第四章 解析函数的级数展开

无穷级数是研究函数性态的重要工具. 本章将依次介绍复数项级数和复函数项级数的概念，讨论解析函数的级数表示，即泰勒级数和罗朗级数，研究如何将解析函数展开为泰勒级数和罗朗级数的问题. 解析函数的级数展开无论在理论上还是在实际应用上都有重要的意义，它将有助于我们更深入地掌握解析函数的性质. 最后，以无穷级数为工具，研究复变函数在奇点附近的性质.

4.1 复级数的概念

4.1.1 复数列的极限

因为无穷级数是从数列的特殊规律产生的,所以研究数列与函数列是极其重要的. 现在引入复数列极限的概念.

定义 4.1 设有复数列 $z_1, z_2, \cdots$，记作 $\{z_n\}$，若存在复数 z_0，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在自然数 N，当 $n > N$ 时，有

$$|z_n - z_0| < \varepsilon$$

成立，则称数列 $\{z_n\}$ 存在极限，其极限为 z_0，记作

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0，\quad 或\ z_n \to z_0\ (n\to\infty).$$

定理 4.1 复数列 $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$（$n = 1, 2\cdots$）收敛于复数 $z_0 = x_0 + iy_0$ 的充要条件为

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0, \qquad \lim_{n\to+\infty} y_n = y_0.$$

证明 **必要性**. 设 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0，则对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - x_0| \le |z_n - z_0| < \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0.$$

同理

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = y_0.$$

充分性. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0$，则对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，当

$n > N$ 时，有

$$|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \text{与} |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$|z_n - z_0| \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = z_0.$$

上述定理揭示了复数数列与实数数列在收敛问题上的紧密联系.

定义 4.2 设有复数列$\{z_n\}$，若存在正数M，使得对任意z_n都有$|z_n| \le M$，则称数列$\{z_n\}$ 为有界数列，否则，称数列$\{z_n\}$为无界数列.

定义 4.3 设有复数列$\{z_n\}$，若对任意给定的正数M，存在自然数N，使得当$n > N$时都有$|z_n| > M$，则称数列$\{z_n\}$ 趋于∞，记为$\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = \infty$.

复数列的极限是实数列极限的推广，这种推广使复数列的极限有类似于实数列极限的运算法则和性质，证明方法也相仿，如对复数列的极限有如下的结论.

定理 4.2 若复数列$\{z_n\}$收敛，则$\{z_n\}$ 是有界数列，且$\{z_n\}$的极限是唯一的.

定理 4.3（柯西收敛准则）复数列$\{z_n\}$收敛的充分必要条件是：对任意的$\varepsilon > 0$，总存在自然数N，当$n, m > N$ 时，有$|z_n - z_m| < \varepsilon$.

4.1.2 复数项级数

下面介绍复数项级数及其敛散性的概念.

定义 4.4 设$\{z_n\}$为复数列， 称式

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{4.1}$$

为复数项无穷级数，其前n项的和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} z_k = z_1+z_2+\cdots+z_n \qquad (4.2)$$

为级数(4.1)的部分和. 若部分和数列$\{S_n\}$收敛于S，则称级数(4.1)收敛，其和为S；若部分和数列$\{S_n\}$不收敛，则称级数(4.1)发散.

例题 4.1 讨论几何级数$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$（q 为复常数)的敛散性.

解 此几何级数的部分和为:

$$S_n = 1+q+\cdots+q^n=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

若$|q|<1$，由$\lim_{n\to+\infty} q^n=0$得

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}.$$

从而得原级数收敛，且和为$\frac{1}{1-q}$.

若$|q|>1$，由于$\lim_{n\to+\infty}|q|^n=+\infty$，即$\lim_{n\to+\infty} q^n$不存在，从而$\lim_{n\to+\infty} S_n$不存在，从而原级数发散.

若$q=1$，则部分和为$S_n=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}=n\to+\infty$, 所以原级数发散.

当$|q|=1$，且$q\neq 1$时，令$q=e^{i\theta}$, $\theta\neq 2k\pi$（k为整数)，则由于当$n\to+\infty$时，$e^{in\theta}$极限不存在，从而部分和数列极限$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}$不存在，此时级数也发散.

综上所述，几何级数$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$当$|q|<1$时收敛；而当$|q|\geq 1$时发散.

关于复数项级数的收敛性，有如下几个定理.

定理 4.4 设$z_n=x_n+iy_n$（$n=1,2,\cdots,$）， 则复级数$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$收敛于S的充分必要条件是实级数$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$和 $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$均收敛，且分别收敛于$\mathrm{Re}\,S$和$\mathrm{Im}\,S$.

此定理将复数项级数的收敛问题转化为实数项级数的收敛问题.

例题 4.2 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}i\right)$ 的敛散性.

解 因级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，故原级数发散.

定理 4.5（柯西收敛准则）级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N， 当 $n>N$ 时，对于任意自然数 p，有

$$\left|z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_{n+p}\right|<\varepsilon.$$

在上述定理中，取 $p=1$，可得 $\left|z_{n+1}\right|<\varepsilon$，由此即得级数收敛的必要条件.

定理 4.6 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=0.$

与实级数类似，可以定义绝对收敛和条件收敛.

定义 4.5 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|z_n\right|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 绝对收敛；若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|z_n\right|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 条件收敛.

以下定理说明绝对收敛一定是收敛的.

定理 4.7 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|z_n\right|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 一定收敛.

证明 由于对于任意的自然数 p，有

$$\left|z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_{n+p}\right|\le\left|z_{n+1}\right|+\left|z_{n+2}\right|+\cdots+\left|z_{n+p}\right|,$$

利用柯西收敛准则即得结论.

例题 4.3 试判别下列级数的收敛性和绝对收敛性

（1） $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1+3i}{2}\right)^n$；（2） $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}$ ；（3） $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n}{n}$.

解

(1) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\left(\frac{1+3i}{2}\right)^n\right| = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^n = +\infty,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1+3i}{2}\right)^n$ 发散.

(2) 由于

$$|z_n| = \left|\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}\right| = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\cosh n} = \frac{2}{e^n+e^{-n}} < \frac{2}{e^n} < 1,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{e^n}$ 收敛，所以原级数绝对收敛.

(3) 由于

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n}{n} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n} + i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.\end{aligned}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 均收敛，所以，原级数收敛. 而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{i^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数条件收敛.

