第2章 解析函数

2.1 内容归纳

2.1.1 内容提要

复变函数的极限、连续、导数和微分；解析函数；调和函数与共轭调和函数；初等解析函数.

2.1.2 基本概念

1. 设函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内有定义，A 为复常数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<\left|z-z_0\right|<\delta$ 时，有

$$\left|f(z)-A\right|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记为

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

2. 设函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称函数 $f(z)$ 在 z_0 处连续，点 z_0 称为 $f(z)$ 的连续点. 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

3. 设函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 的邻域内或包含 z_0 的区域 D 内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f\ \ z_0+\Delta z\ \ -f\ \ z_0}{\Delta z}$$

存在，称函数 $f(z)$ 在点 z_0 处可导，且此极限值为函数 $f(z)$ 在点 z_0 的导数，记为 $f'(z_0)$. 此时，$f'(z_0)\Delta z$ 为函数 $f(z)$ 在 z_0 处微分，记为 $\mathrm{d}w=f'(z_0)\mathrm{d}z$. 若 $f(z)$ 在 z_0 处微分存在，则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微. 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导（可微），则称函数 $f(z)$ 在 D 内可导（可微）.

4. 如果函数 $f(z)$ 在点 z_0 及 z_0 的邻域内处处可导，那么称 $f(z)$ 在 z_0 解析；如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点解析，那么称 $f(z)$ 在区域 D 内解析，或称 $f(z)$ 是区域 D 内的一个解析函数（全纯函数或正则函数）. 若函数 $f(z)$ 在点 z_0 不解析，则称点 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点.

5. 如果函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在点 (x,y) 处一阶偏导数存在，而且满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

则称 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 满足柯西-黎曼（Cauchy-Riemann）条件（简称 C-R 条件）.

6. 如果二元实函数 $u(x,y)$ 在区域 D 内具有连续的二阶偏导数，且满足二维拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

则称 $u(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数.

7. 设 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 均为区域 D 内的调和函数，若 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在区域 D 内满足柯西-黎曼条件，则称 $v(x,y)$ 为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数.

2.1.3 主要结论

1. 复变函数的极限、连续和导数

（1）设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$， $A=u_0+\mathrm{i}v_0$， $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 的充要条件为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0.$$

（2）假设当 z 趋于 z_0 时，复变函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 极限存在，且

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A，\quad \lim_{z\to z_0}g(z)=B.$$

则

（a） $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]=A\pm B$；

（b） $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)g(z)\right]=AB$；

（c） $\lim\limits_{z\to z_0}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]=\dfrac{A}{B}\ \ B\neq 0$.

（3）设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 的某个邻域内有定义， 则函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是：二元实函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 均在点 (x_0,y_0) 处连续.

（4）连续函数的和、差、积、商(分母不为零）仍为连续函数，连续函数的复合函数仍为连续函数.

2. 解析函数

（1）设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内有定义，$z=x+\mathrm{i}y$ 为 D 内一点. 则函数 $f(z)$ 在 z 点可导的充分必要条件为：二元实函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，且满足柯西-黎曼条件.

（2）在区域 D 内解析的函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(除去分母为零的点) 在 D 内解析；设函数 $\xi=g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，函数 $w=f(\xi)$ 在 ξ 平面上的区域 G 内解析. 如果对 D 内的每一个点 z，函数 $g(z)$ 的对应值 ξ 都属于 G，则复合函数 $w=f\left[g(z)\right]$ 在 D 内解析.

（3）若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 处可导，则其导数可表示为

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

（4）柯西-黎曼方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

且

$$f'(z)=\ \cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta\ \left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

（5）若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是区域 D 内的解析函数，则 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 均为 D 内的调和函数，且 $v(x,y)$ 为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数.

3. 初等解析函数

（1）指数函数的性质：

$$\mathrm{e}^z=\exp(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y).$$

① 加法性 $\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}$；

② 解析性 $(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z$；

③ 周期性 $\mathrm{e}^{z+2\pi i}=\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{2\pi i}=\mathrm{e}^z$，其中 k 为任意整数；

④ $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^z$ 不存在，即 e^∞ 无意义.

