20241114 作业8

8.(1). $z=1$, $z=0$, $z=-1$ 为奇点

$z=1$ 为三阶极点 $z=0$ 为一阶极点, $z=-1$ 为一阶极点

(3). $z=0$ 及 $k\pi$, $k=\pm1, \pm2, \cdots$

∴ 均为一阶极点

(5). $z=0$ 为奇点

$\lim\limits_{z\to0} e^{-z}\sin\frac{1}{z} = \lim\limits_{z\to0}\sin\frac{1}{z}$ 不存在

∴ $z=0$ 为本性奇点

(7). 原式 $= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sin(z-\frac{\pi}{4})}$

∴ $z-\frac{\pi}{4}=k\pi$ 即 $z=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 为奇点

均为一阶奇点

(9). $z=0$ 和 $z=2ki$, $k=\pm1, \pm2, \cdots$ 为奇点

$z=0$ 时

$\lim\limits_{z\to0}\frac{z-\sin z}{z^2(e^{\pi z}-1)} = \frac{\frac{1}{6}z^3}{z^2\cdot\pi z} = \frac{1}{6\pi}$ ∴ $z=0$ 为可去奇点

$z=2ki$ 时, 为一阶极点

No.

Date.

1(10). $1+z^n=0$ 得 $z=(-1)^{\frac{1}{n}}$ 为奇点

∵ 设 $g(z)=1+z^n$ ∴ $g((-1)^{\frac{1}{n}})=0$

$g'(z)=nz^{n-1}$ $g'((-1)^{\frac{1}{n}})=n(-1)^{1-\frac{1}{n}}\neq 0$

∴ $z=(-1)^{\frac{1}{n}}$ 为 $g(z)$ 一阶零点

∴ 为一阶极点

9. (1). $\lim\limits_{z\to\infty}\sin\frac{1}{1-z}=0$ ∴ 为可去奇点

(3). 令 $\zeta=\frac{1}{z}$

$f(z)=g(\zeta)=e^{\zeta}+\frac{1}{\zeta^2}-4$

$\zeta=0$ 为 $g(\zeta)$ 的二阶极点

∴ 无穷远点为原函数的二阶极点

(5). $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z^2}{3+z^2}=1$ ∴ 无穷远点为可去奇点

(7). 令 $\zeta=\frac{1}{z}$

$f(z)=g(\zeta)=e^{\frac{1}{\zeta}}\cos\zeta$

∴ $\lim\limits_{\zeta\to 0}g(\zeta)$ 不存在

即无穷远点为本性奇点

10. $1-\cos z=0$ 即 $z=2k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 或 $z=0$.

$z^2=0$ 即 $z=0$.

∴ 奇点为 $z=0$ 或 $2k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 和 ∞

1°. $z=0$ 为二阶极点

2°. $z=2k\pi$ 时 $-\frac{z^2}{2}\neq0$.

记 $g(z)=1-\cos z$, $g(2k\pi)=0$.

$g'(z)=\sin z$, $g'(2k\pi)=0$.

$g''(z)=\cos z$, $g''(2k\pi)=1\neq0$.

∴ $z=2k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为二阶极点.

3°. ∵ $z_k=2k\pi$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k=\infty$

∴ ∞ 不是 $f(z)$ 的孤立奇点

11. (1). 为 $(m+n)$ 阶极点

(2). 当 $m>n$ 时, 为 $(m-n)$ 阶极点.

当 $m\leq n$ 时, 为可去极点.

(3). 当 $f(z)\neq-g(z)$ 时, 为 $\max\{m,n\}$ 阶极点

当 $f(z)=-g(z)$ 时, 为可去奇点

(4). 当 $m\neq n$ 时, 为 $|m-n|$ 阶极点

当 $m=n$ 时, 为可去奇点

$$f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$$

12.(1) $f'(z)=\frac{1}{(1-z)^2}e^{\frac{1}{1-z}}$

即 $f(z)=(1-2z+z^2)\cdot\frac{1}{(1-z)^2}\cdot e^{\frac{1}{1-z}}$

即 $f(z)=(1-2z+z^2)f'(z)$

(2) $\because f(z)=(1-2z+z^2)f'(z)$

$\therefore f'(z)=(2z-2)f'(z)+(1-2z+z^2)f''(z)$

即 $(3-2z)f'(z)=(1-2z+z^2)f''(z)$

$-2f'(z)+(3-2z)f''(z)=(2z-2)f''(z)+(z^2-2z+1)f^{(3)}(z)$

$\because f(0)=e$

$\therefore f'(0)=e$

$3f'(0)=f''(0)\quad \therefore f''(0)=3e$

$-2f'(0)+3f''(0)=-2f''(0)+f^{(3)}(0)\quad \therefore f^{(3)}(0)=13e$

$\therefore f(z)=e+ez+\frac{3}{2}ez^2+\frac{13}{6}ez^3+o(z^3)$

13.(1). $z^2+z-1=0\quad \therefore z=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore R=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(2). $(1-z-z^2)f(z)=1$

$\therefore f^{(n)}(z)(1-z-z^2)+nf^{(n-1)}(z)(-1-2z)+\frac{n(n-1)}{2}f^{(n-2)}(z)\cdot(-2)=0$

即 $f^{(n)}(z)(z^2+z-1)+nf^{(n-1)}(z)(2z+1)+n(n-1)f^{(n-2)}(z)=0$

即: $n!\,a_n(z^2+z-1)+n\cdot(n-1)!\,a_{n-1}(2z+1)+n(n-1)(n-2)!\,a_{n-2}=0$

令 $z=0$

$\therefore -a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=0$

Date.

