$$\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{\cos\theta+\cos n\theta-\cos(n+1)\theta-1}{2-2\cos\theta}$$

20240927 作业2.

1.6 (1). $z=x+iy$

$$x+iy=t+ti$$

即 $\begin{cases}x=t\\y=t\end{cases}$ ∴曲线为 $y=x$，是直线

(2). $x+iy=a\cos t+ib\sin t$

即 $\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$

即 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，是椭圆(或圆)

1.7. (1). $(z-1)(\bar{z}-1)=4(z+2)(\bar{z}+2)$

$$3z\bar{z}+9z+9\bar{z}+15=0$$

即 $z\bar{z}+3z+3\bar{z}+5=0$

$$(x+iy)(x-iy)+3(x+iy)+3(x-iy)+5=0$$

$x^2+y^2+6x+5=0$. 是圆心为$(-3,0)$，半径为2的圆

(2). $(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})$

$$z\bar{z}-a\bar{z}-\bar{a}z+a\bar{a}=1-a\bar{z}-\bar{a}z+\bar{a}az\bar{z}$$

$(|a|^2-1)(|z|^2-1)=0$ 又∵$|a|^2<1$

∴$|z|^2-1=0$

即 $|z|=1$

是圆心为$(0,0)$，半径为1的圆.

1.8.(1). $\frac{z-i}{i}$

$= -i(z-i) = -1-iz$

$= -1-i(x+iy)$

$= y-1-ix$

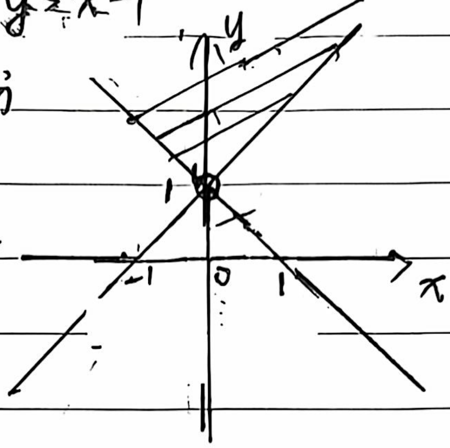
即：$-\frac{\pi}{4} < \arctan\frac{x}{1-y} < \frac{\pi}{4}$ $1-y<0$

或 $\pi+\arctan\frac{x}{1-y} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $1-y>0$, $x\le 0$

或 $-\pi+\arctan\frac{x}{1-y} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $1-y<0$, $x>0$

即：$y>1$ 且 $y>1-x$ 且 $y>x-1$

如图所示阴影部分

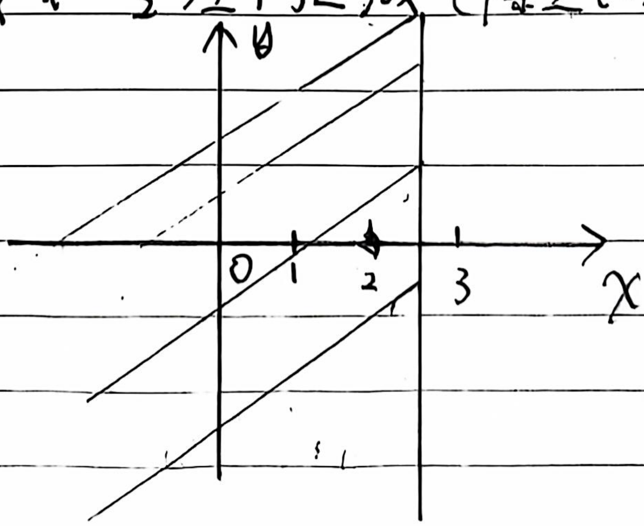


(不包含边界)

(2). $|z-3| \ge |z-2|$ 即：在z平面上距离(3,0)比与(2,0)距离更大的点构成的区域(除点(2,0))

即：直线 $x=\frac{5}{2}$ 左侧区域(除点(2,0))

