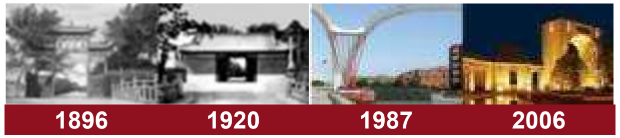
上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY



数 学 物 理 方 法I

第3章 复变函数的积分

王 健

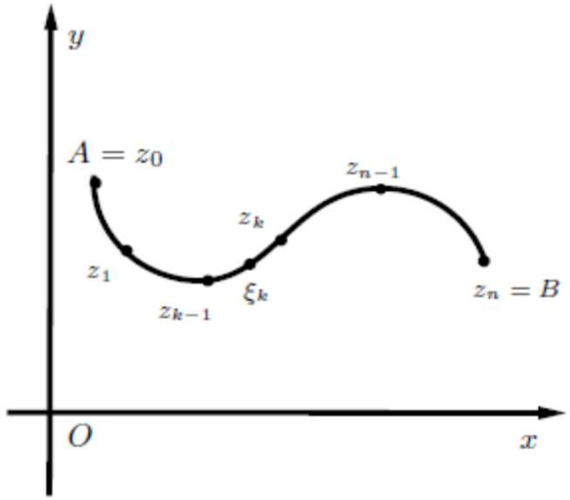
3.1 复变函数积分的概念

3.1.1复变函数积分的概念

定义3.1 设*C*为一条以*A*为起点，*B*为终点的有向光滑曲线(或逐段光滑曲线)，其方程为

$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t),$$

$$t: \alpha \to \beta, A = z(\alpha), B = z(\beta)$$



函数 $f(z)$ 定义在曲线*C*上, 沿曲线*C*用一组分点 $A = z_0, z_1, \cdots, z_n = B$ 将曲线*C*分为*n*个小弧段, 在每个弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 上任意取一点 ζ_k, 并作部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,$

其中 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$，记 ΔS_k 为第k个小弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 的长度，

$\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\left\{\Delta S_k\right\}$. 当$n$无限增大, 且 λ 趋于零时，若不论对C的

分法及 ζ_k 的选取，和式 S_n 存在唯一的极限，则称这处极限为

函数 $f(z)$ 沿曲线C的积分，记为

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

若C为封闭曲线，则沿此闭曲线的积分记为 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$.

注：**1.** 复变函数积分的定义类似于第二类曲线积分；

2. 若C为实轴上的区间 $[a,b]$, 复积分就变为定积分.

例题3.1 计算积分$\int_C \mathrm{d}z$, 其中: **(1)** C为复平面上以A为起点, B为终点的任意曲线; **(2)** C为复平面上的任意闭曲线.

3.1.2 复变函数积分的计算

定理3.1 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在逐段光滑的曲线$C$上连续, 则 $f(z)$ 沿曲线C的积分存在, 且有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u(x,y)\mathrm{d}x-v(x,y)\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C u(x,y)\mathrm{d}y+v(x,y)\mathrm{d}x.$$

为便于记忆, 上式简写为

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C u\mathrm{d}y+v\mathrm{d}x\triangleq\int_C(u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y).$$

物理意义：设不可压缩流体形成的定常平面流速场为

$$\mathbf{v}(x,y)=v_x(x,y)\mathbf{i}+v_y(x,y)\mathbf{j},\quad (x,y)\in D\subseteq\mathbf{R}^2$$

则通过一条光滑有向曲线***C***的一侧流向另一侧的流量为

$$N_C=\int_C -v_y(x,y)\,\mathrm{d}\,x+v_x(x,y)\,\mathrm{d}\,y,$$

流体沿曲线***C***的环量为 $\Gamma_C=\int_C v_x(x,y)\,\mathrm{d}\,x+v_y(x,y)\,\mathrm{d}\,y.$

$$\Gamma_C+\mathrm{i}\,N_C=\int_C v_x(x,y)\mathrm{d}x+v_y(x,y)\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C -v_y(x,y)\mathrm{d}x+v_x(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_C [v_x(x,y)-\mathrm{i}\,v_y(x,y)](\mathrm{d}\,x+\mathrm{i}\mathrm{d}\,y)=\int_C \overline{v(z)}\,\mathrm{d}\,z$$

称为该流速场沿曲线***C***的环流量.

