第三章 复变函数的积分

3.1 内容归纳

3.1.1 内容提要

复变函数的积分；柯西定理；柯西积分公式和高阶导数公式.

3.1.2 基本概念

1. 设C为一条以A为起点，B为终点的有向光滑曲线(或逐段光滑曲线)，其方程为

$$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),\left[t:\alpha\to\beta,A=z(\alpha),B=z(\beta)\right]$$

函数$f(z)$定义在曲线C上. 沿曲线C用一组分点$A=z_0,z_1,\cdots,z_n=B$将曲线C分成n个小弧段，在每个弧段$z_{k-1}z_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$上任意取一点ζ_k(如图 3.1 所示)，并作部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

其中$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$. 记ΔS_k为第k个小弧段$z_{k-1}z_k$的长度，$\delta=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta S_k$. 当$n$无限增大，且$\delta$趋于零时，若不论对$C$的分法及$\zeta_k$的选取如何，和式$S_n$存在唯一的极限，则称这处极限为函数$f(z)$沿曲线$C$的积分，记为

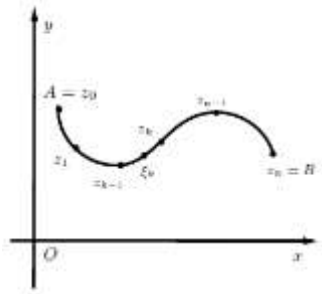


图 3.1

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

若C为封闭曲线，则沿此闭曲线的积分记为$\oint_C f(z)dz$.

2. 设$f(z)$在单连通区域D内连续，若D内的一个函数$\Phi(z)$满足条件

$$\Phi'(z)=f(z),$$

则称$\Phi(z)$为$f(z)$在D内的一个原函数. 称$f(z)$的原函数的全体为$f(z)$的不定积分.

3.1.3 主要结论

1. 复变函数的计算

（1）设函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在逐段光滑的曲线$C$上连续，则$f(z)$沿曲线$C$的积分存在，且有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u(x,y)\mathrm{d}x-v(x,y)\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C u(x,y)\mathrm{d}y+v(x,y)\mathrm{d}x.$$

（2）设曲线C可由参数形式表示：$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),\ t:\alpha\to\beta$，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.$$

2. 积分的基本性质

（1）$\int_C kf(z)\mathrm{d}z=k\int_C f(z)\mathrm{d}z$，($k$为常数).

（2）$\int_C\left[f(z)\pm g(z)\right]\mathrm{d}z=\int_C f(z)\mathrm{d}z\pm\int_C g(z)\mathrm{d}z$.

（3）$\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z=-\int_C f(z)\mathrm{d}z$,其中$C^-$表示与曲线$C$方向相反的同一条曲线.

（4）$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$,其中$C$由$C_1$与$C_2$首尾相接而成.

（5）若函数$f(z)$在曲线C上满足$\left|f(z)\right|\le M$,且曲线的长度为L，则

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_C|f(z)||\,\mathrm{d}z\,|\le ML.$$

3. 柯西定理及其推论

（1）设函数$f(z)$在单连通区域D内解析，C为D内的任意一条闭曲线，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

（2）设函数$f(z)$在单连通区域D内解析，则积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$只与曲线C的起点和终点有关，而与曲线C的路径无关.

（3）设$f(z)$在单连通区域D内解析，z_0为D内一定点，z为D内动点，则函数

$$F(z)=\int_{z_0}^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

在D内解析，且$F'(z)=f(z)$.

（4）若函数$f(z)$在区域D内解析，$\Phi(z)$是$f(z)$在D内的一个原函数，z_1,z_2是D内的两点，则$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz=\Phi(z_2)-\Phi(z_1)$.

（5）设D是由边界曲线$\Gamma=C+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$所围成的多连通区域，其中简单闭曲线$C_1,C_2,\cdots,C_n$在简单闭曲线$C$内，它们互不包含也互不相交，若$f(z)$在$D$内解析，

在Γ上连续，则

$$\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

或

$$\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z.$$

（6）若函数$f(z)$在区域D内除$z_1, z_2, \cdots, z_n$外都解析，C为D内任何一条将$z_k(k=1,2,\cdots,n)$包围在内的正向闭曲线，则

$$\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z.$$

4. 柯西积分公式、高阶导数公式及其推论

（1）**单连通区域上柯西积分公式** 设闭曲线C是单连通区域D的边界，若函数$f(z)$在D内解析，在C上连续，则对于D内的任何一点z，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

