Aufgabe 3.5 (10 Punkte).
Wir betrachten die Hermite'sche Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ 1-i & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{C})$$

und die Hermite'sche Form $\sigma : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ definiert durch $\sigma(x, y) = x^* H y$ für $x, y \in \mathbb{C}^3$. Bestimmen Sie eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^3$, sodass die Matrixdarstellung $M_{\mathcal{B}}(\sigma)$ in Normalform ist. Was ist der Typ von σ?

1. $Rg(H) = 3 \quad W_1 = \mathbb{C}^3$

2. $v_1' = e_3$, da $e_3^T H e_3 = -1 \neq 0$ ist

$W_2 = \text{Kern}(0 \;\; 1 \;\; -1)$

$\begin{matrix} 1-i & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, da $(0 \;\; 1 \;\; 1) H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1-i \;\; 1 \;\; 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

$W_3 = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1-i & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} w_2 = w_3 \\ (1-i) w_1 = -w_2 \end{matrix}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ -1-i \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ 1-i & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$v_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ -1+i \end{pmatrix}$, da $(1 \;\; -1-i \;\; -1-i) H \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ -1+i \end{pmatrix} = (2i \;\; -2+2i \;\; 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ -1+i \end{pmatrix}$

$= 2i + (2+2i)(-1+i) = 2i + (2 - 2i - 2i + 3i) = -1 - 2i \neq 0$

$L_4 = \{0\}$

$v_1 = v_1' \quad \overset{\sigma}{:=} -1$

$v_2 = v_2' \quad \overset{\sigma}{:=} 1$

$v_3 = \frac{1}{\sqrt{|-1-2i|}} v_3' = \frac{1}{\sqrt{5}} v_3' \quad \overset{\sigma}{:=} -1$

Also ist $B = (v_2, v_1, v_3)$ eine Basis so, dass $M_B(\sigma)$ in Standardform mit Typ $(1, 2, 0)$.