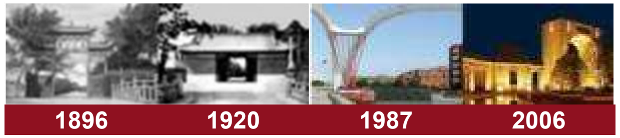
上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY



数 学 物 理 方 法 I

第6章　傅里叶变换

王 健

6.1 傅里叶级数简介

6.1.1 时域与频域

时域（时间域） 自变量是时间, 即横轴是时间, 纵轴是信号的变化. 其动态信号 $x(t)$ 是描述信号在不同时刻取值的函数.

频域（频率域） 自变量是频率, 即横轴是频率, 纵轴是该频率信号的幅度, 也就是通常说的频谱图.

(图片选自网络)

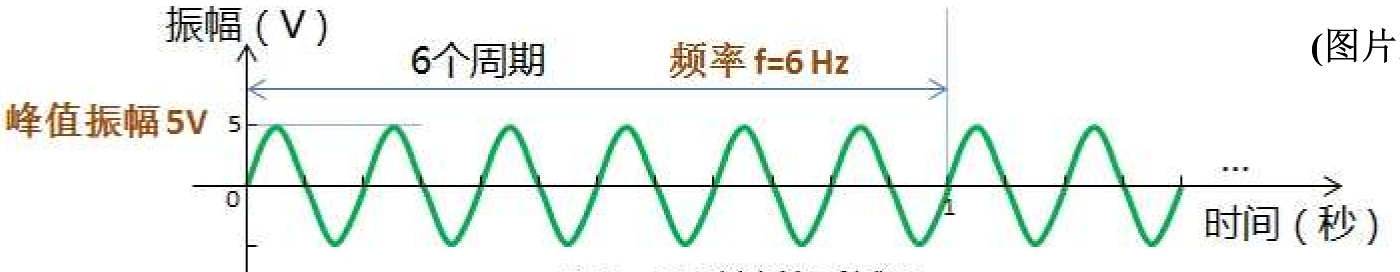


图1：正弦波的时域图

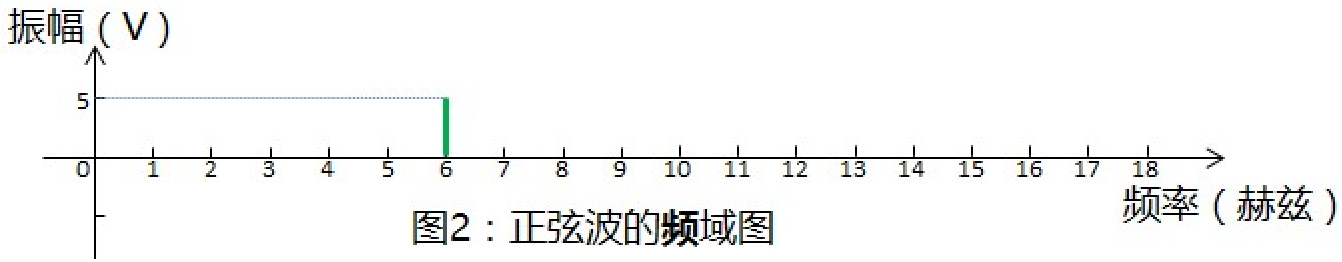


图2：正弦波的频域图

6.1.2 傅里叶级数

函数系$\{1,\cos t,\sin t,\cos 2t,\sin 2t,\cdots\cos nt,\sin nt,\cdots\}$在$[-\pi,\pi]$上正交.

证: $\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nt\,\mathrm{d}\,t=0\ (n=1,2,\cdots)$

利用公式 $\cos kt\cos nt=\frac{1}{2}\Big[\cos(k+n)t+\cos(k-n)t\Big]$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\cos(k+n)t+\cos(k-n)t\Big]\mathrm{d}\,t$$
$$=0,\ (k\neq n)$$

同理可证：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kt\sin nt\,\mathrm{d}t=0,(k\neq n)$$

但是在三角函数系中两个相同的函数的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分不等于0，且有

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \,\mathrm{d}t = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt \,\mathrm{d}t = \pi \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nt \,\mathrm{d}t = \pi$$

这里，利用了三角公式

$$\cos^2 nt = \frac{1+\cos 2nt}{2}, \sin^2 nt = \frac{1-\cos 2nt}{2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

问题：**1.** 若函数能展开成三角级数, 那么系数 a_n, b_n 如何计算？

2. 展开的条件是什么？

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

其中
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t, \quad (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t, \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{2\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t, \quad (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{2\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t, \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

称为傅里叶系数. 代入傅里叶系数的三角级数称为傅里叶级数

在什么条件下函数可展开为傅里叶级数?

狄利克雷于1829年第一次对于傅立叶级数的收敛性给出了严格的证明. 得到了所谓狄利克雷判定准则.

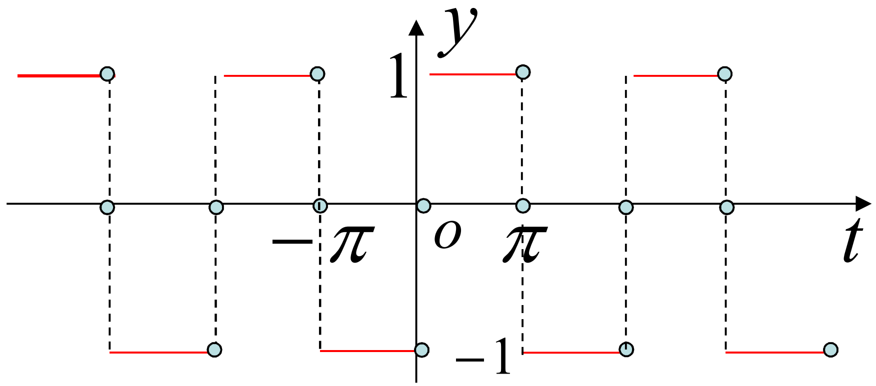
定理6.1 设 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数，在$[-\pi,\pi]$上分段单调且至多只有有限个第一类间断点，则 $f(x)$ 的**Fourier**级数收敛，并且在$[-\pi,\pi]$ 上，其和函数

