第三章 复变函数的积分

复变函数的积分是研究复变函数性质的重要方法之一，同时也是解决实际问题的有力工具. 本章介绍复变函数积分的概念，着重研究解析函数积分的性质，特别引入柯西积分定理和柯西积分公式. 这些性质是解析函数理论的基础. 最后，利用复变函数积分的性质，得出解析函数的导数仍为解析函数的重要结论.

3.1 复变函数的积分概念

3.1.1 复变函数积分的概念

利用类似于实变函数中曲线积分的定义方法来定义复变函数的积分.

定义 3.1 设C为一条以A为起点，B为终点的有向光滑曲线(或逐段光滑曲线)，其方程为

$$z=z(t)=x(t)+iy(t),\left[t:\alpha\to\beta,A=z(\alpha),B=z(\beta)\right]$$

函数$f(z)$定义在曲线C上. 沿曲线C用一组分点$A=z_0,z_1,\cdots,z_n=B$将曲线C分成n个小弧段，在每个弧段$z_{k-1}z_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$上任意取一点ζ_k(如图 3.1 所示)，并作部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k, \tag{3.1}$$

其中$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$. 记ΔS_k为第k个小弧段$z_{k-1}z_k$的长度，$\delta=\max\limits_{1\le k\le n}\left\{\Delta S_k\right\}$. 当$n$无限增大，且$\delta$趋于零时，若不论对$C$的分法及$\zeta_k$的选取如何，和式$S_n$存在唯一的极限，则称这处极限为函数$f(z)$沿曲线$C$的积分，记为

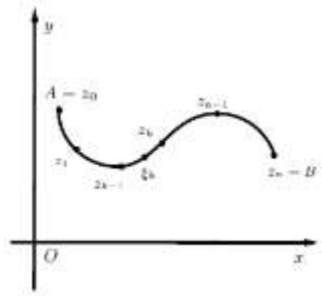

图 3.1

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k. \tag{3.2}$$

若C为封闭曲线，则沿此闭曲线的积分记为$\oint_C f(z)dz$.

例题 3.1 计算积分$\int_C dz$，其中：（1）C为复平面上以A为起点，B为终点的任意曲线；（2）C为复平面上的任意闭曲线.

解 根据定义：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\Delta z_k,$$

所以

（1）$\int_C dz = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = B - A.$

（2）$\oint_C dz = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0.$

由定义易知，当C为实轴x上的区间$[a,b]$，而$f(z)=f(x)$时，复变函数积分（3.2）即为实函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分.

3.1.2 复变函数积分的计算

直接由定义计算复变函数积分非常困难，与定积分类似，寻求复积分的计算公式相当重要. 以下定理给出了复积分存在的一个充分条件，同时给出了积分计算公式.

定理 3.1 设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在逐段光滑的曲线C上连续，则$f(z)$沿曲线C的积分存在，且有

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C u(x,y)dy + v(x,y)dx. \qquad (3.3)$$

证明 根据定义，沿曲线C用一组分点$z_0, z_1, \cdots, z_n$将曲线C分成n个小弧段，在每个小弧段上任意取一点ζ_k. 记

$$z_k = x_k + iy_k, \zeta_k = \xi_k + i\eta_k, u_k = u(\xi_k, \eta_k), v_k = v(\xi_k, \eta_k),$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k.$$

作和式：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k &= \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)\right](\Delta x_k + i\Delta y_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\right] \\ &\quad + i\sum_{k=1}^{n}\left[v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\right].\end{aligned}$$

由$f(z)$的连续性推知$u(x,y)$与$v(x,y)$在C上连续. 由微积分中第二类曲线积分知识得，当$\Delta x_k \to 0, \Delta y_k \to 0$时，上式右端两个和式极限存在，且分别为$\int_C udx - vdy$和$\int_C udy + vdx$. 因此，若$f(z)$在曲线$C$上连续，则积分$\int_C f(z)dz$存在，且

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx.$$

为便于记忆，式（3.3）可简写为：

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx \triangleq \int_C (u+iv)(dx+idy).$$

若曲线C可由参数形式表示：

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad t : \alpha \to \beta,$$

则由 C 的光滑性（或逐段光滑性）得 $z'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$（或 $[\beta, \alpha]$）上连续，且 $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$. 于是，由式（3.3）得

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx \\ &= \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\}dt + \\ &\quad i\int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)]y'(t) + v[x(t), y(t)]x'(t)\}dt \qquad (3.4) \\ &= \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}[x'(t) + iy'(t)]dt \\ &= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt.\end{aligned}$$

式（3.4）称为代入法，且表明：将 $f(z)$ 沿曲线C的积分归结为 $f(z)$ 关于曲线C的参数t的积分. 由此我们得到计算积分$\int_C f(z)dz$的基本步骤：（1） 写出曲线C的方程 $z = z(t) = x(t) + iy(t), t : \alpha \to \beta$；（2）将$z = z(t)$与$dz = z'(t)dt$代入所求积分$\int_C f(z)dz$中；（3）计算式（3.4）右端的关于参数$t$的积分.

由（3.4）可得，积分$\int_C |dz|$所表示的恰为曲线C的长度. 事实上

$$\int_C |dz| = \int_\alpha^\beta |z'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

上式最后一项即为微积分中的曲线弧长公式.

例题 3.2 计算从$A = -i$到$B = i$的积分$\int_C |z|\, dz$的值，其中曲线C为：(1) 线段$\overline{AB}$；(2) 左半平面中以原点为中心的左半单位圆；(3) 右半平面中以原点为中心的右半单位圆(如图 3.2 所示).

