数学物理方法 1

习题 1

1. 求下列复数的实部、虚部、模、辐角主值和共轭复数.

（1） $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}-\dfrac{2-\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}$. （2） $(1+\mathrm{i})^{100}+(1-\mathrm{i})^{100}$.

（3） $\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}$. （4） $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^5$.

2. 求下列复数的值，并写出其三角表示式和指数表示式：

（1） $\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(2+2\mathrm{i})}$. （2） $\dfrac{(\cos 5\theta+\mathrm{i}\sin 5\theta)^2}{(\cos 3\theta-\mathrm{i}\sin 3\theta)^3}$.

3. 求下列复数的值：

（1） $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^{12}$. （2） $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{i}}$.

4. 解方程：$z^2-3(1+\mathrm{i})z+5\mathrm{i}=0$.

5. 导出下列和式的有限表达式

（1）$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta$; （2）$\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$.

6. 求下列方程所表示的曲线（t 为实参数）.

（1） $z=t(1+\mathrm{i})$. （2） $z=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t$（$a>0, b>0$）.

7. 求下列方程所表示的曲线：

（1） $\left|\dfrac{z-1}{z+2}\right|=2$. （2） $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|=1$ $(|a|<1)$.

8. 求下列不等式所表示的区域

（1） $-\dfrac{\pi}{4}<\arg\dfrac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}<\dfrac{\pi}{4}$. （2） $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|\geq 1$.

（3） $|z-2|+|z+2|<5$. （4） $|z-2|-|z+2|>1$.

9. 函数 $w=z^2$ 把 z 平面上的直线段 $\mathrm{Re}\,z=1, -1\leq \mathrm{Im}\,z\leq 1$ 变成 w 平面上的什么曲线？

10. 函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 把 z 平面上下列曲线变成 w 平面上的什么曲线？

（1） $y=x$. （2） $x^2+y^2=2x$.

习题 2

1. 判断下列各极限是否存在？若存在，求其极限.

（1） $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{Re}\overline{z}}{z^2}$.　　（2） $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}}{z}\right)$.

（3） $\lim\limits_{z\to \mathrm{i}}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z(1+z^2)}$　　（4） $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z\overline{z}+2z-\overline{z}-2}{z^2-1}$.

2. 讨论下列函数的连续性：

（1） $f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$　　（2） $f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$

3. 已知函数

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3+\mathrm{i}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

证明：（1） $f(z)$在 $z=0$ 处连续.（2） $f(z)$在 $z=0$ 处满足柯西—黎曼方程.（3） $f(z)$在 $z=0$ 处导数不存在.

4. 下列函数在何处可导？并求其导数.

（1） $f(z)=\dfrac{z+2}{(z+1)(z^2+1)}$.　　（2） $f(z)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.

5. 试讨论下列函数的可导性与解析性，并在可导区域内求其导数.

（1） $f(z)=xy^2+x^2y\mathrm{i}$.　　（2） $f(z)=x^3-y^3+2x^2y^2\,\mathrm{i}$.

（3） $f(z)=z\operatorname{Im}z-\operatorname{Re}z$.　　（4） $f(z)=|z|^2-\mathrm{i}\operatorname{Re}z^2$.

6. 试证：如果函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析，并满足下列条件之一，那么 $f(z)$ 是常数.

（1） $|f(z)|$ 在区域 D 内为常数；　　（2） $\arg f(z)$ 在区域 D 内为常数；

7. 设 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 都是区域D内的调和函数，试证：函数

$$f(z)=(u_y-v_x)+\mathrm{i}(u_x+v_y)$$

在D内解析.

8. 验证下列各函数为调和函数，并由给定的条件求解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$.

（1） $u(x,y)=x^2+xy-y^2,\ f(\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$.

（2） $u(x,y)=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)$， $f(0)=0$.

（3） $v(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}(x>0),\ f(1)=0$.

9. 已知解析函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$满足$u+v=y^2-x^2$，求解析函数$f(z)$.

10. 求解下列方程

（1） $\mathrm{e}^{2z}-1+\sqrt{3}\ \mathrm{i}=0$. （2） $\sin z-\cos z=2$.

习题 3

1. 计算积分 $\int_C |z|\,\mathrm{d}z$，其中积分路线C是

（1）连接点-1与1的直线段.

（2）连接点-1与1，且中心在原点的上半圆周.

（3）连接点-1与1，且中心在原点的下半圆周.

2. 利用积分估值，证明 $\left|\int_C (x^2+\mathrm{i}y^2)\mathrm{d}z\right|\le 2$ ，积分路径为自$-\mathrm{i}$到i的直线段.