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当}x\text{是}f(x)\text{的连续点}, \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & \text{当}x\text{是}f(x)\text{的间断点}, \\ \dfrac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}, & x=\pm\pi. \end{cases}$$

例题6.1 设 $f(x)$是周期为 2π的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(t)=\begin{cases} -1, & -\pi\le t<0, \\ 1, & 0\le t<\pi. \end{cases}$$

解：先求傅里叶系数



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nt\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos nt\,\mathrm{d}t$$

$$= 0\ (\,n = 0\,, 1\,, 2\,,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$$

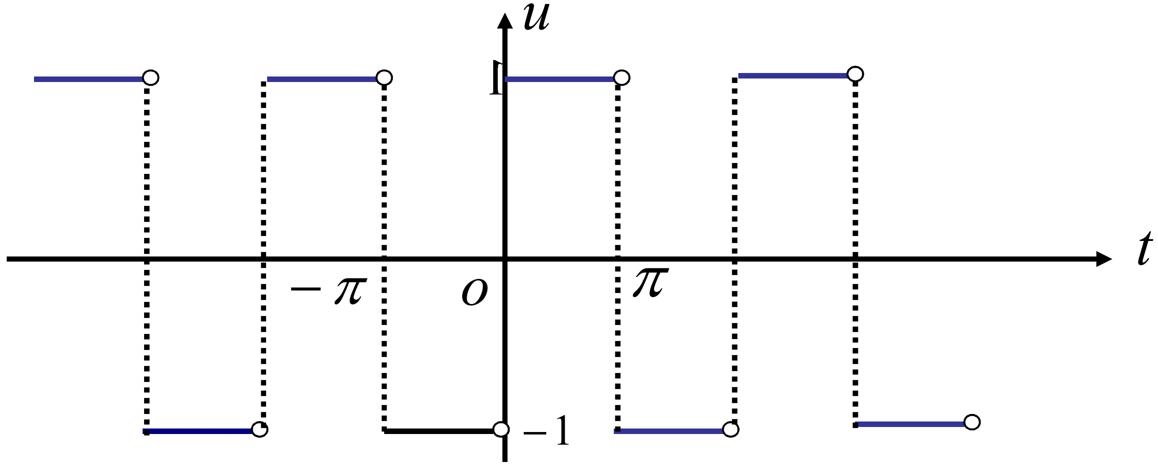
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nt\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nt\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi}[\,1-(-1)^n\,]$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}[\quad \sin t + \quad \frac{1}{3}\sin 3t + \cdots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)t + \cdots \quad]$$

$$(-\infty < t < +\infty\,, t \neq 0\,, \pm\pi\,, \pm 2\pi\,, \cdots)$$

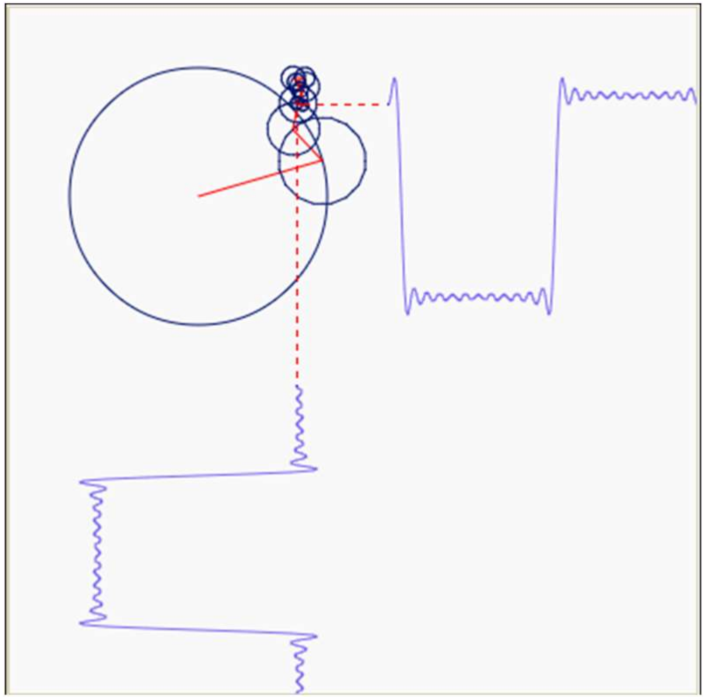
$$f(t)=\frac{4}{\pi}[\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)t+\cdots]$$

$$(-\infty<t<+\infty;\ t\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots).$$