（2）对数函数的性质

$$\mathrm{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z.$$

① 多值性 对数函数有无穷多个分支，其中 $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$ 称为主值分支，其余分支为： $\mathrm{Ln} z = \ln z + 2k\pi\mathrm{i}$ （k 为任意整数)；

② 解析性 对数函数的每一个单值分支在沿从原点起始的负实轴剪开的复平面上是解析函数，且 $(\mathrm{Ln} z)' = \dfrac{1}{z}$；

③ 保持实函数对数函数的性质 设 $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$，则

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln} z_1 + \mathrm{Ln} z_2, \quad \mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln} z_1 - \mathrm{Ln} z_2.$$

（3）一般指数函数 $\zeta^z = \mathrm{e}^{z\mathrm{Ln}\zeta}$ 的性质

① 多值性 只有当 z 取整数值时，ζ^z 才取唯一的一个值；

② 解析性 除原点和负实轴的复平面上是解析函数，且 $(\zeta^z)' = \zeta^z \mathrm{Ln}\zeta$.

（4）幂函数 $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Ln} z}$ 的性质

① 多值性当 $\alpha = n$ (n 为正整数)时为单值函数，当 α 为有理数时，它有有限多个值，其余情况下有无穷多个值；

② 解析性 除原点和负实轴的复平面上是解析函数，且 $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$.

（4）三角函数与双曲函数

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

主要性质：

① 解析性 $(\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z$；

② 无界性 $|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 为无界函数；

③ 保持实三角正弦函数和余弦函数相同的周期性、奇偶性、加法定理与相应的三角恒等式，欧拉公式等.

$$\sin hz = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \cos hz = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \tan hz = \frac{\sin hz}{\cos hz} = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}.$$

它们均为 $2\pi\mathrm{i}$ 的周期函数，且双曲函数与三角函数有如下的关系：

$$\sin hz = -\mathrm{i}\sin \mathrm{i}z, \quad \cos hz = \cos \mathrm{i}z, \quad \tanh z = -\mathrm{i}\tan \mathrm{i}z.$$

2.2 学习要求与技巧

2.2.1 学习要求

1. 理解复变函数极限、导数、微分以及解析函数的概念；掌握连续、可导、解析之间的关系以及求导方法；

2. 掌握复变函数解析的充要条件，并能灵活运用柯西-黎曼方程. 理解调和函数的概念、解析函数与调和函数的关系以及共轭调和函数的概念.

3. 了解指数函数、对数函数、幂函数、三角函数和双曲函数的定义及它们的主要性质.

4. 本章的重点：解析函数的概念，函数解析的充要条件，调和函数以及共轭调和函数，初等函数的性质.

2.2.2 学习技巧

1. 判断复变函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$极限存在性，连续性可等价于实部$u(x,y)$和虚部$v(x,y)$这两个二元函数的极限存在性和连续性. 由于二元初等函数在其定义域内均可导、连续、极限存在，因此，仅当复变函数的实部和虚部为分段函数时，用定义判断极限的存在性和连续性.

2. 虽然复变函数中没有类似于高等数学中的微分中值定理，但洛必达法则仍成立，因此，在计算复变函数的极限时，可以利用洛必达法则.

3. 判断复变函数的可导和解析有三种方法：定义、充要条件（即满足柯西－黎曼条件，且实部和虚部可微）以及可导（解析）函数的有限次四则运算或复合运算. 具体采用何种方法视所给函数的结构而定. 通常用充要条件判断.

4. 利用可导（解析）的充要条件判断复变函数$f(z)$的可导（解析）的基本步骤：（1）检验其实部$u(x,y)$和虚部$v(x,y)$的连续性. 若其中之一不连续，则u和v必有一个不可微，从而$f(z)$不可导，从而不解析；（2）若u和v均连续，再判断它们是否可导，若有一个不可导，则$f(z)$必不可导；（3）若u和v均可导，验证是否满足柯西－黎曼条件，若不满足，则$f(z)$一定不可导，若满足，则需验证u和v是否可微.

5. 证明解析函数$f(z)$退化为常数，即证明其实部和虚部均为常数，或实部和虚部的一阶偏导数为零.

