Nilpotente Endomorphismen

Definition: φ heißt nilpotent, wenn es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $\varphi^m = 0$

A $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $A^m = 0$

Die kleinste Zahl m mit dieser Eigenschaft heißt Nilpotenzindex Ni

φ nilpotent $\iff$ ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ nilpotent

Definition: Stufe: kleinste Zahl $j \in \mathbb{N}_0$ mit $\varphi^j(v) = 0$

max Stufe $= Ni$

Stufe 1: $v \neq 0 \in Ker$
Stufe 0: 0

Definition Sei φ nilpotent mit $k = Ni(\varphi)$

a) $\underbrace{\{0\} = \overset{V_0}{Ker(\varphi^0)} \subsetneq \overset{V_1}{Ker(\varphi)} \subsetneq \overset{V_2}{Ker(\varphi^2)} \subsetneq \cdots \subsetneq \overset{V_k}{Ker(\varphi^k)} = V}_{\text{Filterung zu } \varphi}$

Elemente aus $V_j \setminus V_{j-1}$ sind Vektoren der Stufe j

Aufgabe: Filterung von: $\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{F}_3)$

$V_1 = Ker(A) = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ 0 & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{matrix} x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{matrix} \;=\; \langle \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}$

$V_2 = Ker \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_3 = B^3 = 0$

Definition: A heißt strikte obere Dreiecksmatrix, wenn alle Diagonaleinträge verschwinden

Satz: Es sind äquivalent:

(i) φ ist nilpotent

(ii) ${}_{B}M_{B}(\varphi)$ ist strikte obere Dreiecksmatrix

(iii) $\chi_\varphi = x^n$

(iv) $\mu_\varphi = x^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $k = Ni(\varphi)$

A nilpotent $\Rightarrow$ $Ni(A) \leq n$

II Zyklische Unterräume

Definition: $Z_\varphi(v) = \langle \{\varphi^k(v) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \rangle$

$Z_\varphi(v)$ ist invariant

ist v von Stufe j, gilt: $\dim Z_\varphi(v) = j$ und

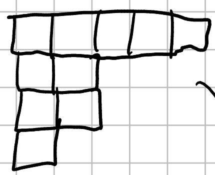
$B = \{\varphi^l(v) \mid 0 \le l \le j-1\}$ ist eine Basis von $Z_\varphi(v)$

Satz: φ nilpotent $\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{p} Z_\varphi(w_i)$ mit $p = \dim \ker(\varphi)$

III Partitionen

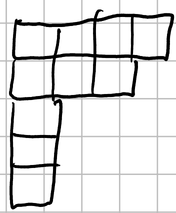
Definition: Partition von n: $n = \sum_{i=1}^{k} p_i \quad p_1 \ge p_2 \ge \dots \ge p_k > 0$

Diagramm: $p = (5, 2, 2, 1)$



Transponieren

Duale Partition: $p^* = (4, 3, 1, 1, 1)$



Addition: $(2,2,1) + (5,3,1,1,1) = (7,5,2,1,1)$

IV Normalform

Definition: Sei φ nilpotent mit $Ni(\varphi) = k$, $V_i := \ker(\varphi^i)$

$p_j(\varphi) := \dim(V_j) - \dim(V_{j-1})$

$\Rightarrow p(\varphi) = (p_1(\varphi), p_2(\varphi), \dots p_k(\varphi))$ ist Partition von n

$p(\varphi)$ heißt Rangpartition von φ

Aufgabe: Rangpartition von $\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{F}_3)$: $(1, 2-1, 3-2) = (1,1,1)$

Lemma: Wenn $V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$ die direkte Summe von invarianten Unterräumen ist, ist φ genau dann nilpotent, wenn $\varphi|W_i$ für alle i nilpotent ist

es gelten: (i) $N_i(\varphi) = \max\{N_i(\varphi|W_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ und

(ii) $p(\varphi) = p(\varphi|W_1) + p(\varphi|W_2) + \dots + p(\varphi|W_k)$

Korollar: Ist V die direkte Summe zyklischer Unterräume $V = \bigoplus_{i=1}^{s} Z_\varphi(w_i)$ der Dimension $q_i = \dim Z_\varphi(w_i)$ mit $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_s$

$\Rightarrow$ $q = (q_1, \dots, q_s)$ ist eine Partition von n und $q^* = p(\varphi$

Normalform: Sei $q = (q_1, \dots, q_s)$ eine Partition von n

$$\mathcal{N}(q) = \begin{pmatrix} N(q_1) & & & \\ & N(q_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & N(q_s) \end{pmatrix}$$ ist die nilpotente Normalform und die duale Partition q^*

Beispiel: $\mathcal{N}(3,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Kern $= \langle e_1, e_4 \rangle$

$N(3)$ $N(2)$

$$\mathcal{N}(q)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Kern $= \langle e_1, e_2, e_4, e_5 \rangle$

$\mathcal{N}(q)^3 = 0$

$p(\mathcal{N}(q)) = (2, 4-2, 5-4) = (2,2,1)$ ist duale Partition von $(3,2)$

Satz: Es gibt eine Basis B, sodass ${}_B M_B(\varphi) = \mathcal{N}(q)$ gilt mit $q = p(\varphi)^*$ mit $N_i(\varphi) = q_1$

