Aufgabe 3.1 (10 Punkte).

Wir betrachten die alternierende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$$

und die alternierende Bilinearform $\beta \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\beta(u,v) = u^T A v$. Bestimmen Sie eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, sodass $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\beta)$ in alternierender Normalform ist.

1. Rg(A) ist 2, da Zeile 1 und 2 linear unabhängig sind und der Rang gerade sein muss. Also $r = 2k = 2 \Rightarrow k = 1$

$W_1 = \mathbb{R}^3$

2. v_1, v_1' so wählen dass $\beta(v_1, v_1') \neq 0$

Sei $v_1 = e_1$ und $v_1' = e_2$, da $(1\ 0\ 0) A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0\ 2\ 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$

3. $W_2 = \{ w \in \mathbb{R}^3 \mid \beta(v_1, w) = 0 \text{ und } \beta(v_1', w) = 0 \}$

$= \{ w \in \mathbb{R}^3 \mid 2w_2 + 3w_3 = 0 \text{ und } -2w_2 - 2w_3 = 0 \}$

$= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} w_1 = -w_3 \\ 2w_2 = 3w_3 \\ w_2 = \frac{3}{2} w_3 \end{array} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

4. $v_1 = \frac{1}{2} v_1'$

5. $2k = 2 < 3$, also wähle Basis von W_2. Sei $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dann ist $\mathcal{B} = (v_1, v_1, u_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis so dass $M_{\mathcal{B}}(\beta)$

in alternierender Normalform ist