第八章 拉普拉斯变换

拉普拉斯(Laplace)变换理论始于 19 世纪末，其在电学、光学、力学等工程技术与科学领域中有着广泛的应用，是研究现代电路与系统分析的重要方法. 由于拉普拉斯变换对像原函数 $f(t)$ 要求的条件比傅里叶变换的条件要弱，因此，在某些问题上，它比傅里叶变换的适用面更广.

本章首先从傅里叶变换的定义出发，导出拉普拉斯变换的定义，并研究它的一些基本性质，然后给出拉普拉斯逆变换的求法，最后介绍拉普拉斯变换在求解常微分方程及计算广义积分中的应用.

8.1 拉普拉斯变换的概念

8.1.1 拉普拉斯变换的存在性

对一个函数作傅里叶变换，要求该函数满足在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，在任意一个有限区间上满足狄利克莱条件，且绝对可积. 这是一个比较苛刻的条件. 一些常用的函数，如单位阶跃函数 $u(t)$，三角函数 $\sin t, \cos t$ 等均不满足这些要求，这就限制了傅里叶变换的应用范围. 另外，在物理、线性控制等实际应用中，许多以时间为自变量的函数，往往当 $t<0$ 时没有意义，或者无需知道 $t<0$ 时的变化情况.

为了解决上述问题而拓宽应用范围，人们发现对于任意一个实函数 $\varphi(t)$，可以经过适当地改造以满足傅里叶变换存在性定理的基本条件.

设 $f(t)=\varphi(t)u(t)$，其中，$u(t)$ 为单位阶跃函数. 对 $f(t)$ 作傅里叶变换，得

$$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.$$

经上述处理，解决了 $\varphi(t)$ 当 $t<0$ 时没有定义的问题，但仍不能回避 $\varphi(t)$ 在 $[0,+\infty]$ 上绝对可积的限制. 为此，可用当 $t\to+\infty$ 时，快速衰减的函数 $\mathrm{e}^{-\sigma t}(\sigma>0)$ 乘以 $f(t)$，并作傅里叶变换

$$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)u(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t.$$

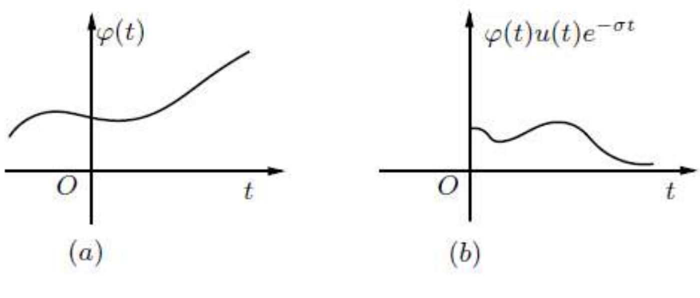


图 8.1 $\varphi(t)$ 与 $\varphi(t)u(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 的图像

定义 8.1 设 $f(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的实(或复)值函数，若对参数 $p=\sigma+\mathrm{i}\omega$，$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ 在 p 平面的某一区域内收敛，则称其为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，记为

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t, \tag{8.1}$$

称 $f(t)$ 为 $F(p)$ 的拉普拉斯逆变换，记为 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(p)]$. 称 $F(p)$ 为像函数， $f(t)$ 为像原函数.

从定义可知，$f(t)(t\geq 0)$ 的拉普拉斯变换实际上就是 $f(t)u(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换，是一种单边的广义傅里叶变换.

比较傅里叶变换和拉普拉斯变换的表达式可知二者区别是：傅里叶变换是将时域函数 $f(t)$ 变成频域函数 $F(\omega)$ 的变换，其时域变量 t 和频域变量 ω 均为实数；而拉普拉斯变换是将时域函数 $f(t)$ 变为复频域函数 $F(p)$ 的变换，其时域变量 t 为实数，而频域变量 p 为复数. 因此，拉普拉斯变换建立了时域和复频域之间的关系.

令 $\mathscr{D}=\left\{f(t)\mid f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(p)]\right\}$， $\mathscr{R}=\left\{F(p)\mid F(p)=\mathscr{L}[f(t)]\right\}$，称 $\mathscr{D}$ 为原像空间，$\mathscr{R}$ 为像空间.

拉普拉斯变换扩大了傅里叶变换的应用范围. 那么当时域函数 $f(t)$ 满足什么条件时，拉普拉斯变换存在？或函数 $f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上绝对可积？

定义 8.2 对于实变量的实值（或复值）函数 $f(t)$，若存在 $M>0$ 及实数 σ_c，使得

$$|f(t)|\leq M\mathrm{e}^{\sigma_c t},\quad \forall t\geq 0, \tag{8.2}$$

则称 $f(t)$ 为指数级函数，σ_c 称为增长指数.

指数级函数图像如图 8.2 所示.

例题 8.1 单位阶跃函数 $u(t)$，指数函数 e^{kt}，正弦函数 $\sin(kt)$，幂函数 t^n 等均为指数级函数.

解 事实上

$$\begin{aligned}
&|u(t)|\leq \mathrm{e}^{0t},\quad M=1,\quad \sigma_c=0,\\
&|\mathrm{e}^{kt}|\leq \mathrm{e}^{Re(k)t},\quad M=1,\quad \sigma_c=Re(k),\\
&|\sin(kt)|\leq \mathrm{e}^{Im(k)t},\quad M=1,\quad \sigma_c=Im(k),\\
&|t^n|\leq n!\mathrm{e}^{t},\quad M=n!,\quad \sigma_c=1.
\end{aligned}$$

并非所有的函数均为指数级函数，例如：$f(t)=\mathrm{e}^{t^2}$.

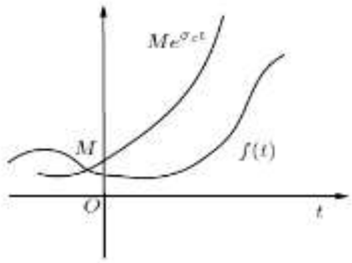


图 8.2

定理 8.1 (拉普拉斯变换存在定理) 若函数 $f(t)$ 满足：(1) 在 $t\geq 0$ 的任一有限区间上分段连续； (2) 当 $t\to+\infty$ 时， $f(t)$ 为指数级函数. 则

$$F(p)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

在半平面 $Re(p)>\sigma_c$ 上存在且解析， 其中，σ_c 为 $f(t)$ 的增长指数.

证明 首先证明 $F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ 的存在性.

由于 $f(t)$ 为指数级函数，存在常数 $M>0$ 和实数 σ_c，使得

$$|f(t)|\leq M\mathrm{e}^{\sigma_c t},\quad \forall t\geq 0,$$

从而

$$\int_0^{+\infty}|f(t)e^{-pt}|\,\mathrm{d}t\leq\int_0^{+\infty}Me^{-(\sigma-\sigma_c)}\mathrm{d}t=\frac{M}{\sigma-\sigma_c},\quad(\sigma>\sigma_c).$$

所以上述积分绝对收敛，且 $F(p)$ 在右半平面 $Re(p)=\sigma>\sigma_c$ 存在.

