第七章 傅里叶变换

在自然科学和工程技术中为把复杂的运算转化为较简单的运算，人们常采用变换的方法来达到目的. 在工程数学中，积分变换能将分析运算（如微分、积分）转化为代数运算，正是积分变换的这一特性，使得它成为求解微分方程、积分方程的重要的方法之一. 积分变换理论不仅在数学的诸多分支中得到广泛的应用，而且在许多科学技术领域中，例如物理学、力学、现代光学、无线电技术以及信号处理等方面，作为一种研究工具发挥着十分重要的作用.

所谓积分变换，就是通过特定的积分运算，把某函数类$\mathcal{D}$中的一个函数 $f(t)$，变换成另一函数类$\mathcal{R}$中的一个函数$F(\omega)$. 一般地，含参变量ω的积分

$$F(\omega)=\int_a^b f(t)K(\omega,t)dt \tag{7.1}$$

将某函数类$\mathcal{D}$中的函数 $f(t)$，通过上述的积分运算变成另一函数类$\mathcal{R}$中的函数$F(\omega)$就称为一个积分变换，其中$K(\omega,t)$为一确定的二元函数，称为积分变换的核. 当选取不同的积分变换核和积分域时，就可以得到不同的积分变换. 特别地，当积分核$K(\omega,t)=\mathrm{e}^{-i\omega t}$，且$a=-\infty, b=+\infty$时，称（7.1）中$F(\omega)$为函数 $f(t)$的傅里叶（Fourier）变换，同时，称 $f(t)$为$F(\omega)$的傅里叶逆变换. 如果取$K(\omega,t)=\mathrm{e}^{-\omega t}$，且$a=0, b=+\infty$，称式（7.1）中的$F(\omega)$为函数 $f(t)$的拉普拉斯（Laplace）变换，相应地，称 $f(t)$为$F(\omega)$的拉普拉斯逆变换. 如果取$K(\omega,t)=\sin\omega t$，且$a=0, b=+\infty$， 称式 （7.1） 中的$F(\omega)$为函数 $f(t)$的正弦变换，相应地，称 $f(t)$为$F(\omega)$的正弦逆变换. 取$K(\omega,t)=\cos\omega t$，且$a=0, b=+\infty$，称式 （7.1）中的$F(\omega)$为函数 $f(t)$的余弦变换，相应地，称 $f(t)$为$F(\omega)$的余弦逆变换.

7.1 傅里叶积分公式

7.1.1 傅里叶级数

在工程计算中，常用到随时间而变的周期函数 $f_T(t)$. 最常用的周期函数为三角函数. 人们发现，周期函数均可以用一系列的三角函数的线性组合来逼近. 由于研究周期函数实际上仅须研究其中一个周期内的情况，因此，通常研究在闭区间$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$内函数变化的情况即可.

定理 7.1 设 $f_T(t)$ 是以 $T\left(0<T<+\infty\right)$ 为周期的实函数，且在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷(Dirichlet)条件，即 $f_T(t)$ 在一个周期上满足：（1）连续或只有有限个第一类间断点；（2）只有有限个极值点，则在连续点处，有

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right) \tag{7.2}$$

其中

$$\begin{cases}\omega=\dfrac{2\pi}{T},\\ a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega t dt\left(n=0,1,2,\cdots\right),\\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega t dt\left(n=1,2,3,\cdots\right).\end{cases} \tag{7.3}$$

在间断点处 t_0 有

$$\frac{f_T(t_0+0)+f_T(t_0-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right). \tag{7.4}$$

利用三角函数的复数表示

$$\cos n\omega t=\frac{e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}}{2}，\quad \sin n\omega t=\frac{e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}}{2i}，$$

式(7.2)可化为

$$\begin{aligned}f_T(t)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\frac{e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}}{2}+b_n\frac{e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}}{2i}\right)\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{in\omega t}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-in\omega t}\right).\end{aligned}$$

令

$$c_0=\frac{a_0}{2}，\quad c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}，\quad c_{-n}=\bar{c}_n=\frac{a_n+ib_n}{2}，\quad n=1,2,3,\cdots,$$

则由式（7.3）可得

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-in\omega t}dt\left(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

从而得

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{in\omega t}=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-in\omega t}dt\right]e^{in\omega t}. \tag{7.5}$$

称式(7.5)为傅里叶级数的复数形式. 其物理意义为：周期为T的周期函数$f_T(t)$，可以分解为频率为$\dfrac{2n\pi}{T}$，复振幅为c_n的复简谐波的叠加. 称c_n为$f_T(t)$的离散频谱；$A_n=2|c_n|$为$f_T(t)$的离散振幅频谱；$\arg c_n$为$f_T(t)$的离散相位频谱. 若以$f_T(t)$描述某种信号，则c_n可以刻画$f_T(t)$的频率特征.

例题 7.1 求周期方波 $f_T(t)=\begin{cases}-1, & -\pi\le t<0,\\ 1, & 0\le t<\pi,\end{cases}$ $f_T(t)=f_T(t+2\pi)$ 的傅里叶级数.

解 周期方波$f_T(t)$的图形如图 7.1(a)所示.

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=0,\\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\,\mathrm{e}^{-int}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{e}^{-int}\,dt\\
&= \frac{1}{in\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}0, & n=\pm2,\ \pm4,\ \cdots,\\ -\dfrac{2i}{n\pi}, & n=\pm1,\ \pm3,\ \cdots.\end{cases}
\end{aligned}
$$

或

$$a_n=0,\ \ b_n=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots,\\ \dfrac{4}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots.\end{cases}$$

从而

$$f_T(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)t+\cdots\right],$$
$$(-\infty<t<+\infty\,,\,t\neq 0\,,\pm\pi\,,\pm2\pi\,,\cdots)$$

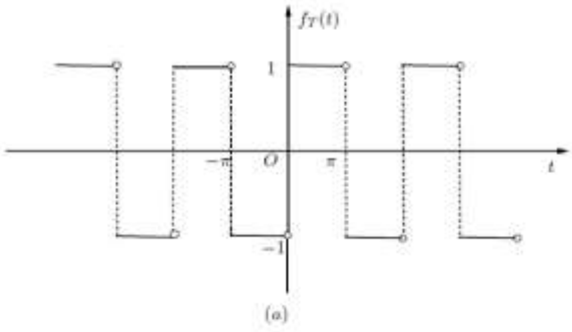
由收敛性定理知，当$t=k\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，级数的和为0. $f_T(t)$的频谱为

$$A_n=2|c_n|=\begin{cases}0, & n=0,\pm2,\pm4,\cdots,\\ \dfrac{2}{n\pi}, & n=\pm1,\pm3,\cdots.\end{cases}$$

方波$f_T(t)$可由不同频率正弦波

$$\frac{4}{\pi}\sin t,\ \ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\sin 3t,\ \ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{5}\sin 5t,\ \ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{7}\sin 7t,\cdots$$

逐个叠加而成.图 7.1(b)为前四个正弦波叠加所得.



