

Práctica 3.6

Robert Lu Zheng

Cálculo I

112702

3-750-980

Relaciones derivadas de Gráficas

1) d Gráfica lineal $\xrightarrow{\text{derivada}}$ constante

3) a Gráfica coseno $\xrightarrow{\text{derivada}}$ seno

Dibujar f(x). Indicar intersecciones, extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas.

5) Intersecciones: En x: $(\frac{7}{3}, 0)$ En y: $(0, -\frac{7}{2})$

$$y = \frac{1}{x-2} - \frac{3}{1}$$

Extremos relativos:

Puntos de inflexión:

$$y = \frac{1-3x+6}{x-2}$$

Asíntotas: Asíntota horizontal: $y = -3$

Asíntota vertical: $x = 2$

$$y = \frac{-3x+7}{x-2}$$

Asíntota vertical

$$x-2=0$$

$$x=2$$

Puntos críticos

$$y = \frac{-3x+7}{x-2} \rightarrow y' = \frac{-3(x-2) - 1(-3x+7)}{(x-2)^2}$$

$$y' = \frac{-3x+6+3x-7}{(x-2)^2}$$

$$y' = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

No tiene puntos críticos, por lo que no tiene extremos relativos ni puntos de inflexión.

Asíntota horizontal

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x+7}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{x} + \frac{7}{x} = -3 + 0 = -3$$

$$= \frac{-3+0}{1-0} = -3$$

Intersecciones

En x

$$\frac{-3x+7}{x-2} = 0$$

$$-3x+7=0$$

$$-3x = -7$$

$$x = \frac{7}{3}$$

$$y = \frac{-3(\frac{7}{3})+7}{\frac{7}{3}-2} = \frac{-7+7}{\frac{7}{3}-2} = \frac{0}{\frac{1}{3}} = 0$$

$$y = \frac{-7+7}{\frac{7}{3}-2} = \frac{0}{\frac{1}{3}} = 0$$

$$y = \frac{0}{\frac{1}{3}} = 0$$

En y

$$y = \frac{-3x+7}{x-2}$$

$$y = \frac{-3(0)+7}{0-2} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$$

$$y = \frac{7}{-2}$$

$$y = -\frac{7}{2}$$

$$\frac{-3x+7}{x-2} = -\frac{7}{2}$$

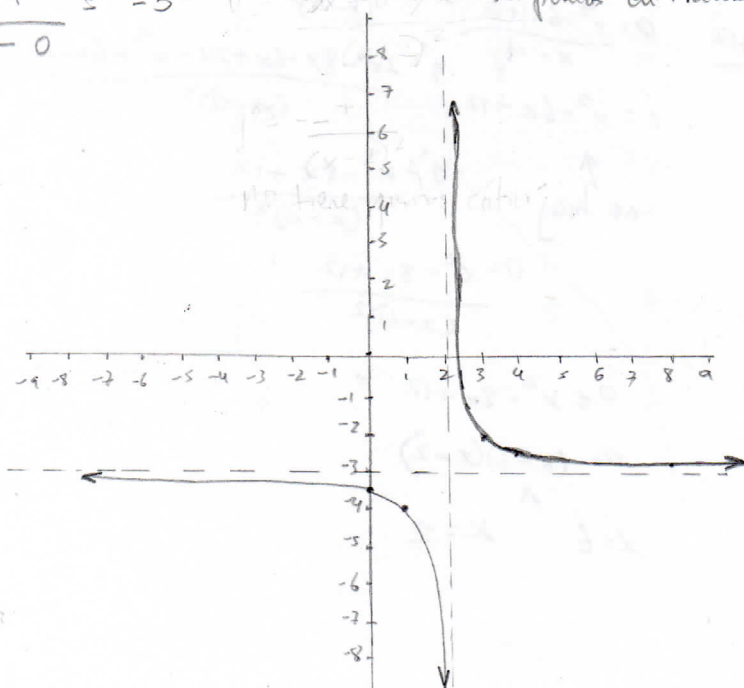
$$-3x+7 = -\frac{7}{2}(x-2)$$

$$-3x+7 = -\frac{7x}{2} + 7$$

$$-3x = -\frac{7x}{2}$$

$$-6x = -7x$$

$$x=0$$



x	0	1	3	4	8
y	-3.5	-4	-2	-2.5	-2.4

2) $y = \frac{3x}{x^2-1}$

Intersecciones: Ambos en (0,0)

