数 学 物 理 方 法 I

第2章　解 析 函 数

王　健

2.1 复变函数的极限和连续

2.1.1 复变函数的极限

定义**2.1** 设函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内有定义, ***A***为复常数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|z-z_0|<\delta$, 有 $|f(z)-A|<\varepsilon$. 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A.$

注：**1.** $z\to z_0$ 是指z在复平面上沿任何方向趋于 z_0.

2. 判断极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在有如下两种简便方法:

(1) 当 z 沿某特殊路径趋于 z_0 时, $f(z)$ 的极限不存在;

(2) 当 z 沿两个不同路径趋于 z_0 时, $f(z)$的极限不相同.

例题2.1 试证明：函数 $f(z)=\dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|}$ 当 $z\to 0$ 时极限不存在.

分析 由于函数 $f(z)$ 本质上是二元实函数，故可化为判断二元函数的极限存在性.

复变函数极限与二元实函数极限有何关系?

定理2.1 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y), A=u_0+\mathrm{i}v_0, z=x_0+\mathrm{i}y_0,$

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充要条件为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

思考题：试给出求二元函数极限的若干方法!

定理**2.1**的重要意义在于：它揭示了复变函数的极限与实变函数极限的紧密关系，即将求复变函数的极限问题转化为求两个二元实值函数的二重极限问题.

定理**2.2** 假设当 $z \to z_0$ 时，复变函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 极限存在, 且

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A, \lim_{z\to z_0} g(z) = B.$$

则 1. $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z) \pm g(z)\right] = A \pm B;$ 　 2. $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)g(z)\right] = AB;$

3. $\lim\limits_{z\to z_0}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right] = \dfrac{A}{B}\left(B \neq 0\right).$

推论**2.1** 　1. $\lim\limits_{z\to z_0}\left[Cf(z)\right] = C\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = CA;$

2. $\lim\limits_{z\to z_0} f^k(z) = \left[\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\right]^k = A^k.$

2.1.2 复变函数连续性

定义2.2 设函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 的某邻域内有定义，如果

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0),$$

则称函数 $f(z)$ 在 z_0 处连续. 点 z_0 称为 $f(z)$ 的连续点.

如果 $f(z)$ 在区域***D***内处处连续，则称 $f(z)$ 在区域***D***内连续.

例题2.2 讨论函数 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z\,\mathrm{Im}\,z^2}{|z|^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0\end{cases}$ 在***z*=0**处的连续性.

例题2.3 试讨论函数 $f(z)=\arg z$ 在复平面上的连续性.

分析：根据辐角主值的表达式进行讨论.

定理2.3 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 的某邻域内有定义，则函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 z_0 处连续的充要条件是：二元实函数 $u(x,y),v(x,y)$ 均在点 (x_0,y_0) 处连续.

定理2.4 连续函数的和、差、积、商(分母不为零) 仍为连续函数，连续函数的复合函数仍为连续函数.

例题2.4 讨论多项式 $P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 和有理式 $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 的连续性.

定理2.5 设函数 $w=f(z)$ 在有界闭区域 $\bar{D}$ 上的连续，则其模 $|f(z)|$ 在 $\bar{D}$ 上必有界，且取到最大值与最小值.

2.2 解析函数的概念

2.2.1 复变函数的导数和微分

定义2.3 设函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 的邻域内或包含 z_0 的区域 ***D*** 内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在，称函数 $f(z)$ 在点 z_0 处可导，且此极限值为函数 $f(z)$ 在点 z_0 的导数，记为

$$f'(z_0),\ \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}.$$

由导数的定义可知：可导必连续．那么连续是否可导呢?

例题2.5 讨论以下函数的可导性:

(1) $f(z)=|z|^2$; (2) $f(z)=\operatorname{Im} z$; (3) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\overline{z}^3}{|z|^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$

结论：**1.** 连续不一定可导.

2. 作为一个复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的实部和虚部两个二元实函数 $u(x,y),v(x,y)$, 在整个平面上任意阶偏偏导数均存在，但复变函数 $f(z)$ 仍可能不可导.

例题2.6 试证明：函数 $f(z)=z^n$ (***n***为正整数)在复平面上处处可导, 且 $(z^n)'=nz^{n-1}$.

注：当***n***为一般复数时，求导公式仍成立.

