FFT

스터디 4주차 - 문종건

fragmentbombs@gmail.com

1067 - 이동(P1)

01

문제

N개의 수가 있는 X와 Y가 있다. 이때 X나 Y를 순환 이동시킬 수 있다.(마지막 원소 제거 후 앞에 삽입)
S = X[0]*Y[0] + X[1]*Y[1] + ... + X[N-1]*Y[N-1]일때
S의 최댓값을 구하시오.

02

조건

1<=N<=60,000
0<=(수열 내 각 원소)<=100

03

분류

FFT

FFT(Fast Fourier Transform)

- PS의 범주에서(활용 위주로)

01

용도

합성곱(convolution)을 O(NlogN)
에 구할 수 있다.

02

합성곱?

A={a0,a1,...,aN-1},
B={b0,b1,...,bN-1}인 벡터가 있을때,
합성곱 C=A*B는 길이가 2*N-1이고
C0=a0b0,
C1=a0b1+a1b0,
C2=a0b2+a1b1+a2b0,
C(2N-2)=A(N-1)B(N-1)

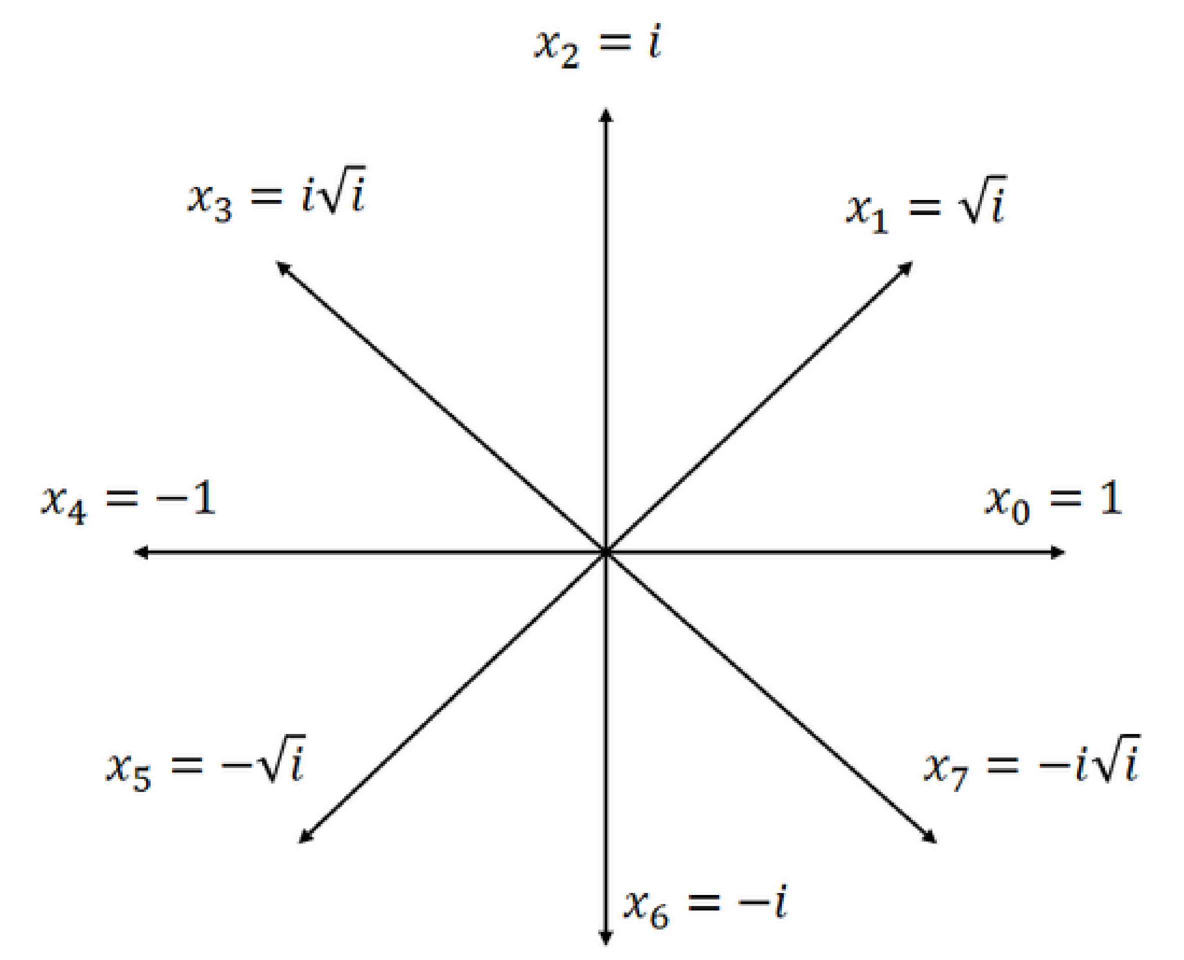
03

더 직관적인 의미?

A와 B가 각각 다항식 f(x), g(x)의 차수 별 계
수라고 하면(aN은 N차항의 계수),
C는 f(x)와 g(x)를 곱한 결과의 계수들이 된다.

DFT(Discrete Fourier Transform)

복소수의 형변환



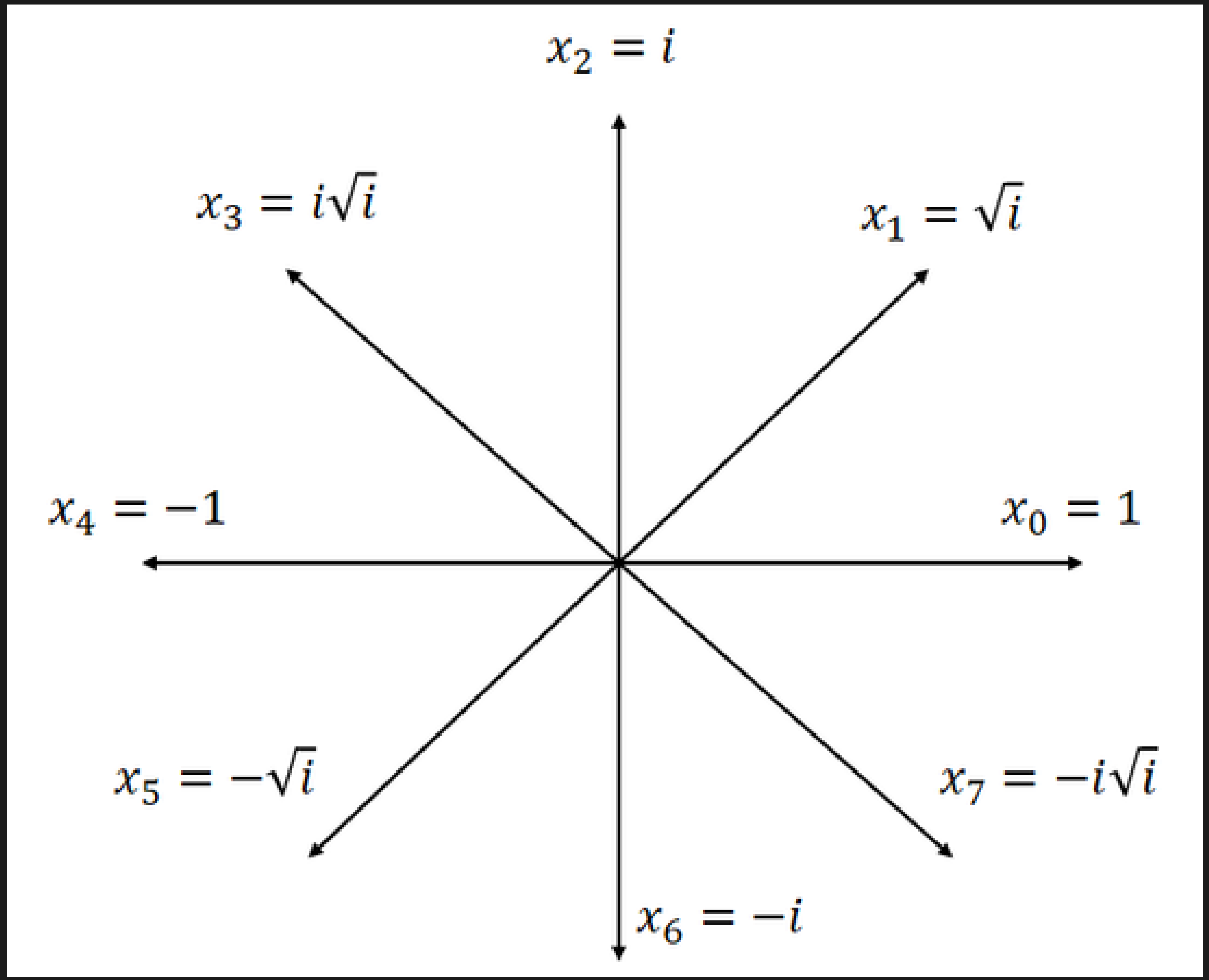
n-th root of unity(n은 2의 멱수)