如图所示



(3). 即：平面上距离 $(2,0)$ 和 $(-2,0)$ 之和小于 5 的区域

即：中心为原点，半长轴为 $\frac{5}{2}$，半焦距为 2 的椭圆内部

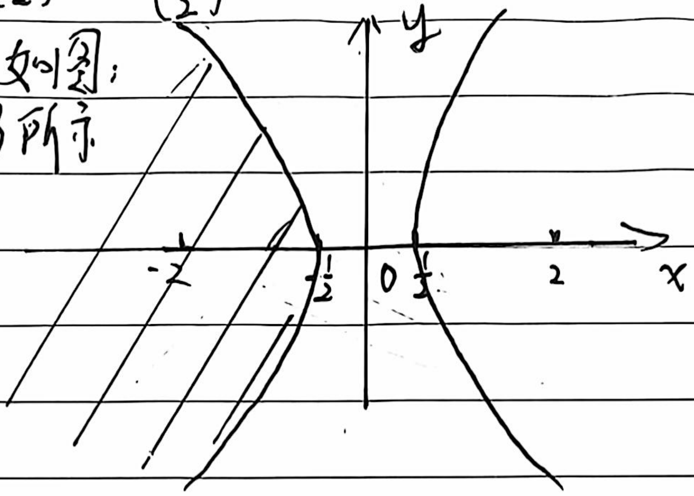
即：$\frac{x^2}{(\frac{5}{2})^2}+\frac{y^2}{(\frac{3}{2})^2}=1$ 内部区域

(4). 即：平面上距离 $(2,0)$ 和 $(-2,0)$ 距离之差大于 1 的区域

对应曲线为中心为原点，实轴长为 1，半焦距为 2 的双曲线

即：$\frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2}-\frac{y^2}{(\frac{\sqrt{15}}{2})^2}=1$

对应区域如图：阴影所示



(不含边界)

9. $z=1+iy,\ -1\le y\le 1$

$w=z^2=(1+iy)^2$

$=(1-y^2)+2yi.$

即：$\begin{cases} u=1-y^2 \\ v=2y \end{cases}$

即：$u=1-\frac{v^2}{4}$，

又 $\because -1\le y\le 1$ $\therefore -2\le v\le 2$

$\therefore$ 是抛物线在 y 轴右边的部分

(含点 $(0,2)$ 和 $(0,-2)$)

No.
Date

10.(1) $z = x + ix$

$w = \frac{1}{z}$

$= \frac{1}{x+ix} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x} i$

即 $\begin{cases} u = \frac{1}{2x} \\ v = -\frac{1}{2x} \end{cases}$ 即 $u = -v$ 为w平面上的一条直线（除原点）

(2) $z = x + iy$

$w = \frac{1}{z}$

$= \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$= \frac{x-iy}{2x} = \frac{1}{2} - \frac{y}{2x} i$

即 $\begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = -\frac{y}{2x} \end{cases}$ 即 $\begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4} \end{cases}$

即 $u = \frac{1}{2}$，为w平面上的一条直线（除点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$）

No.

Date.

2.1 (1). $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\operatorname{Re}\bar{z}}{z^2}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{x^2-y^2}$

从实轴正半轴接近 (0, 0) 时

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{x^2-y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$，极限不存在

∴ 极限不存在

(2). $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}\right)$

$\cancel{=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{2i}\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right.}$

$=\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{2i}\cdot\frac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{2i}\cdot\left(\frac{4ixy}{(x+iy)(x-iy)}\right)$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$

令 $y=kx$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{2k}{1+k^2}$.

随 k 变化

∴ 极限不存在

No.

Date. . .

(3) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z-i}{z(1+z^2)}$

$= \lim\limits_{z\to i} \dfrac{z-i}{z(z+i)(z-i)}$

$= \lim\limits_{z\to i} \dfrac{1}{z(z+i)}$

$= -\dfrac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}$

$= \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{(z-1)(\bar{z}+2)}{(z+1)(z-1)}$

$= \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{\bar{z}+2}{z+1} = \dfrac{3}{2}$

22. (1) $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

令 $y=kx$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$，与$k$有关

∴ $z\to 0$ 时 $f(z)$ 极限不存在

∴ $f(z)$ 在 $z=0$ 处不连续，其余处连续。

No.

Date.

(2). $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y}{x^4+y^2}$$

不妨设 $x>0$, $y>0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left|\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right| \le \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\frac{1}{2}(|x|^5+|x||y|^2)}{|x|^4+|y|^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}|x| = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(-\left|\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right|\right) = 0.$$

$$-\left|\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right| \le \frac{x^3y}{x^4+y^2} \le \left|\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right|$$

$\therefore \lim\limits_{z\to 0} f(z) = 0 = f(0)$

$\therefore f(z)$ 连续