第二章 解析函数

在客观世界中，会遇到很多以复数为变量去刻画的物理量，如速度、加速度、电场强度、磁场强度等，而且还涉及量之间的相互关系，即复变函数. 解析函数是复变函数研究的主要对象，它是一类具有某种特性的可微函数.

为了研究解析函数，本章首先介绍复变函数的极限、连续、可导、可微等概念，其次引入解析函数的概念，并介绍解析函数的物理意义，最后介绍一些常用的初等函数.

2.1 复变函数的极限和连续

可以将微积分中有关实函数极限与连续的概念，推广到复变函数中.

2.1.1 复变函数的极限

定义2.1 设函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内有定义，A 为复常数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$|f(z)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记为

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

在复平面上，$z\to z_0$ 的方式有无穷多种，这意味着，若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$，则当 z 从平面上任意方向、沿着任何路径、以任意方式趋近于时 z_0 时，$f(z)$ 均以 A 为极限. 因此，判断极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在有如下两种简便方法：(1) z 沿某特殊路径趋于 z_0 时，$f(z)$ 的极限不存在；(2) z 沿两条特殊路径趋于 z_0 时，$f(z)$ 的极限不相同.

例题2.1 试证明：函数 $f(z)=\dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|}$ 当 $z\to 0$ 时极限不存在.

证明　方法1 令 $z=x+iy$，　则

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0^+}} f(z)=\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0^+}}\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}=\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0^+}}\frac{kx}{\sqrt{x^2+k^2x^2}}=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

因为它随 k 而变化，所以当 $z\to 0$ 时，$f(z)$ 极限不存在.

方法2　令 $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$，则　$f\left(z\right)=\dfrac{r\sin\theta}{r}=\sin\theta.$

当 z 沿不同的射线 $\arg z=\theta$ 趋于零时，$f\left(z\right)$ 趋于不同的值. 例如，当 z 沿射线 $\arg z=0$

趋于零时，$f(z)\to\sin 0=0$；但当 z 沿射线 $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$ 趋于零时，$f(z)\to\sin\dfrac{\pi}{2}=1$. 故 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ 不存在.

给定复变函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，相当于给出两个二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$，那么，有关复变函数 $w=f(z)$ 的极限计算问题是否可以转化为两个二元实函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 的极限计算问题？

定理2.1 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$A=u_0+iv_0$，$z=x_0+iy_0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 的充要条件为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0.$$

证明　因为

$$f(z)-A=u(x,y)-u_0+i\left[v(x,y)-v_0\right]$$

从而有如下不等式

$$\left|u(x,y)-u_0\right|\le\left|f(z)-A\right|,\ \left|v(x,y)-v_0\right|\le\left|f(z)-A\right|, \tag{2.1}$$

及

$$\left|f(z)-A\right|\le\left|u(x,y)-u_0\right|+\left|v(x,y)-v_0\right|. \tag{2.2}$$

根据极限的定义，由(2.1) 可得必要性部分的证明，由(2.2) 可得充分性部分的证明.

定理2.1的重要意义在于：它揭示了复变函数的极限与实变函数极限的紧密关系，即将求复变函数的极限问题转化为求两个二元实值函数的二重极限问题.

复变函数的极限有如下一些性质.

定理2.2　假设当 z 趋于 z_0 时，复变函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 极限存在，且

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A，\quad \lim_{z\to z_0}g(z)=B.$$

则

（1）$\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]=A\pm B$；

（2）$\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)g(z)\right]=AB$；

（3）$\lim\limits_{z\to z_0}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]=\dfrac{A}{B}(B\ne 0)$.

推论2.1　$\lim\limits_{z\to z_0}\left[Cf(z)\right]=C\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=CA$；$\lim\limits_{z\to z_0}f^k(z)=\left[\lim\limits_{z\to z_0}f(z)\right]^k=A^k$.

2.1.2 复变函数的连续性

定义2.2 设函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，则

称

函数 $f(z)$ 在 z_0 处连续，点 z_0 称为 $f(z)$ 的连续点. 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

例题2.2 证明：函数 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{Re} z}{1+|z|}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0\end{cases}$ 在 $z=0$ 处连续.

证明 令 $z=x+iy$，则当 $x\to 0, y\to 0$ 时

$$\frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|}=\frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\to 0=f(0)$$

所以， $f(z)$ 在 $z=0$ 处连续.

类似于微积分中的情形，若函数 $f(z)$ 在 z_0 点无定义，但 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在，则可补充 $f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$， 使得 $f(z)$ 在 z_0 点连续. 例如：函数 $f(z)=\dfrac{z\operatorname{Im} z^2}{|z|^2}$ 在 $z=0$ 点无定义，若补充 $f(0)=0$，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 点连续.

例题2.3 试讨论函数 $f(z)=\arg z$ 的连续性.

解 由辐角 $\arg z$ 的定义知，$\arg z$ 在 $z=0$ 无意义，所以 $f(z)=\arg z$ 在 $z=0$ 处不连续. 设 $x_0<0$ 为负实轴上的任意一点，当 z 从上半平面内趋于 x_0 时，$\arg z\to\pi$；但当 z 从下半平面内趋于 x_0 时，$\arg z\to -\pi$，故 $f(z)$ 在 $z_0=x_0+0i=x_0$ 处无极限，从而不连续. 综上所述，函数 $f(z)=\arg z$ 在整个复平面上除原点与负实轴外均连续.

由定义2.2 及定理2.1和定理2.2 即可得如下结论.

定理2.3 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 的某个邻域内有定义，则函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续的充要条件是：二元实函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 均在点 (x_0,y_0) 处连续.

定理2.4 连续函数的和、差、积、商(分母不为零) 仍为连续函数，连续函数的复合函数仍为连续函数.

定理2.4 表明，有理整函数(多项式) $w=P(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n$ 在复平面内所有的点 z 均连续；而有理分式 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是多项式，在复平面上分母

不为零的点也是连续.

复连续函数也有与实连续函数类似的性质.

定理2.5 设函数 $w=f\left(z\right)$ 在有界闭区域 $\bar{D}$ 上的连续，则其模 $\left|f(z)\right|$ 在 $\bar{D}$ 上必有界，且取到最大值与最小值.

在后续内容中，常假设一个复变函数在曲线上连续. 所谓函数 $w=f\left(z\right)$ 在曲线 C 上 z_0 点处连续，是指

$$\lim_{z\to z_0} f\left(z\right)=f\left(z_0\right),\quad z\in C.$$

若函数 $f\left(z\right)$ 在闭曲线 C 或包括曲线端点在内的曲线段 C 上连续，则 $\left|f(z)\right|$ 在曲线 C 上有界，即存在常数 $M>0$，使得

$$\left|f\left(z\right)\right|\le M,\qquad \forall z\in C.$$

2.2 解析函数的概念

2.2.1 复变函数的导数和微分

定义2.3 设函数 $w=f\left(z\right)$ 在点 z_0 的邻域内或包含 z_0 的区域 D 内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)}{\Delta z} \tag{2.3}$$

存在，则称此极限值为函数 $w=f\left(z\right)$ 在点 z_0 的导数，并记为 $f'\left(z_0\right)$, 或 $\left.\dfrac{df}{dz}\right|_{z=z_0}$, 或 $\left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$，即

$$f'\left(z_0\right)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)}{\Delta z}. \tag{2.4}$$

此时称函数 $w=f\left(z\right)$ 在点 z_0 处可导. 若函数 $f\left(z\right)$ 在区域 D 内处处可导，则称函数 $f\left(z\right)$ 在 D 内可导.