（2）**多连通区域上柯西积分公式** 设$C_1, C_2, \cdots, C_n$为简单闭曲线(互不包含且互不相交)，C为包含曲线$C_k(k=1,2,\cdots,n)$的闭曲线，曲线$\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$所包围的区域为$D$，且$f(z)$在区域$D$内解析，则对于$D$内的任何一点$z$，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

（3）**柯西高阶导数公式** 设函数$f(z)$在闭曲线C所围的区域D的解析，在C上连续，则函数$f(z)$在D内有各阶高阶导数，它们都是D内的解析函数，且其n阶导数

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta, n = 1, 2, \cdots.$$

（4）**莫累拉（Morera）定理** 设$f(z)$在单连通区域D内连续，若对D内沿任一闭曲线的C都有

$$\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

则函数$f(z)$在D内解析.

（5）**平均值公式** 设$f(z)$在C：$|z-z_0|=R$所围区域内解析，且在C上连续，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\mathrm{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

（6）**柯西不等式** 设$f(z)$在$C:|z-z_0|=R$所围区域内解析，且在C上连续，则

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|\le \frac{n!M}{R^n},\ (n=1,2,\cdots)$$

其中M是$|f(z)|$在C上的最大值.

（7）**刘维尔（Liouville）定理** 设$f(z)$在整个复平面上解析且有界，则$f(z)$在复平面上为常数.

（8）**最大模定理** 设D为有界单连通或复闭路多连通区域，$f(z)$在D内解析，在D的边界C上连续，且$f(z)$不恒为常数，则$|f(z)|$的最大值必在D的边界上取到.

3.2 学习要求与技巧

3.2.1 学习要求

1. 理解积分的定义、存在条件以及计算和性质，掌握求复积分的一般计算方法.

2. 掌握柯西-古萨基本定理；掌握并能灵活应用复合闭路定理；理解原函数、不定积分的定义以及牛顿-莱布尼兹公式.

3. 理解并掌握柯西积分公式和柯西高阶导数公式；理解解析函数的导数仍然是解析函数这一结论.

4. 熟练掌握利用柯西积分公式和柯西高阶导数公式求复变函数的积分.

5. 本章的重点：复变函数积分的计算，柯西积分公式和柯西高阶导数公式的理解与应用.

3.2.2 学习技巧

1. 在计算复变函数积分时，应根据被积函数及积分路径而选择不同的方法. 积分公式$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$可适用一般复变函数的积分，不论被积函数是否解析，积分路径是否封闭均可采用. 对于单连通区域内解析函数沿非封闭路径的积分，可先设法求出被积分函数的原函数，然后用牛顿－莱布尼兹公式计算. 可以证明，这类复变函数积分，在适当条件下，分部积分法和换元法均成立.

2. 对于沿封闭路径的积分，可以利用柯西积分公式和高阶导数公式进行计算，但因被

积函数形式的多样性，常需作适当的变化，即被积函数必须化为 $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ 的形式，并且满足公式成立的条件.

3. 柯西定理在多连通区域上的推广称为复合闭路定理，它把外边界上的积分换成内边界上的积分（或围绕奇点的小圆周上的积分）. 在计算沿封闭路径积分时，常常把柯西积分公式、高阶导数公式和复合闭路定理联合使用.

4. 公式

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, n=0, \\ 0, \quad n \neq 0 \end{cases}$$

在积分计算中起着重要的作用.

3.3 例题分析

例题 3.1 计算积分 $\int_C \mathrm{d}z$，其中: （1）C 为复平面上以 A 为起点，B 为终点的任意曲线；（2）C 为复平面上的任意闭曲线.

解 根据定义：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta z_k,$$

所以

（1）$\int_C \mathrm{d}z = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = B - A.$

（2）$\oint_C \mathrm{d}z = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$.

例题 3.2 计算从 $A=-i$ 到 $B=i$ 的积分 $\int_C |z|\,dz$ 的值，其中曲线 C 为：(1) 线段 $\overline{AB}$；(2) 左半平面中以原点为中心的左半单位圆；(3) 右半平面中以原点为中心的右半单位圆(如图 3.2 所示).

