Aufgabe 5.3 (10 Punkte).
Sei K ein Körper und sei $n \geq 1$. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{n,n}(K)$, die die Gleichung

$$A^2 = I_n$$

erfüllt, nennt man *involutiv.*

(a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte jeder involutiven Matrix in $\{-1, 1\}$ liegen.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: „Jede involutive Matrix ist diagonalisierbar".

a) Minimalpolynom: $g \in K[t]$ mit $t^2 - 1$ für $A \neq I_n$

$t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$
$t_2 = -1$

g muss Grad 2 haben, da $A - \lambda = 0$ zwar für alle Diagonalmatrizen gilt, $A^2 = I_n$ aber nur für $A = I_n$ wahr ist

für $A = I_n$ ist g: $X - 1$ mit Nullstelle/Eigenwert: 1

Damit ist gezeigt, dass die Eigenwerte jeder involutiven Matrix in $\{-1, 1\}$ liegen

b) $\mathrm{Eig}_A(1) = \mathrm{Kern}(A - I) = (A - I_n)v = 0$

$\mathrm{Eig}_A(-1) = \mathrm{Kern}(A + I) = (A + I)v = 0$

Es ist zu zeigen, dass $V = \mathrm{Eig}_A(1) \oplus \mathrm{Eig}_A(-1)$ gilt, da dann $\dim \mathrm{Eig}_A(1) + \dim \mathrm{Eig}_A(-1) = \dim V$ gelten würde und damit $\gamma(1) + \gamma(-1) = n$, womit A diagonalisierbar ist.

1. Sei $v \in K^n$ und $P_1 = \frac{1}{2}(I + A)$, $P_{-1} = \frac{1}{2}(I - A) \in M_{n,n}(K)$

$v \in K^n$ lässt sich schreiben als $v = v_1 + v_{-1}$ mit $v_1 \in \mathrm{Eig}_A(1)$

$v_{-1} \in Eig_A(-1)$

$v_1 = P_1 v = \frac{1}{2}(v + Av)$
$v_{-1} = P_{-1} v \; \frac{1}{2}(v - Av)$

$v_1 \in Kern(A - I_n)$, da $(A - I_n)v_1 = (A - I_n) \cdot \frac{1}{2}(v + Av)$

$= \frac{1}{2}((A - I_n)v + (A - I_n)Av) \quad | \; A^2 = I_n$

$= \frac{1}{2}((A - I_n)v + (I_n - A)v) = 0$

$v_{-1} \in Kern(A + I_n)$, da $(A + I_n)v_{-1} = (A + I_n) \cdot \frac{1}{2}(v - Av)$

$= \frac{1}{2}((A + I_n)v - (A + I_n)Av) \; | A^2 = I_n$

$= \frac{1}{2}((A + I_n)v - (I_n + A)v)$

$= 0$

Also ist $V = Eig_A(1) + Eig(-1)$

2. $Eig_A(1) \cap Eig_A(-1) = \{0\}$

sei $v \in Eig_A(1) \cap Eig_A(-1)$

$\Rightarrow \; (A - I)v = 0$ und $(A + I)v = 0$
$= Av = v$ $\qquad$ $= Av = -v$

aus $Av = v$ und $Av = -v$ folgt $v = 0$

Die Summe ist damit direkt und jede involutive Matrix ist diagonalisierbar