上海科技大学《数学物理方法 I》评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 双曲线方程 $x^2 - y^2 = \dfrac{1}{2}$ 的复变量表示为________________.

2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{n^n} z^n$ 的收敛半径为________________.

3. 方程 $e^{2z} + i = 0$ 的解为 $z =$______________________.

4. 函数 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-i)^2}$ 在 $0 < |z - i| < 1$ 内的罗朗级数展开式为________________.

5. 函数 $f(z) = \dfrac{1 - e^{2z}}{z^5}$ 在 $z = \infty$ 处的留数 $\mathrm{Re}\,s[f(z), \infty] =$ ____________________.

6. 积分 $\oint_{|z|=2} \dfrac{z^{2023}}{(z^{2023} - 1)(z - 3)} dz =$______________________.

7. 设 $u(t)$ 为单位阶跃函数，函数 $f(t) = u(t)e^{-2t}\sin t$ 的傅里叶变换 $\mathscr{F}[f(t)] =$_________.

8. 函数 $f(t) = e^{-2t}\sin^2 \dfrac{t}{2}$ 的拉普拉斯变换 $\mathscr{L}[f(t)] =$____________________ .

答案：

1. $z^2 + \overline{z}^2 = 1$；2. e；3. $z = \left(k - \dfrac{1}{4}\right)\pi i, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ 4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{i^{n+1}} (z - i)^{n-2}$；

5. $\dfrac{2}{3}$； 6. $-\dfrac{2\pi i}{3^{2023} - 1}$； 7. $\dfrac{1}{1 + (2 + i\omega)^2}$； 8. $\dfrac{1}{2(p+2)[(p+2)^2 + 1]}$.

二、计算题与证明题（共 76 分）

1.（本题 10 分）设函数 $f(z) = 2z\,\mathrm{Im}(z) - 3\,\mathrm{Re}(z)$.（1）讨论函数 $f(z)$ 在复平面上的可导性与解析性；（2）计算积分 $\int_C f(z)dz$，其中 C 为原点到 $1 + i$ 的直线段.

解 （1）记 $z = x + iy$，则

$$f(z) = 2z\,\mathrm{Im}(z) - 3\,\mathrm{Re}(z) = 2xy - 3x + 2y^2 i$$

由柯西一黎曼条件

$$u_x = 2y - 3 = v_y = 4y, u_y = 2x = -v_x = 0$$

得 $x = 0, y = -\dfrac{3}{2}$，$f(z)$ 仅在 $z = -\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$ 处可导，在整个复平面上不解析

（2） C 的参数方程为 $z = z(t) = (1+\mathrm{i})t, t: 0 \to 1.$

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_0^1 \left(2t^2 - 3t + 2t^2\mathrm{i}\right)\left(1+\mathrm{i}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left(1+\mathrm{i}\right)\left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3\mathrm{i}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

2.（本题 10 分）已知解析函数 $f(z)$ 的实部为 $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$.（1）计算 $\left|f'(\mathrm{i})\right|$；（2）求满足 $f(\mathrm{i}) = -1 + 2\mathrm{i}$ 的解析函数 $f(z)$.

解 （1） $u_x = 2x + 2y, u_y = -2y + 2x$，

由 $f'(z) = u_x - \mathrm{i}u_y = 2(1-\mathrm{i})z$, 得 $\left|f'(\mathrm{i})\right| = 2\,|\,1-\mathrm{i}\,| = 2\sqrt{2}.$

（2）方法 1 不定积分法 由 $f'(z) = 2(1-\mathrm{i})z$ 得 $f(z) = (1-i)z^2 + c$.

利用已知条件

$$f(\mathrm{i}) = -1 + 2\mathrm{i} = -(1-\mathrm{i}) + c$$

得 $c = \mathrm{i}$. 从而 $f(z) = (1-\mathrm{i})z^2 + \mathrm{i}$.

3. **（本题 10 分）**已知函数 $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^2(\mathrm{e}^{\pi z} - 1)}$.（1）讨论函数 $f(z)$ 在扩充复平面上奇点及其类型，若是极点，指出其阶数；（2）计算留数 $\mathrm{Re}\,s[f(z), 0]$.

解 （1）函数 $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^2(\mathrm{e}^{\pi z} - 1)}$ 在扩充复平面上奇点为：

$$z = 0, z = 2k\mathrm{i}(k = \pm 1, \pm 2, \cdots),\ z = \infty$$

$z = 0$ 可去奇点， $z = 2k\mathrm{i}(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 一阶极点， $z = \infty$ 非孤立奇点

（2）

$$\mathrm{Re}\,s[f(z), 0] = 0$$

4. （**本题 10 分**）利用留数计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2-\sin\theta}\mathrm{d}\theta$.

解 作变换 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\sin\theta=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},\ \mathrm{d}\theta=\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2-\sin\theta}\mathrm{d}\theta=-2\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-4\mathrm{i}z-1}$$

$f(z)=z^2-4\mathrm{i}z-1$ 有两个奇点 $z=(2\pm\sqrt{3}\mathrm{i})$，在单位圆内只有一个一阶极点

$z=(2-\sqrt{3}\mathrm{i})$，且 $\mathrm{Re}\,s[f(z),2-\sqrt{3}\mathrm{i}]=-\frac{1}{2\sqrt{3}\mathrm{i}}$

由留数定理得：$I=-2\cdot2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

5. （**本题 12 分**）求函数 $f(t)=\frac{1}{t^4+3t^2+2}$ 的傅立叶变换.

