

Aufgabe 3.2 (10 Punkte).

Es sei $\sigma: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine Hermite'sche Form. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind

- (i) σ ist regulär
- (ii) $\text{Rg}(\sigma) = n$
- (iii) $\text{Re}(\sigma)$ ist regulär

(i) \Rightarrow (ii) σ ist regulär. Es gibt eine Basis B , so dass $M_B(\sigma)$ in Normalform ist. Die Normalform hat den Typ (r, r, k) .

Da σ regulär ist, folgt aus 3.4.53, dass $k=0$ ist. Also hat die Matrixdarstellung den vollen Rang n . Der Rang einer Matrixdarstellung einer Hermite'schen Form hängt nicht von der gewählten Basis ab.

Es folgt: $\text{Rg}(\sigma) = \text{Rg}(M_B(\sigma)) = n$

(ii) \Rightarrow (i)

$\text{Rg}(\sigma) = n$. Also haben alle Matrixdarstellungen den Rang n . Also auch die Normalform mit Typ (r, r, k) . Da σ vollen Rang hat ist $k=0$ und nach 3.4.53 ist σ regulär.

(iii) \Leftrightarrow (i)

Satz 3.4.29