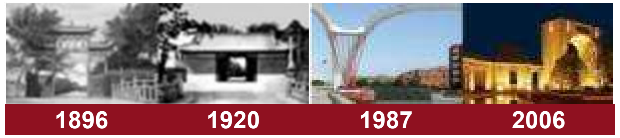
上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY



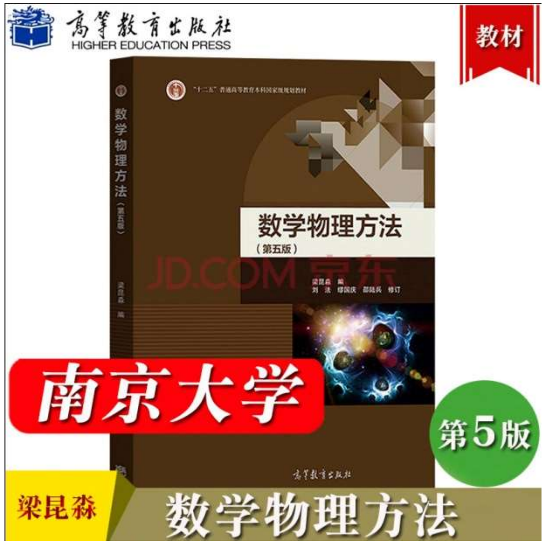
数 学 物 理 方 法 I

第1章 复数与复变函数

王 健

教材与参考文献

- 教材　数学物理方法　（第**5**版）梁昆淼



- 参考文献

  复变函数论　钟玉泉

  积分变换　张元林

  数学物理方法学习指导　自编资料

考核方式和成绩评定方法

- 平时作业成绩　**20%**
- 大作业成绩　**20%**
- 期末考试成绩　**60%**

“数学物理方法I”是物质学院及相关专业的一门重要的数学基础课，主要包括二个部分

- 复变函数

复数与复变函数　　解析函数　　复变函数的积分

解析函数的级数展开　　留数及其应用

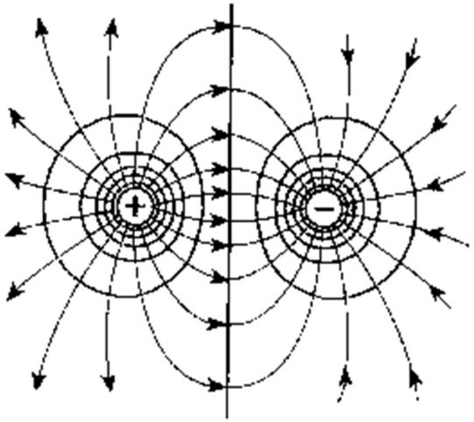
- 积分变换

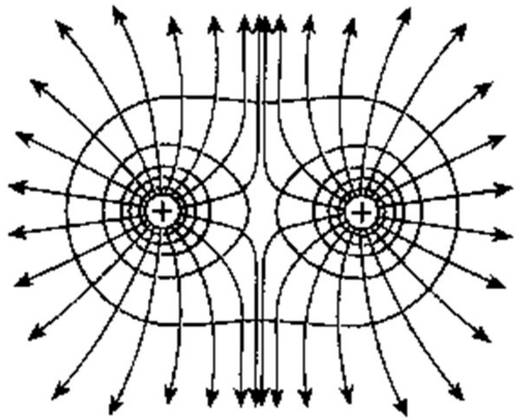
傅里叶变换　　拉普拉斯变换

复变函数的应用

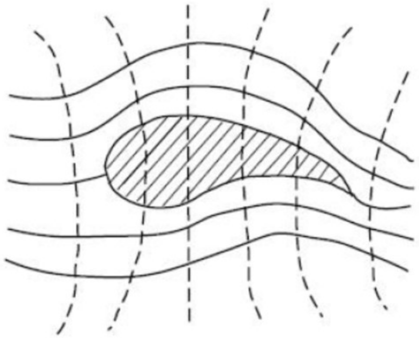
- 物理应用
  - 稳定平面场的复势

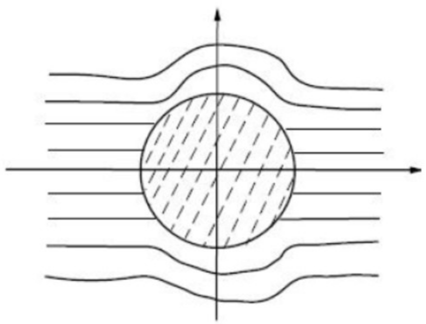
如：电磁场、温度场

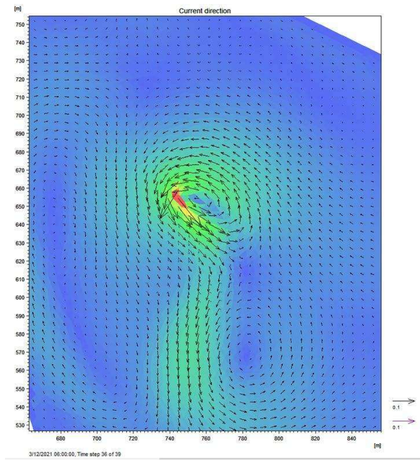




- 平面流场的流量和环量







- 绕流问题中的压力和力矩等，如：飞机机翼剖面压力计算

- 数学应用
  - 代数学的基本定理
  - 某些广义积分的计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x$
  - 微分、积分方程，概率统计，计算数学等学科

积分变换的应用

- 傅里叶变换

频谱分析，语音、图像等信号处理

- 拉普拉斯变换

电力、通信等控制问题

1.1 复数及其表示

1.1.1 复数的抽象概念

- 虚数的引入

- 复数定义

形如 $z=x+\mathrm{i}y, x,y\in\mathbb{R}$ 的数称为复数， 其中

$\mathbb{R}$ 表示实数集合， $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位. x,y 分别称

为复数 z 的实部和虚部，常记为 $x=Rez, y=Imz.$

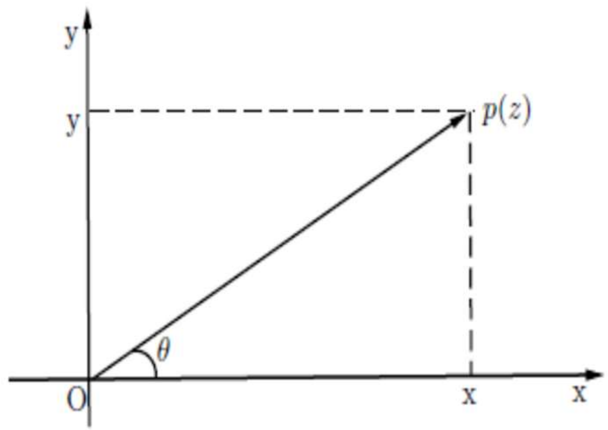
- 复数在物理中的应用

    - 交流电路

    实部表示电压或电流的幅值，虚部表示相位差。

- 量子力学中波函数
- 数字压缩算法设计

1.1.2 复数的表示



- 代数表示
- 几何表示
- 三角表示 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$
- 指数表示 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

1.1.3 复数的模与辐角

- 模：$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 辐角：$\theta = \mathrm{Arg}\, z$.
- 复数的模满足不等式：

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||.$$

- 辐角主值：$\theta = \arg z (-\pi < \theta \le \pi)$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0, y \ge 0, \text{或} y \le 0, \\ \pi + \arctan \dfrac{y}{x}, & x < 0, y \ge 0, \\ -\pi + \arctan \dfrac{y}{x}, & x < 0, y < 0. \end{cases}$$

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi, \, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

例题 **1.1** 将复数 $z=2-2\mathrm{i}$ 化为三角形式和指数形式.

1.2 复数运算和几何意义

1.2.1 复数的四则运算

定义1.2　设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2,$

复数的加、减、乘、除四则运算定义如下:

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2),$$

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\qquad z_2\neq 0.$$

注：在复数域内，我们熟知的一切代数恒等式成立，例如：

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

利用三角函数的积化和差公式得：两个复数乘积满足

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}.$$

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \\ Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2). \end{cases}$$