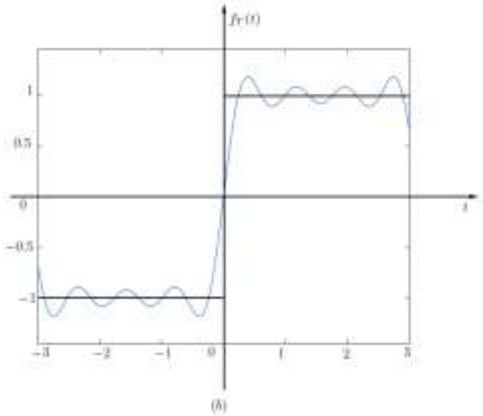


图 7.1 周期方波及其傅里叶级数

7.1.2 傅里叶积分公式

任何一个非周期函数 $f(t)$，都可以看成是由某个周期函数 $f_T(t)$ 当周期当 $T \to +\infty$ 时极限. 事实上,作周期为 T 的周期函数 $f_T(t)$,使其在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 之内等于 $f(t)$,在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 之外按周期 T 延拓至整个数轴上，则 T 越大， $f_T(t)$ 与 $f(t)$ 相等的范围也越大，这就说明当 $T \to +\infty$ 时，周期函数 $f_T(t)$ 便可转化为 $f(t)$，即有

$$\lim_{T\to+\infty} f_T(t) = f(t).$$

因此，非周期函数 $f(t)$ 的傅里叶展开式可以看成周期函数 $f_T(t)$ 的傅里叶展开式当 $T \to +\infty$ 的极限形式，即

$$f(t) = \lim_{T\to+\infty} f_T(t) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau \right] e^{in\omega t}. \tag{7.6}$$

图 7.2 ω_n 的分布

令

$$\omega_n = n\omega, \Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

当 n 取一切整数时，ω_n 所对应的点便均匀地分布在整个数轴上（如图 7.2 所示）. 由于当 $\Delta\omega_n \to 0$ 等价于 $T \to \infty$，于是

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau\right]e^{i\omega_n t} \\
&= \lim_{\Delta\omega_n\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau\right]e^{i\omega_n t}\Delta\omega_n.
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

记

$$F_T(\omega_n)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau,$$

则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_T(\omega_n)e^{i\omega_n t}\Delta\omega_n.$$

由于

$$F(\omega_n)=\lim_{T\to+\infty}F_T(\omega_n)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau.$$

由积分的定义得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega_n)e^{i\omega_n t}d\omega_n,$$

即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

从而得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega. \tag{7.8}$$

称式（7.8）为非周期函数 $f(t)$ 的傅里叶积分公式.

将上述推导归纳为如下定理：

定理 7.2 (傅里叶积分定理) 若函数 $f(t)$ 在任意有限区间上满足狄利克莱条件，且在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，则 $f(t)$ 可表示傅里叶积分(7.8)的形式，且当 t 为 $f(t)$ 的连续点时

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega=f(t), \tag{7.9}$$

当 t 为 $f(t)$ 的间断点时

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega=\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}. \tag{7.10}$$

$f(t)$ 的傅里叶积分公式也可以转化为三角形式. 由式(7.8)得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau\right]d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau+i\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega.$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$ 是 ω 的奇函数，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$ 为 ω 的偶函数，从而上式可化为

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega. \tag{7.11}$$

称式(7.11)为 $f(t)$ 的傅里叶积分的三角表示式.

利用余弦函数的和差化积公式，式(7.11)可化为

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\right]\cos\omega td\omega\\&\quad+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\right]\sin\omega td\omega\\&=\int_{0}^{+\infty}\left[A(\omega)\cos\omega\mathrm{t}+\mathrm{B}(\omega)\sin\omega\mathrm{t}\right]d\omega,\end{aligned} \tag{7.12}$$

其中

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau,\ B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau.$$

特别地，当 $f(t)$ 为偶函数时

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau,\ B(\omega)=0.$$

此时

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}A(\omega)\cos\omega\mathrm{t}d\omega=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\left[f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\right]\cos\omega td\omega. \tag{7.13}$$

称(7.13)为余弦傅里叶积分公式.

同理，当 $f(t)$ 为奇函数时，

$$A(\omega)=0,\ B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau.$$

此时

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}B(\omega)\sin\omega td\omega=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\left[f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right]\cos\omega td\omega. \tag{7.14}$$

称(7.14)为正弦傅里叶积分公式.

当 $f(t)$ 定义在 $(0,\ +\infty)$ 时，可作奇延拓或偶延拓到 $(-\infty,\ +\infty)$，从而得到正弦或余弦傅里叶积分公式.

例题 7.2 求函数 $f(t)=e^{-\beta|t|}$ $(\beta>0)$ 的傅里叶积分.

解 由于 $f(t)$ 为偶函数，故，

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\right]\cos\omega t d\omega \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta\tau}\cos\omega\tau d\tau\right]\cos\omega t d\omega.
\end{aligned}
$$

记 $I=\int_0^{+\infty} e^{-\beta\tau}\cos\omega\tau d\tau$，经分部积分两次，得 $I=\dfrac{\beta}{\omega^2+\beta^2}$，从而

$$
f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t d\omega.
$$

由此可得广义积分

$$
\int_0^{+\infty}\frac{1}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}.
$$

7.2 傅里叶变换

7.2.1 傅里叶变换的定义

在傅里叶积分公式中，若 t 为 $f(t)$ 的连续点，则有

$$
f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega.
$$

如果记

$$
F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt,\ -\infty<\omega<+\infty, \tag{7.15}
$$

则

$$
f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{7.16}
$$

定义 7.1 设 $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 分别定义在 R 上的实值和复值函数，称它们为一组傅里叶变换对. $F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的像函数或傅里叶变换，记为 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$；$f(t)$ 为像 $F(\omega)$ 的原函数或傅里叶逆变换，记为 $f(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]$.

记

$$
\mathcal{D}=\{f(t)\mid f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]\},
$$

$$
\mathcal{R}=\{F(\omega)\mid F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]\},
$$

称 $\mathcal{D}$ 为原像空间，$\mathcal{R}$ 为像空间. 因此，傅里叶变换与逆变换建立了原像空间与像空间之间的一一对应.