3. 计算积分$\oint_C \dfrac{\bar{z}}{|z|}\mathrm{d}z$，其中$C$为正向圆周：

（1） $|z|=2$. （2） $|z|=4$.

4. 设C为连接原点O到$1+\mathrm{i}$直线段，试证：$\left|\int_C \dfrac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}}\right|\le 2$.

5. 计算下列积分：

（1） $\int_C (3z^2+8z+1)\mathrm{d}z$， 其中$C$是连接点$-1$与$1$，且中心在原点的上半圆周；

（2） $\int_C \left(z\mathrm{e}^{z^2}+\cos\dfrac{\pi\mathrm{i}z}{2}\right)\mathrm{d}z$，其中$C$是连续点 0 与$\mathrm{i}$的直线段；

（3） $\int_C |z|-2\mathrm{e}^z\cos z\ \mathrm{d}z$，其中$C$为正向圆周$|z|=R>0$.

6. （1）计算积分$\int_C \dfrac{1}{z+2}\mathrm{d}z$，其中$C$为正向圆周$|z|=1$.（2）证明：

$$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=0.$$

7. （1）求积分 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{e}^z}{z}\,\mathrm{d}z$ 的值.（2）证明：定积分 $\int_0^\pi \mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\pi$.

8. 沿指定曲线的正向计算下列各积分：

（1） $\oint_{|z|=2}\dfrac{2z^2-z+1}{z-1}\mathrm{d}z$.　　（2） $\oint_{|z|=2}\dfrac{2z^2-z+1}{z-1^{\,2}}\mathrm{d}z$.

（3） $\oint_{|z+3|=4}\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z+2)^4}\mathrm{d}z$.　　（4） $\oint_{|z|=2}\dfrac{z^{2n}}{(z+1)^n}\mathrm{d}z$.

9. 计算积分 $I=\oint_C\dfrac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z$，其中

（1）C 为正向圆周 $|\,z\,|=\dfrac{1}{2}$.　　（2）C 为正向圆周 $|\,z\,|=2$.

10. 设 $f(z)=1+2z+3z^2+\cdots+nz^{n-1}$，$n$ 为正整数，计算积分

$$\oint_{|z|=1}\frac{(\overline{z})^{n-1}f(z)}{z}\mathrm{d}z.$$

11. 设函数

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\mathrm{e}^{\xi^2}}{\xi^3-z\xi^2}\mathrm{d}\xi$$

其中 C 为圆周 $|\,\xi-z\,|=3$ 的正向. 求:（1）$f(z)$ 在复平面上的表达式;（2）$f'(\mathrm{i})$.

12. 计算积分：$I=\oint_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2\left|z-1\right|^2}\mathrm{d}z.$

13. 设 D 为单连通区域，$z_0\in D$，$f(z)$ 在 D 内除 z_0 外均解析，且 $|\,f(z)\,|$ 在 z_0 的邻域内有界. 证明：$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$，其中 C 为 D 内任一包含 z_0 的闭曲线.

14. 设 $f(z)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{(z-a)^k}+\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在包含点 a 的区域 D 解析，在 D 的边界 C 上连续，a_k　$k=1\sim n$ 为常数，试证明：（1）$\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z=a_1$.（2）当 b 为 $\overline{D}$ 外一点时，有 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\dfrac{f(z)}{z-b}\mathrm{d}z=-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{(b-a)^k}$.

15. 计算积分$\oint_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{z}$，并证明：$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

习题 4

1. 试判别下列级数的收敛性和绝对收敛性：

（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}$.　　（2）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-\mathrm{i})^{2n+1}}{n}$.

（3）$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{\ln n}$.　　（4）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n^\alpha}(\alpha>0)$；

2. 求下列幂级数的收敛半径：

（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{\mathrm{e}^n}z^n$.　　（2）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$.

（3）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}z^n$.　　（4）$\sum_{n=1}^{+\infty}n^{\ln n}z^n$.

3. 试将下列函数在指定点处展开为泰勒级数，并指出其收敛域：

（1）$f(z)=\frac{1}{z^2}$，在$z=1$处.　　（2）$f(z)=\frac{z-1}{z+1}$，在$z=1$处.

（3）$f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}$，在$z=2$处.（4）$f(z)=\sinh z$，在$z=\pi i$处.

4. 设$0<r<1$，利用函数$f(z)=\frac{1}{1-z}$的幂级数展开证明：

$$\sum_{n=0}^{+\infty}r^n\cos n\theta=\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2};$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}r^n\sin n\theta=\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

5. 试将下列函数在指定的区域内展开为罗朗级数：

（1）$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}$（在$|z|>3$）.

