20241031 作业6

8.(3). 奇点为 $(-2,0)$ 在曲线内，阶Q为4

$$\oint_{|z+3|=4} \frac{e^z}{(z+2)^4} dz$$

$$= 2\pi i \, \mathrm{Res}_{z=-2} \frac{e^z}{(z+2)^4}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{3!} \lim_{z\to -2} \frac{d^3(e^z)}{dz^3}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{6} \cdot e^{-2} = \frac{1}{3} e^{-2}\pi i$$

(4). 奇点为 $(-1,0)$ 在曲线内，阶Q为n

$$\text{原式} = 2\pi i \, \mathrm{Res}_{z=-1} \frac{z^{2n}}{(z+1)^n}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to -1} \frac{d^{(n-1)}(z^{2n})}{dz^{(n-1)}}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to -1} 2n\cdot(2n-1)\cdots(n+2) z^{n+1}$$

$$= 2\pi i \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n(2n-1)\cdots(n+2)}{(n-1)!}$$

9.(1). 奇点 $(0,0)$ 在曲线内，

$\because \lim_{z\to 0} \frac{\sin^2 z}{z^2} = 1$ $\therefore$ 为可去奇点

$\therefore (0,0)$ 为可去奇点

$\therefore$ 原式 $=0$

2\. 奇点 (0, 0); (1, 0) 在曲线内

$$原式 = 2\pi i \, Res_{z=1} \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}$$

$$= 2\pi i \sin^2 1$$

10\. $\because |z|^2 = z\bar{z}$, $|z| = 1$

$$\therefore \bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{(\bar{z})^{n-1} f(z)}{z} dz$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^n} dz$$

$\because$ 奇点 $z=0$ 在曲线内 阶设为 n

$$原式 = 2\pi i \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{d^{n-1} f(z)}{dz^{n-1}}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(n-1)!} n! = 2\pi n i$$

12\. $|z|^2 = z\bar{z}$ $\therefore \bar{z} = \frac{4}{z}$

$$|z-1|^2 = (z-1)(\overline{z-1})$$

$$= (z-1)(\bar{z}-1) = 4 - z - \bar{z} + 1$$

$$= 5 - z - \frac{4}{z}$$

$$= -\frac{1}{z}(z^2 - 5z + 4)$$

$$= -\frac{1}{z}(z-1)(z-4)$$

$\therefore I = -\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)(z-4)} dz$ 记被积函数为 $f(z)$

曲线内奇点有 $z=0$ 和 $z=1$

No.

Date.

$\text{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{4}$, $\text{Res}_{z=1} f(z) = -\frac{e}{3}$

$\therefore I = -2\pi i\left(\frac{1}{4} - \frac{e}{3}\right)$

$= 2\pi i\left(\frac{e}{3} - \frac{1}{4}\right)$

13. $\because |f(z)|$ 在 z_0 的邻域内有界

$\therefore z = z_0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点

即 $\text{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$ $\therefore$ 在 C 包含 z_0 时

$\therefore \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Res}_{z=z_0} = 0$.

14. (1) $\because z = a$ 在曲线 C 内，为 n 阶奇点

$$\text{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}(f(z)(z-a)^n)}{dz^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\left((n-1)!a_1 + \frac{d^{(n-1)}(\varphi(z)(z-a)^n)}{dz^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left((n-1)!\,a_1 + \lim_{z\to a}\frac{d^{(n-1)}(\varphi(z)(z-a)^n)}{dz^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}(n-1)!\,a_1$$

$$= a_1$$

$\therefore \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, a_1$

也即 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = a_1$

(2). $z=a$ 在曲线 C 内 为 n 阶奇点

记 $g(z)=\frac{f(z)-\varphi(z)}{z-b}$

$$\mathrm{Res}_{z=a}\, g(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{(n-1)}\frac{f(z)}{z-b}(z-a)^n}{dz^n}$$

