Aufgabe 3.4 (10 Punkte).

Diskutieren Sie, ob die beiden folgenden reellen Matrizen kongruent sind:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2 Matrizen sind kongruent, wenn die zugehörige Bilinearformen den gleichen Typen haben

Sei: $B_1(v,v) = v^T A v$ und $B_2(v,v) = v^T B v$

Normalformen von B_1:

1. Rang(A): $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg(A) = Rg(B_1) = 3$

$W_1 = \mathbb{R}^3$

$v_1' = e_3$, da $e_3^T A e_3 = 1$ ist

$W_2 = \{ w \in \mathbb{R}^3 \mid (-1\ 3\ 1) w = 0 \}$

$= \text{Kern}(-1\ 3\ 1) \quad \Rightarrow w_1 = 3w_2 + w_3$

$w_2 =$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad 0 \quad 4 \quad -6$

$v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, da $(1\ 0\ 1) A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

$W_3 = \text{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$w_2 = -\frac{1}{7} w_3$

$w_1 = -4 w_2 = \frac{4}{7} w_3$

$\begin{pmatrix} 4/7 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$v_3' = \begin{pmatrix} 4/7 \\ -\frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$, da $(4/7 \ -1/7 \ 1) A \begin{pmatrix} 4/7 \\ -\frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{25}{49} \neq 0$

$W_4 = \{0\}$

$v_1 = v_1' \overset{B_1}{:=} 1$

$v_2 = v_2' \overset{B_1}{!=} 1$

$v_3 = \frac{1}{\frac{5}{7}} v_3' = \frac{7}{5} v_3' \overset{B_1}{:=} -1$ Richtig geordnet

Also ist $B_1 = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis, sodass $M_{B_1}(B_1)$ in Normalform ist mit Typ $(1,2,0)$

Normalform von B_2:

1. $Rg(B) = Rg(B_2) = 3$ $W_1 = \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. $v_1' = e_2$, da $e_2^T B e_2 = 1 \neq 0$

$W_2 = \text{Kern}(2 \ 1 \ 2) \Rightarrow$

$w_1 = -\frac{1}{2} w_2 - w_3 = 0$

$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$

$v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, da $(-1\ 0\ 1) B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0\ 0\ -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$

$W_3 = \text{Kern} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} w_3 = 1 \\ w_1 = -\frac{1}{2} w_2 \end{array}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$v_3' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, da $(-\frac{1}{2}\ 1\ 1) B \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2\ 2\ 1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 2 + 1 = 2 \neq 0$

$W_3 = \{0\}$

$v_1 = v_1' \quad \overset{m_2}{:=} 1$

$v_2 = v_2' \quad \overset{m_2}{:=} -1$

$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_3' \quad \overset{m_2}{:=} 1$

Also ist $B_2 = (v_1, v_3, v_2)$ eine Basis so, dass $M_{B_2}(m_2)$ in Normalform ist mit Typ $(2, 1, 0)$

Da der Typ von A $(1, 2, 0)$ ungleich dem Typen von B $(2, 1, 0)$ ist, sind die Matrizen nicht kongruent