（2）$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$（在 $1<|z|<2$ 及 $|z|>2$）.

（3）$f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}$（在以 i 为中心的圆环域内）.

（4）$f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$（在 $|z|>1$ ）.

6. 试将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ 在下列指定区域内展开为罗朗级数：

（1）在圆环域 $|a|<|z|<|b|$；　（2）在 ∞ 的邻域；　（3）在 a 的邻域.

7. 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$ 在下列指定点内展开为罗朗级数：

（1） $z=0$；　（2） $z=1$；　（3） $z=3$.

8. 求下列函数在复平面上的奇点，并确定它们的类型（对于极点要指出其阶数）：

（1） $\dfrac{z+2}{(z-1)^3z(z+1)}$.　（2） $\dfrac{1}{(z^2+\mathrm{i})^2}$.

（3） $\dfrac{1}{\sin z}$.　（4） $\dfrac{\tan(z-1)}{z-1}$.

（5） $\mathrm{e}^{-z}\sin\dfrac{1}{z}$.　（6） $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$.

（7） $\dfrac{1}{\sin z-\cos z}$.　（8） $\tan^2 z$.

（9） $\dfrac{\mathrm{z}-\sin z}{z^2(\mathrm{e}^{\pi z}-1)}$.　（10） $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$.

9. 试讨论下列函数在无穷远点的性态：

（1） $\sin\dfrac{1}{1-z}$.　（2） $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$.

（3） $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}+z^2-4$.　（4） $\cos z-\sin z$.

（5） $\dfrac{z^2}{3+z^2}$.　（6） $\dfrac{1}{z}\mathrm{e}^{\frac{z}{z+1}}$.

（7）$\mathrm{e}^z \cos\dfrac{1}{z}$.　　　　（8）$\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$.

10. 指出函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-\cos z}-\dfrac{2}{z^2}$ 在扩充复平面上的奇点，并确定它们的类型（对于极点指出其阶数）.

11. 设点 $z=a$ 分别为函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 的 m 阶与 n 阶极点，试确定 $z=a$ 作为下列函数的奇点时的类型（对于极点要指出阶数）：

（1）$f(z)g(z)$.　（2）$\dfrac{f(z)}{g(z)}$.　（3）$f(z)+g(z)$.　（4）$\dfrac{f(z)}{g(z)}+\dfrac{g(z)}{f(z)}$.

12. 已知函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$，（1）验证：在 $|z|<1$ 内，$f(z)=(1-2z+z^2)f'(z)$；（2）求函数 $f(z)$ 在点 $z=0$ 处的泰勒级数（展开到 z^3）.

13. 设函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z-z^2}$ 在 $z=0$ 处的泰勒级数为 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n z^n$.（1）求上述级数的收敛半径 R；（2）导出 a_n 满足的递推关系式，并给出 a_n 的表达式；（3）证明：对于

$$n=0,1,2,\cdots,\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r}\frac{1+\xi^2 f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}(1-\xi)}\mathrm{d}\xi=\frac{f^{(n)}(z)}{n!},\ |z|<r<R.$$

14. 试证：在 $0<|z|<+\infty$ 内下列展开成立

$$\cosh\left(z+\frac{1}{z}\right)=c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\ \ z^n+z^{-n}\ \ ,$$

其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos\mathrm{h}(2\cos\theta)\mathrm{d}\theta$.

15. 设函数 $f(z)\neq 0$ 在简单闭曲线 C 所围的区域内除 $z_0\neq 0$ 外均解析，且 z_0 不是 $f(z)$ 的本性奇点. 证明：$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C\frac{zf'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=-nz_0$ 的充要条件为：z_0 是 $f(z)$ 的 n 阶极点.

习题 5

1. 求下列函数在孤立奇点（包括无穷远点）处的留数：

（1）$f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$.

（2）$f(z)=\dfrac{1}{z(\mathrm{e}^{z}-1)}$.

（3）$f(z)=\dfrac{1}{(\mathrm{e}^{z}-1)^{2}}$.

（4）$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^{100}}$.

（5）$f(z)=z^{n}\sin\dfrac{1}{z}$.

（6）$f(z)=\dfrac{z^{2n}}{1+z^{n}}$.

2. 计算下列积分，其中闭曲线C取正向：

（1）$\displaystyle\oint_C \frac{z}{1-2\sin^2 z}\mathrm{d}z$, 其中$C:|z|=1$.