4.1.3 复函数项级数

定义 4.6 设 $\{f_n(z)\}$ （$n=1, 2, \cdots,$ ）为一复变函数序列，其中各项在区域 D 内有定义，则表达式

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots \tag{4.3}$$

为区域 D 内的复函数项级数，该级数的前 n 项和

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) \tag{4.4}$$

称为级数（4.3）的部分和.

如果对于区域D内的某一点z_0，极限$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z_0)=S(z_0)$存在，则称级数(4.3)在$z_0$点收敛，称$S(z_0)$为它的和.

如果级数在D内处处收敛，那么它的和一定是与z有关的一个函数$S(z)$：

$$S(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots,$$

此函数称为级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$的和函数.

定义 4.7 若对于区域D内的任一点z，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|f_n(z)\right|$ 收敛，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$在$D$内绝对收敛.

容易证明，若级数（4.3）绝对收敛，则它必收敛.

4.2 幂级数

4.2.1 幂级数的概念

定义 4.8 称形如

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n=c_0+c_1 z+\cdots c_n z^n+\cdots \tag{4.5}$$

或

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n=c_0+c_1\left(z-z_0\right)+\cdots c_n\left(z-z_0\right)^n+\cdots \tag{4.6}$$

的函数项级数为幂级数，其中$c_0, c_1\cdots,$均为复常数.

由于形如式(4.5)与式(4.6)的级数之间可通过令$z \leftrightarrow z-z_0$相互转化，所以，为简单起见，只讨论形如式(4.5)的级数.

由幂级数的定义可知，形如(4.5)的幂级数在$z=0$处一定收敛.而幂级数的收敛特性可由以下定理说明.

定理 4.8 （阿贝尔(Abel)）若幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在 $z = z_0$（$z_0 \neq 0$ ）处收敛，则它在 $|z| < |z_0|$ 内绝对收敛；若此幂级数有 $z = z_0$ 处发散，则它在$|z| > |z_0|$内发散.

证明 因为级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$ 收敛，由收敛的必要条件知，$\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0.$ 于是存在正数 $M > 0$，使对一切的n，有$|c_n z_0^n| \le M$．因此，当$|z| < |z_0|$时， 即$\left|\frac{z}{z_0}\right| = q < 1$时，有

$$\left|c_n z^n\right| = \left|c_n z_0^n \cdot \frac{z^n}{z_0^n}\right| = \left|c_n z_0^n\right| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < Mq^n.$$

由于几何级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n q^n$ 收敛，可知当$|z| < |z_0|$时原级数绝对收敛.

利用反证法，根据上述结论可得定理另一部分的证明.

4.2.2 收敛圆和收敛半径

利用阿贝尔定理，可以定出幂级数的收敛范围.

对一个形如(4.5)的幂级数而言，其收敛情况不外乎以下三种:

(1) 仅在原点$z = 0$处收敛，除此之外处处发散. 如级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$.

(2) 在全平面上处处绝对收敛. 如级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n$.

(3) 既有在点 $z_1 \neq 0$ 处收敛，又有在点 $z_2 \neq 0$ 处发散. 此时，由阿贝尔定理知 $|z_1| \le |z_2|$，且可以证明：存在一个以原点为圆心，以R为半径的圆，使级数(4.5)在该圆内收敛(且绝对收敛)，在该圆外发散.

若将该圆的圆周记作$C:|z| = R$，则为了统一起见，对于情形(1)，规定$R = 0$；对于情形(2)，规定$R = +\infty$.称此圆为幂级数(4.5)的收敛圆，而R称为其收敛半径.

定义 4.9 若存在一个正数R，使幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在$|z| < R$内绝对收敛，而在$|z| > R$发

散，则称 $|z| = R$ 为此级数的收敛圆，R 为收敛半径.

例题 4.4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的收敛半径.

解 此级数即为几何级数，当 $|z| < 1$ 时，级数收敛；而当 $|z| > 1$ 时，级数发散. 因此，收敛半径为 $R = 1$.

例题 4.5 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在 $z = -3 + 4i$ 处条件收敛，试确定其收敛半径.

解 由于幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在 $z = -3 + 4i$ 处条件收敛，由阿贝尔定理知，对于满足 $|z| < |-3 + 4i| = 5$ 的一切点 z，幂级数绝对收敛，且对满足 $|z| > |-3 + 4i| = 5$ 的一切点 z，幂级数一定发散，从而得收敛半径 $R = 5$.

对于更一般的幂级数，求收敛半径的方法与高等数学中的方法类似.

定理 4.9 设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$，若下列条件之一成立：

$$(1)\quad l = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| ;\qquad (2)\quad l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} .$$

则幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{l}$.

规定，当 $l = 0$ 时，$R = +\infty$， 即幂级数在全平面上处处收敛； 而当 $l = +\infty$ 时，$R = 0$ 即除 $z = 0$ 外级数处处发散.

注 4.1 （1）利用以上定理求幂级数收敛半径时应注意，总是假设公式中的极限 l 存在.

（2）应注意的是：若幂级数的收敛半径为 R， 则在圆周 $|z| = R$ 处，幂级数可能收敛也可能发散.

注 4.2 若幂级数有缺项时，不能直接套用公式求收敛半径. 如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$.

例题 4.6 试求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} n! z^n$；(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$；(3) $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p z^n (p>0)$；(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n$.

解 (1) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = +\infty,$$

所以，收敛半径 $R=0$，此时，级数仅在 $z=0$ 处收敛.

(2) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = 0,$$

所以，收敛半径 $R=+\infty$. 此级数在全平面上处处收敛.

(3) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^p} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^p = 1,$$

所以，收敛半径 $R=1$. 在圆周 $|z|=1$ 上，令 $z=e^{i\theta}$ $(0\le\theta<2\pi)$，则由

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^p z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n^p \cos n\theta + i\sum_{n=0}^{+\infty} n^p \sin n\theta$$

的实部和虚部两个级数均发散，可知原级数在圆周 $|z|=1$ 上发散. 因此，原级数在 $|z|<1$ 时收敛，在 $|z|\ge 1$ 时发散.

(4) 由于

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1,$$

所以，收敛半径 $R=1$. 在圆周 $|z|=1$ 上，当 $z=1$ 时级数显然发散；在其余点 $z=e^{i\theta}$ $(0<\theta<2\pi)$，则由

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}z^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos n\theta + i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta$$

的实部和虚部两个级数均收敛，可知原级数在圆周 $|z|=1$ 上除 $z=1$ 外均收敛. 因此，原级

数在$|z|<1$时收敛，在$|z|>1$时发散，在圆周$|z|=1$上除$z=1$外均收敛．此例表明，在收敛圆周上既有级数的收敛点，也有级数的发散点.

