UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

APUNTES: MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Por: Benigna E. Fernández de Guardia

Edición 2018

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En este folleto se despliega el desarrollo del tema "Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales" que es común a los cursos de matemática en todas las facultades para las carreras de Licenciatura en Ingeniería que se ofrece en la Universidad Tecnológica de Panamá. Han sido actualizados a lo largo de los años generando esta última versión que es utilizada actualmente.

Este folleto se ha editado en un lenguaje sencillo y puntual, de tal manera que pueda contribuir en la comprensión de los temas por parte de los estudiantes. Se plantea una variedad de ejemplos que complementan la teoría de tal manera que el alumno pueda movilizar los conocimientos previos para integrarlos al curso y seguir avanzando en el conocimiento que a su vez no solo sirvan de base para los posteriores cursos, si no que aprovechen el conocimiento y aprendan a disfrutarlo. Al final del folleto se plantea una prueba formativa que se puede discutir en grupo y en el pleno de la clase.

En un texto matemático chino que data del año 300 a. C. a 200 a. C., aparece el primer ejemplo conocido de uso del método de matrices para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas. Sin embargo, fue James Joseph Sylvester quien utilizó por primera vez el término matriz en el año 1848 o 1850. Cayley, Hamilton, Hermann Grassmann, Frobenius, Olga Taussky-Todd y John Von Neumann cuentan entre los matemáticos famosos que trabajaron sobre la teoría de las matrices. En 1925, Werner Heisenberg redescubre el cálculo matricial fundando una primera formulación de lo que iba a pasar a ser la mecánica cuántica. En la actualidad alcanza múltiples aplicaciones tanto en la representación y manipulación de datos como en el cálculo numérico y simbólico que se deriva de los modelos matemáticos utilizados para resolver problemas en diferentes disciplinas como, por ejemplo, las ciencias sociales, las ingenierías, economía, física, computación, estadística y las diferentes ramas de las matemáticas entre las que destacamos las ecuaciones diferenciales, el cálculo numérico y el álgebra.

Estos apuntes representa un valioso recurso que contribuye a la mejora del proceso enseñanza-aprendizaje, permitiendo ampliar de manera significativa los conocimientos sobre las matrices y los sistemas de ecuaciones y su importancia en todas las áreas del conocimiento.

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

1.1. Conceptos básicos de matrices

Los modelos lineales son el instrumento más popular y usual en las ciencias físicas, económicas y sociales, pues pueden representar la realidad con suficiente exactitud debido al tratamiento analítico y numérico que se le puede dar.

Casi todos los modelos lineales conducen a un sistema de ecuaciones o inecuaciones lineales simultáneo. Las n variables de un sistema de ecuaciones lineales simultáneo, se puede interpretar como un punto de un espacio *n-dimensional*.

Uno de los instrumentos que permite trabajar muy eficientemente con modelos lineales son las matrices, pues brindan una notación simple y compacta para designar amplios conjuntos de información. Sin embargo, las matrices no son objetos estáticos, ellas representan cierto tipo de funciones que "actúan" como vectores transformándolos en otros vectores. Es decir, las matrices representan una generalización de los vectores.

Es importante señalar que las matrices no tienen valor numérico, sólo es una manera conveniente de representar arreglos de números.

Por lo general las matrices se denotan con letras mayúsculas, y se emplean corchetes $[\ ]$, paréntesis $(\ )$, y en algunas ocasiones la doble barra $\|\ \|$ para encerrar el arreglo rectangular de números.

Definición de matriz

Una matriz es un arreglo rectangular de números denominados las entradas, elementos o componentes de la matriz. Estos números están dispuestos en renglones (filas) y columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ . & . & & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{donde}$$

$$\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ a_{i1} \\ . \\ a_{m1} \end{matrix}$$

Es la primera columna de la matriz A

$a_{11} \quad a_{12} \quad ... \quad a_{1j} \quad ... \quad a_{1n}$ Es la primera fila de la matriz A

Tamaño de una Matriz

El tamaño, dimensión u orden de una matriz está dado por el número de renglones (filas) y el número de columnas. Así, una matriz m x n (se pronuncia m por n), tiene tamaño m x n, o es de orden m x n.

