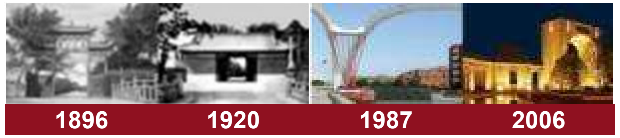


数 学 物 理 方 法 I

第7章　拉普拉斯变换

王　健

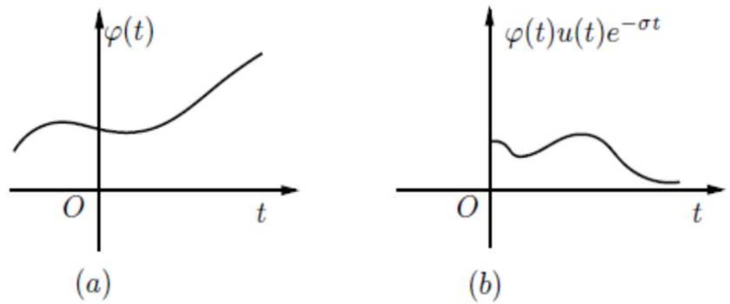
7.1 拉普拉斯变换的概念

7.1.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

- 常义傅里叶变换存在条件的苛刻性
- 广义傅里叶变换计算的复杂性
- 实际问题的限制性

对函数$\varphi(t)=f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\,(\sigma>0)$, 作傅里叶变换

$$\mathscr{F}[\varphi(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\sigma+i\omega)t}dt.$$



定义 设函数 $f(t), t\in[0,+\infty)$ 为实**(或复)**值函数，若对参数 $p=\sigma+\mathrm{i}\omega$,

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(p)=\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

在 ***p***平面的某一区域内收敛，则称其为 ***f*(t)** 的拉普拉斯变换

原像空间　　　　　　　　　　　　像空间

$$\mathscr{D}=\left\{f(t)\mid f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(p)]\right\} \quad \underset{\mathscr{L}^{-1}}{\overset{\mathscr{L}}{\rightleftarrows}} \quad \mathscr{R}=\left\{F(p)\mid F(p)=\mathscr{L}[f(t)]\right\}$$

- 傅里叶变换和拉普拉斯变换像函数

$f(t)\xrightarrow{\mathscr{F}}F(\omega)$　　实时域 $\longrightarrow$ 实频域

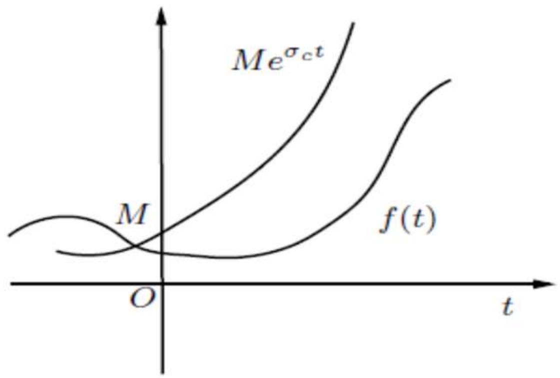
$f(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}F(p)$　　实时域 $\longrightarrow$ 复频域

7.1.2 拉普拉斯变换的存在性

定义 对于实变量的实值（或复值）函数 $f(t)$, 若存在 $M>0$ 及实数 σ_c, 使得 $|f(t)|\le M\mathrm{e}^{\sigma_c t}$, $\forall t\ge 0$, 则称 $f(t)$ 为指数级函数，σ_c 称为增长指数.

例题**7.1** 单位阶跃函数$u(t)$, 指数函数e^{kt}, 三角函数 $\sin kt, \cos kt$, 幂函数 t^n 等均为指数级函数.

- 指数级函数图像如图所示



定理 **(**存在性定理**)** 若函数 $f(t)$ 满足：**(1)** 在 $t \geq 0$ 的任一有限区间上分段连续； **(2)** 当 $t \to +\infty$ 时, $f(t)$ 为指数级函数. 则

$$F(p) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

在半平面 $Re(p) > \sigma_c$ 上存在且解析， 其中 σ_c 为增长指数.