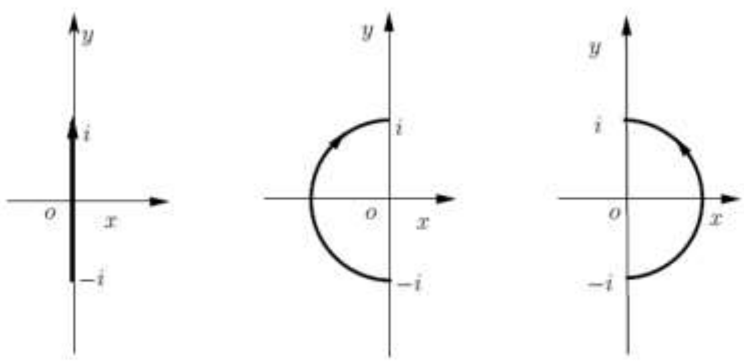

图 3.2

解 如前所述，求解这类积分的关键是先写出曲线C的参数方程.

(1) 线段 $\overline{AB}$ 的参数方程为：$z=it,\quad t:-1\to 1,$ 于是，$|z|=|t|,dz=idt$，利用代入法，得

$$\int_C |z|\,dz=\int_{-1}^{1}|t|\,idt=i\left(\int_{-1}^{0}(-t)dt+\int_0^1 tdt\right)=i.$$

(2) 左半平面中以原点为中心的左半单位圆的参数方程为：$z=e^{it},\quad t:\frac{3}{2}\pi\to\frac{1}{2}\pi,$

由 $|z|=1,dz=ie^{it}dt$，得

$$\int_C |z|\,dz=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(ie^{it})dt=i\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+i\sin t)dt$$
$$=-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt+i\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt=2i.$$

(3) 在半平面中以原点为中心的右半单位圆的参数方程为：$z=e^{it}$，$t:-\frac{1}{2}\pi\to\frac{1}{2}\pi,$

由 $|z|=1,dz=ie^{it}dt$，得

$$\int_C |z|\,dz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}ie^{it}dt=i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+i\sin t)dt$$
$$=i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt=2i.$$

例题 3.3 分别计算积分 $\int_C \overline{z}dz$ 和 $\int_C z^2dz$，其中：曲线 C 为：(1) 由点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的直线段；(2) 由点 $O(0,0)$ 以点 $B(1,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的折线段. (如图 3.3 所示)

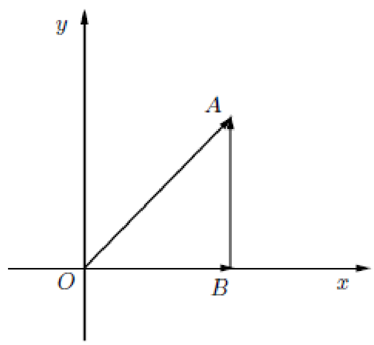

图 3.3

解 (1) 由点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的直线段的参数方程为：$z=(1+i)t,\quad t:0\to 1$，此时，$\overline{z}=(1-i)t,dz=(1+i)dt$. 于是

$$\int_C \overline{z}dz=\int_0^1(1-i)t(1+i)dt=\int_0^1 2tdt=1.$$

$$\int_C z^2 dt = \int_0^1 (1+i)^2 (1+i) t^2 dt = (1+i)^3 \int_0^1 t^2 dt = \frac{(1+i)^3}{3}.$$

(2) 由点 $O(0,0)$ 到点 $B(1,0)$ 的直线段的参数方程为：$z = t, t: 0 \to 1$，由点 $B(1,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的直线段的参数方程为：$z = 1+it,\quad t: 0 \to 1$

$$\int_C \overline{z} dz = \int_0^1 t dt + \int_0^1 (1-it) i dt = \frac{1}{2} + i + \frac{1}{2} = 1 + i.$$

$$\int_c z^2 dt = \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1+it)^2 i dt = \frac{1}{3} + \frac{(1+i)^3 - 1}{3} = \frac{(1+i)^3}{3}.$$

以上例子表明：某些函数沿曲线的积分仅与积分路径的起点与终点有关，而与积分路径无关，而有些函数，其积分不仅与积分路径的起点与终点有关，而且与积分路径也有关. 不难发现，与积分路径无关的这类函数是解析函数. 由此猜想：解析函数的积分仅与积分曲线的起点与终点有关，而与积分路径无关.

例题 3.4 计算积分 $I = \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dx$，其中 C 为以 z_0 为中心，r 为半径的正向圆周，n 为整数.

解 圆周 C 的参数方程为：$z - z_0 = re^{i\theta}, \theta: 0 \to 2\pi$，于是

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\theta}}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{i}{r^n} e^{-in\theta} d\theta.$$

当 $n = 0$ 时，$I = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$，当 $n \neq 0$ 时，

$$I = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i \sin n\theta) d\theta = 0.$$

综合得：

$$I = \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dx = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

3.1.3 积分的基本性质

设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在逐段光滑曲线 C 上连续，则由积分定义可得下列复变函数积分的基本性质.

性质 3.1 $\int_C k f(z) dz = k \int_C f(z) dz$，（$k$ 为常数).

性质 3.2 $\int_C [f(z) \pm g(z)] dz = \int_C f(z) dz \pm \int_C g(z) dz$.

