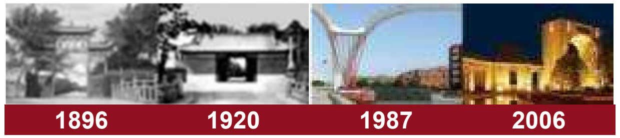


数学物理方法 I

第5章　留数及其应用

王　健

5.1 留数及其计算

引例 两个积分的计算

$$\oint_{|z|=\frac{1}{3}} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} \mathrm{d}z, \qquad \oint_{|z|=2} \sin\frac{2}{z\text{-}1}\mathrm{d}z.$$

5.1.1 留数的概念

定义5.1 设函数 $f(z)$ 在 $0<\left|z-z_0\right|<R$ 内解析，点 z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点，***C***是任意正向圆周 $\left|z-z_0\right|=\rho<R$，则积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

的值称为$f(z)$在点 z_0 处的留数，记为 $\mathrm{Re}\,s\left[f(z),\, z_0\right]$.

利用 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内的罗朗展开式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n,\ \ 0<\left|z-z_0\right|<R,$$

可得

定理5.1 设点 z_0 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点，则

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right]=c_{-1},$$

其中 c_{-1} 为 $f(z)$ 在 z_0 处罗朗展开式负幂项 $(z-z_0)^{-1}$ 系数.

例题5.1 利用罗朗级数计算留数:

(1) $\operatorname{Res}\left[\dfrac{\sin z}{z}, 0\right]$;　　(2) $\operatorname{Res}\left[z\mathrm{e}^{\frac{1}{z-\mathrm{i}}}, \mathrm{i}\right]$.

定义5.2设 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点, C是 $r<|z|<+\infty$ 内任意正向圆周 $C:|z|=R>r$, 则积分 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$ 的值称为$f(z)$在点 ∞处的留数, 记为 $\mathrm{Re}\,s\left[f(z),\infty\right]$.

定理5.2 设点∞是$f(z)$的一个孤立奇点，则

$$\mathrm{Re}\,s\left[f(z),\infty\right]=-c_{-1},$$

其中c_{-1} 为 $f(z)$ 在∞ 处罗朗展开式负幂项 z^{-1} 系数.

例题5.2 计算留数 (1) $\mathrm{Re}\,s\left[\dfrac{1}{1-z},\infty\right]$;

(2) $\mathrm{Re}\,s\left[\sin z-\cos z,\infty\right]$; (3) $\mathrm{Re}\,s\left[\dfrac{1-\cos z}{z^{2n+1}},\infty\right]$, $n=1,2,\cdots$.

5.1.2 留数的计算

留数计算除利用罗朗展开式外，还可利用下述方法计算.

定理5.3 设 z_0 为 $f(z)$ 在复平面上的可去奇点，则

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right] = 0.$$

注1: 若 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点， $\operatorname{Res}\left[f(z),\infty\right]$ 不一定为零.

例如: $z=\infty$ 为函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 的可去奇点，但

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{1-z},\infty\right]=1.$$

注2： 若 z_0 为复平面上的点，且 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 为有限值，则

$$\mathrm{Res}\left[f(z),\, z_0\right] = 0.$$

定理5.4 设 z_0 为 $f(z)$ 在复平面上的 $\boldsymbol{m}$ 阶极点，则

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m+p-1)!} \lim_{z-z_0} \frac{\mathrm{d}^{m+p-1}}{\mathrm{d}z^{m+p-1}} \left[(z-z_0)^{m+p} f(z)\right],$$

其中 $\boldsymbol{p}$ 为非负整数.