解

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^4+3t^2+2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^4+3t^2+2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

$f(z)=\frac{1}{z^4+3z^2+2}$ 在上半平面有两个一阶极点 $z_1=\mathrm{i}$ 和 $z_2=\sqrt{2}\mathrm{i}$，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,s\left[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z},\mathrm{i}\right]&=\lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}}{(z^2+1)(z^2+2)}\\&=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}}{(z+\mathrm{i})(z^2+2)}=\frac{\mathrm{e}^{-\omega}}{2\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,s\left[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z},\sqrt{2}\mathrm{i}\right]&=\lim_{z\to2\mathrm{i}}(z-\sqrt{2}\mathrm{i})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}}{(z^2+1)(z^2+2)}\\&=\lim_{z\to2\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}}{(z^2+1)(z+\sqrt{2}\mathrm{i})}=-\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\omega}}{2\sqrt{2}\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

所以，当 $\omega\geq0$ 时，由留数定理

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= 2\pi\mathrm{i}\times\left\{\mathrm{Re}\,s\left[f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z},\,\mathrm{i}\right]+\mathrm{Re}\,s\left[f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z},\,2\mathrm{i}\right]\right\}\\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\omega}}{2\mathrm{i}}-\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\omega}}{2\sqrt{2}\mathrm{i}}\right)=\frac{\pi}{2}(2\mathrm{e}^{-\omega}-\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\omega}),
\end{aligned}
$$

当$\omega<0$时，由于$f(t)$为偶函数，所以

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega)(-t)}\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega)(-t)}\mathrm{d}(-t)\\
&= -\int_{+\infty}^{-\infty} f(-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega)\tau}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega)t}\mathrm{d}t\\
&= \frac{\pi}{2}(2\mathrm{e}^{\omega}-\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}\omega}).
\end{aligned}
$$

因此，$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=\frac{\pi}{2}(2\mathrm{e}^{-|\omega|}-\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}|\omega|})$.

6.（**本题 12 分**）利用拉普拉斯变换，求方程

$$y'(t)-5\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\sin t\cdot u(t-2),y(0)=0$$

的解.

解 记$\mathscr{L}[y(t)]=Y(p)$，则$\mathscr{L}[y'(t)]=pY(p)$，

$$\mathscr{L}[\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau]=\frac{p}{1+p^2}Y(p),$$

$$\mathscr{L}[\sin t\cdot u(t-2)]=\mathscr{L}[\sin(t-2+2)\cdot u(t-2)]=\sin 2\frac{p}{p^2+1}\mathrm{e}^{-2p}+\frac{\cos 2}{p^2+1}\mathrm{e}^{-2p}$$

对方程作拉普拉斯变换，解得

$$Y(p)=\sin 2\frac{1}{p^2-4}\mathrm{e}^{-2p}+\frac{\cos 2}{4}\left(\frac{p}{p^2-4}-\frac{1}{p}\right)\mathrm{e}^{-2\pi p}$$

求逆变换，得

$$y(t)=\frac{\sin 2}{2}\sinh(t-2)u(t-2)+\frac{\cos 2}{4}[\cosh(t-2)-1]u(t-2)$$

7.（**本题 12 分**）设$R>0$，有向曲线

$$C_1: z=z(t)=R+\mathrm{i}t, t:0\to\pi\text{，}\quad C_2: z=z(t)=t+\mathrm{i}\pi, t:R\to -R\text{，}$$

$$C_3: z=z(t)=-R+\mathrm{i}t, t:\pi\to 0.$$

（1）证明：$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\cosh z}\mathrm{d}z=0$；（2）计算留数$\mathrm{Re}\,s\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\cosh z},\frac{\pi}{2}\mathrm{i}\right]$；

（3）计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\cosh x}\mathrm{d}x$.

（1）

$$\left|\int_{C_1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\cosh z}\mathrm{d}z\right|\le\int_0^{\pi}\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{R}+\mathrm{i}y)}}{\cosh(\mathrm{R}+\mathrm{i}y)}\right||\,\mathrm{d}y\,|<\int_0^{\pi}\frac{2\mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{R}-\mathrm{e}^{-R}}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{2}{\mathrm{e}^{R}-\mathrm{e}^{-R}}(1-\mathrm{e}^{-\pi})$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\cosh z}\mathrm{d}z=0$$

（2）
$$\mathrm{Re}\,s\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\cosh z},\frac{\pi}{2}\mathrm{i}\right]=\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{[\cosh z]'}\right|_{z=\pi\mathrm{i}/2}=\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$$

（3）

$$\oint_C\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\cosh z}\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\cosh x}\mathrm{d}x+\int_{C_1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\cosh z}\mathrm{d}z+\int_{C_2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\cosh z}\mathrm{d}z+\int_{C_3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\cosh z}\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,s\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\cosh z},\frac{\pi}{2}\mathrm{i}\right]$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\cosh z}\mathrm{d}z=0$$

$$\int_{C_2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\cosh z}\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\pi\mathrm{i})}}{\cosh(x+\pi\mathrm{i})}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\pi}\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\cosh x}\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\cosh x}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\cosh x}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}=2\pi\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\cosh x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\cosh\frac{\pi}{2}}$$