6. 已知解析函数的实部（或虚部）求解析函数的常用方法：（1）利用柯西－黎曼条件，通过偏积分方法求出解析函数的虚部（或实部），进而得到解析函数；（2）先根据解析函数的导函数公式，求出解析函数的导函数，然后再积分得到解析函数.

7. 复变量初等解析函数有其特殊的性质，如指数函数e^z为周期函数；对数函数Lnz为无穷多值函数；三角函数$\sin z, \cos z$为模为无穷函数等.

2.3 例题分析

例题2.1 试证明：函数 $f(z)=\dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|}$ 当 $z\to 0$ 时极限不存在.

证明　方法1 令 $z=x+iy$， 则

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0^+}} f(z)=\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0^+}}\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}=\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0^+}}\frac{kx}{\sqrt{x^2+k^2x^2}}=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

因为它随 k 而变化，所以当 $z\to 0$ 时，$f(z)$ 极限不存在.

方法2 令 $z=r\ \cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ ，则 $f(z)=\dfrac{r\sin\theta}{r}=\sin\theta.$

当 z 沿不同的射线 $\arg z=\theta$ 趋于零时，$f(z)$ 趋于不同的值. 例如，当 z 沿射线 $\arg z=\theta$ 趋于零时，$f(z)\to\sin 0=0$；但当 z 沿射线 $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$ 趋于零时，$f(z)\to\sin\dfrac{\pi}{2}=1.$

故 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在.

例题2.2 试讨论函数 $f(z)=\arg z$ 的连续性.

解 由辐角 $\arg z$ 的定义知，$\arg z$ 在 $z=0$ 无意义，所以 $f(z)=\arg z$ 在 $z=0$ 处不连续.

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0, y\geq 0, \text{或} y\leq 0,\\ \pi+\arctan\dfrac{y}{x}, & x<0, y\geq 0,\\ -\pi+\arctan\dfrac{y}{x}, & x<0, y<0.\end{cases}$$

设 $x_0<0$ 为负实轴上的任意一点，当 z 从上半平面内趋于 x_0 时，$\arg z\to\pi$；但当 z 从下半平面内趋于 x_0 时，$\arg z\to-\pi$，故 $f(z)$ 在 $z_0=x_0+0i=x_0$ 处无极限，从而不连续. 综上所述，函数 $f(z)=\arg z$ 在整个复平面上除原点与负实轴外均连续.

例题 2.3 讨论函数 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z\operatorname{Im} z^2}{|z|^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0\end{cases}$ 在 $z=0$ 的连续性.

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $\dfrac{z\,\mathrm{Im}\,z^2}{|z|^2}=\dfrac{(x+\mathrm{i}y)2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}+\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}\mathrm{i}$.

由于 $\left|\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}\right|\le|x|,\left|\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}\right|\le|y|$，从而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}=0,\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}=0$，即

$$\lim_{z\to0}\frac{z\,\mathrm{Im}\,z^2}{|z|^2}=0=f(0),$$

所以，函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 的连续性.

例题 2.4 讨论多项式 $P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 和有理式 $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 的连续性.

解 显然，多项式 $P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 在全平面上连续. 有理式 $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 在复平面上除使 $Q_m(z)=0$ 的点外均连续.

例题2.5 讨论以下函数的可导性：

（1）$f(z)=|z|^2$；（2）$f(z)=\mathrm{Im}\,z$；（3）$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\bar z^3}{|z|^2}, & z\ne0,\\ 0, & z=0\end{cases}$ 在 $z=0$ 的可导性.

解 （1）
$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\left|z+\Delta z\right|^2-\left|z\right|^2}{\Delta z}$$
$$=\frac{(z+\Delta z)\overline{(z+\Delta z)}-z\bar z}{\Delta z}=\bar z+\overline{\Delta z}+z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.$$

当 $z=0$ 时，

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to0}\overline{\Delta z}=0$$

当 $z\ne0$ 时，取 $\Delta z=\Delta x\to0$，则

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta z=\Delta x}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=z+\bar z.$$

若取 $\Delta z=\mathrm{i}\Delta y\to0$，则

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z=i\Delta y}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=-z+\bar{z}.$$

综合得：当 $z=0$ 时，$f'(0)=0$；当 $z\neq 0$ 时，$f(z)$ 导数不存在.

