第七章 傅里叶变换

7.1 内容归纳

7.1.1 内容提要

周期函数的傅里叶级数展开式、傅里叶积分公式、傅里叶变换和逆变换、单位脉冲函数、广义傅里叶变换、傅里叶变换的基本性质、傅里叶变换的卷积性质、傅里叶变换的应用.

7.1.2 基本概念

1. 非周期函数$f(t)$的傅里叶积分公式$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$

2. 余弦傅里叶积分公式 $f(t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\left[f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega.$

   正弦傅里叶积分公式 $f(t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\left[f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega.$

3. 傅里叶变换：

$$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,\ -\infty<\omega<+\infty,$$

   傅里叶逆变换：

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

4. 余弦傅里叶变换：

$$\mathscr{F}_c[f(t)]=F_c(\omega)=\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t,$$

   余弦傅里叶逆变换：

$$\mathscr{F}_c^{-1}[F_c(\omega)]=f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}F_c(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega.$$

5. 正弦傅里叶变换：

$$\mathscr{F}_s[f(t)]=F_s(\omega)=\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t,$$

   正弦傅里叶逆变换：

$$\mathscr{F}_s^{-1}[F_s(\omega)]=f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}F_s(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega.$$

6. 对任意在$t=t_0$处连续的函数$\varphi(t)$，如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=\varphi(t_0),$$

则称 $\delta(t-t_0)$ 为 δ 函数，其中 $\varphi(t)$ 称为检验函数.

7. 设函数 $\varphi(t)$ 在 $t=t_0$ 处具有任意阶导数，且满足 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}\varphi^{(k)}(t)=0$, 如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=(-1)^k\varphi^{(k)}(t_0),$$

则称 $f(t)$ 为 δ 函数 $\delta(t-t_0)$ 在 $t=t_0$ 处的 k 阶导数，记为 $\delta^{(k)}(t-t_0)$.

8. 设 $f_1(t),f_2(t)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的两个函数，如果积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(s)f_2(t-s)\mathrm{d}s$$

存在，称其为函数 $f_1(t),f_2(t)$ 的卷积，记为

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(s)f_2(t-s)\mathrm{d}s.$$

7.1.3 主要结论

1. 存在性定理

（1）周期函数的傅里叶级数展开

设 $f_T\ \ t$ 是以 $T\ \ 0<T<+\infty$ 为周期的实函数，且在 $\left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷(Dirichlet)条件，即 $f_T(t)$ 在一个周期上满足：（1）连续或只有有限个第一类间断点；（2）只有有限个极值点，则在连续点处，有

$$f_T\ \ t\ =\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\ a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t$$

其中

$$\begin{cases}\omega=\dfrac{2\pi}{T},\\ a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T\ \ t\ \cos n\omega t\mathrm{d}t\ \ n=0,1,2,\cdots\ ,\\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T\ \ t\ \sin n\omega t\mathrm{d}t\ \ n=1,2,3,\cdots\ .\end{cases}$$

在间断点处 t_0 有

$$\frac{f_T\ \ t_0+0\ +f_T\ \ t_0-0}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\ a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\ .$$

（2）非周期函数的傅里叶积分定理

若函数 $f(t)$ 在任意有限区间上满足狄利克莱条件，且在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，则当 t 为 $f(t)$ 的连续点时，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = f(t),$$

当 t 为 $f(t)$ 的间断点时，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f\ \ \tau\ \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}.$$

2. 常见函数的广义傅里叶变换

$\mathscr{F}[\delta(t)] = 1$； $\mathscr{F}[\delta(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$；

$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$； $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$；

$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] = \mathrm{i}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$；

$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$；

$\mathscr{L}\left[u(t)\right] = \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)$； $\mathscr{L}\left[\mathrm{sgn}(t)\right] = \dfrac{2}{\mathrm{i}\omega}$.

