BAB 1
SISTEM BILANGAN

A. Sejarah Perkembangan Bilangan Real

1. Bilangan Asli (***N***)

   Sifat-sifatnya:

   a. Tertutup terhadap operasi + dan $\times$.

   b. Komutatif terhadap operasi + dan $\times$, yaitu:

   $$a+b=b+a$$
   $$a\times b=b\times a$$

   c. Asosiatif terhadap operasi + dan $\times$, yaitu:

   $$a+(b+c)=(a+b)+c$$
   $$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$$

2. Bilangan Bulat (***Z***)

   Sifat-sifatnya:

   a. Tertutup terhadap operasi + dan $\times$.

   b. Komutatif terhadap operasi + dan $\times$, yaitu:

   $$a+b=b+a$$
   $$a\times b=b\times a$$

   c. Asosiatif terhadap operasi + dan $\times$, yaitu:

   $$a+(b+c)=(a+b)+c$$
   $$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$$

   d. Elemen identitas 0 untuk +, dan elemen identitas 1 untuk $\times$.

   e. Invers + yaitu - , dan invers $\times$ yaitu $\frac{1}{a}$, $a\in Z$.

3. Bilangan Rasional (***Q***)

$\Rightarrow$ Bilangan yang dapat dinyatakan sebagai perbandingan bilangan bulat atau hasil bagi bilangan bulat.

$$Q = \left\{ x \middle| x = \frac{a}{b} \text{ dengan } a, b \in Z \right\}$$

Contoh: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7},$ dan sebagainya.

Sifat-sifatnya:

a. Tertutup terhadap operasi + dan $\times$.

b. Komutatif terhadap operasi + dan $\times$, yaitu:

$$a + b = b + a$$
$$a \times b = b \times a$$

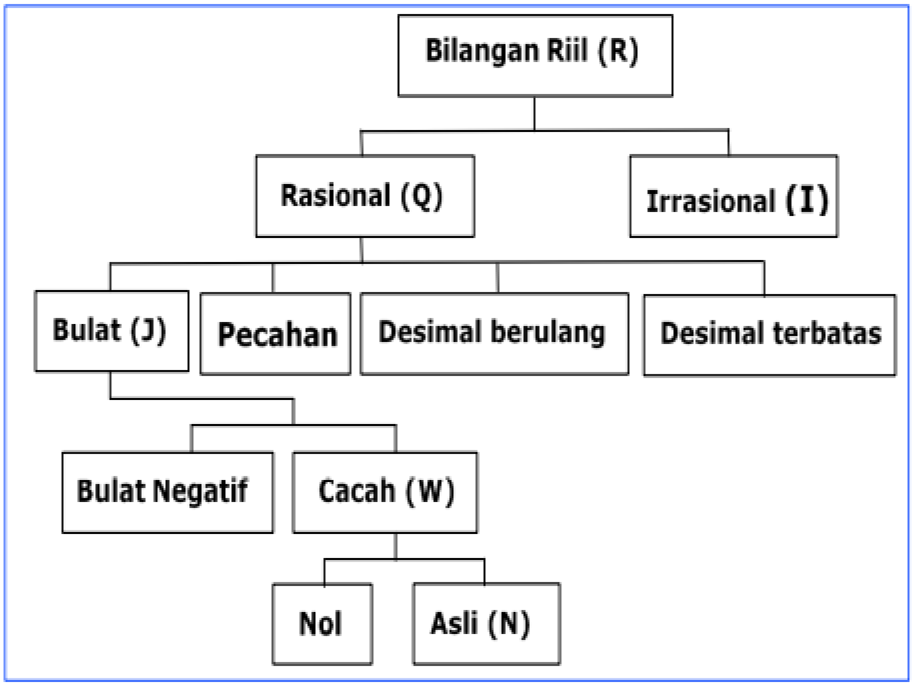
c. Asosiatif terhadap operasi + dan $\times$, yaitu:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

d. Elemen identitas 0 untuk +, dan elemen identitas 1 untuk $\times$.