（2）设 Z 为复平面上任意一点，

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Im}(z+\Delta z)-\operatorname{Im}z}{\Delta z}$$

$$=\frac{\operatorname{Im}z+\operatorname{Im}\Delta z-\operatorname{Im}z}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Im}\Delta z}{\Delta z}$$

$$=\frac{\operatorname{Im}(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\frac{\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}.$$

取 $\Delta z=\Delta x\to 0$，则

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

取 $\Delta z=\mathrm{i}\Delta y\to 0$，则

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\mathrm{i}\Delta y}=\frac{1}{\mathrm{i}}.$$

因此，当点沿不同方向而使 $\Delta z\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 的极限不同，从而 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 不存在，所以

$f(z)=\operatorname{Im}z$ 在复平面上处处不可导.

（3）当 $z\neq 0$ 时，$f(z)=\dfrac{\bar{z}^3}{|z|^2}=\dfrac{(x-\mathrm{i}y)^3}{x^2+y^2}=\dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\dfrac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}$,

从而

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}\quad v(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

令 $\Delta z=|\Delta z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\theta=\arg\Delta z$，则

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{(\Delta z)}^3}{|\Delta z|^2\,\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta z|^3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\theta}}{|\Delta z|^3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\\&=\lim_{\Delta z\to 0}(\cos 4\theta-\mathrm{i}\sin 4\theta).\end{aligned}$$

当Δz沿不同射线$\arg\Delta z=\theta$趋于零时，极限$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}$的不同，从而$f(z)$原点不可导.

例题2.6 试证明：函数$f(z)=z^n$（n为正整数）在z平面上处处可导，且

$$(z^n)'=nz^{n-1}.$$

证明　设z是任意固定的点，则

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}\\&=\lim_{\Delta z\to 0}\left[nz^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}\Delta z+\cdots+(\Delta z)^{n-1}\right]\\&=nz^{n-1}.\end{aligned}$$

例题2.7 讨论下列函数的可导性和解析性：

（1）$f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$；　　　　（2）$f(z)=\dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$.

解　（1）$z=\pm\mathrm{i}$为函数的奇点，在复平面上，除这两点不可导外，函数解析.

（2）$Q_n(z)$的零点为函数的奇点，在复平面上，除这些点外均可导、解析.

例题2.8　设函数$f(z),g(z)$在$z=z_0$的邻域内解析，且

$$f(z_0)=0,g(z_0)=0,g'(z_0)\neq 0,$$

证明：$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.

证明

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

例题2.9　设函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在$z=x+\mathrm{i}y$点可导，则$u(x,y),v(x,y)$满足柯西-黎曼

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

且$f(z)$的导数为

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

证明　记

$$\begin{aligned}&\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y,\ \Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y),\\&\Delta v=v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)\end{aligned}.$$

因为函数$f(z)$在 z 点可导，由导数定义知

$$\begin{aligned}f'(z)&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\left[u\ \ x+\Delta x,y+\Delta y\ \ +\mathrm{i}v\ \ x+\Delta x,y+\Delta y\ \right]-\left[u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\right]}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}\\&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}.\end{aligned}$$

取$\Delta y=0,\Delta z=\Delta x\to 0$，即动点$z+\Delta z$沿平行于实轴的方向趋于点$z$，则

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta z=\Delta x}}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

同理，取$\Delta x=0,\Delta z=\mathrm{i}\Delta y\to 0$，即动点$z+\Delta z$沿平行于虚轴的方向趋于点$z$，则

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z=i\Delta y}}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\mathrm{i}\Delta y}=-\mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

比较式可得柯西-黎曼方程

例题 2.10 判断下列函数在何处可导，何处解析，并在可导或解析处分别求出其导数：

（1）$f(z)=2z+\overline{z}$；　　　　（2）$w=\mathrm{e}^{x}(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$；

（3）$f(z)=2x^{3}+3\mathrm{i}y^{3}$；　　　　（4）$f(z)=\dfrac{x}{x^{2}+y^{2}}-\mathrm{i}\dfrac{y}{x^{2}+y^{2}}$．

分析　由于所给的复变函数的实部和虚部均为二元初等函数，在它们的定义域内均可微，因此，仅需验证实部和虚部是否满足柯西－黎曼条件.