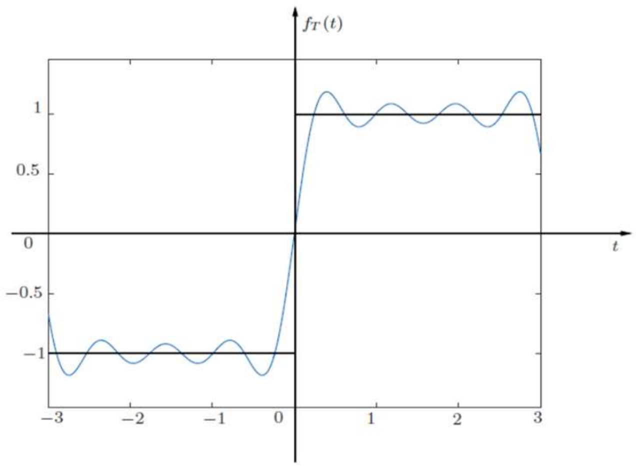


不同频率正弦波逐个叠加成方波

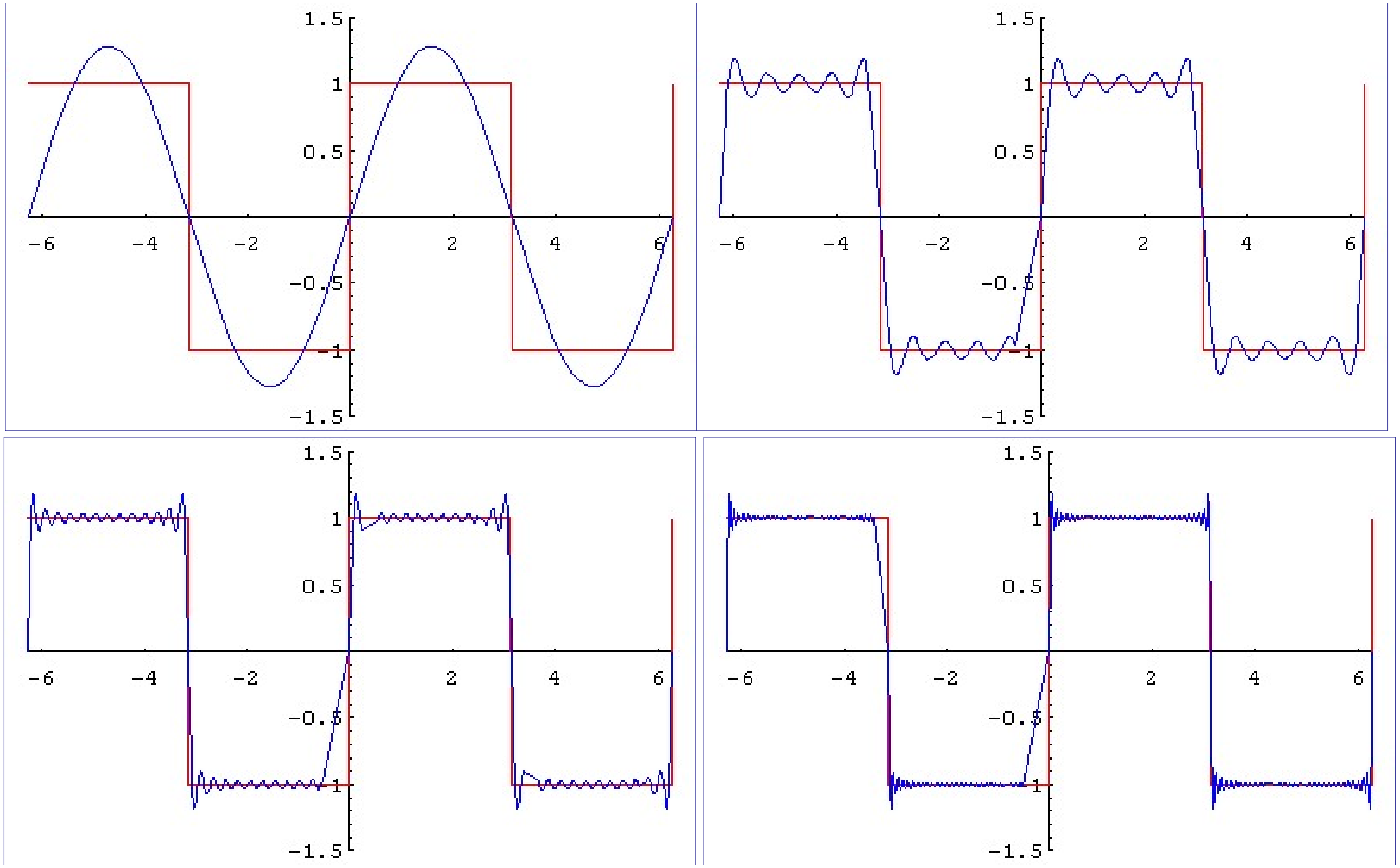
$$\frac{4}{\pi}\sin t,\quad \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\sin 3t,\quad \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{5}\sin 5t,\quad \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{7}\sin 7t,\ \cdots$$



前四个正弦波叠加

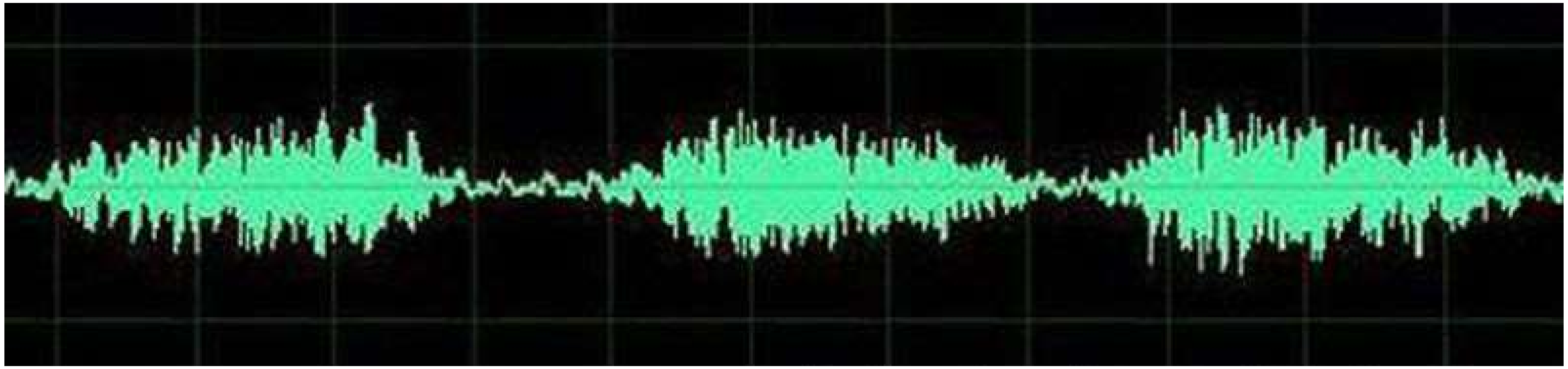


(b)


1.5
1
0.5
-6
-4
-2
2
4
6
-0.5
-1
-1.5

6.2 傅里叶变换

6.2.1 积分变换



$$\Updownarrow$$

(图片选自网络)

所谓积分变换，就是通过特定的积分运算，把某函数类 $\mathcal{D}$ 中的一个函数 $f(t)$, 变换成另一函数类 $\mathcal{R}$ 中的函数 $F(\omega)$.