Una matriz es de orden m x n si tiene m renglones (filas) y n columnas.
A cada término de la matriz se le denomina elemento o componente de la matriz, y este se representa con doble subíndice. Así por ejemplo, para la matriz A el elemento a_{22} se ubica en la segunda fila (renglón) y segunda columna ; el elemento a_{43} se ubica en el cuarto renglón y tercera columna. En general el elemento a_{ij} se ubica en el i-*ésimo* renglón y la j-*ésima* columna.
A la matriz A, algunas veces se denota como A = (a_{ij})

Ejemplo 1

Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ Por tener 2 filas y 2 columnas, se dice que es una matriz de orden 2x2. Por ejemplo, el elemento ubicado en la primera fila y segunda columna es el 3, es decir $a_{12} = 3$

Ejemplo 2

Sea la matriz B = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ Por tener 3 filas y 2 columnas , se dice que es una matriz de tamaño 3x2. Por ejemplo, el elemento ubicado en la tercera fila y primera columna es el – 8 , es decir b_{31} = – 8

Vector Renglón y Vector Columna

Cuando una matriz tiene una sola fila o renglón, es decir que es de orden 1xn, se denomina matriz renglón (matriz fila) o vector renglón (vector fila), y tiene la forma A = $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix}$

Cuando una matriz tiene una sola columna, es decir que es de orden mx1, se denomina matriz columna o vector columna, y tiene la forma

B = $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

Esto indica que cada vector es un tipo especial de matriz, esto es, son representables a través de matrices de un renglón o de una columna.

Ejemplo 3

Sea la matriz C = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ Por tener 1 fila y 3 columnas, se dice que es una matriz de orden 1x3. Es un vector fila.

Ejemplo 4

Sea la matriz D = $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ Por tener 4 filas y 1 columna, se dice que es una matriz de orden 4x1. Es un vector columna.

Diagonal de una matriz

La diagonal (en ocasiones denominada diagonal principal) de una matriz la constituye el conjunto de aquellos elementos de la matriz ubicados desde el extremo superior izquierdo, al extremo inferior derecho. Así la matriz A tiene como elementos de la diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ . & . & & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal de A son $a_{11}\ ,\ a_{22}\ ,\ a_{33}\ ,\ a_{44} \dots$

1.2. Tipos de matrices

Matriz Cuadrada

Si A es una matriz m x n, con m = n, entonces A se denomina matriz cuadrada. Cuando las matrices son cuadradas el orden se denota con un solo dígito.

Ejemplo 5

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ Es una matriz 4 x 4 ó una matriz de orden 4

Matriz Cero

Una matriz m x n con todos los elementos iguales a cero se llama matriz cero ó matriz nula de m x n.

Ejemplo 6

D = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Es una matriz cero de orden 2

E= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Es una matriz cero de orden 3x2

Matriz Diagonal

Una matriz cuadrada $\mathrm{A} = (a_{ij})$ se llama diagonal si todos sus elementos fuera de la diagonal principal son cero. Es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Ejemplo 7

A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ Es una matriz diagonal de orden 3

Matriz Escalar

Una matriz diagonal que posee los elementos de la diagonal principal iguales se denomina matriz escalar.

Ejemplo 8

A = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Es una matriz escalar de orden 3

Matriz Identidad

La matriz identidad I_n es una matriz cuadrada, cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y todos los demás son cero. Esto es, si el escalar en la matriz escalar es 1, la matriz se denomina identidad.

Ejemplos 9

$$I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es una matriz identidad de orden 5

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es una matriz identidad de orden 2

Matriz triangular superior y Matriz triangular inferior

Una matriz cuadrada se llama triangular superior si todas sus componentes debajo de la diagonal son cero; y se llama triangular inferior si todas sus componentes arriba de la diagonal son cero.

Ejemplo 10

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Es una matriz triangular inferior de orden 3

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Es una matriz triangular superior de orden 4

Transpuesta de una Matriz

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz m x n. Entonces la transpuesta de A, que se escribe A^t, es la matriz n x m obtenida al intercambiar los renglones por las columnas de A. Es decir: $A^t = (a_{ji})$

Así, Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Ejemplo 11

A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ La transpuesta será: A^t = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Matriz Simétrica.

La matriz cuadrada A se llama simétrica si $A^t = A$. Es decir, las columnas de A son también los renglones de A. En este tipo de matriz los elementos ubicados "simétricamente" respecto a la diagonal principal, son iguales.