3. 傅里叶变换的性质

（1）线性性质 若 α,β 为任意常数，且 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)], G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]$，则

$$\mathscr{F}[\alpha f(t)+\beta g(t)] = \alpha F(\omega)+\beta G(\omega),$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F(\omega)+\beta G(\omega)] = \alpha f(t)+\beta g(t).$$

（2）对称性 设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，则

$$\mathscr{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega).$$

（3）位移性质 设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$， t_0 和 ω_0 为常数，则

$$\mathscr{F}[f(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}F(\omega),$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}f(t).$$

（4）相似性质 设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，$a\neq 0$，则

$$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right),$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(a\omega)]=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{t}{a}\right).$$

（4）微分性质 若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}f^{(k)}(t)=0\ (k=0,1,\cdots n-1)$，则

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(\mathrm{i}\omega)^n F(\omega),$$

$$F^{(n)}(\omega)=(-\mathrm{i})^n\mathscr{F}[t^n f(t)].$$

特别地，当 $n=1$ 时，有

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=\mathrm{i}\omega F(\omega),$$

$$F'(\omega)=-\mathrm{i}\mathscr{F}[tf(t)].$$

（5）积分性质 设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，如果 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=0$，则

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(s)\mathrm{d}s\right]=\frac{F(\omega)}{\mathrm{i}\omega};$$

如果 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau\neq 0$，则

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(s)\mathrm{d}s\right]=\frac{F(\omega)}{\mathrm{i}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega).$$

（6）设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，$G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]$，则

$$\mathscr{F}[f*g]=\mathscr{F}[f(t)]\cdot\mathscr{F}[g(t)]=F(\omega)\cdot G(\omega);$$

$$\mathscr{F}[f\cdot g]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[f(t)]*\mathscr{F}[g(t)]=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega).$$

7.2 学习要求与学习技巧

7.2.1 学习要求

1. 了解周期函数的傅里叶级数及其复数形式，熟悉傅里叶积分公式；
2. 理解傅里叶变换及其逆变换的概念；熟练掌握求基本函数的傅里叶变换和逆变换；
3. 了解 δ 函数的概念及其物理意义；掌握基本函数的广义傅里叶变换；
4. 掌握傅里叶变换和逆变换的线性、相似、位移、微分和积分的性质；
5. 熟练掌握利用傅里叶变换解简单的微分、积分方程；
6. 本章的重点：根据傅里叶变换及其逆变换的定义，求基本函数的傅里叶变换和逆变换.

7.3 例题分析

例题 6.1 求周期方波 $f_T(t)=\begin{cases}-1, & -\pi\le t<0,\\ 1, & 0\le t<\pi,\end{cases}$ $f_T(t)=f_T(t+2\pi)$ 的傅里叶级数.

解 周期方波 $f_T(t)$ 的图形如图 7.1(a)所示.

$$\begin{aligned}
c_0&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=0,\\
c_n&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{e}^{-int}\,dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\mathrm{e}^{-int}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{e}^{-int}\,dt\\
&=\frac{1}{in\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}0, & n=\pm2,\ \pm4,\ \cdots,\\ -\dfrac{2i}{n\pi}, & n=\pm1,\ \pm3,\ \cdots.\end{cases}
\end{aligned}$$

或

$$a_n=0,\ b_n=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots,\\ \dfrac{4}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots.\end{cases}$$

从而

$$f_T(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)t+\cdots\right],$$
$$(-\infty<t<+\infty,\ t\ne0,\ \pm\pi,\ \pm2\pi,\ \cdots)$$

例题 6.2 设函数 $f(t)=e^{-\beta|t|}\ (\beta>0)$，（1）求 $f(t)$ 的傅里叶积分；（2）计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t\mathrm{d}\omega.$.

解 由于 $f(t)$ 为偶函数，故，

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

记 $I=\int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau$，经分部积分两次，得 $I=\frac{\beta}{\omega^2+\beta^2}$，从而

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t\mathrm{d}\omega.$$

由此可得广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}.$$

例题 6.3 设函数 $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\le\pi,\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$ （1）求 $f(t)$ 的傅里叶积分；（2）证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t, & |t|\le\pi,\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$$

解 （1）

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w\tau}\mathrm{d}\tau&=\int_{-\pi}^{\pi}\sin\tau(\cos\omega\tau-\mathrm{i}\sin\omega\tau)\mathrm{d}\tau\\&=-2\mathrm{i}\int_0^{\pi}\sin\tau\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\\&=-\mathrm{i}\int_0^{\pi}\left[\cos(\omega-1)\tau-\cos(\omega+1)\tau\right]\mathrm{d}\tau\\&=-\mathrm{i}\left[\frac{\sin(\omega-1)\tau}{\omega-1}-\frac{\sin(\omega+1)\tau}{\omega+1}\right]\Bigg|_0^{\pi}\\&=-\mathrm{i}\left[\frac{\sin(\omega-1)\pi}{\omega-1}-\frac{\sin(\omega+1)\pi}{\omega+1}\right].\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}wt}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{-\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin(\omega-1)\pi}{\omega-1}-\frac{\sin(\omega+1)\pi}{\omega+1}\right](\cos\omega t+\mathrm{i}\sin\omega t)\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sin(\omega-1)\pi}{\omega-1}-\frac{\sin(\omega+1)\pi}{\omega+1}\right]\sin\omega t\mathrm{d}\omega\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\sin\omega t\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