其次，证明 $F(p)$ 解析. 为此，在积分号内对 p 求偏导数，并取 $\sigma>\sigma_1>\sigma_c$ (σ_1 为任意实常数)，则有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}[f(t)\mathrm{e}^{-pt}]\mathrm{d}t\right|&\leq\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial}{\partial p}[f(t)\mathrm{e}^{-pt}]\right|\mathrm{d}t\\&\leq\int_0^{+\infty}Mt\mathrm{e}^{-(\sigma_1-\sigma_c)}\mathrm{d}t=\frac{M}{(\sigma_1-\sigma_c)^2},\end{aligned}$$

故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}[f(t)\mathrm{e}^{-pt}]\mathrm{d}t$ 在半平面 $Re(p)=\sigma>\sigma_c$ 上一致收敛，从而可交换积分与求导的次序，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}F(p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}[f(t)\mathrm{e}^{-pt}]\mathrm{d}t\leq\frac{M}{(\sigma_1-\sigma_c)^2}.$$

故 $F(p)$ 的导数在 $Re(p)=\sigma>\sigma_c$ 上处处存在且有限. 由此可见， $F(p)$ 在半平面 $Re(p)=\sigma>\sigma_c$ 内解析.

由定理 8.1 证明可知，当 $f(t)$ 满足定理的条件时， $\lim\limits_{Rep\to+\infty}F(p)=0.$

由于增长指数不唯一，记 σ_0 为使 $|f(t)|\leq M\mathrm{e}^{\sigma_c t}$ 成立的最小的增长指数，则称其为收敛坐标，称 $Rep=\sigma_0$ 为收敛轴. σ_0 的值是由 $f(t)$ 的性质所确定. 根据 σ_0 的值，可将 p 平面

(复频率平面)分为两个区域，收敛轴以右的区域(不包括收敛轴在内)即为收敛域，收敛轴以左(包括收敛轴在内)则为非收敛域. 可见 $f(t)$ 或 $F(p)$ 的收敛域就是在 p 平面上能使

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}=0,\quad \sigma>\sigma_0$$

满足的 σ 的取值范围，意即 σ 只有在收敛域内取值，$f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(p)$ 才能存在，且一定存在.

拉普拉斯变换存在性定理中的条件为充分但非必要条件. 例如：$\mathscr{L}\left[t^{-\frac{1}{2}}\right]=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$.（见例题 8.6），但 $t=0$ 是函数 $f(t)=t^{-\frac{1}{2}}$ 的无穷间断点.

8.1.2 常用函数的拉普拉斯变换

在电路分析中，常用的时域函数为单位阶跃函数 $u(t)$，脉冲函数 $\delta(t)$，指数函数 $e^{-\alpha t}$，正弦函数 $\sin\omega t$ 和余弦函数 $\cos\omega t$ 等，下面给出这些函数的拉普拉斯变换，读者要熟悉这些常用函数的拉普拉斯变换，以便能熟练应用.

例题 8.2 求单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$ 的拉普拉斯变换.

解

$$\mathscr{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^{+\infty},$$

由于

$$|\mathrm{e}^{-pt}|=|\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega t)}|=\mathrm{e}^{-\sigma t},$$

当 $Rep=\sigma>0$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-pt}=0$，从而有

$$\mathscr{L}[u(t)]=\frac{1}{p}\quad (Rep>0).$$

同理可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(t-b)]&=\int_0^{+\infty}u(t-b)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_b^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_b^{+\infty}=\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pb}\quad (Rep>0).\end{aligned}$$

例题 8.3 求指数函数 $f(t)=\mathrm{e}^{kt}$ 的拉普拉斯变换.

解

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{kt}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(p-k)t}\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{p-k}\mathrm{e}^{-(p-k)t}\big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-k}\quad(Rep>Rek).$$

例题 8.4 求正弦函数 $f(t)=\sin kt$ 和余弦函数 $f(t)=\cos kt$ 的拉普拉斯变换.

解

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}\sin kt\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}}{2i}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\left[\mathrm{e}^{-(p-\mathrm{i}k)\mathrm{t}}-\mathrm{e}^{-(p+\mathrm{i}k)\mathrm{t}}\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{p-\mathrm{i}k}-\frac{1}{p+\mathrm{i}k}\right)$$
$$=\frac{k}{p^2+k^2}\left(\operatorname{Re}p>\left|\operatorname{Im}k\right|\right).$$

同理可得

$$\mathscr{L}[\cos kt]=\frac{p}{p^2+k^2}\quad(Rep>|\,Imk\,|).$$

例题 8.5 求幂函数 $f(t)=t$ 和 $f(t)=t^2$ 的拉普拉斯变换.

解

$$\mathscr{L}[t]=\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=-\frac{t}{p}\mathrm{e}^{-pt}\big|_0^{+\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,$$

当 $Rep=\sigma>0$ 时

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-pt}=0,\quad\lim_{t\to+\infty}t\mathrm{e}^{-pt}=0,$$

从而

$$\mathscr{L}[t]=\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=-\frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-pt}\big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p^2}.$$

同理，利用

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-pt}=0,\quad\lim_{t\to+\infty}t\mathrm{e}^{-pt}=0,\quad\lim_{t\to+\infty}t^2\mathrm{e}^{-pt}=0,$$

可得

$$\mathscr{L}[t^2]=\frac{2}{p^3}.$$

一般地，当 m 为正整数时，

$$\mathscr{L}[t^m]=\frac{m!}{p^{m+1}}\quad(Rep>0).$$

为了讨论更一般的幂函数 $f(t)=t^m\,(m>-1)$ 的拉普拉斯变换，先引入特殊函数 $\Gamma(x)$

(称为 Gamma 函数)

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \quad (x>0).$$

利用分部积分可得 Γ 函数具有如下性质

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1, \Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$

因此，当 m 为正整数时

$$\Gamma(m+1)=m\Gamma(m)=m!,$$

且

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}.$$

例题 8.6 求幂函数 $f(t)=t^m\,(m>-1)$ 的拉普拉斯变换.

解 用变量代换 $u=pt$，则

$$\mathscr{L}[t^m]=\int_0^{+\infty}t^m\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_\gamma(\frac{u}{p})^m\mathrm{e}^{-u}\,\frac{1}{p}\mathrm{d}u=\frac{1}{p^{m+1}}\int_\gamma u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u,$$

其中 γ 射线 $arg u=\theta,-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$.

当 $-1<m<0$ 时，$u=0$ 是 u^m 的奇点. 如图 8.3 建立积分围道. 设 A, B 点分别对应复数 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 和 $R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(r<R),\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$， 令 $u=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(0\le\rho<+\infty,-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，则

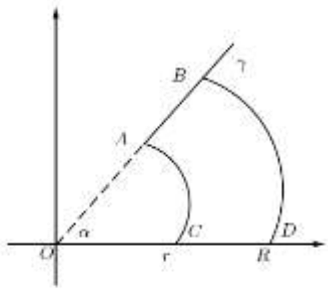


图 8.3

$BD: u=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi},\quad 0\le\phi\le\alpha.\quad AE: u=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi},\quad 0\le\phi\le\alpha.$ 由

$$\int_{\overline{AB}+BD+\overline{DE}+EA}u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=0,$$

得

$$\int_{\overline{AB}}u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\int_{EA+\overline{ED}+DB}u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u.$$

由于

$$\begin{aligned}\left|\int_{EA} u^m \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right| &= \left|\int_0^{\alpha} r^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\mathrm{e}^{-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{d}\phi\right| \\ &\le r^{m+1}\int_0^{\alpha}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\mathrm{e}^{-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|\mathrm{d}\phi \\ &= r^{m+1}\int_0^{\alpha}\mathrm{e}^{-r\cos\phi}\mathrm{d}\phi \le r^{m+1}\mathrm{e}^{-r\cos\xi}\alpha.\end{aligned}$$

最后一个不等式利用了积分中值定理.

