

Aufgabe 3.5 (10 Punkte).

Wir betrachten die Hermite'sche Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ 1-i & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{C})$$

und die Hermite'sche Form $\sigma : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\sigma(x, y) = x^* H y$ für $x, y \in \mathbb{C}^3$.

Bestimmen Sie eine geordnete Basis \mathcal{B} von \mathbb{C}^3 , sodass die Matrixdarstellung $M_{\mathcal{B}}(\sigma)$ in Normalform ist. Was ist der Typ von σ ?

$$1. R_g(H) = 3 \quad w_1 = \mathbb{C}^3$$

$$2. w_1' = e_3, \text{ da } e_3^T H e_3 = -1 \neq 0 \text{ ist}$$

$$w_2 = \text{Kern}(0 \ 1 \ -1)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$w_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ da } (0 \ 1 \ 1) H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1-i \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$w_3 = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1-i & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} w_2 &= w_3 \\ (1-i)w_1 &= -w_2 \end{aligned}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ -1-i \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ 1-i & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$w_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ -1-i \end{pmatrix}, \text{ da } (1 \ -1+i \ -1-i) H \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ -1-i \end{pmatrix} = (2 \ -2+2i \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ -1-i \end{pmatrix}$$

$$= 2i + (2+2i)(-7+ i) = 2i + (2 \cdot -7 - 2i + 3i) = -7 - 2i \neq 0$$

$$L_4 = \{0\}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1' & \sigma & \vdash -1 \\ v_2 &= v_2' & \sigma & \vdash 7 \\ v_3 &= \frac{1}{\sqrt{7-2i}} v_3' & \sigma & \vdash -1 \end{aligned}$$

Also ist $B = (v_2, v_1, v_3)$ eine Basis so, dass $M_B(\sigma)$ in Standardform ist Typ $(7, 2, 0)$ ist.