Puntos de inflexión: no tiene

Extremos relativos: no tiene

Asíntotas verticales: $x = \pm 1$; horizontal: $y = 0$

$x^2-1=0$

$x^2=1$

$x = \pm 1$

horizontal
 $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2-1}$

$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x - \frac{1}{x}} = 0$

$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6}{x^6} \rightarrow y = 0$

Intersecciones:

En y

$y = \frac{3(0)}{(0)^2-1} = 0$

$y = 0$
(0,0)

En x

$0 = \frac{3x}{x^2-1}$

$3x = 0$

$x = 0$

Puntos críticos

$y = \frac{3x}{x^2-1}$

$y' = \frac{3(x^2-1) - 2x(3x)}{x^4-1}$

$y' = \frac{3x^2-3-6x^2}{x^4-1}$

$y' = \frac{-3x^2-3}{x^4-1}$

No tiene puntos críticos,
ni puntos de inflexión
y extremos
relativos.

$0 = \frac{-3x^2-3}{x^4-1} \rightarrow -3x^2-3 = 0$

$-3x^2 = 3$

$x^2 = -1$

$x = \pm i$

x	y
-4	0.71
-3	0.9
-2	-2
-0.5	2
0.5	-2
2	2
3	1.125
4	0.8

$(2x-6)(x-4)$

3) $y = \frac{x^2-6x+12}{x-4}$

Asíntotas

Vertical

$x-4=0$

$x = 4$

Oblicua

$y = mx+n$

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-6x+12}{x-4}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-6x+12}{x^2-4x}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{6x}{x^2} + \frac{12}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2}}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2}}{1 - \frac{4}{x}}$

$m = 1$

Intersecciones: En y: (0, -3); En x: no hay

Puntos de inflexión: no tiene

Extremos relativos: $x = 6, -2$

Asíntotas: $x = 4, y = x-2$

$y = x-2$

$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2-6x+12}{x-4} - \frac{x}{1} \right]$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2-6x+12-x^2+4x}{x-4} \right]$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-2x+12}{x-4} \right]$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-2}{1} + \frac{12}{x} \right]$