性质 3.3 $\int_{C^-} f(z) dz = -\int_C f(z) dz$, 其中 C^- 表示与曲线 C 方向相反的同一条曲线.

性质 3.4 $\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)+\int_{C_2} f(z)dz,$ 其中 C 由 C_1 与 C_2 首尾相接而成.

性质 3.5 若函数 $f(z)$ 在曲线 C 上满足 $|f(z)|\le M,$ 且曲线的长度为 L，则

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\le\int_C|f(z)||dz|\le ML.$$

证明 首先证明第一个不等式，

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)dz\right|&=\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\Delta z_k\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\Delta z_k\right|\\&\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\zeta_k\right)\Delta z_k\right|=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\zeta_k\right)\right|\left|\Delta z_k\right|\\&=\int_C\left|f(z)\right|\left|dz\right|.\end{aligned}$$

再证明第二个不等式，

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\Delta z_k\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\zeta_k\right)\right|\left|\Delta z_k\right|\le M\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta z_k\right|,$$

上式两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\Delta z_k\right|\le M\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta z_k\right|=ML.$$

例题 3.5 设 C 为正向圆周 $|z|=2$ 在第一象限中的部分，证明

$$\left|\int_C\frac{1}{1+z^2}dz\right|\le\frac{\pi}{3}.$$

证明 因为 $\left|1+z^2\right|\ge\left||z|^2-1\right|$，由积分不等式可得

$$\begin{aligned}\left|\int_C\frac{1}{1+z^2}dz\right|&\le\int_C\left|\frac{1}{1+z^2}\right|\left|dz\right|\le\int_C\frac{1}{\left||z|^2-1\right|}\left|dz\right|\\&=\frac{1}{3}\int_C\left|dz\right|=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times4\pi=\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

例题 3.6 设 C_r 为圆周 $|z|=r$ 在第一象限中的一段，方向为逆时针方向，函数 $f(z)$ 在 C_r 上连续，且 $\lim\limits_{z\to0}zf(z)=0$.（1）证明：$\lim\limits_{r\to0}\int_{C_r} f(z)dz=0$；（2）计算极限 $\lim\limits_{r\to0}\int_{C_r}\frac{P_n(z)}{z}dz$，其中 $P_n(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n$，$c_0\ne0$.

解 （1） 由已知 $\lim\limits_{z\to0}zf(z)=0$ 知， 对于任意 $\varepsilon>0$， 存在 $\delta>0$，当 $|z|<\delta$ 时，

$$|zf(z)|<\varepsilon.$$

C_r 的参数方程为：$z=re^{i\theta}$，$\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$，从而

$$\left|\int_{C_r} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi/2} f(re^{i\theta})rie^{i\theta}d\theta\right|$$

$$\le \int_0^{\pi/2}\left|f(re^{i\theta})re^{i\theta}\right|\left|d\theta\right| \le \frac{\pi\varepsilon}{2},$$

因此

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz = 0.$$

（2）由于

$$\frac{P_n(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + c_1 + c_2 z + \cdots + c_n z^{n-1} = \frac{c_0}{z} + Q_{n-1}(z),$$

其中 $Q_{n-1}(z) = c_1 + c_2 z + \cdots + c_n z^{n-1}$，从而

$$\int_{C_r}\frac{P_n(z)}{z}dz = \int_{C_r}\frac{c_0}{z}dz + \int_{C_r} Q_{n-1}(z)dz,$$

由（1）知：$\lim\limits_{r\to 0}\int_{C_r} Q_{n-1}(z)dz = 0$，故

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{P_n(z)}{z}dz = \lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{c_0}{z}dz = \lim_{r\to 0}\int_0^{\pi/2}\frac{c_0}{re^{i\theta}}rie^{i\theta}d\theta = \frac{c_0\pi i}{2}.$$

3.2 柯西定理

微积分中，实函数的第二类曲线积分 $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 在单连通区域 D 内与路径无关，等价于它沿 D 内任意一条闭曲线的积分为零，其条件为函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 有连续的一阶偏导数，且 $Q_x = P_y$ 在 D 内处处成立．对于复积分 $\int_C f(z)$ 也有类似的结论．1825 年，柯西(Cauchy)给出了重要的复变函数积分的基本定理.

3.2.1 单连通区域的柯西定理

定理 3.2 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，C 为 D 内的任意一条闭曲线，则

$$\oint_C f(z)dz = 0. \tag{3.5}$$

证明 此定理证明较复杂，用黎曼(1851)年在添加条件下给出的证明方法，即添加条件 $f'(z)$ 在 D 内连续.

设 $z=x+iy,\ f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$G$ 为曲线 C 所围的区域(如图 3.4 所示)，则

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C udx-vdy+i\oint_C vdx+udy.$$

由于 $f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$ 在 D 内连续，从而 u_x,v_x,u_y,v_y 在单连通区域 D 内均连续，且 u,v 满足柯西－黎曼条件. 由微积分中的格林公式得

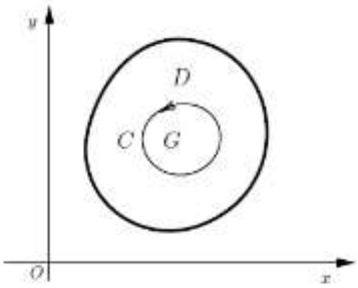

图 3.4

$$\oint_C udx-vdy=\iint_G(-v_x-u_y)dxdy=0,$$
$$\oint_C vdx+udy=\iint_G(u_x-y_y)dxdy=0.$$

从而

$$\oint_C f(z)dz=0.$$

定理3.2称为积分基本定理，又常称作柯西-古萨（Goursat）基本定理（或柯西积分定理），它揭示了解析函数的一个重要的性质，即解析函数沿其单连通解析区域内的任意一条闭曲线的积分为零，亦即解析函数的积分只依赖于积分路径的起点与终点，而与积分路径的形状无关.