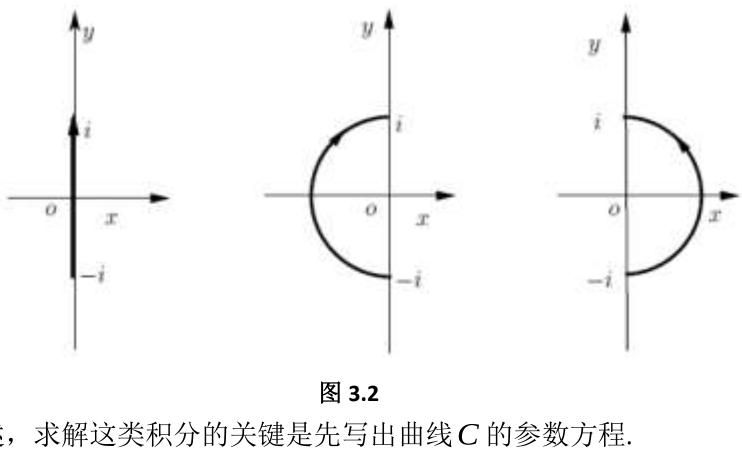


图 3.2

解 如前所述，求解这类积分的关键是先写出曲线 C 的参数方程.

(1) 线段 $\overline{AB}$ 的参数方程为：$z = it, \quad t: -1 \to 1,$ 于是，$|z| = |t|, dz = idt$，利用代入法，

得

$$\int_C |z|\,dz=\int_{-1}^{1}|t|\,idt=i\left(\int_{-1}^{0}(-t)dt+\int_0^1 tdt\right)=i.$$

(2) 左半平面中以原点为中心的左半单位圆的参数方程为：$z=e^{it}$，　$t:\dfrac{3}{2}\pi\to\dfrac{1}{2}\pi,$

由 $|z|=1, dz=ie^{it}dt$，得

$$\int_C |z|\,dz=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(ie^{-it})dt=i\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+i\sin t)dt$$

$$=-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt+i\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt=2i.$$

(3) 在半平面中以原点为中心的右半单位圆的参数方程为：$z=e^{it}$，$t:-\dfrac{1}{2}\pi\to\dfrac{1}{2}\pi,$

由 $|z|=1, dz=ie^{it}dt$，得

$$\int_C |z|\,dz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}ie^{it}dt=i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+i\sin t)dt$$

$$=i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt=2i.$$

例题 3.3 计算下列积分：

（1）$\displaystyle\int_C \arg z\mathrm{d}z$，其中 C 为由 $A(-1,1)$ 到 $B(-2,2)$ 的直线段.

（2）$\displaystyle\int_C \mathrm{e}^{|z|^2}\,\mathrm{Im}(z)\mathrm{d}z$, 其中 C 为 $z_1=0$ 到 $z_2=\pi\mathrm{i}$ 的直线段.

分析 对于积分路径非封闭的复变函数积分，可采用基本计算方法，即将积分路径用复参数方程表示，并将积分化为定积分计算. 如果被积函数为解析函数，则可采用牛顿－莱布尼兹公式计算.

解 （1）连接 $A(-1,1)$ 到 $B(-2,2)$ 的直线段参数形式为

$$z=z(t)=(-1+\mathrm{i})t,\ t:1\to 2,$$

且 $\arg(-1+\mathrm{i})=\dfrac{3}{4}\pi$，从而

$$\int_C \arg z\mathrm{d}z=\int_1^2 \arg(-1+\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})\,\mathrm{dt}=\frac{3\pi}{4}\ -1+\mathrm{i}\ .$$

（2）被积函数 $\mathrm{e}^{|z|^2}\,\mathrm{Im}(z)$ 为非解析函数，采用基本计算方法. $z_1=0$ 到 $z_2=\pi\mathrm{i}$ 的参数方程为：$z=z(t)=\mathrm{i}t,\ t:0\to\pi$，从而

$$\int_C \mathrm{e}^{|z|^2}\,\mathrm{Im}(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{t^2} t\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{t^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi^2}-1\right).$$

例题 3.4 计算积分 $I=\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dx$，其中 C 为以 z_0 为中心，r 为半径的正向圆周，n 为整数.

