Bilinearform:

Satz 3.7.14: $\beta(u,v) = \kappa_B(u)^T M_B(\beta) \kappa_B(v)$

Korollar 3.7.16: $M_B: \mathrm{Bil}_K(V) \to M_{n,n}(K)$ mit $\beta \to M_B(\beta)$ ist ein Isomorphismus. $\dim \mathrm{Bil}_K(U) = n^2$

Transformation: $M_C(\beta) = S^T M_B(\beta) S$ mit $S = {}_B M_C(id_U)$.

Kongruenz: $\{M_B(\beta) \mid B$ geordnete Basis von $U\}$ eine Kongruenzklasse von Matrizen

Zwei Bilifo sind kongruent, wenn gilt: $M_{B_1}(\beta_1) = M_{B_2}(\beta_2)$

Die Kongruenz von Bilifo ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Bil}(K)$

Einsetzen: $\beta: U \times U \to K$, $w \in U$ $L_w^1(\beta), L_w^2(\beta) \in U^*$

$L_w^1(\beta)(u) = \beta(w,u)$ und $L_w^2(\beta)(u) = \beta(u,w)$

Für $k \in \{1,2\}$ ist $\beta^{(k)}: U \to U^*$ mit $w \to L_w^k(\beta)$ eine lineare Abbildung und $\mathrm{Bil}_K(U) \to \mathrm{Hom}_K(U, U^*)$ mit $\beta \to \beta^{(k)}$ ist ein Isomorphismus

a) ${}_{B^*}M_B(\beta^{(1)}) = M_B(\beta)^T$

b) ${}_{B^*}M_B(\beta^{(2)}) = M_B(\beta)$

Regulär: Für alle $u \neq 0$ in V existiert ein $v \in V$ mit $\beta(u,v) \neq 0$

Ausgeartet: nicht regulär

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) β ist regulär

(ii) $\beta^{(1)}$ oder $\beta^{(2)}: U \to U^*$ ist ein Isomorphismus

(iii) $\forall v \neq 0$ in U existiert ein $u \in U$ mit $\beta(u,v) \neq 0$

(iv) Für jede geordnete Basis B von U ist $M_B(\beta)$ invertierbar

(v) Es gibt eine geordnete Basis B von U, sodass $M_B(\beta)$ invertierbar ist

Einschränkung: Unterraum $U \subseteq V$ ist β-regulär, wenn $\beta|_U$ regulär ist

Zerlegung: Sei $U \subseteq V$ β-regulär. Dann gilt $V = U \oplus W$ mit

$W = \{w \in V \mid \beta(u,w) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$

Rang: Rang von β = $Rg(M_B(\beta))$. Hängt nicht von Basis ab.

Nullraum: $N_\beta = \{u \in V \mid \beta(u,v) = 0 \ \forall v \in V\}$

Rangsatz: $\dim(V) - \dim(N_\beta) = Rg(\beta)$