（2）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\sin\omega t\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}f(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t, & |t|\le\pi,\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$

例题 6.4 利用函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \frac{\pi}{2}, & t=0,\\ \pi\mathrm{e}^{-t}, & t>0\end{cases}$ 的傅里叶积分表达式，计算广义积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2t+t\sin 2t}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

解

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{+\infty} \pi\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau = \pi\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\omega)\tau}\mathrm{d}\tau$$
$$= -\frac{\pi}{(1+\mathrm{i}\omega)}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\omega)\tau}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{(1+\mathrm{i}\omega)} = \frac{\pi(1-\mathrm{i}\omega)}{1+\omega^2}.$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi(1-\mathrm{i}\omega)}{1+\omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\mathrm{i}\omega)}{1+\omega^2}(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t)\mathrm{d}\omega$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega = \begin{cases} 0, & t<0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & t=0, \\ \pi\mathrm{e}^{-t}, & t>0. \end{cases}$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega = \begin{cases} 0, & t<0, \\ \pi, & t=0, \\ 2\pi\mathrm{e}^{-t}, & t>0. \end{cases}$$

在上式中取$t=2$，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\omega + \omega\sin 2\omega}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega = 2\pi\mathrm{e}^{-2}.$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2t + \omega\sin 2t}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{e}^{-2}.$$

例 6.5 求函数 $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ e^{-\beta t}, & t\ge 0 \end{cases}$ 的傅里叶变换和频谱，并计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\beta\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega,$$

其中$\beta>0$.

解 根据傅里叶变换定义，有

$$F\ \ \omega\ \ = \int_{-\infty}^{+\infty} f\ \ t\ e^{-\mathrm{i}\omega t}dt = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t}e^{-\mathrm{i}\omega t}dt$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-(\beta+\mathrm{i}\omega)t}dt = \frac{-e^{-(\beta+\mathrm{i}\omega)t}}{\beta+\mathrm{i}\omega}\Big|_0^{+\infty}$$
$$= \frac{\beta-\mathrm{i}\omega}{\beta^2+\omega^2}.$$

频谱为

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}}, \quad \arg F(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\beta}.$$

根据傅里叶逆变换的定义，有

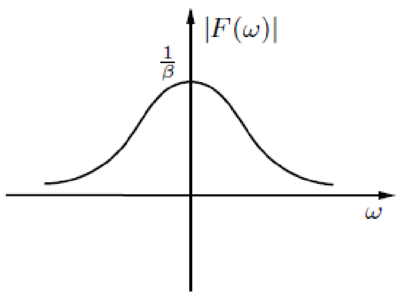
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta - i\omega}{\beta^2+\omega^2}e^{i\omega t}d\omega.$$

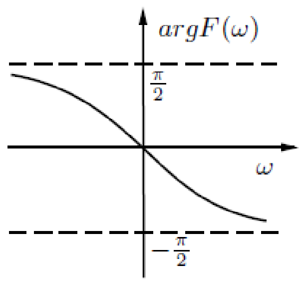
注意到$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$，由上式可得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta - i\omega}{\beta^2+\omega^2}(\cos\omega t + i\sin\omega t)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega.$$

因此

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega = \begin{cases} 0, & t<0, \\ \pi/2, & t=0, \\ \pi e^{-\beta t}, & t>0. \end{cases}$$





例题 6.6 求矩形脉冲函数 $f(t) = \begin{cases} 1, & |t|\le 1 \\ 0, & |t|>1 \end{cases}$ 的傅里叶变换及其积分表达式.