注：**1.** 定理**3.1** 表明**:** 复变函数沿有向曲线***C***的积分，可归结为两个第二类曲线积分的计算.

2. 第二类曲线积分 $\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 的计算：

设曲线***C***的参数表示为：$x=x(t),y=y(t),t:\alpha\to\beta$, 则

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t$$

由第二类曲线积分的计算，可化复变函数积分为定积分

设曲线***C***的参数表示为**:** $z=z(t),t:\alpha\to\beta$, 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t$$

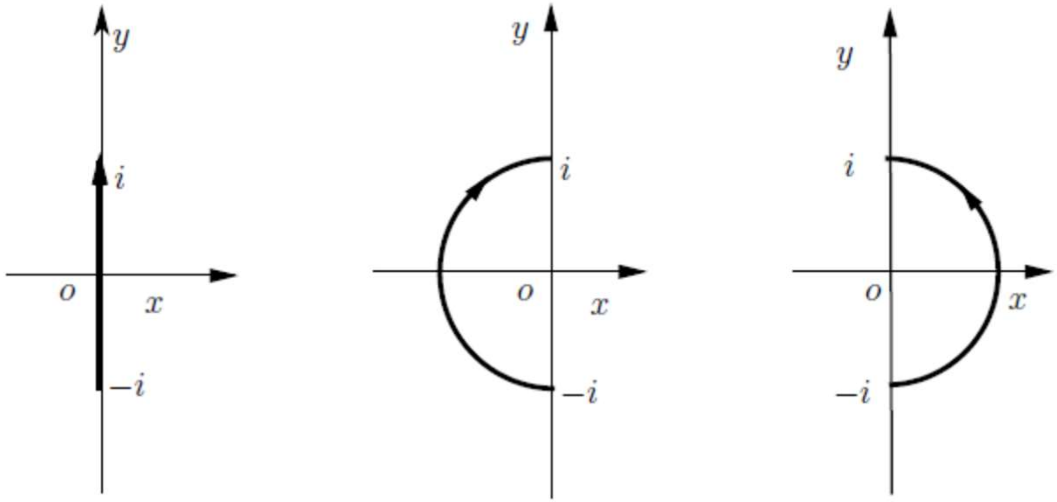
计算积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$的基本步骤:

(1) 写出曲线*C*的参数形式 $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), t:\alpha \to \beta$

(2) 将 $z = z(t), \mathrm{d}z = z'(t)\mathrm{d}t$ 代入所求积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$;

(3) 计算定积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t$

例题3.2 计算从 $A = -\mathrm{i}$ 到 $B = \mathrm{i}$ 的积分$\int_C |z|\mathrm{d}z$, 其中曲线*C*为如下图所示.



例题3.3 计算如下积分

1. $\int_C \arg z \mathrm{d}z$, 其中$C$为由 $A(-1,1)$ 到 $B(-2,2)$ 的直线段.

2. $\int_C \mathrm{e}^{|z|^2}\,\mathrm{Im}(z)\mathrm{d}z$, 其中$C$为由 $z_1=0$ 到 $z_2=\pi\mathrm{i}$ 的直线段.

例题3.4 证明：积分 $I=\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & n=0,\\ 0, & n\neq 0,\end{cases}$

其中C是以 z_0 为心, $r>0$ 为半径的正向圆周, n为整数.

注：1. 上式中C 可以为包含 z_0 的任意闭曲线(见后续证明);

2. 上式在积分计算中起着重要的作用.

思考题：设 $P(z)$ 为任意2次多项式，证明

$$\lim_{R\to+\infty}\oint_{|z|=R}\frac{1}{P(z)}\mathrm{d}z=0.$$

3.1.3 积分的基本性质

性质3.1 $\int_C kf(z)\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\mathrm{d}z$, 其中$k$为常数.

性质3.2 $\int_C \left[f(z)\pm g(z)\right]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z.$

性质3.3 $\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z$, 其中$C^-$表示曲线与$C$方向相反.

性质3.4 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$, 其中$C$由 C_1, C_2 首尾相接而成.

注：上述性质与第二类曲线积分的性质相同.