当 $r\to 0$ 时，$r^{m+1}\mathrm{e}^{-r\cos\xi}\alpha\to 0$，从而

$$\lim_{r\to 0}\int_{EA} u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = 0.$$

同理可得

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{DB} u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = 0.$$

从而当 $r\to 0, R\to+\infty$ 时

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u &= \int_{\overline{AB}} u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} t^m\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因此

$$\mathscr{L}[t^m] = \frac{1}{p^{m+1}}\int_0^{+\infty} t^m\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(m+1)}{p^{m+1}} \quad (Re p > 0).$$

当 m 为正整数时

$$\mathscr{L}[t^m] = \frac{\Gamma(m+1)}{p^{m+1}} = \frac{m!}{p^{m+1}}.$$

特别地

$$\mathscr{L}\left[t^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}.$$

8.1.3 拉普拉斯变换积分下限

在拉普拉斯变换定义式中，其积分下限为零. 在实际应用中，应该有 0^+（零的右极限）和 0^-（零的左极限）之分. 对于在 $t=0$ 处连续或只有第一类间断点的函数，0^+ 型和 0^- 型的拉普拉斯变换结果是相同的. 但对于在 $t=0$ 处有无界跳跃的函数，两种拉普拉斯变换的结果不一致. 例如，单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的拉普拉斯变换：

$$\int_{0^+}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = 0, \quad \int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = 1.$$

令

$$\mathscr{L}_{+}\left[f(t)\right]=\int_{0^{+}}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,$$

$$\mathscr{L}_{-}\left[f(t)\right]=\int_{0^{-}}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\mathscr{L}_{+}\left[f(t)\right]+\int_{0^{-}}^{0^{+}}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

称 $\mathscr{L}_{+}\left[f(t)\right]$ 和 $\mathscr{L}_{-}\left[f(t)\right]$ 分别为 0^{+} 型和 0^{-} 型拉普拉斯变换. 显然，当 $f(t)$ 在 $t=0$ 附近包含了脉冲函数时，$\int_{0^{-}}^{0^{+}}f(t)e^{-pt}dt\neq 0$，从而 $\mathscr{L}_{+}\left[f(t)\right]\neq\mathscr{L}_{-}\left[f(t)\right]$. 因此，为了反映在 $t=0$ 处有脉冲函数的作用，应取 0^{-} 型拉普拉斯变换. 以后不加声明地认为拉普拉斯变换为 0^{-} 型.

采用 0^{-} 型拉普拉斯变换另一方便之处，是考虑到在实际问题中，常常把开始研究系统的时刻规定为零时间，而外作用也是在零时刻加于系统. 0^{-} 时刻表示外作用尚未加于系统，此时系统所处的状态是易于知道的，因此，0^{-} 时刻的初始条件也比较容易确定. 若采用 0^{+} 型拉普拉斯变换，则相当于外作用已加于系统，要确定 0^{+} 时系统的状态是很繁琐的，因而 0^{+} 时的初始条件也不易确定.

例题 8.7 求函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\delta(t)+\delta'(t)(\alpha>0)$ 的拉普拉斯变换.

解

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[f(t)\right]&=\int_{0}^{+\infty}\left[\mathrm{e}^{-\alpha t}\delta(t)+\delta'(t)\right]\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\\&=\int_{0}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-(\alpha+p)t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}\delta'(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\\&=\mathrm{e}^{-(\alpha+p)t}\Big|_{t=0}+\left[\delta(t)\mathrm{e}^{-pt}\right]\Big|_{0}^{+\infty}+p\int_{0}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\\&=1+p.\end{aligned}$$

8.2 拉普拉斯变换的性质

虽然，由拉普拉斯变换的定义式可以求出一些常用函数的拉普拉斯变换，但在实际应用中我们总结出一些规律：即拉普拉斯变换的一些基本性质，通过这些性质使得许多复杂计算简单化.

以下约定需要求拉普拉斯变换的函数，均满足存在定理的条件.

8.2.1 拉普拉斯变换的基本性质

性质 8.1 （线性性质）若 α,β 为任意常数，且 $F(p)=\mathscr{L}[f(t)],G(p)=\mathscr{L}[g(t)]$，则

$$\mathscr{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha F(p)+\beta G(p),\tag{8.3}$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\alpha F(p)+\beta G(p)]=\alpha f(t)+\beta g(t). \tag{8.4}$$

证明

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)]&=\int_0^{+\infty}[\alpha f(t)+\beta g(t)]\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\\&=\alpha\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t+\beta\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\\&=\alpha F(p)+\beta G(p).\end{aligned}$$

根据拉普拉斯逆变换的定义，不难证明第二式. 具体证明留给读者.

例题 8.8 求双曲正弦$\sinh kt$和双曲余弦$\cosh kt$的拉普拉斯变换，其中$k\neq 0$为常数.

解

$$\mathscr{L}[\sinh kt]=\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{kt}-\mathrm{e}^{-kt}}{2}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-k}-\frac{1}{p+k}\right)=\frac{k}{p^2-k^2}.$$

同理可得

$$\mathscr{L}[\cosh kt]=\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{kt}+\mathrm{e}^{-kt}}{2}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-k}+\frac{1}{p+k}\right)=\frac{p}{p^2-k^2}.$$

例题 8.9 求像函数$F(p)=\dfrac{p}{(p-1)(p^2+4)}$的拉普拉斯逆变换.

解 由于

$$F(p)=\frac{1}{5}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{5}\frac{p}{p^2+4}+\frac{2}{5}\frac{2}{p^2+4},$$

从而

$$\begin{aligned}f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(p)]\quad&=\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-1}\right]-\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+2^2}\right]+\frac{2}{5}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{p^2+2^2}\right]\\&=\frac{1}{5}e^t-\frac{1}{5}\cos 2t+\frac{2}{5}\sin 2t.\end{aligned}$$

性质 8.2（相似性质）设$F(p)=\mathscr{L}[f(t)],\quad a>0$，则

$$\mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), \tag{8.5}$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(ap]=\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right). \tag{8.6}$$

证明 令$u=at$，则

$$\mathscr{L}[f(at)]=\int_0^{+\infty}f(at)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(u)\mathrm{e}^{-\frac{p}{a}u}\mathrm{d}u=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

令$u=\dfrac{t}{a}$，则

$$\mathscr{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=\int_0^{+\infty}f\left(\frac{t}{a}\right)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}af(u)\mathrm{e}^{-apu}\mathrm{d}u=aF(ap).$$

从而

$$\mathscr{L}^{-1}[F(ap)]=\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right).$$

例题 8.10 利用$\mathscr{L}\left[\dfrac{\sin t}{t}\right]=\arctan\dfrac{1}{p}$，求$\mathscr{L}\left[\dfrac{\sin at}{t}\right]$.

解 由相似性，有

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin at}{at}\right]=\frac{1}{a}\arctan\frac{1}{\frac{p}{a}}=\frac{1}{a}\arctan\frac{a}{p},$$

从而

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin at}{t}\right]=\arctan\frac{a}{p}.$$

性质 8.3（延迟性质）设$F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$，对于任意非负实数t_0，有

$$\mathscr{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-pt_0}F(p),\tag{8.7}$$

或

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-pt_0}F(p)]=f(t-t_0)u(t-t_0).\tag{8.8}$$

证明 令$u=t-t_0$，则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]&=\int_0^{+\infty}f(t-t_0)u(t-t_0)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{+\infty}f(t-t_0)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(u)\mathrm{e}^{-p(u+t)}\mathrm{d}u\\&=\mathrm{e}^{-pt_0}\int_0^{+\infty}f(u)\mathrm{e}^{-pu}\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-pt_0}F(p).\end{aligned}$$

在应用延迟性质时，特别注意像原函数的写法，此时，$f(t-t_0)$后不能省略因子$u(t-t_0)$.