注2.1　一元实函数 $y=f\left(x\right)$ 在 x_0 处可导的充要条件为 $f\left(x\right)$ 在 x_0 处左右导数存在且相等. 由于式（2.3）中极限的存在与 $\Delta z\to 0$ 的路径和方式无关，因此，复变函数对可导性的要求比一元实函数苛刻.

注2.2　一元实函数在一点处导数的几何意义为函数在该点的“变化率”，由于复变函数在一点处的导数为复数，而复数不能比较大小，因此，不能用导数来描述复变函数在一点处的变化快慢.

例题2.4　讨论函数 $w=f\left(z\right)=\left|z\right|^2$ 的可导性.

解
$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\left|z+\Delta z\right|^2-\left|z\right|^2}{\Delta z}$$
$$=\frac{\left(z+\Delta z\right)\left(\overline{z+\Delta z}\right)-z\bar{z}}{\Delta z}=\bar{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.$$

当 $z=0$ 时，
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\overline{\Delta z}=0$$

当 $z\neq 0$ 时，取 $\Delta z=\Delta x\to 0$，则
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta z=\Delta x}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=z+\bar{z}.$$

若取 $\Delta z=i\Delta y\to 0$，则
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z=i\Delta y}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=-z+\bar{z}.$$

综合得：当 $z=0$ 时，$f'(0)=0$；当 $z\neq 0$　时，$w=f(z)$ 导数不存在.

例题 2.5　试讨论函数 $w=f(z)=\operatorname{Im} z$ 的可导性.

解　设 z 为复平面上任意一点，
$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Im}(z+\Delta z)-\operatorname{Im} z}{\Delta z}$$
$$=\frac{\operatorname{Im} z+\operatorname{Im}\Delta z-\operatorname{Im} z}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Im}\Delta z}{\Delta z}$$
$$=\frac{\operatorname{Im}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.$$

取 $\Delta z=\Delta x\to 0$，则
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

取 $\Delta z=i\Delta y\to 0$，则
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{i\Delta y}=\frac{1}{i}.$$

因此，当点沿不同方向而使 $\Delta z\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 的极限不同，从而 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 不存在，所以 $f(z)=\operatorname{Im} z$ 在复平面上处处不可导.

例题2.6 试证明：函数 $f\left(z\right)=z^n$（n 为正整数）在 z 平面上处处可导，且

$$\frac{d}{dz}z^n=nz^{n-1}.$$

证明　设 z 是任意固定的点，则

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left[nz^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}\Delta z+\cdots+(\Delta z)^{n-1}\right]$$

$$=nz^{n-1}.$$

以上例题表明，即使一个复变函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 在整个平面上任意阶偏导数均存在，但复变函数 $w=f(z)$ 仍可能不可导，如例题 2.4 和例题 2.5. 因此，研究复变函数的导数，不能转化为研究实部和虚部这两个实变函数的可导性.

对于可导的复变函数而言，具有类似于一元实函数的求导法则和公式.

（1）**基本公式**

$(C)'=0$，其中 C 为任意复常数；

$(z^n)'=nz^{n-1}$，其中 n 为正整数.

（2）**四则运算**　若函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在点 z 处可导，则函数 $f(z)\pm g(z)$, $f(z)g(z)$ 和 $\dfrac{f(z)}{g(z)}\left(g(z)\neq 0\right)$ 在点 z 处均可导，且

$$[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z);$$

$$[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z);$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2},\quad g(z)\neq 0.$$

（3）**链导法则**　若 $w=g(z)$ 在点 z 处可导，$h=f(w)$ 在 $w=g(z)$ 处可导，则复合函数 $h=f[g(z)]$ 在点 z 处可导，且有

$$\{f[g(z)]\}'=f'(w)g'(z).$$

（4）**反函数求导公式**　设 $w=f(z)$ 和 $z=\varphi(w)$ 互为反函数，且均为单值函数，$\varphi'(w)\neq 0$，则

$$f'(z)=\frac{1}{\varphi'(w)}.$$

与导数的情形类似，复变函数的微分定义，形式上与一元实函数的微分定义一致.

定义 2.4　设函数 $w=f(z)$ 在点 z 处的增量 $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$ 可以表示为

$$\Delta w = f\left(z+\Delta z\right)-f\left(z\right)=A\Delta z+\rho\left(\Delta z\right),$$

（2.5）

其中 A 为不依赖于 Δz 的复常数，$\rho\left(\Delta z\right)$ 满足

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho\left(\Delta z\right)}{\Delta z}=0.$$

则称 $w=f\left(z\right)$ 在点 z 处可微，函数增量的线性主部称 $w=f\left(z\right)$ 在点 z 处的微分，记作

$$df\left(z\right)=A\Delta z.$$

不难证明，函数 $w=f\left(z\right)$ 在点 z 处可导的充要条件为 $w=f\left(z\right)$ 在点 z 处可微，且

$$dw=f'(z)\Delta z=f'(z)dz.$$

如同微积分中“可导”与“连续”的关系，若函数 $w=f\left(z\right)$ 在点 z 可导，则在点 z 处必连续；反之，则未必．事实上，如果 $w=f\left(z\right)$ 在 z 处可导，则

$$f\left(z+\Delta z\right)-f\left(z\right)=A\Delta z+\rho\left(\Delta z\right)$$

从而 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}f\left(z+\Delta z\right)=f\left(z\right)$，这说明 $w=f\left(z\right)$ 在点 z 连续. 但连续不一定可导，例如：函数 $f(z)=\left|z\right|^2$ 在整个平面上连续，但导数仅在 $z=0$ 存在；函数 $f(z)=\bar{z}$ 在整个平面上连续，但在整个平面上均不可导.

2.2.2 解析函数的概念

定义 2.5 如果函数 $f\left(z\right)$ 在点 z_0 及 z_0 的邻域内处处可导，那么称 $f\left(z\right)$ 在 z_0 解析；如果 $f\left(z\right)$ 在区域 D 内每一点解析，那么称 $f\left(z\right)$ 在区域 D 内解析，或称 $f\left(z\right)$ 是区域 D 内的一个解析函数（全纯函数或正则函数）.

若函数 $f\left(z\right)$ 在点 z_0 不解析，则称点 z_0 为函数 $f\left(z\right)$ 的奇点.

由定义 2.5 可知，函数在区域内解析与在区域内可导等价，但是，函数在一点处解析和在一点处可导不等价，即函数在一点处可导不一定在该点处解析. 如果函数 $w=f\left(z\right)$ 仅在区域 D 中的某些离散点、某曲线或曲线段 C 上可导，则 $w=f\left(z\right)$ 在区域 D 内一定不解析，例如，函数 $f(z)=\left|z\right|^2$ 仅在 $z=0$ 处可导，因此，$f(z)$ 在整个复平面上不解析.

