Práctica 3.4

Robert Lu Zheng
11L702
Cálculo I
3-750-1980

5) Determinar intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x - 1$

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$

$0 = -3x^2 + 12x - 9$

$0 = x^2 - 4x + 3$

$(x-3)(x-1)$

$x = 3$

$x = 1$

$+ \quad 1 \quad - \quad 3 \quad +$

$f''(x) = -6x + 12$

$0 = -6x + 12$

$-12 = -6x$

$x = 2$

$f''(1) = +$

$f''(3) = -$

Cóncava hacia arriba: $(-\infty, 2)$

Cóncava hacia abajo: $(2, \infty)$

7) $f(x) = \dfrac{24}{x^2+12} = f(x) = 24(x^2+12)^{-1}$

$f'(x) = 24(-1)(x^2+12)^{-2}(2x)$

$= -24(x^2+12)^{-2}(2x)$

$0 = \dfrac{-48x}{(x^2+12)^2}$

$0 = -48x$

$x = 0$

$-2 \quad 0 \quad 2$

$f''(0) = -$

$f''(x) = \dfrac{-48x}{(x^2+12)^2}$

$= -48x(x^2+12)^{-2}$

$= -48x'(x^2+12)^{-2} + (x^2+12)^{-2\,\prime} \cdot (-48x)$

$= \dfrac{-48}{(x^2+12)^2} + -2(x^2+12)^{-3}(2x)(-48x)$

$= \dfrac{-48}{(x^2+12)^2} + \dfrac{192x^2}{(x^2+12)^3}$

$0 = \dfrac{-48(x^2+12)^3 + 192x^2(x^2+12)^2}{(x^2+12)^5}$

$0 = \dfrac{(x^2+12)^2\left[-48(x^2+12) + 192x^2\right]}{(x^2+12)^5}$

$0 = \dfrac{-48x^2 - 576 + 192x^2}{(x^2+12)^3}$

$f''(x)$ $0 = \dfrac{144x^2 - 576}{(x^2+12)^3}$

$0 = 144x^2 - 576$

$576 = 144x^2$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

Cóncava hacia abajo: $(-2, 2)$

9) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

$f(x) = (x^2+1)(x^2-1)^{-1}$

$f'(x) = (x^2+1)'(x^2-1)^{-1} + (x^2-1)^{-1\,\prime}(x^2+1)$

$= \dfrac{2x}{x^2-1} + \dfrac{(-1)(2x)(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

$= \dfrac{2x}{x^2-1} + \dfrac{(-2x^3-2x)}{(x^2-1)^2}$

$= \dfrac{2x(x^2-1)^2 + (x^2-1)(-2x^3-2x)}{(x^2-1)^3}$

$= \dfrac{(x^2-1)\left[2x(x^2-1) + (-2x^3-2x)\right]}{(x^2-1)^3}$

$= \dfrac{\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3} - 2x}{(x^2-1)^2}$

$f'(x)$ $0 = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$

$0 = -4x$

$x = 0$

$D = x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

este punto no cuenta pero la evaluamos para saber su signo.