古萨于1900年在不添加“ $f'(z)$ 在 D 内连续”的条件下给出了定理3.2的证明.

例题 3.7 计算积分 $\oint_C(z^2+2e^{-z}+\sin z)dz$，其中:$C$ 为正向圆周 $|z|=4$.

解 由于函数 $z^2,e^{-z},\sin z$ 在复平面上为解析函数，所以 $z^2+2e^{-z}+\sin z$ 有圆周 $C:|z|=4$ 所围的单连通区域内解析，由柯西定理知

$$\oint_C(z^2+2e^{-z}+\sin z)dz=0.$$

例题 3.8 计算积分 $\oint_C\frac{e^z}{z(z-1)}dz$，其中：$C$ 为正向圆周 $|z+1|=\frac{1}{2}$.

解 $z=0$ 和 $z=1$ 为被积分函数 $f(z)=\frac{e^z}{z(z-1)}$ 的两个奇点，但它们均不在积分曲线 C 所围的区域 G 内，即：被积函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析，所以

$$\oint_C\frac{e^z}{z(z-1)}dz=0.$$

由柯西定理，可得如下推论：

推论 3.1 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则积分 $\int_C f(z)$ 只与曲线 C 的起点和终点有关，而与曲线 C 的路径无关.

可将柯西定理的条件作适当地放宽，可得如下结论：

推论 3.2 设闭曲线 C 为单连通区域 D 的边界，函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 C 上连续，则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

3.2.2 原函数与不定积分

根据柯西定理及其推论知，如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则 $f(z)$ 沿 D 内任何一条逐段光滑曲线 C 的积分 $\int_C f(z)dz$ 的值只与曲线 C 的起点 z_0 和终点 z 有关，而与路径无关. 因此，当固定起点 z_0，积分 $\int_C f(z)dz$ 定义了一个以 C 的终点 z 为变量的单值函数，于是，有如下的结论：

定理 3.3 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，z_0 为 D 内一定点，z 为 D 内动点，则函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \tag{3.6}$$

在 D 内解析，且 $F'(z) = f(z)$.

证明 取 D 内任意两点 z 和 $z+\Delta z$，以连接 z 到 $z+\Delta z$ 的线段作为积分路径(如图 3.5 所示)，则

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}\left[f(\zeta)-f(z)\right]d\zeta.$$

由 $f(z)$ 在 D 内解析知：$f(z)$ 在点 z 连续，于是，对任给的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|\zeta - z| < \delta$ 时，总有 $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$. 因此，当 $|\Delta z| < \delta$ 时

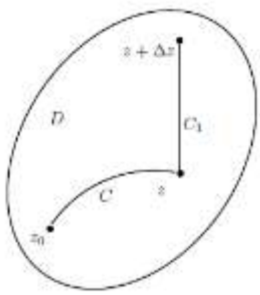

图 3.5

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)||d\zeta|$$
$$\le \frac{1}{|\Delta z|}\cdot\epsilon\cdot|\Delta z| = \epsilon.$$

从而得：

$$F'(z) = f(z).$$

上述定理的证明仅用到如下的两个条件：(1) $f(z)$ 在 D 内连续；(2) $f(z)$ 在 D 内沿任

一闭曲线的积分为零. 因此，可得如下更一般的定理：

定理 3.4 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续，且 $f(z)$ 在 D 内沿任一闭曲线的积分为零. z_0 为 D 内一定点，z 为 D 内动点，则函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

在 D 内解析，且 $F'(z)=f(z)$.

下面给出原函数和不定积分的定义.

定义 3.2 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续，若 D 内的一个函数 $\Phi(z)$ 满足条件

$$\Phi'(z)=f(z), \tag{3.7}$$

则称 $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数. 称 $f(z)$ 的原函数的全体为 $f(z)$ 的不定积分.

利用原函数的概念，我们可以得到如下的定理：

定理 3.5 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，$\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数，z_1,z_2 是 D 内的两点，则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz=\Phi(z_2)-\Phi(z_1). \tag{3.8}$$

证明 可仿照微积分中的证明方法. 由定理 3.3 知，$F(z)=\int_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 也为 $f(z)$ 的原函数. 于是，由 $\left[F(z)-\Phi(z)\right]'=0$, 得 $F(z)-\Phi(z)=C$, 即

$$\int_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta=\Phi(z)+C.$$

令 $z=z_1$ 得 $C=-\Phi(z_1)$，取 $z=z_2$ 得

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz=\Phi(z_2)-\Phi(z_1).$$

称式（3.8）为牛顿-莱布尼茨公式. 定理 3.5 把计算解析函数的积分问题归结为寻找其原函数的问题.

例题 3.9 计算积分 $\int_0^{1+i} zdz$.

解

$$\int_0^{1+i} zdz=\frac{1}{2}z^2\Big|_0^{1+i}=\frac{1}{2}(1+i)^2=i.$$

例题 3.10 计算积分 $\int_a^b z\sin z^2dz$。

解

$$\int_a^b z\sin z^2dz=-\frac{1}{2}\cos z^2\Big|_a^b=\frac{1}{2}(\cos a^2-\cos b^2).$$

3.2.3 柯西定理的推广

柯西定理可以推广到多连通区域.

