Aufgabe 5.5 (10 Punkte). (a) Es sei $A \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine stochastische Matrix und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie: $|\lambda| \leq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl $\lambda \in [-1, 1]$ Eigenwert einer stochastischen 2×2-Matrix ist.

ist λ Eigenwert von A, ist λ auch Eigenwert von A^T

$\Rightarrow \quad A^T v = \lambda v$

$\|A^T v\|_1 \leq \|v\|_1$, weil $A^T v$ den Vektor v nicht vergrößern kann

Homogenität

aus $Av = \lambda v$ folgt $\|Av\|_1 = \|\lambda v\|_1 = |\lambda| \|v\|_1$

und daraus $\quad |\lambda| \|v\|_1 \leq \|v\|_1 \quad | : \|v\|_1$

$|\lambda| \leq 1$ was zu zeigen war

b) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\begin{matrix} a + c = 1 \\ b + d = 1 \end{matrix}$

Ist λ Eigenwert von A gilt: $Av = \lambda v$

$$\begin{aligned} av_1 + bv_2 &= \lambda v_1 \\ cv_1 + dv_2 &= \lambda v_2 \end{aligned}$$

$$\underbrace{(a+c)}_{1} v_1 + \underbrace{(b+d)}_{1} v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

$$v_1 + v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

$$v = \lambda v$$

da $|\lambda| \leq 1$ gilt sind alle

$\lambda \in [-1, 1]$ eine Lösung von $v = \lambda v$ und somit Eigenwert von A.