在频谱分析中，傅里叶变换的物理意义是将连续信号从时间域表达式 $f(t)$ 变换到频率

域表达式$F(\omega)$；而傅里叶逆变换将连续信号的频域表达式$F(\omega)$求得时域表达式$f(t)$. 因此，傅里叶变换对是一个信号的时域表达式$f(t)$和频域表达式$F(\omega)$之间的一一对应关系. 时域表达式$f(t)$是一个关于时间的函数，表达的是在不同时间点函数幅度值的不同；频域表达式$F(\omega)$表达的是把信号分解为不同频率的指数信号的组合(只不过这些指数信号的频率变化是连续的)，这些不同频率的指数信号在总信号中所占分量的大小，自变量为ω. 两者并非是不同的信号，而是同一信号的不同表示.

傅里叶变换$F(\omega)$又称为$f(t)$的频谱函数，而它的模$|F(\omega)|$称为$f(t)$的振幅频谱（简称为频谱）. 由于ω是连续变化的，我们称之为连续频谱. 对一个时间函数$f(t)$作傅里叶变换，就是求这个时间函数$f(t)$的频谱，而$\arg F(\omega)$称为$f(t)$的相位频谱. 不难证明，频谱为偶函数，即$|F(\omega)|=|F(-\omega)|$.

由于傅里叶变换定义在傅里叶积分基础上，因此，傅里叶积分存在定理，即为$f(t)$的傅里叶变换存在的条件. 其含义是：非周期信号的总能量(即时域绝对值平方积分)有限，则该信号傅里叶变换存在. 但是，此条件仅为充分条件. 满足傅里叶积分存在定理条件的$f(t)$，仅当还满足条件

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[f(t+0)+f(t-0)\right]$$

时，有$f(t)\in\mathcal{D}$，但在间断点处，上述条件并不影响$F(\omega)$的值. 因此约定：满足傅里叶积分存在定理条件的函数$f(t)$与$g(t)$，只要在连续点处有$f(t)=g(t)$，则认为他们是同一函数.

例 7.3 求函数$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-\beta t}, & t\geq 0\end{cases}$的傅里叶变换和频谱，并计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega,$$

其中$\beta>0$.

解 根据傅里叶变换定义，有

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-\beta t}e^{-i\omega t}dt$$
$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-(\beta+i\omega)t}dt=\left.\frac{-e^{-(\beta+i\omega)t}}{\beta+i\omega}\right|_{0}^{+\infty}$$
$$=\frac{\beta-i\omega}{\beta^2+\omega^2}.$$

频谱为

$$\left|F(\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}},\quad \arg F(\omega)=-\arctan\frac{\omega}{\beta}.$$

根据傅里叶逆变换的定义，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-i\omega}{\beta^2+\omega^2}e^{i\omega t}d\omega.$$

注意到$e^{i\omega t}=\cos\omega t+i\sin\omega t$，由上式可得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-i\omega}{\beta^2+\omega^2}(\cos\omega t+i\sin\omega t)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega.$$

因此

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\begin{cases}0, & t<0,\\ \pi/2, & t=0,\\ \pi e^{-\beta t}, & t>0.\end{cases}$$

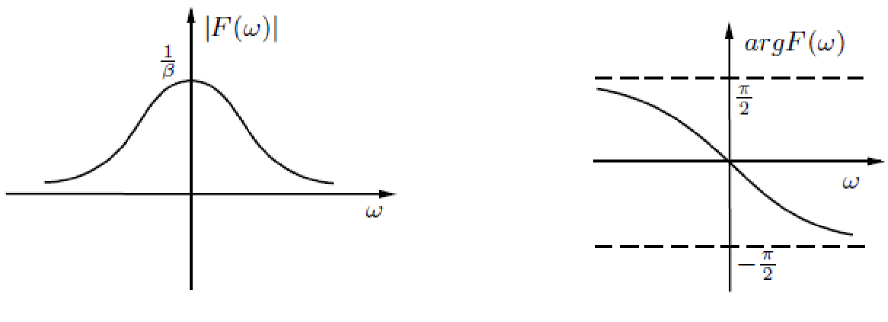


图 7.3 指数衰减函数的频谱图

例题 7.4 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 的傅里叶变换及其积分表达式.

解 根据傅里叶变换的定义，有

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-1}^{+1} e^{-i\omega t}dt = \left.\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right|_{-1}^{+1} \\ &= -\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega} - e^{i\omega}) = \frac{2\sin\omega}{\omega}. \end{aligned}$$

由傅里叶逆变换定义

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F(\omega)\cos\omega t d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{2\sin\omega}{\omega}\cos\omega t d\omega \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega. \end{aligned}$$

由此可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & |t|<1, \\ \dfrac{\pi}{4}, & |t|=1, \\ 0, & |t|>1. \end{cases}$$

当$t=0$时，有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

上述积分称为狄利克莱积分.

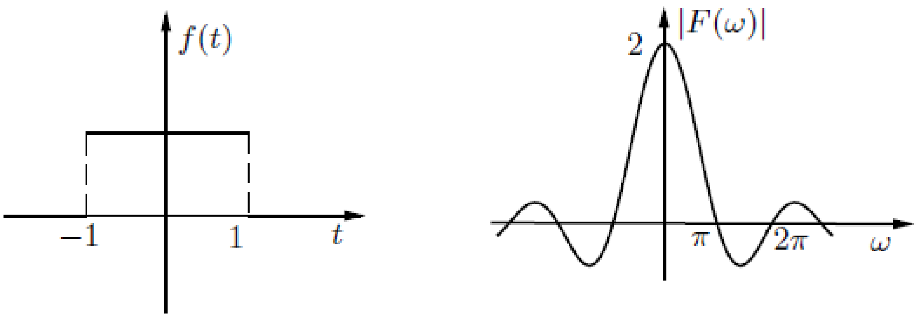


图 7.4 矩形脉冲及振幅频谱

在实际应用中，为了保持傅里叶变换及逆变换的对称性，常还采用如下两种定义式：

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega,$$

和

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\omega t}dt,\qquad f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i2\pi\omega t}d\omega,$$

由于采用不同的定义式，往往给出不同的结果. 本书约定，傅里叶变换和逆变换分别按式（7.15）和式（7.16）定义.

7.2.2 余弦与正弦傅里叶变换

相对于余弦积分与正弦积分，我们可以给出余弦与正弦傅里叶变换.

