第一章 复数和复变函数

十六世纪中叶，G.Cardano(1501-1576)在研究一元二次方程时引进了复数. 复数是复变函数的基础. 复变函数是以研究复变量之间的相互依赖关系为主要任务的一门数学课程. 它与高等数学中的许多概念、理论和方法有相似之处，但又有其固有的特性. 本章主要介绍复数的概念、性质及运算，并引入平面点集、复变函数以及复球面等概念.

1.1 复数及其表示

1.1.1 复数的定义

定义 1.1 形如

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

的数称为复数， 其中 $\mathbb{R}$ 表示实数集合 $i = \sqrt{-1}$ 称为虚数单位. 称实数 x 、 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，常记为

$$x = Rez, \ y = Imz. \tag{1.2}$$

当实部 $x = 0$ 时，称 $z = iy$（$y \neq 0$）为纯虚数; 当虚部 $y = 0$ 时，$z = x$ 就是一个实数. 因此，全体实数是复数的一部分，复数是实数的推广. 特别，$0 + i0 = 0$.

两个复数之间不能比较大小，但可以定义相等. 设有两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 及 $z_2 = x_2 + iy_2$ 相等，是指它们的实部与实部相等,虚部与虚部相等， 即 $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ 当且仅当 $x_1 = x_2$ ， $y_1 = y_2$.

1.1.2 复数的表示

1.代数表示

由式(1.1)所给出的即为复数的代数表示.

2.几何表示

由复数的定义可知，复数 $z = x + iy$ 与有序数对 (x, y) 建立了一一对应关系. 在平面上建立直角坐标系 xOy，用 xOy 平面上的点 $P(x, y)$ 表示复数 z，这样复数与平面上的点一一对应，称这样的平面为复平面. 若用向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示复数 z，如图 1.1 所示. 该向量在 x 轴上的投影为 $x = Rez$，在 y 轴上的投影为 $y = Imz$，这样复数与平面上的向量也为一一对应.

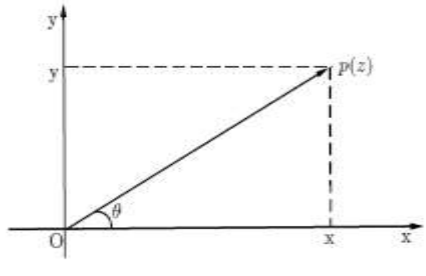


图 1.1 复数的几何表示

向量$\overrightarrow{OP}$的长度称为复数的模，记为$|z|$，从而有

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1.3}$$

显然

$$|x|\le|z|,\quad |y|\le|z|,\quad |z|\le|x|+|y|. \tag{1.4}$$

向量$\overrightarrow{OP}$与x轴正向的夹角θ称为复数z的辐角，记为$\theta=Argz$. 由图 1.1 知

$$\begin{cases} x=|z|\cos\theta, \quad y=|z|\sin\theta, \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{1.5}$$

若θ为z的辐角，则$\theta+2n\pi$也是其辐角，其中$n\in\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}$为整数集. 因此，任何一个非零复数均有无穷多个辐角. 若限制$-\pi<\theta\le\pi$，所得的单值分支称为$\mathrm{Arg}\,z$的主值，记为$\arg z$.

当$z=0$时，辐角没有定义；当$z\ne0$时，其辐角主值$\arg z$可由下式求得

$$\arg z=\begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x>0, y\ge0, \text{或} y\le0, \\ \pi+\arctan\dfrac{y}{x}, & x<0, y\ge0, \\ -\pi+\arctan\dfrac{y}{x}, & x<0, y<0. \end{cases} \tag{1.6}$$

例题 1.1 求$Arg\left(2-2i\right)$及$Arg\left(-3+4i\right)$.

解 由式及（1.6）

$$Arg\left(2-2i\right)=arg\left(2-2i\right)+2k\pi=\arctan\left(\frac{-2}{2}\right)+2k\pi$$
$$=-\frac{\pi}{4}+2k\pi.$$

$$Arg\left(-3+4i\right)=arg\left(-3+4i\right)+2k\pi=\left[\arctan\left(\frac{4}{-3}\right)+\pi\right]+2k\pi$$
$$=\left(2k+1\right)\pi-\arctan\frac{4}{3}.$$

例题 1.2 已知平面上流体在某点P处的速度为$v=2-2i$，求其大小和方向.

解 $|v|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2};\quad \arg v=\arctan\dfrac{-2}{2}=-\dfrac{\pi}{4}.$

3. 复数的三角表示与指数表示

利用直角坐标与极坐标之间关系：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，可将式(1.1)改写为

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta),\tag{1.7}$$

其中 $r = |z|, \theta = Argz.$ 称式(1.7)为复数 z 的三角表示.

