第一章 复数和复变函数

1.1 内容归纳

1.1.1 内容提要

复数的表示与运算，复平面与复球面，复变函数.

1.1.2 基本概念

1. 形如

$$z = x + \mathrm{i}y,\ x, y \in \mathbb{R},$$

的数称为复数，其中$\mathbb{R}$表示实数集合$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$称为虚数单位. 称实数x、y分别称为复数z的实部和虚部，常记为$x = Rez, y = Imz$.

称复数$x - \mathrm{i}y$为复数$z = x + \mathrm{i}y$ 的共轭复数，记为$\overline{z}$.

2. $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ 为复数的三角表示，其中$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 称为复数z的模，$\theta = A\mathrm{rg}\, z$为复数$z$的辐角. 满足$-\pi < \theta \le \pi$的$\theta$称为辐角的主值，记为$\theta = \arg z$.

$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$为复数的指数表示.

3. 设$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，复数的加、减、乘、除四则运算定义为

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad z_2 \ne 0.$$

4. 由不等式$|z - z_0| < \epsilon$所确定的点集，称为z_0的ϵ邻域，记为$N(z_0, \epsilon)$.

5. 设E为一点集，z_0为一点，若点$z_0 \in E$，若存在$\epsilon > 0$，使得$N(z_0, \epsilon) \subset E$，则称点$z_0$为$E$的内点.

若存在$\epsilon > 0$，使得$N(z_0, \epsilon)$中的点都不属于E，则称点z_0为E的外点.

若点 z_0 的任一邻域内既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称 z_0 为 E 的边界点. E 的全部边界点所组成的点集称为 E 的边界，记作 ∂E.

6. 非空点集 D 满足以下两个条件，则称为区域：(1) D 是开集，即 D 完全由内点组成；(2) D 是连通的，即 D 中任何两点都是可用全属于 D 的折线连接.

区域 D 加上其边界 ∂D 称为闭域，记作 $\bar{D}$: $\bar{D}=D+\partial D$.

7. 若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个定义在区间 $\alpha \le t \le \beta$ 上的连续实变函数，则由方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

或由复数方程

$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i} y(t),\ (\alpha \le t \le \beta)$$

所决定的点集 C 称为平面上的一条连续曲线. $z(\alpha)$ 和 $z(\beta)$ 分别称为曲线的起点和终点；若对 $\alpha \le t_1 \le \beta, \alpha < t_2 < \beta, t_1 \ne t_2$ 的 t_1 和 t_2，有 $z(t_1) = z(t_2)$，则点 $z(t_1)$ 称为这条曲线的重点；凡无重点的连续曲线，称为简单曲线或约当(Jordon)曲线；满足 $z(\alpha) = z(\beta)$ 的简单曲线称为简单闭曲线或约当闭曲线.

8. 设 $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i} y(t), (\alpha \le t \le \beta)$ 是一条简单曲线，若 $z(t)$ 在 $\alpha \le t \le \beta$ 上有连续的导数

$$z' = z'(t) = x'(t) + \mathrm{i} y'(t), \quad z'(t) \ne 0,$$

即此曲线有连续变动的切线，则称此曲线为光滑曲线. 由若干段光滑曲线所组成的曲线称为分段光滑曲线.

9. 设 D 为一区域，在 D 内任作一条简单闭曲线，而曲线的内部总属于 D，则称 D 为单连通域. 一个区域如果不是单连通域，就称为多连通域

10. 设在复平面上有点集 D，若对 D 内每一点 z，按照某一法则，有确定的复数 w 与之对应，则称 w 为 z 的复变函数，记为 $w = f(z)$. D 称为函数 $w = f(z)$ 的定义域，$G = \{ f(z) \mid z \in D \}$ 称为函数值域.

设 G 是 w 平面上与 z 平面的点集 D 通过函数 $w = f(z)$ 相对应的点集，若对于 G 中任一点 w，按照 $w = f(z)$ 的对应规则，在 D 中有一个或多个(有限个或无限个)点 z 与之对应，则得到的 z 是 w 的函数，记为 $z = g(w)$. 称 $z = g(w)$ 为函数 $w = f(z)$ 的反函数.

11. 在复平面上引入一个与球面上北极相对应的点，此点称为无穷远点，记为 ∞. 包含无穷远点 ∞ 的复平面称为扩充复平面，该球面称为复球面.

12. 扩充复平面上，满足$|z| > \dfrac{1}{\epsilon}(\epsilon > 0)$的点集称为$\infty$的$\epsilon-$邻域.

