2023-2024 第一学期《数学物理方法 I》试题评分标准

一、单项选择题（本题共 15 分，每小题 3 分）

1. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n}}z^{2n}$ 的收敛半径 $R=$ （ B ）

(A) 1； (B) 2； (C) 4； (D) $+\infty$.

2. $z=\infty$ 是函数 $f(z)=z^7\cos\frac{1}{z}$ 的 （ D ）

(A) 本性奇点； (B) 非孤立奇点； (C) 可去奇点； (D) 7 阶极点.

3. 关于函数 $f(z)=z\,\mathrm{Im}\,z$，以下论述正确的是 （ B ）

(A) $f(z)$ 在 $z=0$ 处连续但不可导； (B) $f(z)$ 在 $z=0$ 处可导但不解析；

(C) $f(z)$ 仅在 $z=0$ 处解析； (D) $f(z)$ 在全平面上解析.

4. 已知 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)=\frac{\beta}{\alpha+\mathrm{i}\omega},\alpha\beta\neq 0$，则 $tf(t)$ 的傅里叶变换为 （ C ）

(A) $\frac{-\beta}{(\alpha+\mathrm{i}\omega)^2}$； (B) $\frac{\mathrm{i}\beta}{(\alpha+\mathrm{i}\omega)^2}$； (C) $\frac{\beta}{(\alpha+\mathrm{i}\omega)^2}$； (D) $\frac{-\mathrm{i}\beta}{(\alpha+\mathrm{i}\omega)^2}$.

5. 广义积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 4t}{t}\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{d}t=$ （ A ）

(A) $\ln\frac{5}{3}$； (B) $\ln\frac{4}{5}$； (C) $\ln\frac{3}{5}$； (D) $\ln\frac{5}{4}$.

二、填空题（本题共 15 分，每小题 3 分）

1. $\arg\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}=$ __ $\frac{\pi}{2}$ __ .

2. 设 $r>0$，则积分 $\oint_{|z|=r}\mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z=$ __ $\pi r^2\mathrm{i}$ __ .

3. 函数 $f(z)=\frac{1}{\cosh z}$ 在复平面上的奇点为: $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\mathrm{i},\mathrm{k}=0,\pm1,\pm2,\cdots$

4. 像函数 $F(p)=\frac{\mathrm{e}^{-p}}{(p+2)^3}$ 的拉普拉斯逆变换 $\mathscr{L}^{-1}[F(p)]=\frac{1}{2}(t-1)^2\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1)$.

5. 函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t}\sin^2\frac{t}{2}$ 的广义傅里叶变换 $\mathscr{F}[f(t)]=\frac{\pi}{2}\left[2\delta(\omega+3)-\delta(\omega+4)-\delta(\omega+2)\right]$.

三、（本题 10 分） 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是解析函数，已知其虚部为

$$v(x,y)=2xy+x\,.$$

（1） 求 $|\,f'(\mathrm{i})\,|$；（2）求满足 $f(0)=0$ 的解析函数 $f(z)$.

解 （1） $f'(z)=v_y+\mathrm{i}v_x=2x+\mathrm{i}(2y+1)$，$|\,f'(\mathrm{i})\,|=3$

（2） $f'(z)=2x+\mathrm{i}(2y+1)=2z+\mathrm{i}$，$f(z)=z^2+\mathrm{i}z+c$

由 $f(0)=0$ 得，$f(z)=z^2+\mathrm{i}z$.

四、（本题 10 分） 求函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{\mathrm{e}^z-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{z-2}}$ 在扩充复平面上的所有奇点，并判断其类型，若为极点，需指出极点的阶数.

解 扩充复平面上的奇点为：

$$z=2,z_k=Ln1=2k\pi\mathrm{i},(\mathrm{k}=0,\pm1,\pm2,\cdots),z=\infty$$

由于 $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=\infty$，所以 $z=\infty$ 为非孤立奇点.

$\lim\limits_{z\to2}f(z)=\dfrac{\sin z}{\mathrm{e}^z-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{z-2}}$ 不存在，$z=2$ 为本性奇点.

$\lim\limits_{z\to0}f(z)=\dfrac{\sin z}{\mathrm{e}^z-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{z-2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},z=0$ 为可去奇点.

$z_k=2k\pi\mathrm{i},(\mathrm{k}=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为一阶极点.

五、（本题 10 分） 设 $f(z)=\dfrac{z^{3n}}{1+z^n},n=1,2,\cdots$. （1）求函数 $f(z)$ 在区域 $|\,z\,|>1$ 的罗朗级数展开式；（2）计算积分 $\oint_{|z|=2}f(z)\mathrm{d}z$.

解 （1） $f(z)=\dfrac{z^{3n}}{1+z^n}=z^{2n}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{z^n}}$

$$=z^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{z^{kn}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{z^{(k-2)n}}$$

（2） $\oint_{|z|=2}f(z)\mathrm{d}z=-2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]$，$\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=\begin{cases}1, & n=1,\\ 0, & n>1.\end{cases}$

$$\oint_{|z|=2} f(z)\mathrm{d}z=\begin{cases}-2\pi i, & n=1,\\ 0, & n>1.\end{cases}$$

六（本题 10 分）利用留数定理计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin 3\theta}{5+3\sin\theta}\mathrm{d}\theta$.