解 根据傅里叶变换的定义，有

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-1}^{+1} e^{-i\omega t}dt = \left.\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right|_{-1}^{+1} \\ &= -\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega} - e^{i\omega}) = \frac{2\sin\omega}{\omega}. \end{aligned}$$

由傅里叶逆变换定义

$$\begin{aligned} f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F(\omega)\cos\omega t d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{2\sin\omega}{\omega}\cos\omega t d\omega = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega \end{aligned}$$

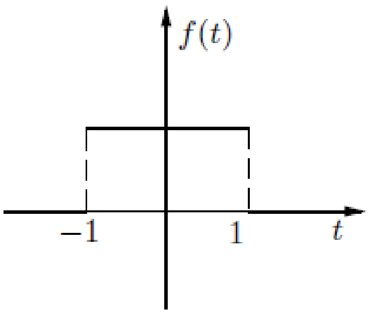
由此可得

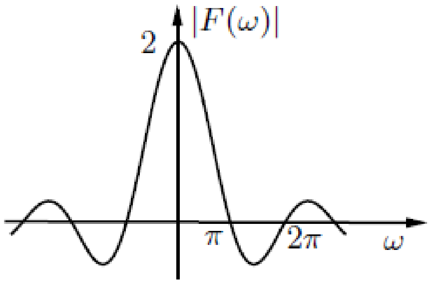
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |t|<1,\\ \dfrac{\pi}{4}, & |t|=1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

当$t=0$时，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

上述积分称为狄利克莱积分.





例题 6.7 求函数$\mathrm{e}^{-\beta t}u(t)\sin bt\ (\beta>0)$的傅里叶变换.

解 利用 Euler 公式

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{-\beta t}u(t)\sin bt\right]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}u(t)\sin bt\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\sin bt\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\left[\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\omega-\mathrm{i}b)t}-\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\omega+\mathrm{i}b)t}\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\omega-\mathrm{i}b)t}}{-(\beta+\mathrm{i}\omega-\mathrm{i}b)}-\frac{\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\omega+\mathrm{i}b)t}}{-(\beta+\mathrm{i}\omega+\mathrm{i}b)}\right]\Bigg|_0^{+\infty}\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{\beta+\mathrm{i}\omega-\mathrm{i}b}-\frac{1}{\beta+\mathrm{i}\omega+\mathrm{i}b}\right]\\&=\frac{b}{(\beta+\mathrm{i}\omega)^2+b^2}.\end{aligned}$$

例题 6.8 已知像函数$F(\omega)=\dfrac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2}$，求$F(\omega)$的傅里叶逆变换.

本题 考查利用留数计算傅里叶逆变换. 由傅里叶逆变换定义

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\,,$$

被积函数$F(\omega)=\dfrac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2}$为有理式，可利用留数定理求有理函数广义积分法计算.

解　$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$. 函数$F(\omega)=\dfrac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2}$在上半平面有一个二阶极点$\omega=\mathrm{i}$，且

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,s\left[\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\mathrm{i}\right]&=\lim_{\omega\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[(\omega-\mathrm{i})^2\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right]\\&=\lim_{\omega\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{\omega^2}{(\omega+\mathrm{i})^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right]\\&=\lim_{\omega\to\mathrm{i}}\frac{(2\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{i}t\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})(\omega+\mathrm{i})^2-2\omega^2(\omega+\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{(\omega+\mathrm{i})^4}\\&=\frac{\mathrm{i}}{4}\ t-1\ \mathrm{e}^{-t}.\end{aligned}$$

由留数定理，当$t\geq 0$时，

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\mathrm{i}\cdot\mathrm{Re}\,s\left[F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\mathrm{i}\right]\\&=\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{i}}{4}(t-1)\mathrm{e}^{-t}=\frac{1}{4}(1-t)\mathrm{e}^{-t}.\end{aligned}$$

当$t<0$时，令$\omega=-s$，由$t>0$的计算过程，得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s^2}{(1+s^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-t)s}\mathrm{d}s=\frac{1}{4}(1+t)\mathrm{e}^{t}.$$

所以

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{4}(1-|\,t\,|)\mathrm{e}^{-|t|}.$$

思考题　求函数$f(t)=\dfrac{1}{t^2+2t+2}$的傅里叶变换.

分析 本题考查利用留数计算傅里叶变换. 由于$f(t)=\dfrac{1}{t^2+2t+2}=\dfrac{1}{(t+1)^2+1}$为有理式，可利用留数定理求广义积分法求傅里叶变换.