1.1.3 主要结论

1. 辐角$A\mathrm{rg}\, z$及其主值$\arg z$

当$z=0$时，辐角没有定义. 当$z\neq 0$时

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x>0, y\geq 0, \text{或} y\leq 0, \\ \pi+\arctan\dfrac{y}{x}, & x<0, y\geq 0, \\ -\pi+\arctan\dfrac{y}{x}, & x<0, y<0. \end{cases}$$

$$A\mathrm{rg}\, z = \arg z + 2k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

2. 复数的积和商

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \\ Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \\ Arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2), \quad z_2\neq 0. \end{cases}$$

3. 棣莫佛(De Moivre)公式

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta.$$

4. 复数的方根

记$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

复数$\sqrt[n]{z}$的n个不同值都具有相同的模$\sqrt[n]{|z|}$，且对应相邻两个k值的方根的辐角均相差$\dfrac{2\pi}{n}$. 几何意义：对应$\sqrt[n]{z}$的n个点即为以原点为心，$\sqrt[n]{|z|}$为半径的内接正n边形的n个顶点. 当$z=1$时，若记$\omega_n = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，则1的不同的$n$次方根为$1, \omega_n, \omega_n^2, \cdots, \omega_n^{n-1}$.

图 1.1 给出$n=2,4,6$情形.

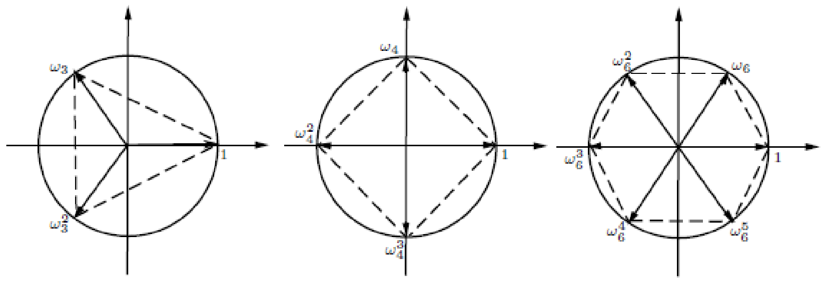


图 1.1

5. 复数的共轭

$$|z|=|\overline{z}|,\quad Arg\overline{z}=-Argz.$$

$$\overline{(\overline{z})}=z,\quad \overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}.$$

$$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2},\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},(z_2\neq 0).$$

$$|z|^2=z\overline{z},\quad Rez=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad Imz=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$

6. 无穷远点∞

无穷远点∞，其实部、虚部和辐角均无意义，但它的模规定为正无穷大，即$|\infty|=+\infty$.

且

$$a\pm\infty=\infty\pm a=\infty;$$

$$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty\quad (a\neq 0);$$

$$\frac{a}{\infty}=0,\quad \frac{a}{0}=\infty\quad (a\neq 0);$$

$$\infty\pm\infty,\ 0\cdot\infty\text{及}\frac{\infty}{\infty}\text{没有意义}.$$

复平面以∞为其唯一的界点；扩充复平面以∞为内点，且它是唯一的无边界的区域.

1.2　学习要求与技巧

1.2.1 学习要求

1. 理解复数的有关概念，掌握复数的各种表示法及运算；
2. 熟练计算复数的模、辐角和共轭；复数的乘积与商，复数的方根；
3. 理解复平面、复球面和扩充复平面等概念；掌握平面曲线及区域的复数表示；
4. 理解复变函数以及映射的概念；
5. 本章的重点：复数的运算以及用复变数方程表示曲线；以不等式表示区域；复变函数以及映射的概念.

1.2.2 学习技巧

1. 不同的复数运算应采用不同的复数表示形式，其中复数的三角表示和指数表示尤为重要，因为求复数乘幂、商及复数方根等都用到复数的指数表示. 写出复数z的三角形式或指数形式的关键是先求出该复数的模和辐角主值. 当复数z容易表示为$z=x+\mathrm{i}y$时，可利用$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$求模，用反正切函数（辐角主值计算式）求$\arg z$. 也可以用复数乘积或商的模和辐角计算公式计算.