推论5.1 若 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点，则

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z-z_0} (z-z_0) f(z).$$

推论5.2 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}, z_0$ 为 $f(z)$ 的一阶极点，则

$$\operatorname{Re} s[f(z),z_0]=\frac{P(z)}{Q'(z)}.$$

例题5.3 求下列函数在指定奇点处的留数:

(1) $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}, z_1=1, z_2=-1$; (2) $f(z)=\dfrac{z}{\sin^3 z}, z=0$;

(3) $f(z)=\dfrac{z\sin z}{(1-e^z)^3}, z=0$; (4) $f(z)=\tan \pi z,\ z=k+\dfrac{1}{2}, k\in Z.$

思考题: 设函数 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 处解析，且 $\varphi'(a)\neq 0, \xi=\varphi(a)$ 为函数 $f(\xi)$ 的一阶极点. 已知 $\operatorname{Re} s\left[f(\xi),\varphi(a)\right]=A$, 求

$$\operatorname{Re} s\left[f(\varphi(z)),a\right].$$

定理5.5 设 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则

$$\operatorname{Re}s[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right].$$

定理5.6 设 $z=\infty$是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，如果 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=A$，则

$$\operatorname{Re}s[f(z),\infty]=-A.$$

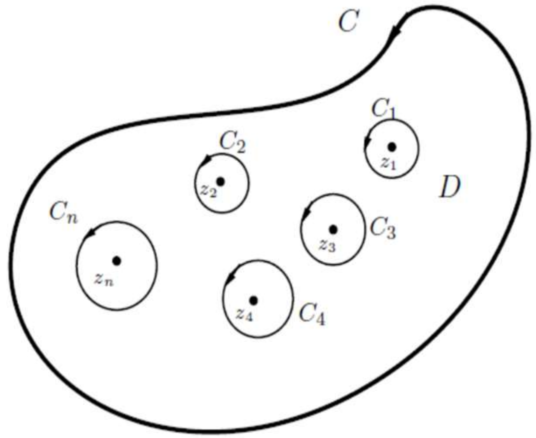
例题5.4 求留数 $\operatorname{Re}s\left[\dfrac{z^2}{(1-z)^3}e^{\frac{1}{z}},\infty\right]$.

例题5.5 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}e^{\frac{1}{1-z}}$ 在扩充复平面上孤立奇点处的留数.

5.1.3 留数定理

定理5.7 设C为一条正向简单闭曲线，若函数 $f(z)$在C上连续，在C所围区域 D内除去有限个奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$外解析，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,s[f(z), z_k].$$



定理5.7 称为第一留数定理.

在扩充复平面上有如下第二留数定理

定理5.8 若函数 $f(z)$ 在扩充复平面上除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \infty$ 外解析，则

$$\sum_{k=1}^{n} Res[f(z), z_k] + Res[f(z), \infty] = 0.$$

求复变函数沿闭曲线的积分通常可用留数计算. 对于利用留数求积分 $I=\oint_C f(z)\mathrm{d}z$, 关键在于确定积分曲线***C***内所包含的被积分函数孤立奇点，并求出孤立奇点处的留数. 对于以下两种情况, 可利用第二留数定理, 化为求***C***外孤立奇点和 ∞ 处留数的计算: **(1)** ***C***外孤立奇点的个数少于**C**内孤立奇点个数; **(2)** ***C***外孤立奇点处留数容易计算.

例题**5.6** 计算下列各积分

(1) $I=\oint_C \dfrac{1}{z^3(z-\mathrm{i})}\mathrm{d}z$, 其中***C***为正向圆周 $|z|=2$;

(2) $I=\oint_C \tan\pi z\mathrm{d}z$, 其中***C***为正向圆周 $|z|=n$ **(*n*为正整数).**

例题**5.7** 计算积分 $\oint_{|z|=R}\dfrac{z}{\mathrm{e}^{2\pi i z^2}-1}\mathrm{d}z$, 其中 $\sqrt{n}<R<\sqrt{n+1}$,

n为已知的正整数.

例题**5.8** 计算下列各积分

(1) $\oint_{|z|=4}\dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}\mathrm{d}z$;　(2) $\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\dfrac{z^5\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{(1-z)^3(z+1)^2(z-2)}\mathrm{d}z$.

