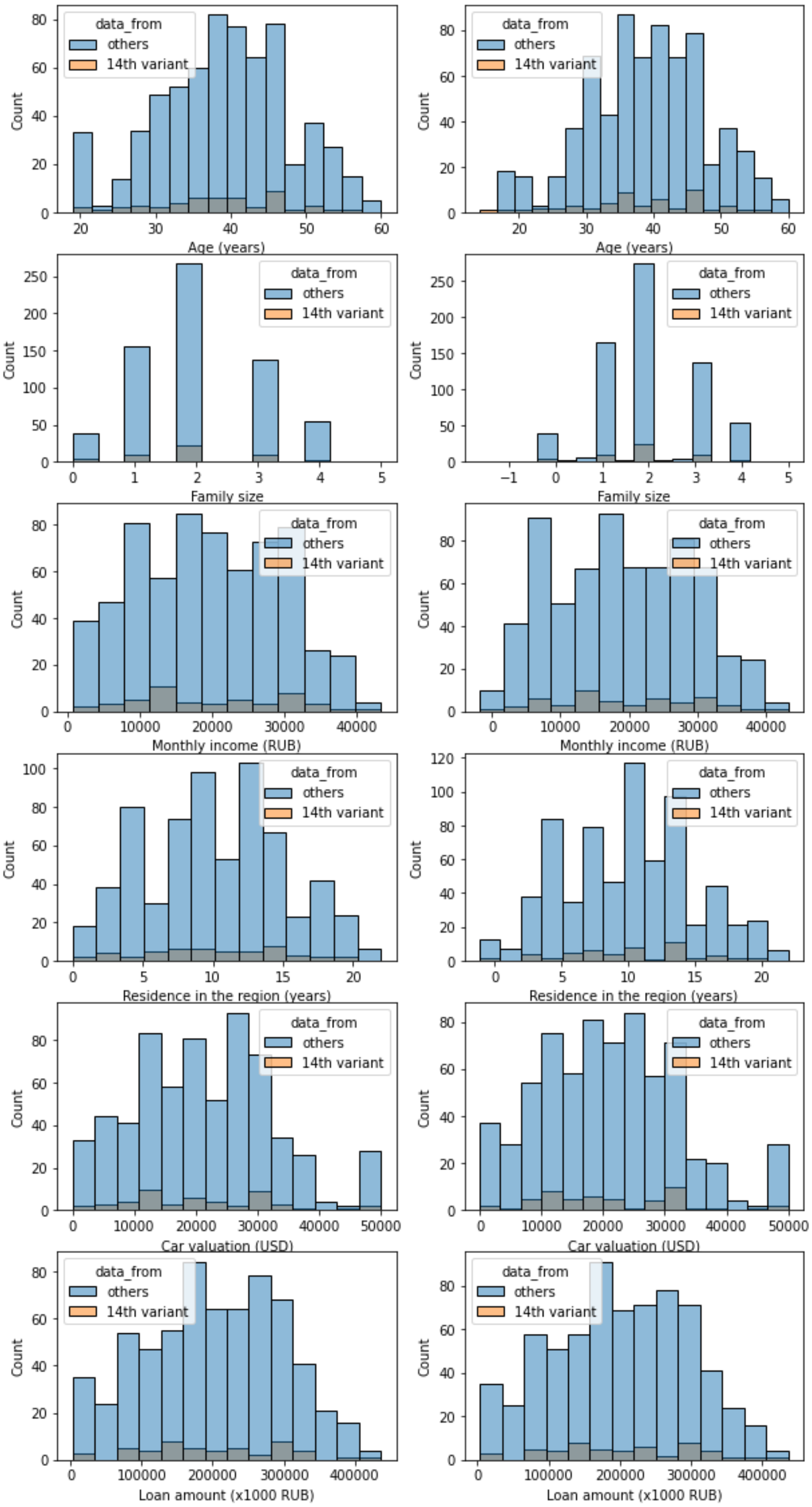
	Age (years)	Family size	Monthly income (RUB)	Residence in the region (years)	Car valuation (USD)	Loan amount (x1000 RUB)
count	744.000000	744.000000	744.000000	744.000000	744.000000	744.000000
mean	38.912882	1.987618	19183.414995	10.071778	20818.407386	201155.722070
std	8.760113	1.017733	9797.057865	4.783509	11222.782384	96801.232187
min	14.221114	-1.634608	-1794.230206	-1.115237	0.000000	3000.000000
25%	33.000000	1.000000	10900.000000	6.000000	13000.000000	127750.000000
50%	39.000000	2.000000	18700.000000	10.000000	20000.000000	200000.000000
75%	45.000000	3.000000	27200.000000	13.000000	28250.000000	274000.000000
max	60.000000	5.000000	43300.000000	22.000000	50000.000000	437000.000000

На рисунке ниже:

Слева - исходный датасет

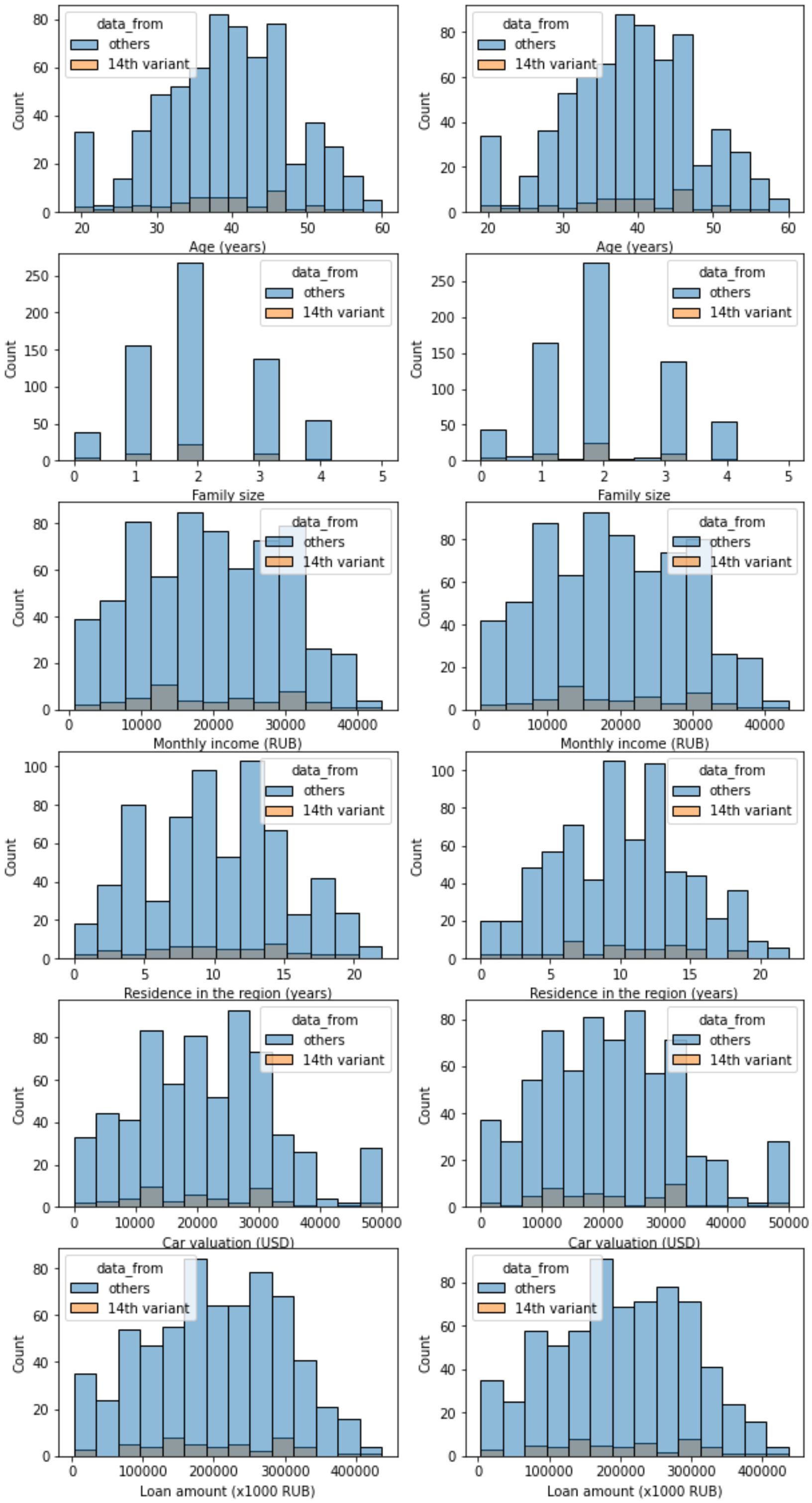
Справа - с заполненными пропусками

In [ ]:
```
fig, axs = plt.subplots(6, 2)
fig.set_size_inches(10,20)

for i in range(6):
    sns.histplot(data=df, x=columns[i], ax=np.ravel(axs)[2*i], hue="data_from")
    sns.histplot(data=df_wo_missing, x=columns[i], ax=np.ravel(axs)[2*i + 1], hue="data_from")
```



Важное замечание: после работы EM-алгоритма (из-за его случайной природы) в данных появились явные ошибки.
Например, все значения в данных по своей сущности не могут быть < 0. Зададим минимальные значения данным, как в исходных.
Снова посмотрим на аналогичные гистограммы:

