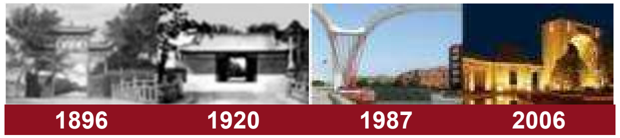
上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY



数 学 物 理 方 法I

第4章 解析函数的级数展开

王 健

4.1 复级数的概念

4.1.1 复数列的极限

定义4.1 设有复数列$\{z_n\}$, 若存在复数z_0, 对任意给定的$\varepsilon > 0$, 总存在自然数***N***, 当***n*>*N***时, 有$\left|z_n - z_0\right| < \varepsilon$, 则称数列$\{z_n\}$存在极限$z_0$, 记作

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0 \text{ 或 } z_n \to z_0\ (n \to \infty).$$

定理4.1 复数列$\{z_n\} = \{x_n + \mathrm{i}y_n\}$收敛于复数$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$的充要条件为$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0$.

注：复数列的收敛性问题归结为实数列的收敛性问题

定义4.2 设有复数列$\{z_n\}$，若存在正数M，满足

$$|z_n| \le M, \forall n \in \mathrm{N},$$

则称数列$\{z_n\}$为有界数列，否则称为无界.

定义4.3 设有复数列$\{z_n\}$，若对于任意给定正数M，存在N，

$$|z_n| > M, n < N,$$

则称数列$\{z_n\}$趋于∞，记为$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \infty$.

复数列的极限有类似于实数列极限的运算法则和性质.

定理4.2 若复数列$\{z_n\}$收敛，则极限唯一，且为有界数列.

4.1.2 复数项级数

定义4.4 设$\{z_n\}$为复数列，称式$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$

为复数项无穷级数，其前 ***n***项的和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

为级数的部分和. 若部分和数列$\{S_n\}$的极限存在且为***S***，则称级数收敛，且级数的和为***S***. 若部分和数列极限不存在，则称级数发散.

例题4.1 讨论几何级数$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$的敛散性.

定理4.3 设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, 则复级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛于***S***的充分必要条件是实级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n, \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ 均收敛，且分别收敛于**Re(*S*)，Im(*S*).**

例题4.2 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}\mathrm{i}\right)$ 的敛散性.

定理4.4 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0.$

定义4.5 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 绝对收敛；若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 条件收敛.

定理4.5 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|z_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 必收敛.

绝对收敛必收敛，反之不一定成立.

例题4.3 试判别下列级数的收敛性和绝对收敛性

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1+3\mathrm{i}}{2}\right)^n$； (2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos \mathrm{i}n}$； (3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$.

例题4.4 设 $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n, |\arg z_n| \le \frac{\pi}{2}-\alpha, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,

证明：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty}|z_n|$ 具有相同的敛散性.

4.1.3 复函数项级数

定义4.6 设 $\{f_n(z)\}(n=1,2,\cdots)$ 为一复函数序列，其中各项在区域***D***内有定义，则表达式

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

为区域***D***内的函数项级数，该级数的前***n***项和

$$S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)$$

称为级数的部分和.

如果对于区域***D***内的某一点 z_0，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z_0)=S(z_0)$ 存在，称 z_0 为级数的收敛点，收敛点的全体***I*** 称为函数项级数的收敛域.

如果级数在***I***内处处收敛，则其和必为与***z***有关的一个函数 $S(z)$

$$S(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots,$$

此函数称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 的和函数.

4.2 幂级数

4.2.1 幂级数及其收敛半径

定义4.7 形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 或 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 函数项级数, 称为幂级数,

其中 $c_0, c_1, c_2, \cdots$ 称为幂级数的系数.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \xrightleftharpoons{z\leftrightarrow z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

只讨论形如式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的幂级数. $z=0$ 是收敛点.

定理4.6 (阿贝尔(Abel)) 若幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在 $z = z_0 (z_0 \neq 0)$ 处收敛, 则当 $|z| < |z_0|$ 内绝对收敛；若此幂级数在 $z = z_1$ 处发散, 则当 $|z| > |z_0|$ 时发散.