4.2.3 幂级数的运算和性质

与实函数幂级数一样，复函数幂级数也可以进行有理运算和复合运算.

设有幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = S_1(z), \quad |z|<R_1, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^n = S_2(z), \quad |z|<R_2,$$

则

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \pm \sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (c_n \pm d_n) z^n = S_1(z) \pm S_2(\mathrm{z}), \quad |z|<R,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(c_n d_0 + c_{n-1} d_1 + \cdots + c_0 d_n\right) z^n, \quad |z|<R,$$

其中 $R=\min\left(R_1, R_2\right)$.

例题 4.7 设有幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{1-a^n} z^n \ (0<a<1)$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$，试求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{1-a^n} z^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的收敛半径.

解 因为$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{1-a^n} z^n$ 和$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的收敛半径均为 1，故$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{1-a^n} z^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的收敛半径为 1.

需注意的是，若将$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{1-a^n} z^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 化为等价形式

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1-a^n} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{1-a^n} z^n.$$

因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{a^{n+1}}{1-a^{n+1}}}{\dfrac{a^n}{1-a^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{a^{n+1}(1-a^n)}{a^n(1-a^{n+1})} = a,$$

所以该级数的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{a}>1$，但原两级数的收敛域均为 $|z|<1$，它们差的级数收敛域仍为 $|z|<1$，不能扩大为 $|z|<\dfrac{1}{a}$.

复函数的幂级数也可以进行复合运算.

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n z^n = f(z),\ |z|<R,$ 而在 $|z|<r$ 内，函数 $g(z)$ 解析且满足 $|g(z)|<R$，则

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\left[g(z)\right]^n = f\left[g(z)\right],\ \ |z|<r.$$

幂级数的复合运算广泛应用于将函数展开成为幂级数之中.

例题 4. 8 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{3z-2}$ 展开为形如 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n\left(z-2\right)^n$ 的幂级数.

解 将 $f(z)$ 等价表示为 $(z-2)$ 的函数，并利用几何级数的和函数及收敛域，得

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3z-2} = \frac{1}{3\left(z-2\right)+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{4}\left(z-2\right)} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)\left(z-2\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{3^n}{4^{n+1}}\left(z-2\right)^n,\quad |z-2|<\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

由前面讨论可知，对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n$，总有一个收敛圆存在，使得该级数在此圆内收敛．其和函数在收敛圆内是否解析呢？我们不加证明地给出其性质如下：

定理 4. 10 设 $C_R:|z-z_0|<R$（$0<R<+\infty$）为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n$ 的收敛圆，若函数 $S(z)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n$ 的和函数，则

(1) 函数 $S(z)$ 在 C_R 内解析；

（2）幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$在$C_R$内可逐项求导任意次，即

$$S^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\left[(z-z_0)^n\right]^{(k)},\ k=1,2,\cdots;$$

（3）幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$可以在$C_R$内任一曲线$C$上逐项积分，即

$$\int_C S(z)dz=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_C c_n\left(z-z_0\right)^n dz.$$

4.3 解析函数的泰勒级数展开

一个幂级数的和函数在其收敛圆内为一个解析函数，那么，一个解析函数是否可以展开成幂级数呢？本节就来讨论这个问题.

4.3.1 解析函数的泰勒展开式

定理 4.11 设函数$f\left(z\right)$在圆域$D:\left|z-z_0\right|<R$内解析，则在此圆域内$f\left(z\right)$可以展开成幂级数

$$f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n, \tag{4.7}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}\left(z_0\right)}{n!},\ n=0,1,\cdots,$$

C为任意圆周$\left|z-z_0\right|=\rho<R$，并且此展开式唯一.

证明 设z是D任意一点，在D内作圆周C：$\left|\xi-z_0\right|=\rho<R$，使得$\left|z-z_0\right|<\rho$（见图 4.1），则由柯西积分公式，得：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi. \tag{4.8}$$

因为$|z-z_0|<\rho$，即$\left|\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|=q<1$，所以

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}}$$

$$=\frac{1}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^{n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}.$$

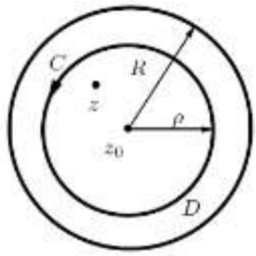

图 4.1

将此式代入(4.8)，并由幂级数性质，得：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left[f(\xi)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right]d\xi$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ n=0,1,\cdots.$$

设 $f(z)$ 另有一展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}d_n(z-z_0)^n,$$

由幂级数的逐项可导性，对上式求各阶导数，得：

$$f^{(n)}(z)=\sum_{k=n}^{+\infty}k!d_k(z-z_0)^{k-n},$$

当 $z=z_0$ 时，$d_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=c_n$，从而得 $f(z)$ 在 z_0 点的展开式唯一.

上述定理称为泰勒(Taylor)定理， 式(4.7)称为函数 $f(z)$ 在点 z_0 的泰勒展开式，其中的 c_n 称为 $f(z)$ 的泰勒系数，式(4.7)右端的级数称为泰勒级数.

由证明过程可知，上述定理中的圆 C 的半径可以任意增大，只要使 C 在 D 内即可，而且 D 也不一定非是圆域不可，因此对于在区域 D （不一定是圆域)内解析的函数 $f(z)$ 有下

面的定理：

定理 4.12 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 为 D 内任意一点，R 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离，则当 $\left|z-z_0\right|<R$ 时，$f(z)$ 可展开成幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n,$$

其中，$c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$，$n=0,1,\cdots$，并且此展开式唯一.

泰勒定理的重要性在于它圆满地解决了以下两个问题：

（1）解决了将解析函数展开成幂级数的三个基本理论问题：一是在何处可展开，二是如何展开，三是展开式是否唯一.（2）解决了解析函数与幂级数是否等价的问题，即一个函数为解析函数的又一等价条件：函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析的充分必要条件是，$f(z)$ 在 D 内任意一点 z_0 的某个邻域内可展开成幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n,\ c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ n=0,1,\cdots.$$

幂级数的收敛半径与幂级数的和函数有着密切的联系. 事实上，若 $f(z)$ 在点 z_0 解析，则函数 $f(z)$ 在 z_0 点的泰勒级数的收敛半径等于由收敛圆的中心点 z_0 到 $f(z)$ 离 z_0 最近的一个奇点之间的距离，即 $R=\min\{|\ z_k-z_0\ |\}$，其中：z_k 为函数 $f(z)$ 的奇点.