In [ ]:
```
df_wo_missing.loc[:,:"Loan amount (x1000 RUB)"] = df_wo_missing.loc[:,:"Loan amount (x1000 RUB)"].clip(lower=df.min()[:-1], axis=1)

fig, axs = plt.subplots(6, 2)
fig.set_size_inches(10,20)

for i in range(6):
    sns.histplot(data=df, x=columns[i], ax=np.ravel(axs)[2*i], hue="data_from")
    sns.histplot(data=df_wo_missing, x=columns[i], ax=np.ravel(axs)[2*i + 1], hue="data_from")
```



3. Работа с выбросами

Для работы с выбросами не будем сильно углубляться (ввиду малого объема исходных данных) и возьмём простую модель, основанную на методе ближайших соседей.
Найдём точки, максимально удалённые от 4-х своих ближайших соседей:

In [ ]:
```
df = df_wo_missing

from sklearn.neighbors import LocalOutlierFactor

model = LocalOutlierFactor(n_neighbors=4)
model.fit_predict(df.loc[:, :"Loan amount (x1000 RUB)"])
-np.sort(model.negative_outlier_factor_)[:25]
```

Out[ ]:
```
array([1.32941737e+14, 5.78611574e+13, 4.14247957e+13, 2.10024660e+13,
       1.80927878e+13, 1.50000433e+13, 1.34539585e+13, 1.05493325e+13,
       1.02757105e+13, 8.20204703e+12, 8.20203873e+12, 2.65636158e+12,
       1.00020447e+12, 1.00013843e+12, 1.00013581e+12, 1.95600608e+09,
       8.62451883e+03, 4.85957859e+03, 1.91834202e+03, 9.71176736e+02,
       1.64174657e+02, 1.64174657e+02, 1.64174657e+02, 1.17556801e+02,
       1.08449787e+02])
```

Число 4 выбрано так, чтобы получить не слишком много и не слишком мало выбросов:

С таким параметром заметно далеко от своих соседей ($> 10^3$) находятся 16 точек ($16/744 \approx 2.2\%$). Посчитаем, что это выбросы.

In [ ]:
```
df = df.loc[-model.negative_outlier_factor_ < 1e4].reset_index(drop=True)
df14 = df.loc[df["data_from"] == "14th variant", :"Loan amount (x1000 RUB)"].reset_index(drop=True)
df
```

Out[ ]:

	Age (years)	Family size	Monthly income (RUB)	Residence in the region (years)	Car valuation (USD)	Loan amount (x1000 RUB)	data_from
0	38.0	2.0	22600.0	8.0	22000.0	159093.802091	others
1	47.0	2.0	11200.0	14.0	12000.0	119000.0	others
2	58.385822	2.0	22500.0	9.0	22000.0	224000.0	others
3	51.0	3.0	16000.0	17.0	18000.0	173000.0	others
4	41.0	2.0	5358.740331	11.0	6000.0	57000.0	others
...	...	...	...	...	...	...	...
723	21.0	3.0	8200.0	11.0	48000.0	250000.0	others
724	40.0	2.0	12900.0	10.0	13000.0	127000.0	others
725	51.0	3.0	7100.0	17.0	9000.0	188782.998592	others
726	44.0	1.215222	16000.0	13.0	17000.0	165000.0	others
727	49.0	3.0	14900.0	16.0	17000.0	159000.0	others

728 rows × 7 columns

Снижение размерности. Метод PCA.

4. Центрирование и нормализация

С помощью известного в кругах исследователей инструмента выполним стандартизацию данных
(избавимся от среднего и приведём стандартное отклонение к 1)

In [ ]:
```
from sklearn.preprocessing import StandardScaler

z = StandardScaler().fit_transform(df.loc[:, :"Loan amount (x1000 RUB)"])
z14 = StandardScaler().fit_transform(df14)
print(f"Проверка центрирования (must be equal to 0):\n{z.mean(axis=0)}\n{z14.mean(axis=0)}")
print(f"\nПроверка нормализации (must be equal to 1):\n{z.std(axis=0)}\n{z14.std(axis=0)}")
```

```
Проверка центрирования (must be equal to 0):
[ 1.85443846e-16 -2.41565010e-16 -9.15018976e-18  3.05006325e-17
  6.40513283e-17 -1.90933960e-16]
[-2.26670534e-16 -2.77555756e-17  2.12792746e-16 -2.59052039e-16
 -5.08852220e-17  1.29526020e-16]

Проверка нормализации (must be equal to 1):
[1. 1. 1. 1. 1. 1.]
[1. 1. 1. 1. 1. 1.]
```

5. PCA

Воспользуемся реализацией SVD-разложения в библиотеке numpy

In [ ]:
```
u, s, vt = np.linalg.svd(z, full_matrices=False)
print(f"Сингулярные числа исходной матрицы:\n{s}")

u14, s14, v14t = np.linalg.svd(z14, full_matrices=False)
print(f"\nСингулярные числа исходной матрицы (вариант 14):\n{s14}")
```

```
Сингулярные числа исходной матрицы:
[43.75048278 41.69563235 21.08840471 10.51040235  9.07835054  8.81837174]

Сингулярные числа исходной матрицы (вариант 14):
[11.78076002 10.08932592  5.48901192  2.73999856  2.62098038  1.70669675]
```

Проверим, что произведение матриц даёт исходную (с погрешностью 10^{-8}):

In [ ]:
```
z_new = u @ np.diag(s) @ vt
np.allclose(z, z_new, atol=1e-8)
```

Out[ ]:
```
True
```

In [ ]:
```
z_new = u14 @ np.diag(s14) @ v14t
np.allclose(z14, z_new, atol=1e-8)
```

Out[ ]:
```
True
```

Всё верно!

