Aufgabe 5.4 (10 Punkte).
Sei K ein Körper und sei $n \geq 1$. Sei $A \in \mathrm{M}_{n,n}(K)$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $g \in K[X]$ gibt, sodass $A^{-1} = g(A)$ gilt.

A lässt sich als Minimalpolynom μA schreiben:

$\mu A(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 = 0$

A einsetzen: $a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0$

mit A^{-1} multiplizieren: $a_n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_1 I + a_0 A^{-1} = 0$

$-a_0 A^{-1}$: $-a_0 A^{-1} = a_n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + a_1 I$

durch $-a_0$ teilen: $A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + a_1 I)$

Da A invertierbar ist, ist $a_0 \neq 0$

Damit ist gezeigt, dass es ein Polynom g gibt sodass $A^{-1} = g(A)$