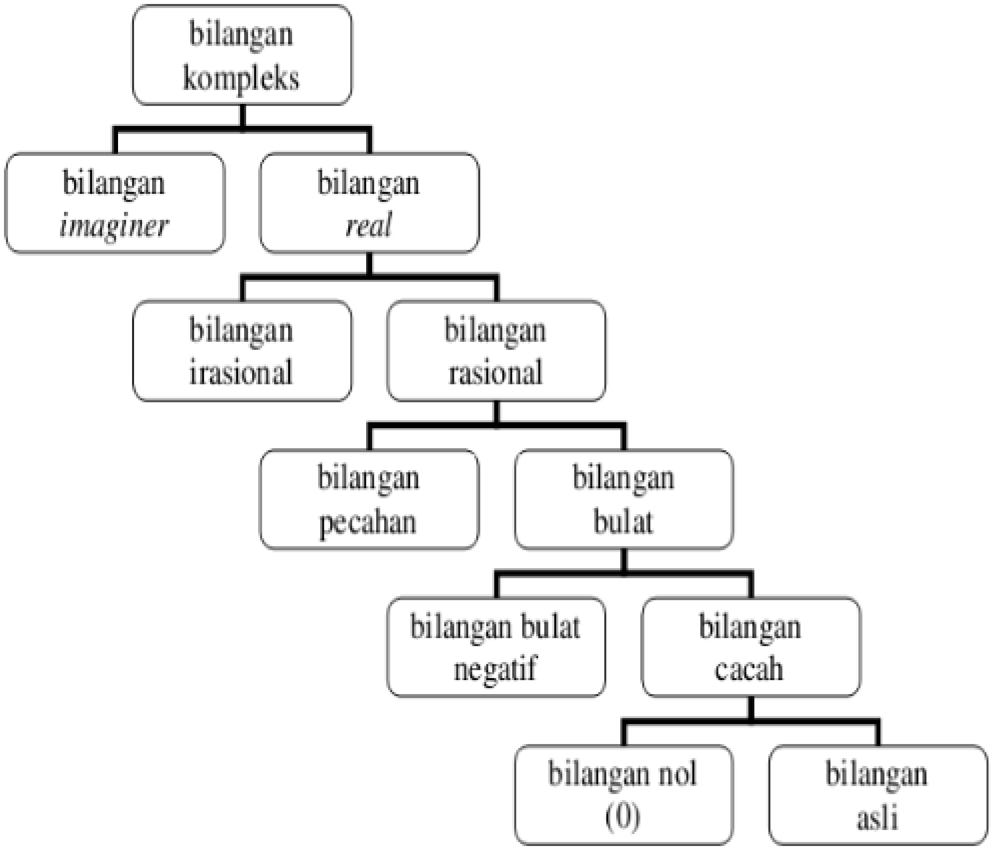
4. Bilangan Irasional (***Q'***)

$\Rightarrow$ Bilangan real yang tidak rasional, contoh: $\sqrt{2}, \pi, e,$ dan sebagainya.