利用欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,\tag{1.8}$$

式(1.7)又可写为

$$z = re^{i\theta}.\tag{1.9}$$

上式称为复数 z 的指数表示.

例题 1.3 试分别将复数 $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ 和复数 $z_2 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta(-\pi < \theta \le \pi)$ 化为三角表示式和指数表示式.

解 由于

$$r = |z_1| = 2, \quad \arg z_1 = \pi + \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3},$$

从而

$$z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), \quad z_1 = e^{\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)i}.$$

类似地

$$r = |z_2| = \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\arg z_2 = \arctan\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2},$$

$$z_2 = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right), \quad z_2 = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{\left(\frac{\theta}{2}+2k\pi\right)i}.$$

例题 1.4 已知 $|e^{i\theta} - 1| = 2$，求 θ.

解 由于

$$|e^{i\theta} - 1| = |\cos\theta - 1 + i\sin\theta| = \sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta} = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| = 2,$$

从而

$$\frac{\theta}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

所以

$$\theta = (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

1.2 复数的运算及其几何意义

由于实数是复数的特例，规定复数运算的一个基本要求是:复数运算的法则施行于实数特例时,能够和实数运算的结果相符合,同时也要求复数运算能够满足实数运算的一般定律.

1.2.1 复数的四则运算

定义 1.2 设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$，复数的加、减、乘、除四则运算定义如下：

$$z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+i(y_1 \pm y_2), \tag{1.10}$$

$$z_1 z_2=(x_1 x_2-y_1 y_2)+i(x_1 y_2+x_2 y_1), \tag{1.11}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1 x_2+y_1 y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2 y_1-x_1 y_2}{x_2^2+y_2^2}, \quad z_2 \neq 0. \tag{1.12}$$

由定义 1.2 知，复数的四则运算可理解为利用$i^2=-1$和实数的四则运算所得.

利用定义 1.2 容易验证，复数的加法遵守交换律与结合律，且减法是加法的逆运算；复数的乘法遵守交换律与结合律，且遵守乘法对于加法的分配律.

全体复数并引进上述运算后就称为复数域. 在复数域内，我们熟知的一切代数恒等式，例如：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$

$$\left(a+b\right)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

等等仍然成立. 实数域和复数域都是代数学中所研究的“域”的实例.

由于一个复数与平面上的一个向量所对应，因此，复数的加法运算与平面上向量加法运算一致, 从而以下两个不等式成立.

$$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|, \quad |z_1-z_2| \geq ||z_1|-|z_2||.$$

下面我们利用复数的三角表示式来讨论复数的乘法与除法,并导出复数积与商的模和辐角公式.

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1), z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，利用等式

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) \\ &=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2) \\ &=e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

可得

$$z_1 z_2=r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \tag{1.13}$$

于是有如下等式

$$\begin{cases}|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\\ Arg(z_1z_2)=Arg(z_1)+Arg(z_2).\end{cases} \tag{1.14}$$

式(1.14)表明：两个复数乘积的模等于它们模的乘积，两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和. 值得注意的是，由于辐角的多值性，式(1.14)的第二式应理解为对于左端 $Arg(z_1z_2)$ 的任一值，必有由右端 $Argz_1$ 与 $Argz_2$ 的各一值相加得出的和与之对应；反之亦然. 以后，凡遇到多值等式时，都按此约定理解.

由式(1.14)可得复数乘法的几何意义，即：z_1z_2 所对应的向量是把 z_1 所对应的向量伸缩 $r_2=|z_2|$ 倍，然后再旋转一个角度 $\theta_2=\arg z_2$ 所得(见图 1.2).

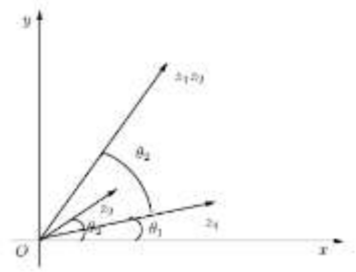


图 1.2 复数乘法的几何意义

设 $z_k=r_ke^{i\theta_k},k=1,2,\cdots,n$ ，利用数学归纳法可得 n 个复数相乘的公式：

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_ne^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}. \tag{1.15}$$

式（1.15）表示：有限多个复数乘积的模等于它们模的乘积；有限多个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.

类似地，可导出两复数的商的模与辐角公式. 设 $z_2\neq 0$ ，则有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)},$$

于是

$$\begin{cases}\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|},\\ Arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=Arg(z_1)-Arg(z_2),\quad z_2\neq 0.\end{cases} \tag{1.16}$$

式(1.16)表明：两个复数商的模等于它们模的商；两个复数商的辐角等于分子与分母的辐角的差. 而 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的几何意义是：将 z_1 的辐角按顺时针方向旋转一个角度 $\arg z_2$，再将 z_1 的模伸缩 $\dfrac{1}{|z_2|}$ 倍.