对于可导的复变函数而言，具有类似于一元实函数的求导法则和公式.

1. 四则运算　若函数 $f(z),g(z)$ 均可导，则

$$\left[f(z)\pm g(z)\right]'=f'(z)\pm g'(z);\quad \left[f(z)g(z)\right]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z);$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{\left[g(z)\right]^2},\quad g(z)\neq 0.$$

2. 复合函数链导法则　$w=g(z)$ 在点z处可导，$h=f(w)$ 在 $w=g(z)$ 处可导，则复合函数 $h=f\left[g(z)\right]$ 在点z处可导，且

$$\left\{f\left[g(z)\right]\right\}'=f'(w)g'(z).$$

3. 反函数求导公式　　设单值函数 $w=f(z),z=\varphi(w)$ 互为反函数，且 $\varphi'(w)\neq 0$，则 $f'(z)=\dfrac{1}{\varphi'(w)}$.

定义2.4 设函数 $w=f(z)$在 z 处的增量 $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$ 可以表示为 $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)=A\Delta z+\rho(\Delta z)$，其中$A$为不依赖于 Δz 的复常数, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}=0$. 则称 $w=f(z)$在 z处可微. 称 $\mathrm{d}f(z)=A\Delta z$ 为 z处的微分. 不难得

$$\mathrm{d}w=f'(z)\Delta z=f'(z)\mathrm{d}z.$$

与实函数类似, 可导与可微等价.

注：复变函数导数的几何意义, 并不表示函数的“变化率”.

复变函数的导数几何意义为: 导数模为伸缩率, 辐角为旋转角.

2.2.2 解析函数的概念

定义2.5 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析. 如果 $f(z)$ 在区域 ***D*** 内每一点都解析，称为在区域 ***D*** 内解析(全纯函数或正则函数).

若函数 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则称点 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点.

注：1. 函数在区域内解析与在区域内可导等价.

2. $f(z)$ 在闭区域 $\bar{D}$ 上解析是指 $f(z)$ 在包含 $\bar{D}$ 的某个区域上解析.

3. 仅在区域 ***D*** 内某些离散点、某曲线或曲线段上可导的函数，在区域内必不解析.

由于“解析”是用“可导”定义的，而“可导”是一种特殊类型的极限，所以解析函数经四则运算、复合及解析函数的反函数仍为解析函数.

例题2.7 讨论函数下列函数的可导性和解析性

(1) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$; (2) $f(z)=\dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$, 其中 $P_m(z),Q_n(z)$为多项式.

例题2.8 设函数 $f(z),g(z)$在 $z=z_0$ 邻域内解析，且 $f(z_0)=0$, $g(z_0)=0,g'(z_0)\neq 0$, 证明: $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$,

即解析函数的洛必达法则成立.

2.3 函数解析的充要条件

2.3.1 柯西一黎曼条件

设二元函数 $u(x,y),v(x,y)$ 一阶偏导数存在，称

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

为柯西一黎曼条件或方程.

柯西-黎曼方程的极坐标形式：$\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta},\dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}.$

例题**2.9** 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处可导，则$u(x,y),v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处满足柯西一黎曼条件，且

$$f'(z_0)=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right|_{(x_0,y_0)}.$$

注：**1.** 柯西－黎曼条件是可导的必要条件，但不是充分条件 **.**

例如，函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在 $z=0$ 满足柯西－黎曼条件，但在 $z=0$ 处不可导.

2. 可导函数的导数表示:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$f'(z)=\left(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

以下为判断复变函数可导和解析的几个定理.

定理**2.6** 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在区域***D***内有定义，则$f(z)$在***D***内一点 $z=x+\mathrm{i}y$可导的充分必要条件为：函数 $u(x,y),v(x,y)$在点 (x,y)处可微，且满足柯西-黎曼条件.

定理**2.7** 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在区域***D***内有定义，如果$u(x,y),v(x,y)$在点 (x,y) 处一阶偏导数连续，且满足柯西-黎曼条件，则$f(z)$在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 处可导.

定理**2.8** 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在区域***D***内有定义，则$f(z)$在***D***内解析 的充分必要条件为：函数 $u(x,y),v(x,y)$ 在***D***内可微，且满足柯西-黎曼条件.