积分 $\int_C |\mathrm{d}z|$ 所表示的为曲线**C**的长度. 因为

$$\int_C |\mathrm{d}z| = \int_\alpha^\beta |z'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

上式最后一项即为微积分中的曲线弧长公式.

性质**3.5** 若函数 $f(z)$在曲线**C**上满足 $\left|f(z)\right| \le M$, 且曲线的长度为**L**, 则 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \le ML.$

上式称为复变函数的积分不等式.

例题 **3.5** 记 C_r 为上半圆周 $|z| = r$, 逆时针方向. 若 $f(z)$在 C_r 上连续, 且 $\lim\limits_{z\to 0} zf(z) = 0$. 证明: $\lim\limits_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = 0.$

3.2 柯西定理

复习：第二类曲线积分的格林公式

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

积分与路径无关的条件等.

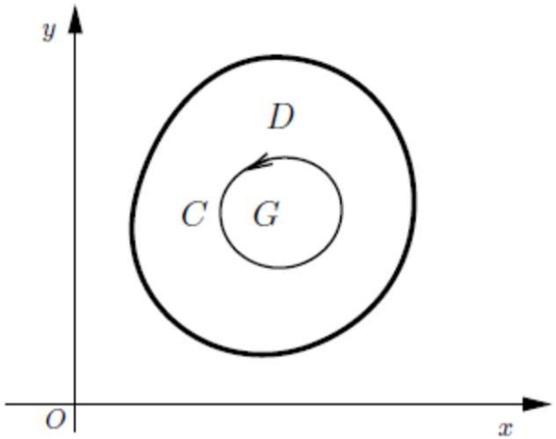
3.2.1 单连通区域的柯西定理

定理3.2 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 ***D*** 内解析，***C*** 为 ***D*** 内的任意一条闭曲线，则 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$

注： 此定理证明较复杂，用黎曼(**1851**年)在添加条件下给出的证明方法，即添加条件 $f'(z)$ 在 ***D*** 内连续.

古萨于**1900**年在不添加条件 $f'(z)$ 在 ***D*** 内连续，证明了定理.

定理3.2称为积分基本定理，又常称作柯西-古萨基本定理，或柯西积分定理. 它揭示了解析函数的一个重要的性质：解析函数沿其单连通解析区域内的任意一条闭曲线的积分为零, 或解析函数积分只依赖于积分路径的起点与终点，而与积分路径的形状无关.



例题3.6 计算以下各积分：

1. $\oint_C (z^2+2e^{-z}+\sin z)dz$, C为正向圆周 $|z|=4$;

2. $\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)}dz$, C为正向圆周 $|z+1|=\frac{1}{2}$.

推论3.1 设闭曲线C为单连通区域 D的边界, $f(z)$在D内解析，在C上连续, 则$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$

3.2.2 原函数与不定积分

如果函数 $f(z)$ 在单连通区域D内解析或沿D内的任意闭曲线C的积分为零, 则积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 只与C的起点 z_0 与终点 z_1 有关. 从而积分可记为 $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z.$ 固定起点 z_0 而上终点z在区域内变动, 则积分 $\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 定义了z的函数, 记为

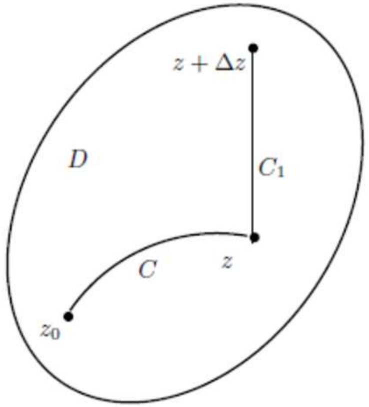
$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

定理3.3　若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 满足以下条件之一：

1. 解析；**2.** 连续，且沿D内任意闭曲线C的积分为零.

则函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 在D内解析，且 $F'(z)=f(z)$.

证明思想：



$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\left[f(\zeta)-f(z)\right]\mathrm{d}\xi.$$

由连续性，得

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,|\xi-z|<\delta\to|f(\xi)-f(z)|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|\le\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\xi)-f(z)||\mathrm{d}\xi|$$

$$\le\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|=\varepsilon.$$

定义3.2 设$f(z)$在区域 $\boldsymbol{D}$内连续，如果存在函数 $\Phi(z)$ 满足 $\Phi'(z)=f(z)$, 则称 $\Phi(z)$ 为$f(z)$在$\boldsymbol{D}$内的一个原函数. 原函数的全体称为不定积分.