当 $f(t)$ 为偶函数时，有如下的余弦积分公式

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\right]\cos\omega t d\omega .$$

记

$$\mathcal{F}_c[f(t)]=F_c(\omega)=\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt, \tag{7.17}$$

则

$$\mathcal{F}_c^{-1}[F_c(\omega)]=f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos\omega t d\omega. \tag{7.18}$$

定义 7.2 称 $\mathcal{F}_c[f(t)]$. 和 $\mathcal{F}_c^{-1}[F_c(\omega)]$ 为余弦傅里叶变换和余弦傅里叶逆变换.

同理，当 $f(t)$ 为奇函数时，利用正弦积分公式

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right]\sin\omega t d\omega .$$

记

$$\mathcal{F}_s[f(t)]=F_s(\omega)=\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt, \tag{7.19}$$

则

$$\mathcal{F}_s^{-1}[F_s(\omega)]=f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin\omega t d\omega. \tag{7.20}$$

定义 7.3 称 $\mathcal{F}_s[f(t)]$ 和 $\mathcal{F}_s^{-1}[F_s(\omega)]$ 为正弦傅里叶变换和正弦傅里叶逆变换.

不难证明：当 $f(t)$ 为偶函数时

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=2\mathcal{F}_c[f(t)]=2F_c(\omega);$$

当 $f(t)$ 为奇函数时

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=-2i\mathcal{F}_s[f(t)]=-2iF_s(\omega).$$

例题 7.5 已知

$$f(t)=\begin{cases} t,\ 0\le t<1,\\ 0,\ t\ge 1.\end{cases}$$

求函数 $f(t)$ 傅里叶正弦与余弦变换.

解 由式（7.19）得

$$
\begin{aligned}
F_s(\omega) &= \mathcal{F}_s[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt \\
&= \int_0^1 t\sin\omega t dt = \left(-\frac{t}{\omega}\cos\omega t\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{\omega}\int_0^1 \cos\omega t dt \\
&= -\frac{\cos\omega}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega t\Big|_0^1 = \frac{\sin\omega}{\omega^2} - \frac{\cos\omega}{\omega}.
\end{aligned}
$$

同理，由式（7.17）得

$$
\begin{aligned}
F_c(\omega) &= \mathcal{F}_c[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt \\
&= \int_0^1 t\cos\omega t dt = \left(\frac{t}{\omega}\sin\omega t\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{\omega}\int_0^1 \sin\omega t dt \\
&= \frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\cos\omega t\Big|_0^1 = \frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{\cos\omega}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}.
\end{aligned}
$$

7.3 广义傅里叶变换

在物理学和工程技术中，有许多重要函数不满足傅里叶积分定理中的绝对可积条件，即不满足条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty.$$

例如常数，符号函数，单位阶跃函数以及正弦、余弦函数等，都无法确定其傅里叶变换. 这无疑限制了傅里叶变换的应用范围.

引入单位脉冲函数及其傅里叶变换后，可以扩充原像空间与像空间. 我们引入广义傅里叶变换概念是指 δ 函数及其相关函数的傅里叶变换. 所谓广义是相对于古典意义而言的，在广义意义下，同样可以说，原像函数 $f(t)$ 和像函数 $F(\omega)$ 构成一个傅里叶变换对.

7.3.1 δ 函数

在众多实际问题中，常常会碰到单位脉冲函数. 因为许多物理现象，除了连续分布的物理量外，常涉及集中于一点的量（点源），例如，单位质点的质量密度；单位点电荷的电荷密度；集中于一点的单位磁通的磁感强度等等. 或者具有脉冲性质的量，如：力学中，研究机械系统受冲击力作用后的运动情况；电学中，研究受具有脉冲性质的电势作用后所产生的电流等等. 研究此类问题就会产生我们要介绍的脉冲函数. 有了这种函数，对于许多集中在一点或一瞬间的量，例如点电荷、点热源、集中于一点的质量以及脉冲技术中的非常狭窄的脉冲等，就能够像处理连续分布的量那样，用统一的方式来加以解决.

考虑原电流为零的电路中，在某一瞬时(设为 $t=0$)输入一单位电量的脉冲，现在要确定电路上的电流 $i(t)$. 以 $q(t)$ 表示上述电路中的电荷函数，则

$$q(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0,\\ 1, & t=0.\end{cases}$$

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}.$$

当$t\neq 0$时，$i(t)=0$. 由于$q(t)$在$t=0$这点不连续，因而在普通导数意义下，$q(t)$在此点不可导. 如果我们形式地计算此导数，则

$$i(0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(0+\Delta t)-q(0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(-\frac{1}{\Delta t}\right)=\infty.$$

上式表明，在通常意义下的函数类中找不到一个函数能够表示这样的电流强度. 为了确定这样的电流强度，需引进一个称之为狄拉克(Dirac)函数的广义函数，简称为δ函数：

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0, & t\neq t_0\ ,\\ \infty, & t=t_0\ .\end{cases}$$

定义 7.4 如果函数$\delta(t-t_0)$满足下列条件：

（1）$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0, & t\neq t_0\ ,\\ \infty, & t=t_0,\end{cases}$（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=1$. 则称函数$\delta(t-t_0)$为$\delta$函数.

可以将δ函数作为脉冲函数的极限来理解. 给定函数序列

$$\delta_\epsilon(t-t_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\epsilon}, & |t-t_0|<\epsilon\ ,\\ 0, & |t-t_0|>\epsilon\ .\end{cases}$$

它描述了在$t=t_0$处的矩形脉冲函数. 直接计算可知

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\epsilon(t-t_0)dt=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{1}{2\epsilon}dt=1,$$

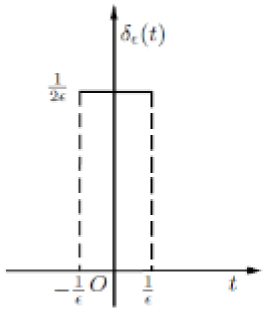


图 7.5 矩形脉冲$\delta_\varepsilon(t)$

且

$$\lim_{\epsilon\to 0}\delta_\epsilon(t-t_0)=\begin{cases}0, & t\neq t_0,\\ \infty, & t=t_0.\end{cases}$$

因此，δ函数也可由矩形脉冲函数序列$\delta_\epsilon(t-t_0)$的极限来定义.

δ函数非通常意义之下函数，而是一个广义函数. 由$\delta_\epsilon(x-x_0)$的定义可知，对任意在$t=t_0$处连续的函数$\varphi(t)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\varphi(t)=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\epsilon(t-t_0)\varphi(t)dt=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon}\frac{1}{2\epsilon}\varphi(t)dt=\varphi(t_0).$$

因此，δ 函数常以广义函数形式定义.