例题 2.7 讨论函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 的可导性和解析性.

解　由复变函数的求导法则知，当 $z \neq 0$ 时

$$f'(z) = \left(z^{-1}\right)' = -\frac{1}{z^2},$$

当 $z=0$ 时函数无意义，因此函数 $f(z)=\frac{1}{z}$ 在除去 $z=0$ 外的复平面内处处可导，从而解析，而 $z=0$ 为 $f(z)=\frac{1}{z}$ 的奇点.

由于“解析”是用“可导”定义的，而“可导”是一种特殊类型的极限，所以解析函数经四则运算、复合及解析函数的反函数仍为解析函数.

定理 2.6　在区域 D 内解析的函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(除去分母为零的点) 在 D 内解析；设函数 $\xi = g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，函数 $w = f(\xi)$ 在 ξ 平面上的区域 G 内解析. 如果对 D 内的每一个点 z，函数 $g(z)$ 的对应值 ξ 都属于 G，则复合函数 $w = f\left[g(z)\right]$ 在 D 内解析.

由定理 2.6 知：多项式 $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$ 在 z 平面上解析，且

$$P'(z) = n a_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2} z + a_{n-1}.$$

而有理分式函数

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m} \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0),$$

在 z 平面上除使分母 $Q(z)=0$ 的各点外解析，而使 $Q(z)=0$ 的各点就是此有理分式函数的奇点.

2.3 函数解析的充要条件

判别复变函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内是否解析，首先确定其是否在区域内可导. 而判别一个函数究竟有无导数，并求出导数，仅通过导数定义往往甚为困难. 因此，寻找判别函数是否可导的简便而实用的方法非常重要.

2.3.1 柯西－黎曼条件

复变函数 $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 的极限和连续性均可通过其实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 加以研究，但研究复变函数的导数，不能转化为研究实部和虚部这两个实变函数的可导性. 那么，函数 $f(z)$ 的可导性与 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 的各阶偏导数究竟存在什么关系？在什么条件下才能由实部和虚部的可导性来得出 $f(z)$ 的可导性？以下定理给出了 $f(z)$ 可导的必要条件.

定理 2.7　设函数 $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ 在区域 D 内有定义，$z = x + iy$ 为 D 内一点. 若 $f(z)$ 在 z 点可导，则 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在点 (x,y) 处一阶偏导数存在，而且满足柯西-黎曼

（Cauchy-Riemann）条件（简称 C-R 方程）：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\tag{2.6}$$

且 $f(z)$ 的导数为

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.\tag{2.7}$$

证明　记

$\Delta z=\Delta x+i\Delta y, \Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y),\ \Delta v=v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)$.
因为函数 $f(z)$ 在 z 点可导，由导数定义知

$$\begin{aligned}f'(z)&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\left[u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)\right]-\left[u(x,y)+iv(x,y)\right]}{\Delta x+i\Delta y}\\&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

在式（2.8）中取 $\Delta y=0, \Delta z=\Delta x\to 0$，即动点 $z+\Delta z$ 沿平行于实轴的方向趋于点 z，则

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta z=\Delta x}}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.\tag{2.9}$$

同理，取 $\Delta x=0, \Delta z=i\Delta y\to 0$，即动点 $z+\Delta z$ 沿平行于虚轴的方向趋于点 z，则

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z=i\Delta y}}\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.\tag{2.10}$$

比较式（2.9）和式（2.10）可得柯西-黎曼方程（2.7）.

注 2.3　由定理 2.7 知，若函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在点 $z=x+iy$ 处可导，则其导数可表示为

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.\tag{2.11}$$

注 2.4　可以证明柯西-黎曼方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.\tag{2.12}$$

且

$$f'(z)=(\cos\theta-i\sin\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right).\tag{2.13}$$

定理 2.7 仅为可导的必要条件，即满足柯西－黎曼方程的函数未必可导.

例题 2.8　证明函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在 $z=0$ 满足柯西－黎曼条件，但它在 $z=0$ 处不可导.

证明　由题设知：$u(x,y)=\sqrt{|xy|}$, $v(x,y)=0$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|\cdot 0}-0}{\Delta x}=0\,,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{0\cdot|\Delta y|}-0}{\Delta y}=0\,,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0\,,\qquad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0\,,$$

从而函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在 $z=0$ 满足柯西－黎曼条件.　由于

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x||\Delta y|}}{\Delta z}.$$

若取 $\Delta y=k\Delta x, \Delta x\to 0^+$，则

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{\sqrt{|\Delta x||\Delta y|}}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\sqrt{|k|}}{1+ik},$$

所以， $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在 $z=0$ 处不可导.

2.3.2 可导的充要条件

若将定理 2.7 条件适当加强，可得到如下函数可导的充分必要条件.

定理 2.8 设函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内有定义， $z=x+iy$ 为 D 内一点. 则函数 $f(z)$ 在 z 点可导的充分必要条件为：二元实函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，且满足柯西-黎曼条件.

证明　必要性　设函数 $f(z)$ 在 z 点可导，由复变函数可导与可微的等价性得

$$\Delta f=f'(z)\Delta z+\varepsilon\Delta z, \tag{2.14}$$

其中 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\varepsilon=0$. 记 $\Delta f=\Delta u+i\Delta v,\ f'(z)=\alpha+i\beta,$ 则由式（2.14）得

$$\Delta u+i\Delta v=\alpha\Delta x-\beta\Delta y+i\left(\beta\Delta x+\alpha\Delta y\right)+\varepsilon_1+i\varepsilon_2,$$

其中 $\varepsilon_1=\mathrm{Re}\left(\varepsilon\Delta z\right), \varepsilon_2=\mathrm{Im}\left(\varepsilon\Delta z\right)$ 为 $|\Delta z|$ 的高阶无穷小. 从而有

$$\Delta u=\alpha\Delta x-\beta\Delta y+\varepsilon_1,\quad \Delta v=\beta\Delta x+\alpha\Delta y+\varepsilon_2,$$

上式表明：二元函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，且有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\beta=-\frac{\partial v}{\partial x}\,,$$

即满足柯西-黎曼条件.

充分性 设 $u\left(x,y\right),v\left(x,y\right)$ 在点 $\left(x,y\right)$ 可微，则由二元实函数全微分定义知

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1,$$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_2,$$

其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 的高阶无穷小.

由柯西－黎曼条件，令

$$\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \beta=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x},$$

则

$$\begin{aligned}\Delta f&=\Delta u+i\Delta v=\alpha\Delta x-\beta\Delta y+\varepsilon_1+i\left(\beta\Delta x+i\alpha\Delta y+\varepsilon_2\right)\\&=\left(\alpha+i\beta\right)\left(\Delta x+i\Delta y\right)+\varepsilon_1+i\varepsilon_2,\end{aligned}$$

即

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\alpha+i\beta+\varepsilon,$$

其中 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\varepsilon=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\varepsilon_1+i\varepsilon_2}{\Delta x+i\Delta y}=0.$ 于是

$$f'\left(z\right)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\alpha+i\beta=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

对于二元函数 $u(x,y)$，若其一阶偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 连续，则 $u(x,y)$ 一定可微. 因此，由定理 2.8 可得复变函数可导的充分条件.