例题**5.9*** 计算积分 $\oint_{|z|=2}f(z)\mathrm{d}z$, 其中 $f(z)=\dfrac{1}{z\sin\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)}$.

分析 $f(z)$在 $|z|=2$ 内有**1**阶极点：

$z_k=\sqrt{\dfrac{1}{k\pi-1}}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 和非孤立奇点 $z=0$.

5.2 留数的应用

5.2.1 有理三角函数的积分 $I=\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$，其中函数 $R(\cos\theta,\sin\theta)$是 $\cos\theta,\sin\theta$ 的有理函数.

作变换 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

记 $f(z)=R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}$，若 $f(z)$在积分闭路 $|z|=1$ 上无奇点，在$|z|<1$内的奇点为 $z_k(k=1,2,\cdots,n)$，则由第一留数定理

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,s[f(z),z_k]$$

例题5.10 计算下列各积分 (1) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{5+3\cos x}\mathrm{d}x.$

(2) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin m\theta}{13+5\sin\theta}\mathrm{d}\theta$, 其中$\boldsymbol{m}$为正整数**.**

(3) $\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta.$ (4) $\int_0^{\alpha}\frac{1}{\left(5-3\sin\frac{2\pi\varphi}{\alpha}\right)^2}\mathrm{d}\varphi\ (\alpha>0).$

解 **(1)** $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{5+3\cos x}\mathrm{d}x=\oint_{|z|=1}\frac{i(z^2-1)^2}{2z^2(3z^2+10z+3)}\mathrm{d}z$

(2) 记 $I_1=\int_0^{2\pi}\frac{\cos m\theta+\mathrm{i}\sin m\theta}{13+5\sin\theta}\mathrm{d}\theta=2\oint_{|z|=1}\frac{z^m}{(5z+\mathrm{i})(z+5\mathrm{i})}\mathrm{d}z$

(3) 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}$, $\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2+6z+1}\mathrm{d}z$

注: (1) 当被积分函数中含有 $\sin^m\theta, \cos^m\theta$ 项时，会出现 z 的高次方项，增加了计算的繁复性，此时利用三角函数的倍角公式，并作变换 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$.

(2) 在应用留数定理时，一般只计算 $|z|=1$内的奇点处留数，也可利用第二留数定理转化为 $|z|=1$ 外奇点处的留数.

5.2.2 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$

复习：广义积分的柯西主值

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x.$$

引理5.1 (大圆弧引理) 设 $f(z)$在 $z=\infty$ 的邻域内连续，在 $\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$ 内，当 $z\to\infty$ 时一致成立 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=K$, 则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1),$$

其中 C_R 为圆弧 $|z|=R,\theta_1\le\arg z\le\theta_2$.

证明：对于任给 $\varepsilon>0$, 由已知条件，存在 $R_0(\varepsilon)>0$, 当 $R>R_0$ 时, 有 $\left|zf(z)-K\right|<\dfrac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}, z\in C_R$.

因为 $\mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)=K\displaystyle\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z}$, 从而有

$$\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z-\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)K\right|=\left|\int_{C_R}\frac{zf(z)-K}{z}\mathrm{d}z\right|\le\frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}\frac{l}{R}=\varepsilon.$$

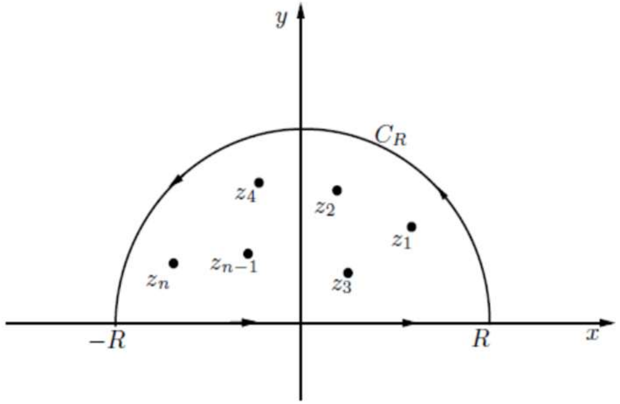
定理5.9 设 $f(z)$在上半平面有有限个孤立奇点 $z_k(k=1\sim n)$,

在实轴上无奇点，且在上半平面内有

$$\lim_{z\to\infty} zf(z)=0,$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}s[f(z),z_k].$$



证明：取上半圆周 $C_R: z=\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta}(0\le\theta\le\pi)$ 作辅助曲线.