例题 4.9 设函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{\cos z}$ 的泰勒展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$，求其收敛半径.

解 由于 $\dfrac{e^z}{\cos z}$ 的奇点为 $z_k=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，与幂级数中心最近的奇点为 $z_0=\dfrac{\pi}{2}$，因此，收敛半径 $R=\dfrac{\pi}{2}$.

利用泰勒级数展开的唯一性，将一个函数展开为泰勒级数， 常用方法为直接法和间接法. 所谓直接法就是直接通过计算系数 $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$，$n=0,1,\cdots$，将函数 $f(z)$ 在点 z_0

展开为幂级数； 间接法是指利用已知函数的泰勒展开式及幂级数的代数运算、复合运算和逐项求导、逐项求积等方法将函数展开成幂级数.

例题 4.10 求 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在点 $z=0$ 处的泰勒展开式.

解 因为函数 $f(z)$ 的奇点为 $\pm i$，距点 $z=0$ 的距离(最近)等于 1，所以 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在点 $z=0$ 的泰勒展开式收敛半径为 $R=1$.

直接利用展开式：

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n,\quad |z|<1$$

得

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n},\quad |z|<1.$$

4.3.2 初等函数的泰勒展开式

例题 4.11 求指数函数 e^z 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

解 利用直接展开法，因为：$\left(e^z\right)^{(n)}=e^z, n=0,1,2,\cdots$，所以展开式中的系数 c_n 由公式直接计算：

$$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{n!},\ \ n=0,1,2,\cdots,$$

从而

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots.$$

由于函数 e^z 在全平面上解析，从而幂级数的收敛半径 $R=+\infty$.

例题 4.12 求三角函数 $\sin z$ 和 $\cos z$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

解 利用间接展开法. 由于

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\cdots.$$

$$\cos z=(\sin z)'$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}+\cdots.$$

由于函数$\sin z$和$\cos z$在全平面上解析，从而幂级数的收敛半径均为$R=+\infty$.

例题 4. 13 求函数$\ln(1+z)$ 在$z=0$处的泰勒展开式.

解 因为$\ln(1+z)$在$z=-1$向左沿负实轴剪开的复平面内解析，而$z=-1$是它距$z=0$最近的奇点，所以它在$|z|<1$内可展开成幂级数.

由于

$$[\ln(1+z)]'=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1,$$

在收敛圆$|z|=1$内，任取一条从 0 到z的积分路线C，对上式两端沿C逐项积分，有

$$\ln(1+z)=\int_0^z\frac{1}{1+\xi}d\xi=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^z\xi d\xi$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n},\quad |z|<1.$$

例题 4. 14 求函数$f(z)=\arctan z$在$z=0$处的泰勒展开式.

解 由于$(\arctan z)'=\dfrac{1}{1+z^2}$，故

$$\arctan z=\int_0^z\frac{1}{1+\xi^2}d\xi=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^z\xi^{2n}d\xi$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\quad |z|<1.$$

例题 4. 15 求函数$f(z)=\dfrac{1}{z^3}$在$z=1$处的泰勒展开式.

解 利用间接展开法，

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{1}{z^3}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1+z-1}\right)\\ &=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(z-1\right)^n\right]\\ &=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n n(n-1)}{2}\left(z-1\right)^{n-2},\quad |z-1|<1. \end{aligned}$$

以上例子给出了将函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 点展开成幂级数的基本方法，把一个复变函数展开成幂级数的方法与实变函数的情形基本一致，其中，经常利用展开式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n,\quad |z|<1.$$

除直接法和间接法，有时也利用比较系数法，对函数 $f(z)$ 进行幂级数展开.

例题 4. 16 求函数 $f(z)=\sec z$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

解 因为函数 $f(z)=\sec z=\dfrac{1}{\cos z}$ 在 $|z|<\dfrac{\pi}{2}$ 内解析，且为偶函数，故在 $|z|<\dfrac{\pi}{2}$ 内，$f(z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒级数可设为：

$$f(z)=c_0+c_2z^2+c_4z^4+\cdots+c_{2n}z^{2n}+\cdots.$$

由 $\cos z$ 的泰勒展开式及幂级数在收敛圆内绝对收敛的性质，有

$$\begin{aligned} 1&=\cos z\cdot\sec z\\ &=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\right)\left(c_0+c_2z^2+c_4z^4+\cdots\right)\\ &=c_0+\left(c_2-\frac{c_0}{2!}\right)z^2+\left(c_4-\frac{c_2}{2!}+\frac{c_0}{4!}\right)z^4+\cdots+\left(c_{2n}-\frac{c_{2n-2}}{2!}+\frac{c_{2n-4}}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{c_0}{(2n)!}\right)z^{2n}+\cdots. \end{aligned}$$

根据幂级数展开的唯一性，比较两边系数，得

$$\begin{aligned} &c_0=1,\ c_2-\frac{c_0}{2!}=0,\ c_4-\frac{c_2}{2!}+\frac{c_0}{4!}=0,\ \cdots,\\ &c_{2n}-\frac{c_{2n-2}}{2!}+\frac{c_{2n-4}}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{c_0}{(2n)!}=0,\ n\ge 1, \end{aligned}$$

即

$$c_0=1,\ c_2=\frac{1}{2!},\ c_4=\frac{5}{4!},\ \cdots,$$

从而

$$\sec z = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{5}{4!}z^4 + \cdots,\ |z| < \frac{\pi}{2}.$$

4.4 解析函数的罗朗级数展开

4.4.1 罗朗级数的概念

考虑函数 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$， 由于 $z=0$ 和 $z=1$ 为其奇点，因而 $f(z)$ 在 $z=0$ 和 $z=1$ 的邻域内不解析．因此，在点 $z=0$ 和 $z=1$ 的邻域内不能表示成幂级数，即：不能在圆域内展开成幂级数. 虽然如此，但可设法将它表示成其他形式的函数项级数．不难推得： 当 $0<|z|<1$ 时，有

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n-1},\ 0<|z|<1. \end{aligned}$$

同理，在圆环 $0<|z-1|<1$ 内，有

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(z-1\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(z-1\right)^{n-1},\quad 0<|z-1|<1. \end{aligned}$$

以上两个级数既含正幂项又含负幂项．另外，不难发现， $f(z)$ 在圆环域 $0<|z|<1$ 与 $0<|z-1|<1$ 内均解析．至此，人们自然提出如下两个问题：(1)既含正幂项又含负幂项的级数有什么性质？ (2)在环域 $r<|z-z_0|<R$ 内解析的函数与既含正幂项又含负幂项的级数有无必然联系？

定义 4.10 称既有正幂项又有负幂项的双边幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \tag{4.9}$$

为罗朗级数. 如果两幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 均收敛，则称罗朗级数(4.9)

收敛.