$= -2$ $n = -2$

Intersecciones

En y

$y = \frac{(0)^2-6(0)+12}{0-4} = -3$

$y = -3$

$-3x^2-6x+12 = 0$

$-3x^2-6x+12 = 0$

$x^2+2x-4 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2}$

$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$

$x = -1 + \sqrt{5}$

En x

$0 = \frac{x^2-6x+12}{x-4}$

$0 = x^2-6x+12$

no hay

$0 = x^2-8x+12$

$0 = x^2-8x+12$

$0 = (x-6)(x-2)$

$x = 6$ $x = 2$

Puntos críticos

$y' = \frac{(2x-6)(x-4) - 1(x^2-6x+12)}{(x-4)^2}$

$y' = \frac{2x^2-8x-6x+24-x^2+6x-12}{(x-4)^2}$

$y' = \frac{x^2-8x+12}{(x-4)^2}$

$0 = x^2-8x+12$

$0 = x^2-8x+12$

$0 = (x-6)(x-2)$

$x = 6$ $x = 2$

Puntos críticos

$$x=6$$

$$x=2$$



$$x=6$$

$$x=2$$

$$f'(3) = -3 < 0$$

$$f'(7) = 0.55 > 0$$

$$f'(3) = -51 < 0$$

$$f'(1) = 0.55 > 0$$

Punto máximo en
 $x=6$

Punto mínimo en
 $x=2$

$$y' = \frac{x^2 - 8x + 12}{(x-4)^2}$$

$$y'' = \frac{(2x-8)(x-4)^2 - 2(x-4)(1)(x^2-8x+12)}{(x-4)^4}$$

$$y'' = \frac{(x-4)[(2x-8)(x-4) - 2x^2 + 16x - 24]}{(x-4)^4}$$

$$y'' = \frac{2x^2 - 8x - 8x + 32 - 2x^2 + 16x - 24}{(x-4)^3}$$

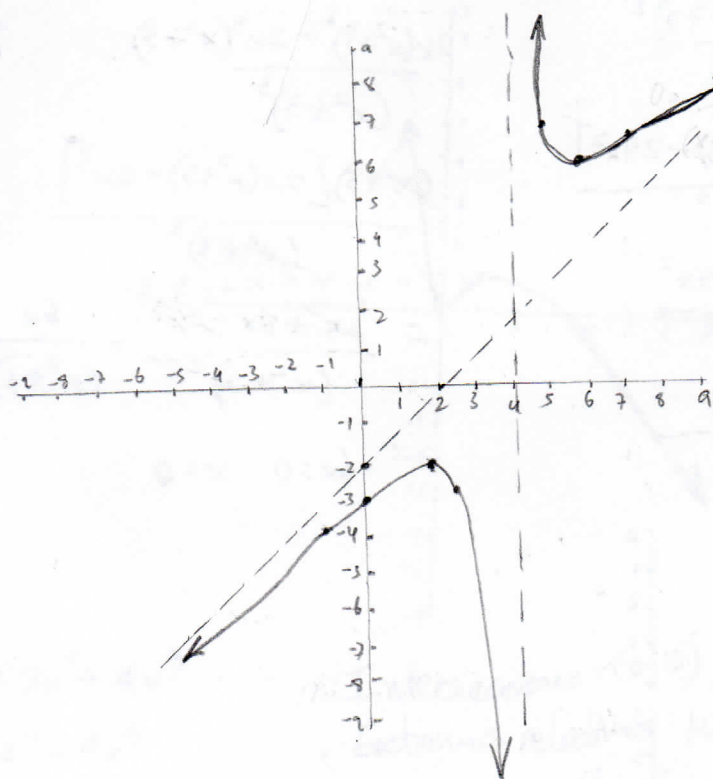
$$y'' = \frac{8}{(x-4)^3} \quad \leftarrow \text{no tiene punto de inflexión}$$

$$y = \frac{x^2 - 6x + 12}{x-4}$$

$$y = x - 2$$

x	y
0	-2
2	0

x	y
-1	-3.8
0	-3
2	-2
2.5	-2.17
5	7
6	6
8	7



$$7) y = \frac{x^2}{x^2+3}$$

Intersecciones: $x \geq 0 \quad y = 0$

Extremos Relativos: Mínimo $(0,0)$

Puntos de inflexión: $(-1, \frac{1}{4}) \cup (1, \frac{1}{4})$

Asíntotas: Horizontal: $y=1$

$$x^2+3=0$$

$$x^2=-3$$

↓
no tiene asíntota vertical

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$0 = \frac{x^2}{x^2+3}$$

$$0 = x^2$$

$$x=0$$

$$y = x^2(x^2+3)^{-1}$$

$$y' = x^2(x^2+3)^{-1} + (x^2+3)^{-1} x^2$$

$$= \frac{2x}{x^2+3} + \frac{(-1)(x^2)(2x)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{2x}{x^2+3} - \frac{2x^3}{(x^2+3)^2}$$