存在性定理表明：

- 当 $f(t)$ 满足定理的条件时，$\lim\limits_{Rep\to+\infty} F(p)=0.$
- 增长指数不唯一
  称使不等式 $|f(t)|\le Me^{\sigma_c t}$ 成立的最小的增长指数 σ_0 为收敛坐标，$Rep=\sigma_0$ 为收敛轴.
- 定理中的条件为充分但非必要条件. 例如：$\mathscr{L}\left[t^{-\frac{1}{2}}\right]=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}.$

8.1.3 常用函数的拉普拉斯变换

例题**7.2** 求单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$ 的拉普拉斯变换.

例题7.3 求指数函数 $f(t)=\mathrm{e}^{kt}$ 的拉普拉斯变换.

例题7.4 求正弦函数 $f(t)=\sin kt$, 余弦函数 $f(t)=\cos kt$ 的拉普拉斯变换.

思考题 设函数 $f(t)$的傅里叶变换为 $F(\omega)=\pi\left[\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)\right]$, 求 $f(t)$ 的拉普拉斯变换.

例题7.5 求幂函数 $f(t)=t^{m}, m$ 为正整数的拉普拉斯变换.

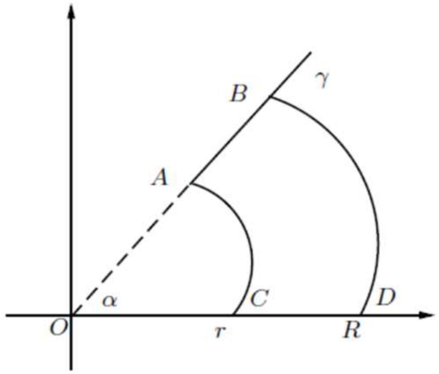
- 特殊函数 $\Gamma(x)$（**Gamma**函数） $\Gamma(x)=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \quad (x>0)$
- 基本性质 $\Gamma(1)=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}dt=1, \Gamma(x+1)=x\Gamma(x),$

m 为正整数 $\Gamma(m+1)=m\Gamma(m)=m!,$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^{2}}\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}.$$

例题**7.6** 求幂函数 $f(t)=t^m\,(m>-1)$ 的拉普拉斯变换.

需要利用留数定理　作变量代换 $u = pt$



$$\mathscr{L}[t^m]=\int_0^{+\infty} t^m e^{-pt}dt=\int_\gamma (\frac{u}{p})^m e^{-u}\frac{1}{p}du=\frac{1}{p^{m+1}}\int_\gamma u^m e^{-u}du,$$

其中 γ 是射线 $argu=\theta,-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}.$

如图建立积分围道. 设 A, B 点分别对应复数

$$re^{i\alpha},\quad Re^{i\alpha}(r<R),\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

令 $u=\rho e^{i\theta}\left(0\le\rho<+\infty,-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\overset{\frown}{BD}:u=Re^{i\phi},\quad \overset{\frown}{AE}:u=re^{i\phi},\quad 0\le\phi\le\alpha.$$

当 $r\to 0, R\to +\infty,\quad \int_{\gamma} u^m \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \int_{\overline{AB}} u^m \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} t^m \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

$$\mathscr{L}[t^m] = \frac{1}{p^{m+1}}\int_0^{+\infty} t^m \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(m+1)}{p^{m+1}} \quad (Re p > 0).$$

7.1.4 拉普拉斯变换积分下限

$$\mathscr{L}_+\left[f(t)\right] = \int_{0^+}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t, \qquad \mathscr{L}_-\left[f(t)\right] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \mathscr{L}_+\left[f(t)\right] + \int_{0^-}^{0^+} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

分别为 0^+型和0^- 型拉普拉斯变换.

默认拉普拉斯变换为 0^-型：

0^- 时刻表示外作用尚未加于系统，0^+外作用已加于系统.