解　$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(1+t)^2+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\tau^2+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\tau-1)}\mathrm{d}\tau$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\tau^2+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\tau^2+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau.$$

记$I(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\tau^2+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$，函数$g(z)=\frac{1}{1+z^2}$在上半平面有一个一阶极点$z=\mathrm{i}$，且

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z},\mathrm{i}\right]=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{z+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\omega}.$$

由留数定理，当$\omega\geq 0$ 时

$$I(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\tau^2+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z},\mathrm{i}\right]=\pi\mathrm{e}^{-\omega}.$$

当$\omega<0$时，令$s=-\tau$，则

$$I(\omega)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\tau^2+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega)(-\tau)}\mathrm{d}(-\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{s^2+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega)s}\mathrm{d}s=\pi\mathrm{e}^{\omega}.$$

所以

$$F(\omega)=\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega-|\omega|}.$$

例题 6.9　证明以下等式：（1）若$g(t)$为连续函数，则$g(t)\delta(t-t_0)=g(t_0)\delta(t-t_0)$；（2）若$g(t)$为连续函数，$g(0)=0$，则$g(t)\delta'(t)=-g'(0)\delta(t)$.

证明　（1）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\delta(t-t_0)\varphi(t)\mathrm{d}t=g(t_0)\varphi(t_0)=g(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\varphi(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t_0)\delta(t-t_0)\varphi(t)\mathrm{d}t,\forall\varphi\in\mathrm{C}^{\infty}$$

从而$g(t)\delta(t-t_0)=g(t_0)\delta(t-t_0)$.

（2）

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\delta'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t&=g(t)\delta(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)[g(t)\varphi(t)]'\mathrm{d}t\\&=-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)[g'(t)\varphi(t)+g(t)\varphi'(t)]\mathrm{d}t\\&=-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)g'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)g(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t\\&=-g'(0)\varphi(0)-g(0)\varphi'(0)=-g'(0)\varphi(0)\\&=-g'(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}-g'(0)\delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

从而$g(t)\delta'(t)=-g'(0)\delta(t)$.

例题 6.10 求δ函数的傅里叶变换，并求积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$.

解 根据傅里叶变换的定义和δ函数的性质，得

$$\mathscr{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\big|_{t=0}=1.$$

于是$\delta(t)$与常数1构成傅里叶变换对. 于是按傅里叶逆变换的定义，有

$$\delta(t)=\mathscr{F}^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

从而得$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=2\pi\delta(t).$

例题 6.11 验证：单位阶跃函数$u(t)$的傅里叶变换为

$$\mathscr{F}\left[u(t)\right]=F(\omega)=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega).$$

解 由傅里叶逆变换的定义，得

$$\begin{aligned}f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]e^{\mathrm{i}\omega t}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t+\mathrm{i}\sin\omega t}{\mathrm{i}\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big|_{\omega=0}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

由狄利克莱积分得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & t>0,\\-\dfrac{\pi}{2}, & t<0.\end{cases}$$

从而

$$f(t)=u(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\1, & t>0.\end{cases}$$

例题 6.12 已知某函数的傅里叶变换为$F(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)]$，求其逆变换$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$.

解 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega+\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}.$

例题 6.13 求函数$\sin^3 t$的傅里叶变换.

解 利用欧拉公式： $\sin^3 t = \left(\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3 = \dfrac{3}{4}\sin t - \dfrac{1}{4}\sin 3t$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\sin^3 t] &= \frac{3}{4}\mathscr{F}\left[\sin t\right] - \frac{1}{4}\mathscr{F}\left[\sin 3t\right] \\ &= \frac{i\pi}{4}[3\delta(\omega+1) - \delta(\omega+3) + \delta(\omega-3) - 3\delta(\omega-1)].\end{aligned}$$

例题 6.14 设 $F(\omega) = \pi\delta(\omega+1) - \dfrac{i}{\omega+1}$，求 $F(\omega)$ 的傅里叶逆变换.