$$y'' = \frac{6x}{(x^2+3)^2}$$

$$= 6x(x^2+3)^{-2}$$

$$= 6x^1(x^2+3)^{-2} + (x^2+3)^{-2} (6x)$$

$$= \frac{6}{(x^2+3)^2} + \frac{(-2)(6x)(2x)}{(x^2+3)^3}$$

$$= \frac{6}{(x^2+3)^2} - \frac{24x^2}{(x^2+3)^3}$$

$$= \frac{6(x^2+3)^3 - 24x^2(x^2+3)^2}{(x^2+3)^5}$$

$$= \frac{(x^2+3)^2 [6(x^2+3) - 24x^2]}{(x^2+3)^5}$$

$$= \frac{6x^2 + 18 - 24x^2}{(x^2+3)^3}$$

$$0 = \frac{-18x^2 + 18}{(x^2+3)^3}$$

$$= \frac{2x(x^2+3)^2 - 2x^3(x^2+3)}{(x^2+3)^3}$$

$$= \frac{(x^2+3)[2x(x^2+3) - 2x^3]}{(x^2+3)^3}$$

$$= \frac{2x^3 + 6x - 2x^3}{(x^2+3)^2} = \frac{6x}{(x^2+3)^2} = 0$$

$$= 6x \geq 0 \quad x \geq 0$$

$$0 = -18x^2 + 18$$

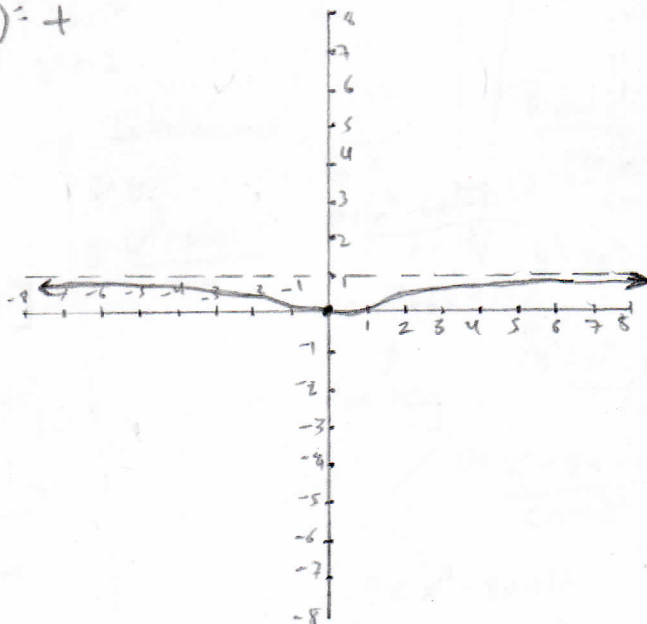
$$0 = -18(x^2 - 1)$$

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 \geq 1$$

$$x = \pm 1$$

$$f''(0) = +$$



17) $y = 3x^{2/3} - 2x$

$0 = 3x^{2/3} - 2x$

$0 = x^{2/3}(3 - 2x^{1/3})$

$x = 0$ $3 - 2x^{1/3} = 0$

$x > 0$ $3 = 2x^{1/3}$

$(3)^3 = (2x^{1/3})^3$

$27 = 8x$

$\frac{27}{8} = x$

Intersecciones: $(\frac{27}{8}, 0) \cup (0, 0)$

Extremos relativos: $(1, 1)$ ← máximo

Puntos de inflexión: no tiene

Asíntotas: no tiene

$y' = 3x^{-1/3} - 2x$

$= \frac{2}{3}x^{-1/3} - 2$

$= 2x^{-1/3} - 2$

$= 2(x^{-1/3} - 1)$

$x^{-1/3} - 1 = 0$

$x^{-1/3} = 1$

$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 1$

$1 = \sqrt[3]{x}$

$1 = x$

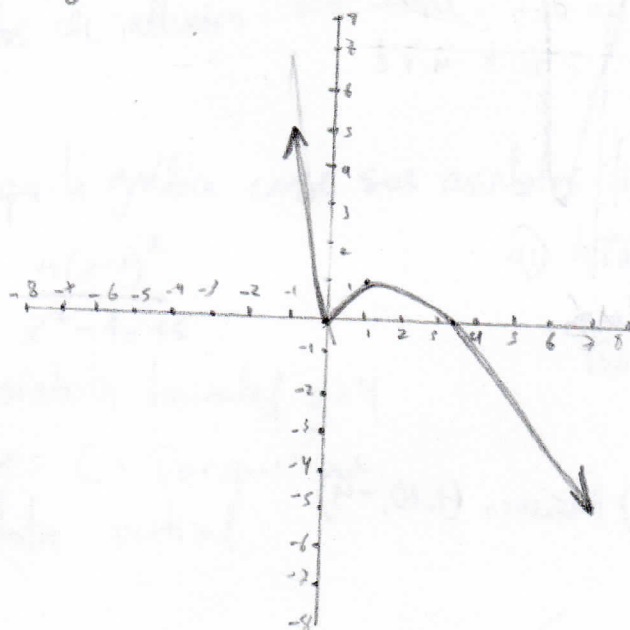
$y'' = 2x^{-4/3} - 2$

$0 = -\frac{1}{3}2x^{-4/3}$

$0 = x^{-4/3}$

↑ no hay

$f''(1) = -$



21) $y = 3x^4 + 4x^3$

$0 = 3x^4 + 4x^3$

$= x^3(3x + 4)$

$x = 0$ $3x + 4 = 0$

$3x = -4$

$x = -\frac{4}{3}$

$y' = 12x^3 + 12x^2$

$0 = 12x^3 + 12x^2$

$0 = 12x^2(x + 1)$

$x = 0$ $x + 1 = 0$

$x = -1$

Intersecciones: $(0, 0), (-\frac{4}{3}, 0)$

Extremos relativos: Mínimo $(-1, -1)$

Puntos de inflexión: $(0, 0) \cup (-\frac{2}{3}, -\frac{16}{27})$

Asíntotas: no tiene

$y'' = 12x^3 + 12x^2$

$0 = 36x^2 + 24x$

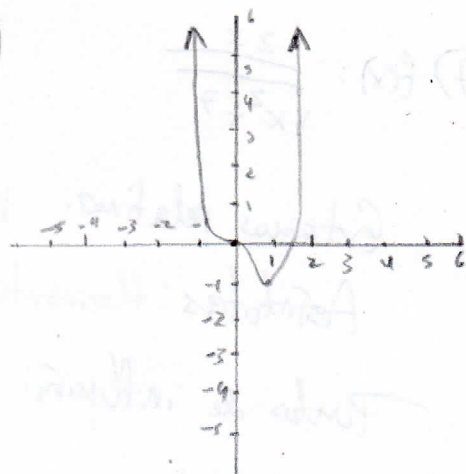
$0 = 12x(3x + 2)$

$x = 0$ $3x + 2 = 0$

$3x = -2$

$x = -\frac{2}{3}$

$f''(-1) = +$