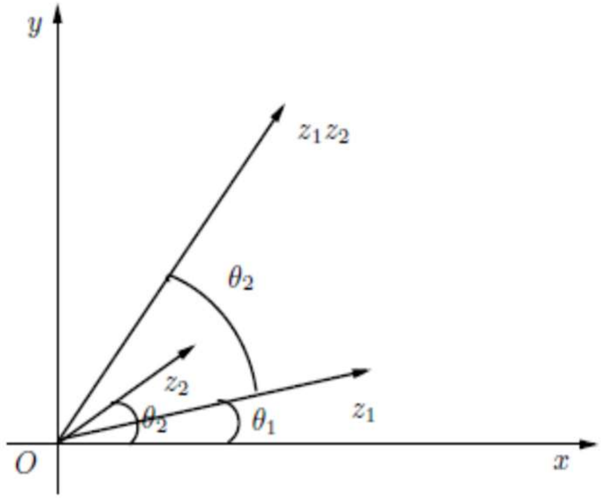
注：由于辐角的多值性，上式第二式应理解为对于左端 $Arg(z_1 z_2)$ 的任一值，必有由右端 $Arg z_1$ 与 $Arg z_2$ 的各一值相加得出的和与之对应；反之亦然.

复数乘法的几何意义，即：$z_1 z_2$ 所对应的向量是把 z_1 所对应的向量伸缩 $r_2 = |z_2|$ 倍，然后再旋转一个角度 $\theta_2 = \arg z_2$.

同理，两个复数的除法有

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 - \theta_2)},$$

满足



$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \\ Arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2), \quad z_2 \neq 0. \end{cases}$$

思考题：以下公式是否成立？

$$\begin{cases} arg(z_1 z_2) = arg z_1 + arg z_2, \\ arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = arg z_1 - arg z_2. \end{cases}$$

当 $\mathrm{Re}(z_1) > 0, \mathrm{Re}(z_2) > 0$ 时，上述公式成立.

例题1.2 计算 $z = (5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})$，并证明：

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

例题1.3 已知 $z_1=1,\ z_2=3+\mathrm{i},z_3$ 在第一象限，且 $\Delta z_1z_2z_3$ 是正三角形. 求 z_3.

答案：$z_3=\left(2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\mathrm{i}\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$.

1.2.2 复数乘方和方根

一. 复数的乘方

1. 定义**1.3** $z^n=\underbrace{z.z\cdots z}_{n}$. 规定：$z^0=1$.

2. 棣莫佛**(De Moivre)**公式：

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.$$

3. 性质 $\left|z^n\right| = \left|z\right|^n$,

$$Arg(z^n) = \underbrace{Argz + \cdots + Argz}_{n} = n\arg z + 2k\pi.$$

$$z^{-n} = r^{-n}\left[\cos\left(-n\theta\right) + i\sin\left(-n\theta\right)\right].$$

例题 1.4 将复数 $z = \dfrac{(2-2\mathrm{i})^4}{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^5}$ 化为三角形式和指数形式.

例题1.5 设 n 为自然数，证明:

$$\left(\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}\right)^n = \cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + \mathrm{i}\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

二、复数的方根

1. 定义**1.4** 设 n 为正整数，若复数 z, w, 满足 $w^n = z$, 则称复数 w 为复数 z 次方根，记为 $w = \sqrt[n]{z}$.

2. 方根的计算公式

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0,1,\cdots,n-1.$$

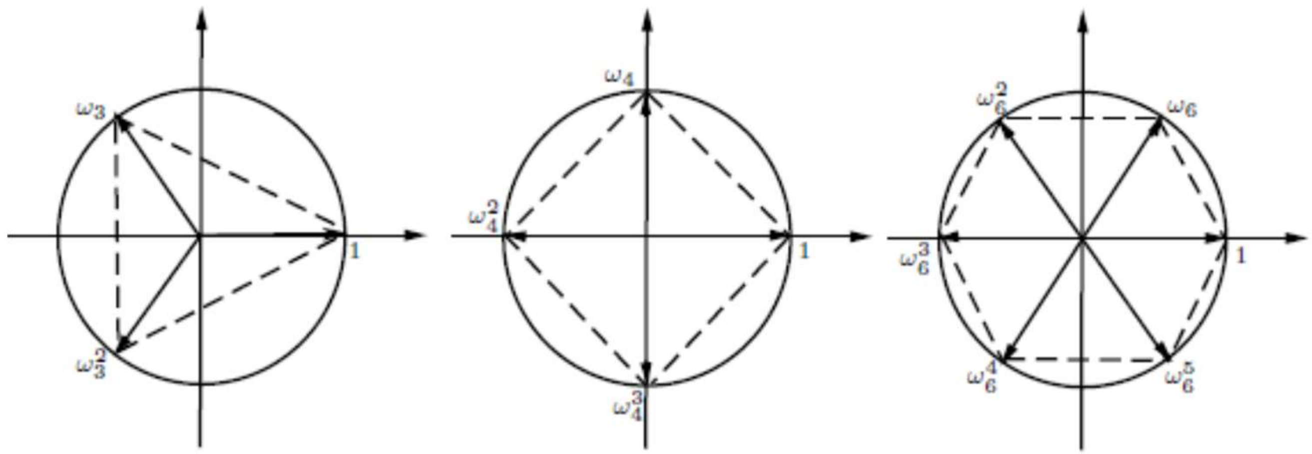
注：当 $k = n$时, 对应 w 的值与 $k = 0$ 时的值相同. 依次类推.