解 利用线性性质，得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] &= \mathscr{F}^{-1}\left[\pi\delta(\omega+1)\right] - \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{i}{\omega+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}e^{-it} - \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{i}{\omega+1}\right].\end{aligned}$$

直接计算，并利用狄利克莱积分，得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{i}{\omega+1}\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{\omega+1}e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{\omega+1}e^{i(\omega+1)t}e^{-it}d\omega \\ &= \frac{e^{-it}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ie^{i(\omega+1)t}}{\omega+1}d(\omega+1) = -\frac{e^{-it}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}d(\omega+1) \\ &= -\frac{e^{-it}}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega = \begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-it}, & t<0, \\ -\dfrac{1}{2}e^{-it}, & t>0.\end{cases}\end{aligned}$$

从而得

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = u(t)e^{-it}.$$

例题 6.15 利用矩形脉冲函数 $f(t) = \begin{cases}1, & |t|<1, \\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 的傅里叶变换，证明:

$$\mathscr{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \begin{cases}\pi, & |\omega|<1, \\ 0, & |\omega|>1.\end{cases}$$

证明 矩形脉冲函数 $f(t) = \begin{cases}1, & |t|<1, \\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 的傅里叶变换为

$$\mathscr{F}[f(t)] = \frac{2\sin\omega}{\omega}.$$

利用对称性，得

$$\mathscr{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \pi f(-\omega) = \begin{cases}\pi, & |\omega|<1, \\ 0, & |\omega|>1.\end{cases}$$

例题 6.16 已知 $f(t)=\mathrm{e}^{-\beta t^2}\,(\beta>0)$ 的傅里叶变换为 $\mathscr{F}[f(t)]=\sqrt{\dfrac{\pi}{\beta}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$，求 $f(t)\sin\alpha t$ 的傅里叶变换.

解 $$\mathscr{F}[f(t)\sin\alpha t]=\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{-\beta t^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha t}}{2\mathrm{i}}\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\beta t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}-\mathrm{e}^{-\beta t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha t}]$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}[\mathrm{e}^{-\frac{(\omega+\alpha)^2}{4\beta}}-\mathrm{e}^{-\frac{(\omega-\alpha)^2}{4\beta}}].$$

例题 6.17 计算 $\mathscr{F}[u(5t-2)]$，其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数.

解 方法 1 先用相似性，再用位移性. 令 $g(t)=u(t-2)$，则 $g(5t)=u(5t-2)$.

$$\mathscr{F}[u(5t-2)]=\mathscr{F}[g(5t)]=\frac{1}{5}\mathscr{F}[g(t)]\Big|_{\frac{\omega}{5}}=\frac{1}{5}\mathscr{F}[u(t-2)]\Big|_{\frac{\omega}{5}}$$

$$=\left(\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega}\mathscr{F}[u(t)]\right)\Bigg|_{\frac{\omega}{5}}=\frac{1}{5}\left\{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\right\}\Bigg|_{\frac{\omega}{5}}$$

$$=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}\mathrm{i}\omega}\left[\frac{5}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta\left(\frac{\omega}{5}\right)\right].$$

方法 2 先用位移性，再用相似性. 令 $g(t)=u(5t)$，则 $g\left(t-\dfrac{2}{5}\right)=u(5t-2)$.

$$\mathscr{F}[u(5t-2)]=\mathscr{F}\left[g\left(t-\frac{2}{5}\right)\right]=\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}\mathrm{i}\omega}\mathscr{F}[g(t)]=\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}\mathrm{i}\omega}\mathscr{F}[u(5t)]$$

$$=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}\mathrm{i}\omega}\left\{\mathscr{F}[u(t)]\right\}\Big|_{\frac{\omega}{5}}=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}\mathrm{i}\omega}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\Bigg|_{\frac{\omega}{5}}$$

$$=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}\mathrm{i}\omega}\left[\frac{5}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta\left(\frac{\omega}{5}\right)\right].$$

方法 3 直接计算.

$$\mathscr{F}[u(5t-2)]=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}\mathrm{i}\omega}\mathscr{F}[u(t)]\Big|_{\frac{\omega}{5}}=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}\mathrm{i}\omega}\left[\frac{5}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta\left(\frac{\omega}{5}\right)\right].$$

比较上述三种方法，方法 3 较为简捷. 事实上，本题可直接由傅里叶变换的定义计算.

例题 6.18 设函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$，求函数 $tf(t)$ 的傅里叶变换.

解 显然，函数 $f(t)$ 满足条件. 首先，求 $f(t)$ 的傅里叶变换.