例题**7.7** 求函数 $f(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\delta(t) + \delta'(t)(\alpha > 0)$ 的拉普拉斯变换.

7.2 拉普拉斯变换的性质

7.2.1 拉普拉斯变换的基本性质

性质7.1 （线性性质） 若 α,β 为任意常数，且

$$F(p)=\mathscr{L}[f(t)],G(p)=\mathscr{L}[g(t)]$$

则

$$\mathscr{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha F(p)+\beta G(p)\,,$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\alpha F(p)+\beta G(p)]=\alpha f(t)+\beta g(t).$$

例题7.8 求双曲正弦 $\sinh kt$ 和双曲余弦 $\cosh kt$ 的拉普拉斯变换.

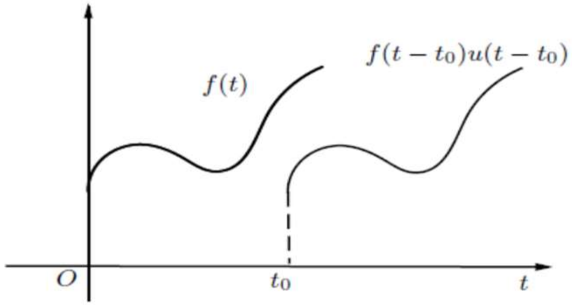
例题7.9 求像函数 $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p^2-4)}$ 的拉普拉斯逆变换.

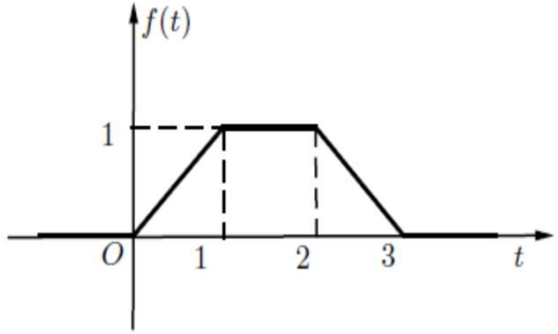
性质7.2（相似性质） 设 $F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$，$a>0$，则

$$\mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), \qquad \mathscr{L}^{-1}[F(ap]=\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right).$$

性质7.3（延迟性质） 设 $F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$, 对于任意非负实数 t_0, 有

$$\mathscr{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-pt_0}F(p)\,,\quad \mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-pt_0}F(p)]=f(t-t_0)u(t-t_0)\,.$$





例题7.10 求函数 $f(t)=\begin{cases}\cos t, & 0\le t\le 2\pi,\\ 0, & t<0\text{或}t>2\pi\end{cases}$ 的拉普拉斯变换.

例题7.11 求分段函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t, & 0\le t<1,\\ 1, & 1\le t<2,\\ 3-t, & 2\le t<3,\\ 0, & t\ge 3\end{cases}$ 的拉普拉斯变换

例题**7.12** 求像函数$F(p)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-3p}}{p^4+10p^2+9}$的拉普拉斯逆变换.

性质**7.4**（平移性质） 设$F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$, 对于任意复常数p_0, 有

$$F(p-p_0)=\mathscr{L}[\mathrm{e}^{p_0t}f(t)],\qquad \mathscr{L}^{-1}[F(p-p_0)]=\mathrm{e}^{p_0t}f(t).$$

利用基本函数的拉普拉斯变换及平移性，得

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-p_0t}\sin kt]=\frac{k}{(p+p_0)^2+k^2},\qquad \mathscr{L}[\mathrm{e}^{-p_0t}\cos kt]=\frac{p+p_0}{(p+p_0)^2+k^2},$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-p_0t}\sinh kt]=\frac{k}{(p+p_0)^2-k^2},\qquad \mathscr{L}[\mathrm{e}^{-p_0t}\cosh kt]=\frac{p+p_0}{(p+p_0)^2-k^2},$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-p_0t}t^m]=\frac{m!}{(p+p_0)^{m+1}}.$$

例题**7.13** 求函数$f(t)=\mathrm{e}^{-3t}\cos^2 t$的拉普拉斯变换.