解 圆周 C 的参数方程为：$z-z_0=re^{i\theta},\theta:0\to 2\pi$，于是

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{rie^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{i}{r^n}e^{-in\theta}d\theta.$$

当 $n=0$ 时，$I=\int_0^{2\pi} id\theta=2\pi i$，当 $n\neq 0$ 时，

$$I=\frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}d\theta=\frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - i\sin n\theta)d\theta=0.$$

综合得：

$$I=\oint_C\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dx=\begin{cases}2\pi i, & n=0,\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

思考题：设 $P(z)$ 为任意 2 次多项式，证明：$\lim\limits_{R\to+\infty}\oint_{|z|=R}\frac{1}{P(z)}\mathrm{d}z=0.$

证明 设 $P(z)=a(z-z_1)(z-z_2)$，$a\neq 0$. 作充分大的 $R>0$ 为半径，作圆周 $C_R:|z|=R$，使得 z_1,z_2 落在 C_R 所围区域中，则

$$\oint_{|z|=\mathrm{R}}\frac{1}{P(z)}\mathrm{d}z=\oint_{|z|=\mathrm{R}}\frac{1}{a(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z.$$

若 $z_1=z_2$，则 $\oint_{|z|=\mathrm{R}}\frac{1}{P(z)}\mathrm{d}z=\oint_{|z|=\mathrm{R}}\frac{1}{a(z-z_1)^2}\mathrm{d}z=0.$

若 $z_1\neq z_2$，则 $\oint_{|z|=\mathrm{R}}\frac{1}{P(z)}\mathrm{d}z=\frac{1}{a(z_1-z_2)}\oint_{|z|=\mathrm{R}}\left[\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right]\mathrm{d}z=0.$

所以

$$\lim_{R\to+\infty}\oint_{|z|=R}\frac{1}{P(z)}\mathrm{d}z=0.$$

例题 3.5 设 C_r 为圆周 $|z|=r$ 在第一象限中的一段，方向为逆时针方向，函数 $f(z)$ 在 C_r 上连续，且 $\lim\limits_{z\to 0}zf(z)=0$.（1）证明：$\lim\limits_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)dz=0$；（2）计算极限 $\lim\limits_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{P_n(z)}{z}dz$，其

中 $P_n(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n$，$c_0\neq 0$.

解 （1） 由已知 $\lim\limits_{z\to 0}zf(z)=0$ 知， 对于任意 $\varepsilon>0$， 存在 $\delta>0$，当 $|z|<\delta$ 时，

$$|zf(z)|<\varepsilon.$$

C_r 的参数方程为：$z=re^{i\theta}$，$\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$，从而

$$\left|\int_{C_r}f(z)dz\right|=\left|\int_0^{\pi/2}f(re^{i\theta})rie^{i\theta}d\theta\right|$$
$$\leq\int_0^{\pi/2}\left|f(re^{i\theta})re^{i\theta}\right||d\theta|\leq\frac{\pi\varepsilon}{2},$$

因此

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)dz=0.$$

（2）由于

$$\frac{P_n(z)}{z}=\frac{c_0}{z}+c_1+c_2z+\cdots+c_nz^{n-1}=\frac{c_0}{z}+Q_{n-1}(z),$$

其中 $Q_{n-1}(z)=c_1+c_2z+\cdots+c_nz^{n-1}$，从而

$$\int_{C_r}\frac{P_n(z)}{z}dz=\int_{C_r}\frac{c_0}{z}dz+\int_{C_r}Q_{n-1}(z)dz,$$

由（1）知：$\lim\limits_{r\to 0}\int_{C_r}Q_{n-1}(z)dz=0$，故

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{P_n(z)}{z}dz=\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{c_0}{z}dz=\lim_{r\to 0}\int_0^{\pi/2}\frac{c_0}{re^{i\theta}}rie^{i\theta}d\theta=\frac{c_0\pi i}{2}.$$

例题 3.6 计算积分（1）$\oint_C(z^2+2\mathrm{e}^{-z}+\sin z)\mathrm{d}z$，其中:$C$ 为正向圆周 $|z|=4$；（2）$\oint_C\dfrac{e^z}{z(z-1)}dz$，其中：$C$ 为正向圆周 $|z+1|=\dfrac{1}{2}$.

解 （1）由于函数 $z^2,e^{-z},\sin z$ 在复平面上为解析函数，所以 $z^2+2e^{-z}+\sin z$ 有圆周 $C:|z|=4$ 所围的单连通区域内解析，由柯西定理知

$$\oint_C(z^2+2e^{-z}+\sin z)dz=0.$$

（2）$z=0$ 和 $z=1$ 为被积分函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)}$ 的两个奇点，但它们均不在积分曲线 C 所围的区域 G 内，即：被积函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析，所以

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)}dz = 0.$$

$\int_C \mathrm{e}^{|z|^2}\,\mathrm{Im}(z)\mathrm{d}z$,其中$C$为$z_1=0$到$z_2=\pi\mathrm{i}$的直线段.