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos\omega t\mathrm{d}t.$$

记 $I=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos\omega t\mathrm{d}t$，经分部积分两次，得 $I=\dfrac{1}{1+\omega^2}$. 从而

$$F(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}.$$

利用微分性得

$$\mathscr{F}[tf(t)]=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)=\frac{-4\mathrm{i}\omega}{(1+\omega^2)^2}.$$

例题 6.19 利用像函数的微分性，求函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-\beta t^2}\,(\beta>0)$ 的傅里叶变换.

解 记 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}dt$, 利用分部积分及微分性质，得

$$\begin{aligned}F(\omega)&=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{-\beta t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{2\beta\mathrm{i}}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}dt\\&=\frac{2\beta\mathrm{i}}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\frac{2\beta\mathrm{i}}{\omega}\mathscr{F}[tf(t)]\\&=\frac{2\beta\mathrm{i}}{\omega}\left[\mathrm{i}\frac{d}{d\omega}F(\omega)\right]=-\frac{2\beta}{\omega}F'(\omega).\end{aligned}$$

由于 $F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\dfrac{\pi}{\beta}}$，因此，$F(\omega)$ 满足微分方程

$$F'(\omega)+\frac{\omega}{2\beta}F(\omega)=0,\ F(0)=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}},$$

上述方程的解为 $F(\omega)=\sqrt{\dfrac{\pi}{\beta}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}$，即函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-t^2}$ 的傅里叶变换为 $\sqrt{\dfrac{\pi}{\beta}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$.

例题 6.20 设 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}x(t)=0,\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt=0$. 求微分、积分方程

$$x'(t)-4\int_{-\infty}^{t}x(s)ds=\delta(t)$$

的解.

解 记 $X(\omega)=\mathscr{F}[x(t)]$，方程两边作傅里叶变换，得

$$\mathrm{i}\omega X(\omega)-\frac{4}{\mathrm{i}\omega}X(\omega)=1.$$

解上述代数方程得

$$X(\omega)=\frac{-\mathrm{i}\omega}{(\omega^2+4)}.$$

由傅里叶逆变换定义

$$x(t)=\frac{-\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+4)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

上述广义积分可利用留数定理计算. 当$t>0$时，

$$x(t)=\frac{-\mathrm{i}}{2\pi}\times 2\pi\mathrm{i}\times\mathrm{Re}\,s\left[\frac{\omega}{(\omega^2+4)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},2\mathrm{i}\right]=\lim_{\omega\to 2\mathrm{i}}\frac{\omega}{\omega+2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}.$$

当$t=0$时，$x(t)=\dfrac{-i}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+4)}d\omega=0.$

当$t<0$时，令$\omega=-u$，仿照$t>0$时计算，得

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+4)}e^{i\omega t}d\omega=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u}{(u^2+4)}e^{iu(-t)}du\\&=\frac{i}{2\pi}\times 2\pi i\times\mathrm{Re}\,s\left[\frac{u}{(u^2+4)}e^{iu(-t)},2i\right]\\&=-\lim_{u\to 2i}\frac{u}{u+2i}e^{iu(-t)}=-\frac{1}{2}e^{2t}.\end{aligned}$$

所以原方程的解为

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-2t}, & t>0,\\ 0, & t=0,\\ -\dfrac{1}{2}e^{2t}, & t<0.\end{cases}$$

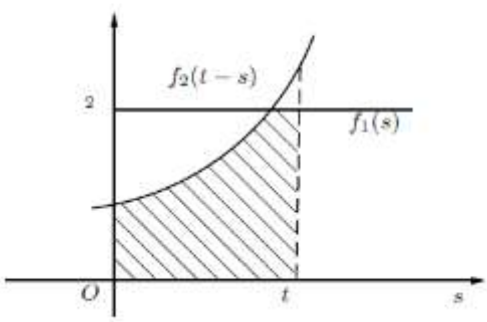
例题 6.21 求下列函数的卷积

$$f_1(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 2, & t\ge 0,\end{cases}\qquad f_2(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{-t}, & t\ge 0.\end{cases}$$

解 由于当$s<0$时，$f_1(s)=0$，当$s>t$时，$f_2(t-s)=0$. 因此，由卷积定义可知，

当$t\le 0$时，$f_1(t)*f_2(t)=0.$ 当$t>0$时，

$$\begin{aligned}f_1(t)*f_2(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(s)f_2(t-s)\mathrm{d}s\\&=\int_0^t f_1(s)f_2(t-s)\mathrm{d}s\\&=\int_0^t 2\mathrm{e}^{-(t-s)}\mathrm{d}s=2\mathrm{e}^{-t}\int_0^t\mathrm{e}^s\mathrm{d}s\\&=2(1-\mathrm{e}^{-t}).\end{aligned}$$



例题 6.22 求$f(t)=tu(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$的傅里叶变换，其中$u(t)$为单位阶跃函数.