este cuenta debido a que son intervalos abiertos

$f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$

$= -4x(x^2-1)^{-2}$

$= (-4x)'(x^2-1)^{-2} + (x^2-1)^{-2'}(-4x)$

$= \dfrac{-4}{(x^2-1)^2} + \dfrac{(-2)(2x)(-4x)}{(x^2-1)^3}$

$= \dfrac{-4(x^2-1)^3 + (x^2-1)^2(16x^2)}{(x^2-1)^5}$

$= \dfrac{(x^2-1)^2\left[-4(x^2-1) + 16x^2\right]}{(x^2-1)^5}$

$= \dfrac{-4x^2+4+16x^2}{(x^2-1)^3}$

$f''(x) = \dfrac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$

$+ \quad -1 \quad - \quad 1 \quad +$

$f''(0) = -$

Cóncava hacia arriba: $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

Cóncava hacia abajo: $(-1,1)$

11) $g(x) = \dfrac{x^2+4}{4-x^2}$

$g'(x) = (x^2+4)(4-x^2)^{-1}$

$= (x^2+4)'(4-x^2)^{-1} + (4-x^2)^{-1'}(x^2+4)$

$= \dfrac{(2x)}{4-x^2} + \dfrac{(-2x)(-1)(x^2+4)}{(4-x^2)^2}$

$= \dfrac{2x(4-x^2)^2 + (4-x^2)(2x^3+8x)}{(4-x^2)^2}$

$= \dfrac{(4-x^2)\left[2x(4-x^2) + 2x^3+8x\right]}{(4-x^2)^2}$

$= \dfrac{8x \cancel{-2x^3} \cancel{+2x^3} + 8x}{(4-x^2)^2}$

$0 = \dfrac{16x}{(4-x^2)^2}$

$0 = 16x \qquad D: 4-x^2 = 0$

$x = 0 \qquad 4 = x^2$

$x = \pm 2$

$(4-x)(4-x)$

$g''(x) = \dfrac{16x}{(4-x^2)^2}$

$= (16x)(4-x^2)^{-2}$

$= (16x)'(4-x^2)^{-2} + (4-x^2)^{-2'}(16x)$

$= \dfrac{16}{(4-x^2)^2} + \dfrac{(-2)(-2x)(16x)}{(4-x^2)^3}$

$= \dfrac{16(4-x^2)^3 + (4-x^2)^2(64x^2)}{(4-x^2)^5}$

$= \dfrac{(4-x^2)^2\left[16(4-x^2) + 64x^2\right]}{(4-x^2)^5}$

$= \dfrac{64-16x^2+64x^2}{(4-x^2)^3}$

$g''(x) = \dfrac{64-48x^2}{(4-x^2)^3}$

$- \quad -2 \quad + \quad 2 \quad -$

$g''(0) = +$

Cóncava hacia arriba: $(-2,2)$

Cóncava hacia abajo: $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

13) $y = 2x - \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$= 2x' - \tan x'$

$y' = 2 - \sec^2 x$

$0 = 2 - \sec^2 x$

$-2 = -\sec^2 x$

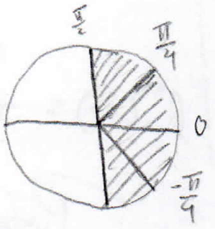
$-2 = -\frac{1}{\cos^2 x}$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = 45°$

$x = -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$

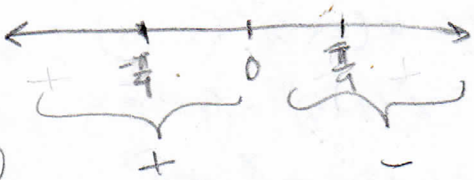


$y'' = 2 - \sec^2 x$

$= 2' - (\sec x)^{2'}$

$= -2\sec x(\sec x \cdot \tan x)$

$= -2\sec^2 x \tan x$



$x = 0$ ← inflexión (donde cambia la concavidad)

críticos (donde la derivada es 0.) Ley de Rolle.

$f''\left(-\frac{\pi}{4}\right) = +$

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -$

Cóncava hacia arriba: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Cóncava hacia abajo: $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