6. Исследование скрытых факторов

Рассчитаем погрешности аппроксимации разным количеством признаков:

In [ ]:
```
tmp_s = np.append(s, 0)
tmp_s_sq = tmp_s**2
print(f"Сингулярные числа исходной матрицы:\n{tmp_s[:-1].round(4)}")
print(f"Абсолютная погрешность аппроксимации в спектральной матричной норме:\n{tmp_s[1:].round(4)}")
abs_errors_f = tmp_s_sq[::-1].cumsum()[::-1][1:]
print(f"Абсолютная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса:\n{abs_errors_f.round(4)}")
print(f"Относительная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса, %:\n{(abs_errors_f/tmp_s_sq.sum()*100).round(4)}")

tmp_s = np.append(s14, 0)
tmp_s_sq = tmp_s**2
print(f"\nСингулярные числа исходной матрицы (вариант 14):\n{tmp_s[:-1].round(4)}")
print(f"Абсолютная погрешность аппроксимации в спектральной матричной норме (вариант 14):\n{tmp_s[1:].round(4)}")
abs_errors_f = tmp_s_sq[::-1].cumsum()[::-1][1:]
print(f"Абсолютная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса (вариант 14):\n{abs_errors_f.round(4)}")
print(f"Относительная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса, % (вариант 14):\n{(abs_errors_f/tmp_s_sq.sum()*100).round(4)}")
```

```
Сингулярные числа исходной матрицы:
[43.7505 41.6956 21.0884 10.5104  9.0784  8.8184]
Абсолютная погрешность аппроксимации в спектральной матричной норме:
[41.6956 21.0884 10.5104  9.0784  8.8184  0.    ]
Абсолютная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса:
[2453.8953  715.3695  270.6487  160.1801   77.7637    0.    ]
Относительная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса, %:
[56.1789 16.3775  6.1962  3.6671  1.7803  0.    ]

Сингулярные числа исходной матрицы (вариант 14):
[11.7808 10.0893  5.489   2.74    2.621   1.7067]
Абсолютная погрешность аппроксимации в спектральной матричной норме (вариант 14):
[10.0893  5.489   2.74    2.621   1.7067  0.    ]
Абсолютная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса (вариант 14):
[149.2137  47.4192  17.2899   9.7824   2.9128   0.    ]
Относительная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса, % (вариант 14):
[51.8103 16.465   6.0035  3.3966  1.0114  0.    ]
```

Заметим, что в обоих вариантах есть как минимум 2 важных скрытых фактора.

При этом третий фактор тоже довольно важен (~10%).

7. Представление клиентов векторами меньшей размерности

Для аппроксимации возьмём 2 наиболее важных скрытых признака.

Продублируем информацию о погрешностях:

In [ ]:
```
n_new_features = 2

tmp_s = np.append(s, 0)
tmp_s_sq = tmp_s**2
print(f"Абсолютная погрешность аппроксимации в спектральной матричной норме:\n{tmp_s[n_new_features].round(5)}")
abs_error_f = tmp_s_sq[::-1].cumsum()[::-1][n_new_features]
print(f"Абсолютная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса:\n{abs_error_f.round(5)}")
print(f"Относительная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса, %:\n{(abs_error_f/tmp_s_sq.sum()*100).round(5)}")

tmp_s = np.append(s14, 0)
tmp_s_sq = tmp_s**2
print(f"\nАбсолютная погрешность аппроксимации в спектральной матричной норме (вариант 14):\n{tmp_s[n_new_features].round(5)}")
abs_error_f = tmp_s_sq[::-1].cumsum()[::-1][n_new_features]
print(f"Абсолютная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса (вариант 14):\n{abs_error_f.round(5)}")
print(f"Относительная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса, % (вариант 14):\n{(abs_error_f/tmp_s_sq.sum()*100).round(5)}")
```

```
Абсолютная погрешность аппроксимации в спектральной матричной норме:
21.0884
Абсолютная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса:
715.3695
Относительная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса, %:
16.37751

Абсолютная погрешность аппроксимации в спектральной матричной норме (вариант 14):
5.48901
Абсолютная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса (вариант 14):
47.4192
Относительная погрешность аппроксимации в норме Фробениуса, % (вариант 14):
16.465
```

