2024/12/12 作业

4. (1). $\mathcal{F}(f(t))=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-1)(t-2)^2\sin t\, e^{-i\omega t}\,dt$

$=(t-2)^2\sin t\, e^{-i\omega t}\Big|_{t=1}$

$=\sin(1)\, e^{-i\omega}$

(2). $\mathcal{F}(f(t))=F(\omega)=\int_{0}^{+\infty}e^{-t}\cos t\, e^{-i\omega t}\,dt$

$=\int_{0}^{+\infty}e^{-t}\cdot\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}e^{-i\omega t}\,dt$

$=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}(e^{(-1+i-i\omega)t}+e^{(-1-i-i\omega)t})\,dt$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-1+i(1-\omega)}e^{(-1+i-i\omega)t}-\frac{1}{1+i(1+\omega)}e^{(-1-i-i\omega)t}\right)\Big|_{0}^{+\infty}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+i(1+\omega)}-\frac{1}{-1+i(1-\omega)}\right)$

(4). $f(t)=\frac{1}{2}\sin 2t$

$\mathcal{F}(f(t))=\frac{1}{2}i\pi(\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2))$

(6). $\mathcal{F}(f(t))$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-it}\sin t\, e^{-i\omega t}\,dt$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-it}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}e^{-i\omega t}\,dt$

$=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}(te^{-i\omega t}-te^{-2it-i\omega t})\,dt$

$$= \frac{1}{2i}\left(2\pi i\delta'(\omega) - 2\pi i\delta'(\omega+2)\right)$$

$$= \pi\left(\delta'(\omega) - \delta'(\omega+2)\right)$$

5. (2) $\mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} -2\pi\delta''(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot(-2\pi)\cdot(-t^2)$$

$$= t^2$$

(3) $\mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos 2\omega\, e^{i\omega t}d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}(e^{2i\omega}+e^{-2i\omega})e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(\delta(t+2)+\delta(t-2)\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\delta(t+2)+\delta(t-2)\right)$$

(4) $\mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2+\omega^2}e^{i\omega t}d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega+\sqrt{2}i)(\omega-\sqrt{2}i)}d\omega$$

$t>0$时,上半平面极点为 $z=\sqrt{2}i$.

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i\cdot\lim_{z\to\sqrt{2}i}\frac{e^{izt}}{z+\sqrt{2}i}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}t}$$

t<0时，取下半平面，极点为 $z=-\sqrt{2}i$.

则有 $\tilde{f}^{-1}(F(\omega))=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{\sqrt{2}t}$.

∴ 综上，$\tilde{f}^{-1}(F(\omega))=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}|t|}$

(5)、$\tilde{f}^{-1}(F(\omega))$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-2i\omega e^{i\omega t}}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}d\omega$$

t>0时，取上半平面，$F(\omega)=\frac{-2i\omega e^{i\omega t}}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}$ 的奇点为 $\omega=i$ 和 $2i$，均为一阶极点.

$$\therefore Res[F(\omega),i]=\frac{1}{3i}e^{-t}.$$

$$Res[F(\omega),2i]=-\frac{1}{3i}e^{-2t}.$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-2i\omega e^{i\omega t}}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}d\omega$$

$$=2\pi i\times\left(\frac{1}{3i}e^{-t}-\frac{1}{3i}e^{-2t}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\pi\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)$$

t<0时，取下半平面，类似有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-2i\omega e^{i\omega t}}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}=-\frac{2}{3}\pi\left(e^{t}-e^{2t}\right)$

则：$\tilde{f}^{-1}(F(\omega))=\frac{1}{2\pi}\times\frac{2}{3}\pi\left(e^{-|t|}-e^{-2|t|}\right)\cdot sgn(t)$

$$=\frac{1}{3}\left(e^{-|t|}-e^{-2|t|}\right)\cdot sgn(t)$$

6.(1) $\because \mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$

$\therefore \mathcal{F}[f(2t)] = \frac{1}{2}F(\frac{\omega}{2})$

$\mathcal{F}[tf(2t)] = i\frac{1}{2}\frac{d}{d\omega}[F(\frac{\omega}{2})]$

$= \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{2}F'(\frac{\omega}{2})$