定理3.4 若函数 $f(z)$ 在单连通区域$\boldsymbol{D}$内解析，$\Phi(z)$ 是 $f(z)$在内的一个原函数，z_1, z_2 是 $\boldsymbol{D}$ 内的两点，则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z=\Phi(z_2)-\Phi(z_1).$$

上式称为牛顿-莱布尼茨公式.

定理**3.4** 把计算解析函数的积分问题归结为寻找其原函数的问题.

例题3.7 计算下列积分：

1. $\int_C z\mathrm{e}^{z^2}\mathrm{d}z$, 其中$\boldsymbol{C}$为 $z_1=0$ 到 $z_2=\pi\mathrm{i}$ 的直线段.

2. $\int_C(\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z})\mathrm{d}z$, 其中$\boldsymbol{C}$为 $z=\cos t+\mathrm{i}t,\ t:0\to\dfrac{\pi}{2}$ 的曲线段.

复变函数也有分部积分公式

例题3.8 **1.**设函数 $f(z),g(z)$在单连通区域$\boldsymbol{D}$内解析, z_1,z_2 为 $\boldsymbol{D}$内两点．证明

$$\int_{z_1}^{z_2}f(z)g'(z)\mathrm{d}z=f(z)g(z)\Big|_{z_1}^{z_2}-\int_{z_1}^{z_2}g(z)f'(z)\mathrm{d}z.$$

2. 计算积分 $I=\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}z^2\mathrm{e}^z\mathrm{d}z.$

附：复变函数积分的变量代换公式

设 $w=f(z)$在 **z** 平面上单连通区域***D***内解析，$f'(z)\neq 0$, 且它将***D***内映射成***w*** 平面上单连通区域 **G**内，

$$w_1=f(z_1), w_2=f(z_2), z_1, z_2\in D,$$

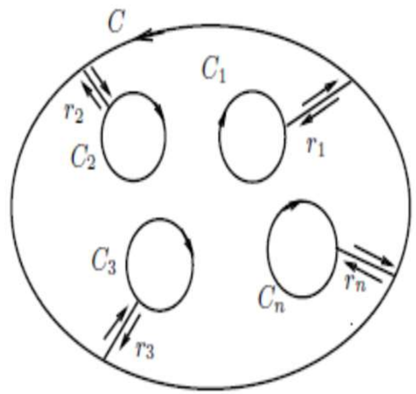
若$\varphi(w)$ 解析，则

$$\int_{w_1}^{w_2}\varphi(w)\mathrm{d}w=\int_{z_1}^{z_2}\varphi[f(z)]f'(z)\mathrm{d}z.$$

对于闭曲线上复变函数积分作变量代换时，需要考虑积分曲线的相应变化，包括曲线的形状、走向以及圈数等.

3.2.3 柯西定理的推广

定理3.5 设***D***是由边界曲线 $\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ 所围成的多连通区域，其中简单闭曲线 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 在简单闭曲线***C***内，它们互不包含也互不相交，若 $f(z)$ 在 ***D***内解析，在 Γ上连续，则



$$\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

或
$$\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z.$$

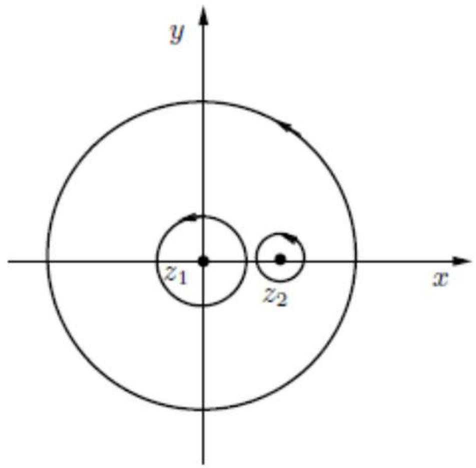
推论3.2 若函数$f(z)$在 ***D***内除 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外都解析，***C***为***D***内任何一条将 $z_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 包围在内的正向闭曲线，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z.$$

特别地，若 $f(z)$ 在区域 ***D***内除 z_0外都解析，则沿***D***内任何一条包含 z_0 闭曲线 ***C*** 的积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 的值都相等.