由留数定理得

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}s[f(z),z_k],$$

取极限 $R\to+\infty$，由引理**5.1** $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=0$，即得结论.

由引理**5.1**知，如果存在 $\alpha>1, M>0$，使得 $|f(z)|\le \dfrac{M}{|z|^{\alpha}}$，则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=0.$$

因此，有如下定理

定理5.10 设 $P(x), Q(x)$ 为多项式，且 $Q(x)$ 的次数比 $P(x)$的次数高两次及以上，$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} Res[f(z), z_k],$$

其中 $z_k(k=1,2,\cdots,n)$为 $f(z)$ 在上半平面上的孤立奇点.

思考题：定理5.9和5.10中，是否可以用 $f(z)$ 在下半平面中奇点处的留数？若可以，定理中的条件如何修改？

例题5.11 计算积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+2}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x.$

例题5.12 计算积分 $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x.$

思考题：高等数学中用什么方法计算上题？

例题5.13* 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)\cosh(\pi x/2)}\mathrm{d}x.$

注：$f(z)=\frac{1}{(1+z^2)\cosh(\pi z/2)}$ 在上半平面有无穷多个奇点！

5.2.3 含三角函数的广义积分

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x \text{ 或 } I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x \quad (\lambda>0).$$

归结为计算积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x.$

引理5.2 (约当引理) 设$f(z)$在 $z=\infty$ 的邻域内连续，在 $0\le\arg z\le\pi$ 内，当 $z\to\infty$ 时一致成立 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{d}z=0\ (\lambda>0),$$

其中 C_R 是原点为心，***R***为半径的上半圆周.

证明： 令 $z=\mathrm{R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0\le\theta\le\pi)$，由 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$ 得

$\forall \varepsilon > 0, \exists R_0(\varepsilon) > 0,$ 使当$\mathrm{R} > R_0$ 时, 有 $\left|f(z)\right| < \varepsilon, z \in C_R.$

从而 $\left|f(\mathrm{Re}^{i\theta})\right| < \varepsilon.$ 由

$$\left|\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{i}\right| = R, \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\,\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta}}\right| = \left|\mathrm{e}^{-\lambda R\sin\theta + \mathrm{i}\lambda R\cos\theta}\right| = \mathrm{e}^{-\lambda R\sin\theta},$$

得

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi} f(\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\,\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| = 2R\varepsilon\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\lambda R\sin\theta}\mathrm{d}\theta.$$

由约当不等式 $\quad \dfrac{2\theta}{\pi} \le \sin\theta \le \theta \left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right),$

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{d}z\right| \le 2R\varepsilon\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}\lambda R\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= 2R\varepsilon \left[-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2\lambda R}{\pi}\theta}}{\frac{2\lambda R}{\pi}} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\varepsilon}{\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda R}\right) < \frac{\pi\varepsilon}{\lambda},$$

因此

$$\lim_{R\to+\infty}\int_C f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{d}z = 0.$$

思考题：若 $\lambda < 0$ 时，约当引理中应有何条件和结论？

若 $\lambda = -\mathrm{i}\mu, \mu$ 为实数，被积函数中的指数因子变为 $\mathrm{e}^{\mu z}$，当 $\mu > 0$ 或 $\mu < 0$ 时，引理又有何条件和结论?

定理5.11 设 $f(z)$ 在上半平面有有限个孤立奇点 $z_k(k=1\sim n)$，在实轴上无奇点，且在上半平面内有 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,s[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}, z_k].$$

定理5.12 设 $P(x), Q(x)$ 为多项式，且 $Q(x)$ 的次数比 $P(x)$的次数高一次及以上，$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} Res[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}, z_k],$$

其中 $z_k(k=1,2,\cdots,n)$为 $f(z)$ 在上半平面上的孤立奇点.