解　（1）由$f(z)=2z+\overline{z}=3x+\mathrm{i}y$，得$u(x,y)=3x,v(x,y)=y$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=1.$$

在全平面上不满足 C－R 条件，故该函数在全平面上不可导，不解析.

(2) 因为$u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y, v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y.$$

$u(x,y), v(x,y)$满足柯西-黎曼条件，又由于以上四个偏导数均连续，所以$f(z)$在复平面内处处可导，处处解析，且

$$f'(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)=f(z).$$

（3）由$f(z)=2x^3+3\mathrm{i}y^3$得其实部和虚部分别为$u(x,y)=2x^3, v(x,y)=3y^3$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=9y^2.$$

当$6x^2=9y^2$时满足 C—R 条件，因此函数在$y=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}x$的两条直线上可导，且导数为

$$f'(z)\Big|_{y=\pm\sqrt{2/3}x}=\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\Bigg|_{y=\pm\sqrt{2/3}x}=6x^2=9y^2.$$

由于在这两条直线上的任一点都不存在一个处处可导的邻域，因此，函数在全平面上不解析.

（4）$u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}, v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$在$z\neq 0$处可微，且

$$u_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, u_y=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\ \ v_x=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, v_y=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

满足柯西－黎曼条件，所以函数$f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$在$z\neq 0$处解析，其导函数为

$$\begin{aligned}f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y&=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)}+\mathrm{i}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\\&=-\frac{(x-\mathrm{i}y)^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{(\overline{z})^2}{(z\overline{z})^2}=-\frac{1}{z^2}.\end{aligned}$$

例题 2.11 设函数$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^z-1}, & z\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}, & z=0.\end{cases}$ 讨论函数$f(z)$在$z=0$处的连续性、可导性和解析性.

分析 本题用定义讨论函数在一点的连续性、可导性和解析性.

解 由于

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^z-1-z}{z(\mathrm{e}^z-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^z-1}{\mathrm{e}^z-1+z\mathrm{e}^z}=\frac{1}{2},$$

所以函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 处连续.

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{2(\mathrm{e}^z-1)-2z-z(\mathrm{e}^z-1)}{2z^2(\mathrm{e}^z-1)}$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^z-1-z\mathrm{e}^z}{6z^2}=\frac{1}{12}.$$

函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 处可导.

当 $z\neq 0$ 时，利用复合函数求导可得，$f(z)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^z-1}$ 在 $z=0$ 的邻域内导数存在，

因此，$f(z)$ 在 $z=0$ 处解析.

例题 2.12 证明：如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $f'(z)$ 处处为零，则 $f(z)$ 在 D 内为一常数.

证明 因为

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

所以 $u=$ 常数，$v=$ 常数，因而 $f(z)$ 在 D 内是常数.

例题 2.13 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析，且满足下列条件之一，证明：$f(z)$ 在 D 内是常数.

（1）实部 $u(x,y)$ 或虚部 $v(x,y)$ 为常数；（2）$u(x,y)+v(x,y)$ 为常数；（3）$v=u^2$.

证明 （1）设 $u(x,y)$ 为常数，则 $u_x=0,u_y=0$，利用柯西－黎曼条件 $u_x=v_y,\ u_y=-v_x$ 得 $v_x=0,v_y=0$，从而 $v(x,y)$ 为常数.

（2） 设 $u(x,y)+v(x,y)=c$，上式两边分别关于 x 和 y 求偏导数，得 $\begin{cases}u_x+v_x=0,\\ u_y+v_y=0.\end{cases}$

利用柯西－黎曼条件 $u_x = v_y, u_y = -v_x$，上述方程可化为 $\begin{cases} u_x - u_y = 0, \\ u_y + u_x = 0. \end{cases}$ 此方程解为 $u_x = u_y = 0$. 由柯西－黎曼条件得 $v_x = v_y = 0$，从而得 u, v 为常数.

（3）利用已知条件 $v = u^2$，两边分别关于 x 和 y 求偏导数，得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2u\frac{\partial u}{\partial x},\ \ \frac{\partial v}{\partial y} = 2u\frac{\partial u}{\partial y}.$$

由柯西－黎曼条件，得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2u\frac{\partial u}{\partial y} = -2u\frac{\partial v}{\partial x} = -4u^2\frac{\partial u}{\partial x}.$$

即 $(1+4u^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,$ 从而 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$. 由此得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

所以，$u(x,y), v(x,y)$ 为常数，即 $f(z)$ 为常数.