定义 7.5 对任意在 $t=t_0$ 处连续的函数 $\varphi(t)$，如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\delta(t-t_0)dt=\varphi(t_0), \tag{7.21}$$

则称 $\delta(t-t_0)$ 为 δ 函数，其中 $\varphi(t)$ 称为检验函数. 式（7.21）又称为 δ 函数的筛选性.

由于

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(t-c)dt=\begin{cases}1, & t>c,\\ 0, & t<c.\end{cases}$$

形式上两端关于 t 求导，得

$$\frac{d}{dt}u(t-c)=\delta(t-c),$$

其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数，因此，δ 函数可作为单位阶跃函数的导数(广义).

由 δ 函数的广义函数定义，可以定义 δ 函数的导数.

定义 7.6 设函数 $\varphi(t)$ 在 $t=t_0$ 处具有任意阶导数，且满足 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}\varphi^{(k)}(t)=0,$ 如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\varphi(t)dt=(-1)^k\varphi^{(k)}(t_0), \tag{7.22}$$

则称 $f(t)$ 为 δ 函数 $\delta(t-t_0)$ 在 $t=t_0$ 处的 k 阶导数，记为 $\delta^{(k)}(t-t_0)$.

7.3.2 基本函数的广义傅里叶变换

本节给出常见函数的广义傅里叶变换.

1. δ 函数

例题 7.6 求 δ 函数的傅里叶变换，并求积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}d\omega$.

解 根据傅里叶变换的定义和 δ 函数的性质，得

$$\mathcal{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}dt=e^{-i\omega t}\,|_{t=0}=1. \tag{7.23}$$

于是 $\delta(t)$ 与常数 1 构成傅里叶变换对. 于是按傅里叶逆变换的定义，有

$$\delta(t)=\mathcal{F}^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}d\omega. \tag{7.24}$$

从而得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}d\omega=2\pi\delta(t). \tag{7.25}$$

同理可得 $\delta(t-t_0)$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)e^{-i\omega t}dt=e^{-i\omega t}\big|_{t=t_0}=e^{-i\omega t_0}. \tag{7.26}$$

且

$$\delta(t-t_0)=\mathcal{F}^{-1}[e^{-i\omega t_0}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega(t-t_0)}d\omega. \tag{7.27}$$

从而得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega(t-t_0)}d\omega=2\pi\delta(t-t_0). \tag{7.28}$$

需说明的是，δ 函数的傅里叶变换采用的仍是傅里叶变换的古典定义，但积分是根据 δ 函数广义意义下的定义和运算性质所得.

2. 单位阶跃函数 $u(t)$

例题 7.7 验证：单位阶跃函数 $u(t)$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}\left[u(t)\right]=F(\omega)=\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega). \tag{7.29}$$

解 由傅里叶逆变换的定义，得

$$\begin{aligned}
f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right]e^{i\omega t}d\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega)e^{i\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\omega}e^{i\omega t}d\omega\\
&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{i\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t+i\sin\omega t}{i\omega}d\omega\\
&=\frac{1}{2}e^{i\omega t}\big|_{\omega=0}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega.
\end{aligned}$$

由狄利克莱积分得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & t>0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & t<0.\end{cases}$$

从而

$$f(t)=u(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$$

3. 指数函数 $e^{i\omega_0 t}$

例题 7.8 求指数函数 $e^{i\omega_0 t}$ 的傅里叶变换.

解 由傅里叶变换定义，有

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega_0 t}e^{i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt,$$

利用式（7.28），得

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0). \tag{7.30}$$

特别地，当 $\omega_0=0$ 时，得到常数1的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\omega). \tag{7.31}$$

4. 正弦函数 $\sin\omega_0 t$ 和余弦函数 $\cos\omega_0 t$

例题 7.9 求正弦函数 $\sin\omega_0 t$ 与余弦函数 $\cos\omega_0 t$ 的傅里叶变换.

解 根据傅里叶变换定义，并利用式（7.28），得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\sin\omega_0 t]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega_0 t e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-i(\omega-\omega_0)t}-e^{-i(\omega+\omega_0)t}\right]dt\\&=\frac{1}{2i}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\delta(\omega+\omega_0)]\\&=i\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)].\end{aligned}$$

即

$$\mathcal{F}[\sin\omega_0 t]=i\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]. \tag{7.32}$$

同理可得

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t]=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]. \tag{7.33}$$

7.4 傅里叶变换与逆变换的性质

本节介绍傅里叶变换的几个重要性质，为了叙述方便起见，假定在这些性质中，凡是需要求傅里叶变换的函数都满足存在性定理中的条件，而在证明这些性质时，不再重述. 在实际应用时，若能熟悉基本函数的傅里叶变换，则常见函数的傅里叶变换和逆变换无须用公式计算而可由傅里叶变换的性质导出.

7.4.1 傅里叶变换基本性质

性质 1（线性性质） 设 α,β 为任意的常数，$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)],G(\omega)=\mathcal{F}[g(t)]$，则

$$\mathcal{F}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha F(\omega)+\beta G(\omega), \tag{7.34}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\alpha F(\omega)+\beta G(\omega)]=\alpha f(t)+\beta g(t). \tag{7.35}$$

证明 直接由傅里叶变换和逆变换的定义可得.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[\alpha f(t)+\beta g(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\alpha f(t)+\beta \mathrm{g(t)}\right]e^{-i\omega t}dt \\
&= \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt+\beta\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \alpha F(\omega)+\beta G(\omega).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[\alpha F(\omega)+\beta G(\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\alpha F(\omega)+\beta \mathrm{G}(\omega)]e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega+\frac{\beta}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\
&= \alpha f(t)+\beta g(t).
\end{aligned}
$$

例题 7.10 求函数$\sin^2 t$的傅里叶变换.

解 利用线性性质及常数1和余弦函数$\cos t$的傅里叶变换，得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[\sin^2 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right]=\frac{1}{2}\mathcal{F}[1]-\frac{1}{2}\mathcal{F}[\cos 2t] \\
&= \pi\delta(\omega)-\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)].
\end{aligned}
$$

例题 7.11 设$F(\omega)=\pi\delta(\omega+1)-\dfrac{i}{\omega+1}$，求$F(\omega)$的傅里叶逆变换.

解 利用线性性质，得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] &= \mathcal{F}^{-1}\left[\pi\delta(\omega+1)\right]-\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i}{\omega+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}e^{-it}-\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i}{\omega+1}\right].
\end{aligned}
$$

直接计算，并利用狄利克莱积分，得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i}{\omega+1}\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{\omega+1}e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{\omega+1}e^{i(\omega+1)t}e^{-it}d\omega \\
&= \frac{e^{-it}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ie^{i(\omega+1)t}}{\omega+1}d(\omega+1)=-\frac{e^{-it}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}d(\omega+1) \\
&= -\frac{e^{-it}}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-it}, & t<0, \\ -\dfrac{1}{2}e^{-it}, & t>0.\end{cases}
\end{aligned}
$$

从而得

$$
\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=u(t)e^{-it},
$$

其中$u(t)$为单位阶跃函数.

