Aufgabe 3.3 (10 Punkte).

Sei K ein Körper mit $1+1=0$. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $\beta\colon V\times V\to K$ eine symmetrische Bilinearform.

Ein Unterraum U heißt β-*alternierend*, wenn β eingeschränkt auf U alternierend ist.

(a) Zeigen Sie: Die Summe U_1+U_2 zweier β-alternierender Unterräume U_1, U_2 ist wieder β-alternierend.

(b) Zeigen Sie: Es gibt einen β-alternierenden Unterraum $W\subseteq V$, der alle β-alternierenden Unterräume von V enthält.

a) U_1 und U_2 sind alterniend, also gilt für alle $u_1\in U_1, u_2\in U_2$

$\beta(u_1,u_1)=0$ und $\beta(u_2,u_2)=0$

Sei $v=u_1+u_2\in U_1+U_2$

$\beta(v,v)=\beta(u_1+u_2,u_1+u_2)$

Entweder u_1 und u_2 sind 0, dann ist $\beta(v,v)=\beta(0,0)=0$

oder u_1 und u_2 sind 1, dann ist $\beta(v,v)=\beta(0,0)=0$

oder $u_1=1$ und $u_2=0$, dann ist $\beta(v,v)=\beta(u_1,u_1)=0$

oder $u_1=0$ und $u_2=1$, dann ist $\beta(v,v)=\beta(u_2,u_2)=0$

Also ist U_1+U_2 wieder alterniend

b) Es gibt nur 2 Unterräume von V, $\{0\}$ und V selbst.

V enthält $\{0\}$ und sich selber. Da V laut Definition alterniend ist und $\{0\}$ trivialerweise auch, ist V ein β-alternierender Unterraum, der alle β-alternierenden Unterräume von V enthält