例题 2.14 已知解析函数 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y) = x^3 + axy^2$. 求:（1）常数 a；（2）解析函数 $f(z)$.

分析 由于解析函数的实部和虚部均为调和函数，故利用调和方程 $v_{xx} + v_{yy} = 0$ 可求常数 a. 求解析函数 $f(z)$，可先求出实部 $u(x,y)$，也利用解析函数的导函数公式 $f'(z) = v_y(x,y) + \mathrm{i}v_x(x,y)$，求 $f'(z)$，再积分得.

解（1）利用柯西－黎曼条件求 因为 $v_{xx} = 6x, v_{yy} = 2ax$，由 $v_{xx} + v_{yy} = 0$ 得 $a = -3$. 从而 $v(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

（2）先求出 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)$.

方法 1 偏积分法. 由柯西－黎曼条件得

$$v_y = u_x = -6xy\ \ .$$

于是由偏积分

$$u(x,y) = \int u_x \mathrm{d}x = \int -6xy\mathrm{d}x = -3x^2y + \varphi(y).$$

再由 $v_x=-u_y$ 得 $3x^2-\varphi'(y)=3x^2-3y^2$，即 $\varphi'(y)=3y^2$，$\varphi(y)=y^3+c$（常数）. 所以

$$u(x,y)=y^3-3x^2y+c.$$

方法 2 曲线积分法.

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}v_y\mathrm{d}x-v_x\mathrm{d}y+c\\&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-6xy\mathrm{d}x-(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+c.\end{aligned}$$

因为积分与路径无关，选择路径为：$(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$，从而

$$u(x,y)=-\int_0^y(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+c=y^3-3x^2y+c.$$

方法 3　全微分法.

$$\begin{aligned}du&=u_xdx+u_ydy=v_ydx-v_xdy\\&=-6xydx-(3x^2-3y^2)dy=d(y^3-3x^2y),\end{aligned}$$

从而得 $u(x,y)=y^3-3x^2y+c$. $f(z)$ 的表达式为

$$\begin{aligned}f(z)&=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)=y^3-3x^2y+c+\mathrm{i}(x^3-3xy^2)\\&=\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)^3+c=\mathrm{i}z^3+c.\end{aligned}$$

方法 4 导函数法 由 $f'(z)=v_y+\mathrm{i}v_x$ 得

$$\begin{aligned}f'(z)&=-6xy+3(x^2-y^2)\mathrm{i}=3\mathrm{i}(x^2-y^2+2xy\mathrm{i})\\&=3\mathrm{i}z^2.\end{aligned}$$

积分得

$$f(z)=\mathrm{i}z^3+c.$$

例题 2.15 已知解析函数的虚部为 $v(x,y)=x^2-y^2+y$，求解析函数 $f(z)$.

解 由解析函数的实部（虚部）求解析函数的另外一种简便方法是，先求出 $f(z)$ 的导函数 $f'(z)$，再求函数 $f(z)$. 对于本例，由导数公式可得

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=-2y+1+2x\mathrm{i}=2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)+1.$$

用复变量 z 表示为 $f'(z)=2\mathrm{i}z+1$. 显然

$$f(z)=\mathrm{i}z^2+z+C.$$

例题 2.16 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为解析函数，且满足：

$$u(x,y)-v(x,y)=\mathrm{e}^x(\cos y-\sin y)-x-y\text{，}\quad f(0)=1\text{，}$$

求 $f(z)$.

分析 柯西－黎曼条件 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ 确定了解析函数实部和虚部的一阶偏导数之间两个关系式，若再给出实部和虚部的一阶偏导数另外两个独立等式，就可求出实部和虚部的一阶偏导数表达式，从而求出解析函数.