推论 2.2 设函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内有定义，$z=x+iy$ 为 D 内一点. 如果 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 的一阶偏导数在点 (x,y) 处连续，且满足柯西-黎曼条件，则函数 $f(z)$ 在 z 点可导.

例题 2.9 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)=x^2-y^2$，求函数 $f(z)$ 在 $z=i$ 处的导数值.

解　由 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$，得 $f'(z)=2x+2yi$，从而 $f'(i)=2i$.

在实际应用上，用下面定理判别函数的解析性更为方便.

定理 2.9 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数，并满足柯西–黎曼条件.

上述定理的充要性很明显. 因为根据微积分定理：$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数，则在 D 内可微. 又已知 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内满足柯西–黎曼条件，由定理

2.8 知 $f(z)$ 在 D 内解析. 反之，若 $f(z)$ 在 D 内解析，则 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内具有一阶偏导数，且满足柯西-黎曼条件. 至于 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内一阶导数的连续性，目前暂无法论证，在下一章中，我们将得到，若 $f(z)$ 在 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内具有任意阶的导数，从而 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数.

例题 2.10 判断下列函数在何处可导，在何处解析?

(1) $w=\overline{z}$; (2) $w=e^x(\cos y+i\sin y)$; (3) $w=zRez$.

解 (1) 因为 $u(x,y)=x, v(x,y)=-y$，从而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1,$$

可知不满足柯西-黎曼条件，所以 $w=\overline{z}$ 在复平面内处处不可导，处处不解析.

(2) 因为 $u(x,y)=e^x\cos y, v(x,y)=e^x\sin y$，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y.$$

$u(x,y), v(x,y)$ 满足柯西-黎曼条件，又由于以上四个偏导数均连续，所以 $f(z)$ 在复平面内处处可导，处处解析，且

$$f'(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=f(z).$$

此函数即为初等解析函数中的指数函数 e^z.

(3) 因为 $u(x,y)=x^2, v(x,y)=xy$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=x.$$

由上式易知，四个偏导数处处连续，但仅当 $x=y=0$ 时，它们才满足柯西-黎曼条件，因而函数仅在 $z=0$ 可导，在复平面内处处不解析.

例题 2.11 设 a,b 是实数，函数 $f(z)=axy+(bx^2+y^2)i$ 在复平面上解析，求出 a,b 的值，并求 $f'(z)$.

解 因为 $f(z)$ 是复平面上的解析函数，则 $u(x,y)=axy, v(x,y)=bx^2+y^2$ 在平面上满足柯西-黎曼条件， 故

$$ay=2y,\quad ax=-2bx \text{ 对 } \forall x,y \text{ 均成立.}$$

由此即得 $a=2, b=-1$. 从而 $f(z)=2xy+(y^2-x^2)i$. 由导数计算公式（2.11）得

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2y-2xi=-2i(x+iy)=-2iz.$$

例题 2.12 证明：如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $f'(z)$ 处处为零，则 $f(z)$ 在 D 内为一常数.

证明 因为

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

所以 $u=$ 常数，$v=$ 常数，因而 $f(z)$ 在 D 内是常数.

判断解析函数为常数有若干条件，如：（1）函数在区域内解析且导数恒为零；（2）解析函数的实部、虚部、模或辐角中有一个恒为常数；（3）解析函数的共轭在区域内解析.

例题 2.13 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，且 $v=u^2$． 证明：$f(z)$ 在 D 内是常数.

证明 利用已知条件 $v=u^2$，两边分别关于 x 和 y 求偏导数，得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2u\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial y}.$$

由柯西－黎曼条件，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial y}=-2u\frac{\partial v}{\partial x}=-4u^2\frac{\partial u}{\partial x}.$$

即 $(1+4u^2)\frac{\partial u}{\partial x}=0,$ 从而 $\frac{\partial u}{\partial x}=0.$ 由此得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

所以，$u(x,y),\ v(x,y)$ 为常数，即 $f(z)$ 为常数.

2.4 调和函数

在流体力学、电学和磁学等领域的许多实际问题中，常常会遇到一种函数，称为调和函数. 解析函数的实部和虚部都是调和函数. 解析函数有一些重要的性质，特别是它与调和

函数之间的密切关系，在理论上和实际问题中都有着十分广泛的应用.

2.4.1 调和函数

定义 2.6 如果二元实函数$u(x,y)$在区域D内具有连续的二阶偏导数，且满足二维拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{2.15}$$

则称$u(x,y)$为区域D内的调和函数.

式(2.14)又称为调和方程，它可以描述无电荷区域的静电场，也可表示平面上稳态温度场等其它物理量.

类似地，可以定义三维区域Ω中的调和函数$u(x,y,z)$:

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{2.16}$$

例题 2.14 证明：$u(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$在不包含原点的区域$D$内为调和函数.

证明　由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

从而$u(x,y)$在D内具有二阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 所以，$u(x,y)$是区域$D$内的调和函数.

2.4.2 解析函数与调和函数的关系

定理 2.10 若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$是区域D内的解析函数，则$u(x,y)$和$v(x,y)$均为D内的调和函数.

证明 因为$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$是区域D内的解析函数，所以$u(x,y)$和$v(x,y)$满足柯西-黎曼条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由于解析函数具有任意阶的导数(见下章)， 因而解析函数的实部和虚部具有任意阶的连续的偏导数. 将上述柯西-黎曼条件中的两个等式分别对x和y求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

两式相加并利用

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

即得式(2.14)，所以$u(x,y)$为区域D内的调和函数． 同理可得$v(x,y)$为区域D内的调和函数.

由定理 2.10 知，解析函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$的实部$u(x,y)$和$v(x,y)$并不是相互独立，而是由柯西-黎曼条件紧密联系着．为此，我们引入如下的共轭调和函数的概念.

定义 2.7 设$u(x,y)$和$v(x,y)$均为区域D内的调和函数，若$u(x,y)$和$v(x,y)$在区域D内满足柯西-黎曼条件，则称$v(x,y)$为$u(x,y)$的共轭调和函数.

由定理 2.10 知，解析函数的虚部是实部的共轭调和函数．但对于区域D内的任意两个调和函数$u(x,y)$和$v(x,y)$所构成的复变函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$不一定是区域D内的解析函数，因为$v(x,y)$不一定是$u(x,y)$的共轭调和函数.

例如，$u=y, v=x$均为调和函数，但不满足柯西-黎曼条件，从而函数$f(z)=y+ix$不解析, 且v不是u的共轭调和函数.

现在问题是对于给定的调和函数$u(x,y)$是否存在$v(x,y)$，使得$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$为解析函数，即，调和函数的共轭调和函数是否存在？如何求共轭调和函数？

定理 2.11 若$u(x,y)$为单连通区域D内的调和函数，则必可找到它的共轭调和函数$v(x,y)$，使得$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$成为D内的解析函数，且这样的$v(x,y)$有无穷多个.