$= \frac{i}{4}F'(\frac{\omega}{2})$

(2). $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$

$\mathcal{F}[f(-2t)] = \frac{1}{2}F(-\frac{\omega}{2})$

$\mathcal{F}[(t-2)f(-2t)]$

$= \mathcal{F}(tf(-2t)-2f(-2t)]$

$= \mathcal{F}(tf(-2t)) - F(-\frac{\omega}{2})$

$= i\cdot\frac{1}{2}\frac{d}{d\omega}F(-\frac{\omega}{2}) - F(-\frac{\omega}{2})$

$= \frac{-i}{4}F'(-\frac{\omega}{2}) - F(-\frac{\omega}{2})$

6). $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$

$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega)$

$\mathcal{F}[tf'(t)] = i\frac{d}{d\omega}[i\omega F(\omega)]$

$= -(F(\omega) + \omega F'(\omega))$

7. $f(t) * g(t)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds$

$s<0$时, $f(s)=0$;

$s<t-\frac{\pi}{2}$ 或 $s \geq t$ 时, $g(t-s)=0$.

$\therefore$ 当 $t \leq 0$ 时, $f(t)*g(t)=0$.

当 $0<t<\frac{\pi}{2}$ 时,

$f(t)*g(t) = \int_0^t e^{-s}\sin(t-s)ds$

$= \frac{1}{2i}\int_0^t (e^{it}e^{-(i+1)s} - e^{-it}e^{(i-1)s})ds$

$= \frac{1}{2i}\cdot(e^{it}\cdot\frac{-1}{i+1}(e^{-(i+1)t}-1) - e^{-it}\cdot\frac{1}{i-1}(e^{(i-1)t}-1))$

$= \frac{1}{2i}\left[(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)(e^{-t}-e^{it}) + (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)(e^{-t}-e^{-it})\right]$

$= \frac{1}{2i}\left[ie^{-t} - (-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)e^{it} - (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)e^{-it}\right]$

$= \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{-it}-e^{it}}{2} + \frac{i(e^{it}+e^{-it})}{2}\right]$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}-\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}(\sin t-\cos t)$$

当 $t\geq\frac{\pi}{2}$ 时

$$f(t)*g(t)=\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t}e^{-s}\sin(t-s)\,ds$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-(t-\frac{\pi}{2})}$$

8.(2) 记 $\mathcal{F}[x(t)]=X(\omega)$

$$\mathcal{F}[x'(t)]=i\omega X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t}x(s)\,ds=u(t)*x(t).$$

单位阶跃函数 $u(t)$ 的傅里叶变换为

$$\therefore\ \mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega).$$

$$x'(t)-9u(t)*x(t)=e^{-|t|}$$

对方程两端作傅里叶变换

$$i\omega X(\omega)-9\left(\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right)X(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$$

当 $\omega=0$ 时 $\because \int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{i\omega t}\,dt=X(0)$ $\therefore X(0)=0$

$$\therefore\ \delta(\omega)X(\omega)=0.$$

即：$$\left(i\omega-\frac{9}{i\omega}\right)X(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$$

$$X(\omega)=-\frac{2i\omega}{(\omega^2+1)(\omega^2+9)}$$

$$\therefore x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{2i\omega}{(\omega^2+1)(\omega^2+9)}e^{i\omega t}\,d\omega\right)$$

记 $f(z) = -\frac{2iz}{(z^2+1)(z^2+9)} e^{itz}$

$t>0$时，上半平面奇点为 $z=i$ 和 $z=3i$，均为一阶极点，

$\mathrm{Res}[f(z), i] = -\frac{1}{8} i e^{-t}$

$\mathrm{Res}[f(z), 3i] = \frac{1}{8} i e^{-3t}$

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\, d\omega = (-\frac{1}{8} i e^{-t} + \frac{1}{8} i e^{-3t}) \times 2\pi i$

$\therefore x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\, d\omega = \frac{1}{8}(e^{-t} - e^{-3t})$

$t<0$时，下半平面奇点为 $z=-i$ 和 $z=-3i$，均为一阶极点，

类似得，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\, d\omega = (\frac{1}{8} i e^{t} - \frac{1}{8} i e^{3t}) \times 2\pi i$

$x(t) = \frac{1}{8}(e^{3t} - e^{t})$

综上，$x(t) = \frac{1}{8}(e^{-|t|} - e^{-3|t|}) \cdot \mathrm{sgn}(t)$，其中

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t=0 \\ -1, & t<0 \end{cases}$$