因此, 复数的***n***次方根恰有***n***个不同的值.

3. 几何意义　以原点为心, $\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的内接正 n 边形的顶点.

若记 $\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$, 则**1**的***n***个不同的方根为

$1, \omega_n, \omega_n^2, \cdots, \omega_n^{n-1}$. 下图给出 $n = 2, 4, 6$ 的根的分布情形

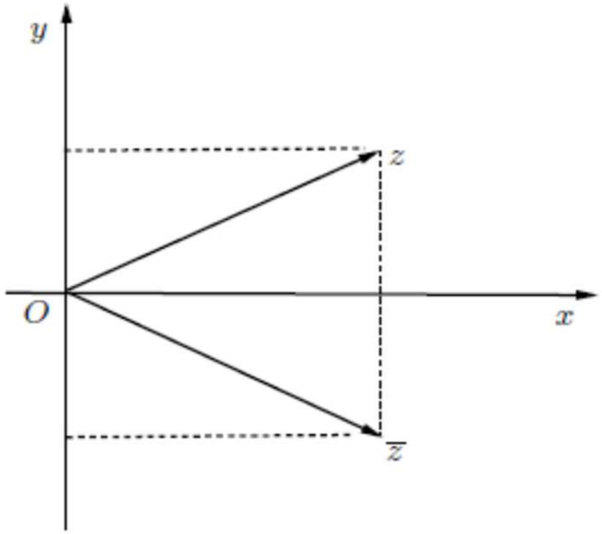


例题**1.6** 求方程 $z^3 + 8 = 0$ 的全部根**.**

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = -2, z_3 = 1 - \sqrt{3}i$$

1.2.3 共轭复数及其性质

1. 定义1.5 称复数 $\overline{z}=x-iy$ 为复数 $z=x+iy$ 的共轭复数.



2. 性质 $|z|=|\overline{z}|$, $Arg\overline{z}=-Argz.$

$$\overline{(\overline{z})}=z,\quad \overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}.$$

$$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2},\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},(z_2\neq 0).$$

$$|z|^2=z\overline{z},\quad Rez=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad Imz=\frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

例题**1.7** 证明：$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\overline{z_2})$;

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2Re(z_1\overline{z_2}).$$

注：上述等式几何意义为：平行四边形两对角线平方和等于各边的平方和

例题**1.8** 已知 $|z_1|=5, |z_2|=2, |z_1-\overline{z}_2|=\sqrt{19}$, 计算 $\arg(z_1z_2)$.

分析：利用等式：$|z_1-\overline{z}_2|^2=|z_1|^2+|\overline{z}_2|^2-2\operatorname{Re}(z_1z_2)$

计算 $\operatorname{Re}(z_1z_2)$. 再由 $\cos(\arg z_1z_2)=\dfrac{\operatorname{Re}(z_1z_2)}{|z_1||z_2|}$ 计算 $\arg(z_1z_2)$

答案：$\operatorname{Re}(z_1z_2)=5,\ \arg(z_1z_2)=\pm\dfrac{\pi}{3}$.

1.2.4 平面曲线的复数方程

问题：

1. 如何用复数形式的方程表示平面曲线.

2. 如何从复数形式的方程确定其所表示的平面曲线.

例题1.9 试用复数表示以下平面曲线方程：

1. 圆或直线方程： $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0,$

   其中 a, b, c, d 为实常数.

2. 双曲线方程： $x^2-y^2=1.$

思考题：写出椭圆和抛物线的复数方程.

例题**1.10** 试分别确定下列方程所表示的平面曲线：

1. $z\overline{z}-a\overline{z}-\overline{a}z+a\overline{a}-c=0$, 其中，$a$ 为复数，$c>0$.