证明 由于$u(x,y)$为单连通区域D内的调和函数，则由拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

可知

$$-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

为某一函数的全微分．若令

$$dv=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

则

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C.$$

上式分别关于 x 和 y 求偏导数得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

所以 $v(x,y)$ 为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数，且 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为解析函数.

上述定理证明是构造性的，其提供了一种由解析函数的实部求虚部的方法，即，利用高等数学中的第二类曲线积分的概念. 事实上，有多种方法可依据解析函数的实部（或虚部），求出解析函数的表达式.

例题 2.15 已知解析函数的实部为 $u(x,y)=x^2-x-y^2$，求解析函数 $f(z)$.

解　由已知条件得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-1,\frac{\partial u}{\partial y}=-2y.$$

由解析函数的实部（虚部）求虚部（实部），有以下几种方法.

方法 1 偏积分法. 由柯西－黎曼条件得

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x-1,\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y.$$

于是由偏积分

$$v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy=\int(2x-1)dy=(2x-1)y+\varphi(x).$$

再由 $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ 得 $2y+\varphi'(x)=2y$，即 $\varphi'(x)=0$，$\varphi(x)=C$（常数）. 所以

$$v(x,y)=2xy-y+C.$$

方法 2 曲线积分法.

$$\begin{aligned}v(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C\\&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}2ydx+(2x-1)dy+C.\end{aligned}$$

因为积分与路径无关，选择路径为：$(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$，从而

$$v(x,y)=\int_0^y(2x-1)dy+C=2xy-y+\mathrm{C}.$$

方法 3　全微分法.

$$\begin{aligned}dv&=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\\&=2ydx+(2x-1)dy=d(2xy-y),\end{aligned}$$

因此，$v(x,y)=2xy-y+C.$

从而解析函数为

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2-x-y^2+i(2xy+y+C) \\ &= x^2-y^2+i2xy-(x+iy)+iC \\ &= z^2-z+C_1. \end{aligned}$$

由解析函数的实部（虚部）求解析函数的另外一种简便方法是，先求出 $f(z)$ 的导函数 $f'(z)$，再求函数 $f(z)$. 例如，对于本例，由导数公式（2.11）可得

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2x-1+2yi=2(x+iy)-1.$$

用复变量 z 表示为 $f'(z)=2z-1$. 显然

$$f(z)=z^2-z+C.$$

例题 2.16　设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为解析函数，且满足：

$$u(x,y)+v(x,y)=x^2-y^2+2(x+y)+2xy，\quad f(0)=0，$$

求 $f(z)$.

解 方法 1 对等式 $u(x,y)+v(x,y)=x^2-y^2+2(x+y)+2xy$ 两边分别关于 x 和 y 求偏导数得

$$\begin{cases} u_x+v_x=2x+2y+2, \\ u_y+v_y=-2y+2x+2. \end{cases}$$

由柯西－黎曼条件 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ 得

$$\begin{cases} u_x-u_y=2x+2y+2, \\ u_y+u_x=-2y+2x+2. \end{cases}$$

解得 $u_x=2x+2, u_y=-2y$. 对前式关于 x 积分得

$$u(x,y)=\int u_x dx=\int(2x+2)dx=x^2+2x+\varphi(y).$$

上式两端关于 y 求偏导数，得 $u_y=\varphi'(y)=-2y$, 从而 $\varphi(y)=-y^2+C$（C 为任意常数）.

于是 $u(x,y)=x^2+2x-y^2+C$. 再由题设得到

$$v(x,y)=x^2-y^2+2(x+y)+2xy-u(x,y)=2y+2xy-C.$$

由此得

$$f(z)=x^2+2x-y^2+C+i[2y+2xy-C]=z^2+2z+(C-iC).$$

由 $f(0)=0$ 得 $C=0$，从而得 $f(z)=z^2+2z.$

方法 2 因为 $if(z)=-v(x,y)+iu(x,y)$ 仍为解析函数，所以 $u(x,y)$ 是 $-v(x,y)$ 的共轭调和函数，从而 $u(x,y)+v(x,y)$ 是 $u(x,y)-v(x,y)$ 的共轭调和函数. 由柯西－黎曼条件

$(u-v)_x=(u+v)_y=2x-2y+2$，对上式两端关于 x 积分，得

$$u-v=\int(u-v)_x dx=\int(2x-2y+2)dx=x^2-2xy+2x+\varphi(y).$$

上式两端关于 y 求偏导数，得

$$(u-v)_y=-2x+\varphi'(y)=-(u+v)_x=-(2x+2y+2).$$

由此得 $\varphi'(y)=-2y-2$，从而得 $\varphi(y)=-y^2-2y+C$. 于是

$$u-v=x^2-y^2-2xy+2x-2y+C.$$

解联立方程

$$\begin{cases}u+v=x^2-y^2+2(x+y)+2xy,\\ u-v=x^2-y^2-2xy+2x-2y+C.\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}u=x^2-y^2+2x+\dfrac{C}{2},\\ v=2xy+2y-\dfrac{C}{2}.\end{cases}$$

从而得

$$f(z)=x^2+2x-y^2+\frac{C}{2}+i\left(2y+2xy-\frac{C}{2}\right)=z^2+2z+\frac{1}{2}(C-iC).$$

由 $f(0)=0$ 得 $C=0$，从而 $f(z)=z^2+2z$.

2.4.3 正交曲线族

定理 2.12 若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为区域 D 内的解析函数，且 $f'(z)\neq 0$，则

$$u(x,y)=C_1,\ v(x,y)=C_2$$

是区域 D 内的两组正交曲线族.

证明 因为 $f'(z)\neq 0\,(\forall z\in D)$，所以在 D 内一点 (x,y) 处，u_x 和 v_x 必不全为零. 若在点 (x,y) 处，$u_x\neq 0, v_x\neq 0$，则由柯西–黎曼条件，有 $v_y\neq 0, u_y\neq 0$. 于是，曲线 $u(x,y)=C_1$ 的斜率为

$$k_u = -\frac{u_x}{u_y}.$$

曲线 $v(x,y)=C_2$ 的斜率为

$$k_v = -\frac{v_x}{v_y}.$$

从而由 $k_u k_v = -1$ 得，曲线 $u(x,y)=C_1$ 和 $v(x,y)=C_2$ 在点 (x,y) 处正交.

若在点 (x,y) 处 u_x, v_x 中有一个为零，则由 $f'(z)\neq 0$ 知，另一个必不为零. 此时，过点 (x,y) 的两条切线必有一条是水平的，另一条是铅直的，它们仍然在交点处正交.

上述两曲线族在平面电场或流场中具有明确的物理意义. 在平面电场中，电通 φ 和电位 ψ 都是调和函数，即它们都满足拉普拉斯方程，而且电力线等势线 $\varphi(x,y)=C_1$ 和等位线电力线(或流线) $\psi(x,y)=C_2$ 相互正交, 这种性质正好和一个解析函数的实部和虚部所具有的性质相符合. 因此，在研究平面电场时，常将电场的电通 φ 和电位 ψ 分别看作一个解析函数的实部和虚部，而将它们合为一个解析函数进行研究，称 $f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ 为电场的复势.