性质 2（对称性） 设$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，则

$$\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega). \tag{7.36}$$

证明 由傅里叶逆变换定义，有

$$f(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{-i\omega t}d\omega.$$

从而

$$\mathcal{F}[F(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)e^{-i\omega t}dt=2\pi f(-\omega).$$

例题 7.12 利用矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|<1,\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 的傅里叶变换，证明:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\begin{cases}\pi, & |\omega|<1,\\ 0, & |\omega|>1.\end{cases}$$

证明 由例题 7.4，矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|<1,\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(t)]=\frac{2\sin\omega}{\omega}.$$

利用对称性，得

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\pi f(-\omega)=\begin{cases}\pi, & |\omega|<1,\\ 0, & |\omega|>1.\end{cases}$$

性质 3 **（位移性）**设 $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，$t_0$ 和 ω_0 为常数，则

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)]=e^{-i\omega t_0}F(\omega), \tag{7.37}$$

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0), \tag{7.38}$$

或

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=e^{i\omega_0 t}f(t).$$

证明 仅证明式（7.37）. 令 $s=t-t_0$，则

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t-t_0)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-i\omega(s+t_0)}ds\\&=e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-i\omega s}ds=e^{-i\omega t_0}F(\omega).\end{aligned}$$

例题 7.13 已知函数 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$，求函数 $f(t)\sin\omega_0 t$ 和 $f(t)\cos\omega_0 t$ 的傅里叶变换，其中 ω_0 为常数.

解 利用傅里叶逆变换的位移性（7.38)，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)\sin\omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[f(t)\left(\frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2i}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2i}\left\{\mathcal{F}\left[f(t)e^{i\omega_0 t}\right]-\mathcal{F}\left[f(t)e^{-i\omega_0 t}\right]\right\}\\ &= \frac{i}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)].\end{aligned}$$

同理可得

$$\mathcal{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)].$$

性质 4（相似性） 设 $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，$a\neq 0$，则

$$\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right), \tag{7.39}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(a\omega)]=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{t}{a}\right). \tag{7.40}$$

证明 仅证明傅里叶变换的相似性. 令 $s=at$，当 $a>0$ 时，

$$\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-i\omega\frac{s}{a}}ds=\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

同理，当 $a<0$ 时

$$\mathcal{F}[f(at)]=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-i\omega\frac{s}{a}}ds=-\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

因此，当 $a\neq 0$ 时，式（7.39）成立.

同理可证傅里叶逆变换的相似性.

更一般地，有如下的结论

$$\mathcal{F}[f(at-t_0)]=\frac{1}{|a|}e^{-i\left(\frac{t_0}{a}\right)\omega}F\left(\frac{\omega}{a}\right). \tag{7.41}$$

作为练习，请读者自行证明.

例题 7.14 计算 $\mathcal{F}[u(5t-2)]$，其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数.

解 方法 1 先用相似性，再用位移性. 令 $g(t)=u(t-2)$，则 $g(5t)=u(5t-2)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(5t-2)] &= \mathcal{F}[g(5t)]=\frac{1}{5}\mathcal{F}[g(t)]\Big|_{\frac{\omega}{5}}=\frac{1}{5}\mathcal{F}[u(t-2)]\Big|_{\frac{\omega}{5}}\\ &= \left(\frac{1}{5}e^{-2i\omega}\mathcal{F}[u(t)]\right)\Big|_{\frac{\omega}{5}}=\frac{1}{5}\left\{e^{-2i\omega}\left[\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\right\}\Big|_{\frac{\omega}{5}}\\ &= \frac{1}{5}e^{-\frac{2}{5}i\omega}\left[\frac{5}{i\omega}+\pi\delta\left(\frac{\omega}{5}\right)\right].\end{aligned}$$

方法 2 先用位移性，再用相似性. 令 $g(t)=u(5t)$，则 $g\left(t-\dfrac{2}{5}\right)=u(5t-2)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(5t-2)]&=\mathcal{F}\left[g\left(t-\frac{2}{5}\right)\right]=e^{-\frac{2}{5}i\omega}\mathcal{F}[g(t)]=e^{-\frac{2}{5}i\omega}\mathcal{F}[u(5t)]\\&=\frac{1}{5}e^{-\frac{2}{5}i\omega}\left\{\mathcal{F}[u(t)]\right\}\Big|_{\frac{\omega}{5}}=\frac{1}{5}e^{-\frac{2}{5}i\omega}\left[\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\Bigg|_{\frac{\omega}{5}}\\&=\frac{1}{5}e^{-\frac{2}{5}i\omega}\left[\frac{5}{i\omega}+\pi\delta\left(\frac{\omega}{5}\right)\right].\end{aligned}$$

方法 3 直接由式（7.41）计算.

$$\mathcal{F}[u(5t-2)]=\frac{1}{5}e^{-\frac{2}{5}i\omega}\mathcal{F}[u(t)]\Big|_{\frac{\omega}{5}}=\frac{1}{5}e^{-\frac{2}{5}i\omega}\left[\frac{5}{i\omega}+\pi\delta\left(\frac{\omega}{5}\right)\right].$$

比较上述三种方法，方法 3 较为简捷. 事实上，本题可直接由傅里叶变换的定义计算.

性质 5（微分性） 设 $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$.

（1） 原函数的微分性 若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}f(t)=0$，则

$$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega). \tag{7.42}$$

（2）像函数的微分性

$$F'(\omega)=-i\mathcal{F}[tf(t)]. \tag{7.43}$$

证明

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(t)e^{-i\omega t}dt\\&=f(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+i\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\\&=i\omega F(\omega).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F'(\omega)&=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d\omega}f(t)e^{-i\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)(-it)e^{-i\omega t}dt=-i\mathcal{F}[tf(t)].\end{aligned}$$

一般地，若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}f^{(k)}(t)=0\,(k=0,1,\cdots n-1)$，则

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^nF(\omega). \tag{7.44}$$

类似地，有

$$F^{(n)}(\omega)=(-i)^n\mathcal{F}[t^nf(t)]. \tag{7.45}$$

需指出的是，附件条件 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}f^{(k)}(t)=0\,(k=0,1,\cdots n-1)$ 目的是为证明式（7.44）方

便，事实上，满足傅里叶变换存在性条件的函数 $f^{(k)}(t)$，必满足附件条件.