解 对式 $u-v=\mathrm{e}^x(\cos y-\sin y)-x-y$ 两边分别关于 x,y 求偏导，得

$$\begin{cases} u_x-v_x=\mathrm{e}^x(\cos y-\sin y)-1, \\ u_y-v_y=\mathrm{e}^x(-\sin y-\cos y)-1. \end{cases}$$

利用柯西－黎曼条件，上式化为

$$\begin{cases} u_x+u_y=\mathrm{e}^x(\cos y-\sin y)-1, \\ u_y-u_x=\mathrm{e}^x(-\sin y-\cos y)-1. \end{cases}$$

上述方程的解为

$$u_x=\mathrm{e}^x\cos y, u_y=-\mathrm{e}^x\sin y-1.$$

方法一：利用偏积分可得 $u=\mathrm{e}^x\cos y+\varphi(y)$. 再关于 y 求导，得

$$u_y=-\mathrm{e}^x\sin y+\varphi'(y)=-\mathrm{e}^x\sin y-1,$$

从而 $\varphi(y)=-y+C$, 因此 $u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y-y+C$.

再由原方程可得 $v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y+x+C$.

$$\begin{aligned} f(z)&=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)+\mathrm{i}(x+\mathrm{i}\,y)+(1+\mathrm{i})C \\ &=\mathrm{e}^z+\mathrm{i}z+(1+\mathrm{i})C. \end{aligned}$$

最后由 $f(0)=1$ 得 $C=0$, 所以 $f(z)=\mathrm{e}^z+\mathrm{i}z$.

方法二：利用导函数表达式

$$\begin{aligned} f'(z)&=u_x-\mathrm{i}u_y=\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y+1 \\ &=\mathrm{e}^z+1. \end{aligned}$$

积分得 $f(z)=\mathrm{e}^z+\mathrm{i}z+c$, 由 $f(0)=1$ 得 $C=0$, 所以 $f(z)=\mathrm{e}^z+\mathrm{i}z$.

例题 2. 17 计算 $\mathrm{Ln}(-1), \mathrm{Ln}(\mathrm{i})$ 和 $\mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$ 及其主值.

解

$$\mathrm{Ln}(-1)=\ln|-1|+\arg(-1)\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}=(2k+1)\pi\mathrm{i},\quad \ln(-1)=\pi\mathrm{i}.$$

$$\mathrm{Ln}(\mathrm{i})=\ln|\mathrm{i}|+\arg(\mathrm{i})\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\mathrm{i},\quad \ln\mathrm{i}=\frac{\pi}{2}\mathrm{i}.$$

$$\mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=\ln|1+\sqrt{3}\mathrm{i}|+\arg(1+\sqrt{3}\mathrm{i})\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}=\ln 2+\left(2k+\frac{1}{3}\right)\pi\mathrm{i},$$

$$\ln(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=\ln 2+\frac{\pi}{3}\mathrm{i}.$$

例题 2.18 设 $z=(1-\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$，求 z 的主值的模.

解 因为

$$z=(1-\mathrm{i})^{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}(1-\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\ln|1-\mathrm{i}|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}(1\text{-}\mathrm{i})\right]}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\ln\sqrt{2}-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}+2k\pi\mathrm{i}\right]},$$

所以 z 的主值的模为

$$|z|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\ln\sqrt{2}-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}+2k\pi\mathrm{i}\right]}\right|=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}.$$

例题 2.19 求解下列复方程：

（1）$\cos z=\mathrm{i}$；　　　　（2）$\sinh z+\mathrm{i}=0$.

解 （1）由 $\cos z=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}=\mathrm{i}$ 得 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 满足方程 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})^2-2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+1=0$，解得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\frac{2\mathrm{i}\pm\sqrt{(-2\mathrm{i})^2-4}}{2}=(1\pm\sqrt{2})\mathrm{i},$$

从而

$$z=-\mathrm{i}\mathrm{Ln}[(1\pm\sqrt{2})\mathrm{i}]=-\mathrm{i}[\ln(\sqrt{2}\pm 1)+\mathrm{i}(2n\pi\pm\frac{\pi}{2})].$$

得到两组解：

$$z_n^{(1)}=2n\pi+\frac{\pi}{2}-\ln(1+\sqrt{2})\mathrm{i},\ z_n^{(2)}=2n\pi-\frac{\pi}{2}-\ln(\sqrt{2}-1)\mathrm{i},\ \mathrm{n}=0\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