显然，对于正幂项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ ，其收敛域为一个圆域 $|z-z_0|<R$. 对负幂项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ ，可令：$\xi=(z-z_0)^{-1}$，则

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}=\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\xi^n.$$

此级数为关于 ξ 的正幂项级数，它在圆域 $|\xi|<R_1$ 内收敛，即在 $|z-z_0|>\dfrac{1}{R_1}=r$ 内收敛. 因此，罗朗级数(4.9)在环域 $r<|z-z_0|<R$ 内收敛，其中：r 可以为 0 ，R 可以是 $+\infty$；在圆环外发散. 但在圆环的边界：$|z-z_0|=r$ 和 $|z-z_0|=R$ 上可能收敛也可能发散.

可以证明：在收敛圆环内，罗朗级数(4.9)的和函数解析，且可以逐项求导和逐项积分.

例题 4.17 求罗朗级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-2)^{-n}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\frac{z}{2}\right)^n$$

的收敛域.

解 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-2)^{-n}$ 在区域 $|z-2|>1$ 内收敛；而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\frac{z}{2}\right)^n$ 在 $|z-2|<2$ 内收敛，从而，罗朗级数的收敛域为：$1<|z-2|<2$.

4.4.2 函数的罗朗展开式

在圆环域 $r<|z-z_0|<R$ 内处处解析的函数能否展开形如(4.9)的级数？以下定理给出了回答.

定理 4.13 设函数 $f(z)$ 在圆环域 $r<|z-z_0|<R$ （$r\ge 0,\ R<+\infty$）内解析，则 $f(z)$ 在此圆环域内可以唯一地展开为罗朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n\ , \qquad (4.10)$$

其中：

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\text{，}\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\text{，}$$

C 为圆环内绕 z_0 任意一条正向简单闭曲线.

证明 设 z 为圆环域 $r<|\xi-z_0|<R$ 内任意取定的一点，则总可以找到含于上述圆环内的两个圆周 C_1：$|\xi-z_0|=r_1>r$ 和 C_2：$|\xi-z_0|=r_2<R$，使 z 含于圆环 $r_1<|\xi-z_0|<r_2$ 内（见图 4.2）. 因 $f(\xi)$ 在闭圆环 $r_1\le|\xi-z_0|\le r_2$ 上解析，由柯西积分公式，得

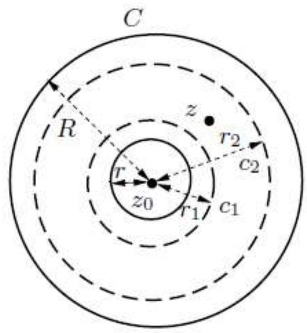

图 4.2

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2+C_1^-}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\ .$$

对于第一个积分，因为在 C_2 上，$\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|=q_1<1$，从而

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\text{，}$$

因此

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\right](z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n\text{，}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,\ n=0,1,2,\cdots.$$

对于第二个积分，因为在 C_1 上，$\left|\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right|=q_2<1$，

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=-\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\xi-z_0}{z-z_0}}$$

$$=-\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\xi-z_0)^{-n+1}}(z-z_0)^{-n},$$

于是

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}}d\xi\right](z-z_0)^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}c_{-n}(z-z_0)^n,$$

其中

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}}d\xi.$$

由复连通区域的柯西定理，得

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,\ \ n=0,1,2,\cdots,$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}}d\xi,\ n=1,2,\cdots.$$

从而

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n,\ \ r<|z-z_0|<R,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,\ \ n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

唯一性 设 $f(z)$ 在圆环 $r<|z-z_0|<R$ 内又可展成下式：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n'(z-z_0)^n,$$

则它在圆环内一致收敛，从而在圆周 $C:|\xi-z_0|=\rho\quad(r<\rho<R)$ 上一致收敛. 上式两端乘

以C上的有界函数$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\left(z-z_0\right)^{k+1}}$（$k$为任意整数）仍然一致收敛，故可以逐项积分，

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f\left(z\right)}{\left(z-z_0\right)^{k+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n'\oint_C\left(z-z_0\right)^{n-k-1}d\xi\ ,$$

利用结论$\oint_C\left(z-z_0\right)^{n-k-1}dz=\begin{cases}2\pi i, n=k\\0,\quad n\neq k\end{cases}$ 可得

$$c_n=c_n',\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

注 4.3 需要指出的是，虽然当$n\geq0$时，罗朗级数的系数与泰勒级数的系数的积分形式一样，但它却不等于$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$，这是因为函数$f(z)$在C所围的区域内非处处解析.

直接由c_n的积分表达式求罗朗级数的系数比较复杂，通常利用罗朗展开的唯一性，我们可以用任何简便的方法求罗朗级数系数. 最常见的方法是利用简单初等函数的泰勒级数或罗朗级数展开，以及幂级数的运算来求较复杂函数的罗朗级数展开式，如利用$\frac{1}{1-z}$，e^z，三角函数等的泰勒或罗朗级数展开式.

例题 4.18 试将函数$f\left(z\right)=\frac{\sin z}{z}$在$0<|z|<\infty$内展开为罗朗级数.

解 因为

$$\sin z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad |z|<+\infty\ ,$$

所以

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!},\quad 0<|z|<+\infty\ .$$

例题 4.19 试将函数$f\left(z\right)=e^z+e^{\frac{1}{z}}$在$0<|z|<\infty$内展开为罗朗级数.

解 因为

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!},\ |z|<+\infty\ ,$$

所以

$$\begin{aligned} f(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{|n|!} z^n \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{|n|!} z^n \\ &= 1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|n|!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty . \end{aligned}$$

将函数 $f(z)$ 展开成罗朗级数，通常有两种给出问题的方式：

（1）将函数 $f(z)$ 在圆环域 $r < |z - z_0| < R$ 内展开为罗朗级数；

（2）将函数 $f(z)$ 在点 z_0 处展开成罗朗级数，即已知函数 $f(z)$ 及点 z_0，将 $f(z)$ 在点 z_0 的去心邻域内展开成罗朗级数.