事实上，$f(t-t_0)u(t-t_0)$与$f(t)u(t)$相比，$f(t)u(t)$从$t=0$开始有非零数值，而$f(t-t_0)u(t-t_0)$是从$t=t_0$开始才有非零数值，即延

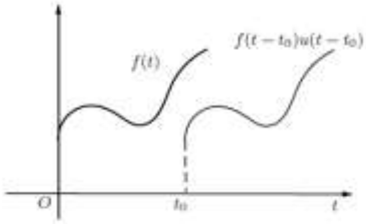


图 8.4

迟了一个时间 $t-t_0$. 从它的图像上讲， $f(t-t_0)u(t-t_0)$ 是由 $f(t)u(t)$ 沿 t 轴向右平移 t_0 而得(如图 8.4 所示)，其拉普拉斯变换也多了一个因子 e^{-pt_0}.

例题 8.11 求函数 $f(t)=\begin{cases}\cos t, & 0\le t\le 2\pi,\\ 0, & t<0或t>2\pi\end{cases}$ 的拉普拉斯变换.

解 函数 $f(t)$ 可表示为

$$f(t)=\cos t\cdot u(t)-\cos(t-2\pi)\cdot u(t-2\pi).$$

利用线性性、延迟性及 $\mathscr{L}[\cos t]=\dfrac{p}{p^2+1}$，得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)]&=\frac{p}{p^2+1}-\frac{p}{p^2+1}\mathrm{e}^{-2\pi p}\\&=\frac{p}{p^2+1}(1-\mathrm{e}^{-2\pi p}).\end{aligned}$$

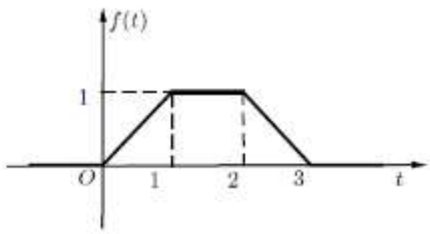


图 8.5

例题 8.12 求分段函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t, & 0\le t<1,\\ 1, & 1\le t<2,\\ 3-t, & 2\le t<3,\\ 0, & t\ge 3\end{cases}$ 的拉普拉斯变换（如图 8.5 所示）.

解 由于

$$f(t)=tu(t)-(t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)+(t-3)u(t-3),$$

从而

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{p^2}(1-\mathrm{e}^{-p}-\mathrm{e}^{-2p}+\mathrm{e}^{-3p}).$$

例题 8.13 求像函数 $F(p)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2p}}{p^4+5p^2+4}$ 的拉普拉斯逆变换.

解 由于

$$F(p)=\frac{1-\mathrm{e}^{-2p}}{p^4+5p^2+4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+4}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+4}\right)\mathrm{e}^{-2p}.$$

利用正弦函数的拉普拉斯变换及延迟性得

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(p)]=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t-\left[\frac{1}{3}\sin(t-2)-\frac{1}{6}\sin 2(t-2)\right]u(t-2).$$

性质 8.4（平移性质）设 $F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$，对于任意复常数 p_0，有

$$F(p-p_0)=\mathscr{L}[\mathrm{e}^{p_0 t}f(t)], \tag{8.9}$$

或

$$\mathscr{L}^{-1}[F(p-p_0)]=\mathrm{e}^{p_0 t}f(t). \tag{8.10}$$

证明

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{p_0 t}f(t)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{p_0 t}\mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-(p-p_0)t}\mathrm{d}t=F(p-p_0).$$

利用基本函数的拉普拉斯变换及平移性，得

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-p_0 t}\sin kt]=\frac{k}{(p+p_0)^2+k^2},\quad \mathscr{L}[\mathrm{e}^{-p_0 t}\cos kt]=\frac{p+p_0}{(p+p_0)^2+k^2},$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-p_0 t}\sinh kt]=\frac{k}{(p+p_0)^2-k^2},\quad \mathscr{L}[\mathrm{e}^{-p_0 t}\cosh kt]=\frac{p+p_0}{(p+p_0)^2-k^2},$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-p_0 t}t^m]=\frac{m!}{(p+p_0)^{m+1}}.$$

例题 8.14 求函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}\sin^2 t$ 的拉普拉斯变换.

解 $\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{-t}\dfrac{1-\cos 2t}{2}\right]=\mathscr{L}\left[\dfrac{1-\cos 2t}{2}\right]\Bigg|_{p+1}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+4}\right]\Bigg|_{p+1}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+1}-\frac{p+1}{(p+1)^2+4}\right]=\frac{2}{(p+1)\left[(p+1)^2+4\right]}.$$

例题 8.15 求像函数 $F(p)=\dfrac{p+1}{9p^2+6p+5}$ 的拉普拉斯逆变换.

解 由于

$$F(p)=\frac{p+\frac{1}{3}}{9\left[\left(p+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{9}\right]}+\frac{\frac{2}{3}}{9\left[\left(p+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{9}\right]}.$$

利用正弦和余弦函数的拉普拉斯变换及平移性得

$$\mathscr{L}^{-1}[F(p)]=\frac{1}{9}\left(\sin\frac{2}{3}t+\cos\frac{2}{3}t\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}.$$

性质 8.5（微分性质）设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty]$ 上可微，$F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$，则

$$\mathscr{L}[f'(t)]=pF(p)-f(0), \tag{8.11}$$

$$F'(p) = -\mathscr{L}[tf(t)]. \tag{8.12}$$

证明

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f'(t)] &= \int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \\ &= f(t)\mathrm{e}^{-pt}\big|_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \\ &= pF(p) - f(0).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F'(p) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}[f(t)\mathrm{e}^{-pt}]\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = -\mathscr{L}[tf(t)].\end{aligned}$$

称(8.11)为像原函数的微分性质，(8.12)为像函数的微分性质.

将式（8.11）作进一步推广. 若 $f(t)$ 在 $[0,+\infty]$ 上具有 n 次可微，且 $f^{(n)}$ 满足拉普拉斯变换存在定理中的条件，则

$$\mathscr{L}[f^{(n)}] = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0), \tag{8.13}$$

其中 $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to 0^-} f^{(k)}(t)$. 特别地，若 $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$，式（8.13）简化为

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n F(p). \tag{8.14}$$

相应地，式（8.12）可进一步推广，有

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n \mathscr{L}[t^n f(t)]. \tag{8.15}$$

例题 8.16 设 $f(t) = t\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t$，求 $\mathscr{L}[f(t)]$.

解 由位移性得

$$F(p) = \mathscr{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t] = \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}.$$

由微分性得

$$\mathscr{L}[f(t)] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}\right] = \frac{2\beta(p+\alpha)}{[(p+\alpha)^2+\beta^2]^2}.$$

例题 8.17 求像函数 $F(p) = \ln\dfrac{p^4}{p^4-1}$ 的拉普拉斯逆变换 $\mathscr{L}^{-1}[F(p)]$.