注 1.1 需注意的是，当将辐角换成其主值时，则以下公式不一定成立.

$$\begin{cases} arg(z_1z_2)=argz_1+argz_2, \\ arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=argz_1-argz_2. \end{cases} \tag{1.17}$$

例如，$z_1=-1, z_2=i$，$arg(z_1)=\pi, arg(z_2)=\dfrac{\pi}{2}$，$arg(z_1z_2)=arg(-i)=-\dfrac{\pi}{2}$，但

$$arg(z_1)+arg(z_2)=\frac{3}{2}\pi.$$

可以证明：当 $Re(z_1)>0, Re(z_2)>0$ 时，式(1.17)仍成立.

1.2.2 复数乘方和方根

定义 1.3 设 n 为一个正整数，n 个相同的非零复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂，记作 z^n，即 $z^n=\underbrace{z.z\cdots z}_{n}$. 规定：$z^0=1$.

设 $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$，将式（1.15）中所有 $z_k\left(k=1,\cdots,n\right)$ 都取作 z，易得复数的乘方公式

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta). \tag{1.18}$$

特别地，当 $r=1$ 时，则得到著名的棣莫佛(De Moivre)公式：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta. \tag{1.19}$$

由（1.18）得

$$\left|z^n\right|=\left|z\right|^n,\ Arg\left(z^n\right)=\underbrace{Argz+\cdots+Argz}_{n}=n\arg z+2k\pi. \tag{1.20}$$

若定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，则当 n 为负整数时，

$$\begin{aligned} z^{-n}=\frac{1}{z^n}&=\frac{\cos 0+i\sin 0}{r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)}=\frac{1}{r^n}\left[\cos\left(0-n\theta\right)+i\sin\left(0-n\theta\right)\right] \\ &=r^{-n}\left[\cos\left(-n\theta\right)+i\sin\left(-n\theta\right)\right]. \end{aligned}$$

因此，式（1.18）仍成立.

例题 1.5 计算 $(-1+\sqrt{3}i)^6$.

解 因为

$$-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right),$$

所以

$$
\begin{aligned}
(-1+\sqrt{3}i)^6 &= \left[2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\right]^6 \\
&= 2^6(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) \\
&= 64.
\end{aligned}
$$

定义 1.4 设 n 为正整数，若复数 z 和 w 满足 $w^n=z$，则称复数 w 为复数 z 的 n 次方根，记为 $w=\sqrt[n]{z}$.

为了得到 $\sqrt[n]{z}$ 的具体表达式，令 $z=re^{i\theta}, w=\rho e^{i\varphi}$，则由复数的乘方公式可得

$$\rho^n e^{in\varphi}=re^{i\theta},$$

从而得两个方程

$$\rho^n=r,\quad n\varphi=\theta+2k\pi.$$

解得

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

从形式上看，k 可以取 $0,\pm1,\pm2,\cdots$，但由于 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 均以 2π 为周期，所以当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，可以得到 w 的 n 个不同的值，而当 k 取其他整数时，这些值又重复出现. 因此，z 的 n 次方根为

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},\quad k=0,1,\cdots,n-1. \tag{1.21}$$

由于复数 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个不同值都具有相同的模 $\sqrt[n]{|z|}$，且对应相邻两个 k 值的方根的辐角均相差 $\frac{2\pi}{n}$，所以就几何意义而言，对应 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个点即为以原点为心，$\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的内接正 n 边形的 n 个顶点.

特别地，当 $z=1$ 时，若记 $\omega_n=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，则 1 的不同的 n 次方根为 $1,\omega_n,\omega_n^2,\cdots,\omega_n^{n-1}$. 图 1.3 给出 $n=2,4,6$ 情形.

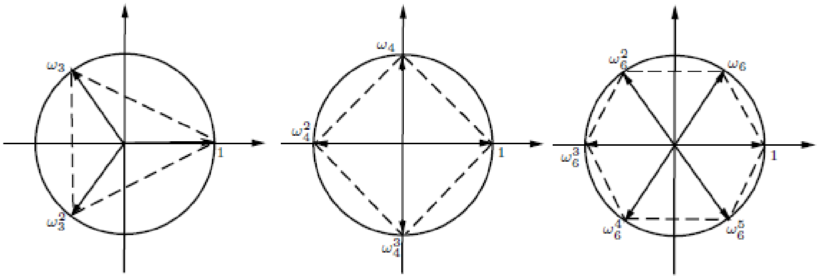


图 1.3

例题 1.6 求方程 $z^3+8=0$ 的全部根.