例题**7.14** 求像函数 $F(p)=\dfrac{p+1}{9p^2+6p+5}$ 的拉普拉斯逆变换.

性质7.5（微分性质） 设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty]$ 上可微，$F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$， 则

$$\mathscr{L}[f'(t)]=pF(p)-f(0)\,,\quad F'(p)=-\mathscr{L}[tf(t)]\,.$$

一般地有：$\mathscr{L}[f^{(n)}]=p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0),$

若 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$, 则

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=p^nF(p),\quad F^{(n)}(p)=(-1)^n\mathscr{L}[t^nf(t)].$$

例题**7.15** 设 $f(t)=te^{-\alpha t}\sin\beta t$, 求 $\mathscr{L}[f(t)]$.

例题**7.16** 求像函数 $F(p)=\dfrac{p+2}{(p^2+4p+5)^2}$ 的拉普拉斯逆变换.

例题7.17 求像函数 $F(p)=\ln\frac{p^2-1}{p^2}$ 的拉普拉斯逆变换.

性质7.6 (积分性质) 设 $F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$, 则 $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right]=\frac{F(p)}{p}$.

若 $\int_p^{+\infty} F(s)\mathrm{d}s$ 收敛，则 $\int_p^{+\infty} F(s)\mathrm{d}s=\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$.

例题7.18 求函数 $\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t}{t}\mathrm{d}t$ 的拉普拉斯变换.

例题7.19 求函数 $f(t)=\frac{\sinh t}{t}$ 的拉普拉斯变换.

性质7.7(周期性质) 设周期函数 $f(t)$ 的周期为***T***，即

$$f(t+T)=f(t)(t>0)$$

则

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-pT}}.$$

例题**7.20** 设函数 $f(t)$ 是以 2π 为周期的函数，且在一个周期内的表达式为 $f(t)=\begin{cases}\sin t\,, & 0<t\le\pi\,,\\ 0\,, & \pi<t<2\pi\,.\end{cases}$ 求 $f(t)$ 的拉普拉斯变换.

7.2.2 拉普拉斯变换的卷积性质

定义 称式 $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(s)f_2(t-s)\mathrm{d}s$ 为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的卷积.

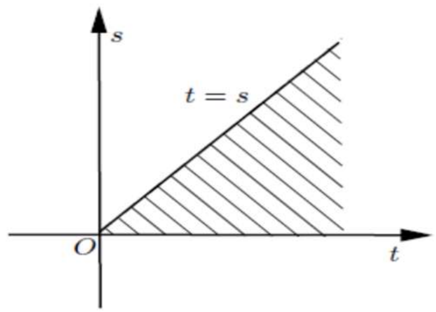
特别说明，总是假设当 $t<0$ 时，$f_1(t)=f_2(t)=0.$

例题**7.21** 求 $f_1(t)=t, f_2(t)=\mathrm{e}^t$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的卷积.

定理(卷积性质) 设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 满足拉普拉斯变换存在定理条件，$\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(p), \mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(p)$, 则 $f_1 * f_2$ 的拉普拉斯变换存在，且

$$\mathscr{L}[f_1 * f_2]=\mathscr{L}[f_1]\cdot\mathscr{L}[f_2]=F_1(p)\cdot F_2(p),\quad \mathscr{L}^{-1}[F_1(p)\cdot F_2(p)]=f_1(t)*f_2(t).$$

证明 设 $|f_1(t)|\le M\mathrm{e}^{ct}, |f_2(t)|\le M\mathrm{e}^{ct}$,



$$|f_1 * f_2|\le\int_0^t |f_1(s)|\,|f_2(t-s)|\,\mathrm{d}s$$

$$\le M^2\int_0^t \mathrm{e}^{cs}\mathrm{e}^{c(t-s)}ds\le M^2 t\mathrm{e}^{ct}\le M^2\mathrm{e}^{(c+1)t}$$

$$\mathscr{L}[f_1 * f_2]=\int_0^{+\infty}[f_1 * f_2]\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f_1(s)f_2(t-s)ds\right]\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\,.$$

交换积分次序，并作变换代换 $u=t-s$

$$\mathscr{L}[f_1 * f_2]==\int_0^{+\infty}f_1(s)\mathrm{e}^{-ps}\mathrm{d}s\cdot\int_0^{+\infty}f_2(u)\mathrm{e}^{-pu}\mathrm{d}u=F_1(p)F_2(p).$$

例题7.22 设 $f(t)=\int_0^t \sinh(t-s)\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$, 求 $\mathscr{L}[f(t)]$.

