Invariante Unterräume

U ist invarianter Unterraum $\Leftrightarrow \varphi(U) \in U$

1. Zerlegung durch das Minimalpolynom

Lemma: $U_\varphi(g) := Ker(g(\varphi))$ ist invariante Unterraum

annulliert f auf φ gilt: $U_\varphi(f) = V$

ist $g = X - \lambda$ ist $U_\varphi(X-\lambda) = Eig_\varphi(\lambda)$

$U_A(g) = Ker(g(A))$

Satz: ist $g = g_1 g_2 \Rightarrow U_\varphi(g_1) \oplus U_\varphi(g_2)$

Aufgabe: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $g = x^3 + x$ $U_A(g) = Ker(A^3 + A) = Ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^3$

$U_A(x) = Ker(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $U_A(x^2+1) = Ker(A^2 + I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Korollar: ist μ_φ das Minimalpolynom so, dass $\mu_\varphi = g_1 g_2 \cdots g_r$ gilt

$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{r} U_\varphi(g_i)$

ist g_i normiert ist g_i das Minimalpolynom von $\varphi / U_\varphi(g_i)$

2. Diagonalisierbarkeit

Satz: $\overset{A}{\varphi}$ diagonalisierbar $\Leftrightarrow \mu_\varphi$ zerfällt in paarweise verschiedene Linearfaktoren d.h. $\mu_\varphi = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_r)$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mu_A = X^2 = X \cdot X \Rightarrow$ nicht diagonalisierbar