解 由 $F'(p) = \dfrac{4}{p} - \dfrac{2p}{p^2-1} - \dfrac{2p}{p^2+1}$ 得 $\mathscr{L}^{-1}[F'(p)] = 4 - 2\cosh t - 2\cos t.$

利用像函数的微分性，得

$$\mathscr{L}^{-1}[F(p)]=\frac{\mathscr{L}^{-1}[F'(p)]}{-t}=-\frac{4}{t}+\frac{2\cosh t}{t}+\frac{2\cos t}{t}.$$

性质 8.6（积分性质）设 $F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$，则

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right]=\frac{F(p)}{p}. \tag{8.16}$$

若 $\int_p^{+\infty}F(s)\mathrm{d}s$ 收敛，则

$$\int_p^{+\infty}F(s)\mathrm{d}s=\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]. \tag{8.17}$$

证明 令 $g(t)=\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$，则 $g'(t)=f(t),g(0)=0$. 由微分性质得

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right]=\mathscr{L}[g(t)]=\frac{1}{p}\mathscr{L}[g'(t)]$$
$$=\frac{1}{p}\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{p}F(p).$$

令 $G(p)=\int_p^{+\infty}F(s)ds$，则 $G'(p)=-F(p)$，由微分性质得

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(p)]=-\mathscr{L}^{-1}[G'(p)]=t\mathscr{L}^{-1}[G(p)],$$

从而

$$\int_p^{+\infty}F(s)\mathrm{d}s=\mathscr{L}(\mathscr{L}^{-1}[G(p)])=\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

称(8.16)为像原函数的积分性质，(8.17)为像函数的积分性质.

例题 8.18 求函数 $f(t)=\int_0^t s\mathrm{e}^{-\alpha s}\sin\beta s\mathrm{d}s$ 的拉普拉斯变换，其中，α,β 为常数.

解

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}\left[\int_0^t s\mathrm{e}^{-\alpha s}\sin\beta s\mathrm{d}s\right]=\frac{1}{p}\mathscr{L}[t\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t]$$
$$=-\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t]=-\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\mathscr{L}[\sin\beta t]|_{p+\alpha}\right)$$
$$=-\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}\right]=\frac{2(p+\alpha)}{p[(p+\alpha)^2+\beta^2]^2}.$$

例题 8.19 求函数 $f(t)=\frac{\sinh t}{t}$ 的拉普拉斯变换.

解 由 $\mathscr{L}[\sinh t]=\frac{1}{s^2-1}$ 及像函数的积分性可得

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sinh t}{t}\right]=\int_p^{+\infty}\mathscr{L}[\sinh t]\mathrm{d}s=\int_p^{+\infty}\frac{1}{s^2-1}\mathrm{d}s$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{s-1}{s+1}\bigg|_p^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln\frac{p+1}{p-1}.$$

性质 8.7（周期性质）设 $f(t)$ 为周期为 T 的函数，即 $f(t+T)=f(t)(t>0)$，则

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-pT}}.\tag{8.18}$$

证明

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t+\int_T^{+\infty}f(t-T)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-p(t+T)}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-pT}\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

从而

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-pT}}.$$

例题 8.20 设函数 $f(t)$ 是以 2π 为周期的函数，且在一个周期内的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t\le\pi,\\ 0, & \pi<t<2\pi.\end{cases}$$

求 $f(t)$ 的拉普拉斯变换.

解 根据周期函数的拉普拉斯变换公式（8.18）得

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-pT}}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi p}}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

利用分部积分可得

$$\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-\pi p}+1}{p^2+1}.$$

从而

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-\pi p})(p^2+1)}.$$

性质 8.8*（初值与终值定理）

1. 如果 $f(t)$ 在 $t\ge 0$ 可微，且 $\lim\limits_{p\to\infty}pF(p)$ 存在满足拉普拉斯变换存在定理条件，

$\mathcal{L}[f(t)]=F(p)$，则

$$f(0^+)=\lim_{Rep\to+\infty}pF(p).\tag{8.19}$$

2. 如果 $f(t)$ 在 $t\geq 0$ 可微，$f'(t)$ 满足拉普拉斯变换存在定理条件，$\mathcal{L}[f(t)]=F(p)$，$pF(p)$ 在半平面 $Rep>-\varepsilon(\varepsilon>0)$ 内解析，则

$$f(+\infty)=\lim_{Rep\to 0}pF(p).\tag{8.20}$$

初值、终值定理其实就是求时域初值和终值. 初值与终值定理就是将时域初值转换到频域去求. 其物理意义为：时域初值相当于信号刚接入，其变化比较剧烈，即信号的频率比较高，所以转到频率域，变成频率趋于无穷大. 而时域终值可看成信号接入时间无穷大，此时系统趋于稳定，信号只剩下直流分量，可以看成频率趋于零.

8.2.2 拉普拉斯变换的卷积性质

在傅里叶变换这一章中，我们已定义了区间 $(-\infty,+\infty)$ 上两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积，如果当 $t<0$ 时，$f_1(t)=f_2(t)=0$，此时

$$\begin{aligned}f_1(t)*f_2(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(s)f_2(t-s)\mathrm{d}s=\int_0^{+\infty}f_1(s)f_2(t-s)\mathrm{d}s\\&=\int_0^t f_1(s)f_2(t-s)\mathrm{d}s+\int_t^{+\infty}f_1(s)f_2(t-s)\,\mathrm{d}s\\&=\int_0^t f_1(s)f_2(t-s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

定义 8.3 称式

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(s)f_2(t-s)\mathrm{d}s\tag{8.21}$$

为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上卷积.

在拉普拉斯变换卷积中，无特别说明，总是假设当 $t<0$ 时，$f_1(t)=f_2(t)=0$.

例题 8.21 求 $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\mathrm{e}^t$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的卷积.

解

$$\begin{aligned}f_1*f_2=t*\mathrm{e}^t&=\int_0^t s\mathrm{e}^{t-s}\mathrm{d}s=\mathrm{e}^t\int_0^t s\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s\\&=-\mathrm{e}^t[s\mathrm{e}^{-s}]\big|_0^t+\mathrm{e}^t\int_0^t\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s\\&=-t+\mathrm{e}^t-1.\end{aligned}$$

对于拉普拉斯变换，有如下的卷积定理：

定理 8.2 设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 满足拉普拉斯变换存在定理条件，记 $\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(p),\mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(p)$，则 f_1*f_2 的拉普拉斯变换存在，且

$$\mathscr{L}[f_1 * f_2] = \mathscr{L}[f_1]\cdot\mathscr{L}[f_2] = F_1(p)F_2(p), \tag{8.22}$$

或

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(p)F_2(p)] = f_1(t) * f_2(t). \tag{8.23}$$

证明 首先验证 $f_1 * f_2$ 满足拉普拉斯变换存在定理条件.

设 $|f_1(t)| \le M\mathrm{e}^{ct}, |f_2(t)| \le M\mathrm{e}^{ct}$，则

$$\begin{aligned}|f_1 * f_2| &\le \int_0^t |f_1(s)|\,|f_2(t-s)|\,\mathrm{d}s \\ &\le M^2\int_0^t \mathrm{e}^{cs}\mathrm{e}^{c(t-s)}ds \le M^2 t\mathrm{e}^{ct} \\ &\le M^2\mathrm{e}^{(c+1)t}.\end{aligned}$$

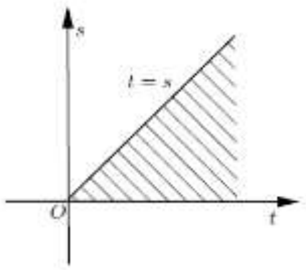


图 8.6 积分区域

其次，证明卷积公式. 由卷积及拉普拉斯变换定义

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f_1 * f_2] &= \int_0^{+\infty}[f_1 * f_2]\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f_1(s)f_2(t-s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

其积分区域如图 8.6 所示. 交换积分次序，并作变换代换：$u = t - s$，上式为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f_1 * f_2] &= \int_0^{+\infty} f_1(s)\left[\int_0^{+\infty} f_2(t-s)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{+\infty} f_1(s)\left[\int_{-s}^{+\infty} f_2(u)\mathrm{e}^{-p(u+s)}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{+\infty} f_1(s)\mathrm{e}^{-ps}\mathrm{d}s\cdot\int_0^{+\infty} f_2(u)\mathrm{e}^{-pu}\mathrm{d}u \\ &= F_1(p)F_2(p).\end{aligned}$$

例题 8.22 已知 $f_1(t) = t^m$， $f_2(t) = t^n$，m, n 为正整数，求 $[0,+\infty)$ 上的卷积 $f_1 * f_2$.