2. 在涉及复数模的等式时，通常利用$|z|^2=z\overline{z}$以及共轭复数的运算. 应记住复数运算中的基本等式，如：

$$(z_1+z_2)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k z_1^k z_2^{n-k}\quad,$$

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2).$$

3. 复平面内的曲线与区域是十分重要，要会用复数表示常见的平面曲线和区域. 同时，要会判断由复数方程或不等式所表示的平面曲线或区域. 基本方法是：把由复数方程或不等式转化为平面上直角坐标或极坐标形式，进而确定所表示的平面曲线或区域.

4. 复变函数是复数集到复数集的映射，复变函数可以是单值函数，也可以是多值函数，甚至是无穷多值函数. 一个复变函数$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$对应于两个二元实函数：

$$u=u(x,y),\,v=v(x,y).$$

5. 几何上，复变函数所构成的映射把z平面上的点集D映射成w平面上的点集G. 确定平面曲线C或区域D在映射$w=f(z)$下的像是复变函数中的重要内容. 要根据C或D的边界曲线的不同表示，即，直角坐标或极坐标表示、参数表示、复数表示，把映射$w=f(z)$写成二元实函数形式、参数形式和复数形式等不同的方法求映射下的像.

第 1 章 例题分析

例题 1.1 将复数$z=2-2\mathrm{i}$化为三角形式和指数形式

解 由于$|z|=2\sqrt{2},\arg z=\arctan\dfrac{y}{x}=-\dfrac{\pi}{4}$，从而三角形式和指数形式分别为

$$z=2\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})],\ \ z=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}.$$

思考题　当 $\mathrm{Re}(z_1) > 0, \mathrm{Re}(z_2) > 0$ 时，

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,\quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

证明 令 $z_j = r_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}, -\dfrac{\pi}{2} < \theta_j < \dfrac{\pi}{2} (\mathrm{j} = 1,2)$，　则 $-\pi < \theta_1 \pm \theta_2 < \pi$. 由于

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}, \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)},$$

因此

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2, \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2.$$

从而

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

例题 1.2　计算 $z = (5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})$, 并证明：$4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$.

解　记 $z = (5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})$，则 $z = (476-480\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 4(239-\mathrm{i})$,
利用思考题结论，得

$$\arg z = 4\arg(5-\mathrm{i}) + \arg(1+\mathrm{i}) = \arg 4(239-\mathrm{i}),$$

即有

$$-4\arctan\frac{1}{5} + \frac{\pi}{4} = -\arctan\frac{1}{239},$$

由此即得结论.

例题 1.3　已知 $z_1 = 1, z_2 = 3+\mathrm{i}$，$z_3$ 在第一象限，且 $\Delta z_1 z_2 z_3$ 是正三角形，求 z_3.

解

$$\begin{aligned} z_3 - z_1 &= (z_2 - z_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = (3+\mathrm{i}-1)\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= (2+\mathrm{i})\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

$$z_3 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right).$$

例题 1.4 将复数 $z=\dfrac{(2-2\mathrm{i})^4}{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^5}$ 化为三角形式和指数形式.

解 方法一 由棣莫佛(De Moivre)公式，得

$$z=\frac{(2-2\mathrm{i})^4}{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^5}=\frac{2^6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)^4}{2^5\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^5}=2\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^4}{\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^5}$$

$$=2\frac{\cos(-\pi)+\mathrm{i}\sin(-\pi)}{\cos\frac{5}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}}=\frac{-2}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

从而

$$z=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi-\mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi\right)=2\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi}.$$

方法二

$$z=\frac{(2-2\mathrm{i})^4}{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^5}=\frac{2^6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)^4}{2^5\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^5}=2\frac{\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}}}=2\mathrm{e}^{-\frac{8\pi}{3}\mathrm{i}}=2\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}.$$

例题 1.5 设 n 为自然数，证明：

$$\left(\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}\right)^n=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\mathrm{i}\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

证明 令 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$，则

$$\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}=\frac{1+\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi}{1+\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi}=\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}-2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}}=\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi.$$

由 De Moiver 公式，得

$$\left(\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}\right)^n=\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi$$
$$=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\mathrm{i}\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

例题 1.6　求方程 $z^3+8=0$ 的全部根.

解　$z=\sqrt[3]{-8}=2\mathrm{e}^{\frac{(2k\pi+\pi)\mathrm{i}}{3}},k=0,1,2.$　故 $z^3+8=0$ 的三个根分别为:

$$z_0=2\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}=2(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})=1+\sqrt{3}\mathrm{i},\ z_1=2\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}=-2,\ z_2=2\mathrm{e}^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{3}}=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$$

例题 1.7　证明：$|z_1+\overline{z}_2|^2=|z_1|^2+|\overline{z}_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1z_2)$，

$$|z_1-\overline{z}_2|^2=|z_1|^2+|\overline{z}_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1z_2).$$

证明　由于 $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}\,z$, 从而

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_2}$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}=|z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\overline{z_2}).$$

在上述等式中以 $-z_2$ 代替 z_2 即可得第二式.