含参变量 ω 的积分

$$F(\omega) = \int_a^b f(t)K(\omega, t)\mathrm{d}t$$

将时域 $\mathcal{D}$ 中的函数 $f(t)$, 变换成频域 $\mathcal{R}$ 中的函数 $F(\omega)$.

其中 $K(\omega, t)$为一确定的二元函数, 称为积分变换的核.

选取不同的积分变换核和积分域时，就可以得到不同的积分变换.

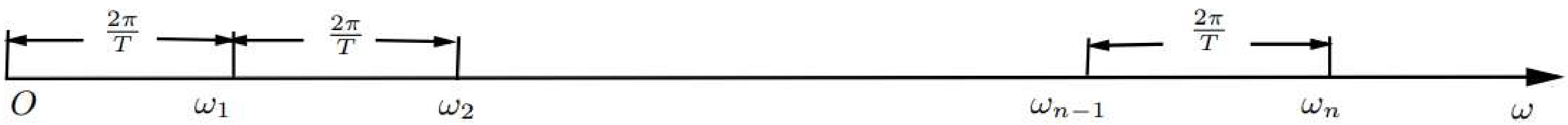
本课程主要讨论傅里叶变换和拉普拉斯 变换.

6.2.2 傅里叶积分公式

非周期函数 $f(t)$ 的傅里叶展开式可以看成周期函数 $f_T(t)$ 的傅里叶展开式当 $T\to+\infty$ 的极限形式，即

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty}f_T(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}.$$

令 $$\omega_n=n\omega,\ \Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=\omega=\frac{2\pi}{T}.$$



扩充 ω_n 至整个轴，则当 $\Delta\omega_n\to 0$ 等价于 $T\to\infty$，于是

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty}f_T(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}.$$

$$=\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}\Delta\omega_n$$

记 $F_T(\omega_n)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau$，则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_T(\omega_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}\Delta\omega_n.$$

由于 $F(\omega_n)=\lim_{T\to+\infty}F_T(\omega_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau$, 由积分的定义

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

从而得到如下傅里叶积分公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

定理**6.2 (**傅里叶积分定理**)** 若函数 $f(t)$ 在任意有限区间上满足狄利克莱条件，且在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，则当***t*** 为连续点时

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=f(t),$$

当***t*** 为第一类间断点时

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}.$$

傅里叶积分的三角表示式

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.$$

利用余弦函数的和差化积公式

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}\left[A(\omega)\cos\omega\,\mathrm{t}+B(\omega)\sin\omega\,\mathrm{t}\right]\mathrm{d}\omega,$$

其中 $A(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau$, $B(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau.$

余弦傅里叶积分公式

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\left[f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega.$$

正弦傅里叶积分公式

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\left[f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega.$$

例题6.2 求函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-\beta|t|}\ (\beta>0)$ 的傅里叶积分；**(2)** 计算广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t\mathrm{d}\omega$.

注：试比较利用留数计算上述广义积分！

例题6.3 设函数 $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\le\pi,\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$ **(1)** 求 $f(t)$的傅里叶积分；**(2)** 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sin t, & |t|\le\pi,\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$$

例题**6.4** 利用函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & t=0,\\ \pi e^{-t}, & t>0\end{cases}$ 的傅里叶积分表达式，计算广义积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2t+t\sin 2t}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

解 $$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\int_0^{+\infty}\pi\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{\pi(1-\mathrm{i}\omega)}{1+\omega^2}.$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & t=0,\\ \pi\mathrm{e}^{-t}, & t>0.\end{cases}$$

上式中取***t*=2**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2\omega+\omega\sin 2\omega}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega=2\pi\mathrm{e}^{-2}.$$

6.2.3 傅里叶变换

在傅里叶积分公式中，记

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,\ -\infty<\omega<+\infty,$$

则
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

称 $F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的傅里叶变换，记为

$$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,\ -\infty<\omega<+\infty.$$

称 $f(t)$ 为 $F(\omega)$ 的傅里叶逆变换，记为

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

在频谱分析中，傅里叶变换的物理意义是将连续信号从时间表达式 $f(t)$ 变换到频率域表达式 $F(\omega)$；而傅里叶逆变换将连续信号的频域表达式 $F(\omega)$ 求得时域表达式 $f(t)$.

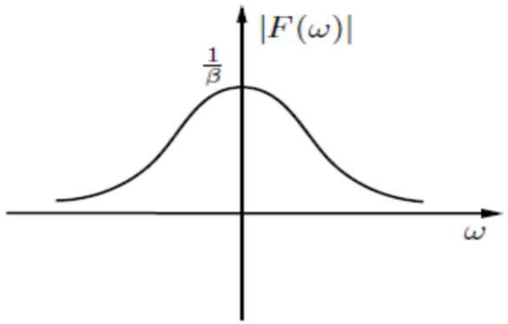
$F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的频谱函数，而它的模 $|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的振幅频谱（简称为频谱）.

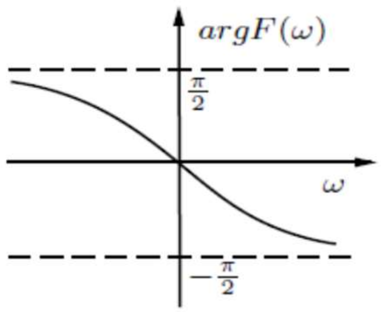
例**6.5** 求函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t\geq 0\end{cases}$ 的傅里叶变换和频谱，并计算积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega$. 其中 $\beta>0$.

