Aufgabe 5.1 (10 Punkte).

Für $t \in \mathbb{C}$ sei $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1+i & -1 \\ 1+t & i+t & -t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{C})$.

(a) Für welche Werte $t \in \mathbb{C}$ ist A_t diagonalisierbar? Begründen Sie!

(b) Sei nun $t = 0$. Geben Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ an, sodass $S^{-1}A_0S$ eine Diagonalmatrix ist.

$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1+i & -1 \\ 1+t & i+t & -t \end{pmatrix}$ $\det(xI_3 - A) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -1 & x-1-i & 1 \\ -1-t & -i-t & x+t \end{pmatrix} = (x-1)\det \begin{pmatrix} x-1-i & 1 \\ -i-t & x+t \end{pmatrix}$

$= (x-1)\left((x-1-i)(x+t) - (-i-t)\right)$
$= (x^3 + x^2t - 2x^2 - xt + x) + i(-1 - x^2 + t + 2x - xt)$

Durch Ausprobieren findet man $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1-t$

$\mathrm{Ker}(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 1 \\ 1+t & i+t & -t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathrm{Ker}(A - i \cdot I_3) = \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1+t & i+t & -t-i \end{pmatrix} =$ $1-i \neq 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathrm{Ker}(A - (1-t)I_3) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 1 & i+t & -1 \\ 1+t & i+t & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 1 & i+t & -1 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(i+t)x_2 - x_3 = 0$

$\left(-\frac{1}{-i-t}(i+t) = -\frac{t+i}{-t-i} = 1 \right)$

i.A. $t \neq 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{-i-t} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{-i-t} \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Basis des K^3, da

sie 3 linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{C}^3$ sind, solange $-i-t \neq 0$ und

$-\frac{1}{-i-t} \neq 1$ ist.

$-i-t = 0$ für $t = -i$ $\quad -\frac{1}{-i-t} = 1$ für $1-i$

Also ist A_n für alle t außer $t=-i$ und $t = 1-i$ diagonalisierbar

b) $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+i & -1 \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A = \det(x \cdot I_3 - A) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -1 & x-1-i & 1 \\ -1 & -i & x \end{pmatrix} \begin{matrix} x-1 & 0 \\ -1 & x-1 \\ -1 & i \end{matrix}$

$\Rightarrow (x^3 - 2x^2 + x) + i(-1 - x^2 + 2x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = i \qquad$ aus a)

$$\operatorname{Ker}(A - I_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & -1 \\ 1 & i & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}(1 \; i \; -1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow \gamma(1) = 2$

$\lambda_2 = i$:

$$\operatorname{Ker}(A - iI_n) = \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$x_1 - x_1 i = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x_2 = x_3$

$$\left| 1 \quad i \quad -i \right|$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \gamma(i) = 1$$

da $\gamma(1) + \gamma(i) = 3$, ist A_0 diagonalisierbar

$$S = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Probe: } S^{-1} A S = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$