第一种情况，先验证函数 $f(z)$ 在圆环域 $r < |z - z_0| < R$ 内解析，然后再设法展开，通常用间接展开法；第二种情况应先找出以点 z_0 为中心的圆环域，使函数 $f(z)$ 在此圆环域内解析，而圆环域的确定取决于点 z_0 与函数 $f(z)$ 各奇点之间的距离. 以点 z_0 为心，以这些距离为半径作同心圆，就可依次找出 $f(z)$ 的一个个解析圆环域.

例题 4.20 将 $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-1)}$ 在 $0 < |z-1| < 1$ 内展开成以 $z = 1$ 为中心的罗朗级数.

解 因为 $\dfrac{1}{z^2} = -\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{z}\right)$，$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1+(z-1)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n, |z-1| < 1$，

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= -\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n\right] = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n (z-1)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n (z-1)^{n-1}, \end{aligned}$$

从而

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1}$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-2}.$$

例题 4.21　将函数 $f(z)=\dfrac{4}{z^2-6z+5}$ 在以 $z=2$ 为心的邻域内展开成幂级数或罗朗级数.

解　由于 $f(z)=\dfrac{4}{z^2-6z+5}=\dfrac{1}{z-5}-\dfrac{1}{z-1}$，奇点为 $z=1$ 和 $z=5$，函数 $f(z)$ 在以 $z=2$ 为心的邻域 $|z-2|<1$，$1<|z-2|<3$ 和 $3<|z-2|<+\infty$ 内解析（见图 4.3）. 用间接法展开.

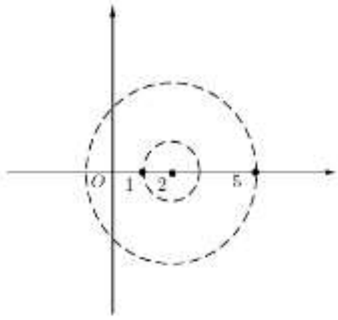

图 4.3

（1）$|z-2|<1$

$$f(z)=\frac{4}{z^2-6z+5}=\frac{1}{z-5}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{3-(z-2)}-\frac{1}{z-2+1}$$
$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$
$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n\right](z-2)^n.$$

（2）$1<|z-2|<3$

$$f(z)=-\frac{1}{3-(z-2)}-\frac{1}{z-2+1}$$
$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^n-\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-2}\right)^n$$
$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}+(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}\right].$$

（3）$3<|z-2|<+\infty$

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)-3}-\frac{1}{z-2+1}$$
$$=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{(z-2)^n}-\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-2}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[3^n-(-1)^n\right]\frac{1}{(z-2)^{n+1}}.$$

4.5 解析函数的孤立奇点与分类

4.5.1 孤立奇点

定义 4.11 若函数 $f(z)$ 在奇点 $z=z_0$ 的某去心邻域 $0<\left|z-z_0\right|<R$ 内解析，则称点 z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点.

例如，依定义知：$z=0$ 均为函数 $\frac{\sin z}{z}$，$\frac{1}{z^2}$ 和 $e^{\frac{1}{z}}$ 的孤立奇点；$z=1$ 为函数 $\sin\frac{z}{1-z}$ 的孤立奇点. 而 $z=0$ 不是函数 $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}$ 的孤立奇点. 事实上，取 $z_n=\frac{1}{n}$，$n=\pm 1$，± 2，$\cdots$，则由于 $\sin\frac{\pi}{z_n}=\sin n\pi=0$，从而 z_n 均为 $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}$ 的奇点. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$， 所以 $z=0$ 不是函数 $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}$ 的孤立奇点.

易知，若 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则 $f(z)$ 在圆环域 $r<\left|z-z_0\right|<R$ 内可以展开为罗朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n.$$

显然，$\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ 在 $\left|z-z_0\right|<R$ 内解析，称 $\varphi(z)$ 为 $f(z)$ 的罗朗级数的解析部分；$\psi(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ 在 $\left|z-z_0\right|>r$ 内解析，称 $\psi(z)$ 为 $f(z)$ 的罗朗级数的主要部分.

下面我们针对函数在孤立奇点处的罗朗展开式的不同情形，对孤立奇点作分类.

定义 4.12 设点 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，(1) 若 $f(z)$ 在点 z_0 的罗朗级数的主要部分 $\psi(z)$ 为零，则称点 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点；(2) 若 $f(z)$ 在点 z_0 的罗朗级数的主要部分 $\psi(z)$ 有有限多项，设为

$$\psi(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{-m+1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)},\ c_{-m}\neq 0,$$

则称点 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点；(3) 若 $f(z)$ 在点 z_0 的罗朗级数的主要部分 $\psi(z)$ 有无穷多项，则称点 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点.

注 4.4 仅当 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点时，才可对其类型进行分类.

例题 4.22 试确定以下函数在奇点 $z=0$ 处的类型：(1) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$；(2) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2}$；(3) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

解 (1)因为函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $z=0$ 的罗朗展开式为

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!},\quad 0<|z|<+\infty,$$

由于主要部分 $\psi(z)=0$，所以 $z=0$ 为可去奇点.

(2) 因为函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 在 $z=0$ 的罗朗展开式为

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-2}}{n!},\quad 0<|z|<+\infty,$$

由于主要部分 $\psi(z)=\dfrac{1}{z}$，因此，$z=0$ 为一阶极点.

(3) 因为函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 的罗朗展开式为

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!z^n},\quad 0<|z|<+\infty,$$

由于主要部分 $\psi(z)$ 有无穷多项，因此，$z=0$ 为本性奇点.

虽然根据函数 $f(z)$ 在点 z_0 的罗朗级数的主要部分 $\psi(z)$ 可确定其孤立奇点 z_0 的类型，但对于某些函数而言，求出其罗朗级数本身就非常困难，因此，我们设法寻找其他更简便方法来确定孤立奇点的类型.

4.5.2 可去奇点

定理 4.14 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列三个条件等价：（1）点 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点；（2）$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 存在且有限；（3） 函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有界.

证明 $(1)\Rightarrow(2)$ 因为点 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，所以，$f(z)$ 的主要部分为零，即

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots c_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

从而 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$ 为有限值.

$(2)\Rightarrow(3)$ 由极限性质知，函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有界.