例题 1.8　设 $|z_1|=5,|z_2|=2,|z_1-\overline{z}_2|=\sqrt{19}$，计算 $\arg(z_1z_2)$.

解　设 $z_1=5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$z_2=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则 $z_1z_2=10[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$. 利用结论

$$|z_1-\overline{z}_2|^2=|z_1|^2+|\overline{z}_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1z_2)$$

得

$$19=25+4-2\mathrm{Re}(z_1z_2)\ ,$$

从而 $\mathrm{Re}(z_1z_2)=5=10\cos(\theta_1+\theta_2)$, 所以，$\cos(\theta_1+\theta_2)=\frac{1}{2}$，$\sin(\theta_1+\theta_2)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此

$$\arg(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2=\pm\frac{\pi}{3}.$$

例题 1.9　试用复数表示以下平面曲线方程：

（1）圆或直线方程：$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$, 其中 a,b,c,d 均为实常数.

（2）双曲线方程：$x^2-y^2=1$.

解　令 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad y=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}},$$

（1）将 x,y 的表达式代入到圆的方程中，得

$$az\overline{z}+\frac{b}{2}\ z+\overline{z}\ -\frac{c\mathrm{i}}{2}\ z-\overline{z}\ +d=0,$$

整理得：

$$az\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+d=0,$$

其中 $\beta=\dfrac{1}{2}(b+\mathrm{i}c)$.

（2）将 x,y 的表达式代入双曲线方程中，得

$$\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2-\left(\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}\right)^2=1,$$

即，$z^2+\overline{z}^2=2$.

例题 1.10　试分别确定下列方程所表示的平面曲线：

（1）$z\overline{z}-a\overline{z}-\overline{a}z+a\overline{a}-c=0$，其中，$a$ 为复数，$c>0$.

（2）$\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right|=k$，其中 $k>0,k\neq 1,a\neq b$.

解　（1）记 $a=\alpha+\mathrm{i}\beta$，则方程 $z\overline{z}-a\overline{z}-\overline{a}z+a\overline{a}-c=0$ 可表示为：

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2=c,$$

即方程所表示的曲线为：以 $\left(\mathrm{Re}(a),\mathrm{Im}(a)\right)$ 为心，$\sqrt{c}$ 为半径的圆周.

（2）由已知条件得

$$(z-a)(\overline{z}-\overline{a})=k^2(z-b)(\overline{z}-\overline{b}),$$

上式化简，得

$$(1-k^2)z\overline{z}-(\overline{a}-k^2\overline{b})z-(a-k^2b)\overline{z}+(|a|^2-k^2|b|^2)=0.$$

因此，上述方程所表示的是圆周.

上式等价于

$$\left(z-\frac{a-k^2b}{1-k^2}\right)\left(\overline{z}-\frac{\overline{a}-k^2\overline{b}}{1-k^2}\right)+\frac{|a|^2-k^2|b|^2}{1-k^2}-\left(\frac{a-k^2b}{1-k^2}\right)\left(\frac{\overline{a}-k^2\overline{b}}{1-k^2}\right)=0.$$

由于

$$\frac{|a|^2-k^2|b|^2}{1-k^2}-\left(\frac{a-k^2b}{1-k^2}\right)\left(\frac{\overline{a}-k^2\overline{b}}{1-k^2}\right)=-k^2\frac{|a|^2+|b|^2-a\overline{b}-\overline{a}b}{(1-k^2)^2}$$
$$=-k^2\frac{|a-b|^2}{(1-k^2)^2},$$

从而得

$$\left|z-\frac{a-k^2b}{1-k^2}\right|^2=k^2\frac{|a-b|^2}{(1-k^2)^2}.$$

像曲线为以$\dfrac{a-k^2b}{1-k^2}$为心，$k\dfrac{|a-b|}{|1-k^2|}$为半径的圆周.

例题 1.11 证明：(1)复数z_1和z_2所表示的向量相互垂直的充要条件为：$\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)=0$；

（1）复平面上三点z_1, z_2, z_3共线的充要条件为$\arg\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=0$或$\pi$.