定理 3.6 设 D 是由边界曲线 $\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ 所围成的多连通区域，其中简单闭曲线 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 在简单闭曲线 C 内，它们互不包含也互不相交，若 $f(z)$ 在 D 内解析，在 Γ 上连续，则

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0,$$

或

$$\oint_{C} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz. \qquad (3.9)$$

证明 取 n 条互不相交且除端点外全在 D 内的辅助曲线 $r_1, r_2, \cdots, r_n$，分别把 C 依次与 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 连接，则由曲线 $\Gamma' = C + r_1 + C_1^- + r_1^- + \cdots + r_n + C_n^- + r_n^-$ 为边界的区域 D' 为单连通区域(如图 3.6 所示). 由定理 3.2 得：

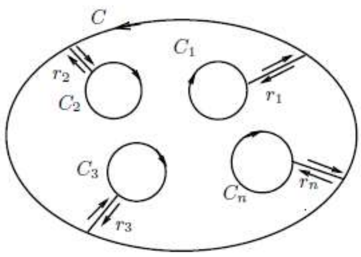

图 3.6

$$\oint_{\Gamma'} f(z)dz = 0.$$

因沿 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 的积分正负方向各取一次，在相加时相互抵消，所以得

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0,$$

即

$$\oint_{C} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k^-} f(z)dz = 0.$$

由此即得结论.

定理 3.6 称为复合闭路定理. 根据定理 3.6，可得如下重要的结论.

推论 3.3 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内除 z_0 外都解析，则它在 D 内沿任何一条围绕 z_0 的正向闭曲线的积分值都相等.

由推论 3.3 可将例题 3.4 的结论作推广，即：$I = \oint_{C} \dfrac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$ 其中 C 为任意包含 z_0 的正向闭曲线.

推论 3.4 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内除 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外都解析，C 为 D 内任何一条将 $z_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 包围在内的正向闭曲线，则

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)dz.$$

定理 3.6 及其推论提供了一种计算函数沿闭曲线积分的方法.

例题 3.11 计算积分 $\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{z(z-1)}dz$.

解 设 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z}$. 由于被积函数 $f(z)$ 在积分路径 $C:|z|=2$ 的内部只含有两个奇点 $z=0$ 和 $z=1$，采用所谓“挖奇点”方法. 为此，分别作两个互不相交的圆周，如：$C_1:|z|=\dfrac{1}{2}$ 和 $C_2:|z-1|=\dfrac{1}{4}$ (如图 3.7 所示)，则

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} f(z)dz &= \oint_{C_1} f(z)dz+\oint_{C_2} f(z)dz\\ &=\oint_{C_1}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)dz+\oint_{C_2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)dz\\ &=0-2\pi i+2\pi i-0=0.\end{aligned}$$

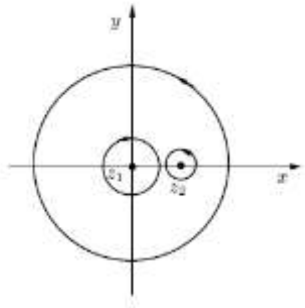

图 3.7

例题 3.12 计算积分 $\oint_C\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$,其中 C 是不过点 $z=2$ 和点 $z=3$ 的正向闭曲线.

解 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}=\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z-2}$ 有两个奇点 $z=2$ 和 $z=3$，本题视不同曲线 C 分别讨论.

(1) 若 C 既不包含 $z=2$，也不包含 $z=3$，即 $f(z)$ 在 C 所围的区域内解析，从而

$$\oint_C f(z)dz=0.$$

(2) 若 C 仅包含 $z=2$，但不包含 $z=3$，则

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C\frac{1}{z-3}dz-\oint_C\frac{1}{z-2}dz=-2\pi i.$$

(3) 若 C 仅包含 $z=3$，但不包含 $z=2$，则

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C\frac{1}{z-3}dz-\oint_C\frac{1}{z-2}dz=2\pi i.$$

(4) 若 C 既包含 $z=2$，也包含 $z=3$，则

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C\frac{1}{z-3}dz-\oint_C\frac{1}{z-2}dz=2\pi i-2\pi i=0.$$

3.3 柯西积分公式和高阶导数公式

设D为一单连通区域，z_0为D中的一点，如果$f(z)$在区域D内解析，则z_0是函数$\dfrac{f(z)}{z-z_0}$的一个奇点，因而在D内围绕z_0点的积分$\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$一般不为零，但由复合闭路定理知，此积分沿任何围绕$z_0$同向闭曲线积分值均相等，那么，此积分值如何计算？

3.3.1 柯西积分公式

定理 3.7 设闭曲线C是单连通区域D的边界，若函数$f(z)$在D内解析，在C上连续，则对于D内的任何一点z，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{3.10}$$

证明 以点z为中心，r为半径，在区域D内作圆周C_r（如图 3.8 所示）. 显然，函数$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$在$D$内除点$z$外都解析，由定理 3.6 的推论 3.3，得

$$\oint_C \frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta=\oint_{C_r} \frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta.$$

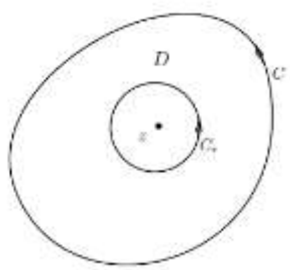

图 3.8

因为函数$f(\zeta)$在D内连续，所以，对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|\zeta-z|<\delta$，有

$$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon.$$

令$r<\delta$，则在圆周$C_r:|\zeta-z|=r$上有

$$\left|f(\zeta)-f(z)\right|<\varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-f(z)\right|&=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-f(z)\right|\\&=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|\\&=\frac{1}{2\pi}\oint_{C_r} \frac{\left|f(\zeta)-f(z)\right|}{\left|\zeta-z\right|}\left|d\zeta\right|\\&\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{r}\cdot 2\pi r=\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，得：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

称公式(3.10)为柯西积分公式或基本积分公式.