例题 3.7 计算下列积分：

（1）$\int_C z\mathrm{e}^{z^2}\mathrm{d}z$,其中$C$为$z_1=0$到$z_2=\pi\mathrm{i}$的直线段.

（1）$\int_C (\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z})\mathrm{d}z$，其中$C$为$z=\cos t+\mathrm{i}t, t:0\to\frac{\pi}{2}$的曲线段.

解 （1）被积函数$z\mathrm{e}^{z^2}$解析，且其原函数为$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z^2}$，从而由牛顿－莱布尼兹公式

$$\int_C z\mathrm{e}^{z^2}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{z^2}\Big|_0^{\pi\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-\pi^2} - 1\ .$$

（2）被积函数$\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}$解析，且其原函数为$\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}$，从而由牛顿－莱布尼兹公式

$$\int_C (\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z})\mathrm{d}z = (\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z})\Big|_1^{\frac{\pi}{2}i} = -(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1})\,.$$

例题 3.8 （1）设函数$f(z)$和$g(z)$在单连通区域D内解析，z_1, z_2为D内两点 ，证明：

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)g'(z)\mathrm{d}z = f(z)g(z)\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} g(z)f'(z)\mathrm{d}z.$$

（2）利用（1）的结论计算积分 $I=\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}} z^2\mathrm{e}^z\mathrm{d}z.$

分析 （1）中的结论为分部积分公式，其证明方法与高等数学中的分部积分公式类似.

解 （1）由于$f(z)$和$g(z)$在单连通区域D内解析，故$f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$仍为解析函数，且

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z),$$

从而$f(z)g(z)$是$f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$在D内的原函数. 由牛顿－莱布尼兹公式

$$\int_{z_1}^{z_2}\left[f'(z)g(z)+f(z)g'(z)\right]\mathrm{d}z = f(z)g(z)\Big|_{z_1}^{z_2},$$

所以

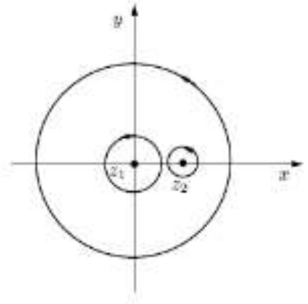
$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)g'(z)\mathrm{d}z = f(z)g(z)\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} g(z)f'(z)\mathrm{d}z.$$

（2）

$$\begin{aligned}\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}} z^2\mathrm{e}^z\mathrm{d}z &= \int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}} z^2(\mathrm{e}^z)'\mathrm{d}z = z^2\mathrm{e}^z\Big|_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}} - 2\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}} z\mathrm{e}^z\mathrm{d}z \\ &= -2z\mathrm{e}^z\Big|_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}} + 2\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}} \mathrm{e}^z\mathrm{d}z \\ &= -4\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} + 2\,\mathrm{e}^z\Big|_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}} = 4\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

例题 3.9 计算积分$\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{z(z-1)}dz$.

解 设 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z}$. 由于被积函数 $f(z)$ 在积分路径 $C:|z|=2$ 的内部只含有两个奇点 $z=0$ 和 $z=1$，采用所谓“挖奇点”方法. 为此，分别作两个互不相交的圆周，如：$C_1:|z|=\dfrac{1}{2}$ 和 $C_2:|z-1|=\dfrac{1}{4}$ (如图 3.7 所示)，则



$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} f(z)dz &= \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz \\ &= \oint_{C_1}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)dz + \oint_{C_2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)dz \\ &= 0-2\pi i+2\pi i-0=0.\end{aligned}$$

例题 3.10 设 n 次多项式 $P_n(z)$ 有 n 个互不相同的零点，闭曲线 C 上无 $P_n(z)$ 的零点，且 C 所围区域内恰有 $P_n(z)$ 的 $k(0\le k\le n)$ 个零点. 证明：$\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\dfrac{P_n'(z)}{P_n(z)}\mathrm{d}z=k$.

证明 设 $P_n(z)=a(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$ 其中 $a\ne 0,\ z_j(j=1,2,\cdots,n)$ 互不相同，则

$$\frac{P_n'(z)}{P_n(z)}=\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\cdots+\frac{1}{z-z_n}$$

由于 $\oint_C\dfrac{1}{z-z_j}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & C\text{包含}z_j,\\ 0, & C\text{不包含}z_j.\end{cases}$ 所以

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{P_n'(z)}{P_n(z)}\mathrm{d}z=k.$$

例题 3.11 计算积分$\oint_C \frac{1}{(z-2)(z-3)}$,其中$C$是不过点$z=2$和点$z=3$的正向闭曲线.

