Aufgabe 4.4 (10 Punkte).
Sei $n \geq 2$ und sei K ein Körper. Gegeben sind $a, b, c, d, e \in K$. Berechnen Sie die Determinante von $A_n = (a_{ij})_{i,j} \in M_{nn}(K)$, definiert durch

$$a_{ij} = \begin{cases} a, & \text{falls } i = 1, j = 1, \\ b, & \text{falls } j = 1, i > 1, \\ c, & \text{falls } j = n, i < n, \\ d, & \text{falls } i = n, j = n, \\ e, & \text{falls } 1 < i = j < n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

A_n hat die Form:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c \\ b & e & 0 & c \\ b & 0 & e & c \\ b & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_4 = e \cdot \det\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ b & e & c \\ b & 0 & d \end{pmatrix} = e \cdot e \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = e^2 \cdot (ad - cd)$$

Behauptung: $\det(A_n) = e^{n-2} \cdot (ad - cd)$

Induktionsanfang:

Sei $n = 2$: $A_2 = e^0 \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 1(ad - cd)$ ✓

Annahme: $\exists n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ mit $\det(A_n) = e^{n-2}(ad - cd)$

Zu zeigen: $\det(A_{n+1}) = e^{n-1}(ad - cd)$

$\det(A_{n+1})$: man nimmt eine Spalte mit $1 < i = j < n$

und führt eine Laplace'sche Entwicklung durch. In dieser

Spalte steht nur e. Also ist $\det(A_{n+1}) = e \cdot \det(A_n)$

Annahme

$\Rightarrow e \cdot (e^{n-2}(ad-cd)) = e^{n-1}(ad-cd)$

Nach dem Prinzip der voll. Induktion folgt die Behauptung