解 因为

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}[f_1 * f_2] = F_1(p)F_2(p) = \mathscr{L}[t^m]\mathscr{L}[t^n] \\ &= \frac{m!}{t^{m+1}}\frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{m!n!}{p^{m+n+2}},\end{aligned}$$

从而

$$f_1 * f_2 = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{m!n!}{p^{m+n+2}}\right] = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}.$$

例题 8.23 设 $F(p) = \dfrac{1}{p^2(1+p^2)}$，求 $\mathscr{L}^{-1}[F(p)]$.

解 取 $F_1(p) = \dfrac{1}{p^2}$， $F_2(p) = \dfrac{1}{1+p^2}$，则

$$f_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[F_1(p)]=t,\quad f_2(t)=\mathscr{L}^{-1}[F_2(p)]=\sin t,$$

由卷积定理得

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(p)]=f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t s\sin(t-s)\mathrm{d}s$$
$$=[s\cos(t-s)]\big|_0^t-\int_0^t\cos(t-s)\mathrm{d}s=t-\sin t.$$

8.3 拉普拉斯逆变换

由拉普拉斯变换的性质可以求某些函数 $f(t)$ 的像函数 $F(p)$，或已知像函数 $F(p)$ 求拉普拉斯逆变换 $f(t)$. 本节介绍利用复变函数中的留数定理求拉普拉斯逆变换.

8.3.1 复反演积分公式

由拉普拉斯变换的概念可知，函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，实际上就是 $f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换，即

$$\mathscr{F}[f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=F(p)\quad(p=\sigma+\mathrm{i}\omega).$$

因此，按傅里叶积分公式，在 $f(t)$ 的连续点就有

$$f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)u(s)\mathrm{e}^{-\sigma s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega s}\mathrm{d}s\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left[\int_0^{+\infty}f(s)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)s}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\sigma+\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\ (t>0).$$

等式两边同乘以 $\mathrm{e}^{\sigma t}$，则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\sigma+\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p,\quad t>0,$$

其中积分路径 $(\sigma-\mathrm{i}\infty,\sigma+\mathrm{i}\infty)$ 为 $Rep>\sigma_0$ 内任一条平行于虚轴的直线.

由此可得如下定理：

定理 8.3 设 $f(t)$ 满足拉普拉斯变换存在性定理中的条件，$\mathscr{L}[f(t)]=F(p)$，σ_0 为收敛坐标，则当 t 为连续点时，$\mathscr{L}^{-1}[F(p)]$ 由下式给出

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\sigma+\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p,\quad t>0.\qquad(8.24)$$

当 t 为间断点时

$$\begin{aligned}\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma+\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p, \quad t>0.\end{aligned} \tag{8.25}$$

其中积分路径 $(\sigma-i\infty,\sigma+i\infty)$ 为 $Rep>\sigma_0$ 内任一条平行于虚轴的直线.

计算复变函数积分通常比较困难，但当 $F(p)$ 满足一定条件时，可以利用留数方法计算.

8.3.2 利用留数定理求拉普拉斯逆变换

首先引入推广的约当（Jordan）引理.

引理 8.1 设复变量 p 的函数 $F(p)$ 满足下列条件：

（1）它在左半平面内（$\mathrm{Re}\,p<\sigma$）除有限个奇点外解析;（2）对于满足 $\mathrm{Re}\,p<\sigma$ 的 p，当 $|p|=\mathrm{R}\to+\infty$ 时，$F(p)$ 一致地趋于零. 则当 $t>0$ 时，有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=0,$$

其中，$C_R:|p|=R,\ \mathrm{Re}(p)<\sigma$，它是一个以点 $\sigma+\mathrm{i}0$ 为圆心，R 为半径的圆弧.

定理 8.4 设 $F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$，若 $F(p)$ 在全平面上只有有限个奇点 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，它们均位于直线 $Rep=\sigma>\sigma_0$ 的左侧，且 $\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0$，则当 $t>0$ 时，

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(p)]=\sum_{k=1}^{n}Res[F(p)\mathrm{e}^{pt},p_k]. \tag{8.26}$$

证明 如图 8.7 建立积分路径，由留数定理得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\int_{\overline{AB}}F(p)\mathrm{e}^{pt}dp+\int_{C_R}F(p)\mathrm{e}^{pt}dp]=\sum_{k=1}^{n}Res[F(p)\mathrm{e}^{pt},p_k],$$ 由于

$$\int_{\overline{AB}}F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=\int_{\sigma-\mathrm{i}R}^{\sigma+\mathrm{i}R}F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p,$$

由约当引理 8.1 知

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=0.$$

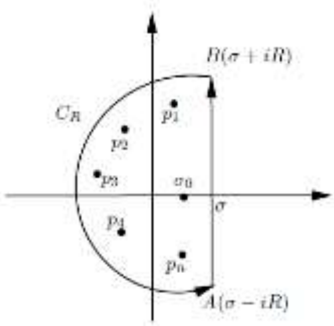


图 8.7 积分路径

令 $R\to+\infty$，得

$$\int_{\sigma-\mathrm{i}R}^{\sigma+\mathrm{i}R}F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=\sum_{k=1}^{n}Res[F(p)\mathrm{e}^{pt},p_k].$$

由此即得结论.

在实际应用中，$F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$往往为有理分式函数，其中$A(p)$和$B(p)$为多项式. $B(p)$的次数为n，且$B(p)$的次数高于$A(p)$的次数. 如线性电路中，常见的响应量电压和电流的像函数往往为有理函数. 此时$F(p)$的奇点类型为极点.

1. 如果$p_1,p_2,\cdots,p_n$为$\dfrac{A(p)}{B(p)}$的一阶极点，从而

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} Res[F(p)\mathrm{e}^{pt},p_k]=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\mathrm{e}^{p_k t}; \tag{8.27}$$

2. 如果$p_1,p_2,\cdots,p_n$为$\dfrac{A(p)}{B(p)}$的$m_1,m_2,\cdots,m_n$阶极点，则

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}[(p-p_k)^{m_k}\frac{A(p)}{B(p)}\mathrm{e}^{pt}]. \tag{8.28}$$

例题 8.24 设$F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)}$，求$\mathscr{L}^{-1}[F(p)]$.

解 $F(p)$的奇点为$-1,-2,-3$，且均为一阶极点，从而

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[F(p)]&=Res[F(p)\mathrm{e}^{pt},-1]+Res[F(p)\mathrm{e}^{pt},-2]+Res[F(p)\mathrm{e}^{pt},-3]\\&=\left.\frac{p\mathrm{e}^{pt}}{(p+2)(p+3)}\right|_{p=-1}+\left.\frac{p\mathrm{e}^{pt}}{(p+1)(p+3)}\right|_{p=-2}+\left.\frac{p\mathrm{e}^{pt}}{(p+1)(p+2)}\right|_{p=-3}\\&=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t}.\end{aligned}$$

例题 8.25 设$F(p)=\dfrac{p^2+2}{(p^2+1)^2}\mathrm{e}^{-pa}(a>0)$，求$\mathscr{L}^{-1}[F(p)]$.