分析 平面几何中的许多结论可以用复数来证明.（1)向量垂直的充要条件为内积为零；（2）$\arg\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=0$或$\pi$等价于$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$为实数，即向量$z_3-z_1$与$z_2-z_1$平行，从而$z_1, z_2, z_3$共线.

证明 （1）设$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则$z_1$和$z_2$相互垂直的充要条件为

$$x_1x_2+y_1y_2=0，或 z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2=0 \quad .$$

由于

$$\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)=\frac{1}{2}(z_1\overline{z}_2+\overline{z_1\overline{z}_2})=\frac{1}{2}(z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2),$$

从而，z_1和z_2相互垂直的充要条件为$\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)=0$.

（2）因为过z_1与z_2的直线方程为$z=z_1+t(z_2-z_1), t\in(-\infty,+\infty)$，所以$z_3$在该直线上的充要条件是：存在$t_0\in(-\infty,+\infty)$，使得

$$z_3=z_1+t_0(z_2-z_1),$$

即$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=t_0$，从而$\arg\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=0$或$\pi$.

注：复平面上四点 z_1,z_2,z_3,z_4 共圆周的充要条件为 $\arg\left(\dfrac{z_1-z_4}{z_1-z_2}:\dfrac{z_3-z_4}{z_3-z_2}\right)=0$ 或 π.

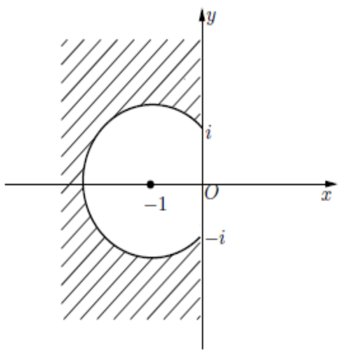
例题 1.12 试判别满足条件 $0<\arg\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\dfrac{\pi}{4}$ 的点 z 组成的点集是否为一区域？

解　设 $z=x+\mathrm{i}y$，记 $\theta=\arg\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$，则

$$\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}-\mathrm{i}\frac{2x}{x^2+(y+1)^2},$$

$\theta=\arctan\dfrac{-2x}{x^2+y^2-1}$. 由 $0<\arg\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\dfrac{\pi}{4}$ 得

$$0<\frac{-2x}{x^2+y^2-1}<1,$$



即

$$\begin{cases}x<0,\\(x+1)^2+y^2>2.\end{cases}$$

因此，不等式 $0<\arg\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\dfrac{\pi}{4}$ 所确定的点集为图中的阴影部分，它是一个无界的单连通区域.

例题 1.13　试确定由不等式 $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|>k(k>0)$ 所表示的平面点集.

解　$z=x+\mathrm{i}y$，则 $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|>k$ 等价于 $(x-1)^2+y^2>k^2[(x+1)^2+y^2]$ ，即

$$(1-k^2)x^2-2(1+k^2)x+(1-k^2)+(1-k^2)y^2>0. \qquad (1)$$

① 若 $1-k^2>0$，即 $0<k<1$ 时，式（1）为

$$x^2-2\frac{1+k^2}{1-k^2}x+1+y^2>0\ ,$$

即

$$\left(x-\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)+y^2>\left(\frac{2k}{1-k^2}\right)^2.$$

此时，不等式所表示的平面点集为：圆心在$\left(\dfrac{1+k^2}{1-k^2},0\right)$，半径为$\dfrac{2k}{1-k^2}$的圆的外部.

②若$1-k^2<0$，即 $k>1$时，式（1）为

$$\left(x-\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)+y^2<\left(\frac{2k}{k^2-1}\right)^2.$$

此时，不等式所表示的平面点集为：圆心在$\left(\dfrac{1+k^2}{1-k^2},0\right)$，半径为$\dfrac{2k}{k^2-1}$的圆的内部.

③　若$k^2=1$，即$k=1$时，式（1）为

$$-2(1+k^2)x>0\text{ 或 }x<0.$$

此时，不等式所表示的点集为左半平面.

例题 1.14　求函数$w=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d},ad-bc\neq 0$的反函数.

解　由$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$解得$z=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$.

例题 1.15　试分析函数$w=z^2$所确定的映射，并确定 z 平面上的曲线

（1）$x^2+y^2=R^2$；（2）双曲线$x^2-y^2=4$.

