大作业

1、令 $z=ae^{i\theta}$ $\because \zeta = z+\frac{a^2}{z}$

$\therefore \zeta = ae^{i\theta}+ae^{-i\theta}$

$= a(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$

$= 2a\cos\theta$

$\because \cos\theta \in [-1,1]$ $\therefore \zeta \in R$, $\zeta \in [-2a, 2a]$

又 $\because \cos\theta$ 可取得 $[-1,1]$ 间的所有值

$\therefore \zeta$ 也可取得 $[-2a,2a]$ 间的所有值

$\therefore$ 变换 $\zeta = z+\frac{a^2}{z}$ 将 C 变换为端点为 $z=-2a$ 和 $z=2a$ 的直线段 L.

2、(1). z 在 C 外时 $\because \lim\limits_{z\to\infty} f(z)=K$

$\therefore \oint_{C_\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = 2\pi i K$

$\because$ 曲线 C 和 C_∞ 之间, $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 有且仅有奇点 $\zeta=z$.

则 $\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta + \oint_{C_\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}, z\right)$

$= 2\pi i f(z)$

即: $\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta + 2\pi i K = 2\pi i f(z)$

$\therefore \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = 2\pi i(f(z)-K)$

即 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = f(z)-K$

(2). z 在 C 内时

曲线 C 和 C_∞ 之间无奇点

则 $\therefore \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta + \oint_{C_\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = 0$ 又 $\because \oint_{C_\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = 2\pi i K$

$\therefore \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -2\pi i k$

即：$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -k$

3. (1). 根据柯西积分公式，对于解析函数 $f(z)$，其系数可表示为

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$ C为围绕原点的单位圆

$\because f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$

$\therefore a_n = \frac{B_n}{n!}$ 　n取2n+1时

$$\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{2n+2}} dz.$$

即得：$B_{2n+1} = \frac{(2n+1)!}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{2n+2}} dz$

(2). 伯努利数的标准生成函数定义为

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

$\therefore$ 此题中出现的 B_n 就是伯努利数

定义：等幂和 $S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m$，其中 $m, n > 0$

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k^{+} n^{m+1-k}$$

注意到：$\frac{z}{e^z-1}-\frac{-z}{e^{-z}-1}=-z$

即：$\sum_{n=0}^{+\infty}B_n\frac{z^n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}B_n\frac{(-z)^n}{n!}=-z$.

即：$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}(z^n-(-z)^n)=z$.

$\because$ 当 n 为偶数时，$z^n-(-z)^n=0$

当 n 为奇数时，$z^n-(-z)^n=2z^n$

$\therefore \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}(z^n-(-z)^n)$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot(2z^{2n+1})=z$

比较系数可得

$\therefore$ 当 $n\geq1$ 时，$B_{2n+1}=0$.

(3). 伯努利数可由如下公式计算：

$\sum_{j=0}^{m}C_{m+1}^{j}B_j=m+1$，初始条件为 $B_0=1$，$B_1=\frac{1}{2}$

又 $\because B_{2n+1}=0$

$\therefore C_3^0B_0+C_3^1B_1+C_3^2B_2=3$

$\therefore B_2=\frac{1}{6}$

$C_5^0B_0+C_5^1B_1+C_5^2B_2+C_5^3B_3+C_5^4B_4=5$

$B_4=-\frac{1}{30}$

$C_7^0B_0+C_7^1B_1+C_7^2B_2+C_7^3B_3+C_7^4B_4+C_7^5B_5+C_7^6B_6=7$

$B_6=\frac{1}{42}$

$\therefore$ 综上，$B_2=\frac{1}{6}$，$B_4=-\frac{1}{30}$，$B_6=\frac{1}{42}$

4. $g(x)=\frac{1}{1+x^4}$ 为偶函数

$$\therefore I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx$$

构造复变函数 $f(z)=\frac{1}{1+z^4}$

选择上半平面闭合路径C，由实轴从$-R$到R，和半径为R的上半圆弧围成，最后令$R\to\infty$

令 $1+z^4=0 \Rightarrow z=e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3}{4}\pi}, e^{i\frac{5}{4}\pi}, e^{i\frac{7}{4}\pi}$

分别记作 z_1, z_2, z_3, z_4, $f(z)=\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$

位于上半平面的极点为 $z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2=e^{i\frac{3}{4}\pi}$

$$\therefore Res[f(z),z_1]=\frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}(i-1)}$$

$$Res[f(z),z_2]=\frac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}(i+1)}$$

$$\therefore \oint_C f(z)dz=2\pi i\left(\frac{1}{2\sqrt{2}(i-1)}+\frac{1}{2\sqrt{2}(i+1)}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore I=\frac{1}{2}\oint_C f(z)dz=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

5. 构造函数：$f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)\cosh(\frac{\pi}{2}z)}$

考虑上半平面奇点：为 $z=(2k+1)i,\ k=0,1,2,\cdots$

$k=0$ 为二阶极点.

$$\mathrm{Res}[f(z),i]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z-i}{(z+i)\cosh(\frac{\pi}{2}z)}\right)$$

$$=0$$

$k>0$ 时，为一阶极点 令 $z_k=(2k+1)i$

$$\mathrm{Res}[f(z),(2k+1)i]=\frac{1}{(1+z_k^2)\cosh'(\frac{\pi}{2}z_k)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$\because \lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{k}=\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{k+1}=\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{k(k+1)}=0.$

$\therefore$ 上式为一收敛的交错级数.

$$\therefore \sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{Res}[f(z),(2k+1)i]=\frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+2}\frac{1}{k+1}\right)$$

$$\because \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+2}\frac{1}{k+1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\ln 2-1.$$

deli

$$\therefore \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{Res}[f(z), z_k] = \frac{1}{2\pi i}(2\ln 2 - 1)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\cosh(\frac{\pi}{2}x)} dx$$

$$= 2\pi i \times \frac{1}{2\pi i}(2\ln 2 - 1)$$

$$= 2\ln 2 - 1$$