Ejemplo 12

A = $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica

Matriz Antisimétrica

Una matriz cuadrada se llama antisimétrica, si $A^t = -A$. Es decir, $a_{ij} = -a_{ji}$. Para los elementos de la diagonal principal se concluye que $a_{ii} = -a_{ii}$ por tanto $a_{ii} = 0$ para $i = 1, 2, 3, ..., n$

En este tipo de matriz, los elementos de la diagonal principal son siempre ceros y los elementos ubicados simétricamente respecto a esta diagonal principal son de signos contrarios, pero de igual valor absoluto.

Ejemplo 13

A = $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz antisimétrica porque $A^t = -A$ (puede verificarlo)

D = $\begin{pmatrix} 0 & 8 & 1 \\ -8 & 0 & 7 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz antisimétrica porque $D^t = -D$ (puede verificarlo)

Matriz escalonada

Una matriz se encuentra en forma escalonada por renglones (o en forma de renglón escalonado), si satisface las siguientes propiedades:

1) Cualquier renglón (fila) que se componga enteramente de ceros, se encuentra en la parte inferior.
2) El primer elemento distinto de cero de cada fila, empezando por la izquierda, se denomina entrada principal o **pivote**. Cada pivote está a la derecha del pivote de la fila anterior (esto supone que todos los elementos debajo de un pivote son cero).

Observaciones:

- ✓ Estas propiedades garantizan que los pivotes forman un patrón tipo escalera.
- ✓ Toda matriz cuadrada en forma escalonada es triangular superior.
- ✓ En una matriz escalonada, las columnas que contienen pivotes se denominan columnas pivotales.

Ejemplo 14. Ejemplos de matrices escalonadas

Cada una de las siguientes matrices son matrices escalonadas.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 15. Ejemplos de matrices NO escalonadas

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada reducida

Una matriz se encuentra en forma escalonada reducida por renglones si es escalonada, con pivotes unidad y tal que en las columnas pivotales todos los elementos salvo el pivote son nulos.

Ejemplo 16. Ejemplos de matrices en forma escalonada reducida por renglones

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3. Operaciones con matrices

1.3.1. Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si tienen el mismo tamaño y si sus elementos correspondientes son iguales.

Ejemplo 17

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 7 & 4 & y \end{pmatrix}$

$A \neq C$; $B \neq C$, puesto que A y B son matrices de 2x2 y C es de 2x3.

A = B si a = 5; b = 0 ; c = 2 y d = 7

1.3.2. Adición y sustracción de matrices

Si A y B son dos matrices que tienen el mismo orden, entonces, la suma de A y B denotada por A + B, es la matriz que se obtiene sumando las componentes correspondientes.

Sustracción de Matrices

Si A y B son dos matrices que tienen las mismas dimensiones, entonces la sustracción denotada por A – B, es la matriz que se obtiene restando las componentes correspondientes, siendo A la matriz minuendo y B la matriz sustraendo.

Ejemplo 18

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-6 & 2 & 3\\ 4 & 8 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 3\\ 3 & -7 & 0\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}7 & -2 & 1\\ 4 & 8 & 5\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}5 & 4 & 8\\ 0 & 7 & 3\\ 1 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

Halle A + B ; A + C ; C + A ; D – E

Solución

- A + B no está definida porque no tienen el mismo orden
- A + C = $\begin{pmatrix}-6+7 & 2-2 & 3+1\\ 4+4 & 8+8 & 0+5\end{pmatrix}$ de donde A + C = $\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 8 & 16 & 5\end{pmatrix}$
- C + A = $\begin{pmatrix}7-6 & -2+2 & 1+3\\ 4+4 & 8+8 & 5+0\end{pmatrix}$ de donde C + A = $\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 8 & 16 & 5\end{pmatrix}$
- D – E = $\begin{pmatrix}2-5 & 1-4 & 2-8\\ 3-0 & -2-7 & 0-3\\ 1-1 & 1-(-4) & 4-(-2)\end{pmatrix}$ de donde D – E = $\begin{pmatrix}-3 & -3 & -6\\ 3 & -9 & -3\\ 0 & 5 & 6\end{pmatrix}$

