**Aufgabe 4.2** (10 Punkte).

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ definieren wir die Matrix $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 3 \\ t & 2 & t \\ 3 & t & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,3}(\mathbb{R})$.

(a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, sodass $A_t$ eine invertierbare Matrix in $\mathrm{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ ist.

(b) Gibt es eine Zahl $t \in \mathbb{Z}$, sodass $A_t$ in $\mathrm{M}_{3,3}(\mathbb{Z})$ invertierbar ist?

a) $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 3 \\ t & 2 & t \\ 3 & t & 1 \end{pmatrix}$

$A_t$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A_t) \neq 0$ ist.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & t & 3 & 1 & t \\ t & 2 & t & t & 2 \\ 3 & t & 1 & 3 & t \end{array}\right| = 2 + 3t^2 + 3t^2 - 18 - t^2 - t^2$$

$$= 4t^2 - 16 = 0$$

$$t^2 = 4$$

$$t = 2$$

Also ist $A_t$ für alle $t \neq 2$ invertierbar

b) $\det(A_t)$ muss eine Einheit in $\mathbb{Z}$ sein. $\{1, -1\}$ sind die einzigen Einheiten in $\mathbb{Z}$.

$4t^2 - 16 = 1$

$4t^2 = 17$

$t^2 = \frac{17}{4}$

$t = \frac{\sqrt{17}}{2} \notin \mathbb{Z}$

$4t^2 - 16 = -1$

$4t^2 = 15$

$t^2 = \frac{15}{4}$

$t = \frac{\sqrt{15}}{2} \notin \mathbb{Z}$

Also gibt es kein $t \in \mathbb{Z}$, sodass $\det(A_t)$ eine Einheit in $\mathbb{Z}$ ist und $A_t$ ist nicht in $M_{3,3}(\mathbb{Z})$ invertierbar