解

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\begin{cases}0, & t<0,\\ \pi/2, & t=0,\\ \pi e^{-\beta t}, & t>0.\end{cases}$$

频谱为 $\quad |F(\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}},\ \arg F(\omega)=-\arctan\dfrac{\omega}{\beta}.$



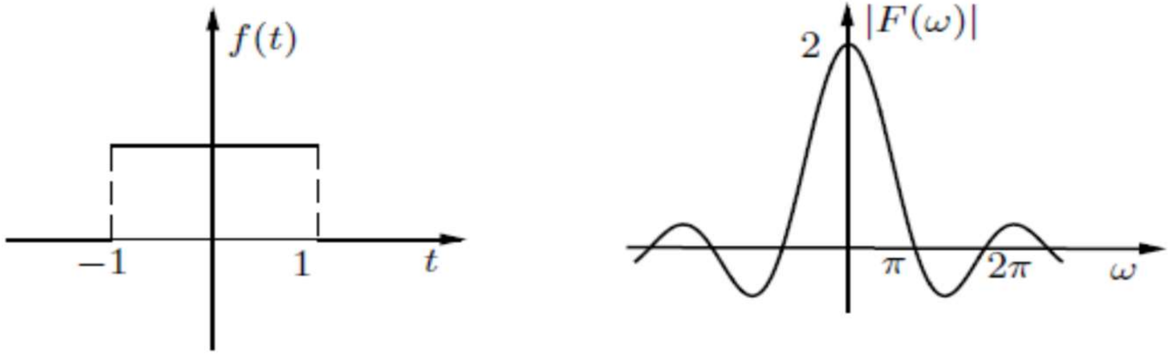


注：**1.** 频谱图表明时间函数的各频谱分量的相当大小和相角；

2. 振幅频谱$|F(\omega)|$是偶函数.

例题6.6 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 的傅里叶变换，

并计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.



在实际应用中，为了保持傅里叶变换及逆变换的对称性，

常还采用如下两种定义式

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,\quad f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

例题6.7 求函数 $\mathrm{e}^{-\beta t}u(t)\sin bt\ (\beta>0)$ 的傅里叶变换.

解 利用Euler公式

$$\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{-\beta t}u(t)\sin bt\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}u(t)\sin bt\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\sin bt\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{0}^{+\infty}\left[\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\omega-\mathrm{i}b)t}-\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\omega+\mathrm{i}b)t}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\omega-\mathrm{i}b)t}}{-(\beta+\mathrm{i}\omega-\mathrm{i}b)}-\frac{\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\omega+\mathrm{i}b)t}}{-(\beta+\mathrm{i}\omega+\mathrm{i}b)}\right]\Bigg|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{\beta+\mathrm{i}\omega-\mathrm{i}b}-\frac{1}{\beta+\mathrm{i}\omega+\mathrm{i}b}\right]=\frac{b}{(\beta+\mathrm{i}\omega)^2+b^2}.$$

例题6.8 已知像函数 $F(\omega)=\dfrac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2}$，求 $F(\omega)$的傅里叶逆变换.

解 $$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

利用留数定理求广义积分法计算.

$F(\omega)=\dfrac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2}$在上半平面有一个二阶极点 $\omega=\mathrm{i}$

$$\operatorname{Re}s\left[\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\mathrm{i}\right]=\lim_{\omega\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{\omega^2}{(\omega+\mathrm{i})^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right]=\frac{\mathrm{i}}{4}\big(t-1\big)\mathrm{e}^{-t}.$$

当 $t\geq 0$时，$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{4}(1-t)\mathrm{e}^{-t}.$

当 $t<0$ 时如何计算？

思考题：求函数 $f(t)=\dfrac{1}{t^2+2t+2}$ 的傅里叶变换.

6.3 广义傅里叶变换

6.3.1 δ 函数

在物理和工程技术中，除了用到指数衰减函数外，还常常会碰到单位脉冲函数. 因为许多物理现象，除了有连续分布的物理量外，还会有集中于一点的量（点源），例如，单位质点的质量密度；单位点电荷的电荷密度；集中于一点的单位磁通的磁感强度等等。或者具有脉冲性质的量，如：瞬间作用的冲击力，电脉冲等.

考虑原电流为零的电路中，在某一瞬时(设为 t=0) 输入一单位电量的脉冲，现在要确定电路上的电流 $i(t)$, $q(t)$ 表示

上述电路中的电荷函数，则 $q(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0,\\ 1, & t=0.\end{cases}$

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}.$$

形式地计算此导数，则

$$i(0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(0+\Delta t)-q(0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(-\frac{1}{\Delta t}\right)=\infty.$$

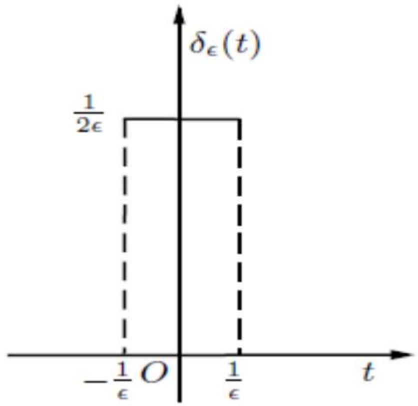
上式表明，在通常意义下的函数类中找不到一个函数能够表示这样的电流强度. 需引进一个称之为狄拉克**(Dirac)**函数的广义函数，简称为 δ 函数.

$\delta(t-t_0)$ 满足下列条件:

$$(1)\quad \delta(t-t_0)=\begin{cases}0, & t\neq t_0\,,\\ \infty, & t=t_0\,,\end{cases}\qquad (2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=1.$$

可以将 δ 函数作为脉冲函数的极限来理解.

$$\delta_\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |t-t_0|<\varepsilon\,,\\ 0, & |t-t_0|>\varepsilon\,.\end{cases}$$



直接计算可知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0, & t\neq t_0,\\ \infty, & t=t_0.\end{cases}\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t-t_0)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}dt=1\,,$$

δ 函数非通常意义之下函数，而是一个广义函数.