2. $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right|=k$, 其中，$k>0, k\neq 1, a\neq b$.

分析：$\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right|=k \Leftrightarrow (z-a)(\overline{z}-\overline{a})=k^2(z-b)(\overline{z}-\overline{b})$,

$$\left(z-\frac{a-k^2b}{1-k^2}\right)\left(\overline{z}-\frac{\overline{a}-k^2\overline{b}}{1-k^2}\right)+\frac{|a|^2-k^2|b|^2}{1-k^2}-\left(\frac{a-k^2b}{1-k^2}\right)\left(\frac{\overline{a}-k^2\overline{b}}{1-k^2}\right)=0.$$

$$\Rightarrow \left|z-\frac{a-k^2b}{1-k^2}\right|^2=k^2\frac{|a-b|^2}{(1-k^2)^2}.$$

注： 用复数表示平面曲线方程有多种不同的形式．例如，过 a,b 两点的直线方程为： $z=a+(b-a)t$, $\boldsymbol{t}$ 为实参数,

$$\operatorname{Im}\frac{z-a}{b-a}=0,\ \arg\frac{z-a}{b-a}=0, \text{或}\pi$$

例题1.11 证明：

1. 复数 z_1,z_2 所表示的向量相互垂直的充要条件为：$\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)=0.$

2. 复平面上三点 $z_1,\ z_2,\ z_3$ 共线的充要条件为 $\arg\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=0,\pi.$

思考题：

证明：复平面上四点 z_1,z_2,z_3,z_4 共圆周的充要条件为

$$\arg\left(\frac{z_1-z_4}{z_1-z_2}:\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2}\right)=0,\pi.$$

1.3 平面点集和区域

以下内容与高数(下)平面点集相同！

1. 邻域: $N(z_0,\epsilon):|z-z_0|<\epsilon.$

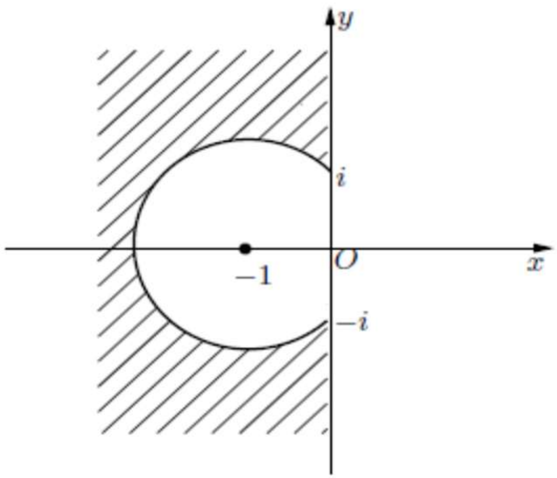
2. 内点、外点和界点.

3. 有界点集.

4. 区域和闭区域、单连通和多连通区域.

5. 有界区域和无界区域.

6. 简单曲线.



例题**1.12** 试判别满足条件 $0<\arg\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\dfrac{\pi}{4}$ 的点集是否为一区域？

例题1.13 试确定由不等式 $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| > k(k>0)$ 所表示的平面点集.

解 令 $z=x+\mathrm{i}y$, 则有

$$(1-k^2)x^2-2(1+k^2)x+(1-k^2)+(1-k^2)y^2>0.$$

(1) $0<k<1$ $\quad \left(x-\dfrac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2+y^2>\left(\dfrac{2k}{1-k^2}\right)^2 \Rightarrow$ 圆的外部

(2) $k>1$ $\quad \left(x-\dfrac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2+y^2<\left(\dfrac{2k}{k^2-1}\right)^2 \Rightarrow$ 圆的内部

(3) $k=1$ $\quad -2(1+k^2)x>0 \Rightarrow$ 左半平面

注：确定复数方程或不等式所表示的平面曲线或区域基本方法：

把复数方程或不等式转化为平面上直角坐标或极坐标形式，

进而确定所表示的平面曲线或区域.

1.4 复变函数

1.4.1 复变函数的概念

1. 定义**1.6** 对在复平面上点集 D 内每一点 z, 按照某一法则有确定的复数 w 与之对应，则称 w 为 z 的复变函数，记为 $w=f(z)$. 称***D***为定义域，$G=\left\{f(z)\mid z\in D\right\}$ 为值域**.**

2. 单值函数与多值函数**.**

单值函数**:** 对 $\forall z\in D, \exists$ 唯一 $w\in G$, 使得 $w=f(z)$.