解 由 $z^3+8=0$, 得

$$z=\sqrt[3]{-8}=2e^{\frac{(2k\pi+\pi)i}{3}},k=0,1,2.$$

故 $z^3+8=0$ 的三个根分别为:

$$\begin{aligned}
z_0&=2e^{\frac{\pi i}{3}}=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=1+\sqrt{3}i,\\
z_1&=2e^{\pi i}=-2,\\
z_2&=2e^{\frac{5\pi i}{3}}=1-\sqrt{3}i.
\end{aligned}$$

1.2.3 共轭复数及其性质

定义 1.5 称复数 $x-iy$ 为复数 $x+iy$ 的共轭复数，记为 $\bar{z}$. 显然

$$|z|=|\bar{z}|,\quad Arg\bar{z}=-Argz. \tag{1.22}$$

上式表明在复平面上，z 和 $\bar{z}$ 关于实轴对称，如图 1.4 所示.

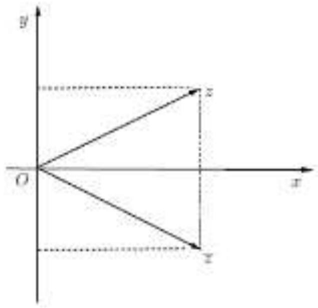


图 1.4 复数及其共轭

复数及其共轭有如下性质

(1) $\overline{(\bar{z})}=z,\quad \overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}.$

(2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2},\quad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},(z_2\neq 0).$

(3) $|z|^2=z\bar{z},\quad Rez=\dfrac{z+\bar{z}}{2},\quad Imz=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}.$

例题 1.7 设 z_1 和 z_2 为两个复数，证明：

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2&=|z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\overline{z_2});\\
|z_1-z_2|^2&=|z_1|^2+|z_2|^2-2Re(z_1\overline{z_2}).
\end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})\\
&=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\
&=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_2}\\
&=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}\\
&=|z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\overline{z_2}).
\end{aligned}$$

在上述等式中以 $-z_2$ 代替 z_2 即可得第二式.

注 1.2 由上例可得：（1）$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$，其几何意义为：平行四边形两对角线平方的和等于各边的平方的和；（2）复数 z_1 和 z_2 所表示的向量互相垂直的充要条件是 $\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z}_2\right)=0$.

例题 1.8 证明：若 z 为实系数 n 次代数方程

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0=0$$

的根，则 $\overline{z}$ 也为上述方程的根.

证明 设 z 为上述方程某一复根，则

$$\begin{aligned} & a_n\overline{z}^n+a_{n-1}\overline{z}^{n-1}+\cdots+a_1\overline{z}+a_0 \\ &=\overline{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0} \\ &=0, \end{aligned}$$

这说明 $\overline{z}$ 为同一方程的根. 这表明：实系数的代数方程复根必成对出现.

例题 1.9 设 $|z|<1$，证明：

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|\begin{cases}<1, & |a|<1,\\ =1, & |a|=1,\\ >1, & |a|>1.\end{cases}$$

解 由于

$$\begin{aligned} |z-a|^2 &= |z|^2+|a|^2-2Re(z,\overline{a}),\\ |1-\overline{a}z|^2 &= 1+|a|^2|z|^2-2Re(z,\overline{a}), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} |z-a|^2-|1-\overline{a}z|^2 &= |z|^2+|a|^2-|z|^2|a|^2-1\\ &=|z|^2-1-|a|^2(|z|^2-1)\\ &=(|z|^2-1)(1-|a|^2). \end{aligned}$$

由此即得结论.

1.2.4 曲线的复数方程

我们通过举例来说明以下两个问题：

（1） 如何用复数形式的方程表示平面曲线 $F(x,y)=0$；

（2） 如何从复数形式的方程确定其所表示的平面曲线.

例题 1.10 试用复数表示以下平面曲线方程：

（1）圆或直线方程：$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$, 其中 a,b,c,d 均为实常数.

（2）双曲线方程：$x^2-y^2=1$.

解 令 $z = x + iy$，则

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i},$$

（1）将 x, y 的表达式代入到圆的方程中，得

$$az\overline{z} + \frac{b}{2}\left(z+\overline{z}\right) - \frac{ci}{2}\left(z-\overline{z}\right) + d = 0,$$

整理得：

$$az\overline{z} + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + d = 0,$$

其中 $\beta = \dfrac{1}{2}(b+ic)$.