定理2.9 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域D内有定义，如果 $u(x,y),v(x,y)$ 在D内一阶偏导数连续，且满足柯西-黎曼条件，则 $f(z)$ 在D内解析.

例题2.10 判断下列函数何处可导，何处解析?如可导求其导数.

(1) $f(z)=2z+\overline{z}$; (2) $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$;

(3) $f(z)=2x^3+3\mathrm{i}y^3$; (4) $f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

例题2.11讨论函数 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^z-1}, & z\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}, & z=0.\end{cases}$ 在 $z=0$ 处的可导性和解析性.

例题**2.12** 假设***D***内解析函数 $f(z)$满足 $f'(z)=0, z\in D,$

证明**:** $f(z)$在 ***D***内为常数**.**

解析函数的实部和虚部满足**C-R**条件**,** 若对实部和虚部外加条件**,** 有可能退化为常数**.**

例题**2.13** 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域***D***内解析**,**

且满足以下条件之一**,** 证明**:** $f(z)$为常数**.**

(1) 实部 $u(x,y)$ 或虚部 $v(x,y)$ 为常数**;**

(2) $u(x,y)+v(x,y)$ 为常数**;**

(3) $v(x,y)=u^2(x,y).$

2.4 解析函数与调和函数之间关系

2.4.1 调和函数

定义**2.6** 如果二元实函数 $u(x,y)$在区域***D***内具有连续的二阶偏导数, 且满足二维拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

则称 $u(x,y)$ 为区域 ***D***内的调和函数.

拉普拉斯方程又称为调和方程，它可描述静电场、平面流场, 平面稳态温度场等物理量.

类似地可定义空间调和方程 $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

2.4.2 解析函数与调和函数的关系

下章可证明: 解析函数具有任意阶的导数.

从而解析函数的实部和虚部具有任意阶的连续的偏导数.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

利用解析函数实部和虚部满足**C-R**条件，得

定理**2.10** 若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是区域 ***D*** 内的解析函数，

则 $u(x,y),v(x,y)$ 均为 ***D*** 内的调和函数.

问题：给定两个调和函数 $u(x,y),v(x,y)$，由此组成的复变

函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是否解析?

例如 $u=y, v=x$ 均为调和函数，但不满足**C-R**条件**,** 从而函数 $f(z)=y+\mathrm{i}x$ 不解析.

需要增加条件：$u(x,y), v(x,y)$ 满足**C-R**条件！

定义**2.7** 如果区域***D***内的调和函数 $u(x,y), v(x,y)$ 满足**C-R**条件，则称 $v(x,y)$ 为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数.

结论：解析函数的虚部必为实部的共轭调和函数.

定理**2.11** 若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是区域 ***D*** 内的解析函数，则 $v(x,y)$ 是 $u(x,y)$ 的共轭调和函数.

思考题：如果 $v(x,y)$ 是 $u(x,y)$ 的共轭调和函数，那么 $u(x,y)$ 是不是 $v(x,y)$ 的共轭调和函数？若不是，$v(x,y)$ 的共轭调和是什么？

求调和函数 $u(x,y)$ 的共轭调函数 $v(x,y)$ 的常见方法.

方法一　曲线积分法

由 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 得 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$,

从而 $-\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分，记为

$$\mathrm{d}v(x,y)=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

由曲线积分，得 $v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C$

方法二　偏积分法

利用**C-R**条件**:** $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$,　两端关于***y***积分

$v(x,y)=\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+\varphi(x)$, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+\varphi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\varphi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

利用 u 是调和函数可得**,** 上式右端与***y***无关**.** 因此

$$\varphi(x)=\int\left(-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x+C.$$

方法三 全微分法 由

$$\mathrm{d}v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

求全微分.

或直接积分 $v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C$

思考题：在上述方法中，应假设函数 $u(x,y)$ 为单连通区域 ***D*** 内的调和函数，为什么?

例题**2.14** 设调和函数 $u(x,y)=x^3+axy^2$，**(1)** 求常数***a***；**(2)** 求 $u(x,y)$ 的共轭调和函数.

综上所述，若已知解析函数的实部或虚部，利用**C-R**条件，可求得相应的虚部和实部.

定理2.12 设 $u(x,y)$ 为单连通区域 $\boldsymbol{D}$内的调和函数, 则存在共轭调和函数 $v(x,y)$, 使得 $u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)=f(z)$ 是 $\boldsymbol{D}$ 的解析函数.