例题 7.15 设函数 $f(t)=e^{-|t|}$，求函数 $tf(t)$ 的傅里叶变换.

解 显然，函数 $f(t)$ 满足条件. 首先，求 $f(t)$ 的傅里叶变换.

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}e^{-i\omega t}dt$$
$$=2\int_{0}^{+\infty}e^{-t}\cos\omega t dt.$$

记 $I=\int_{0}^{+\infty}e^{-t}\cos\omega t dt$，经分部积分两次，得 $I=\dfrac{1}{1+\omega^2}$. 从而

$$F(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}.$$

利用微分性得

$$\mathcal{F}[tf(t)]=i\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{-4i\omega}{(1+\omega^2)^2}.$$

性质 6（积分性） 设 $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，如果 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau=0$，则

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{i\omega}F(\omega). \tag{7.46}$$

证明 令 $g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$，则 $g'(t)=f(t)$，且 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}g(t)=0$. 对 $g(t)$ 应用微分性得

$$\mathcal{F}[g'(t)]=i\omega\mathcal{F}[g(t)].$$

从而

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{i\omega}\mathcal{F}[f(t)]=\frac{1}{i\omega}F(\omega).$$

如果 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau=F(0)\neq 0,$ 则利用卷积性质可得

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{i\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega).$$

傅里叶变换的微分性和积分性表明：原函数的微分和积分的运算经过傅里叶变换后，变成了像函数的代数运算. 因此，利用傅里叶变换可以求某些线性微分、积分方程.

例题 7.16 设 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}x(t)=0, \int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt=0.$ 求微分、积分方程

$$x'(t)-4\int_{-\infty}^{t}x(s)ds=\delta(t)$$

的解.

解 记 $X(\omega)=\mathcal{F}[x(t)]$，方程两边作傅里叶变换，得

$$i\omega X(\omega)-\frac{4}{i\omega}X(\omega)=1.$$

解上述代数方程得

$$X(\omega)=\frac{-i\omega}{(\omega^2+4)}.$$

由傅里叶逆变换定义

$$x(t)=\frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+4)}e^{i\omega t}d\omega.$$

上述广义积分可利用留数定理计算. 当$t>0$时,

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{-i}{2\pi}\times 2\pi i\times \mathrm{Res}\left[\frac{\omega}{(\omega^2+4)}e^{i\omega t},2i\right]\\&=\lim_{\omega\to 2i}\frac{\omega}{\omega+2i}e^{i\omega t}=\frac{1}{2}e^{-2t}.\end{aligned}$$

当$t=0$时, $x(t)=\frac{-i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+4)}d\omega=0.$

当$t<0$时, 令$\omega=-u$, 仿照$t>0$时计算, 得

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+4)}e^{i\omega t}d\omega=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u}{(u^2+4)}e^{iu(-t)}du\\&=\frac{i}{2\pi}\times 2\pi i\times \mathrm{Res}\left[\frac{u}{(u^2+4)}e^{iu(-t)},2i\right]\\&=-\lim_{u\to 2i}\frac{u}{u+2i}e^{iu(-t)}=-\frac{1}{2}e^{2t}.\end{aligned}$$

所以原方程的解为

$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-2t}, & t>0,\\ 0, & t=0,\\ -\frac{1}{2}e^{2t}, & t<0.\end{cases}$$

7.4.2 傅里叶变换卷积性质

首先给出$(-\infty,+\infty)$上卷积的定义.

定义 7.7 设 $f_1(t),f_2(t)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的两个函数, 如果积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(s)f_2(t-s)ds$$

存在, 称其为函数 $f_1(t),f_2(t)$的卷积, 记为

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(s)f_2(t-s)ds. \quad (7.47)$$

例题 7.17 求下列函数的卷积

$$f_1(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 2, & t\geq 0,\end{cases}\qquad f_2(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{-t}, & t\geq 0.\end{cases}$$

解 由于当$s<0$时，$f_1(s)=0$，当$s>t$时，$f_2(t-s)=0$. 因此，由卷积定义可知，

当$t\leq 0$时， $f_1(t)*f_2(t)=0$. 当$t>0$时，

$$\begin{aligned}f_1(t)*f_2(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(s)f_2(t-s)ds\\&=\int_0^t f_1(s)f_2(t-s)ds\\&=\int_0^t 2e^{-(t-s)}ds=2e^{-t}\int_0^t e^s ds\\&=2(1-e^{-t}).\end{aligned}$$

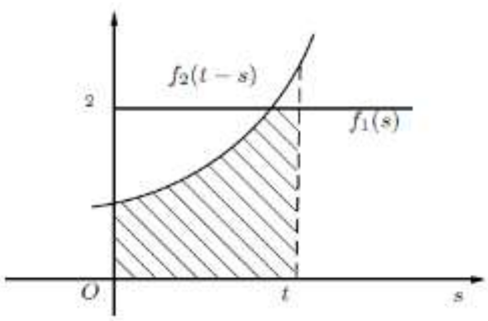


图 7.6 积分区域

对于傅里叶变换有如下的卷积定理.

定理 7.3 （卷积定理）设$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$， $G(\omega)=\mathcal{F}[g(t)]$，则

$$\mathcal{F}[f*g]=\mathcal{F}[f(t)]\cdot\mathcal{F}[g(t)]=F(\omega)\cdot G(\omega), \tag{7.48}$$

$$\mathcal{F}[f\cdot g]=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f(t)]*\mathcal{F}[g(t)]=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega). \tag{7.49}$$

证明

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f*g]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)g(t-s)ds\right]e^{-i\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}g(t-s)e^{-i\omega t}dt\right]ds\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)\mathcal{F}[g(t-s)]ds.\end{aligned}$$

令$\xi=t-s$，则

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g(t-s)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t-s)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\xi)e^{-i\omega\xi}e^{-i\omega s}d\xi\\&=e^{-i\omega s}G(\omega).\end{aligned}$$

从而

$$\mathcal{F}[f*g]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-i\omega s}G(\omega)ds=F(\omega)\cdot G(\omega).$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f\cdot g]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(t)e^{-i\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(s)e^{ist}ds\right]g(t)e^{-i\omega t}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{s})\left[\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-i(\omega-s)t}dt\right]ds\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(s)G(\omega-s)ds\\&=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega).\end{aligned}$$

称式（7.48）为时域卷积定理，式（7.49）为频域卷积定理.