Korollar: Sei A nilpotent, dann gibt es invertierbare Matrix S mit $S^{-1}AS = \mathcal{N}(q)$ mit $q = p(A)^*$

Korollar: A, B sind ähnlich, wenn sie dieselbe Rangpartition haben

Verfahren:

Gegeben: nilpotente Matrix $A \in M_{n,n}(K)$

Gesucht: $S \in GL_n(K)$, sodass $S^{-1}AS$ in Normalform ist

1. Berechne $A^1, A^2, \dots, A^{k-1}$ bis $A^k = 0$, $k = Nil(A)$)
2. Berechne Unterräume $V_j = Ker(A^j) \subseteq K^n$ für $j \in \{1, 2, \dots, k\}$

   $\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{k-1} \subsetneq V_k = K^n$ ist die Filterung von A
3. Berechne Rangpartition von A

   $p = (\dim V_1 - \dim V_0, \dim V_2 - \dim V_1, \dots \dim V_k - \dim V_{k-1})$

   und die duale Partition $q = p^+$

   Zeichne das Diagramm zu q

$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$	$v_{1,4}$
$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	$v_{2,3}$	$v_{2,4}$
$v_{3,1}$	$v_{3,2}$	$v_{3,3}$	
$v_{4,1}$			

4. Wähle linear unabhängige Vektoren $v_{1,k}, \dots, v_{p_k,k} \in K^n \setminus V_{k-1}$, die ein Komplement von V_{k-1} in V_k erzeugen

   Setze $k-1$

   Wiederhole bis $k = 0$!
5. (Nach links verschieben): Definiere $v_{i,j} = Av_{i,j+1}$ für alle $i \leq p_{j+1}$
6. (zur Basis ergänzen): Wähle $v_{i,j} \in V_j \setminus V_{j-1}$ für alle $i \in \{p_{j+1}+1, \dots, p_j\}$ so, dass $v_{1,j}, \dots, v_{p_j,j}$ linear unabhängig sind und ein Komplement zu V_{j-1} in V_j erzeugen

   Ist $j > 1$, setze $j \to j-1$ und gehe zu 5.
7. gefundene Vektoren $v_{i,j}$ in Reihenfolge $v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,q_1}, v_{2,1}, \dots, v_{p,1}, \dots, v_{p_1,q_{p_1}}$

   (Zeilen des Diagramms folgend als Spalten in eine Matrix einfügt

Bemerkungen: S ist invertierbar

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 & 12 \\ -1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^2 = 0$, also ist A nilpotent mit $h = 2$

2 $V_1 = Ker(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_0 = \{0\}$ $V_2 = \mathbb{Q}^4$

3 Rangpartition: $(2, 2)$, duale Partition $(2, 2)$

$v_{1,1}$	$v_{1,2}$
$v_{2,1}$	$v_{2,2}$

4 Vektoren $v_{i,j}$ von rechts suchen

$v_{1,2}, v_{2,2} \in \mathbb{Q} \setminus V_1$!

$v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, da sie linear unabhängig sind und

ein Komplement zu V_1 in $\mathbb{Q}^4$ bilden

5 $v_{1,1} = A v_{1,2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_{2,1} = A v_{2,1} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

7 in richtiger Reihenfolge schreiben (Diagramm zeilenweise von links nach rechts)

$S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $S^{-1} A S = N(2, 2)$

Beispiel:

1 $A = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}$ $A^3 = 0$ $h = 3$

2 $V_0 = \{0\}$ $V_1 = Ker(A)$ $V_2 = Ker(A^2)$ $V^3 = \mathbb{F}^3$

$V_1 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} =$ $\begin{matrix} v_1 = -v_2 \\ v_2 = -2v_3 \end{matrix}$ $= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

③ $p = (1,1,1)$ $\quad \begin{array}{|c|} \hline v_{11} \\ \hline v_{21} \\ \hline v_{31} \\ \hline \end{array}$ $\quad q = (3)$ $\quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ \hline \end{array}$

④ $v_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

⑤ $v_{2,1} = A v_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_{1,1} = A v_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

⑦ $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad S^{-1}AS = \mathcal{N}(q) = \mathcal{N}(3)$ ist die nilpotente Normalform zu A

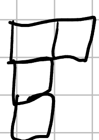
Aufgabe:

① $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = 0$

② $V_0 = \{0\}$ $\quad V_1 = \mathrm{Ker}(A)$ $\quad V_2 = \mathrm{Ker}(A^2)$ $\quad V_3 = \mathbb{R}^4$

$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_2 = (1 \ -2 \ 1 \ -1) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2x_2 \\ x_1 = -x_3 \\ x_1 = x_4 \end{array} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

③ $p = (2,1,1$  $\quad d = (2,1)$ $\quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ \hline v_{4,2} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$

④ $v_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

⑤ $v_{2,1} = A v_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad v_{1,1} = A^2 v_{3,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

⑥ $v_{2,1}, v_{1,1}$ müssen linear unabhängig sein und Komplement von $V_1 \setminus \{0\}$ bilden

$v_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad S^{-1} A S = \mathcal{N}(3,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$