柯西积分公式和柯西定理一样，可以推广到多连通区域：

设 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为简单闭曲线(互不包含且互不相交)，C 为包含曲线 $C_k\,(k=1,2,\cdots,n)$ 的闭曲线，曲线 $\Gamma=C+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$ 所包围的区域为 D，且 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad \forall z\in D. \tag{3.11}$$

柯西积分公式刻画了解析函数 $f(z)$ 在其解析区域边界 C 上的值与区域内部各点处的值之间的密切联系，即若 $f(z)$ 在解析区域边界上的值一经确定，则它在该区域内部各点处的值就完全确定，它是解析函数的又一个重要特性.

柯西积分公式也常写成其等价形式：

$$\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i f(z).$$

利用上述公式，可求某类函数的积分，即，此类积分的特征是：积分路径为闭曲线，被积函数为分式 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$，它在积分路径内部只含一个奇点，且该奇点是使被积分函数的分母为零的点，而在积分路径上无被积函数的奇点.

例题 3.13 计算积分 $\oint_C\dfrac{\sin(z+1)}{z(z-1)}dz$，其中：$C$ 为正向圆周 $|z|=\dfrac{1}{2}$.

解 在圆周 $|z|=\dfrac{1}{2}$ 所围区域内，被积函数仅含奇点 $z=0$，故

$$\oint_C\frac{\sin(z+1)}{z(z-1)}dz=\oint_C\frac{\frac{\sin(z+1)}{z-1}}{z}dz$$

$$=2\pi i\left[\frac{\sin(z+1)}{z-1}\right]_{z=0}=-2\pi i\sin 1.$$

例题 3.14 计算积分 $\oint_C\dfrac{e^z}{z^2+1}dz$，其中 C 为正向圆周 $|z|=2$.

解 由于被积函数在 $|z|=2$ 所围区域内有两个奇点 $z_1=i,z_2=-i$. 分别以 z_1 和 z_2 为圆

心，作圆周：$C_1:|z-i|=\dfrac{1}{2}, C_2:|z+i|=\dfrac{1}{2}$(如图 3.9 所示)

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}dz=\oint_{C_1}\frac{e^z}{z^2+1}dz+\oint_{C_2}\frac{e^z}{z^2+1}dz$$

$$=\oint_{C_1}\frac{\frac{e^z}{z+i}}{z-i}dz+\oint_{C_2}\frac{\frac{e^z}{z-i}}{z+i}dz$$

$$=2\pi i\frac{e^i}{i+i}+2\pi i\frac{e^{-i}}{-i-i}$$

$$=2\pi i\frac{e^i-e^{-i}}{2i}=2\pi i\sin 1.$$

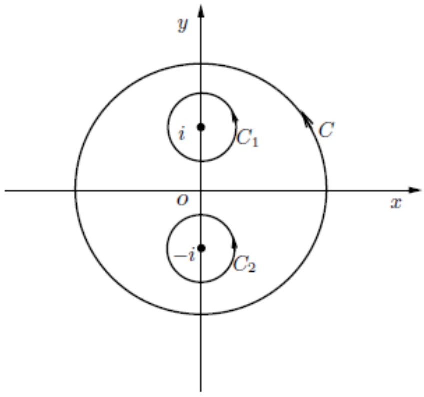

图 3.9

例题 3.15 设函数 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上解析，当 z 为实数时，$f(z)$ 取实数.（1）设 z 为单位圆内一点，z^* 为 z 关于单位圆周的对称点，即 z^* 和 z 满足 $|z||z^*|=1$，证明：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{(z-z^*)}{(\xi-z)(\xi-z^*)}f(\xi)d\xi;$$

（2）若 $0<t<1$，证明

$$\int_0^{2\pi}\frac{f(\cos\theta+i\sin\theta)}{1-2t\cos\theta+t^2}d\theta=\frac{2\pi}{1-t^2}f(t).$$

证明 （1）由柯西积分公式：$f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi,$

由于 z^* 为 z 关于单位圆的对称点，故

$$0=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi-z^*}d\xi,$$

上述两式相减得：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{(z-z^*)}{(\xi-z)(\xi-z^*)}f(\xi)d\xi.$$

（2）在（1）中取 $z=t$，则 $z^*=\dfrac{1}{t}$ 从而

$$f(t)=\frac{1-t^2}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{(t\xi-1)(t-\xi)}d\xi,$$

令 $\xi=e^{i\theta}$，则由

$$d\xi = i\xi d\theta,\quad \frac{\xi}{(t\xi-1)(t-\xi)} = \frac{1}{t^2-(\xi+\xi^{-1})t+1} = \frac{1}{t^2-2t\cdot\cos\theta+1}$$

得

$$\oint_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{(t\xi-1)(t-\xi)}d\xi = i\int_0^{2\pi}\frac{f(\cos\theta+i\sin\theta)}{1-2t\cos\theta+t^2}d\theta,$$

从而

$$\int_0^{2\pi}\frac{f(\cos\theta+i\sin\theta)}{1-2t\cos\theta+t^2}d\theta = \frac{2\pi}{1-t^2}f(t).$$

3.3.2 解析函数的高阶导数公式

一个实变函数在某一区间上可导，但其导数在这区间上不一定连续，即其高阶导数不一定存在. 但是，一个解析函数不仅有一阶导数，而且有各阶高阶导数，它的值也可用函数在边界上的值通过积分来表示.