z^n=1이 되는 복소수 z
이때 n보다 작은 자연수 k에 대해 k승을 하는 것으로는 1이 될 수 없는 복소수를 principal n-th root of unity라 하고, X(k)=X(1)^K로 정의하여 N개의 n-th root of unity를 구할 수 있다.

DFT/IDFT(Inverse DFT)

앞서 구한 n-th root of unity들의 n-1차 다항식 함수 f(x)값을 구하는 작업을 수행할 수 있다. O(N^2)
이후 함수 f(x),g(x)의 값들을 곱해 h(x)를 얻고, 다시 IDFT를 통해 구하고자 하는 합성곱 C수열을 얻어낼 수 있다.

FFT의 원리



N-TH ROOT OF UNITY의 기본 성질

오일러 공식에 의해 Xk는 e^(2kπi/n) = cos(2kπ/n) + sin(2kπ/n)i이다.
Xk=-X(k+n/2)이다.

분할 정복

DFT를 적용하고자 하는 f(x)를 짝수차항과 홀수차항으로 분리하여 계산하고, 위의 성질을 이용하면 계산 횟수를 줄여 분할 정복을 적용 가능하다.

시간 복잡도

T(n)=2T(n/2)+O(n)
즉 O(NlogN)의 복잡도

문제 풀이

N개의 수가 있는 X와 Y가 있다. 이때 X나 Y를 순환 이동시킬 수 있다. 순환 이동이란 마지막 원소를 제거하고 그 수를 맨 앞으로 다시 삽입하는 것을 말한다. 예를 들어, {1, 2, 3}을 순환 이동시키면 {3, 1, 2}가 될 것이고, {3, 1, 2}는 {2, 3, 1}이 된다. 순환 이동은 0번 또는 그 이상 할 수 있다. 이 모든 순환 이동을 한 후에 점수를 구하면 된다. 점수 S는 다음과 같이 구한다.

$S = X[0]\times Y[0] + X[1]\times Y[1] + \ldots + X[N-1]\times Y[N-1]$

이때 S를 최대로 하면 된다.

첫째 줄에 N이 주어진다. 둘째 줄에는 X에 들어있는 N개의 수가 주어진다. 셋째 줄에는 Y에 있는 수가 모두 주어진다. N은 60,000보다 작거나 같은 자연수이고, X와 Y에 들어있는 모든 수는 100보다 작은 자연수 또는 0이다.

접근

구하고자 하는 S가 합성곱 수열의 각 원소 구조와 너무나도 유사하게 생겼다. FFT를 활용할 수 있을지 모른다.

순환 이동?

X를 그대로 한번 더 이어 붙이고, Y의 순서를 반대로 입력받으면,

늘어난 X와 Y의 합성곱 수열 원소는 어차피 더 짧은 Y의 길이에 제한을 받아,

최대 N개 항들의 곱의 합으로 이루어질 수 밖에 없다.
(앞서 언급한 합성곱 수열의 의미를 생각해보자)

최댓값 보장

처음 주어지는 수열의 모든 값이 0 이상의 정수임이 보장되기 때문에,

합성곱 수열 전체를 순회하면서 최댓값을 탐색해도 아무런 무리가 없다.

N개 미만의 항들의 곱으로 이루어져 S의 조건을 충족하지 못하는 항들은 어차피 최댓값이 될 수 없다.