Рассмотрим карту клиентов (вариант 14):

In [ ]:
```
clients_approx = u[:,:n_new_features]
clients14_approx = u14[:,:n_new_features]
print(clients_approx.shape)
print(clients14_approx.shape)
clients14_approx.round(2)
```

```
(728, 2)
(48, 2)
```

Out[ ]:
```
array([[-0.14,  0.02],
       [ 0.2 , -0.33],
       [-0.07, -0.05],
       [-0.12, -0.16],
       [ 0.2 ,  0.04],
       [ 0.12,  0.22],
       [-0.2 ,  0.  ],
       [ 0.09, -0.12],
       [ 0.06,  0.05],
       [-0.  ,  0.14],
       [ 0.12, -0.02],
       [-0.11,  0.04],
       [-0.04, -0.09],
       [-0.2 , -0.14],
       [ 0.13,  0.03],
       [-0.23, -0.17],
       [-0.01,  0.02],
       [-0.05,  0.18],
       [-0.05,  0.2 ],
       [ 0.22,  0.16],
       [ 0.15, -0.37],
       [ 0.16,  0.14],
       [ 0.09,  0.  ],
       [ 0.15, -0.17],
       [-0.01, -0.02],
       [-0.19, -0.12],
       [ 0.09, -0.03],
       [ 0.13,  0.05],
       [ 0.09,  0.05],
       [-0.27,  0.02],
       [-0.16, -0.  ],
       [-0.3 ,  0.27],
       [ 0.14,  0.02],
       [ 0.18, -0.11],
       [ 0.03, -0.22],
       [ 0.13,  0.17],
       [ 0.01,  0.35],
       [ 0.1 ,  0.18],
       [-0.15, -0.  ],
       [-0.14, -0.28],
       [-0.17,  0.03],
       [-0.18,  0.03],
       [ 0.1 ,  0.06],
       [-0.09, -0.03],
       [ 0.08, -0.02],
       [ 0.09, -0.06],
       [ 0.19,  0.01],
       [-0.2 ,  0.02]])
```

Для простоты и понятности визуального восприятия чисел, переведём данные в отрезок $[0; 10]$

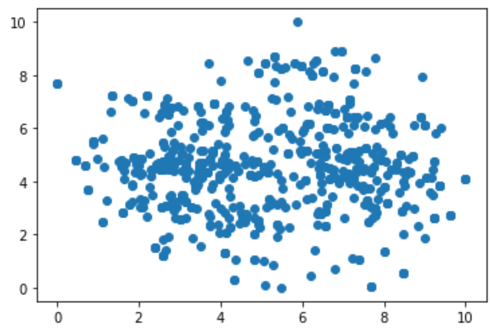
In [ ]:
```
from sklearn.preprocessing import MinMaxScaler

clients_approx = MinMaxScaler(feature_range=(0, 10)).fit_transform(clients_approx)
clients14_approx = MinMaxScaler(feature_range=(0, 10)).fit_transform(clients14_approx)
clients14_approx.round(2)
```

Out[ ]:
```
array([[ 2.96,  5.41],
       [ 9.56,  0.59],
       [ 4.29,  4.48],
       [ 3.45,  2.91],
       [ 9.48,  5.67],
       [ 8.06,  8.11],
       [ 1.83,  5.16],
       [ 7.47,  3.49],
       [ 6.81,  5.88],
       [ 5.64,  7.1 ],
       [ 8.01,  4.92],
       [ 3.61,  5.65],
       [ 4.86,  3.88],
       [ 1.89,  3.21],
       [ 8.22,  5.53],
       [ 1.33,  2.77],
       [ 5.55,  5.4 ],
       [ 4.66,  7.61],
       [ 4.76,  7.86],
       [10.  ,  7.37],
       [ 8.68,  0.  ],
       [ 8.87,  7.11],
       [ 7.51,  5.15],
       [ 8.6 ,  2.81],
       [ 5.44,  4.84],
       [ 2.07,  3.49],
       [ 7.52,  4.73],
       [ 8.14,  5.83],
       [ 7.45,  5.81],
       [ 0.57,  5.45],
       [ 2.64,  5.09],
       [ 0.  ,  8.9 ],
       [ 8.33,  5.42],
       [ 9.12,  3.58],
       [ 6.24,  2.09],
       [ 8.17,  7.41],
       [ 5.98, 10.  ],
       [ 7.65,  7.56],
       [ 2.87,  5.1 ],
       [ 2.99,  1.27],
       [ 2.38,  5.5 ],
       [ 2.17,  5.57],
       [ 7.7 ,  5.95],
       [ 3.98,  4.67],
       [ 7.26,  4.89],
       [ 7.38,  4.33],
       [ 9.36,  5.28],
       [ 1.93,  5.38]])
```