因此 $$I = \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi \mathrm{i}, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

其中***C***为任意包含 z_0 的正向闭曲线.



例题3.9 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z(z-1)}\mathrm{d}z$

例题3.10 设n次多项式 $P_n(z)$ 有 n 个互不相同的零点，闭曲线 C上无 $P_n(z)$的零点，且C 所围区域内恰有 $P_n(z)$的 k 个零点 $0 \le k \le n$. 证明：$\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \dfrac{P_n'(z)}{P_n(z)}\mathrm{d}z = k.$

例题3.11 计算积分 $\oint_C \dfrac{1}{(z-2)(z-3)}\mathrm{d}z$, 其中$C$是不过点 $z=2$ 和点 $z=3$ 的正向闭曲线.

思考题：设复数 a, b, c互不相同，C为不过点a, b, c 正向闭曲线

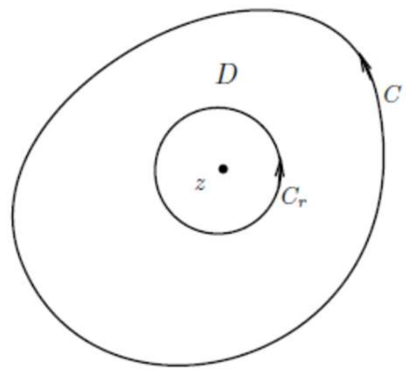
计算积分 $$\oint_C \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\mathrm{d}z.$$

3.3 柯西积分公式和高阶导数公式

3.3.1 柯西积分公式

定理3.6 设闭曲线***C***是单连通区域***D***的边界，若函数 $f(z)$ 在***D***内解析，在***C***上连续，则对于***D***内的任何一点 ***z***，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi.$$



柯西积分公式和柯西定理一样，可以推广到多连通区域：

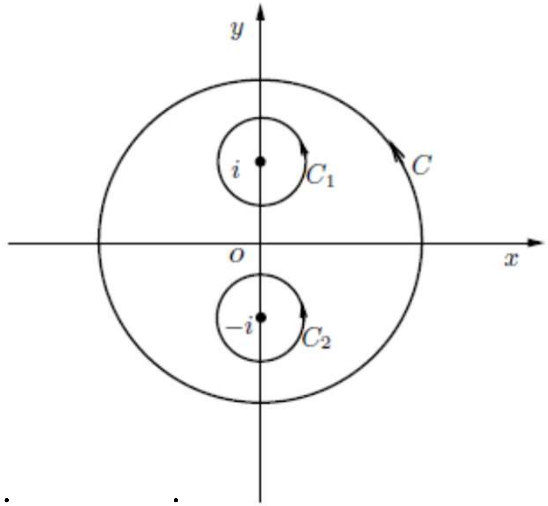
设 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为简单闭曲线(互不包含且互不相交)，***C***为包含曲线 $C_k(k=1,2,\cdots,n)$ 的闭曲线，曲线 $\Gamma = C + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 所包围的区域为 ***D***，且 $f(z)$ 在区域 ***D***内解析，则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi, \quad \forall z \in D.$$

柯西积分公式也常写成其等价形式：$\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi = 2\pi \mathrm{i} f(z).$

利用上述公式，可求某类函数的积分.

例题**3.12** 计算积分$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+1} \mathrm{d}z$，其中 C 为正向圆周 $|z| = 2.$



$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+1} \mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+1} \mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+1} \mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\frac{\mathrm{e}^z}{z+\mathrm{i}}}{z-\mathrm{i}} \mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{\frac{\mathrm{e}^z}{z-\mathrm{i}}}{z+\mathrm{i}} \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi \mathrm{i} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}+\mathrm{i}} + 2\pi \mathrm{i} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}}{-\mathrm{i}-\mathrm{i}} = 2\pi \mathrm{i} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} = 2\pi \mathrm{i} \sin 1.$$

例题3.13 设函数 $f(z)$在单连通区域***D***内解析，***C***为***D***内的正向圆周 $C:|z|=R,\ z\neq 0$ 为***C***内一点. 证明：