定理 3.8 设函数 $f(z)$ 在闭曲线 C 所围的区域 D 的解析，在 C 上连续，则函数 $f(z)$ 在 D 内有各阶高阶导数，它们都是 D 内的解析函数，且其 n 阶导数

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\ n=1,2,\cdots. \tag{3.12}$$

证明 本定理可用数学归纳法证明. 以下仅对 $n=1$ 情形加以证明. 由柯西积分公式得

$$\begin{aligned}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+\Delta z)}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z)}d\zeta\right]\\ &= \frac{1}{2\pi i\Delta z}\oint_C f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-(z+\Delta z)}-\frac{1}{\zeta-z}\right]d\zeta\\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z-\Delta z)}d\zeta\\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\Delta z f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}d\zeta.\end{aligned}$$

下面证明，当 $\Delta z\to 0$ 时，上述最后一个等式中的第二项趋于零. 因为 $f(\zeta)$ 在 C 上连续，则存在正实常数 $M>0$，使得 $|f(\zeta)|\le M$. 设 d 为点 z 到曲线 C 的最短距离，L 为曲线 C 的长度，则当 ζ 落在 C 上时，有 $|\zeta-z|\ge d$. 若令 $|\Delta z|<\frac{d}{2}$，则

$$|\zeta-z-\Delta z|\ge|\zeta-z|-|\Delta z|>\frac{d}{2}.$$

于是， 由

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\Delta z f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}d\zeta\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_C \frac{\Delta z f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}d\zeta\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|\Delta z||f(\zeta)|}{|\zeta-z|^2|\zeta-z-\Delta z|}d|\zeta|$$

$$< \frac{ML}{\pi d^3}|\Delta z|,$$

得

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

由数学归纳法，可证明：

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\quad (n=1,2\cdots).$$

定理 3.8 表明，解析函数具有任意阶导数，且各阶导数仍为解析函数，从而解析函数具有无限可微性，这是解析函数区别于实变函数的又一个本质属性.

利用解析函数的高阶导数公式(3.9)，可以计算沿闭曲线的积分:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0),\quad (n=1,2,\cdots). \tag{3.13}$$

例题 3.16 设 C 为正向圆周 $|z|=2$，计算积分 $\oint_C \frac{\sin z}{(1-z)^3}dz$.

解 由于 $z=1$ 位于正向圆周 C 内，故由解析函数的高阶导数公式：

$$\oint_C \frac{\sin z}{(1-z)^3}dz = -\frac{2\pi i}{2!}(\sin z)''|_{z=1} = \pi i\sin 1.$$

例题 3.17 计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-1)}dz$，其中 C 为正向圆周 $|z|=2$.

解 在曲线 C 内，$z=0$ 与 $z=1$ 是被积函数的两个奇点，可先应用复合闭路定理，再由解析函数的导数公式求解. 令 C_1 和 C_2 分别为正向圆周 $|z|=\frac{1}{3}$ 和 $|z-1|=\frac{1}{3}$，则

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-1)}dz = \oint_{C_1}\frac{e^z}{z^2(z-1)}dz + \oint_{C_2}\frac{e^z}{z^2(z-1)}dz$$

$$= \oint_{C_1}\frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^2}dz + \oint_{C_2}\frac{\frac{e^z}{z^2}}{z-1}dz$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^z}{z-1}\right)'\Bigg|_{z=0} + 2\pi i\left(\frac{e^z}{z^2}\right)\Bigg|_{z=1}$$

$$= -4\pi i + 2\pi e i = 2\pi(e-2)i.$$

例题 3.18 设 $f(z)=\oint_{|\xi|=2}\frac{\xi^3+2\xi+1}{(\xi-z)^2}d\xi$，求 $f'(i)$.

解 令 $g(z)=z^3+2z+1$，它在复平面上解析，当 z 位于圆 $|\xi|=2$ 内时，由解析函数的导数公式得：

$$g'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=2}\frac{\xi^3+2\xi+1}{(\xi-z)^2}d\xi=\frac{1}{2\pi i}f(z).$$

于是

$$f(z)=2\pi i g'(z)=2\pi i(3z^2+2).$$

所以

$$f'(i)=2\pi i(3z^2+2)'|_{z=i}=-12\pi.$$

例题 3.19 计算积分

$$I=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)d\theta.$$

解 令 $z=e^{i\theta}$，则

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}[\cos(n\theta-\sin\theta)-i\sin(n\theta-\sin\theta)]d\theta\\&=\int_0^{2\pi}e^{e^{i\theta}-in\theta}d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{iz^{n+1}}dz\\&=\frac{2\pi i}{in!}[e^z]^{(n)}|_{z=0}=\frac{2\pi}{n!}.\end{aligned}$$

所以

$$I=Re(I_1)=\frac{2\pi}{n!}.$$

例题 3.20 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $f(0)=1,\ f'(0)=2$.（1）计算积分

$I_1=\oint_{|z|=1}\frac{(z+1)^2}{z^2}f(z)dz$；（2）计算积分 $I_2=\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}f(e^{i\theta})d\theta$.