注：已知解析函数的虚部, 也可求得其实部.

例题2. 15 已知解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的虚部为 $v(x,y)=x^2-y^2+y$, 求解析函数 $f(z)$.

例题2.16 设解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 满足

$$u(x,y)-v(x,y)=\mathrm{e}^x(\cos y-\sin y)-x-y, f(0)=1,$$

求 $f(z)$.

2.5 初等解析函数

2.5.1 指数函数

定义2.8 对于任何复数 $z = x + \mathrm{i}y$，称

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

为指数函数，其等式右端中的 e 为自然对数的底.

对于实数 $z = x(y = 0)$，即为通常实指数函数.

e^z 为单值函数，且 $\mathrm{e}^z \neq 0, |\,\mathrm{e}^z\,| = \mathrm{e}^x > 0, \arg \mathrm{e}^z = y.$

指数函数的性质

① 加法性 $\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}.$ ② 解析性 $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z.$

③ 周期性 $\mathrm{e}^{z+2\pi i} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{2\pi i} = \mathrm{e}^z.$ $\Rightarrow$ 罗尔定理不成立!

④ $\lim\limits_{z\to\infty} \mathrm{e}^z$ 不存在，即 e^∞ 无意义.

2.5.2 对数函数

定义**2.9** 设 $z\neq 0,\infty$，满足 $\mathrm{e}^{w}=z$ 的 w 称为 ***z***的对数，即对数函数是指数函数的反函数．记为 $w=\mathrm{Ln}z$.

$$w=\mathrm{Ln}z=\ln|z|+\mathrm{i}Argz=\ln|z|+\mathrm{i}argz+2k\pi\mathrm{i},$$

其中***k***为任意整数.

对数函数 $\mathrm{Ln}z$ 是无穷多值函数．在从原点起沿负实轴剪开的复平面上可分出无穷个单值函数，且每两个值之间相差 $2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍. 对每一个固定的***k***, 可得一个单值函数，称为 $\mathrm{Ln}z$ 的一个分支．$k=0$ 所对应的分支为对数函数的主值

$$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}argz,\qquad -\pi<\arg z\leq\pi.$$

例题2.17 计算 $\mathrm{Ln}(-1), \mathrm{Ln}(\mathrm{i}), \mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$ 及其主值.

对数函数的性质

(1) 设 $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$, 则

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln} z_1 + \mathrm{Ln} z_2, \quad \mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln} z_1 - \mathrm{Ln} z_2.$$

(2) 对数函数的每一个单值分支在沿从原点起始的负实轴剪开的复平面上是解析函数, 且 $(\mathrm{Ln} z)' = \dfrac{1}{z}$.

思考题：以下等式哪个成立？ (1) $\mathrm{e}^{\mathrm{Ln} z} = z$; (2) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{e}^{z} = z$;

(3) $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$; (4) $\ln\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2$.

2.5.3 一般幂函数和一般指数函数

定义2.10 设 $\alpha, z(z \neq 0, \infty)$ 为复数，称 $w = z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Ln} z}$ 为幂函数.

幂函数的定义是实数域中等式 $x^{\alpha} = \mathrm{e}^{\ln x^{\alpha}} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}(x > 0)$ 在复数域中的推广.

由于

$$z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Ln} z} = \mathrm{e}^{\alpha\left[\ln|z| + \mathrm{i}\left(\arg z + 2k\pi\right)\right]} = \mathrm{e}^{\alpha \ln z} \cdot \mathrm{e}^{2k\pi\alpha \mathrm{i}}$$ **(k为整数),**

(1) 当$\alpha = n$**(正整数)**时，$\mathrm{e}^{2k\pi\alpha \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2(kn)\pi \mathrm{i}} = 1$, z^{α} 为单值函数,

即整数幂函数.

(2) 当$\alpha=\dfrac{1}{n}(n>1$整数)时,

$$z^{\alpha}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln z+2k\pi\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\left[\ln|z|+\mathrm{i}\arg z+2k\pi\mathrm{i}\right]}=\sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{\frac{\arg z+2k\pi}{n}\mathrm{i}},$$

即为根式函数 $\sqrt[n]{z}$.