解 函数$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}$有两个奇点$z=2$和$z=3$，本题视不同曲线$C$分别讨论.

(1) 若C既不包含$z=2$，也不包含$z=3$，即$f(z)$在C所围的区域内解析，从而

$$\oint_C f(z)dz=0.$$

(2) 若C仅包含$z=2$，但不包含$z=3$，则

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C \frac{1}{z-3}dz-\oint_C \frac{1}{z-2}=-2\pi i.$$

(3) 若C仅包含$z=3$，但不包含$z=2$，则

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C \frac{1}{z-3}dz-\oint_C \frac{1}{z-2}=2\pi i.$$

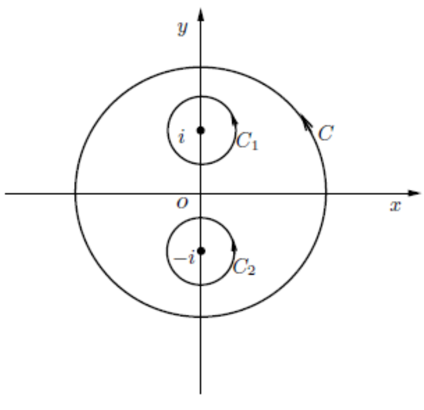
(4) 若C既包含$z=2$，也包含$z=3$，则

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C \frac{1}{z-3}dz-\oint_C \frac{1}{z-2}=2\pi i-2\pi i=0.$$

例题 3.12 计算积分$\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}dz$，其中$C$为正向圆周$|z|=2$.

解 由于被积函数在$|z|=2$所围区域内有两个奇点$z_1=i, z_2=-i$. 分别以z_1和z_2为圆心，作圆周：$C_1:|z-i|=\frac{1}{2}, C_2:|z+i|=\frac{1}{2}$(如图 3.9 所示)

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}dz &=\oint_{C_1} \frac{e^z}{z^2+1}dz+\oint_{C_2} \frac{e^z}{z^2+1}dz\\ &=\oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{z+i}}{z-i}dz+\oint_{C_2} \frac{\frac{e^z}{z-i}}{z+i}dz\\ &=2\pi i\frac{e^i}{i+i}+2\pi i\frac{e^{-i}}{-i-i}\\ &=2\pi i\frac{e^i-e^{-i}}{2i}=2\pi i\sin 1.\end{aligned}$$



例题 3.13 设$f(z)$在单连通区域D内解析，C为D内的正向圆周$C:|z|=R$. $z\neq 0$为C内一点， 证明：

（1）$\oint_C \frac{\overline{z}f(\xi)}{\xi\overline{z}-R^2}\mathrm{d}\xi=0$.

（2）$f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \dfrac{(R^2-|z|^2)f(\xi)}{(\xi-z)(R^2-\overline{z}\xi)}\mathrm{d}\xi$.

（3）$f(z)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dfrac{(R^2-r^2)f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta$，其中 $r=|z|,\varphi=\arg z$.

分析 本题主要应用柯西积分公式证明.

证明 （1）由于 $z\neq 0$ 为 C 内一点，则 $|z|=r<R$，$\left|\dfrac{R^2}{\overline{z}}\right|=\dfrac{R^2}{r}>R$，因此，$\dfrac{R^2}{\overline{z}}$ 在 C 外. 由柯西定理

$$\oint_C \frac{\overline{z}f(\xi)}{\xi\overline{z}-R^2}\mathrm{d}\xi=\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-\dfrac{R^2}{\overline{z}}}\mathrm{d}\xi=0.$$

（2）由柯西积分公式：$f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \dfrac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$，由（1）得

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{\overline{z}f(\xi)}{\xi\overline{z}-R^2}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\left[\frac{f(\xi)}{\xi-z}-\frac{\overline{z}f(\xi)}{\xi\overline{z}-R^2}\right]\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{(R^2-|z|^2)f(\xi)}{(\xi-z)(R^2-\overline{z}\xi)}\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

（3）C 的参数方程为：$\xi=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\theta:0\to 2\pi$，则 $\mathrm{d}\xi=\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}\xi\mathrm{d}\theta$，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi-z)(R^2-\overline{z}\xi)}&=\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi(\xi-z)(\overline{\xi}-\overline{z})}=\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}\theta}{(\xi-z)(\overline{\xi}-\overline{z})}\\&=\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}\theta}{(\xi\overline{\xi}+z\overline{z}-\xi\overline{z}-z\overline{\xi})}=\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}\theta}{R^2+r^2-2\,\mathrm{Re}(\xi\overline{z})}\\&=\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}\theta}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}.\end{aligned}$$

将（2）中复变函数积分化为定积分，得

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{(R^2-|z|^2)f(\xi)}{(\xi-z)(R^2-\overline{z}\xi)}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

例题 3.14 计算积分 $I=\oint_C \dfrac{1}{z^3(z-1)(z+2)}\mathrm{d}z$，其中 C 为正向圆周 $|z|=r(r\neq 1,2)$.