解 由柯西导数公式得：

$$\begin{aligned}I_1&=2\pi i\left[(z+1)^2f(z)\right]'\Big|_{z=0}\\&=2\pi i\left[2f(0)+f'(0)\right]=8\pi i.\end{aligned}$$

（2）在（1）中令 $z=e^{i\theta}$，则 $I_1=4i\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}f(e^{i\theta})d\theta$，从而

$$I_2=\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}f(e^{i\theta})d\theta=\frac{1}{4i}I_1=2\pi.$$

以上两例表明，利用复变函数积分可计算某些特殊的定积分，在第五章中，还将作详细讨论.

3.4* 柯西积分公式的推论

3.4.1 莫累拉（Morera）定理

利用柯西导数公式，可得到柯西定理的逆定理：

定理 3.9 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续，若对 D 内沿任一闭曲线的 C 都有

$$\oint_C f(z)dz = 0,$$

则函数 $f(z)$ 在 D 内解析.

证明 由定理 3.4 知，函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

在 D 内解析，且 $F'(z) = f(z)$. 由解析函数的导数仍为解析函数知，$f(z)$ 在 D 内解析.

定理 3.9 称为**莫累拉**定理. 莫累拉定理与柯西定理组成解析函数的一个等价概念：函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析的充分必要条件为 $f(z)$ 在 D 连续，且对 D 内的任意一条闭曲线 C，都有 $\oint_C f(z)dz = 0.$

3.4.2 平均值公式

利用柯西积分公式，可得到如下的平均值公式.

定理 3.10 设 $f(z)$ 在 $C: |z - z_0| = R$ 所围区域内解析，且在 C 上连续，则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta. \tag{3.14}$$

上述公式是柯西积分公式的特殊情形，称为解析函数的平均值公式，它表示解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的值的平均值，因此有时也称此公式为解析函数的中值定理.

例题 3.21 试证：若 $f(z)$ 在闭圆域 $|z| \le R$ 上解析，在该圆域的边界 $|z| = R$ 上，$|f(z)| > a > 0$，且 $|f(0)| < a$，则在该圆域内 $f(z)$ 至少有一个零点.

证明　用反证法. 设 $f(z)$ 在该圆域内无零点，已知 $f(z)$ 在边界 $|z| = R$ 上也无零点，故 $F(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ 在闭圆域上解析. 根据解析函数的平均值定理，

$$F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta\,.$$

又由已知 $|F(0)| = \dfrac{1}{|f(0)|} > \dfrac{1}{a}, |F(\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta})| = \dfrac{1}{|f(\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta})|} < \dfrac{1}{a}$，所以

$$F(0) = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta\right| \le \frac{1}{a},$$

得到矛盾.

3.4.3 柯西不等式

定理 3.11 设 $f(z)$ 在 $C:|z-z_0|=R$ 所围区域内解析，且在 C 上连续，则

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|\le\frac{n!M}{R^n},\ (n=1,2,\cdots)\tag{3.15}$$

其中 M 是 $|f(z)|$ 在 C 上的最大值.

证明 由高阶导数公式，得

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\right|\le\frac{n!}{2\pi}\oint_C\frac{|f(z)|}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}s$$

$$\le\frac{n!}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}\oint_C\mathrm{d}s=\frac{n!M}{R^n}.$$

柯西不等式表明解析函数在一点的导数模的估计与它的解析性区域的大小密切相关. 特别，当 $n=0$ 时，有

$$|f(z_0)|\le M,$$

这表明，若函数在闭圆域上解析，则它在圆心处的模不超过它在圆周上的模的最大值.

3.4.4 刘维尔（Liouville）定理

定理 3.13 设 $f(z)$ 在整个复平面上解析且有界，则 $f(z)$ 在复平面上为常数.

证明　在复平面上任取一点 z，作半径为 R 的圆周 $C_R:|z|<\mathrm{R}$，使得 z 位于 C_R 所围的圆内，则由 $f(z)$ 的有界性：$|f(z)|\le M$，及柯西导数公式，得

$$0\le|f'(z)|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{C_R}\frac{|f(\xi)|}{|\xi-z|^2}d\xi$$

$$\le\frac{M}{2\pi}\cdot\frac{2\pi R}{(R-|z|)^2}\xrightarrow{R\to+\infty}0.$$

从而得 $f'(z)=0$. 由 z 的任意性知，在复平面上，恒有 $f'(z)=0$. 所以 $f(z)$ 在复平面上常数.

例题 3.22 设 $f(z)$ 在整个复平面上解析，且存在 $M>0$，使得 $\mathrm{Re}\,f(z)<M$，证明：$f(z)$ 在复平面上为常数.

证明 令 $F(z)=e^{f(z)}$，则 $F(z)$ 在整个复平面上解析，且

$$\left|F(z)\right|=e^{\mathrm{Re}\,f(z)}\le e^M,$$

故有界，由刘维尔定理知，$f(z)$ 在复平面上为常数.

3.4.5 最大模定理

最后，不加证明地给出最大模定理.

定理 3.14 设 D 为有界单连通或复闭路多连通区域，$f(z)$ 在 D 内解析，在 D 的边界 C 上连续，且 $f(z)$ 不恒为常数，则 $|f(z)|$ 的最大值必在 D 的边界上取到.