(3) 当$\alpha=\dfrac{m}{n}$是有理数(其中$\dfrac{m}{n}$为既约分数)时，由于

$\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}\alpha}=\left(\mathrm{e}^{2k\pi m\mathrm{i}}\right)^{\frac{1}{n}}$ 只能取$\boldsymbol{n}$个不同的值,

$$z^{\alpha}=\mathrm{e}^{\frac{m}{n}\ln z}\left(\mathrm{e}^{2k\pi m\mathrm{i}}\right)^{\frac{1}{n}},k=0,1,\cdots n-1,$$

(4) 当α为无理数或虚数时，$\mathrm{e}^{2k\pi\alpha\mathrm{i}}$所有值各不相同，此时

z^{α} 取无穷多值.

利用复合函数的性质知，$z^{\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln}z}$ 在除去原点和负实轴的复平面上，每一个分支均解析，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln}z}=\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln}z}\cdot\frac{\alpha}{z}=z^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{z}=\alpha z^{\alpha-1}.$$

定义**2.11** 设 $\alpha\neq 0,\infty$ 为复常数，称 $w=\alpha^{z}=\mathrm{e}^{z\mathrm{Ln}\alpha}$ 为一般指数函数.

一般指数函数性质

(1) 多值性 只有当 z 取整数值时，α^{z} 才取唯一的一个值.

(2) 解析性 除原点和负实轴的复平面上是解析函数，且

$$(\alpha^{z})'=\alpha^{z}\mathrm{Ln}\alpha.$$

思考题：**1.** 对于指数函数 e^z，是否成立 $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$?

2. 在一般指数函数 α^z 中，若取 $\alpha = e$ 是否等于指数函数 e^z ?

例题**2.18** 设 $z = (1-i)^i$，求 z的主值和模.

2.5.4 三角函数与双曲函数

定义**2.12** 对任意复数z，称

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

为 z的正弦函数和余弦函数.

当 z取实变量 x时，与通常正弦函数与余弦函数定义一致.

基本性质

(1) 解析性 在整个复平面上解析，且

$$(\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z.$$

(2) 无界性 $|\sin z|, |\cos z|$ 为无界函数.

(3) 保持实三角正弦函数和余弦函数相同的周期性、奇偶性、加法定理与相应的三角恒等式，欧拉公式等.

例如 $\sin(-z) = -\sin z, \cos(-z) = \cos z,$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \ e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

定义2.13 称

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}, \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}, \sec z=\frac{1}{\cos z}, \csc z=\frac{1}{\sin z}$$

为 z的正切函数、余切函数、正割函数和余割函数.

基本性质

(1) 解析性质 均在分母不为零的点处解析，且

$$\left(\tan z\right)'=\sec^2 z, \left(\cot z\right)'=-\csc^2 z,$$

$$\left(\sec z\right)'=\sec z\tan z, \ \left(\csc z\right)'=-\csc z\cot z.$$

(2) 周期性质 正切函数和余切函数周期为 π, 正割函数和

余割函数的周期为 2π.

定义2.14 称
$$\sinh z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2},$$
$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z},$$
$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z},$$
为 z的双曲正弦函数、双曲余弦函数、双曲正切函数、双曲余切函数、双曲正割函数和双曲余割函数.

基本性质

(1) 解析性质 $\sinh z, \cosh z$ 在全平面上解析, 且
$$\left(\cosh z\right)' = \sinh z, \left(\sinh z\right)' = \cosh z.$$
其余函数在分母不为零的区域内解析.

(2) 周期性质　$\cosh z, \sinh z$ 的基本周期为 $2\pi\mathrm{i}$.

(3) 奇偶性质　$\sinh z$ 为奇函数，$\cosh z$ 为偶函数.

(4) 双曲性质　$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

(5) 与三角函数关系

$$\sinh z = -\mathrm{i}\sin\mathrm{i}z, \cosh z = \cos\mathrm{i}z, \tanh z = -\mathrm{i}\tan\mathrm{i}z.$$

例题**2.19**　求下列复数方程**:**

(1) $\cos z = \mathrm{i}$; (2) $\sinh z + \mathrm{i} = 0$.

例题**2.20** 试证明 $w = \cos z$ 将直线 $x = C_1$ 与直线 $y = C_2$ 分别变成双曲线与椭圆.