$(3)\Rightarrow(1)$ 不妨设存在常数 $M>0$， 当 z 落在 $0<|z-z_0|<R$ 时，$|f(z)|\le M$，在圆环 $0<|z-z_0|<R$ 内任取一圆 $C_r:|z-z_0|=r<R$，由罗朗展开式中系数的积分计算公式，得：

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz,\quad z=1,2,\cdots,$$

从而

$$\begin{aligned}|c_{-n}|&\le\frac{1}{2\pi}\oint_{C_r}\frac{|f(z)|}{|(z-z_0)^{-n+1}|}|dz|\\&\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{-n+1}}\cdot 2\pi r=Mr^n\to 0\ \ (r\to 0).\end{aligned}$$

由此得 $c_{-1}=c_{-2}=\cdots=0$，即，$f(z)$ 的主要部分为零，所以点 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点.

例题 4.23 试确定函数 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$ 在奇点 $z=0$ 处的类型.

解 对于函数 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$，直接作罗朗展开很困难，但由于

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}\right)&=\lim_{z\to 0}\frac{z-e^z+1}{z(e^z-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{1-e^z}{e^z-1+ze^z}\\&=\lim_{z\to 0}\frac{-e^z}{(2+z)e^z}=-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

所以，$z=0$ 是可去奇点.

4.5.3 极点

首先给出零点的概念及判别.

定义 4.13 若不恒为零的解析函数 $f(z)$ 能表示成

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z),\tag{4.11}$$

其中 $g(z)$ 在点 z_0 处解析，且 $g(z_0)\neq 0, m$ 为某一正整数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点.

例如， $z=1$ 和 $z=2$ 分别是函数 $f(z)=(z-1)(z-2)^3$ 的一阶和三阶零点.

定理 4.15 设 $f(z)$ 在点 z_0 处解析，则 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点的充要条件是

$$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\ \ f^{(m)}(z_0)\neq 0. \qquad (4.12)$$

证明 充分性

由函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析性可知， $f(z)$ 在 z_0 可作泰勒展开

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

由式（4.12）得，上式可表示为

$$f(z)=\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{f^{(\mathrm{n})}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=(z-z_0)^m g(z),$$

其中 $g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n+m)}}{(n+m)!}(z-z_0)^n$ 在点 z_0 处解析，且 $g(z_0)=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0$, 由定义知 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点.

必要性请读者自己证明.

以下两定理给出了判断孤立奇点为极点的充要条件.

定理 4.16 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列两个条件等价：（1） $f(z)$ 在点 z_0 处的罗朗展开式主要部分 $\psi(z)$ 只有有限项；（2） $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

证明 $(1)\Rightarrow(2)$

设 $f(z)$ 在点 z_0 处的罗朗展开式主要部分 $\psi(z)$ 有 m 项，则 $f(z)$ 的罗朗展开式为

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{-m+1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots,$$

其中 $c_{-m}\neq 0$ ，则 $f(z)$ 可表示为

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m},$$

其中 $g(z)$ 在 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$ 内解析，且 $g(z_0)=\mathrm{c}_{-m}\neq 0$，于是

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}=\infty .$$

$(1)\Rightarrow(2)$ 令 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$，则

$$\lim_{z\to z_0} g(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0 .$$

由定理 4. 14 知 z_0 为 $g(z)$ 的可去奇点，补充 $g(z_0)=0$，从而 $g(z)$ 在 z_0 处解析，且 z_0 为 $g(z)$ 的零点，不妨设为 m 阶零点，即

$$\begin{aligned} g(z)&=a_m(z-z_0)^m+a_{m-1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots \\ &=(z-z_0)^m\left[a_m+a_{m-1}(z-z_0)+a_{m-2}(z-z_0)^2+\cdots\right] \\ &=(z-z_0)^m h(z)\,,\ (a_m\neq 0). \end{aligned}$$

显然，$h(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，且 $h(z_0)=a_m\neq 0$. 记 $\varphi(z)=\dfrac{1}{h(z)}$，则 $\varphi(z)$ 在 z_0 的某个邻域内解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$. 于是，将 $\varphi(z)$ 在 z_0 点泰勒展开后得：

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n \\ &=\frac{c_0}{(z-z_0)^m}+\frac{c_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+c_m+c_{m+1}(z-z_0)+\cdots, \end{aligned}$$

其中 $c_0=\varphi(z_0)=\dfrac{1}{h(z_0)}\neq 0$，由此可见，$z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点.

从上述定理的证明过程中可知，若 z_0 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点，则 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，反之亦然. 事实上，若 z_0 为 $f(z)$ 为 m 阶极点，则

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots, \\ &=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \end{aligned}$$

其中

$$g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + c_0(z - z_0)^m + c_1(z - z_0)^{m+1} + \cdots,$$

且 $g(z_0) = c_{-m} \neq 0$，因此，z_0 为 $\dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{(z - z_0)^m}{g(z)}$ 的 m 阶零点. 由此即得如下定理

定理 4.17 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列两个条件等价：（1）z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点；（2）z_0 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点.

上述定理表明，求 $f(z)$ 的极点阶数问题可转化为求 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的零点的阶数问题.

例题 4.24 在复平面内找出函数 $f(z) = \dfrac{z^2(z^2-1)}{(\sin \pi z)^2}$ 的孤立奇点，并确定它们的类型. 若为极点，指出它的阶数.

解 $f(z)$ 在复平面上的奇点为；$z_k = k, \left(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right)$ 由于

$$\left(\sin \pi z\right)'\Big|_{z=k} = \pi \cos \pi z\big|_{z=k} = (-1)^k \pi \neq 0.$$

所以，$z_k = k, \left(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,\right)$ 为 $\sin \pi z$ 的一阶零点，因而是 $\left(\sin \pi z\right)^2$ 的二阶零点. 因此，在这些奇点中除 $z = 0, \pm 1$ 外，都是 $f(z)$ 的二阶极点.

对于奇点 $z = 0$，由于

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z^2(z^2-1)}{(\sin \pi z)^2} = \lim_{z \to 0} \frac{z^2-1}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi^2},$$

所以，$z = 0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点.

由于 $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$，所以，$z = \pm 1$ 为 $f(z)$ 的一阶极点.

值得注意的是，在求函数的极点阶数时，不能光看表面形式就盲目作出结论，例如，上例中，$z = \pm 1$ 虽然是 $\left(\sin \pi z\right)^2$ 的二阶零点，但由于 $z = \pm 1$ 也是分子 $z^2 - 1$ 的一阶零点，所以 $z = \pm 1$ 为 $f(z)$ 的一阶极点. 类似的例子有：$\dfrac{e^z - 1}{z^2}$，从形式上看 $z = 0$ 为二阶极点，

但由于 $z=0$ 为 e^z-1 的一阶零点，所以 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的一阶极点.

4.5.4 本性奇点

由可去奇点和极点的充要条件即可得如下结论.

