

Aufgabe 4.1 (5 Punkte).

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{5,5}(\mathbb{Q}).$$

A in obere Dreiecksmatrix überführen:

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{IV-2 \cdot II \\ V-II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{IV-\frac{2}{3}II \\ V+\frac{1}{3}II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 6 & \frac{26}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 4 & \frac{17}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{29}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{IV+\frac{4}{3}II \\ V-\frac{5}{9} \cdot IV}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{82}{27} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= -(3 \cdot (-3) \cdot 6 \cdot \frac{82}{27}) \\ &= 764 \end{aligned}$$