1. $\displaystyle\oint_C \frac{\overline{z}f(\xi)}{\xi\overline{z}-R^2}\mathrm{d}\xi=0;$

2. $\displaystyle f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{(R^2-|z|^2)f(\xi)}{(\xi-z)(R^2-\overline{z}\xi)}\mathrm{d}\xi;$

3. $\displaystyle f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)f(\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta,$

   其中 $r=|z|,\varphi=\arg z.$

分析：本题主要应用柯西积分公式证明

3.3.2 解析函数的高阶导数公式

定理**3.7** 设闭曲线***C***是单连通区域***D***的边界，若函数 $f(z)$ 在***D***内解析，在***C***上连续，则 $f(z)$ 在***D***内有各阶高阶导数，它们都是***D***内的解析函数，且其 ***n*** 阶导数为

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi, n=1,2,\cdots.$$

定理**3.7**表明，解析函数具有任意阶导数，且各阶导数仍为解析函数.

利用 $\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi=\frac{2\pi \mathrm{i}}{n!}f^{(n)}(z), n=1,2,\cdots$ 求某些函数的积分.

例题3.14 计算积分 $I=\oint_C \dfrac{1}{z^3(z-1)(z+2)}\mathrm{d}z$, 其中***C***为正向圆周 $|z|=r(r\neq 1,2)$.

例题3.15 设函数 $f(z)$ 在 $|z|\le 3$ 上解析，且在 $|z|=3$ 上 $f(z)=\mathrm{e}^z$. **(1)** 计算 $f(0)$; **(2)** 计算积分 $\oint_{|z|=3}\dfrac{f(z)}{(z-1)^2(z-2)\overline{z}}\mathrm{d}z$.

例题3.16 计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\theta$.

例题3.17 设函数 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上解析，在 $|z|=1$ 上满足 $|f(z)-z|\le|z|$, 证明: $\left|\dfrac{1}{n!}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|\le 2^{n+2}, n=0,1,2,\cdots$.

3.4* 柯西积分公式的推论

3.4.1 莫累拉（Morera）定理

利用柯西导数公式, 可得到柯西定理的逆定理

定理3.8 设函数 $f(z)$ 在单连通区域***D***内连续, 若对***D***内沿任一闭曲线的***C***都有 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$, 则函数 $f(z)$ 在***D***内解析.

$f(z)$ 在单连通区域***D***内解析函数的充要条件为: $f(z)$ 在***D***内连续.

且沿***D***内的任意闭曲线的积分为零.

3.4.2 平均值公式

定理3.9 设函数 $f(z)$ 在 $C: |z-z_0|=R$ 所围区域内解析，且在***C***上连续, 则 $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta.$

例题3.18 设 $f(z)$在闭圆域 $|z|\leq R$ 上解析，在该圆域的边界 $|z|=R$ 上 $|f(z)|>a>0$，且$|f(0)|<a$. 证明：在该圆域内 $f(z)$ 至少有一个零点.

3.4.3 柯西不等式

定理3.10 设函数$f(z)$在 $C:|z-z_0|=R$ 所围区域内解析，且在 ***C***上连续，则 $\left|f^{(n)}(z_0)\right|\leq\dfrac{n!M}{R^n}$，$(n=1,2,\cdots)$，其中 ***M*** 为$|f(z)|$在***C***上的最大值.

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\right|\leq\frac{n!}{2\pi}\oint_C\frac{|f(z)|}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}s$$

$$\leq\frac{n!}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}\oint_C\mathrm{d}s=\frac{n!M}{R^n}.$$

3.4.4 刘维尔（Liouville）定理

定理3.12 设函数 $f(z)$在整个复平面上解析且有界，则 $f(z)$ 在复平面上为常数.

例题3.19 设函数 $f(z)$在整个复平面上解析，且存在$M>0$，使得 $\mathrm{Re}\, f(z) < M$. 证明：$f(z)$ 在复平面上为常数.

3.4.5 最大模定理

定理3.13 设D为有界单连通或复闭路多连通区域，$f(z)$在 D内解析，在D的边界C上连续，且 $f(z)$不为常数，则 $|f(z)|$ 的最大值必在C上取得.

谢 谢！