Aufgabe 5.2 (10 Punkte).
Es sei K ein Körper und es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(K).$$

(a) Bestimmen Sie $f(A)$ für ein allgemeines Polynom $f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$.

(b) Bestimmen Sie mit (a) das Verschwindungsideal $\mathcal{I}_A$ und das Minimalpolynom μ_A.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = 0$$

$$f(A) = a_2 A^2 + a_1 A^1 + a_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_1 \\ 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_1 + a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

b) Minimalpolynom: es folgt aus a) $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$

Damit gibt es kein Minimal Polynom von Grad 1 oder 2.
Das Minimalpolynom ist somit: $\mu_A = X^3$

Alle Polynom mit $a_0, a_1, a_2 = 0$ annullieren

$$\mathcal{I}_A = \sum_{k=3}^{n} a_n X^n$$