Графическое представление данных:

In [ ]:
```
plt.scatter(x=clients_approx[:,0], y=clients_approx[:,1])
```

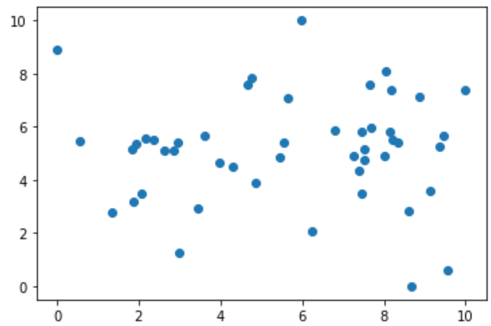
Out[ ]: `<matplotlib.collections.PathCollection at 0x7f33ba3b8c70>`



Вариант 14:

In [ ]:
```
plt.scatter(x=clients14_approx[:,0], y=clients14_approx[:,1])
```

Out[ ]: `<matplotlib.collections.PathCollection at 0x7f33bcbe5e80>`



На обеих картинках четко видим 2 кластера: слева и справа.

На нижней картинке сложнее определить границы и количество кластеров.
Данные не очень-то хорошо укладываются в двумерное представление

Снижение размерности. Интерпретация скрытых факторов.

8. Матрицы коэффициентов разложения признаков

Рассмотрим, что описывают наши скрытые признаки. Построим матрицы корелляции, по вертикали новые признаки, по горизонтали - старые:

Не могу понять, почему в матрицах числа большие 1.

Возможно, где-то в расчетах допущена ошибка, хотя SVD разложение выполнено верно.

Возможно, этой матрице просто нужна нормировка

In [ ]:
```
(np.diag(s[:n_new_features]) @ vt[:n_new_features]).round(5)
```

Out[ ]:
```
array([[ 12.16374,   0.68541, -22.63158,  13.81004, -22.10799, -23.95849],
       [ 20.73319,  25.30701,   7.09665,  21.49496,   7.74745,   9.78759]])
```

Вариант 14:

In [ ]:
```
(np.diag(s14[:n_new_features]) @ v14t[:n_new_features]).round(5)
```

Out[ ]:
```
array([[ 3.14886, -0.14499, -6.07455,  4.1145 , -5.8832 , -6.35679],
       [ 4.5916 ,  6.57497,  1.89699,  5.13942,  2.24127,  1.564  ]])
```

Тем не менее, если трактовать эти матрицы, как матрицы зависимости признаков, где бОльшее по модулю значение означает бОльшую зависимость, то **можно явно заметить**, что:

- Для матрицы из **объединения вариантов**:
  - **Первый** скрытый признак наиболее связан **с признаками 1, 3, 5 и 6**
  - **Второй** скрытый признак - **с признаками 2 и 4**
- Для матрицы из **варианта 14**:
  - **Первый** скрытый признак наиболее связан **с признаками 1, 3 и 4**
  - **Второй** скрытый признак - **с признаками 2, 5 и 6**

Такое расхождение попытаюсь объяснить

1. Возможно, неверной реализацией алгоритма EM.
   - Использованный фреймворк разработан неизвестными энтузиастами и не имеет широкого распространения в исследовательском сообществе
   - Он работает для каждой колонки по отдельности, а, возможно, должен пытаться "подогнать" общее распределение под нормальное
2. Возможно, случайной природой данных из разных вариантов работ
   - Возможно, данные сгенерированы с разными параметрами для каждого варианта и их объединение не имеет смысла
   - Оно имело бы смысл, когда число вариантов станет очень большим, по Центральной Предельной Теореме

9. Попытка словесной интерпретации скрытых признаков

Выпишем ещё раз названия оригинальных признаков:

In [ ]:
```
for i, col in enumerate(columns):
    print(f"Признак #{i+1} означает {col}")
```

```
Признак #1 означает Age (years)
Признак #2 означает Family size
Признак #3 означает Monthly income (RUB)
Признак #4 означает Residence in the region (years)
Признак #5 означает Car valuation (USD)
Признак #6 означает Loan amount (x1000 RUB)
```

Снижение размерности. Метод MDS.

10. Зададим расстояния между клиентами

Заметим, что все признаки в наших данных - численные.
Это означает, что простое Евклидово расстояние между векторами клиентов может служить дистанцией.
Возьмём уже знакомую нам стандартизированную матрицу Z:

In [ ]:
```
print(z.shape)
print(z14.shape)
z.round(4)
```

```
(728, 6)
(48, 6)
```

Out[ ]:
```
array([[-0.1005,  0.004 ,  0.3369, -0.4285,  0.0893, -0.4581],
       [ 0.9241,  0.004 , -0.8348,  0.8223, -0.807 , -0.877 ],
       [ 2.2202,  0.004 ,  0.3266, -0.22  ,  0.0893,  0.22  ],
       ...,
       [ 1.3794,  0.9936, -1.2563,  1.4478, -1.0758, -0.148 ],
       [ 0.5825, -0.7725, -0.3415,  0.6139, -0.3588, -0.3964],
       [ 1.1517,  0.9936, -0.4545,  1.2393, -0.3588, -0.4591]])
```

11. Можно ли поместить клиентов в Евклидово пространство размерности 2 без потерь?