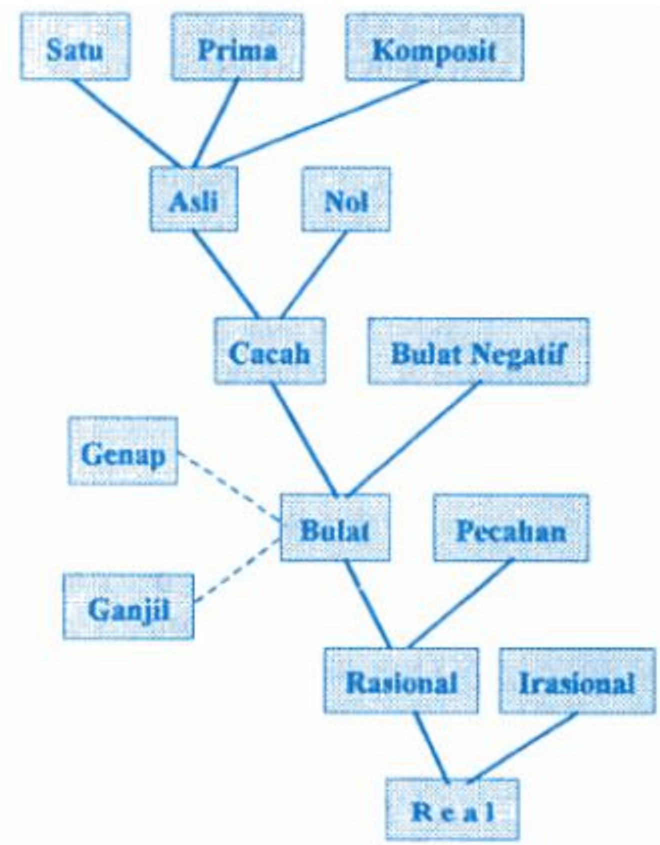


Gambar 1. 1. Jenis Bilangan Riil

Komponen Bilangan Real



Komponen Bilangan Real



- Dasar utama pengembangan matematika adalah **teori bilangan** dan **geometri.**

- Sistem bilangan real (diberi lambang R) adalah **himpunan** bilangan real yang disertai dengan operasi penjumlahan dan perkalian sehingga memenuhi **aksioma** lapangan, urutan dan kelengkapan.

- **Suatu aksioma** adalah basis dari sistem logika formal yang bersama-sama dengan aturan inferensi mendefinisikan logika.
- Kata **aksioma** dalam matematika juga disebut **postulat** yaitu suatu titik awal dari sistem logika.
  - Misalnya, 1+1=2
  - Melalui dua titik sembarang hanya dapat dibuat sebuah garis lurus.

- **Definisi :** pernyataan yg bernilai benar karena disepakati, dan tak perlu dibuktikan
  - Definisi di buat dengan menggunakan konsep yang belum terdifinisi dan atau konsep yang telah didifinisikan sebelumnya.
- **Teorema** adalah suatu pernyataan matematika yang masih memerlukan pembuktian dan pernyataan itu dapat ditunjukkan bernilai benar.

Aksioma lapangan

Pada $\boldsymbol{R}$ didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian (jumlah dan hasilkali bilangan real a dan b ditulis $a + b$ dan ab) yang memenuhi aksioma berikut.

- Jika $a, b \in \boldsymbol{R}$, maka $a + b \in \boldsymbol{R}$ dan $ab \in \boldsymbol{R}$, *sifat tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian*.
- Jika $a, b \in \boldsymbol{R}$, maka $a + b = b + a$ dan $ab = ba$, *sifat komutatif terhadap penjumlahan dan perkalian*.
- Jika $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$ dan $(ab)c = a(bc)$, *sifat asosiatif terhadap penjumlahan dan perkalian*.
- Terdapat 0 dan $1 \in \boldsymbol{R}$ $(0 \neq 1)$ sehingga $a + 0 = 0$ dan $a.1 = a$ untuk setiap $a \in \boldsymbol{R}$, *adanya unsur kesatuan terhadap penjumlahan dan perkalian*. Bilangan 0 dinamakan *unsur kesatuan terhadap penjumlahan* dan 1 *unsur kesatuan terhadap perkalian*.
- Jika $a \in \boldsymbol{R}$, maka terdapat $-a \in \boldsymbol{R}$ sehingga $a + (-a) = 0$, *adanya unsur negatif atau invers terhadap penjumlahan*. Bilangan real $-a$ dinamakan *negatif* atau *lawan* dari a.
- Jika $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, maka terdapat $a^{-1} \in \boldsymbol{R}$ sehingga $a\,a^{-1} = 1$, *adanya unsur kebalikan atau invers terhadap perkalian*. Bilangan real a^{-1} dinamakan *kebalikan* dari a.
- Jika $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, maka $a(b + c) = ab + ac$, *sifat distributif*.

