Aufgabe 4.3 (10 Punkte).
Sei K ein Körper. Zeigen Sie:

(a) Sind $A, B \in \mathrm{M}_{n,n}(K)$ kongruent, dann gibt es $\lambda \in K^\times$ mit $\det(A) = \lambda^2 \det(B)$.

(b) Ist $A \in \mathrm{M}_{n,n}(K)$ alternierend, dann gibt es $\lambda \in K$ mit $\det(A) = \lambda^2$.

a) $A \sim B$, also gibt es eine invertierbare Matrix $S \in Gl_n(K)$ mit $A = S^T B S$

Sei $\lambda = \det(S) = \det(S^T)$ $\lambda \in K^\times$, weil $\det(S) \neq 0$, da S invertierbar ist.

Daraus folgt $\det(A) = \det(S^T B S) = \det(S^T)\det(B)\det(S)$

Sei $\lambda = \det(S) = \det(S^T)$, dann ist $\lambda \in K^\times$, weil $\det(S)$ eine Einheit ist, da S invertierbar ist

Also: $\det(A) = \lambda \det(B) \lambda$
$= \lambda^2 \det(B)$

b) Sei $A \in M_{n,n}(K)$ alternierend. Sei β alternierende Bilinearform und B eine Basis, sodass $M_B(\beta)$ in Normalform aus 3.3.9 ist
A ist kongruent mit $M_B(\beta)$. $\det(M_B(\beta)) = 1$, wenn A vollen Rang hat, sonst 0.
Wir A mit vollen Rang gilt für $\lambda \in K^\times \in K$
$A \sim B$ und nach a) folgt $\det(A) = \lambda^2 \underbrace{\det(M_B(\beta))}_{1} = \lambda^2$