解 由于 $\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}]=2\pi\delta(\omega-1)$,

$$\mathscr{F}[tu(t)]=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathscr{F}[u(t)]=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$
$$=-\frac{1}{\omega^2}+\mathrm{i}\pi\delta'(\omega).$$

由卷积定理，得

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[tu(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}]*\mathcal{F}[tu(t)]$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left[2\pi\delta(\omega-1)\right]*\left[-\frac{1}{\omega^2}+\mathrm{i}\pi\delta'(\omega)\right]$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(s-1)\cdot\left[-\frac{1}{(\omega-s)^2}+\mathrm{i}\pi\delta'(\omega-s)\right]ds$$
$$=\left[-\frac{1}{(\omega-1)^2}+\mathrm{i}\pi\delta'(\omega-1)\right].$$

例题 6.23 设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t}f(s)\mathrm{d}s=F(0)\neq 0$, 则

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(s)\mathrm{d}s\right]=\frac{F(\omega)}{\mathrm{i}\omega}+\pi F(0)\delta(0).$$

证明 令 $g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(s)\mathrm{d}s$，则 $g(t)=f(t)*u(t)$.

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(s)ds\right]=\mathscr{F}[f(t)*u(t)]=\mathscr{F}[f(t)]\cdot\mathscr{F}[u(t)]$$
$$=F(\omega)\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]=\frac{F(\omega)}{\mathrm{i}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega).$$

最后一个等式利用了 δ 函数乘时间函数性质，即 $F(\omega)\delta(\omega)=F(0)\delta(\omega)$.

例题 6.24 求解二阶常系数非齐次常微分方程

$$x''(t)-x(t)=-f(t),-\infty<t<+\infty,$$

其中 $f(t)$ 为已知函数.

解 记 $\mathscr{F}\left[x(t)\right]=X(\omega), F(\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]$. 方程两端作傅里叶变换，并利用微分性，得

$$-\omega^2X(\omega)-X(\omega)=-F(\omega).$$

即

$$X(\omega)=\frac{F(\omega)}{1+\omega^2}.$$

上式两端求傅里叶逆变换，并利用卷积定理，得

$$x(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{F(\omega)}{1+\omega^2}\right]=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+\omega^2}\right]*\mathscr{F}^{-1}\ F(\omega)\ .$$

由于

$$\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{-|t|}\right]=\frac{2}{1+\omega^2}.$$

从而

$$x(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}*f(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-|t-\xi|}\mathrm{d}\xi.$$

例题 6.25 利用傅里叶变换，解下列积分方程：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(\xi)}{(t-\xi)^2+a^2}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{t^2+b^2},\quad 0<a<b.$$

解 方程左端可以看成未知函数 $y(t)$ 与函数 $\dfrac{1}{a^2+t^2}$ 的卷积. 记 $Y(\omega)=\mathscr{F}[y(t)]$，

则

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(\xi)}{(t-\xi)^2+a^2}\mathrm{d}\xi\right]=\mathscr{F}\left[y(\mathrm{t})*\frac{1}{a^2+t^2}\right]$$
$$=Y(\omega)\mathscr{F}\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right].$$

利用傅里叶积分公式 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{a^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-a|t|}$ 得

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|\omega|}.$$

方程两端作傅里叶变换，得

$$\frac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-a|\omega|}Y(\omega)=\frac{\pi}{2b}\mathrm{e}^{-b|\omega|},$$

从而，有 $Y(\omega)=\dfrac{a}{b}\mathrm{e}^{-(b-a)|\omega|}$.

$$y(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{a}{b}\mathrm{e}^{-(b-a)|\omega|}\right]=\frac{a}{b}\,\frac{b-a}{\pi}\,\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\pi}{b-a}\mathrm{e}^{-(b-a)|\omega|}\right]$$
$$=\frac{a(b-a)}{\pi b\left[t^2+(b-a)^2\right]}.$$