Aksioma lapangan

Teorema 1.2 Misalkan a, b, c, dan d bilangan real, maka

- $a = b \Rightarrow a + c = b + c$ dan $ac = bc$.
- $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ (*hukum pencoretan untuk penjumlahan*).
- $ac = bc, c \neq 0 \Rightarrow a = b$ (*hukum pencoretan untuk perkalian*).
- $a(b - c) = ab - ac$.
- $-(-a) = a$; $(a^{-1})^{-1} = a, a \neq 0$.
- $a.0 = 0 = 0.a$; $a(-b) = (-a)b = -ab$; dan $(-a)(-b) = ab$.
- $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ atau $b = 0$.
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc; b, d \neq 0$.
- $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ dan $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, c \neq 0$.
- $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$ dan $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad-bc}{cd}; c, d \neq 0$.
- $\frac{a}{c} . \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}; c, d \neq 0$, dan $\frac{a}{c} \Big/ \frac{b}{d} = \frac{ad}{bc}; b, c, d \neq 0$.

Aksioma lapangan

Teorema 2.1

Misalkan $a \in R$, maka

(i) $a.\ 0 = 0$

(i) Berdasarkan M3, kita ketahui bahwa $a.1 = a$. Disini

$$a + a\ .\ 0 = a\ .\ 1 + a\ .\ 0 = a\ .\ (1 + 0)$$

$$= a\ .\ 1 = a$$

Berdasarkan teorema 1.1, kita simpulkan bahwa $a\ .\ 0 = 0$

(M3) ada unsur $1 \in R$ sedemikian sehingga $1.\ a = a$ dan $a\ .1 = a$ untuk setiap $a \in R$

Teorema 1.1

(i) jika z, a di R sedemikian sehingga $z + a = a$, maka $z = 0$

(ii) jika $u.\ b$ di R dan $b \neq 0$ sedemikian sehingga $u.\ b = b$, maka $b = 1$

Catatan:

- **Desimal dan Bilangan Real**

  Setiap bilangan real dapat dinyatakan sebagai desimal tak berakhir. Desimal dari bilangan rasional $\frac{a}{b}$ dapat diperoleh dengan membagikan b pada a.

  Contoh: $\frac{2}{5} = 0,40000...$ dan $\frac{1}{3} = 0,3333...$

  Berdasarkan contoh di atas, terlihat bahwa hasil pembagiannya menghasilkan desimal yang memiliki angka berulang. Lain halnya dengan bilangan irasional, seperti:

  $$\sqrt{2} = 1,41421356...$$
  $$\sqrt{3} = 1,73205...$$
  $$\pi = 3,14159...$$

  Terlihat bahwa bilangan irasional menghasilkan desimal yang tak berakhir dan tidak berulang.

- **Menyatakan *Q***

  a. Pecahan ke desimal, contoh: $\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{1}{3} = 0,3333...$; dan seterusnya.

  b. Desimal ke pecahan

  1) Desimal ke pecahan terbatas

     Contoh: $0,25 = 25 \times \frac{1}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

  2) Desimal ke pecahan tak terhingga

     1) Metode Euler (Mengalikan Digit yang Berulang)

        Aturan yang digunakan:

        ✓ Jika berulang 1, maka kalikan 10.

        ✓ Jika berulang 2, maka kalikan 100, dan seterusnya.

Contoh: $x = 0,121212$ ...., maka:

$$\begin{array}{r} 100x = 12,121212 \\ x = 0,121212 \quad - \\ \hline 99x = 12 \end{array}$$

$$x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

2) Deret Waktu tak Hingga

$$s=\frac{a}{1-r}$$

dengan a = suku pertama dan r = rasio

Contoh: 0,121212..., maka:

$$\frac{12}{100}+\frac{12}{100^2}+\frac{12}{100^3}+\ldots$$

sehingga $a=\frac{12}{100}$ dan $r=\frac{1}{100}$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}s&=\frac{a}{1-r}\\&=\frac{\left(\frac{12}{100}\right)}{1-\left(\frac{1}{100}\right)}\\&=\frac{\left(\frac{12}{100}\right)}{\left(\frac{99}{100}\right)}\\&=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}.\end{aligned}$$

5. Bilangan Real (***R***)

   Sifat-sifatnya:

   a. Dapat dinyatakan dalam sebuah garis bilangan.

   b. Menentukan sifat medan/lapangan/gelanggang dalam operasi $+$ dan $\times$.