对任意在 $t=t_0$ 处连续的函数 $\varphi(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\varphi(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t-t_0)\varphi(t)dt=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}\varphi(t)dt=\varphi(t_0).$$

因此 δ 函数常以广义函数形式定义：

对任意在 $t=t_0$ 处连续的函数 $\varphi(t)$，如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\delta(t-t_0)dt=\varphi(t_0),$$

则称 $\delta(t-t_0)$ 为 δ 函数，$\varphi(t)$ 称为检验函数. 上式称为 δ 函数的筛选性.

利用广义函数，可以定义 δ 函数的广义导数：

对任意在 $t=t_0$ 处具有任意阶导数的函数 $\varphi(t)$，如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt = (-1)^k \varphi^{(k)}(t_0),$$

则称 $f(t)$ 为函数 $\delta(t-t_0)$ 在 $t=t_0$ 处的***k***阶导数，记为 $\delta^{(k)}(t-t_0)$

δ 函数除了筛选性外，还有如下性质：

1. δ 函数为偶函数，$\delta(-t)=\delta(t)$.

2. δ 函数为单位阶跃函数的导数**(**广义**)**.

由于 $\int_{-\infty}^{t} \delta(t-c)dt = \begin{cases} 1, & t>c, \\ 0, & t<c, \end{cases}$ 形式上两端关于***t***求导

$$\frac{d}{dt}u(t-c) = \delta(t-c).$$

3. 设***a***为非零常数，则 $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t).$

例题6.9 证明以下等式：

(1) 若 $g(t)$ 为连续函数，则 $g(t)\delta(t-\mathrm{t}_0)=g(t_0)\delta(t-t_0)$.

(2) 若 $g(t)$ 为连续函数，且 $g(0)=0$，则 $g(t)\delta'(t)=-g'(0)\delta(t)$.

6.3.2 基本函数的广义傅里叶变换

I. δ 函数

例题6.10 求 δ 函数的傅里叶变换，并求积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$.

$$\mathscr{F}[\delta(t)]=1,\qquad \mathscr{F}^{-1}[1]=\delta(t)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=2\pi\delta(t).$$

注：积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$ 是广义函数意义下的积分.

2. 单位阶跃函数 $u(t)$

例题6.11 验证：单位阶跃函数 $u(t)$ 的傅里叶变换为

$$\mathscr{F}\left[u(t)\right] = \frac{1}{\mathrm{i}\omega} + \pi\delta(\omega).$$

注：利用狄利克莱积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & t > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & t < 0. \end{cases}$

3. 指数函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

取 $\omega_0 = 0$ 得到常数1的傅里叶变换 $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$

注：利用积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega = 2\pi\delta(t).$

4. 正弦函数 $\sin\omega_0 t$ 和余弦函数 $\cos\omega_0 t$

$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] = \mathrm{i}\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

例题6.12 已知某函数的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \pi[\delta(\omega+\omega_0)]$$

求其逆变换 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$.

解
$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega+\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}.$$

6.4 傅里叶变换与逆变换的性质

6.4.1 傅里叶变换基本性质

1. 线性性质 若 α,β 为任意常数，且 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)],G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]$

则
$$\mathscr{F}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha F(\omega)+\beta G(\omega)\,,$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F(\omega)+\beta G(\omega)]=\alpha f(t)+\beta g(t).$$

例题6.13 求函数 $\sin^3 t$ 的傅里叶变换.

注：利用欧拉公式

$$\sin^3 t=\left(\frac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{2\mathrm{i}}\right)^3=\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t$$

$$\mathscr{F}[\sin^3 t]=\frac{\mathrm{i}\pi}{4}[3\delta(\omega+1)-\delta(\omega+3)+\delta(\omega-3)-3\delta(\omega-1)]$$

例题**6.14** 设 $F(\omega)=\pi\delta(\omega+1)-\dfrac{\mathrm{i}}{\omega+1}$，求 $F(\omega)$ 的傅里叶逆变换.

解 $$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\pi\delta(\omega+1)-\frac{\mathrm{i}}{\omega+1}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{i}{\omega+1}\right].$$

由于

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{\omega+1}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}}{\omega+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}}{\omega+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+1)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+1)t}}{\omega+1}\mathrm{d}(\omega+1)=-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}\mathrm{d}(\omega+1)$$
$$=-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}, & t<0,\\ -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}, & t>0.\end{cases}$$

从而 $$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}.$$

2. 对称性 设$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$, 则 $\mathscr{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$.

例题**6.15** 利用矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|<1,\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 的傅里叶变换,

证明: $\mathscr{F}\left[\dfrac{\sin t}{t}\right]=\begin{cases}\pi, & |\omega|<1,\\ 0, & |\omega|>1.\end{cases}$

证明　由于 $\mathscr{F}[f(t)]=\dfrac{2\sin\omega}{\omega}$，利用对称性

$$\mathscr{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\pi f(-\omega)=\begin{cases}\pi, & |\omega|<1,\\ 0, & |\omega|>1.\end{cases}$$

3. 位移性质 设$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$, t_0, ω_0 为常数，则

$$\mathscr{F}[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}F(\omega)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}f(t)$$

由位移性，如果函数 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$, 则

$$\mathscr{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{\mathrm{i}}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)].$$

$$\mathscr{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)].$$

例题**6.16** 已知 $f(t)=\mathrm{e}^{-\beta t^2}\ (\beta>0)$ 的傅里叶变换为 $\mathscr{F}[f(t)]=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$,

