2024年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试题

考试时间：180分钟，满分：150分

一、选择题：1～10小题，每小题5分，共50分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

1. 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{\cos t}\mathrm{d}t$，$g(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}\mathrm{d}t$，则

A．f(x)为奇函数，$g_{(x)}$为偶函数

B．f(x)为偶函数，$g_{(x)}$为奇函数

C. f(x) 与 $g_{(x)}$ 均为奇函数

D. f(x) 与 $g_{(x)}$ 均为周期函数

【答案】C

2. 设 $P=P(x,y,z),Q=Q(x,y,z)$ 均为连续函数，

Σ 为曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=$

A. $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

B. $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

C. $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

D. $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

【答案】A

3. 已知幂函数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_{2n}=$

A. $-\frac{1}{6}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{3}$

【答案】A

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，则

A. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=m$ 时，$f'(0)=m$.

B. 当 $f'(0)=m$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=m$.

C. 当 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=m$ 时，$f'(0)=m$.

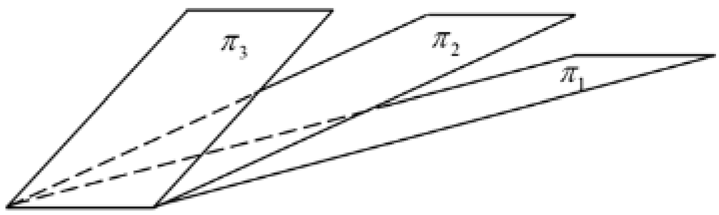
D. 当 $f'(0)=m$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=m$.

【答案】B

5. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，三张平面 $\pi_i: a_ix+b_iy+c_iz=d_i$

$(i=1,2,3)$ 位置关系如图所示，记 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)$，$\boldsymbol{\beta}_i=(a_i,b_i,c_i,d_i)$，

若 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}=m$，$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}=n$，则



A. m=1, n=2

B. m=n=2

C. m=2,n=3

D. m=n=3

【答案】B

设向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\b\\a\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\\1\end{pmatrix}$，若$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性相关，且其中任意两个向量均线性无关，则

6.

A. a=1,b≠-1

B. a=1,b=-1

C. a≠-2,b=2

D. a=-2,b=2

【答案】D

3阶矩阵A的秩为2，非零向量α满足$A\alpha=0$，任意向量β，使得$\beta^T\alpha=0$，且$A\beta=\beta$，则下列结论正确的是

7.

A. A^3的迹为2

B. A^3的迹为5

C. A^5的迹为7

D. A^5的迹为9

【答案】A

8. 设随机变量X与Y独立，X服从N（0，2）的正态分布，Y服从N（-2，2）的正态分布，若P{2X+Y<a}=P{X>Y}，则a=

A. $-2-\sqrt{10}$

B. $-2+\sqrt{10}$

C. $-2-\sqrt{6}$

D. $-2+\sqrt{6}$

【答案】B

9. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，在 $X=x$ 的条件下，Y 在区间（x, 1）上服从均匀分布，则 $\operatorname{cov}(X,Y)=$

A. $-\frac{1}{36}$

B. $-\frac{1}{72}$

C. $\frac{1}{72}$

D. $\frac{1}{36}$

【答案】D

10. 设随机变量 X，Y 相互独立，且均服从参数为λ的指数分布，令 Z=|X-Y|，则下列随机变量与 Z 同分布的是

A. X+Y

B. $\frac{X+Y}{2}$

C. 2X

D. X

【答案】D

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

11. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1+ax^2\right)^{\sin x}-1}{x^3}=6$，则 $a=$

【答案】6

$z=f(u,v)$有二阶连续导数，$df|_{(1,1)}=3du+4dv$，

$y=f(\cos x,1+x^2)$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$

12.

【答案】5

13.

若函数 $f(x)=x+1$．若 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$．$x\in[0,\pi]$．则极限 $\lim_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}=$

【答案】$-\dfrac{1}{x}$

微分方程 $y'=\dfrac{1}{(x+y)^2}$，满足条件 $y(1)=0$ 的解为.

14.

【答案】$x=\tan(y+\dfrac{\pi}{4})-y$.

设实矩阵 $A=\begin{pmatrix}a+1 & a\\ a & a\end{pmatrix}$，若对任意实向量 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$，

$(\alpha^T\mathbf{A}\beta)^2\le\alpha^T\mathbf{A}\alpha\beta^T\mathbf{A}\beta$都成立，则$a$的取值范围是

15.

【答案】a≥0

16.随机试验每次成功的概率为P，现进行三次独立重复实验，已知至少成功一次的条件下全部成功概率为 $\dfrac{4}{13}$，现 P=

【答案】$\dfrac{2}{3}$

三、解答题:17-22 小题，共 70 分。请将解答写在答题纸指定位置上解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid \sqrt{1-y^2}\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$，计算 $\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$.

17.

【答案】$\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})-2$

18. 设 $f(x,y)=x^3+y^3-(x+y)^2+3$，曲面 $z=f(x,y)$ 在 $(1,1,1)$ 处的切平面为 T，T 与三个坐标面所围有界区域在 xoy 面的设影为 D

（1）求 T 的方程

（2）求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值和最小值

【答案】切平面 $x+y+z=3$；最大值 21，最小值 $\frac{17}{27}$

设 $f(x)$ 二阶可导，$f'(0)=f'(0)$，$|f''(x)|\le 1$，证：

1）$|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x|\le \frac{x(1-x)}{2}$.

2）$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\le \frac{1}{12}$

19.

【答案】（1）泰勒公式　（2）把（1）代入

20. 已知有向曲线 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=2x$ 与平面 $2x-z-1=0$ 的交线从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，计算曲线积分 $\int_L (6xyz-yz^2)dx+2x^2zdy+xyzdz$

【答案】$\frac{4\pi}{5\sqrt{5}}$

已知数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $x_0=-1,y_0=0,z_0=2$，且 $\begin{cases} x_n=-2x_{n-1}+2z_{n-1} \\ y_n=-2y_{n-1}-2z_{n-1} \\ z_n=-6x_{n-1}-3y_{n-1}+3z_{n-1} \end{cases}$，

记 $\alpha_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$，写出满足 $\alpha_n=A\alpha_{n-1}$ 的矩阵 A，并求 A^n 及 $x_n,y_n,z_n(n=1,2,\cdots)$.

21.

【答案】$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & -2 & -2\\ -6 & -3 & 3\end{pmatrix}$，$A^n=\begin{pmatrix}-4+(-1)^{n+1}2^n & -2+(-1)^{n+1}2^n & 2\\ 4+(-1)^{n-1}2^n & 2+(-1)^n2^{n+1} & -2\\ -6 & 3 & 0\end{pmatrix}$，

$x_n=8+(-2)^n, y_n=-8+(-2)^n, z_n=12.$

22.

设总体 $X\sim U(0,\theta)$，θ 未知，$X_1,X_2\cdots X_n$ 为简单随机样本，$X_{(n)}=\max(X_1,X_2\cdots X_n)$，$T_c=cX_{(n)}$.

（1）求 c 时，使得 T_c 为 θ 的无偏估计.

（2）记 $h(c)=E(T_c-\theta)^2$，求 c 使得 $h(c)$ 取最小值.

【答案】（1）$c=\frac{n+1}{n}$；（2）$c=\frac{n+2}{n+1}$