Puntos de inflexión y concavidad

17) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3$

$f'(x) = \frac{1}{2}4x^3 + 6x^2$

$f'(x) = 2x^3 + 6x^2$

$0 = 2x^3 + 6x^2$

$-6x^2 = 2x^3$

$\frac{-6x^2}{2x^2} = \frac{2x^3}{2x^2}$

$-3 = x$

$f''(x) = 2x^3 + 6x^2$

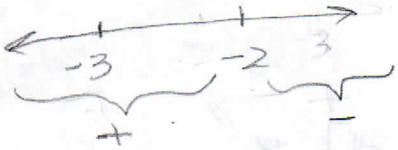
$f''(x) = 0 = 6x^2 + 12x$

$0 = 6x^2 + 12x$

$-12x = 6x^2$

$-2 = x$

$f''(-3) = +$



Punto de inflexión $= (-2, -8)$

Concavidad hacia arriba: $(-2, \infty)$

Concavidad hacia abajo: $(-\infty, -2)$

19) $f(x) = x(x-4)^3$

$f'(x) = x'(x-4)^3 + (x-4)^{3'}x$

$f'(x) = 0 = (x-4)^3 + 3(x-4)^2 x$

$0 = (x-4)^3 + 3x(x-4)^2$

$-3x(x-4)^2 = (x-4)^3$

$-3x = x-4$

$4 = 4x$

$x = 1$

$0 = (x-4)^3$

$x - 4 = 0$

$x = 4$

$f''(x) = (x-4)^3 + 3x(x-4)^2$

$= (x-4)^{3'} + 3x'(x-4)^2 + (x-4)^{2'}3x$

$= 3(x-4)^2 + 3(x-4)^2 + 2(x-4)3x$

$= 3(x^2 - 8x + 16) + 3(x^2 - 8x + 16) + 6x^2 - 24x$

$= 3x^2 - 24x + 48 + 3x^2 - 24x + 48 + 6x^2 - 24x$

$0 = 12x^2 - 72x + 96$

$0 = x^2 - 6x + 8$

$0 = (x-4)(x-2)$

$x = 4 \quad x = 2$

Punto de inflexión: $(2, 16) \cup (4, 0)$

Concavidad hacia arriba: $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

Concavidad hacia abajo: $(2, 4)$

21) $f(x) = x\sqrt{x+3}$

$f'(x) = x(x+3)^{1/2}$

$= x'(x+3)^{1/2} + (x+3)^{1/2'}x$

$= (x+3)^{1/2} + \frac{x}{2}(x+3)^{-1/2}$

$f''(x) = (x+3)^{1/2'} + \frac{1}{2}x'(x+3)^{-1/2} + (x+3)^{-1/2'}\frac{x}{2}$

$= \frac{1}{2}(x+3)^{-1/2} + \frac{1}{2}(x+3)^{-1/2} + -\frac{1}{2}(x+3)^{-3/2}\frac{x}{2}$

$= (x+3)^{-1/2} - \frac{x}{4}(x+3)^{-3/2}$

$f''(x) = \frac{1}{(x+3)^{1/2}} - \frac{x}{4(x+3)^{3/2}}$

$= \frac{4(x+3)^{3/2} - x(x+3)^{1/2}}{4(x+3)^2}$

$f''(x) = \frac{4\sqrt{(x+3)^3} - x\sqrt{x+3}}{4(x+3)^2}$

$f''(-3) = +$

$D = x+3 \geq 0$

$x \geq -3$

No tiene punto de inflexión porque es menor al Dominio. De aquí se evalúa la concavidad.

$-3 \quad +$

Puntos de inflexión no tiene

Cóncava hacia arriba: $[-3, \infty)$

23) $f(x) = \operatorname{sen}\frac{x}{2}$, $[0, 4\pi]$

$f'(x) = \cos\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$

$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$0 = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$

$0 = \operatorname{sen}\frac{x}{2}$

$\frac{x}{2} = \operatorname{sen}^{-1}(0)$

$\frac{x}{2} = 0$

$x = 0°$

$x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -$

$0 \quad - \quad \pi \quad + \quad 2\pi \quad - \quad 3\pi \quad + \quad 4\pi$

Puntos de inflexión: $(0,0) \cup (\pi, 1) \cup (2\pi, 0) \cup (3\pi, -1) \cup (4\pi, 0)$

Cóncava hacia arriba: $(\pi, 2\pi) \cup (3\pi, 4\pi]$

Cóncava hacia abajo: $[0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi)$

29) $f(x) = 2\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x$ $[0, 2\pi]$ *

$f'(x) = 2\operatorname{sen}x' + \operatorname{sen}2x'$

$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$

$f''(x) = 2(-\operatorname{sen}x) + 2(-\operatorname{sen}2x)(2)$

$0 = -2\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}2x$

$2\operatorname{sen}x = -4\operatorname{sen}2x$

$\operatorname{sen}x = -2\operatorname{sen}2x$

$\operatorname{sen}x = -2(2\operatorname{sen}x\cos x)$

$\operatorname{sen}x = -4\,\cancel{\operatorname{sen}x}\cos x$

$0 = -4\cos x$

$\cos x = 0$

$x = \cos^{-1}(0)$

$x = 90°$

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$-2 \quad -$

Encontrar extremos relativos.

33) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$0 = 3x^2 - 6x$

$0 = 3x(x-2)$

$3x = 0$ $\quad x - 2 = 0$

$x = 0$ $\quad x = 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = -$

$f''(2) = +$

Máximo : $(0, 3)$

Mínimo : $(2, -1)$

37) $f(x) = x^{2/3} - 3$

$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$ $\quad D = [0, \infty^+)$ se evalúa

Mínimo relativo = $(0, -3)$

$0 = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ ← Como no se puede evaluar. Se usa el dominio.

41) $f(x) = \cos x - x$, $[0, 4\pi]$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1$

$0 = -\operatorname{sen} x - 1$

$1 = -\operatorname{sen} x$

$-1 = \operatorname{sen} x$

$x = \operatorname{sen}^{-1}(-1)$

$x = -90°$

no entra en el dominio. Además que no es mayor a 0. Por lo tanto, no tiene extremos relativos porque no es creciente.