23) $y = x^5 - 5x$

$0 = x^5 - 5x$

$0 = x(x^4 - 5)$

$x \neq 0 \quad x^4 - 5 = 0$
 $x^4 = 5$
 $x = \sqrt[4]{5}$

Intersecciones: $(0,0), (\sqrt[4]{5}, 0)$

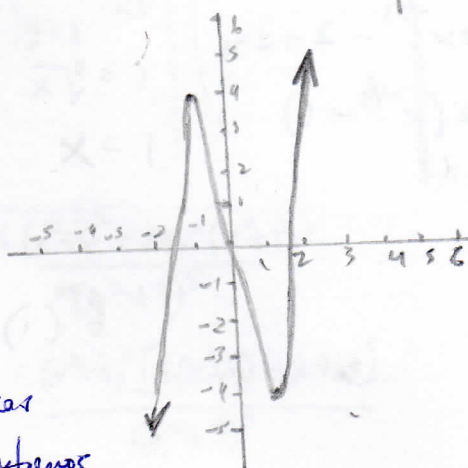
Extremos relativos: Mínimo $= (1, -4)$ y Máximo $= (-1, 4)$

Puntos de inflexión: $(0,0)$

Asíntotas: no tiene

$y' = x^4 - 5$
 $0 = x^4 - 5$
 $\frac{5}{5} = \frac{x^4}{5}$
 $1 = x^4$
 $x = \pm 1$

$y'' = 4x^3 - 5$
 $= 20x^3 - 5$
 $x = 0$
 $f''(1) = +$
 $f''(-1) = -$



Utilizar tecnología para graficar e identificar gráficamente los extremos relativos, asíntotas y puntos de inflexión.

25) $f(x) = \frac{20x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$

Extremos relativos: Máximo $= (1.10, 9)$ Mínimo $= (1.10, -9)$

Asíntotas: vertical $= x = 0$

Puntos de inflexión: $(2, 7.5)$ $(-2, -7.5)$

27) $f(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2+7}}$

Extremos relativos: no tiene

Asíntotas: horizontales: $y = \pm 2$

Punto de inflexión: $(0,0)$

29) $f(x) = 2x - 4\sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

Extremos relativos: Mínimo: $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3})$ Máximo: $(\frac{5\pi}{3}, \frac{10\pi}{3} + 2\sqrt{3})$

Asíntotas: no tiene

Puntos de inflexión: $(\pi, 6)$

31) $y = \cos x - \frac{1}{4} \cos 2x$ $0 \leq x \leq 2\pi$

Extremos relativos: no tiene

Asíntotas: no tiene

Puntos de inflexión: no tiene

Es posible que la gráfica cruce sus asíntotas horizontales o verticales

39) $f(x) = \frac{4(x-1)^2}{x^2 - 4x + 5}$

Cruza la asíntota horizontal $y=4$

Pero no $x=1$. Porque no existe asíntota vertical.

41) $h(x) = \frac{\sin 2x}{x}$

- No toca $x=0$. Pero sí la cruza.

43) $h(x) = \frac{6-2x}{3-x}$ Explícas porque no existe asíntota vertical

Porque se puede factorizar y se evita la asíntota.

45)

$$f(x) = \frac{-x^2 - 3x - 1}{x - 2}$$

Tiende a una asíntota
de $y = -x + 1$

47)

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$$

Incrementa por doble.
Por lo que la asíntota
es $y = 2x$.