分析 被函数有三个奇点$z_1=0, z_2=1, z_3=-2$，积分路径为$|z|=r(r\neq 1,2)$，故应分别对$0<r<1, 1<r<2$和$r>2$三种情况，应用复合闭路定理、柯西积分公式或高阶导数公式计算.

解 （1）当$0<r<1$时，在$|z|=r$内仅包含被积分函数一个奇点 $z_1=0$. 记$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$，则$f(z)$在$C$所围区域内解析，从而

$$I=\oint_C \frac{f(z)}{z^3}\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}f''(0)=\pi\mathrm{i}\left[\frac{6z^2+6z+6}{(z^2+z-2)^3}\right]_{z=0}=-\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}.$$

（2）当$1<r<2$时，在$|z|=r$内仅包含被积分函数两个奇点 $z_1=0$和$z_2=1$. 在C内分别以z_1, z_2 为心，r_1, r_2 为半径，作圆周C_1,C_2，并使得C_1,C_2互不相交也互不包含，则由复合闭路定理、柯西积分公式，得

$$\begin{aligned}
I&=\oint_{C_1}\frac{1}{z^3(z-1)(z+2)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z^3(z-1)(z+2)}\mathrm{d}z\\
&=-\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}+\oint_{C_2}\frac{\frac{1}{z^3(z+2)}}{z-1}\mathrm{d}z\\
&=-\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}+2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{z^3(z+2)}\right|_{z=1}\\
&=-\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}+\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}=-\frac{1}{12}\pi\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

（3）当$r>2$时，在$|z|=r$内仅包含被积分函数两个奇点 $z_1=0$，$z_2=1$和$z_3=-2$. 在C内分别以z_1, z_2，z_3为心，r_1, r_2, r_3 为半径，作圆周C_1,C_2和C_3， 并使得C_1,C_2和C_3互不相交也互不包含，则由复合闭路定理、柯西积分公式，得

$$\begin{aligned}
I=&\oint_{C_1}\frac{1}{z^3(z-1)(z+2)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z^3(z-1)(z+2)}\mathrm{d}z+\\
&\oint_{C_3}\frac{1}{z^3(z-1)(z+2)}\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{12}\pi\mathrm{i}+\oint_{C_3}\frac{\frac{1}{z^3(z-1)}}{z+2}\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{1}{12}\pi\mathrm{i}+2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{z^3(z-1)}\right|_{z=-2}$$
$$=-\frac{1}{12}\pi\mathrm{i}+\frac{1}{12}\pi\mathrm{i}=0.$$

例题 3.15 设函数$f(z)$在$|z|\leq 3$上解析，且在$|z|=3$上$f(z)=\mathrm{e}^z$.（1）计算$f(0)$；（2）计算积分$I=\oint_{|z|=3}\frac{f(z)}{(z-1)^2(z-2)\overline{z}}\mathrm{d}z$.

分析 由于在$|z|=3$上，$f(z)=\mathrm{e}^z$，由柯西积分公式可求出$f(z)$在$|z|<3$内的表达式也为$f(z)=\mathrm{e}^z$. 为了联合复合闭路定理，柯西积分公式和高阶导数计算（2）中的积分，需把被积函数$\frac{f(z)}{(z-1)^2(z-2)\overline{z}}$化为$\frac{z\mathrm{e}^z}{(z-1)^2(z-2)|z|^2}$.

解（1）由柯西积分公式，当$|z|<3$ 时

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi|=3}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi|=3}\frac{\mathrm{e}^\xi}{\xi-z}\ \mathrm{d}\xi=\mathrm{e}^z.$$

所以$f(0)=1$.