形如$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$的幂级数，其收敛域仅有以下三种可能情形：

(1) 仅在点 $z = 0$ 处收敛;

(2) 在一个以原点为中心, ***R***为半径的圆盘$|z| < R$ 内绝对收敛, 而在 $|z| > R$ 时发散;

(3) 在整个复平面上绝对收敛.

定义4.8 若存在一个非负实数***R***, 使幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在 $|z| < R$ 内绝对收敛，而在 $|z| > R$ 发散, 则称 ***R***为收敛半径, $|z| < R$ 为收敛圆.

例题4. 5 求幂级数的 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ 收敛半径.

思考题：若 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 条件收敛，则 $z = \sqrt{3}$ 与 $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-1)^n$ 的 (　　).

(A) 收敛点，收敛点； (B) 收敛点，发散点；

(C) 发散点，收敛点； (D) 发散点，发散点.

以下为求幂级数收敛半径的两种基本方法:

定理**4.7** (系数模比值法) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \rho$ (有限值或为 $+\infty$)

则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径***R***为: $R = \dfrac{1}{\rho}$.

定理**4.8** (系数模根值法) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \rho$ (有限值或为 $+\infty$)

则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径***R***为: $R = \dfrac{1}{\rho}$.

例题**4.6** 求下列幂级数的收敛半径

$$(1)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}z^n;\quad (2)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(\sin \mathrm{i}n)z^n;\quad (3)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{\ln n}}{n}z^n;\quad (4)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{2n-1}}{n3^n}.$$

注：若**R>0**是幂级数的收敛半径，则在 $|z|=R$ 上可能收敛，也可能发散．例如 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}z^n$ 的收敛半径为**1**．当z**= -1**时收敛；当 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (0<\theta<2\pi)$ 时，

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}z^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos n\theta+\mathrm{i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta$$

收敛．当z**=1**时，级数发散．

4.2.2 幂级数的运算和性质

设有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n=S_1(z),|z|<R_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n=S_2(z),\ |z|<R_2$

则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n=S_1(z)\pm S_2(z),|z|<R,$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) z^n = S_1(z) \cdot S_2(z), \ |z| < R$$

其中 $R = \min\{R_1, R_2\}$.

例题4.7 设有幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1-a^n} z^n \quad (0 < a < 1)$ 与 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$. 求 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1-a^n} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ 和 $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1-a^n} - 1\right) z^n$ 的收敛半径.

定理4.9 设 $C_R : |z - z_0| < R, 0 < R < +\infty$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ 的收敛圆，$S(z)$为幂级数的和函数，则

(1) 函数$S(z)$在 C_R 内解析；

(2) 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ 在 C_R 内可逐项求导任意次，即

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \left[(z-z_0)^n\right]^{(k)}, \quad k = 1, 2, \cdots;$$

(3) 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ 在 C_R 内任一曲线$\boldsymbol{C}$上逐项积分，即

$$\int_C S(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_C c_n (z-z_0)^n \mathrm{d}z.$$

思考题　设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} z^n$ 的收敛域分别为 D_1, D_2, D_3，试确定它们之间的包含关系.

4.3 解析函数的泰勒级数展开

4.3.1 解析函数的泰勒展开式

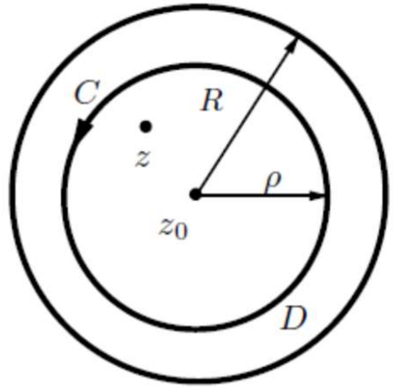
定理4.10 设函数 $f(z)$ 在区域D内解析，z_0为D内任意一点，R为 z_0 到 D的边界上各点的最短距离，则当$|z-z_0|<R$ 时，$f(z)$ 可展开成幂级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$，其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n=0,1,\cdots,$$

C为任意正向圆周 $|z-z_0|=\rho<R$，并且此展开式唯一.

注：回忆高数中泰勒定理的证明

证明方法：利用柯西积分公式.



作正向圆周C: $|\xi - z_0| = \rho < R$,

使 z 落在C所围的区域内, 如右图所示.