Ответ - **нет, нельзя**. **Иначе** SVD разложение содержало бы только 2 сингулярных числа и абсолютная **погрешность** метода PCA с двумя скрытыми признаками **составляла бы ровно 0**.

12. MDS

Воспользуемся реализацией Multidimensional Scaling из известного пакета scikit-learn:

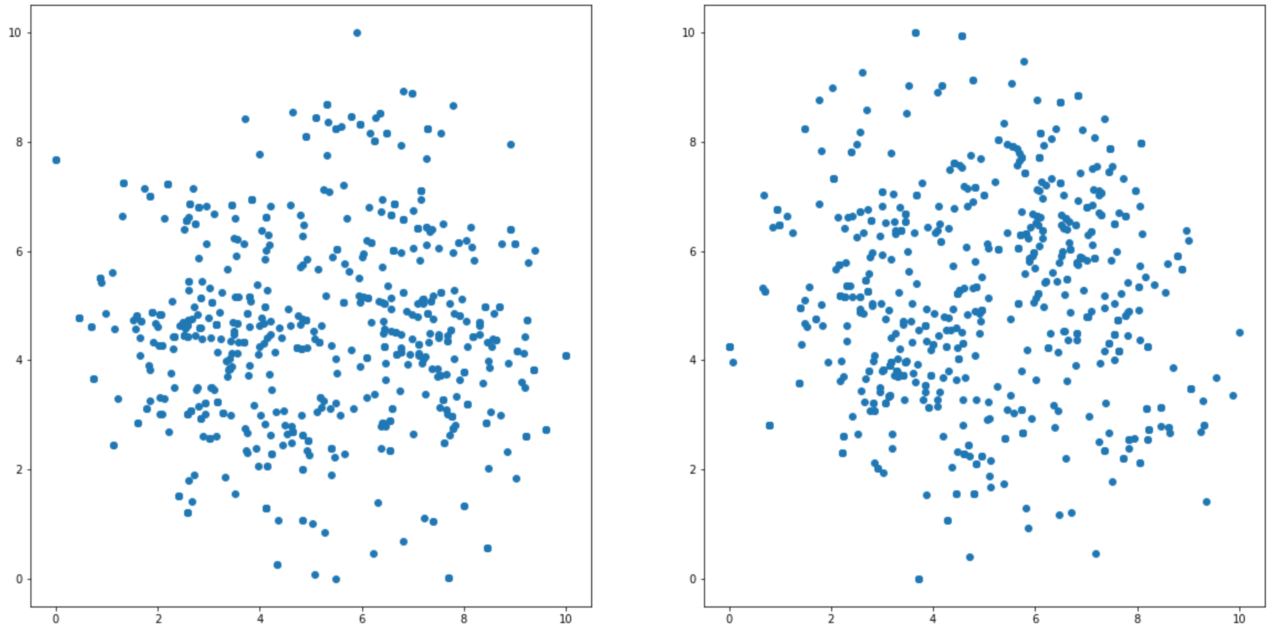
In [ ]:
```python
from sklearn.manifold import MDS

mds = MDS(n_components=2, metric=True, n_jobs=32, random_state=random_state, max_iter=1)
z_scaled = mds.fit_transform(z)
stress_on_start = mds.stress_
print(f"Начальное значение stress (1 итерация): {stress_on_start}")
mds = MDS(n_components=2, metric=True, n_jobs=32, random_state=random_state)
z_scaled = mds.fit_transform(z)
print(f"Финальное значение stress {mds.stress_}")
print(f"Относительная погрешность размещения: {mds.stress_/stress_on_start*100:.2f}%")
print(z_scaled.shape)

mds = MDS(n_components=2, metric=True, n_jobs=32, random_state=random_state, max_iter=1)
z14_scaled = mds.fit_transform(z14)
stress_on_start = mds.stress_
print(f"\nНачальное значение stress (1 итерация, вариант 14): {stress_on_start}")
mds = MDS(n_components=2, metric=True, n_jobs=32, random_state=random_state)
z14_scaled = mds.fit_transform(z14)
print(f"Финальное значение stress (вариант 14) {mds.stress_}")
print(f"Относительная погрешность размещения (вариант 14): {mds.stress_/stress_on_start*100:.2f}%")
print(z14_scaled.shape)

# Перевод в шкалу [0; 10]
z_scaled = MinMaxScaler(feature_range=(0, 10)).fit_transform(z_scaled)
z14_scaled = MinMaxScaler(feature_range=(0, 10)).fit_transform(z14_scaled)
```

```
Начальное значение stress (1 итерация): 2388392.6887262007
Финальное значение stress 50720.45141801918
Относительная погрешность размещения: 2.12%
(728, 2)

Начальное значение stress (1 итерация, вариант 14): 10408.618606687467
Финальное значение stress (вариант 14) 202.31766912757936
Относительная погрешность размещения (вариант 14): 1.94%
(48, 2)
```