即 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$\because a_0 = f(0) = 1, \quad a_1 = f'(0) = 1$

$\therefore a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$

(3). $\xi = z$ 为 $n+1$ 阶极点

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

又 $\because \dfrac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} = \dfrac{f(\xi)(1-\xi)}{(\xi-z)^{n+1}(1-\xi)}$

$$f(\xi)(1-\xi) = \frac{1-\xi}{1-\xi-\xi^2}$$

$$1+\xi^2 f(\xi) = 1 + \frac{\xi^2}{1-\xi-\xi^2} = \frac{1-\xi}{1-\xi-\xi^2}$$

$\therefore f(\xi)(1-\xi) = 1 + \xi^2 f(\xi)$

即: $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r} \dfrac{1+\xi^2 f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}(1-\xi)}$

$\therefore \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r} \dfrac{1+\xi^2 f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}(1-\xi)} d\xi = \dfrac{f^{(n)}(z)}{n!}$

14、令 $z=e^{i\theta}$

$$z+\frac{1}{z}=e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta.$$

$$\cosh\left(z+\frac{1}{z}\right)=\cosh(2\cos\theta)$$

利用 Graf 加法定理：

$$e^{z\cos\theta}=I_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}I_n(z)\cos(n\theta),$$ 其中 $I_n(z)$ 为第一类修正贝塞尔函数.

又 $\because \cosh x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$

$$\therefore \cosh(2z\cos\theta)=I_0(2z)+2\sum_{n=1}^{\infty}I_n(2z)\cos(n\theta)$$

令 $z=1$ $\quad\therefore \cosh(2\cos\theta)=I_0(2)+2\sum_{n=1}^{\infty}I_n(2)\cos(n\theta)$

又 $\because \cos n\theta=\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}=\frac{1}{2}(z^{n}+z^{-n})$

代入：

$$\cosh\left(z+\frac{1}{z}\right)=I_0(2)+\sum_{n=1}^{\infty}I_n(2)(z^{n}+z^{-n})$$

下面证明：$C_n=I_n(2)$

$$\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cosh(2\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\left(I_0(2)+2\sum_{k=1}^{\infty}I_k(2)\cos(k\theta)\right)d\theta$$

$\because \int_0^{2\pi}\cos(n\theta)d\theta=0$

$$\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cos(k\theta)d\theta=\pi\delta_{n,k}$$

$\therefore$ 仅当 $n=k$ 时，积分结果不为零.

$$\therefore \int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cosh(2\cos\theta)\,d\theta$$

$$=2I_n(2)\int_0^{2\pi}\cos^2(n\theta)d\theta$$

$$=2\pi I_n(2)$$

$\therefore C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cosh(2\cos\theta)d\theta=I_n(2)$ 得证.

$$\therefore \cosh\left(z+\frac{1}{z}\right)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(z^{n}+z^{-n})$$

15. 先证明下公式:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = \sum_k m_k a_k - \sum_j n_j b_j$$

其中 a_k 为 $f(z)$ 在 C 内的 m_k 阶零点

b_j 为 $f(z)$ 在 C 内的 n_j 阶极点.

∵对 $f(z)$: $f(z)=e^{g(z)}\prod_k (z-a_k)^{m_k}\prod_j (z-b_j)^{-n_j}$, $g(z)$ 在 C 内解析

$$\ln f(z) = g(z)+\sum_k m_k \ln(z-a_k) - \sum_j n_j \ln(z-b_j)$$

$$\therefore \frac{f'(z)}{f(z)} = g'(z) + \sum_k \frac{m_k}{z-a_k} - \sum_j \frac{n_j}{z-b_j}$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_C (zg'(z))dz + \sum_k m_k \oint_C \frac{z}{z-a_k} - \sum_j n_j \oint \frac{z}{z-b_j}\right)$$

$$\because \oint_C (zg'(z))dz = 0$$

考虑: C 内的一点 $z=c$.

$$\oint_C \frac{z}{z-c} = \oint_C \left(1+\frac{c}{z-c}\right) = c\cdot 2\pi i$$

即: $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\left(0+\left(\sum_k m_k a_k - \sum_j n_j b_j\right)\cdot 2\pi i\right)$

$$= \sum_k m_k a_k - \sum_j n_j b_j$$

下面开始证明

先证: ____ 即若等式成立, 则 z_0 为 n 阶极点. 显然 z_0 为极点

设 z_0 的阶数为 k.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)} = -kz_0 = -nz_0 \quad \therefore k=n$$

∴ z_0 为 $f(z)$ 的 n 阶极点.

再证: ∵ 即若 z_0 为 n 阶极点, 则等式成立.

No.

Date.

∵ z_0 为 $f(z)$ 的 n 阶极点，

∴ 在 z_0 附近，

$$f(z) \approx \frac{A}{(z-z_0)^n}$$

$$\therefore \frac{f'(z)}{f(z)} \approx -\frac{n}{z-z_0}$$

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \approx -\frac{nz}{z-z_0}.$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{zf'(z)}{f(z)} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\left(-\frac{nz}{z-z_0}\right) = -nz_0$$

$$\therefore \oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = -nz_0 \cdot 2\pi i$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = -nz_0.$$