# 二：解析函数理论在物理学中的应用

## 1 二维电磁场和电动力学

### 1.1 电势和电场的表示

在二维静电学中，电势函数 $\phi(x, y)$ 满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\phi = 0$$

这意味着 $\phi$ 是一个调和函数。由于调和函数的实部和虚部可以构成一个解析函数，因此可以引入复变量 $z = x + iy$ 和一个解析函数 $f(z)$，使得：

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

其中 $\psi(x, y)$ 是电流的流函数。

### 1.2 柯西-黎曼条件

解析函数的实部和虚部必须满足柯西-黎曼（Cauchy-Riemann）方程：

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

这确保了电场 $\vec{E}$ 和电流密度 $\vec{J}$ 之间的关系可以通过解析函数统一表示。

### 1.3 边界值问题的解决

利用解析函数，可以将复杂的边界值问题转化为已知的解析函数形式。例如，通过共形映射，可以将复杂的几何形状映射到简单的几何形状，从而简化问题的求解。

## 2 流体动力学中的应用

### 2.1 复势函数

在二维无粘、不可压缩的流体中，速度场可以用复势函数 $f(z)$ 表示：

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

其中 $\phi$ 是速度势，$\psi$ 是流函数。

### 2.2 速度场的表示

流体的速度 $\vec{v}$ 可以表示为复势函数的导数：

$$\vec{v} = \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

### 2.3 典型应用

- 分析物体周围的流体流动，例如圆柱或机翼的绕流。
- 利用解析函数表示涡流的速度场和势函数。

## 3 弹性力学中的应用

### 3.1 复解析函数方法

在二维弹性力学中，位移和应力场可以用解析函数表示，特别是利用 Kolosov-Muskhelishvili 方法。

### 3.2 应力函数的表示

引入两个解析函数 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$，应力分量可以表示为：

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\mathrm{Re}[\phi'(z)]$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[\overline{\psi'(z)} + \phi''(z)]$$

### 3.3 应用

- 分析材料中的裂纹尖端应力场。
- 解决具有复杂边界条件的弹性问题。

## 4 量子力学中的应用

### 4.1 解析延拓和散射理论

在量子散射理论中，散射振幅作为复函数，其解析性质对于理解散射过程至关重要。

- 散射振幅的极点：与共振态和束缚态相关。
- 解析延拓：用于研究能量的非物理区域。

## 5 热力学和统计力学

### 5.1 Lee-Yang 零点理论

Lee 和 Yang 提出了配分函数零点的理论。在统计力学和统计场论中，杨李定理（或杨李单位圆定理）指出：有些铁磁配分函数的零点都是虚数。通过研究配分函数作为复变量的零点分布，可以理解相变的机制。

### 5.2 相变和临界现象

- 解析奇点：热力学函数在复平面上的奇点决定了物理系统的相变行为。
- 临界指数：通过解析函数的行为确定系统的临界指数。

## 6 共形映射

### 6.1 共形映射的性质

共形映射保持角度不变，这对于解决具有复杂几何形状的物理问题非常有用。

### 6.2 应用

- 电磁学：将复杂边界条件的问题映射为简单几何形状的问题。
- 流体力学：解决具有复杂边界的流动问题。

### 6.3 典型映射

- Joukowski 变换：茹科夫斯基变换（英语：Joukowsky transform）是一种用于翼型设计的共形映射，以俄罗斯科学家尼古拉·叶戈罗维奇·茹科夫斯基的名字命名在空气动力学中，茹科夫斯基变换可以用来求解绕茹科夫斯基翼型的二维势流。茹科夫斯基翼型的后缘处为一尖点。茹科夫斯基变换可以看成是卡门－特雷夫茨变换（Kármán-Trefftz transform）的特例。卡门－特雷夫茨翼型的后缘角是可变的，当后缘角为0时，即是茹科夫斯基翼型。。
- Schwarz-Christoffel 变换：施瓦茨—克里斯托费尔（Schwarz-Christoffel）映射是复平面的变换，把上半平面共形地映射到一个多边形。施瓦茨—克里斯托费尔映射可用在位势论和其它应用，包括极小曲面和流体力学中。施—克映射有一个缺陷，它无法较好的处理不规则几何图形和有孔的情况，这个问题已被伦敦皇家学院应用数学教授Darren Crowdy解决。