Получили карты клиентов. Относительную погрешность можем приблизительно найти, поделив финальное значение stress на начальное.
2 процента - отличное значение.
Сравним с карты клиентов из MDS картами, полученными PCA:

In [ ]:
```python
fig, axs = plt.subplots(1, 2)
fig.set_size_inches(20,10)

axs[0].scatter(x=clients_approx[:,0], y=clients_approx[:,1])
axs[1].scatter(x=z_scaled[:,1], y=z_scaled[:,0])
```

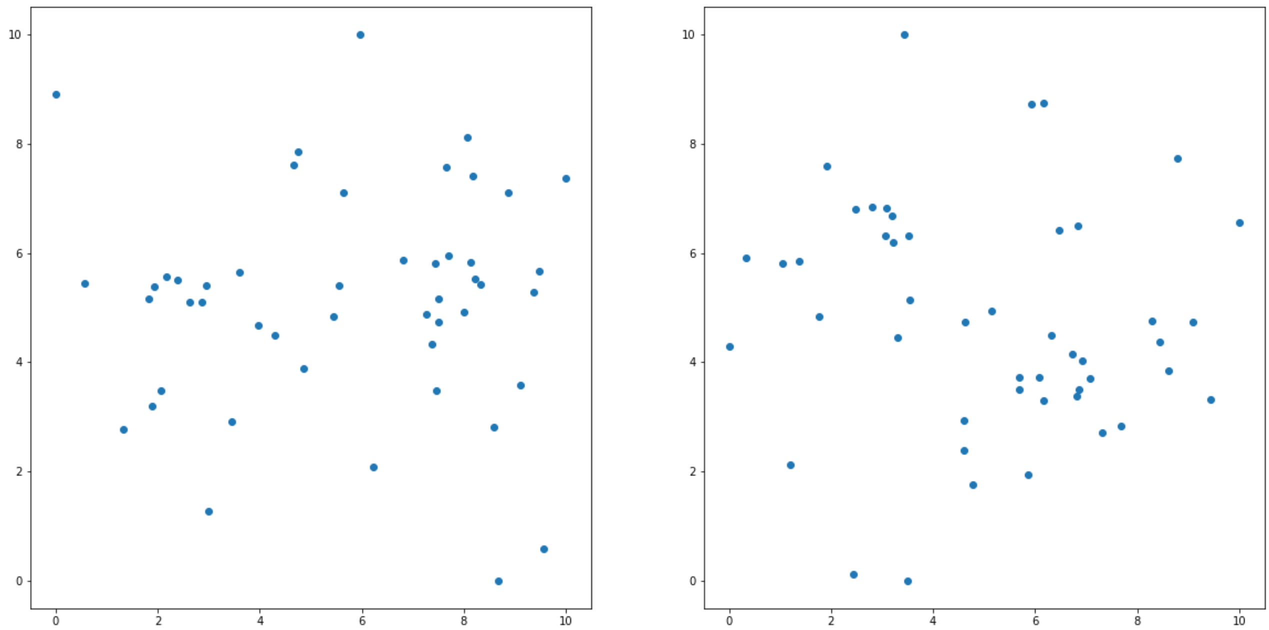
Out[ ]:
```
<matplotlib.collections.PathCollection at 0x7f33bc6f6d30>
```



Вариант 14:

In [ ]:
```
fig, axs = plt.subplots(1, 2)
fig.set_size_inches(20,10)

axs[0].scatter(x=clients14_approx[:,0], y=clients14_approx[:,1])
axs[1].scatter(x=z14_scaled[:,1], y=z14_scaled[:,0])
```

Out[ ]:
```
<matplotlib.collections.PathCollection at 0x7f33bcb63b20>
```



Наблюдаем очень интересную картину: данные из варианта 14 **после работы MDS** на плоскости выглядят **практически так же, как и после PCA**, за исключением поворота!
(левую картинку необходимо **повернуть** по часовой стрелке примерно **на 45 градусов**; отдельно отмечу, что после MDS я **поменял местами скрытые признаки**)

Для картинок по общим данным **схожесть** не так очевидна, но всё же **прослеживается**!
Необходим примерно такой же **поворот**

Выводы:

1. Получилось на примере сравнить два метода понижения размерности данных: PCA и MDS
2. Оба метода интересны для использования и дают непротиворечивые результаты