数学物理方法 I 大作业

一、解答题（每题 15 分，共 75 分）

1. 考虑 z 平面上一个半径为 a，圆心在原点的圆周 C. 证明：变换 $\xi = z + \dfrac{a^2}{z}$ 将该圆周变换成直线段 L，左端点位于 $\xi = -2a$，右端点位于 $\xi = 2a$.

2. 设复变函数 $f(\xi)$ 在闭曲线 C 上连续，在 C 外部解析，且在无穷远处为常数，即 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = K$. 证明：（1）如果点 z 在 C 外部，则 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = f(z) - K$;

（2） 如果点 z 在 C 内部，则 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = -K$.

3. 设 $f(z) = \dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{B_n}{n!}z^n$，证明：

（1）$B_{2n+1} = \dfrac{(2n+1)!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\dfrac{f(z)}{z^{2n+2}}\mathrm{d}z, n = 0,1,2,\cdots$；（2）当 $n \geq 1$ 时，$B_{2n+1} = 0$；

(3) 求 B_2, B_4, B_6.

4. 应用留数定理计算广义积分：$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

5. 计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x^2)\cosh(\pi x/2)}\mathrm{d}x$.（注：函数 $\dfrac{1}{(1+z^2)\cosh(\pi z/2)}$ 在上半平面有无穷多个奇点）

二、叙述解析函数理论在物理上的应用，并加以说明.（25 分）