由柯西积分公式 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \dfrac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi$. 由于$\left|\dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| = q < 1$,

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \left[f(\xi) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right] \mathrm{d}\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

注：由定理**4.10** 可得，函数 $f(z)$在 z_0 点的泰勒级数的收敛半径等于函数离的中心点 z_0 最近的一个奇点之间的距离, 即 $R=\min\{|z_k-z_0|\}$, 其中 z_k 为 $f(z)$ 的奇点.

例题**4.8** 求下列函数在指定点展开为泰勒级数的收敛半径

$$(1)\quad f(z)=\frac{1}{z^2+z-2},\ z_0=\mathrm{i};\quad (2)\quad f(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{\cos z},\ z_0=0.$$

把函数展开为泰勒级数， 常用方法为直接法和间接法.

直接法 利用公式

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n=0,1,\cdots,$$

间接法 利用已知函数的泰勒展开式及幂级数的代数运算复合运算和逐项求导、逐项求积等方法.

4.3.2 初等函数的泰勒展开式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n, |z|<1 \qquad \mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n, |z|<+\infty$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}, |z|<+\infty$$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}, |z|<1$$

$$\arctan z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}, |z|<1.$$

例题 **4.9** 求下列函数在 z_0 处的泰勒展开式，并指出收敛半径.

(1) $f(z)=\dfrac{4z-3}{2z^2-3z-2},\ z_0=1;$　　(2) $f(z)=\dfrac{1}{z^3},\ z_0=1;$

(3) $f(z)=\mathrm{e}^z\sin z,\ z_0=0;$　　(4) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{1-z},\ z_0=0.$

例题**4.10**　已知 $\dfrac{z}{\sin z}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n,\ |z|<\pi,$

求系数 c_n.

提示：利用待定系数法

4.4 解析函数的罗朗级数展开

4.4.1 罗朗级数的概念

定义4.9 称既有正幂项又有负幂项的双边幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}$$

为罗朗级数. 如果正幂项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ 和负幂项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}$ 均收敛，则称罗朗级数收敛.

利用幂级数可得：罗朗级数收敛域必为圆环.

$$0 \le r < |z-z_0| < R < +\infty$$

例题4.11 求罗朗级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-2)^{-n}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\frac{z}{2}\right)^n$ 的收敛域.

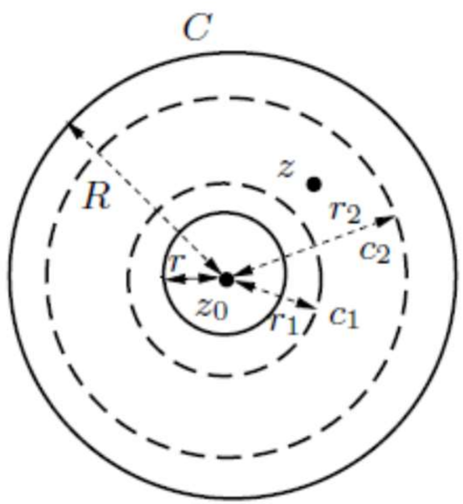
4.4.2 罗朗展开式

定理4.11 设函数 $f(z)$在圆环域 $r<\left|z-z_0\right|<R$ $(r\geq 0, R<+\infty)$ 内解析, 则 $f(z)$ 在此圆环域内可以唯一地展开为罗朗级数 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$, 其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{\left(\xi-z_0\right)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\ ,\ \ n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

C为圆环内绕 z_0 任意一条正向简单闭曲线.

证明：设 z为圆环域 $r<\left|z-z_0\right|<R$ 内任意取定的一点, 作含于上述圆环内的两个圆周(如右图所示)



$$C_1:\left|\xi-z_0\right|=r_1>r,\ C_2:\left|\xi-z_0\right|=r_2<R$$

由复连通区域的柯西积分公式, 得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_2+C_1^-}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\ .$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{\left(\xi-z_0\right)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right]\left(z-z_0\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n,$$

其中 $$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} d\xi\right](z - z_0)^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n}(z - z_0)^{n},$$