分析　确定平面曲线在映射下的像，应根据所给曲线的表示形式而把映射用相应的方式表示.（1）中曲线方程用直角坐标表示，故将映射$w=z^2$用代数形式表示；（2）中曲线方程用极坐标表示，因此，映射$w=z^2$用指数形式表示.

解　设$z=x+\mathrm{i}y=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$w=u+\mathrm{i}v=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，则

$$u=x^2-y^2,v=2xy\text{，}\rho=r^2,\varphi=2\theta\quad.$$

由此可见，函数$w=z^2$把点z映射成点w时，w的模是z的模的平方，w的辐角是z的辐角的2倍.

显然，$w=z^2$可以把 z 平面上中心在原点，半径为r的圆域D映射成w平面上中心在原点，半径为r^2的圆域D，即

$$D:\quad |z|<r\quad\xrightarrow{w=z^2}\quad G:\quad |w|<r^2.$$

（1）$x^2+y^2=R^2$ 的复数表示为 $|z^2|=R^2$，从而像曲线为 $|w|=R^2$.

（2）z 平面上的双曲线 $x^2-y^2=4$ 在映射 $w=z^2$ 下的像为直线 $u=4$.

例题 1.16 求函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 把 z 平面以点 $(1,0)$ 为圆心，1 为半径的圆周 C 映射成 w 平面上的像曲线 Γ.

解　方法 1 将 z 平面的曲线 C 表示成 $(x-1)^2+y^2=1$.

由 $w=u+\mathrm{i}v=\dfrac{1}{z}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$，可得：$x=\dfrac{u}{u^2+v^2}, y=-\dfrac{v}{u^2+v^2}$，代入曲线 C 的方程得

$$\frac{1}{u^2+v^2}-\frac{2u}{u^2+v^2}=0,$$

从而得到 w 平面上的像曲线 Γ 方程为：$u=\dfrac{1}{2}$.

方法 2　将 z 平面的曲线 C 表示成：$\left|z-1\right|=1$，即

$$z-1 \quad \overline{z}-1 \ =1.$$

将 $z=\dfrac{1}{w}$ 和 $\overline{z}=\dfrac{1}{\overline{w}}$ 代入上式，得 $\dfrac{1}{w}\cdot\dfrac{1}{\overline{w}}-\dfrac{1}{w}-\dfrac{1}{\overline{w}}=0$, 整理得, $w+\overline{w}=1$, 即, $u=\dfrac{1}{2}$.

例题 1.17　求集合 $D=\ \ z\,|\,\mathrm{Re}\,z>0, 0<\arg z<\pi/2\ \ $ 在映射（1）$w=z^2$；（2）$w=iz$ 下的像集.

解 显然 D 为复平面的第一象限，由例题 1.15 分析知，在 $w=z^2$ 下的像为上平面

$$G=\ \ z\,|\,\mathrm{Re}\,z>0, 0<\arg z<\pi\ \ .$$

映射 $w=iz$ 的作用为逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{2}$，因此，D 在映射 $w=iz$ 下的像集为

$$G=\left\{w\,|\,\mathrm{Re}\,w<0, \frac{\pi}{2}<\arg w<\pi\right\}.$$

思考题：（1） 求双纽线 $r^2=\cos 2\theta$ 在映射 $w=z^2$ 下的像曲线；（2）求圆周 $|z|=2$ 在映射 $w=z+\dfrac{1}{z}$ 下的像曲线.

解 （1）双纽线方程可表示为$r^2=\cos 2\theta$． 映射$w=z^2$表示为

$$\begin{aligned} w &= r^2 e^{i2\theta} = \cos 2\theta \ \ \cos 2\theta + i\sin 2\theta \\ &= \frac{1+\cos 4\theta}{2} + i\frac{1}{2}\sin 4\theta. \end{aligned}$$

即$w-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$,从而$\left|w-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$，因此，像曲线是$w$平面上以$\dfrac{1}{2}$为心，$\dfrac{1}{2}$为半径的圆周.

（2）令$z=x+iy, w=u+iv$, 则

$$u+iv=x+iy+\frac{1}{x+iy}=x+\frac{x}{x^2+y^2}+i\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right),$$

因为$x^2+y^2=4$, 从而 $u+iv=\dfrac{5}{4}x+i\dfrac{3}{4}y$, 所以 $u=\dfrac{5}{4}x, v=\dfrac{3}{4}y$.

由 $x^2+y^2=4$得：$\dfrac{u^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2}+\dfrac{v^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=4$, 或$\dfrac{u^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\dfrac{v^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$, 表示椭圆.