解
$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[F(p)]&=u(t-a)\mathscr{L}^{-1}\left.\left[\frac{p^2+2}{(p^2+1)^2}\right]\right|_{t-a}\\&=u(t-a)\left.\left\{Res\left[\frac{p^2+2}{(p^2+1)^2}\mathrm{e}^{pt},\mathrm{i}\right]+Res\left[\frac{p^2+2}{(p^2+1)^2}\mathrm{e}^{pt},-\mathrm{i}\right]\right\}\right|_{t-a}\\&=u(t-a)\left.\left(-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{3}{2}\sin t\right)\right|_{t-a}\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{2}u(t-a)[(t-a)\cos(t-a)-3\sin(t-a)]$$

8.4 拉普拉斯变换的应用

积分变换法是通过积分变换简化定解问题的一种有效的求解方法. 对于单个自变量的线性常微分方程，可以通过实施积分变换化为代数方程；而对于多个自变量的线性偏微分方程，也可以通过积分变换来减少方程的自变量个数，直至化为常微分方程，这就使原问题得到大大简化，再通过逆变换，就可得到了原来微分方程的解. 积分变换法在求解线性常微分方程、数学物理方程中具有广泛的应用.

本节主要介绍用拉普拉斯变换求微分（积分）方程的定解问题，以及某些广义积分.

8.4.1 利用拉普拉斯变换求线性微分（积分）方程

所谓线性系统，在许多场合，它的数学模型可以用一个线性微分方程来描述，或者说是满足叠加原理的一类系统. 这类系统无论是在电路理论还是在自动控制理论的研究中，都占有重要的地位.

利用拉普拉斯变换求线性微分（积分）方程的一般步骤：（1）对方程取拉普拉斯变换，把原问题的微分（积分）方程，转化为像函数的代数方程；（2）求像函数的代数方程，解出像函数；（3）对像函数求拉普拉斯逆变换，求出原函数，得到原微分（积分）方程的解.

例题 8.26 求二阶常微分方程初始值问题

$$\begin{cases} x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2\mathrm{e}^{t}\cos t, \\ x(0)=0, \quad x'(0)=0 \end{cases}$$

的解.

解 令 $X(p)=\mathscr{L}[x(t)]$，方程两边取拉普拉斯变换，并利用像原函数微分性，得

$$p^2X(p)-px(0)-x'(0)-2(pX(p)-x(0))+2X(p)=\frac{2(p-1)}{(p-1)^2+1}.$$

利用初值条件，得

$$X(p)=\frac{2(p-1)}{[(p-1)^2+1]^2}.$$

取拉氏逆变换，利用平移性和像函数微分性得：

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(p)]=\mathrm{e}^{t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2p}{(p^2+1)^2}\right]$$

$$=-e^{t}\mathscr{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'\right]=t\mathrm{e}^{t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right]=t\mathrm{e}^{t}\sin t.$$

例题 8.27 求常微分方程组初值问题 $\begin{cases} 2x(t)-y(t)-y'(t)=4(1-\mathrm{e}^{-t}), \\ 2x'(t)+y(t)=2(1+3\mathrm{e}^{-2t}), \\ x(0)=0, \quad y(0)=0 \end{cases}$

的解.

解 设 $X(p)=\mathscr{L}[x(t)], Y(p)=\mathscr{L}[y(t)]$，方程两边取拉普拉斯变换，得

$$\begin{cases} 2X(p)-Y(p)-pY(p)=4\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+1}\right), \\ 2pX(p)+Y(p)=2\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{3}{p+2}\right). \end{cases}$$

解上述代数方程得

$$\begin{cases} X(p)=\dfrac{3}{p}-\dfrac{2}{p+1}-\dfrac{1}{p+2}, \\ Y(p)=\dfrac{2}{p}-\dfrac{4}{p+1}+\dfrac{2}{p+2}. \end{cases}$$

取拉普拉斯逆变换，得

$$\begin{cases} x(t)=3-2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}, \\ y(t)=2-4\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}. \end{cases}$$

拉普拉斯变换不仅可求微分方程初值问题，还可以求特殊微分方程边值问题和微分、积分方程的解.

例题 8.28 求下列二阶常微分方程的边值问题

$$\begin{cases} x''(t)-x(t)=0, \quad 0<t<2\pi, \\ x(0)=0, \quad x(2\pi)=1 \end{cases}$$

的解.

解 令 $X(p)=\mathscr{L}[x(t)]$，方程两边取拉普拉斯变换，得

$$p^2X(p)-px(0)-x'(0)-X(p)=0.$$

利用 $x(0)=0$ 得

$$p^2X(p)-x'(0)-X(p)=0.$$

解上述代数方程，得

$$X(p)=\frac{x'(0)}{p^2-1}.$$

取拉普拉斯逆变换

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{x'(0)}{p^2-1}\right]=x'(0)\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^1-1}\right]=x'(0)\sinh t.$$

令 $t=2\pi$ 得，$x'(0)=\dfrac{1}{\sinh 2\pi}$，从而得原方程解为

$$x(t)=\frac{\sinh t}{\sinh 2\pi}.$$

例题 8.29 求下列积分方程

$$x(t)=at+\int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

的解. 其中 a 为常数.

解 $X(p)=\mathscr{L}[x(t)]$，对方程两边作拉普拉斯变换，并利用卷积性，得

$$X(p)=\frac{a}{p^2}+\frac{1}{1+p^2}X(p).$$

解上述代数方程，得

$$X(p)=\frac{a}{p^2}+\frac{a}{p^4}.$$

求拉普拉斯逆变换，得原方程的解为

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(p)]=a\left(t+\frac{t^3}{6}\right).$$

例题 8.30 求下列微分积分方程

$$\begin{cases} x'(t)-2\int_0^t u(s)x(t-s)\mathrm{d}s+3\int_0^t x(s)\mathrm{d}s=u(t-1), \\ x(0)=0 \end{cases}$$

的解. 其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数.

解 令 $X(p)=\mathscr{L}[x(t)]$. 方程两边取拉普拉斯变换，注意到方程中第二项为 $u(t)$ 与 $x(t)$ 的卷积，利用卷积定理得

$$pX(p)-\frac{2}{p}X(p)+\frac{3}{p}X(p)=\frac{\mathrm{e}^{-p}}{p}.$$

上述代数方程的解为

$$X(p)=\frac{\mathrm{e}^{-p}}{p^2+1}.$$

取拉普拉斯逆变换，得原方程解为

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-p}}{p^2+1}\right]=u(t-1)\sin(t-1).$$

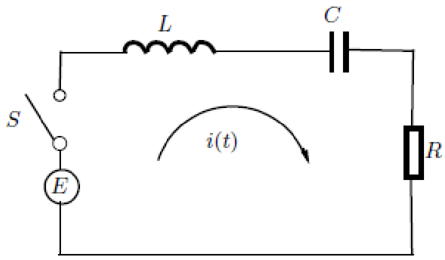
例题 8.31 设 RLC 串联电路接上电压 E 的直流电源（如图 8.8 所示）， 设初始时刻 $t=0$ 的电路中的电流 $i_0=0$， 电容 C 上没有电量即 $q_0=0$， 求电路中电流 $i(t)$ 的变化规律.