求 $f(t)\sin\alpha t$ 的傅里叶变换**.**

解

$$\mathscr{F}[f(t)\sin\alpha t]=\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{-\beta t^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha t}}{2\mathrm{i}}\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\beta t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}-\mathrm{e}^{-\beta t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha t}]$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}[\mathrm{e}^{-\frac{(\omega+\alpha)^2}{4\beta}}-\mathrm{e}^{-\frac{(\omega-\alpha)^2}{4\beta}}].$$

注**:** $f(t)=\mathrm{e}^{-\beta t^2}\ (\beta>0)$ 的傅里叶变换可利用微分性求得**.**

4. 相似性 设$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$, $a\neq 0$, 则

$$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right),\quad \mathscr{F}^{-1}[F(a\omega)]=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{t}{a}\right)$$

一般地，有如下的结论

$$\mathscr{F}[f(at-t_0)]=\frac{1}{|a|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{t_0}{a}\right)\omega}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

例题**6.17** 计算 $\mathscr{F}[u(5t-2)]$.

解 $$\mathscr{F}[u(5t-2)]=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}\mathrm{i}\omega}\mathscr{F}[u(t)]\Big|_{\frac{\omega}{5}}=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}\mathrm{i}\omega}\left[\frac{5}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta\left(\frac{\omega}{5}\right)\right].$$

5. 微分性质 若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}f^{(k)}(t)=0\ (k=0,1,\cdots n-1)$, 则

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(\mathrm{i}\omega)^nF(\omega),\qquad F^{(n)}(\omega)=(-\mathrm{i})^n\mathscr{F}[t^nf(t)].$$

特别地，有 $\mathscr{F}[f'(t)] = \mathrm{i}\omega F(\omega)$, $\quad F'(\omega) = -\mathrm{i}\mathscr{F}[tf(t)]$.

例题**6.18** 设函数$f(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$, 求函数$tf(t)$的傅里叶变换**.**

解 $$F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos\omega t\mathrm{d}t.$$

分部积分得 $$F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

利用微分性得 $$\mathscr{F}[tf(t)] = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega) = \frac{-4\mathrm{i}\omega}{(1+\omega^2)^2}.$$

例题 **6.19** 利用像函数的微分性，求函数 $f(t) = \mathrm{e}^{-\beta t^2}(\beta > 0)$ 的傅里叶变换**.**

解 $$F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\beta t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.$$

利用分部积分及微分性质，得

$$F(\omega)=\frac{2\beta\mathrm{i}}{\omega}\mathscr{F}[tf(t)]=\frac{2\beta\mathrm{i}}{\omega}\left[\mathrm{i}\frac{d}{d\omega}F(\omega)\right]=-\frac{2\beta}{\omega}F'(\omega).$$

$F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}.$ $F(\omega)$ 满足微分方程

$$F'(\omega)+\frac{\omega}{2\beta}F(\omega)=0,\ F(0)=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}},$$

上述方程的解为 $F(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}.$

5. 积分性质 设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$, 如果 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=0,$ 则

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(s)\mathrm{d}s\right]=\frac{F(\omega)}{\mathrm{i}\omega}$$

如果 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau\neq 0,$ 则

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(s)\mathrm{d}s\right]=\frac{F(\omega)}{\mathrm{i}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega).$$

例题**6.20** 设 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} x(t)=0, \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{d}t=0.$ 求解微分、积分方程

$$x'(t)-4\int_{-\infty}^{t} x(s)\mathrm{d}s=\delta(t).$$

解　方程两边作傅里叶变换，得　$\mathrm{i}\omega X(\omega)-\dfrac{4}{\mathrm{i}\omega}X(\omega)=1.$

$$X(\omega)=\frac{-\mathrm{i}\omega}{(\omega^2+4)}.\qquad x(t)=\mathscr{F}^{-1}[X(\omega)]=\frac{-\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+4)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

利用留数定理计算. 当 $t>0$ 时

$$x(t)=\frac{-\mathrm{i}}{2\pi}\times 2\pi\mathrm{i}\times\mathrm{Res}\left[\frac{\omega}{(\omega^2+4)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, 2\mathrm{i}\right]=\lim_{\omega\to 2\mathrm{i}}\frac{\omega}{\omega+2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}.$$

当 $t=0$ 时　$x(t)=\dfrac{-\mathrm{i}}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+4)}\mathrm{d}\omega=0.$

当 $t<0$ 时　$x(t)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}.$

6.4.2 傅里叶变换卷积性质

设 $f_1(t), f_2(t)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的函数，如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s) f_2(t-s)\mathrm{d}s$ 存在，称其为函数 $f_1(t), f_2(t)$ 的卷积，记为

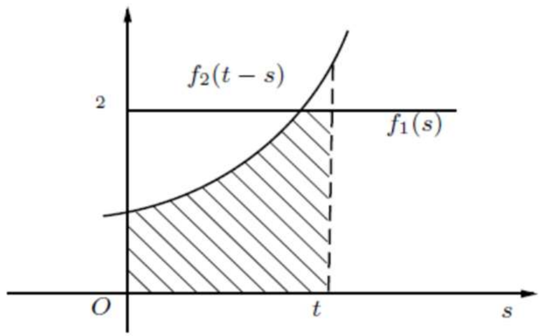
$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s) f_2(t-s)\mathrm{d}s.$$

例题**6.21** 求下列函数的卷积： $f_1(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 2, & t\geq 0,\end{cases}$ $f_2(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-t}, & t\geq 0.\end{cases}$

解 $$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s) f_2(t-s)\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^t f_1(s) f_2(t-s)\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^t 2\mathrm{e}^{-(t-s)}\mathrm{d}s = 2\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^s\mathrm{d}s = 2(1-\mathrm{e}^{-t}).$$



卷积有如下基本性质*：

1. 交换律 $$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t);$$

2. 结合律 $$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t);$$

3. 分配律 $$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t);$$

4. 数乘性 $$a[f_1(t) * f_2(t)] = [af_1(t)] * f_2(t) = f_1(t) * [af_2(t)];$$

5. 微分性 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_1(t) * f_1(t) = f_1(t) * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_2(t);$$