（2）由（1）得

$$I=\oint_{|z|=3}\frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^2(z-2)\overline{z}}\mathrm{d}z=\oint_{|z|=3}\frac{z\mathrm{e}^z}{(z-1)^2(z-2)|z|^2}\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{9}\oint_{|z|=3}\frac{z\mathrm{e}^z}{(z-1)^2(z-2)}\mathrm{d}z.$$

函数$g(z)=\frac{z\mathrm{e}^z}{(z-1)^2(z-2)}$ 在曲线$C:|z|=3$所围区域内包含奇点$z_1=1$，$z_2=2$. 在C内分别以z_1,z_2 为心，r_1,r_2 为半径，作圆周C_1,C_2，并使得C_1,C_2互不相交也互不包含，则由复合闭路定理、柯西积分公式和高阶导数公式，得

$$I=\frac{1}{9}\oint_{C_1}\frac{z\mathrm{e}^z}{(z-1)^2(z-2)}\mathrm{d}z+\frac{1}{9}\oint_{C_2}\frac{z\mathrm{e}^z}{(z-1)^2(z-2)}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{9}\oint_{C_2}\frac{\frac{z\mathrm{e}^z}{z-2}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z+\frac{1}{9}\oint_{C_2}\frac{\frac{z\mathrm{e}^z}{(z-1)^2}}{(z-2)}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2\pi \mathrm{i}}{9}\left(\frac{z\mathrm{e}^z}{z-2}\right)'\Bigg|_{z=1} + \frac{2\pi \mathrm{i}}{9}\frac{z\mathrm{e}^z}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=2}$$

$$= -\frac{2}{3}\pi \mathrm{i}\mathrm{e} + \frac{4}{9}\pi \mathrm{i}\mathrm{e}^2.$$

例题 3.16 计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta - \sin\theta)d\theta.$$

解 令 $z = e^{i\theta}$，则

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}[\cos(n\theta - \sin\theta) - i\sin(n\theta - \sin\theta)]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta} - in\theta}d\theta = \oint_{|z|=1}\frac{e^z}{iz^{n+1}}dz$$

$$= \frac{2\pi i}{in!}[e^z]^{(n)}|_{z=0} = \frac{2\pi}{n!}.$$

所以

$$I = Re(I_1) = \frac{2\pi}{n!}.$$

例题 3.17 设 $f(z)$ 在 $|z| \le 1$ 上解析，在 $|z| = 1$ 上满足 $|f(z) - z| \le |z|$，试证，对 $n = 0, 1, 2, \cdots$ ，有

$$\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le 2^{n+2}.$$

分析 由于本题涉及到解析函数的 n 阶导数的模的不等式，因此，证明需用到柯西高阶导数公式 ，且在证明过程中利用积分不等式的性质.

证明 由柯西积分公式和导数公式，得

$$\left|f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z-1/2^{\;n+1}}dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{|f(z)-z+z|}{|z-1/2|^{n+1}}|dz|$$

$$\le \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{|f(z)-z|+|z|}{|z-1/2|^{n+1}}|dz| = \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{2|z|}{|z-1/2|^{n+1}}|dz|$$

$$\le \frac{n!}{\pi}\oint_{|z|=1}\frac{|z|}{||z|-1/2|^{n+1}}|dz| = \frac{n!}{\pi}\oint_{|z|=1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}|dz| = n!2^{n+2}.$$

从而

$$\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq 2^{n+2}.$$

例题 3.18 试证：若 $f(z)$ 在闭圆域 $|z|\leq R$ 上解析，在该圆域的边界 $|z|=R$ 上，$|f(z)|>a>0$，且 $|f(0)|<a$，则在该圆域内 $f(z)$ 至少有一个零点.

证明 用反证法. 设 $f(z)$ 在该圆域内无零点，已知 $f(z)$ 在边界 $|z|=R$ 上也无零点，故

$F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 在闭圆域上解析. 根据解析函数的平均值定理，

$$F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta\,.$$

又由已知 $|F(0)|=\dfrac{1}{|f(0)|}>\dfrac{1}{a},|F(\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta})|=\dfrac{1}{|f(\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta})|}<\dfrac{1}{a}$，所以

$$F(0)=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta\right|\leq\frac{1}{a},$$

得到矛盾.

例题 3.19 设 $f(z)$ 在整个复平面上解析，且存在 $M>0$，使得 $\mathrm{Re}\,f(z)<M$，证明：

$f(z)$ 在复平面上为常数.

证明 令 $F(z)=e^{f(z)}$，则 $F(z)$ 在整个复平面上解析，且

$$|F(z)|=e^{\mathrm{Re}\,f(z)}\leq e^{M},$$

故有界，由刘维尔定理知，$f(z)$ 在复平面上为常数.