Aufgabe 2.1:

Prüfen, ob Äquivalenzrelation:

reflexiv: Sei $A \in GL_n(K)$ und $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Da $A^k = A^k$ ist, gilt $A^k \simeq A^k$ und $\simeq$ ist reflexiv

symetrisch: Seien $A, B \in GL_n(K)$ und $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Angenommen es gilt $A \simeq B$, folgt $A^k = B^l$. Also auch $B^l = A^k$. Daraus folgt $B \simeq A$ und $\simeq$ ist symetrisch.

transitiv: Seien $A, B, C \in GL_n(K)$ und $k, l, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Angenommen es gilt $A \simeq B$ und $B \simeq C$. Dann gilt $A^k = B^l$ und $B^l = C^n$ also auch $A^k = C^n$

Also ist $A \simeq C$ und $\simeq$ ist transitiv.

Da $\simeq$ reflexiv, symetrisch und transitiv ist, ist $\simeq$ eine Äquivalenzrelation

Aufgabe 2.2

1. Kern berechnen

$\ker\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\1&0&1&1\end{pmatrix} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax=0\}$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\1&0&1&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

II - I

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&-2&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -x_3 - x_4\\ x_2 &= \tfrac{1}{2}x_3 + x_4\\ x_3 &= x_3\\ x_4 &= x_4\end{aligned}$$

$$U = \ker(A) = \left\{ x_3\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$U \oplus \langle v^t \rangle \oplus \langle w^t \rangle = \mathbb{R}^4$, wenn

1. $U \oplus \langle v^t \rangle \oplus \langle w^t \rangle$ ist eine direkte Summe
2. $U + \langle v^t \rangle + \langle w^t \rangle = \mathbb{R}^4$

Sind U, v^t und w^t linear unabhängig, so ist deren Summe direkt (siehe 2.3.6 ii).

Lineare Unabhängigkeit:

$$a\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\ t\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 2\\ t\end{pmatrix}=0;$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 2\\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & t\\ 1 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 1 & t & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}III+I\\ I\cdot(-1)\\ \Rightarrow\\ II+\frac{1}{2}I\end{matrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & t+1\\ 0 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & t & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}II\cdot(-1)\\ \Rightarrow\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & t+1\\ 0 & 1 & t & \end{pmatrix}\begin{matrix}I-II\\ III-\frac{1}{2}\cdot II\\ \Rightarrow\\ IV-II\end{matrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 3 & t+2\\ 0 & 0 & t+2 & 3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ III:3\\ IV:(t+2)\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 1 & \frac{t+2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{t+2}\end{pmatrix}$$

$III = IV$ genau dann

wenn $\frac{t+2}{3}=\frac{3}{t+2}$

$\Rightarrow t_1 = 1 \qquad \frac{3}{3}=\frac{3}{3}$

$t_2 = -5 \qquad \frac{-3}{3}=\frac{3}{-3}$

U, v_t, w_t sind für $t \in \mathbb{R} \setminus \{7, -5\}$ linear unabhängig und ihre Summe ist demnach direkt.

4 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^4$ sind eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Also gilt auch $U + \langle v_t \rangle + \langle w_t \rangle$ und die Behauptung ist bewiesen.

2.3

Lineare Abbildung

L1: Seien $h_1, h_2 \in V^*$

$r_U(h_1 + h_2) = (h_1 + h_2)|_U = h_{1U} + h_{2U} = r_U(h_1) + r_U(h_2)$

L2: Sei $h \in V^*$ und $a \in K$.

$r_U(a h) = ah|_U = a r_U(h)$

$\Rightarrow$ lineare Abbildung

Surjektivität:

V^* ist die Menge aller lineare Abbildungen von V nach K. Die Abbildung r_U ist ja nur die Einschränkung aller linearen Abbildungen von V nach K auf U.

Da U ein Unterraum von V ist, beinhaltet V^* auch alle linearen Abbildungen von U nach K. Also ist r_U auch surjektiv b)

U_2^* ist isomorph zu U

Also muss $\dim(U1) = \dim(\text{Kern}(r_{U1}))$ sein

$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(r_{U1})) + \dim(\text{Bild}(r_{U1}))$

da r_{U1} surjektiv ist gilt $\text{Bild}(r_{U1}) = U1^*$

$\Rightarrow \dim(V) = \dim(\text{Kern}(r_{U1})) + \dim(U1^*)$

$\dim(V) - \dim(U1^*) = \dim(\text{Kern}(r_{U1}))$

Nach Satz 2.3.12 ist $\dim(V) = \dim(U1) + \dim(U2)$ und laut 2. Satz gilt $\dim(U1) = \dim(U1^*)$ und $\dim(U2) = \dim(U2^*)$

Also folgt: $\dim(U2^*) = \dim(\text{Kern}(r_{U1}))$

Da $U2^*$ und $\text{Kern}(r_{U1})$ die gleiche Dimension haben sind sie isomorph

Aufgabe 2.4.

$\iota_v : V^* \to K$

$\iota_v(a) = a(v)$

$\uparrow$

lineare Abbildung

Der Bidualraum V^{**} ist die Menge $Hom(V^*, K)$, also alle lineare Abbildungen von V^* nach K

a) ι_v liegt in V^{**}, wenn ι_v eine lineare Abbildung ist.

(L1) Seien $a, b \in V^*$.

$\iota_v(a+b) = (a+b)(v) = a(v) + b(v) = \iota_v(a) + \iota_v(b)$

(L2) Sei $a \in V^*$ und $r \in K$

$\iota_v(ra) = (ra)(v) = r \cdot a(v) = r\,\iota_v(a)$

Also ist ι_v linear und liegt in V^{**}

b) Es ist zu zeigen, dass ι_v eine bijektive lineare Abbildung ist. Linear ist ι_v (laut a). Da $\dim(V^*) = \dim(V^{**})$ reicht es nachzuweisen, dass ι_v injektiv oder surjektiv ist, da direkt die Bijektivität folgt (vgl. M6)

Injektivität: Angenommen $\iota v = \iota w$.

Für alle $a \in V^*$ muss gelten: $\iota v(a) = \iota w(a) \Rightarrow a(v) = a(w)$

Da dies für alle a gilt, folgt $v = w$ und ι ist injektiv und dann auch bijektiv.

ι ist eine bijektive lineare Abbildung und damit ein Isomorphismus

Aufgabe 2.5

a) Es sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + U = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + U$

$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+t \\ y'+t \\ z'+t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x+2y+z \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ x'+2y'+z' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Also ist die Wahl des Stützvektors irrelevant und φ ist wohldefiniert

b) $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu Basis von V ergänzen:

mit $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. v_0, v_1, v_2 sind offensichtlich linear Unabhängig.

Also ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + U$ eine Basis von V/U

$_B M_B(\varphi)$: $\quad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$

$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot v_0 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$

$_B M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$