例题 2.17 已知某平面静电场的等位线电力线方程为 $x^2-y^2=C_1$，求电力线等势线方程.

解 令 $v(x,y)=x^2-y^2$，它是调和函数，可以作为某解析函数的虚部，求出其实部 $u(x,y)$，则得电力线等势线方程 $u(x,y)=C_2$. 由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-2y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2x,$$

得

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=-2ydx-2xdy=d(-2xy+C_2),$$

故 $u(x,y)=-2xy+C_2$，电力线等势线方程为

$$xy=C_2.$$

2.5 初等解析函数

2.5.1 指数函数

定义 2.8 设复数 $z=x+iy$，称

$$\exp(z)=e^{x}(cosy+isiny) \tag{2.17}$$

为指数函数，其等式右端中的e为自然对数的底，即$e=2.71828\cdots$．为方便起见，约定，在无特殊声明时，e^{z} 即表示 $\exp(z)$．

指数函数的性质：

（1）当z取实数，即$y=0,z=x$时，得$e^{z}=e^{x}$，它与实变指数函数e^{x}一致．当z取纯虚数$z=iy$时，

$$e^{z}=e^{iy}=\cos y+i\sin y.$$

特别地，$e^{2k\pi i}=1$，其中k为任意整数.

（2）对任意两个复数$z_1=x_1+iy_1$ 与$z_2=x_2+iy_2$，有$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$．因为

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)] \\ &= e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} \\ &= e^{z_1}e^{z_2}. \end{aligned}$$

注 2.5 对于复指数函数，式$\left(e^{z_1}\right)^{z_2}=e^{z_1z_2}$不一定成立．例如，取$z_1=2\pi i,\ z_2=\dfrac{1}{2}$，

则$e^{z_1z_2}=e^{\pi i}=-1$，但 $\left(e^{z_1}\right)^{z_2}=\left(e^{2\pi i}\right)^{\frac{1}{2}}=1$.

（3）e^{z}在复平面上为解析函数，且有$(e^{z})'=e^{z}$．设$e^{z}=u+iv$， 由定义知：

$$u=e^{x}\cos y,\qquad v=e^{x}\sin y.$$

由u,v的可微性及柯西－黎曼条件得e^{z}解析，且

$$(e^{z})'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y=e^{z}.$$

（4）e^{z}是以$2\pi i$为基本周期的周期函数，即：

$$e^{z+2\pi i}=e^{z}e^{2\pi i}=e^{z}.$$

一般地，$e^{z+2k\pi i}=e^{z}$，其中k为任意整数.

注 2.6 复指数函数e^{z}的周期性表明，对任何复平面上任意点z, 有$e^{z}=e^{z+2k\pi \mathrm{i}}$,其中$k$为整数,但由于$(e^{z})'=e^{z}\neq 0,$ 所以,在以z与$z+2k\pi i$为端点的线段内,不存在一点ζ，使$(\mathrm{e}^{z})'\big|_{z=\xi}=0.$ 故罗尔（Rolle）定理不成立，但应注意，洛必达（L’Hospital）法则成立.

（5）$\lim\limits_{z\to\infty}e^{z}$ 不存在，即e^{∞}无意义.

事实上，当z沿正实轴趋于无穷远点时（$y=0,x\to+\infty$），$e^{z}\to+\infty$； 当z沿负实轴

趋于无穷远点时（$y=0, x\to-\infty$），$e^z\to 0$，故 $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在.

如上性质表明，在将实指数函数 e^x 推广到复指数函数 e^z 后，其仍保留了某些性质(如指数的可加性)，同时也失去了某些性质(如实指数函数的单调性)，而且还增添了某些性质(如复指数函数的周期性).

例题 2.18 计算 $e^{\frac{-\pi}{2}i}$.

解
$$e^{\frac{-\pi}{2}i}=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-i.$$

例题 2.19 证明：若对于任意的复数 z，有
$$e^{z+\omega}=e^z,$$
则必有 $\omega=2k\pi i$（k 为整数）.

证明　对 $z=0, \omega=a+ib$，就有 $e^{\omega}=e^0=1$，即 $e^{a+ib}=1$, 亦即
$$e^a\left(\cos b+i\sin b\right)=1.$$
于是，
$$e^a=1, \cos b=1, \sin b=0.$$
因此，$a=0, b=2k\pi$（k 为整数），故必有：$\omega=a+ib=2k\pi i$（k 为整数）.

2.5.2 对数函数

定义 2.9 设 $z\neq 0,\infty$，称满足 $e^w=z$ 的 w 为 z 的对数函数，记作 $w=Lnz.$

设 $z=re^{i\theta}$，$w=u+iv$，则由 $z=e^w$，得
$$e^{u+iv}=re^{i\theta},$$
于是
$$e^u=r, \qquad v=\theta+2k\pi \quad (k \text{ 为任意整数})$$
从而
$$w=u+iv=\ln r+i(\theta+2k\pi).$$
故
$$w=Lnz=\ln|z|+iArgz=\ln|z|+iargz+2k\pi i \quad (k \text{ 为任意整数}). \qquad (2.18)$$

由此可见，对数函数 $w=Lnz$ 在从原点 $z=0$ 起沿负实轴剪开的复平面上可分出无穷个单值函数，且每两个值之间相差 $2\pi i$ 的整数倍. 对每一个固定的 k，可得一个单值函数，称其为 $w=Lnz$ 的一个分支. 当 $k=0$ 时，称 $w=\ln|z|+iargz$ 为 $w=Lnz$ 的主值，记为

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z, \quad -\pi < \arg z \le \pi. \tag{2.19}$$

当 $z = x > 0$ 时，$\ln|z| = \ln x, \arg z = 0$，说明正实数的对数的主值是实数，它就是实变数对数函数 $\ln x$.

例题 2.20 计算 $Ln(-1), Ln(i)$ 和 $Ln(1+\sqrt{3}i)$ 及其主值.

解

$Ln(-1) = \ln|-1| + arg(-1)i + 2k\pi i = (2k+1)\pi i, \quad \ln(-1) = \pi i.$

$Ln(i) = \ln|i| + arg(i)i + 2k\pi i = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i, \quad \ln i = \frac{\pi}{2} i.$

$Ln(1+\sqrt{3}i) = \ln|1+\sqrt{3}i| + arg(1+\sqrt{3}i)i + 2k\pi i = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi i,$

$\ln(1+\sqrt{3}i) = \ln 2 + \frac{\pi}{3} i.$

对数函数具有如下的性质：

(1) 设 $z_1 \ne 0, z_2 \ne 0$，则

$$Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2, \quad Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Lnz_1 - Lnz_2. \tag{2.20}$$

(2) 对数函数 $w = Lnz$ 在复平面上不是解析函数，对数函数的每一个单值分支在沿从原点起始的负实轴剪开的复平面上是解析函数，且 $(Lnz)' = \frac{1}{z}$.