（2）由 $\sinh z=\dfrac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2}+\mathrm{i}=0$ 得 e^{z} 满足方程 $(\mathrm{e}^{z})^2+2\mathrm{i}\mathrm{e}^{z}-1=(\mathrm{e}^{z}+\mathrm{i})^2=0$，

解得 $\mathrm{e}^{z}=-\mathrm{i}$，从而

$$e^z=\mathrm{Ln}(-i)=\ln|-i|+\arg(-i)+2n\pi i=i(2n-\frac{1}{2})\pi, n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

例题 2. 20　试证明：$w=\cos z$将直线$x=C_1$与直线$y=C_2$分别变成双曲线与椭圆.

证明 设$w=u+iv$，则由

$$\cos z=\cos x\cdot\cosh y-i\sin x\cdot\sinh y$$

得

$$u=\cos x\cdot\cosh y,\ \ v=-\sin x\cdot\sinh y,$$

于是，由$\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$得$\dfrac{u^2}{\cos^2 x}-\dfrac{v^2}{\sin^2 x}=1$. 由$x=C_1$，即得一组双曲线.

由$\cos^2 x+\sin^2 x=1$得$\dfrac{u^2}{\cosh^2 y}+\dfrac{v^2}{\sinh^2 y}=1$. 由$y=C_2$，即得一组椭圆.

例题 2.21*　已知静电场的复势为$w=\ln z$，试描述该电场.

解　设$z=\rho e^{i\theta}(\rho\neq 0, 0<\theta<2\pi)$，则$\ln z=\ln\rho+i\theta$. 若将解析函数的实部$u=\ln\rho$作为平面静电场的势，则电力线是$\theta=C$. 若将虚部$v=\theta$作为平面静电场的势，则电力线是$\rho=C$.

例题 2.22*　设平面流速场的复势为$f(z)=z^2$，试确定其流线、势线和速度.

解　因为$f(z)=z^2=x^2-y^2+2xyi$，所以，势函数和流函数分别为

$$\varphi(x,y)=x^2-y^2,\psi(x,y)=2xy\,.$$

速度为$\boldsymbol{v}(z)=\overline{f'(z)}=2\overline{z}$.

例题 2.23*　判断下列函数的多值性：

（1）　$\sin\sqrt{z}$.　（2）$\cos\sqrt{z}$.　（3）$\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.　（4）$\mathrm{Ln}\sin z$.

解

（1）多值函数. 因为$\sin\sqrt{z}=\sin\left[\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}\cdot e^{ik\pi}\right](k=0,1)$，且

$$\sin\left[\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}\cdot e^{i\pi}\right]=-\sin\left[\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}\right],$$

所以$\sin\sqrt{z}$为二值函数.

（2）单值函数. 因为$\cos\sqrt{z}=\cos\left[\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}\right](k=0,1)$，且

$$\cos\left[\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right]=\cos\left[\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{2}}\right],$$

所以$\cos\sqrt{z}$为单值函数.

（3）单值函数. 因为$\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=\dfrac{\sin\left[\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}\right]}{\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}}(k=0,1)$，且

$$\frac{\sin\left[\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right]}{\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}=\frac{\sin\left[\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{2}}\right]}{\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{2}}},$$

所以$\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$为单值函数.

（4）多值函数. 设$z=x+\mathrm{i}y$，则

$$\begin{aligned}\sin z&=\sin x\cos\mathrm{i}y+\cos x\sin\mathrm{i}y\\&=\sin x\cosh y+\mathrm{i}\cos x\sinh y.\end{aligned}$$

$$\mathrm{R}=|\sin z|=\sqrt{\sin^2 x\cosh^2 y+\cos^2 x\sinh^2 y}.$$

$$\arctan\sin z=\arctan\frac{\cos x\sinh y}{\sin x\cosh y}=\arctan\frac{\tanh y}{\tanh x}.$$

因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}\sin z&=\ln|\sin z|+\mathrm{i}\arg\sin z+2k\pi\mathrm{i}\\&=\ln R+\mathrm{i}\arctan\frac{\tanh y}{\tanh x}+2k\pi\mathrm{i}(k=0,\pm1,\cdots),\end{aligned}$$

所以$\mathrm{Ln}\sin z$为多值函数.