例如：$w=|z|, w=z^2$.

多值函数**: (1)** 有限多值 $w=\sqrt[4]{z}$; **(2)** 无穷多值 $w=\operatorname{Arg} z$.

3. 反函数

定义**1.7** 设$G=\{w \mid w=f(z), z\in D\}$, 若$\forall w\in G, \exists z\in D \Rightarrow$ $w=f(z)$, 则得到的$\boldsymbol{z}$是$\boldsymbol{w}$的函数, 记为 $z=g(w)$, 并称 $g(w)$ 为函数 $f(z)$ 的反函数, 记为 $g(w)=f^{-1}(w)$.

反函数也有单值函数和多值函数.

例题**1.14** 求函数 $w=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}, ad-bc\neq 0$ 的反函数.

复变函数是复数集到复数集的映射. 一个复变函数

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

对应于两个二元实函数: $u=u(x,y), v=v(x,y)$.

1.4.2 曲线(区域)在映射下的像

几何上，复变函数所构成的映射把 z 平面上的点集D映射成w平面上的点集G. 典型点集D为平面曲线和区域.

1. 若曲线C由方程 $F(x,y)=0$ 确定.

2. 若曲线 C 由方程 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} (\alpha \le t \le \beta)$ 确定.

3. 若曲线C由方程 $F(z,\overline{z})=0$ 确定.

例题**1.15** 试分析函数 $w=z^2$ 所确定的映射, 并确定 z 平面上的曲线: **(1)** $x^2+y^2=R^2$; **(2)** $x^2-y^2=4$ 的像曲线.

例题1.16 求函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 把以(1,0)为心, 1为半径的圆周 C 映射成的像曲线.

例题1.17 求区域 $D=\{z\,|\,\mathrm{Re}\,z>0, 0<\arg z<\pi/2\}$ 在以下映射下的像：(1) $w=z^2$; (2) $w=\mathrm{i}z$.

思考题：1. 求双纽线 $r^2=\cos 2\theta$ 在映射 $w=z^2$ 下的像曲线.

2. 求圆周 $|z|=2$ 在映射 $w=z+\dfrac{1}{z}$ 下的像曲线.

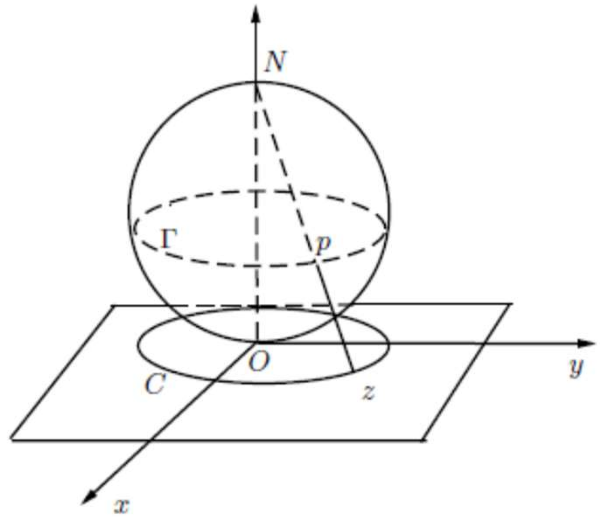
注：确定平面曲线在映射下的像，应根据所给曲线的表示形式而把映射用相应的不同形式表示，如：指数形式、代数形式.

1.5 复球面与无穷远点

1. 复球面

2. 无穷远点 ∞

3. 扩充复平面上点集



无穷远点的邻域应理解为以原点为心的某圆周的外部，即指满足条件 $|z|>\dfrac{1}{\epsilon}(\epsilon>0)$ 的点集称为 ∞ 的邻域.

复平面以 ∞ 为其唯一的边界点；扩充复平面以 ∞ 为内点.

单连通区域的概念也可以推广到扩充复平面上的区域

例题**1.18** 在扩充复平面上, 以下区域中哪些是单连通区域:

$D_1=\{z\,|\,|z|<1\}$; $D_2=\{z\,|\,|z|>1\}$; $D_3=\{z\,|\,1<|z|<+\infty\}$.

谢 谢！