（2）将 x, y 的表达式代入双曲线方程中，得

$$\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2 = 1,$$

即，$z^2 + \overline{z}^2 = 2.$

例题 1. 11 试分别确定下列方程所表示的平面曲线：

（1） $Re(z+2) = -1$；（2） $z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z + a\overline{a} - c = 0,$ 其中，a 为复数，$c > 0$.

解 令 $z = x + iy$，则 $\overline{z} = x - iy$，$z\overline{z} = x^2 + y^2$.

（1）由于 $z + 2 = x + iy + 2 = (x+2) + iy,$

所以，由 $Re(z+2) = -1$，即得 $x = -3$. 这是一条平行于 y 轴的直线.

(2) 记 $a = \alpha + i\beta$，则方程 $z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z + a\overline{a} - c = 0$ 可表示为：

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 = c,$$

即方程所表示的曲线为：以 $\left(\mathrm{Re}(a), \mathrm{Im}(a)\right)$ 为心，$\sqrt{c}$ 为半径的圆周.

注 1. 3 用复数表示平面曲线方程有多种不同的形式. 例如，过两点 a, b 的直线方程可表示为：

$$z = a + (b-a)t, \text{ 其中 } t \text{ 为实参数；}$$

或

$$\mathrm{Im}\frac{z-a}{b-a} = 0，\text{即} \ \arg\frac{z-a}{b-a} = 0, \text{或} \pi.$$

又如，$\left|z - z_0\right| = R$ 表示以 z_0 为心，R 为半径的圆周.

1.3 平面点集和区域

1.3.1 复平面上的点集

按照某一法则，在全体复数内选取有限个或无限个复数组成一个复数集合，这个集合中的复数在复平面上对应的点就组成一个点集，即点集是由复平面上有限个或无限个点组成的集合.

由于复变函数总是定义在点集上，所以下面介绍关于点集的几个基本概念.

定义 1.6 由不等式$|z-z_0|<\epsilon$所确定的点集，称为z_0的ϵ邻域，记为$N(z_0,\epsilon)$.

邻域$N(z_0,\epsilon)$是以z_0为心，ϵ为半径的开圆(不包含圆周)，它是一维空间(实轴)的邻域概念(开区间)在复平面上的推广.

定义 1.7 设E为一点集，z_0为一点，若点$z_0\in E$，若存在$\epsilon>0$，使得$N(z_0,\epsilon)\subset E$，则称点z_0为E的内点. 若存在$\epsilon>0$，使得$N(z_0,\epsilon)$中的点都不属于E，则称点z_0为E的外点. 若点z_0的任一邻域内既有属于E的点，又有不属于E的点，则称z_0为E的边界点. E的全部边界点所组成的点集称为E的边界，记作∂E.

定义 1.8 若点集E能完全包含在以原点为圆心、以某一正数R为半径的圆域内，则称E为一个有界点集.

例如：设点集$E=\{z\,\|\,z|<1\}$，则点$z=\frac{1}{2}$是E的内点；$z=i$是E的边界点；$z=1+i$是E的外点； E 是开集且为有界集；$\partial E=\{z\,\|\,z|=1\}$，$\partial E$是闭集且为有界集；$E+\partial E=\{z\,\|\,z|\le 1\}$是闭集且为有界集.

1.3.2 区域与简单曲线

定义 1.9 非空点集D满足以下两个条件，则称为区域：(1) D是开集，即D完全由内点组成；(2) D是连通的，即D中任何两点都是可用全属于D的折线连接.

定义 1.10 区域D加上其边界∂D称为闭域，记作$\bar{D}:\bar{D}=D+\partial D.$

如果一个区域可以被包含在一个以原点为中心的圆里面， 即存在正数M，使区域D的每个点z都满足$|z|<M$，则称D为有界的，否则称为无界.

需要指出的是，通常所指的区域都是开的，不包括边界. 因此，以后我们提及的圆域或环域总是不包括边界，若包括加界，则称为闭圆或闭环.

由定义知：两个不相交的开圆的并集仍是开集，但不连通，因而不是区域；两个相切的圆加上切点所组成的点集虽然连通，但不是开集，从而也不是区域.

定义 1.11 若$x(t)$和$y(t)$是两个定义在区间$\alpha\le t\le\beta$上的连续实变函数，则由方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

或由复数方程

$$z = z(t) = x(t) + iy(t),\ (\alpha \le t \le \beta)$$

所决定的点集C称为平面上的一条连续曲线. $z(\alpha)$和$z(\beta)$分别称为曲线的起点和终点；若对$\alpha \le t_1 \le \beta, \alpha < t_2 < \beta, t_1 \ne t_2$的$t_1$和$t_2$，有$z(t_1) = z(t_2)$，则点$z(t_1)$称为这条曲线的重点；凡无重点的连续曲线，称为简单曲线或约当(Jordon)曲线；满足$z(\alpha) = z(\beta)$的简单曲线称为简单闭曲线或约当闭曲线.