其中 $$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

合并得 $$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

罗朗级数展开常采用间接法

将函数展开成罗朗级数，通常有两种给出问题的方式

1. 在圆环域 $r < \left| z - z_0 \right| < R$ 内展开为罗朗级数；

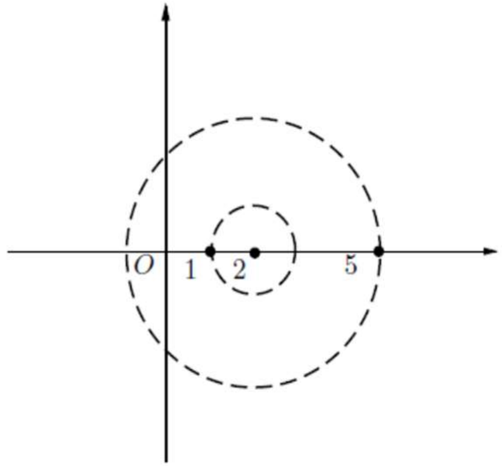
2. 在点 z_0 处展开成罗朗级数.

例题**4.12** 已知 $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)^2}$, 求函数 $f(z)$ 在指定区域的展开式. (1) $|z|<1$; (2) $0<|z-\mathrm{i}|<1$; (3) $|z|>1$.

例题 **4.13** 将函数 $f(z)=\dfrac{4}{z^2-6z+5}$ 在以 $z=2$ 为心的邻域内展开成幂级数或罗朗级数.

解 奇点为 $z=1, z=5$，展开域为

$|z-2|<1, 1<|z-2|<3$ 和 $3<|z-2|<+\infty$



例题**4.14** 设函数 $f(z)=\cos\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ 的罗朗级数展开式为

$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$. **证明:**

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos(2\cos\theta)\mathrm{d}\theta.$$

证明 由罗朗级数的系数积分表达式 $c_n=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\dfrac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 得 $f(z)=\cos(2\cos\theta)$

4.4.3 无穷点罗朗展开式

假设函数 $f(z)$在区域 $0 \le R <|z|< +\infty$内解析，则在此区域内

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n+\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} z^{-n},$$

称为 $f(z)$在 $z=\infty$ 点的罗朗展开式.

例题4.15 求函数 $f(z)=\dfrac{(z-3)}{z(z-1)}$在 $z=\infty$ 点和 $0<|z|<1$ 内罗朗展开式.

注：虽然函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 点和 $0<|z|<r$ 内罗朗展开式均可表示为 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n+\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} z^{-n}$，但展开区域不同.

4.5 孤立奇点与分类

4.5.1 孤立奇点

定义**4.10** 若函数 $f(z)$ 在奇点 $z=z_0(\infty)$ 的某去心邻域

$$0<\left|z-z_0\right|<R(0\le r<|z|<+\infty)$$

内解析，则称点 $z=z_0(\infty)$ 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点.

例如 $z=0$ 为函数 $\dfrac{\sin z}{z},\dfrac{1}{z^2},\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 的孤立奇点，是函数

$1/\sin\dfrac{\pi}{z}$ 的孤立奇点.

注：若 $z=z_0$ 是函数 $f(z)$ 的奇点序列 $\{z_k\}$ 的极限，即

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$，则 $z=z_0$ 一定是非孤立奇点.

例题**4.16** 讨论以下给定点是否为相应函数的孤立奇点：

(1) $e^{\tan\frac{1}{z}},\ z_0=0$;　(2) $\sec\frac{1}{z+1},\ z_0=-1$;　(3) $\frac{1}{\sin z},\ z_0=\infty$.

4.5.2 孤立奇点的分类

若 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，在环域 $r<|z-z_0|<R$ 内可以展开为罗朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n.$$

$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析. 称 $\varphi(z)$ 为

罗朗级数的解析部分.

$\psi(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ 在 $\left|z-z_0\right|>r$ 内解析. 称 $\psi(z)$ 为罗朗级数的主要部分.

定义4.11 设 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点. 若 $f(z)$ 在环域 $r<\left|z-z_0\right|<R$ 内的罗朗级数的主要部分 $\psi(z)=0$, z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点；若

$$\psi(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{-m+1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)},\ c_{-m}\neq 0,$$

z_0 为 $\boldsymbol{m}$阶极点；若 $\psi(z)$ 有无穷多项，z_0 为本性奇点.

例题4.17 试确定以下函数在奇点 $z=0$ 处的类型.