6. 积分性 $$\int_{-\infty}^{t} [f_1(\xi) * f_2(\xi)] \mathrm{d}\xi = f_1(t) * \left(\int_{-\infty}^{t} f_2(\xi) \mathrm{d}\xi\right) = \left(\int_{-\infty}^{t} f_2(\xi) \mathrm{d}\xi\right) * f_2(t);$$

7. 不等式 $$| f_1(t) * f_2(t) | = | f_1(t) | * | f_2(t) | .$$

定理6.3（卷积定理）设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)], G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]$, 则

$$\mathscr{F}[f*g]=\mathscr{F}[f(t)]\cdot\mathscr{F}[g(t)]=F(\omega)\cdot G(\omega),$$

$$\mathscr{F}[f\cdot g]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[f(t)]*\mathscr{F}[g(t)]=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega).$$

例题 **6.22** 求 $f(t)=tu(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ 的傅里叶变换**.**

解 已知 $\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}]=2\pi\delta(\omega-1), \mathscr{F}[u(t)]=\dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega).$

由微分性 $\mathscr{F}[tu(t)]=\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathscr{F}[u(t)]=\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]=-\dfrac{1}{\omega^2}+\mathrm{i}\pi\delta'(\omega).$

由卷积定理 $\mathscr{F}[f(t)]=\dfrac{1}{2\pi}\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}]*\mathscr{F}[tu(t)]=\dfrac{1}{2\pi}[2\pi\delta(\omega-1)]*\left[-\dfrac{1}{\omega^2}+\mathrm{i}\pi\delta'(\omega)\right]$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(s-1)\cdot\left[-\frac{1}{(\omega-s)^2}+\mathrm{i}\pi\delta'(\omega-s)\right]\mathrm{d}s$$

$$=\left[-\frac{1}{(\omega-1)^2}+\mathrm{i}\pi\delta'(\omega-1)\right].$$

例题 **6.23** 设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$, 如果 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=F(0)\neq 0$, 则

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(s)\mathrm{d}s\right]=\frac{F(\omega)}{\mathrm{i}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega).$$

证明 令 $g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(s)\mathrm{d}s$, 则 $g(t)=f(t)*u(t)$

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(s)\mathrm{d}s\right]=\mathscr{F}[f(t)*u(t)]=\mathscr{F}[f(t)]\cdot\mathscr{F}[u(t)]$$

$$=F(\omega)\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]=\frac{F(\omega)}{\mathrm{i}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega).$$

最后一个等式利用了 $F(\omega)\delta(\omega)=F(0)\delta(\omega)$.

傅里叶变换在数学领域及工程技术等方面有着非常广泛的应用. 例如，频谱分析在现代声学，语音通讯，声纳，地震，核科学，乃至生物医学工程等信号的研究发挥着重要的作用.

6.4.3 傅里叶变换的应用：求解微分、积分方程

例题6.24 求解二阶常系数非齐次常微分方程

$$x''(t)-x(t)=-f(t), -\infty<t<+\infty,$$

其中 $f(t)$ 为已知函数.

解　方程两端作傅里叶变换，并利用微分性

$$-\omega^2 X(\omega)-X(\omega)=-F(\omega),\quad \Rightarrow X(\omega)=\frac{F(\omega)}{1+\omega^2}.$$

$$x(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{F(\omega)}{1+\omega^2}\right]=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+\omega^2}\right]*\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)].$$

利用 $\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{-|t|}\right]=\frac{2}{1+\omega^2}$ 得

$$x(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}*f(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-|t-\xi|}\mathrm{d}\xi.$$

例题 **6.25** 利用傅里叶变换，解下列积分方程

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(\xi)}{(t-\xi)^2+a^2}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{t^2+b^2},\quad 0<a<b.$$

解 方程左端视未知函数 $y(t)$ 与函数 $\dfrac{1}{a^2+t^2}$ 的卷积

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(\xi)}{(t-\xi)^2+a^2}\mathrm{d}\xi\right]=\mathscr{F}\left[y(\mathrm{t})*\frac{1}{a^2+t^2}\right]=Y(\omega)\mathscr{F}\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right].$$

利用傅里叶积分公式：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{a^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-a|t|}$

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|\omega|}.$$

方程两端作傅里叶变换，得

$$\frac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-a|\omega|}Y(\omega)=\frac{\pi}{2b}\mathrm{e}^{-b|\omega|},\Rightarrow Y(\omega)=\frac{a}{b}\mathrm{e}^{-(b-a)|\omega|}.$$

$$y(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{a}{b}\mathrm{e}^{-(b-a)|\omega|}\right]=\frac{a}{b}\frac{b-a}{\pi}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\pi}{b-a}\mathrm{e}^{-(b-a)|\omega|}\right]=\frac{a(b-a)}{\pi b\left[t^2+(b-a)^2\right]}.$$

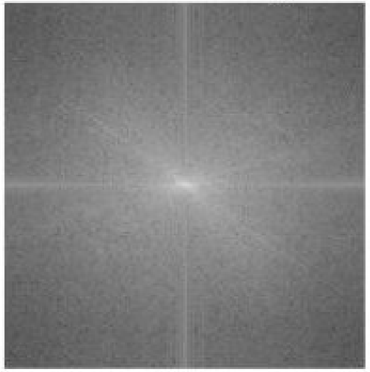
6.4.4 傅里叶变换的应用：图像处理

原图像

Original Image

频谱图像

Fourier Image



逆变换图像

Inverse Fourier Image

傅里叶变换的目的并不是为了简单观察图像的频率分布，更多情况下是为了对频率进行过滤，通过修改频率以达到图像增强、图像去噪、边缘检测、特征提取、压缩加密等目的.

谢 谢！