例题5.14 计算广义积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+4)(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

例题5.15 计算广义积分 $I(\lambda)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos\lambda x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x,$

其中λ 为实参数.

利用留数定理计算实积分, 可分为以下步骤

(1) 根据实积分被积函数 $f(x)$ 的特点, 作以相应的复变函数

$F(z)$, 且 $F(z)=f(x), x\in[a,b]$, 或 $F(z)$的实部或虚部之一

等于$f(x)$.

(2) 选取一条或几条按段光滑的辅助曲线 Γ, 使其与实线段

$[a,b]$构成闭曲线并围成区域***D***，使 $F(z)$在***D***内除有限个孤立奇点 $z_k(k=1\sim n)$ 外处处解析，并应用留数定理

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}\,x+\int_\Gamma F(z)\,\mathrm{d}\,z=2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,s[F(z),z_k].$$

(3) 计算 $F(z)$ 沿辅助曲线的积分 $\int_\Gamma F(z)\,\mathrm{d}\,z.$

(4) 计算 $F(z)$ 在***D***内奇点 z_k 处的留数 $\mathrm{Re}\,s[F(z),z_k],(k=1\sim n).$

若实积分是无穷积分，可取极限，并求出 $\int_\Gamma F(z)\,\mathrm{d}\,z$ 的极限值.

思考题：若用留数定理计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos x}{\cosh x}\mathrm{d}x$, 应如何选取积分路径?

5.2.4* 实轴上有奇点的积分

引理5.3 (小圆弧引理) 设 $f(z)$在 $z=a$ 的去心邻域内连续，在 $\theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2$ 内，当 $z \to \infty$ 时一致成立

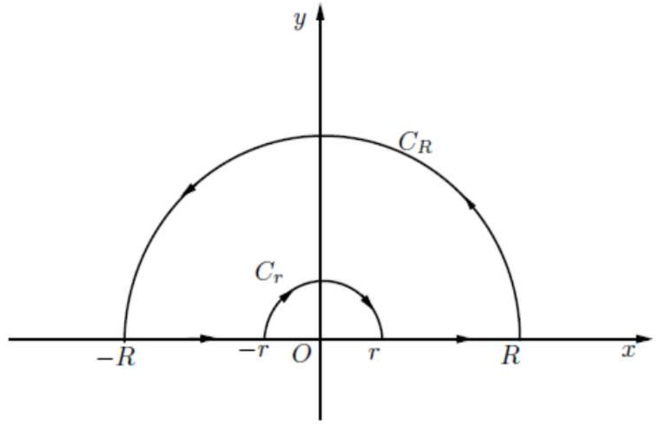
$$\lim_{z\to\infty}(z-a)f(z)=K,$$

则 $\displaystyle\lim_{\delta\to\infty}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)$，其中 C_δ 为圆弧

$$|z-a|=\delta,\theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2.$$

例题5.16 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$

考虑函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$ 沿图示之闭曲线



路径C的积分. 根据柯西积分定理得 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$

$$\int_r^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z + \int_{-R}^{-r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x - \int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z = 0$$

其中 $C_R : z = \mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta}$, $C_r : z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0 \le \theta \le \pi, r < R)$.

由约当引理得 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z = 0.$

由小圆弧引理得 $\lim\limits_{r\to 0}\int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z = \pi\mathrm{i}.$

从而

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

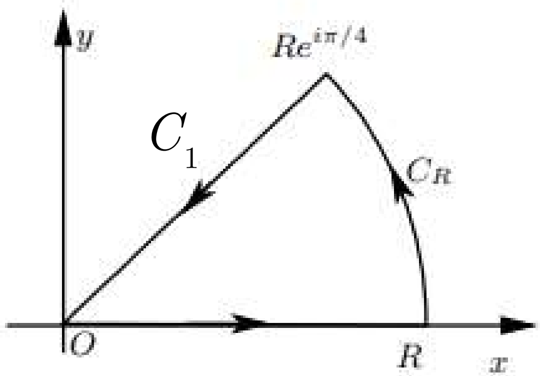
上述积分称为狄利克莱积分，其物理意义源于阻尼振动.