例题7.23 设 $F(p)=\dfrac{1}{p^2(1+p^2)}$, 求 $\mathscr{L}^{-1}[F(p)]$.

7.3 拉普拉斯逆变换

7.3.1 复反演积分公式

$$\mathscr{F}[f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=F(p)\quad (p=\sigma+\mathrm{i}\omega).$$

在 $f(t)$ 的连续点： $f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\sigma+\mathrm{i}\,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\ (t>0).$

两边同乘以 $\mathrm{e}^{\sigma t}$： $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\sigma+\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}\omega=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p,\quad t>0,$

其中积分路径 $(\sigma - i\infty, \sigma + i\infty)$ 为 $Rep > \sigma_0$ 内任一条平行于虚轴的直线.

当 ***t*** 为间断点时: $\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p, \quad t>0$.

7.3.2 利用留数定理求拉普拉斯逆变换

引理 设复变量函数 $F(p)$ 满足下列条件:

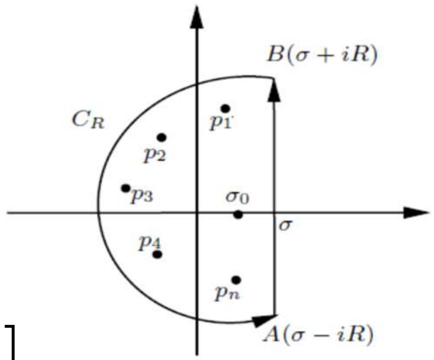
- 在左半平面内 $(\mathrm{Re}\, p < \sigma)$ 除有限个奇点外解析;
- 对于满足 $\mathrm{Re}\, p < \sigma$ 的 p,当 $|p| = \mathrm{R} \to +\infty$, $F(p)$ 一致地趋于零.

则当 $t > 0$ 时,有: $$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p = 0,$$

其中 $C_R : |p| = R, \mathrm{Re}(p) < \sigma$, 它是一个以点 $\sigma + i0$ 为圆心,R 为半径的圆弧.

定理 设 $F(p)=\mathscr{L}[f(t)], F(p)$ 仅有有限个奇点 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，且均位于直线 $Rep=\sigma>\sigma_0$ 的左侧，如果 $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)=0$，则当 $t>0$，

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(p)]=\sum_{k=1}^{n} Res[F(p)e^{pt}, p_k].$$



例题7.24 设 $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)}$，求 $\mathscr{L}^{-1}[F(p)]$.

例题7.25 设 $F(p)=\dfrac{p^2+2}{(p^2+1)^2}e^{-pa}(a>0)$，求 $\mathscr{L}^{-1}[F(p)]$.

注：当像函数中包含指数因子 $e^{\alpha p}$ 时，不能直接利用复反演公式否则会得出错误结果.

试分析以下推导是否正确：

$$\mathscr{L}^{-1}[F(p)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1+\mathrm{e}^{-2p}}{p^2}\right]=\operatorname{Re}s\left[\frac{1+\mathrm{e}^{-2p}}{p^2}\mathrm{e}^{pt},0\right]=\lim_{p\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\mathrm{e}^{pt}+\mathrm{e}^{(t-2)p}\right]$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[t\mathrm{e}^{pt}+(t-2)\mathrm{e}^{(t-2)p}\right]=2(t-2).$$