利用辐角的相应性质，不难证明性质(1)，请读者自行证明. 需要指出的是，等式(2.20)应理解为右端必须取适当的分支才能等于左端的某一分支.

由

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z, \quad (-\pi < z \le \pi)$$

知，对数函数的主值 $\ln z$ 在原点与负实轴上不解析.

设 $z \ne 0$. 令 $|z| = r, \arg z = \theta \quad (-\pi < \theta < \pi)$, 则 $\ln z = \ln r + i\theta$. 于是 $u(r,\theta) = \ln r$ 及 $v(r,\theta) = \theta$ 都在点 (r,θ) 可微，且满足极坐标形式下的柯西-黎曼方程：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

由（2.13）得

$$f'(z) = (\cos\theta - i\sin\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = (\cos\theta - i\sin\theta)\left(\frac{1}{r} - 0\right)$$

$$= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{r} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{z}.$$

所以，$\ln z$ 在除原点及负实轴的复平面内解析. 又由于 $Lnz=\ln z+2k\pi i$.（k 为整数），因此 Lnz 的各分支在除原点及负实轴的复平面内解析，且有相同的导数值，

$$\left(Lnz\right)'=\frac{1}{z}.$$

利用对数函数可以定义一般的指数函数.

定义 2.10 设 $\zeta\neq 0$，称

$$\zeta^{z}=e^{zLn\zeta} \tag{2.21}$$

为一般指数函数.

一般指数函数为多值函数，只有当 z 取整数值时，ζ^{z} 才取唯一的一个值 . 需指出的是，按式（2.21）定义的指数函数 e^{z} 与按式（2.17）所定义的指数函数 $\exp(z)$ 并不一定相同. 事实上，在式（2.21）中取 $\zeta=e$，则

$$\zeta^{z}=e^{zLne}=e^{z(1+2k\pi i)}=e^{z}\cdot e^{2kz\pi i}.$$

仅当 kz 取整数时，两者才相同.

例题 2.21 求 i^{i} 的值.

解

$$i^{i}=e^{iLni}=e^{i(2k+\frac{1}{2})\pi i}=e^{-(2k+\frac{1}{2})\pi}，\ k \text{ 为整数}.$$

2.5.3 幂函数

定义 2.11 设 $\alpha, z(z\neq 0)$ 为复数，称

$$w=z^{\alpha}=e^{\alpha Lnz} \tag{2.22}$$

为幂函数.

幂函数是指数函数与对数函数的复合函数. 由 Lnz 的多值性可知，幂函数 $w=z^{\alpha}$ 一般也是多值函数，即

$$w=z^{\alpha}=e^{\alpha Lnz}=e^{\alpha\left[\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)i\right]}=e^{\alpha\ln z}\cdot e^{2k\pi\alpha i}.\quad（k \text{ 为整数}） \tag{2.23}$$

另外，由于 $\zeta=Lnz$ 在除去原点和负实轴的 z 平面上解析，且 e^{ζ} 是 ζ 的解析函数，故 $w=z^{\alpha}=e^{\alpha Lnz}$ 在此区域内也解析，利用复合函数求导，得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\right)&=\frac{d}{dz}\left(e^{\alpha Lnz}\right)=\frac{d}{dz}\left(e^{\alpha\zeta}\right)\\&=\frac{d}{d\zeta}\left(e^{\alpha\zeta}\right)\frac{d\zeta}{dz}=\alpha e^{\alpha\zeta}\cdot\frac{1}{z}\\&=\alpha z^{\alpha-1}.\end{aligned} \tag{2.24}$$

因此，由式（2.23）、（2.24）可得

(1) 当 $\alpha=n$（n 为正整数)时，$w=z^{\alpha}=z^{n}$ 为单值函数，它就是 z 的 n 次乘方，在整个复平面上解析，且

$$\left(z^{\alpha}\right)' = \alpha z^{\alpha-1}.$$

(2) 当$\alpha = -n$（n为正整数)时，$w = z^{\alpha} = z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$在除原点外的复平面上解析，且

$$\left(z^{\alpha}\right)' = \alpha z^{\alpha-1}.$$

(3) 当$\alpha = \dfrac{m}{n}$是有理数（其中$\dfrac{m}{n}$为既约分数）时，

$$w = z^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}Lnz} = e^{\frac{m}{n}(\ln z + 2k\pi i)} = e^{\frac{m}{n}\ln z}.\left(e^{2k\pi mi}\right)^{\frac{1}{n}}$$

当$k = 0,1,2,\cdots,n-1$时，$w = z^{\alpha}$有n个不同的值. 但当k再取其它整数值时，将重复出现上述n个值之一. 故$w = z^{\alpha}$是n值函数，有n个不同的分支. 特别地，当$\alpha = \dfrac{1}{n}$（n为自然数）时，若设$z = re^{i\theta}$，则

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}(\ln z + 2k\pi i)} = e^{\frac{1}{n}\left[\ln|z| + i\arg z + 2k\pi i\right]} = \sqrt[n]{|z|}.e^{\frac{\arg z + 2k\pi}{n}i}$$

$$= \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right] = \sqrt[n]{z}.$$

(4) 当α是除上所述的其它复数时，$e^{2k\pi\alpha i}$的所有的值各不相同，所以z^{α}是无穷多值的，并且z^{α}的各个分支在除原点及负实轴的复平面上解析，且$(z^{\alpha})' = \alpha z^{\alpha-1}$.

例题 2.22 设$i^i = e^z$，求z.

解

$$z = iLni = i[Ln|i| + iArg(i)] = -\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \text{ 为整数}.$$

例题 2.23 求$\left(-1\right)^{1+i}$和$1^{\sqrt{2}}$的值.

解

$$\left(-1\right)^{1+i} = e^{(1+i)Ln(-1)} = e^{(1+i)(i\pi + 2k\pi i)} = e^{i(2k+1)\pi}.e^{-(2k+1)\pi} = -e^{-(2k+1)\pi}, \text{（}k\text{ 为整数）;}$$

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}Ln1} = e^{\sqrt{2}[\ln 1 + i\arg 1 + 2k\pi i]} = e^{\sqrt{2}(2k\pi i)} = e^{2\sqrt{2}k\pi i}, \text{（}k\text{ 为整数）}.$$

2.5.4 三角函数与双曲函数

定义 2.12　对任意复数z，定义

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{2.25}$$

分别称为 z 的正弦函数和余弦函数.

当 z 取实变量时，即 $z=x$，则由式（2.25）得

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\qquad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}.$$

因此，复正弦和余弦函数是实正弦和余弦函数在复数域中的推广.

正、余弦函数具有如下的性质：

（1） 对任意复数 z，$\cos z+i\sin z=e^{iz}$.

（2） $\sin z$ 与 $\cos z$ 均是以 2π 为周期的周期函数, 即

$$\sin(z+2\pi)=\sin z,\ \cos(z+2\pi)=\cos z.$$

（3） $\sin z$ 是奇函数，$\cos z$ 为偶函数，即

$$\sin(-z)=-\sin z,\qquad \cos(-z)=\cos z.$$

（4） $\sin z$ 仅在 $z=k\pi$ 处为零，$\cos z$ 仅在 $z=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 处为零，其中的 k 为整数.