最后介绍物理上常见两个广义积分

已知欧拉—泊松积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, a > 0.$

例题**5.17** 费涅耳**(Frensnel)**积分

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x, \int_0^{+\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x.$$



此积分源于光的折射.

解 取积分曲线为 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ 角形域，如图所示. $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$

$$\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_{C_R} e^{iz^2}dz+\int_{C_1} e^{iz^2}dz=0.$$

$$\int_{C_1} e^{iz^2}dz=\int_R^0 e^{ir^2 i}e^{\pi i/4}dr=-e^{\pi i/4}\int_0^R e^{-r^2}dr,$$

$$\left|\int_{C_R} e^{iz^2}dz\right|=\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}iRe^{i\theta}d\theta\right|$$

$$\le \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\theta}Rd\theta\ (\sin 2\theta\ge 4\theta/\pi, 0\le\theta\le\pi/4)$$

$$\le \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-4R^2\frac{\theta}{\pi}}d\theta=\frac{\pi}{4R}[1-e^{-R^2}]\xrightarrow{R\to\infty}0.$$

因此，当 $R\to+\infty$ 时，积分变为

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\pi i/4} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i).$$

比较实部和虚部，得

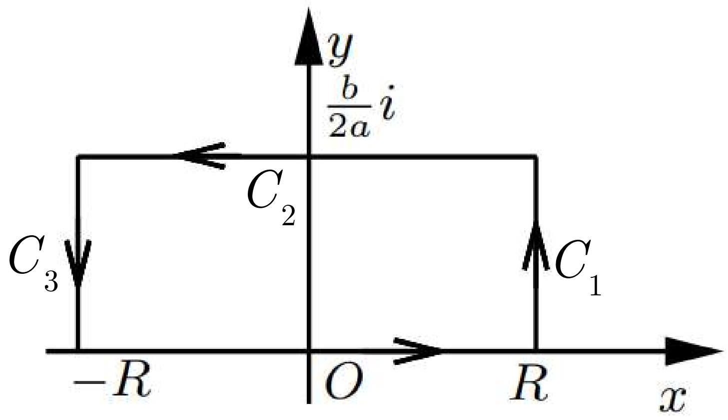
$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

例题5.18 泊松积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \mathrm{d}x, a > 0.$

此积分源于热传导问题.

解 设 $b > 0$, 被积函数 $f(z) = e^{-az^2}$,

积分路径如右图所示.



由柯西积分定理得

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x + \int_{C_1} \mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z + \int_{C_2} \mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z + \int_{C_3} \mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z = 0.$$

在 C_1 上，$z = R + \mathrm{i}y, 0 \le y \le \dfrac{b}{2a}$，$z^2 = R^2 - y^2 + 2\mathrm{i}Ry$，

有 $|f(z)| = \mathrm{e}^{-aR^2+ay^2} \le \mathrm{e}^{-aR^2+b^2/4a}$. 从而

$$\left|\int_{C_1} \mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z\right| \le \mathrm{e}^{-aR^2+b^2/4a} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

同理可得 $\left|\int_{C_3} \mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z\right| \xrightarrow{R\to\infty} 0.$

在 C_2 上，$z = x + \mathrm{i}\dfrac{b}{2a}, x : R \to -R$，有

$$\int_{C_2} \mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}} \int_{R}^{-R} \mathrm{e}^{-ax^2-\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x$$

令 $R\to+\infty$, 得 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2-\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x=0.$

利用 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, a>0,$ 得

$$\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}(\cos bx-\mathrm{i}\sin bx)\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

因此 $$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

谢 谢！