简单曲线是平面上的一个有界闭集. 例如，直线段、圆弧段和抛物线段等都是简单曲线；圆周和椭圆周等都是简单闭曲线.

以一条简单闭曲线C为公共边界可把平面分为两个区域：一个是有界的，称为C的内部；另一个是无界的，称为C的外部.

若沿一条简单闭曲线C绕行一周时，C的内部始终在C的左侧，则绕行的方向称为曲线的正方向；若沿一曲线C绕行一周时，C的内部始终在C的右侧，则绕行的方向称为曲线的负方向.

定义 1.12 设$z = z(t) = x(t) + iy(t), (\alpha \le t \le \beta)$是一条简单曲线，若$z(t)$在$\alpha \le t \le \beta$上有连续的导数

$$z' = z'(t) = x'(t) + iy'(t), \quad z'(t) \ne 0,$$

即此曲线有连续变动的切线，则称此曲线为光滑曲线. 由若干段光滑曲线所组成的曲线称为分段光滑曲线.

定义 1.13 设D为一区域，在D内任作一条简单闭曲线，而曲线的内部总属于D，则称D为单连通域. 一个区域如果不是单连通域，就称为多连通域.

例如： 圆域$|z| < R$是单连通区域；而圆环域$0 < r < |z| < R$为多连通域.

例题 1.12 求满足$\cos\theta < r < 2\cos\theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$的点$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$的集合. 若该集合为一区域，那么它是单连通区域还是多连通区域？

解 由于

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

利用条件$\cos\theta < r < 2\cos\theta$得

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} < \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

于是

$$x < x^2 + y^2 < 2x,$$

从而得到所求点集由下列不等式确定

$$\begin{cases}(x-1)^2 + y^2 < 1, \\ (x-\dfrac{1}{2})^2 + y^2 > \dfrac{1}{4},\end{cases}$$

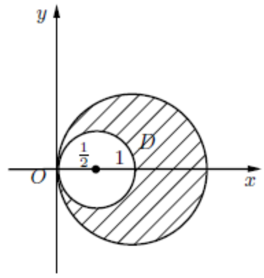


图 1.4

即图 1.4 中的阴影部分，它是一个单连通区域.

例题 1.13 试判别满足条件 $0 < \arg\dfrac{z-i}{z+i} < \dfrac{\pi}{4}$ 的点 z 组成的点集是否为一区域？

解 设 $z = x + iy$，记 $\theta = \arg\dfrac{z-i}{z+i}$，则

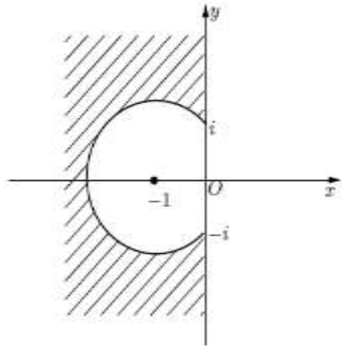
$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} - i\frac{2x}{x^2+(y+1)^2},$$

$\theta = \arctan\dfrac{-2x}{x^2+y^2-1}$. 由 $0 < \arg\dfrac{z-i}{z+i} < \dfrac{\pi}{4}$ 得

$$0 < \frac{-2x}{x^2+y^2-1} < 1,$$

即

$$\begin{cases}x < 0, \\ (x+1)^2 + y^2 > 2.\end{cases}$$



因此，不等式 $0 < \arg\dfrac{z-i}{z+i} < \dfrac{\pi}{4}$ 所确定的点集为图 1.5 中的阴影部分，它是一个无界的单连通区域.

图 1.5

1.4 复变函数

1.4.1 复变函数的概念

复变函数就是以复数为自变量的函数，其函数值通常也是复数. 复变函数的严格定义如下：

定义 1.14 设在复平面上有点集 D，若对 D 内每一点 z，按照某一法则，有确定的复数 w 与之对应，则称 w 为 z 的复变函数，记为 $w = f(z)$. D 称为函数 $w = f(z)$ 的定义域，$G = \{f(z) \mid z \in D\}$ 称为函数值域.

若 D 内每一复数 z，有唯一确定的复数 w 与之对应，则称 $f(z)$ 为单值函数；若 z 的一

个值对应着 w 几个或无穷多个值，则称为 $f(z)$ 多值函数. 例如：$w=|z|, w=z^2$ 为单值函数；而 $w=Argz, w=\sqrt[4]{z}$ 为多值函数.

函数 $w=f(z)$ 又称为变换或映射．变换或映射着重刻画点与点之间的对应关系，而函数则着重刻画数与数之间的对应关系.