（2）$\displaystyle\oint_C z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z$, 其中$C:|z|=1$.

（3）$\displaystyle\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z^3-1)}\mathrm{d}z$,其中$C:|z|=r>1$.

（4）$\displaystyle\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\mathrm{d}z$, 其中$C:x^2+y^2=2(x+y)$.

（5）$\displaystyle\oint_C \tanh z\mathrm{d}z$, 其中$C:|z-2\mathrm{i}|=1$.

（6）$\displaystyle\oint_C \frac{z^3\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{1+z}\mathrm{d}z$, 其中$C:|z|=2$.

3. 设C为正向圆周$|z|=2$，计算积分$\displaystyle I=\oint_C z\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}+\frac{1}{(z^2-9)(z+\mathrm{i})}\right]\mathrm{d}z$.

4. 计算下列积分：

（1）$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\cos x}\mathrm{d}x$.

（2）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

5. 计算积分$\displaystyle I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\mathrm{d}\theta,(|a|>1)$.

6. 计算下列积分：

（1）$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$ （2）$\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x.$

（3）$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x\ (a>0).$ （4）$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}\mathrm{d}x$（$n$ 为正整数）.

7. 计算下列积分：

（1）$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}\mathrm{d}x.$ （2）$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+20}\mathrm{d}x.$

（3）$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin bx}{x^4+a^4}\mathrm{d}x\ (a>0).$ （4）$\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{(x^2+b^2)^2}\mathrm{d}x\ (a>0,b>0).$

8. 设 $f(t)=\dfrac{1}{4+5t^2+t^4}$，计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\cdot\cos\omega t\mathrm{d}t$，其中 ω 为实数.

习题 6

1. 求下列函数的傅里叶积分：

（1）$f(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|<1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$ （2）$f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\le\pi,\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$

（3）$f(t)=\begin{cases}-1, & -1<t<0,\\ 1, & 0<t<1,\\ 0, & |t|\ge 1.\end{cases}$ （4）$f(t)=\begin{cases}1-\cos t, & |t|\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |t|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

2. 求下列函数的傅里叶积分，并证明广义积分：

（1）$f(t)=\begin{cases}\cos t, & |t|\le\pi,\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$ 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega\pi\cos\omega t}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\cos t, & |t|<\pi,\\ -\dfrac{\pi}{4}, & |t|=\pi,\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$

（2）$f(t)=\mathrm{e}^{-|t|}\cos t$，证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\cos t.$

3. 求下列函数的傅里叶变换：

（1）$f(t)=\begin{cases}\cos 2\pi t, & |t|<1,\\ 0, & |t|\ge 1.\end{cases}$ （2）$f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}\sin 2\pi t, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

4. 求下列函数的傅里叶变换：

（1）$f(t)=\delta(t-1)(t-2)^2\sin t.$ （2）$f(t)=u(t)\mathrm{e}^{-t}\cos t.$

（3）$f(t)=\delta(t)+2\delta'(t)+3\delta''(t).$ （4）$f(t)=\sin t\cos t.$

（5）$f(t)=\dfrac{1}{a^2+t^2}(a>0).$ （6）$f(t)=t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\sin t.$

5. 求下列函数的傅里叶逆变换：

（1）$F(\omega)=\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2).$ （2）$F(\omega)=-2\pi\delta''(\omega)$.

（3）$F(\omega)=\cos 2\omega$. （4）$F(\omega)=\dfrac{1}{2+\omega^2}.$

（5）$F(\omega)=\dfrac{-2\mathrm{i}\omega}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}.$ （6）$F(\omega)=\dfrac{2\sin\omega}{\omega}.$

6. 已知 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，求下列函数的傅里叶变换：

（1）$g(t)=tf(2t).$ （2）$g(t)=(t-2)f(-2t).$

（3）$g(t)=f(2t-5).$ （4）$g(t)=tf'(t),\lim\limits_{|t|\to+\infty}f(t)=0.$

7. 已知

$$f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}, & t\geq 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}\qquad g(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leq t\leq\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

计算卷积 $f(t)*g(t)$.

8. 利用傅里叶变换求下列方程的解：

（1）$x''(t)-x(t)=\delta(t)$.

（2） $x'(t)-9\int_{-\infty}^{t}x(s)\mathrm{d}s=\mathrm{e}^{-|t|}$,其中 $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\mathrm{d}t=0.$

9. 利用像函数的微分性，求函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-t^2}$ 的傅里叶变换.