卷积定理建立了时域与频域的之间最重要的联系，即时域的卷积对应频域的乘积. 利用傅里叶变换的性质，可以将复杂的卷积、微积分关系式表示为简单的代数关系式，这将为我们对复杂系统的研究带来极大的方便.

例题 7.18 求 $f(t)=tu(t)e^{it}$ 的傅里叶变换，其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数.

解 由于 $\mathcal{F}[e^{it}]=2\pi\delta(\omega-1)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[tu(t)]&=i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[u(t)]=i\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\\&=-\frac{1}{\omega^2}+i\pi\delta'(\omega).\end{aligned}$$

由卷积定理，得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)]&=\mathcal{F}[tu(t)e^{it}]=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[e^{it}]*\mathcal{F}[tu(t)]\\&=\frac{1}{2\pi}\left[2\pi\delta(\omega-1)\right]*\left[-\frac{1}{\omega^2}+i\pi\delta'(\omega)\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(s-1)\cdot\left[-\frac{1}{(\omega-s)^2}+i\pi\delta'(\omega-s)\right]ds\\&=\left[-\frac{1}{(\omega-1)^2}+i\pi\delta'(\omega-1)\right].\end{aligned}$$

例题 7.19 设 $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t}f(s)ds=F(0)\neq0$, 则

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(s)ds\right]=\frac{F(\omega)}{i\omega}+\pi F(0)\delta(0).$$

证明 令 $g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(s)ds$，则 $g(t)=f(t)*u(t)$.

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(s)ds\right]=\mathcal{F}[f(t)*u(t)]=\mathcal{F}[f(t)]\cdot\mathcal{F}[u(t)]$$

$$= F(\omega)\left[\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right]$$

$$= \frac{F(\omega)}{i\omega} + \pi F(0)\delta(\omega).$$

最后一个等式利用了 δ 函数乘时间函数性质，即 $F(\omega)\delta(\omega) = F(0)\delta(\omega).$

7.4.3 傅里叶变换的应用

傅里叶变换在数学领域及工程技术等方面有着非常广泛的应用. 例如，频谱分析在现代声学，语音通讯，声纳，地震，核科学，乃至生物医学工程等信号的研究发挥着重要的作用.傅里叶变换也是求解微分、积分方程，数学物理方程等问题的一种有效数学工具. 运用傅里叶变换，求某些数学物理方程的定解问题将在第十一章中作详细介绍. 以下仅举例说明傅里叶变换在求解常微分方程和积分方程中的应用.

例题 7.20 求解二阶常系数非齐次常微分方程

$$x''(t) - x(t) = -f(t), -\infty < t < +\infty,$$

其中 $f(t)$ 为已知函数.

解 记 $\mathcal{F}\left[x(t)\right] = X(\omega), F(\omega) = \mathcal{F}\left[f(t)\right]$. 方程两端作傅里叶变换，并利用微分性，得

$$-\omega^2 X(\omega) - X(\omega) = -F(\omega).$$

即

$$X(\omega) = \frac{F(\omega)}{1+\omega^2}.$$

上式两端求傅里叶逆变换，并利用卷积定理，得

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{F(\omega)}{1+\omega^2}\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+\omega^2}\right] * \mathcal{F}^{-1}\ F(\omega)\ .$$

由例题 7.15 知

$$\mathcal{F}\left[e^{-|t|}\right] = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

从而

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|} * f(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-|t-\xi|}d\xi.$$

例题 7.21 求积分方程

$$\int_0^{+\infty} x(\omega)\sin\omega t d\omega = e^{-t} (t > 0).$$

解 积分方程等价于

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} x(\omega)\sin\omega t d\omega = \frac{2}{\pi}e^{-t}.$$

由傅里叶正弦变换可知，$\frac{2}{\pi}e^{-t}$为$x(\omega)$的傅里叶正弦逆变换. 从而有

$$x(\omega)=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}e^{-t}\sin\omega t dt.$$

记$I=\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin\omega t dt$，分部积分二次，得$I=\frac{\omega}{1+\omega^2}$，所以

$$x(\omega)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega}{1+\omega^2}.$$

例题 7.22 求解下列积分方程

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-\xi|}x(\xi)d\xi=f(t),$$

其中

$$f(t)=\begin{cases}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}, & t\geq 0,\\ e^{t}-\frac{1}{2}e^{2t}, & t<0.\end{cases}$$

解 记$\mathcal{F}\left[x(t)\right]=X(\omega), F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$.

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\mathcal{F}\ \ f(t)\ =\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{0}\left(e^{t}-\frac{1}{2}e^{2t}\right)e^{-i\omega t}dt+\int_0^{+\infty}\left(e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)e^{-i\omega t}dt\\&=\frac{1}{(1-i\omega)}e^{(1-i\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{2}\frac{1}{(2-i\omega)}e^{(2-i\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}+\\&\quad\frac{1}{-(1+i\omega)}e^{-(1+i\omega)t}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\frac{1}{(2+i\omega)}e^{(2+i\omega)t}\Big|_0^{+\infty}\\&=\frac{1}{(1-i\omega)}-\frac{1}{2(2-i\omega)}+\frac{1}{(1+i\omega)}-\frac{1}{2(2+i\omega)}\\&=\frac{6}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}.\end{aligned}$$

由例题 7.15 知

$$\mathcal{F}\left[e^{-|t|}\right]=\frac{2}{1+\omega^2}.$$

方程两端求傅里叶变换，并利用卷积性，得

$$\frac{2}{1+\omega^2}X(\omega)=F(\omega)=\frac{6}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)},$$

从而得

$$X(\omega)=\frac{3}{(\omega^2+4)}.$$

求傅里叶逆变换

$$x(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{3}{\omega^2+4}\right]=\frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2+4}e^{i\omega t}d\omega.$$

当 $t\geq 0$ 时

$$x(t)=\frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2+4}e^{i\omega t}d\omega=\frac{3}{2\pi}\cdot 2\pi i\,\mathrm{Re}\,s\left[\frac{1}{\omega^2+4}e^{i\omega t},2i\right]$$
$$=3i\times\frac{e^{-2t}}{4i}=\frac{3}{4}e^{-2t}.$$

当 $t<0$ 时

$$x(t)=\frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2+4}e^{i(-\omega)(-t)}d\omega=\frac{3}{2\pi}\cdot 2\pi i\,\mathrm{Re}\,s\left[\frac{1}{\omega^2+4}e^{-i\omega t},2i\right]$$
$$=3i\times\frac{e^{2t}}{4i}=\frac{3}{4}e^{2t}.$$

所以，原方程解为

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}e^{-2t}, & t\geq 0,\\[2mm] \dfrac{3}{4}e^{2t}, & t<0.\end{cases}$$