定义 1.15 设 G 是 w 平面上与 z 平面的点集 D 通过函数 $w=f(z)$ 相对应的点集，若对于 G 中任一点 W，按照 $w=f(z)$ 的对应规则，在 D 中有一个或多个(有限个或无限个)点 z 与之对应，则得到的 z 是 w 的函数，记为 $z=g(w)$. 称 $z=g(w)$ 为函数 $w=f(z)$ 的反函数.

显然，反函数也有单值函数和多值函数之分. 例如：$w=z-1$ 的反函数 $z=w+1$ 为单值函数；而 $w=z^2$ 的反函数 $z=\sqrt{w}$ 为多值函数.

记 $z=x+iy$， $w=u+iv$，则 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，因此，一个复变函数 $w=f(z)$ 相当于给出了两个二元实变量函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$. 它给出了 z 平面到 w 平面的一个映射或变换. 显然，映射 $w=f(z)$ 具有如下性质：

（1） 对于点集 D 中的每一点 z，相应的点 $w=f(z)$ 是点集 G 中的一个点；

（2） 对于点集 G 中的每一点 w，在点集 D 中至少有一点 z，满足 $w=f(z)$.

因此，常称点集 G 为点集 D 被函数 $w=f(z)$ 映射的像，而点集 D 称为点集 G 的原像.

例题 1.14 试确定函数 $w=z^2$ 所确定的映射.

解 令 $z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 则 $w=u+iv=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$.

由此可见，函数 $w=z^2$ 把点 z 映射成点 w 时，w 的模是 z 的模的平方，w 的辐角是 z 的辐角的 2 倍.

显然，$w=z^2$ 可以把 z 平面上中心在原点，半径为 r 的圆域 D 映射成 w 平面上中心在原点，半径为 r^2 的圆域 D，即

$$D:\ |z|<r \xrightarrow{w=z^2} G:\ |w|<r^2.$$

例题 1.15 求在映射 $w=iz$ 下，集合 $D=\{z\,|\,\mathrm{Re}\,z>0, 0<a\mathrm{rg}\,z<\pi/2\}$ 的像集.

解 显然 D 为复平面的第一象限，而映射 $w=iz$ 的作用为逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$，因此，D 在映射 $w=iz$ 下的像集为 $G=\left\{w \mid \operatorname{Re} w<0, \frac{\pi}{2}<\arg w<\pi\right\}$.

1.4.2 曲线在映射下的像

在函数 $w=f(z)$ 的映射下，z 平面上的曲线 C 映射成 w 平面上的曲线 Γ，如何由曲线 C 的方程确定曲线 Γ 的方程？

若曲线 C 由方程 $F(x,y)=0$ 确定，则曲线 Γ 的方程可由方程组

$$\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y), \\ F(x,y)=0, \end{cases}$$

消去 x,y 得到.

若曲线 C 由参数方程

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

给出，则 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 可得到曲线 Γ 的参数方程

$$\begin{cases} u=u[x(t),y(t)]=\phi(t), \\ v=v[x(t),y(t)]=\psi(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

或由 $w=\phi(t)+i\psi(t)$ 确定.

若曲线 C 由复方程

$$F(z,\bar{z})=0$$

确定，则可直接将逆映射 $z=f^{-1}(w)$ 代入方程，得到曲线 Γ 的方程

$$G(w,\bar{w})=0.$$

例题 1.16 求在 $w=z^3$ 映射下，z 平面上的直线 $z=(1+i)t$ 映射成 w 平面上的像曲线方程.

解 直线 $z=(1+i)t$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=t, \\ y=t, \end{cases}$$

在 z 平面上表示第 I 象限的分角线 $y=x$. 在 $w=z^3$ 的映射下，此分角线映成曲线方程的参数形式为

$$\begin{cases} u=-2t^3, \\ v=2t^3. \end{cases}$$

消去参数 t 得

$$v=-u,$$

此为 w 平面上第 II 象限的分角线方程.

例题 1.17 求函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 把 z 平面以点 $(1, 0)$ 为圆心，1 为半径的圆周 C 映射成 w 平面上的像曲线 Γ.

解 方法 1 将 z 平面的曲线 C 表示成

$$(x-1)^2+y^2=1 \tag{1.23}$$

由 $w=u+iv=\dfrac{1}{z}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}$， 可得： $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$， $y=-\dfrac{v}{u^2+v^2}$, 代入方程 (1.23)得：

$$\frac{1}{u^2+v^2}-\frac{2u}{u^2+v^2}=0,$$

从而得到 w 平面上的像曲线 Γ 方程为：$u=\dfrac{1}{2}$.