解 记 $I_1=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta}}{5+3\sin\theta}\mathrm{d}\theta$， $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=z$，则 $\sin\theta=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}$， $\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$，从而

$$I_1=\oint_{|z|=1}\frac{z^3}{5+3\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}}\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=2\oint_{|z|=1}\frac{z^3}{3z^2+10\mathrm{i}z-3}\mathrm{d}z.$$

令 $f(z)=\frac{z^3}{3z^2+10\mathrm{i}z-3}$，则 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 内有 1 个一阶极点 $z=-\frac{1}{3}\mathrm{i}$，

且 $$\mathrm{Re}\,s\left[f(z),-\frac{1}{3}i\right]=\lim_{z\to-\frac{1}{3}i}\frac{z^3}{3(z+3i)}=\frac{1}{27\times 8}.$$

由留数定理知

$$I_1=2\times 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,s\left[f(z),-\frac{1}{3}\mathrm{i}\right]=\frac{1}{54}\pi\mathrm{i}.$$

$$I=\mathrm{Im}(I_1)=\frac{\pi}{54}.$$

七（本题 10 分）利用拉普拉斯变换，求方程

$$\begin{cases}y''(t)+4y(t)=\cos t-\sin t\cdot u(t-2\pi)\\ y(0)=0,\ y'(0)=0\end{cases}$$

的解，其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数.

解 记 $Y(p)=\mathscr{L}[y(t)]=\int_0^{+\infty}y(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$，

方程两边作拉普拉斯变换，得

$$(p^2+4)Y(p)=\frac{p}{1+p^2}-\frac{\mathrm{e}^{-2\pi p}}{1+p^2},$$

$$Y(p)=\frac{1}{3}\left(\frac{p}{1+p^2}-\frac{p}{4+p^2}\right)-\left(\frac{1}{3}\frac{1}{1+p^2}-\frac{1}{6}\frac{2}{4+p^2}\right)\mathrm{e}^{-2\pi p}$$

求逆变换得

$$y(t)=\mathscr{L}[Y(t)]=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)-\left(\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t\right)u(t-2\pi).$$

八（本题 12 分）（1）求函数 $f(t)=\begin{cases}1, | t |\le 2,\\ 0, | t |> 2\end{cases}$ 的傅里叶变换；（2）求函数

$g(t)=\begin{cases}1+\cos t, | t |\le 2,\\ 0, \qquad\quad | t |> 2\end{cases}$ 的广义傅里叶变换.

解 （1）$\mathscr{F}[y(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-2}^{2}\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\frac{2\sin 2\omega}{\omega}$

（2）$g(t)=(1+\cos t)\cdot f(t)$，$\mathscr{F}[g(t)]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[1+\cos t]*\mathscr{F}[f(t)]$，

$$\mathscr{F}[1+\cos t]=2\pi\delta(\omega)+\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)],$$

$$\mathscr{F}[g(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin 2(\omega-s)}{\omega-s}\left\{2\pi\delta(s)+\pi[\delta(s+1)+\delta(s-1)]\right\}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{2\sin 2\omega}{\omega}+\frac{\sin 2(\omega+1)}{\omega+1}+\frac{\sin 2(\omega-1)}{\omega-1}$$

九（本题 8 分） 设 $f(z)=\frac{z}{\mathrm{e}^{z}-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$，证明:

（1）$B_{2n+1}=\frac{(2n+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^{2n+2}}\mathrm{d}z, n=0,1,2,\cdots$；（2）当 $n\ge 1$ 时，$B_{2n+1}=0$.

证明 （1）

$$\frac{f(z)}{z^{2n+2}}=\frac{B_0}{0!}z^{-2n-2}+\frac{B_1}{1!}z^{-2n-1}+\cdots+\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}z^{-1}+\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}+\cdots$$

沿单位圆正向积分，并利用 $\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^n}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & n=1,\\ 0, & n\ne 1\end{cases}$ 即得

$$B_{2n+1}=\frac{(2n+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^{2n+2}}\mathrm{d}z, n=0,1,2,\cdots$$

(2) 取 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$B_{2n+1}=\frac{(2n+1)!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-2n\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}-1}\mathrm{d}\theta=\frac{(2n+1)!}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-2n\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}-1}\mathrm{d}\theta+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-2n\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}-1}\mathrm{d}\theta\right)$$

第二个积分作变换：$\theta=\pi+\varphi$ 得

$$=\frac{(2n+1)!}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-2n\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}-1}\mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-2n\mathrm{i}\varphi}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}-1}\mathrm{d}\varphi\right)=-\frac{(2n+1)!}{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-2n\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\begin{cases}0, & n\geq 1,\\ -\dfrac{1}{2}, & n=0\end{cases}.$$