解 根据基尔霍夫定律，有

$$u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)=E,$$

其中

$$u_R(t)=Ri(t),\ u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t),\ i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}.$$



又 $i_0=q_0=0$， 则

$$Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(s)\,\mathrm{d}s=E, i(0)=0.$$

图 8.8

上式为 RLC 串联电路中电流 $i(t)$ 所满足的关系式，它是一个微分积分方程. 对方程两端取拉普拉斯变换，且记 $I(p)=\mathscr{L}[i(t)]$，则

$$RI(p)+\frac{1}{Cp}I(p)+LpI(p)=\mathscr{L}[E]=\frac{E}{p}.$$

所以有

$$I(p)=\frac{\frac{E}{p}}{R+Lp+\frac{1}{Cp}}=\frac{E}{L}\frac{1}{p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{CL}}.$$

记 $\alpha=\frac{R}{2L},\beta^2=\frac{1}{LC}$， 而 $\lambda_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2},\lambda_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ 是代数方程 $p^2+2\alpha p+\beta^2=0$ 的两个根，则

$$I(p)=\frac{E}{L(\lambda_1-\lambda_2)}\left[\frac{1}{p-\lambda_1}-\frac{1}{p-\lambda_2}\right].$$

（1）当 $\alpha>\beta$, 即 $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时， λ_1,λ_2 为不同的实数，对 $I(p)$ 求拉普拉斯逆变换, 得

$$i(t)=\frac{E}{L(\lambda_1-\lambda_2)}\left[\mathrm{e}^{\lambda_1 t}-\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\right],\ t\geq 0.$$

（2）当 $\alpha<\beta$, 即 $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时， λ_1,λ_2 是一对共轭复数, 即

$$\lambda_1=-\alpha+\mathrm{i}\sqrt{\beta^2-\alpha^2},\lambda_2=-\alpha-\mathrm{i}\sqrt{\beta^2-\alpha^2},$$

此时

$$i(t)=\frac{E}{L(\lambda_1-\lambda_2)}\left[e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}\right]=\frac{E}{2L\mathrm{i}\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\left[e^{(-\alpha+\mathrm{i}\sqrt{\beta^2-\alpha^2})t}-e^{(-\alpha-\mathrm{i}\sqrt{\beta^2-\alpha^2})t}\right];$$

$$=\frac{E}{L\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}e^{-\alpha t}\sin\sqrt{\beta^2-\alpha^2}t,t\geq 0.$$

（3）$\alpha=\beta$，即 $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，$\lambda_1=\lambda_2=-\alpha$，则有

$$I(p)=\frac{E}{L}\frac{1}{p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{CL}}=\frac{E}{L}\frac{1}{(p+\alpha)^2}.$$

从而可求得 $I(p)$ 的拉氏逆变换

$$i(t)=\frac{E}{L}te^{-\alpha t},\ t\geq 0.$$

8.4.2 用拉普拉斯变换求广义积分

利用拉普拉斯变换定义及像函数的积分性质，可以有效地求解以下两类广义积分.

类型 1 ：型如 $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt$ 的广义积分.

由拉普拉斯变换积分性得：若 $F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$，且 $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ 收敛，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\lim_{p\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}\mathrm{d}t=\lim_{p\to 0}\int_p^{+\infty}F(s)\mathrm{d}s.$$

例题 8.32 计算狄里克莱积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$

解

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\lim_{p\to 0}\int_p^{+\infty}\mathscr{L}[\sin t]\mathrm{d}p=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+p^2}\mathrm{d}p=\frac{\pi}{2}.$$

例题 8.33 求广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2t}{t}e^{-3t}\mathrm{d}t.$

解 方法 1 利用拉普拉斯变换的定义和积分性质. 因为

$$F(p)=\mathscr{L}[1-\cos 2t]=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4},$$

从而

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2t}{t}\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{d}t=\lim_{p\to 3}\int_p^{+\infty}F(s)\mathrm{d}s$$

$$=\lim_{p\to 3}\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\Bigg|_p^{+\infty}=\ln\frac{\sqrt{13}}{3}.$$

方法 2 利用位移性和积分性．由位移性

$$\mathscr{L}\left[(1-\cos 2t)\mathrm{e}^{-3t}\right]=\mathscr{L}\left[1-\cos 2t\right]\Big|_{p+3}=\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)\Bigg|_{p+3}$$

$$=\frac{1}{p+3}-\frac{p+3}{(p+3)^2+4}.$$

从而

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2t}{t}\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{p+3}-\frac{p+3}{(p+3)^2+4}\right]\mathrm{d}p$$

$$=\ln\frac{p+3}{\sqrt{(p+3)^2+4}}\Bigg|_0^{+\infty}=\ln\frac{\sqrt{13}}{3}.$$

类型 2：形如 $\int_0^{+\infty}t^n f(t)\mathrm{d}t$ 的广义积分.

由拉普拉斯变换微分性得，若 $F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$，且 $F(p)$ 在 $Re(p)\ge 0$ 的半平面上解析，则

$$F^{(n)}(p)=(-1)^n\int_0^{+\infty}t^n f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=(-1)^n\mathscr{L}[t^n f(t)].$$

从而

$$\int_0^{+\infty}t^n f(t)\mathrm{d}t=(-1)^n\lim_{p\to 0}F^{(n)}(p).$$

例题 8.34 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}te^{-at}\sin tdt,\quad(a>0)$.

解 由于

$$\mathscr{L}[e^{-at}\sin t]=\frac{1}{(p+a)^2+1}.$$

所以

$$\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-at}\sin t\mathrm{d}t=-\lim_{p\to 0}\left[\frac{1}{(p+a)^2+1}\right]'=\frac{2a}{(a^2+1)^2}.$$

例题 8.35 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t\mathrm{d}t,\quad(\alpha,\beta>0)$.

解 方法 1 利用像函数的微分性．因为

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t]=\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}.$$

从而

$$\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \beta t \mathrm{d}t = \lim_{p\to 0}(-1)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\left[\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}\right]$$

$$= \lim_{p\to 0}\frac{-2\beta\left[\beta^2-3(p+\alpha)^2\right]}{\left[(p+\alpha)^2+\beta^2\right]^3} = \frac{2\beta(3\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^3}.$$

方法 2 利用拉普拉斯变换定义. 因为

$$\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(\alpha-\mathrm{i}\beta)t}\mathrm{d}t = \mathscr{L}\left[t^2\right]\Big|_{\alpha-\mathrm{i}\beta} = \frac{2}{p^3}\bigg|_{\alpha-\mathrm{i}\beta}$$

$$= \frac{2}{(\alpha-\mathrm{i}\beta)^3} = \frac{2\left[\alpha^3-3\alpha\beta^2+\mathrm{i}(3\alpha^2\beta-\beta^3)\right]}{(\alpha^2+\beta^2)^3}.$$

取虚部得

$$\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \beta t \mathrm{d}t = \frac{2\beta(3\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^3}.$$

由上例可知，对于形如：$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t\mathrm{d}t,\quad \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t\mathrm{d}t, (\alpha,\beta>0)$ 的广义积分，可先考虑积分 $I=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}\mathrm{d}t$. 利用拉普拉斯变换的定义

$$I = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}\mathrm{d}t = \mathscr{L}\left[f(t)\right]\Big|_{\alpha-\mathrm{i}\beta} = F(\alpha-\mathrm{i}\beta).$$

从而

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t\mathrm{d}t = \operatorname{Im} F(\alpha-\mathrm{i}\beta),$$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t\mathrm{d}t = \operatorname{Re} F(\alpha-\mathrm{i}\beta).$$