方法 2 将 z 平面的曲线 C 表示成：$|z-1|=1$，即

$$(z-1)(\bar{z}-1)=1. \tag{1.24}$$

将 $z=\dfrac{1}{w}$ 和 $\bar{z}=\dfrac{1}{\bar{w}}$ 代入方程(1.24)得

$$\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{\bar{w}}-\frac{1}{w}-\frac{1}{\bar{w}}=0,$$

整理得, $w+\bar{w}=1$, 即, $u=\dfrac{1}{2}$.

例题 1.18 求映射 $w=\dfrac{z+1}{1-z}$ 把 z 平面上的曲线 $(x-1)^2+y^2=1$ 映射成 w 平面上的曲线方程.

解 由 $w=\dfrac{z+1}{1-z}$ 得其逆映射为 $z=\dfrac{w-1}{w+1}$，而原曲线方程的复数形式为

$$|z-1|=1,$$

所以

$$1=|z-1|=\left|\frac{w-1}{w+1}-1\right|=\left|\frac{-2}{w+1}\right|,$$

即像曲线方程为$|w+1|=2$.

1.5 复球面与无穷远点

1.5.1 复球面

除前面介绍的复数的各种表示外，复数的另一种表示可用球面上的点作对应. 为此，先建立复平面与球面上的点的对应关系.

取一个与复平面切于坐标原点的球面，并通过原点O作垂直于复平面的直线与球面交于N点，点O和N分别称为南极和北极，如图 1.6 所示.

设z为复平面上任意一点，则连接zN的直线必交球面上唯一点p，易见，z与p一一对应，故复数也可用球面上的点表示.

考虑复平面上一个以原点为中心的圆周C，在球面 上对应地有一个圆周Γ，圆周C的半径越大，圆周Γ就 越靠近北极N，因而北极N可以看作复平面上一个模为无穷大的点在球面上的对应点. 这个模为无穷大的点称为无穷远点，记为∞. 复平面加上点∞后称为扩充复平面，与它对应的就是整个球面，称为复球面. 扩充复平面的一个几何模型就是复球面.

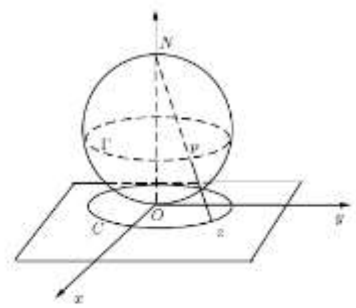


图 1.6 复球面

对于∞来说，实部、虚部和辐角的概念均无意义，但它的模规定为正无穷大，即$|\infty|=+\infty$.

关于∞的运算，规定如下：

设a为有限复数，则

（1） $a\pm\infty=\infty\pm a=\infty;$

（2） $a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty \quad (a\neq 0);$

（3） $\dfrac{a}{\infty}=0,\quad \dfrac{a}{0}=\infty \quad (a\neq 0);$

（4） $\infty\pm\infty,\ 0\cdot\infty$及$\dfrac{\infty}{\infty}$没有意义.

复平面上每一条直线都通过点∞，同时没有一个半平面包含点∞. 需要指出的是，扩充复平面上只有一个无穷远点，它与高等数学中的$+\infty$和$-\infty$的概念不同. 但本书中若无特别说明，所谓“点”仍指一般复平面上的点.

1.5.2 扩充复平面上的几个概念

1. 点集概念

扩充复平面上，无穷远点的邻域应理解为以原点为心的某圆周的外部，即指满足条件$|z|>\dfrac{1}{\epsilon}(\epsilon>0)$的点集称为$\infty$的$\epsilon-$邻域. 在扩充复平面上，内点和边界点等概念均可以推广到点∞. 复平面以∞为其唯一的边界点；扩充复平面以∞为内点，且它是唯一的无边界的区域.

2. 单连通的概念

单连通区域的概念也可以推广到扩充复平面上的区域. 需注意的是，根据单连通区域的概念，区域D内的简单曲线C在D内连续收缩于一点，该点既可能是有限点，也可能是无穷远点，而所谓曲线C能连续收缩到无穷远点，实质上就是曲线C扩大而落入点∞的任意小的邻域中，即属于以原点为中心、任意大的半径的圆周的外部.

例如：在扩充复平面上，$D_1=\{z\,|\,|z|<1\}$为单连通区域；$D_2=\{z\,|\,|z|>1\}$也为单连通区域；而$D_3=\{z\,|\,1<|z|<+\infty\}$为多连通区域. 因此，在扩充复平面上，一个圆周的外部(这里把∞算作这个区域的内点)就是一个单连通区域；一个无界区域是否单连通，取决于是在通常的复平面上还是在扩充复平面上，即∞是否包含在区域内.