10*. 利用傅里叶正弦逆变换，解积分方程：

$$\int_0^{+\infty}y(\xi)\sin\omega\xi\,\mathrm{d}\xi=\begin{cases}\sin\omega, & 0\leq\omega\leq\pi,\\ 0, & \omega>\pi.\end{cases}$$

习题 7

1. 用定义计算下列函数的拉普拉斯变换：

（1） $f(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<1, \\ -4, & 1\le t<3, \\ 0, & t\ge 3. \end{cases}$

（2） $f(t)=\begin{cases} \sin t, & 0\le t<\pi, \\ 0, & t\ge \pi. \end{cases}$

2. 求下列函数的拉普拉斯变换：

（1） $\sin^2\beta t$.

（2） $3\sqrt[3]{t}+4\mathrm{e}^{2t}$.

（3） $\sin t\cdot u(t-2)$.

（4） $\mathrm{e}^{2t}\cdot u(t-2)$.

3. 利用延迟性，求下列函数的拉普拉斯逆变换：

（1） $\dfrac{\mathrm{e}^{-5p+1}}{p}$.

（2） $\dfrac{p^2+p+2}{p^3}\mathrm{e}^{-p}$.

（3） $\dfrac{\mathrm{e}^{-2p}}{p^2-4}$.

（4） $\dfrac{2\mathrm{e}^{-p}-\mathrm{e}^{-2p}}{p}$.

4. 利用拉普拉斯变换的性质，求下列函数的拉普拉斯变换：

（1） $(t-1)^2\mathrm{e}^t$.

（2） $t\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t$.

（3） $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\alpha t}}{t}$.

（4） $\dfrac{\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t}{t}$.

（5） $\int_0^t s\mathrm{e}^{-3s}\sin 2s\mathrm{d}s$.

（6） $\int_0^t \dfrac{\mathrm{e}^{-3s}\sin 2s}{s}\mathrm{d}s$.

5. 利用拉普拉斯变换的性质，求下列函数的拉普拉斯变换逆变换：

（1） $\dfrac{1}{(p+2)^4}$

（2） $\dfrac{4p}{(p^2+4)^2}$

（3） $\dfrac{p+2}{(p^2+4p+5)^2}$.

（4） $\dfrac{p+3}{(p+1)(p-3)}$.

（5） $\dfrac{2p+5}{p^2+4p+13}$.

（6） $\ln\dfrac{p^2+1}{p^2}$.

6. 利用留数，求下列函数的拉普拉斯变换逆变换：

（1） $\dfrac{1}{p(p-a)}$.

（2） $\dfrac{1}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$.

（3） $\dfrac{1}{p^3(p-a)}$.

（4） $\dfrac{1}{p(p^2+a^2)^2}$.

7. 求下列函数的拉普拉斯变换逆变换：

（1）$\dfrac{4}{p(2p+3)}$.　　（2）$\dfrac{1}{p(p^2+5)}$.

（3）$\dfrac{p^2+2}{p(p+1)(p+2)}$.　　（4）$\dfrac{p+2}{p^3(p-1)^2}$.

8. 求下列函数的卷积：

（1）$t * \mathrm{e}^t$.　　（2）$\sin t * \cos t$.

9. 利用卷积，求下列函数的拉普拉斯变换逆变换：

（1）$\dfrac{a}{p(p^2+a^2)}$.　　（2）$\dfrac{1}{p(p-1)(p-2)}$.

10. 求下列常微分方程（组）的解：

（1）$y''+4y=\sin t, y(0)=y'(0)=0$.

（2）$y''+3y'+2y=u(t-1), \quad y(0)=0, y'(0)=1$.

（3）$y''+9y=\cos 2t, \quad y(0)=1, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

（4）$\begin{cases} x'+y=1, & x(0)=0, \\ x-y'=t, & y(0)=1. \end{cases}$

11. 求下列微分、积分方程的解：

（1）$y+\int_0^t y(s)\mathrm{d}s=\mathrm{e}^{-t}$.

（2）$\int_0^t \cos(t-s)y(s)\mathrm{d}s=t\cos t$.

（3）$y'+\int_0^t y(s)\mathrm{d}s=1, \quad y(0)=-1$.

（4）$y+\int_0^t \mathrm{e}^{2(t-s)}y(s)\mathrm{d}s=1-2\cos t$.

12．利用拉普拉斯变换的性质，求下列广义积分：

（1）$\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\cos t}{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.　　（2）$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3t}\cos 2t\mathrm{d}t$.

（3）$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t\mathrm{d}t$.　　（4）$\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t$.

（5）$\int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.　　（6）$\int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t$