定理 4.18 设点 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列两个条件等价：（1）点 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点；（2）极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在，即当 $z\to z_0$ 时，$f(z)$ 既不趋于有限值也不趋于 ∞.

例题 4.25 在复平面上找出函数 $f(z)=\dfrac{1}{z-1}e^{\frac{1}{z}}$ 的孤立奇点，并确定它们的类型.

解 $f(z)$ 的孤立奇点为：$z=0$ 和 $z=1$. 由于 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{z-1}e^{\frac{1}{z}}$ 不存在, $\lim\limits_{z\to 1} f(z)=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{1}{z-1}e^{\frac{1}{z}}=\infty$，因此，$z=0$ 为本性奇点，$z=1$ 为极点且为一阶极点.

综上所述，若 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则可根据 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 的不同情形判别孤立奇点的类型.

例题 4.26 在复平面上找出函数 $f(z)=\dfrac{z}{e^z-1}e^{\frac{1}{z-1}}$ 的孤立奇点，并确定它们的类型.

解 由 $e^z-1=0$ 得 $z=Ln1=2k\pi i\,,\left(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right)$，$f(z)$ 的所有孤立奇点为：$z=0$，$z=1$ 及 $z=2k\pi i\,,\left(k=\pm 1,\pm 2,\cdots\right)$.

由于

$$\lim_{z\to 0}\frac{ze^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}=\lim_{z\to 0}\frac{ze^{\frac{1}{z-1}}}{z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots}=\lim_{z\to 0}\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{1+\dfrac{z}{2!}+\cdots}=e^{-1}\,,$$

所以，$z=0$ 为 $f(z)$ 可去奇点.

由 $\left(e^z-1\right)'\Big|_{z=2k\pi i}=e^{2k\pi i}=1\neq 0$ 知 $z=2k\pi i\,,\left(k=\pm 1,\pm 2,\cdots\right)$ 为 e^z-1 的一阶零

点，而$\left(ze^{\frac{1}{z-1}}\right)\Bigg|_{z=2k\pi i} \neq 0$，故$z=2k\pi i\,,\left(k=\pm1\,,\pm2\,,\cdots\right)$ 为 $f(z)$ 一阶极点.

由于$\lim\limits_{z\to1}\dfrac{z}{e^z-1}e^{\frac{1}{z-1}}$不存在，所以，$z=1$为 $f(z)$ 的本性奇点.

4.5.5 函数在无穷远点的性态

定义 4.14 设函数 $f(z)$ 在区域$D_z: R<|z|<+\infty\ (R\geq0)$ 内解析，则称点$z=\infty$为函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点.

若无特殊声明，则约定点$z=\infty$为任意函数的奇点.

设$z=\infty$为函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点，作变换$\xi=\dfrac{1}{z}$，则函数

$$g(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)=f(z)$$

在区域$D_\xi: 0<|\xi|<\dfrac{1}{R}$ 内解析（规定：若$R=0$，则$\dfrac{1}{R}=+\infty$），从而，点$\xi=0$为函数 $g(\xi)$ 的一个孤立奇点，且

（1）对应于扩充复平面上无穷远点的邻域D_z，有ξ平面上原点的邻域D_ξ；

(2) 在对应的点 z 与ξ, 有 $g(\xi)=f(z)$ ；

(3) $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\lim\limits_{\xi\to0}g(\xi)$.

因此，可以用函数 $g(\xi)$ 在$\xi=0$处奇点的类型来定义函数 $f(z)$ 在$z=\infty$处的奇点类型.

定义 4.15 设$\xi=0$为函数 $g(\xi)$ 的可去奇点、极点(m阶)或本性奇点，则相应地称 $z=\infty$为函数 $f(z)$ 的可去奇点、极点（m阶)或本性奇点.

假设函数 $f(z)$ 在区域$D_z: R<|z|<+\infty$内解析，则在此区域内 $f(z)$ 可展开为罗朗级数

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_nz^n+c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}z^{-n}\,. \tag{4.13}$$

于是，函数 $g(\xi)$ 在区域$D_\xi: 0<|\xi|<\dfrac{1}{R}$内的罗朗展开式为：

$$g(\xi)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\xi^{-n}+c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}\xi^{n}\,. \tag{4.14}$$

对照（4.13）和（4.14）可知，函数 $f(z)$ 的罗朗展开式中的正幂项就是函数 $g(\xi)$ 的罗朗展开式的负幂项，这说明，对于无穷远点而言，函数的性态与其罗朗展开式之间的关系同有限点的情况类似，所不同的是由函数 $f(z)$ 在无穷远处的罗朗展开式的正幂项确定，即

（1）若 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的罗朗展开式中不含正幂项，则 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点；

(2) 若 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的罗朗展开式中含有限个正幂项，且最高正幂为 z^m，则 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点；

(3)若 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的罗朗展开式中含无穷个正幂项，则 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的本性奇点.

无穷远点的奇点类型也可以用极限来判定.

定理 4.19 设 $z=\infty$ 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，

(1) 若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 为有限值，则 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点；

(2) 若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$，则 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的极点；

(3) 若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 不存在，也不为 ∞，则 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的本性奇点.

例题 4.27 试确定下列函数在无穷远点的奇点的类型：

(1) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$；(2) $f(z)=\mathrm{e}^{z-\frac{1}{z}}$.

解 (1) 因为

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{(z-1)(z-2)}=0,$$

所以，$z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点.

(2) 因为

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\lim_{z\to\infty}\mathrm{e}^{z-\frac{1}{z}}\text{不存在，也不为}\infty,$$

所以，$z=\infty$ 为 $f(z)$ 的本性奇点.

例题 4.28 在扩充复平面上，找出函数 $f(z)=cotz-\frac{1}{z}$ 的奇点并确定其类型.

解 扩充复平面上，函数 $f(z)$ 的所有奇点为 $z_k=k\pi,\left(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$ 及 $z=\infty$. 由于 $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=\lim\limits_{k\to\infty}k\pi=\infty$，所以，$z=\infty$ 为 $f(z)$ 的非孤立奇点.

由于

$$\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{z\to0}\frac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}=\lim_{z\to0}\frac{-z\sin z}{2z}=0,$$

所以，$z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点.

由于 $z_k=k\pi\left(k=\pm1,\pm2,\cdots\right)$ 为 $\frac{1}{z}$ 的解析点，$\tan z$ 的一阶零点，所以 $z_k=k\pi\left(k=\pm1,\pm2,\cdots\right)$ 为 $f(z)$ 的一阶极点.