事实上，$\sin z=0$ 的充分必要条件是 $e^{2iz}=1$，由此可得 $z=k\pi$（ k 为整数）. 类似地，可得 $\cos z$ 仅在 $z=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 处为零.

（5） $|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 为无界函数.

由于

$$\begin{aligned}|\cos z|&=\left|\frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2}\right|\\&=\frac{1}{2}\left|e^{-y}\cdot e^{ix}+e^{y}\cdot e^{-ix}\right|\geq\frac{1}{2}\left|e^{y}-e^{-y}\right|.\end{aligned}$$

当 $|y|$ 无限增大时，$|\cos z|$ 趋于无穷大. 同理可知 $|\sin z|$ 无界.

（6） $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是复平面上的解析函数，且

$$(\sin z)'=\cos z,\qquad (\cos z)'=-\sin z.$$

（7） 实三角函数中的许多公式仍然有效，如：

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1,$$

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2,$$

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2.$$

由此可见，$\sin z,\cos z$ 虽保持了与其相应实函数的一些基本性质，但它们之间也有本质上的差异！

类似地，可以定义其余三角函数，如：

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z},\quad \sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z}.$$

上述四个三角函数均在分母不为零的点处解析，且有

$$(\tan z)'=\sec^2 z,\ (\cot z)'=-\csc^2 z,$$

$$(\sec z)' = \sec z \tan z,\quad (\csc z)' = -\csc z \cot z.$$

例题 2.24　求下列三角函数的值：(1) $\cos(1\text{-}3i)$；(2) $\sin(\pi+2\mathrm{i})$.

解　(1)

$$\cos(1-3\mathrm{i}) = \frac{e^{\mathrm{i}(1-3\mathrm{i})} + e^{-\mathrm{i}(1-3\mathrm{i})}}{2} = \frac{e^{\mathrm{i}+3} + e^{-\mathrm{i}-3}}{2}$$
$$= \frac{e^{3}(\cos 1 + \mathrm{i}\sin 1) + e^{-3}\cdot(\cos 1 - \mathrm{i}\sin 1)}{2}$$
$$= \frac{e^{3}+e^{-3}}{2}\cdot\cos 1 + \mathrm{i}\cdot\frac{e^{3} - e^{-3}}{2}\sin 1.$$

(2)

$$\sin(\pi+2\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2\mathrm{i})} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi+2\mathrm{i})}}{2i} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi-2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi+2}}{2i}$$
$$= \frac{-\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{2}}{2i} = -\frac{\mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{-2}}{2i} = i\sinh 2.$$

例题 2.25　试求方程 $\sin z + \cos z = 0$ 的全部解.

解　由 $\sin z + \cos z = 0$ 得

$$\sqrt{2}\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

于是，由正弦函数的零点性质，得

$$z = k\pi - \frac{\pi}{4}\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

与三角函数密切相关的是双曲函数，其定义如下：

定义 2.13

$$\sin hz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},\quad \cos hz = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\quad \tan hz = \frac{\sin hz}{\cos hz} = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}. \tag{2.26}$$

并分别称为复数 z 的双曲正弦函数、双曲余弦函数与双曲正切函数.

显然，由式（2.26）定义的双曲函数是相应的实双曲函数的推广.

双曲函数有如下的性质：

(1)　上述三个双曲函数均在复平面内处处解析，且有

$$(\cos hz)' = \sin hz,\qquad (\sin hz)' = \cos hz.$$

(2)　$\cos hz, \sin hz$ 的基本周期为 $2\pi i$；

(3)　$\sin hz$ 为奇函数，而 $\cos hz$ 为偶函数；

(4)　$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

双曲函数与三角函数有如下的关系：

$$\sin hz = -i\sin iz,\quad \cos hz = \cos iz,\quad \tanh z = -i\tan iz.$$

例题 2.26　试证明：$w = \cos z$ 将直线 $x = C_1$ 与直线 $y = C_2$ 分别变成双曲线与椭圆.

证明 设 $w=u+iv$，则由

$$\cos z=\cos x\cdot\cosh y-i\sin x\cdot\sinh y$$

得

$$u=\cos x\cdot\cosh y,\ v=-\sin x\cdot\sinh y,$$

于是，由

$$\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$$

得

$$\frac{u^2}{\cos^2 x}-\frac{v^2}{\sin^2 x}=1.$$

由 $x=C_1$，即得一组双曲线.

由

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

得

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y}+\frac{v^2}{\sinh^2 y}=1.$$

由 $y=C_2$，即得一组椭圆.

2.5.4 反三角函数与反双曲函数

反三角函数作为三角函数的反函数，定义如下：

定义 2.14 如果 $\sin w=z$，则称 w 为 z 的反正弦函数，记为 $w=\mathrm{Arcsin}\,z$.

将 $z=\sin w=\dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$ 两端同乘以 $2ie^{iw}$ 得

$$e^{2iw}-2ize^{iw}-1=0.$$

于是有 $e^{iw}=iz\pm\sqrt{1-z^2}$，再由对数函数的定义即得

$$iw=Ln(iz\pm\sqrt{1-z^2}),$$

所以

$$w=\mathrm{Arcsin}\,z=-iLn(iz\pm\sqrt{1-z^2}).$$

例题 2.27 求 $Arc\sin 2$.

解

$$Arc\sin 2=-iLn\ \ 2i\pm\sqrt{1-2^2}\ \ =-iLn\ \ 2i\pm\sqrt{3}i$$

$$=-i\left\{\ln\left|\left(2\pm\sqrt{3}\right)i\right|+i\arg\left[\left(2\pm\sqrt{3}\right)i\right]+2k\pi i\right\}$$

$$=-i\left[\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)+\frac{\pi}{2}i+2k\pi i\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}+2k\right)\pi-i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

用同样的方法可以得到其余反三角函数的解析表达式，如：

$$w=A\mathrm{rccos}\,z=-iLn(z\pm\sqrt{z^2-1}),$$

$$w=A\mathrm{rctan}\,z=-\frac{i}{2}Ln\frac{1+iz}{1-iz}(z\neq\pm i),$$

$$w=A\mathrm{rc}\cot z=\frac{i}{2}Ln\frac{z-i}{z+i}(z\neq\pm i).$$

以上函数均为无穷多值函数. 在相应地取单值连续分支后，由反函数的求导法则，得

$$\left(Arc\sin z\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\ \left(Arc\cos z\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

由对数函数的求导法则，得

$$\left(Arc\tan z\right)'=\frac{1}{1+z^2},\ \left(Arccotz\right)'=-\frac{1}{1+z^2}.$$

类似地，我们可以定义反双曲函数为双曲函数的反函数.

反双曲正弦函数与反双曲余弦函数的解析表达式分别为：

$$w=Arc\,\mathrm{sinhz}=\mathrm{Ln}(\mathrm{z}\pm\sqrt{z^2+1}),$$

$$w=Arc\,\mathrm{coshz}=\mathrm{Ln}(\mathrm{z}\pm\sqrt{z^2-1}).$$

它们都是无穷多值函数.