对第 k 项：$g_k(z)(z-a)^n$

$$=a_k(z-a)^{n-k}(z-b)^{-1} \text{ 记为 } h_k(z)$$

$$\therefore \lim_{z\to a}\frac{d^{(n-1)}h_k(z)}{dz^n}$$

$$=C_{n-1}^{k-1}(n-k)!\cdot(z-b)^{-k}\cdot(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}(n-k)!\,(z-b)^{-k}(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!$$

$$=(n-1)!\,(a-b)^{-k}(-1)^{k-1}$$

$$=-(n-1)!\,(b-a)^{-k}$$

又 $\because \varphi(z)$ 在 $\bar{D}$ 上解析

$$\therefore \mathrm{Res}_{z=a}\frac{f(z)}{(z-b)}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\left(-(n-1)!\,(b-a)^{-k}\right)a_k$$

$$=-\frac{a_k}{(b-a)^k}$$

即：$\oint_C \frac{f(z)}{z-b}dz=2\pi i\left(-\sum_{i=1}^{k}\frac{a_k}{(b-a)^k}\right)$

即：$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-b}dz=-\sum_{i=1}^{k}\frac{a_k}{(b-a)^k}$

15. 奇点 $z=0$ 在曲线内，阶数为 $2n+1$

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\cdot\frac{1}{z}$$

$$=\frac{1}{z^{2n+1}}(z^2+1)^{2n}$$

展开后，含 $\frac{1}{z}$ 的项系数为 $C_{2n}^{n}=\frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n!}$

即 $\mathrm{Res}_{z=0}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{1}{z}=C_{2n}^{n}$

$$\therefore \text{原式}=2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=z_0}=2\pi i\,\frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n!}$$

$$=2\pi i\,\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\because \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\,d\theta=\frac{1}{2^{2n}}\int_0^{2\pi}\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{2n}d\theta$$

取 $z=e^{i\theta}$ $\because \theta\in[0,2\pi]$ $\therefore |z|=1$，为中心为原点的圆周

$dz=ie^{i\theta}d\theta$ 即 $d\theta=\frac{1}{ie^{i\theta}}dz=\frac{1}{iz}dz$

$$\therefore \text{原式}=\frac{1}{2^{2n}}\oint_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{zi}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{1}{i}\cdot 2\pi i\,\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$=\frac{2\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

习题4.1

(1). $n\to+\infty$时，$(1-\frac{1}{n^2})\to 1$；$e^{i\frac{\pi}{n}}\to 1$

∴ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(1-\frac{1}{n^2})e^{i\frac{\pi}{n}}\right]\neq 0$

∴级数发散

(2). n为奇数时，$\frac{1+(-i)^{2n+1}}{n}=\frac{1+i}{n}$

n为偶数时，$\frac{1+(-i)^{2n+1}}{n}=\frac{1-i}{n}$

∴ $Re\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-i)^{2n+1}}{n}\right)$

$=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 为调和级数，是发散的

∴原级数发散.

(3). $n\geq 2$时，$\left|\frac{i^n}{\ln n}\right|=\frac{1}{\ln n}$

$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln n}$ 是发散的

对原级数而言，i^n 以4为周期循环且符号交替变化

而 $\frac{1}{\ln n}$ 为单调递减数列

∴原级数 实部和虚部分别构成交错级数 的收敛

∴原级数收敛，但不绝对收敛，即条件收敛

No.

Date.

(4). $\left|\frac{i^n}{n^\alpha}\right|=\frac{1}{n^\alpha}$

$\therefore \alpha>1$时，$\sum\limits^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$收敛，即原级数绝对收敛

$0<\alpha\leq1$时，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$发散

但$\frac{1}{n^\alpha}$单调递减，i^n以4为周期循环且符号交错变化

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n}{n^\alpha}$的实部和虚部均为交错级数，均收敛

$\therefore$原级数收敛

$\therefore$综上，$0<\alpha\leq1$时，级数条件收敛

$\alpha>1$时，级数绝对收敛