7.4 拉普拉斯变换的应用

7.4.1 求线性微分（积分）方程

求线性微分（积分）方程的一般步骤：

- 通过变换，把原问题转化为像函数的代数方程
- 求像函数的代数方程，解出像函数
- 对像函数求逆变换，得方程的解

例题**7.26** 求二阶常微分方程初始值问题

$$\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 2\mathrm{e}^{t}\cos t, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

例题7.27 利用拉普拉斯变换求微分、积分方程

$$\begin{cases} x'(t)+3x(t)+\int_0^t u(s)\cdot x(t-s)\,\mathrm{d}s+\int_0^t x(s)\mathrm{d}s=\mathrm{e}^{-2t}-t, \\ x(0)=0 \end{cases}$$

$$X(p)=\frac{p-2}{p(p+2)^2}.$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(p)]=2t\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{2}.$$

例题7.28 设函数 $f(t)=\cos t\cdot u(t-2\pi)$ 其中 $u(t)=\begin{cases} 1, & t>0, \\ 0, & t\le 0. \end{cases}$

利用拉普拉斯变换求解初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+\int_0^t y(t-s)\sin(s)\mathrm{d}s-y(t)=f(t), \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

7.4.2 用拉普拉斯变换求广义积分

类型1： 型如 $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$ 的广义积分.

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t = \lim_{p \to 0} \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t = \lim_{p \to 0} \int_p^{+\infty} F(s) \mathrm{d}s.$$

或利用拉普拉斯变换的定义

例题7.29 利用拉普拉斯变换计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-3t} \sin 3t}{t} \mathrm{d}t$

类型2：形如 $\int_0^{+\infty} t^n f(t) \mathrm{d}t$ 的广义积分

利用像函数的微分性

$$\int_0^{+\infty} t^n f(t) \mathrm{d}t = (-1)^n \lim_{p \to 0} F^{(n)}(p).$$

例题7.30 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t\mathrm{d}t.$

类型3： 形如 $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t\mathrm{d}t, \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t\mathrm{d}t(\alpha,\beta>0)$ 积分

考虑积分 $I=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}dt=\mathscr{L}\left[f(t)\right]\Big|_{\alpha-\mathrm{i}\beta}=F(\alpha-\mathrm{i}\beta).$

从而

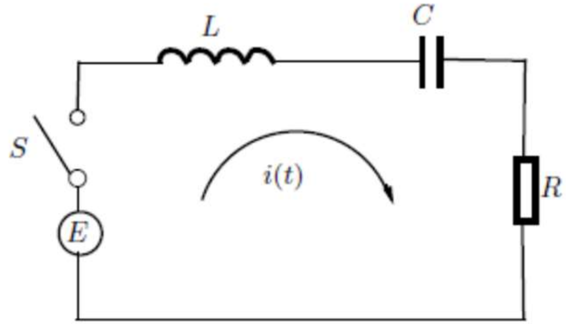
$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t\mathrm{d}t=\operatorname{Im}F(\alpha-\mathrm{i}\beta),$$
$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t\mathrm{d}t=\operatorname{Re}F(\alpha-\mathrm{i}\beta).$$

例题 7.31 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t\mathrm{d}t,\quad (\alpha,\beta>0).$

例题7.32 用拉普拉斯变换性质，计算广义积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-3t}\cdot\cosh t\cdot\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

例题**7.33** 设**RLC**串联电路接上电压 E 的直流电源（如图所示），设初始时刻 $t=0$ 的电路中的电流 $i_0=0$, 电容 C 上没有电量即 $q_0=0$. 求电路中电流 $i(t)$ 的变化规律.



解 根据基尔霍夫定律，有

$$u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)=E,$$

其中 $$u_R(t)=Ri(t),\ u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t),\ i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}.$$

又 $i_0=q_0=0$, 则 $$Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(s)\,\mathrm{d}s=E,\ i(0)=0.$$

记 $I(p)=\mathscr{L}[i(t)]$, 则

$$RI(p)+\frac{1}{Cp}I(p)+LpI(p)=\mathscr{L}[E]=\frac{E}{p}.$$

谢 谢！