      Sifat medan antara lain:

      1) Tertutup terhadap operasi $+$ dan $\times$.

      2) Komutatif terhadap operasi $+$ dan $\times$, yaitu:

$$a+b=b+a$$
$$a\times b=b\times a$$

3) Asosiatif terhadap operasi + dan $\times$, yaitu:

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$$

4) Elemen identitas 0 untuk +, dan elemen identitas 1 untuk $\times$.

5) Invers + yaitu -, dan invers $\times$ yaitu $\frac{1}{a}$, $a \in Z$.

6) Distributif pada operasi $\times$ terhadap +.
Contoh: Misalkan $a,b,c \in R$, maka:

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$$
$$(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$$

c. Memenuhi sifat urutan.

1) Trikotomi, $\forall a,b \in R$ maka hanya berlaku salah satu pernyataan berikut: $a=b$ atau $a<b$ atau $a>b$.
2) Transitif, $\forall a,b,c \in R$ diperoleh jika $a < b$ dan $b < c$ maka: $a < c$.
3) Adiktif, $\forall a,b,c \in R$ diperoleh jika $a < b$ maka:
$$a + c < b + c$$
4) Multiplikatif, $\forall a,b,c \in R$ diperoleh jika $a < b$ maka:
$$a\times c < b\times c, \text{ jika } c>0$$
$$a\times c > b\times c, \text{ jika } c<0$$

3. Hukum-hukum bilangan riil

Untuk melakukan operasi matematika berupa penjumlahan,pengurangan, perkalian dan pembagian pada bilangan riil maka perlu di perhatikan hukum-hukum seperti yang dituliskan berikut ini :

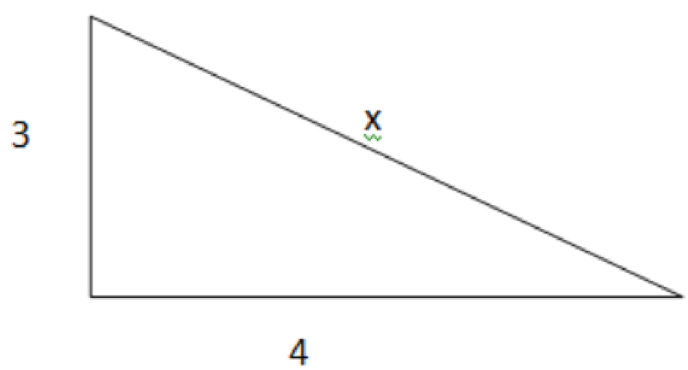
Jika a dan b adalah bilangan-bilangan riil maka berlaku :

a.	a + b	hukum penjumlahan
b.	a . b	hukum perkalian
c.	a + b = b + a	hukum komutatif penjumlahan
d.	a . b = b .a	hukum komutatif perkalian
e.	a + 0 = 0 + a = a	hukum penjumlahan nol
f.	a . 0 = 0 . a = 0	hukum perkalian nol
g.	a . 1 = 1 . a = a	hukum perkalian satu
h.	a + (- a) = -a + a	hukum invers penjumlahan
i.	a . (1/a) = 1	hukum invers perkalian
j.	(a + b) + c = a + (b + c)	hukum asosiatif penjumlahan
k.	(ab) c = a (bc)	hukum asosiatif perkalian
l.	a (b + c) = ab + ac	hukum distributif

dimana a, b dan c merupakan bilangan-bilangan riil

Soal dan jawaban selingan matematika SMP

Carilah x pada gambar berikut



⇨ **Selesaikanlah : $\frac{1}{n}$ sin x = ?**

⇨ $\boldsymbol{Jik\ a}$ **:** $\lim\limits_{x\to 8}\frac{1}{x-8} = \infty$**, selesaikan** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{1}{x-5} = ?$