(1) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$; (2) $f(z)=\dfrac{e^{z}-1}{z^{2}}$; (3) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

思考题：能否确定函数 $f(z)=e^{\tan\frac{1}{z}}$ 在奇点 $z=0$ 处类型？

4.5.3 孤立奇点类型判断

设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

定理4.12 下列三个命题等价： **(1)** 点 z_0 为可去奇点;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限; **(3)** 函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有界.

例题4.18 试确定 $f(z)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^z-1}-\dfrac{1}{z}$ 在奇点 $z=0$ 处的类型.

思考题：验证 $z=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$ 是函数 $f(z)=\dfrac{z-\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}}{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}$ 的可去奇点.

定理4.13 z_0 为极点的充要条件为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

定义4.12 若不恒为零的解析函数 $f(z)$ 能表示为

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z),$$

其中 $g(z)$ 在点 z_0 处解析，且 $g(z_0)\neq 0$, m 为正整数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点.

利用泰勒展开式可确定解析函数零点的阶数.

定理4.14 设 $f(z)$ 在点 z_0 处解析，则 z_0 为 $f(z)$ 的$\boldsymbol{m}$阶零点的充要条件是 $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\ f^{(m)}(z_0)\neq 0.$

定理4.15 z_0 为 $f(z)$ 的$\boldsymbol{m}$阶极点的充要条件是 z_0 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的$\boldsymbol{m}$阶零点.

例题4.19 在复平面内找出函数 $f(z)=\dfrac{z^2(z^2-1)}{(\sin\pi z)^2}$ 的孤立奇点，并确定它们的类型. 若为极点，指出它的阶数.

思考题：$z=0$ 是函数 $\dfrac{(1-\mathrm{e}^{z^2})}{z^4\tan z}$ 的几阶极点?

定理4.16 z_0 为本性奇点的充要条件为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在.

例题4.20 在复平面上找出函数 $f(z)=\dfrac{z}{\mathrm{e}^z-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$ 的孤立奇点,并确定它们的类型.

4.5.4 函数在无穷远点的性态

设 $z=\infty$ 为函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 即 $f(z)$ 在

$$D_z : R<|z|<+\infty \ (R\geq 0)$$

内解析. 作变换 $\xi=\dfrac{1}{z}$, 则函数 $g(\xi)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=f(z)$ 在区域 $D_\xi : 0<|\xi|<\dfrac{1}{R}$ 内解析，从而 $\xi=0$ 为 $g(\xi)$ 的孤立奇点.

定义4.13 设 $\xi=0$ 为函数 $g(\xi)$ 的可去奇点、***m***阶极点或本性奇点, 则相应地称 $z=\infty$为函数 $f(z)$ 的可去奇点、***m***阶极点或本性奇点.

$z=\infty$孤立奇点类型的判断:

利用定义及 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\lim\limits_{\xi\to 0} g(\xi)$, 可得如下判别法.

定理4.17 **(1)** 若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$为有限值, 则 $z=\infty$ 为可去奇点;

(2) 若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$, 则 $z=\infty$ 为极点;

(3) 若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 不存在, 则 $z=\infty$为本性奇点.

设 $f(z)$ 在 $D_z: R<|z|<+\infty$ 的罗朗级数展开式为

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n z^n + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}z^{-n}\ .$$

在区域 $D_\xi: 0<|\xi|<\dfrac{1}{R}$ 内，有

$$g(\xi)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n \xi^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}\xi^{n}\ .$$

利用以上关系可得

(1) 若 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的罗朗展开式中不含正幂项，则 $z=\infty$ 为可去奇点;

(2) 若 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的罗朗展开式中含有限正幂项，且最高正幂为 z^m，则 $z=\infty$ 为***m***阶极点;

(3) 若 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的罗朗展开式中含无穷个正幂项, 则 $z=\infty$ 为本性奇点.

例题**4.21** 试确定下列函数在无穷远点的奇点的类型

(1) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$; (2) $f(z)=\mathrm{e}^{z-\frac{1}{z}}$.

例题**4.22** 在扩充复平面上，求下列函数的孤立奇点，并判断其类型. 若为极点，指出阶数.

(1) $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{z}-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$; (2) $f(z)=\dfrac{a}{z}-\dfrac{b}{\sin z}$ 其中 a,b 为实常数.

谢 谢！