2.6* 解析函数的应用—平面场的复势

复习：平面场 $F = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y).$

例如: 静电场 $E = E_x + \mathrm{i}E_y.$ 流速场 $v = v_x + \mathrm{i}v_y.$

无源场 $\mathrm{div}F = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0.$

无旋场 $\mathrm{rot}F = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = 0.$

2.6.1 平面静电场的复势

平面静电场 过原点与平面垂直的无限长均匀带电直线，在平面P上各处产生的静电场都与带电直线垂直.

设平面静电场的强度为 $E = (E_x, E_y) = E_x + \mathrm{i}E_y.$

如果平面静电场内无带电物体，则电荷密度 $\rho = 0$, 其电场

E为无源场，即 $\operatorname{div}E = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} = 0.$

从而 $-E_y\mathrm{d}x + E_x\mathrm{d}y$ 是某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分,

$$\mathrm{d}u = -E_y\mathrm{d}x + E_x\mathrm{d}y.$$

$u(x, y)$ 称为力函数，等值线 $u(x, y) = c_1$ 称为电力线.

若静电场是无旋场, 得

$$\mathrm{rot}\mathrm{E} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0,$$

从而 $-E_x\mathrm{d}x - E_y\mathrm{d}y$ 是某个二元函数 $v(x, y)$ 的全微分,

$$\mathrm{d}v = -E_x\mathrm{d}x - E_y\mathrm{d}y.$$

$v(x,y)$ 称为势函数，等值线 $v(x,y)=c_2$ 称为等位线.

$$\operatorname{grad} v=(v_x,v_y)=-(E_x,E_y)=-\mathrm{E}.$$

即静电场的电场强度**E**等于电势*v*的负梯度.

如果**E**静电场是单连通区域**B**中的无源无旋场，则 $u(x,y)$, $v(x,y)$满足**C-R**条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$是**B**内的解析函数.

称$f(z)$为静电场**E**的复势. 静电场**E**可用复势表示

$$\mathrm{E}=E_x+\mathrm{i}E_y=-v_x-\mathrm{i}u_x=-\mathrm{i}\overline{f'(z)}.$$

利用静电场的复势，可以研究静电场中等势线电力线的分布情况，形象地描绘出区域中每一点电场的图像.

例题**2.21** 已知静电场的复势为 $w = \ln z$, 试描绘该电场.

2.6.2 平面流速场的复势

设平面不可压缩的定常流体形成的流速场为

$$\mathbf{v} = v_x(x,y)\mathbf{i} + v_y(x,y)\mathbf{j}, \quad (x,y) \in B \subseteq \mathbf{R}^2$$

在单连域***B***内是无旋无源的，其中 $v_x(x,y), v_y(x,y) \in C^1(B)$.

由 $\mathbf{v}$ 是无旋场得

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad 或\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0,$$

故存在二元函数 $\varphi(x,y)$, 使 $\mathrm{d}\,\varphi(x,y) = v_x\,\mathrm{d}\,x + v_y\,\mathrm{d}\,y.$

从而

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y \quad 或\ \mathrm{grad}\varphi = \mathrm{v}.$$

$\varphi(x,y)$ 为场 $\mathbf{v}$ 的**(位)**势函数**,** 等值线 $\varphi(x,y) = c_1$ 称为等**(位)**势线**.**

由 **v** 是无源场得

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \qquad \text{或} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y},$$

从而存在二元函数 $\psi(x,y)$，使 $\mathrm{d}\,\psi(x,y) = -v_y\,\mathrm{d}\,x + v_x\,\mathrm{d}\,y$

故
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x.$$

$\psi(x,y)$ 为场 **v** 的流函数，等值线 $\psi(x,y) = c_2$ 称为等流线.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

表明场 **v** 的势函数 φ 与流函数 ψ 满足**C-R**方程，所以

$$w = f(z) = \varphi(x,y) + \mathrm{i}\,\psi(x,y)$$

是单连通域B内的一个解析函数，称为平面流速场的复势函数.

根据复变函数导数公式

$$\mathrm{v}=v_x+\mathrm{i}\,v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\overline{f'(z)}.$$

思考题：由平面流速场复变函数表示 $\mathrm{v}=\overline{f'(z)}$，能总结出解析函数导数的物理意义吗?

例题2.22 设平面流速场复势为 $f(z)=z^2$，试确定其流线、势线和速度.

谢 谢！