1.3.3. Producto de un escalar por una matriz

Si A = (a_{ij}) es una matriz m x n y si α es un escalar, entonces la matriz m x n,

$$\alpha\ A = \alpha\ (a_{ij}) = \begin{pmatrix}\alpha\, a_{11} & \alpha\, a_{12} & \dots & \alpha\, a_{1j} & \dots & \alpha\, a_{1n}\\ \alpha\, a_{21} & \alpha\, a_{22} & \dots & \alpha\, a_{2j} & \dots & \alpha\, a_{2n}\\ . & . & & . & & .\\ \alpha\, a_{i1} & \alpha\, a_{i2} & \dots & \alpha\, a_{ij} & \dots & \alpha\, a_{in}\\ . & . & & . & & .\\ \alpha\, a_{m1} & \alpha\, a_{m2} & \dots & \alpha\, a_{mj} & \dots & \alpha\, a_{mn}\end{pmatrix}$$

Es decir α A es la matriz obtenida al multiplicar cada componente de A por α.

Ejemplo 19

Sea α = –2 y A = $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ Hallar α A

Solución

$$\alpha \text{A} = -2\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)(-2) & (-2)(3) \\ (-2)(5) & (-2)(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -10 & -14 \end{pmatrix}$$

1.3.4. Multiplicación de Matrices

Sea A = (a_{ij}) una matriz m x p , y sea B = (b_{ij}) una matriz p x n. Entonces el producto de A y B es una matriz m x n, C = (c_{ij}), en donde

$$c_{ij} = (renglón\ \ i\ \ de\ \ A).(columna\ j\ de\ \ B)$$

Es decir, el elemento ij de AB es el producto punto del renglón *i* de A y la columna *j* de B. Si esto se extiende se obtiene

$$c_{ij} = a_{i1}\mathrm{b}_{1\mathrm{j}} + a_{i2}\mathrm{b}_{2\mathrm{j}} + \ ... \ + a_{in}\mathrm{b}_{\mathrm{nj}}$$

Si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, entonces se dice que A y B son compatibles bajo la multiplicación.

Ejemplo 20

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$; C = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; D = $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Obtener AB ; BA ; AC ; BC ; CD

Solución

- Dado que A es de orden 2x2 y B es de orden 2x3 AB está definida, puesto que el número de columnas de A es igual que el número de renglones de B, y AB será de orden 2x3.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 16 & -20 \\ 30 & 30 & -51 \end{pmatrix}$$

Cálculos:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2)(-4)+(5)(3) & (2)(-2)+(5)(4) & (2)(5)+(5)(-6) \\ (-3)(-4)+(6)(3) & (-3)(-2)+(6)(4) & (-3)(5)+(6)(-6) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8+15 & -4+20 & 10-30 \\ 12+18 & 6+24 & -15-36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 16 & -20 \\ 30 & 30 & -51 \end{pmatrix}$$

- BA no está definida puesto que B es de orden 2x3 y A es de orden 2x2, es decir el número de columnas de B es diferente al número de renglones de A.
- AC no está definida puesto que A es de orden 2x2 y C es de orden 3x3, es decir el número de columnas de A es diferente al número de renglones de C.
- BC si está definida y será de orden 2x3

$$BC = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 & -3 \\ -11 & -15 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculos

$-4(3)-2(1)+5(4)=6$ $\quad$ $-4(-1)-2(0)+5(2)=14$ $\quad$ $-4(2)-2(0)+5(1)=-3$

$3(3)+4(1)-6(4)=-11$ $\quad$ $3(-1)+4(0)-6(2)=-15$ $\quad$ $3(2)+4(0)-6(1)=0$

- CD si está definida y será de orden 3x1

$$CD = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Cálculos

$3(4)-1(-1)+2(0)=13$

$1(4)+0(-1)+0(0)=4$

$4(4)+2(-1)+1(0)=14$

Propiedades de la suma de matrices y la multiplicación por escalares.

Sean A, B y C tres matrices de m x n y sean α y β dos escalares. Entonces:

1) A + 0 = A El 0 a la izquierda es la matriz 0
2) *0*A = 0 El 0 a la izquierda es un escalar, y el 0 a la derecha es la matriz 0
3) A + B = B + A Ley conmutativa para la suma de matrices
4) (A + B) + C = A + (B + C) Ley asociativa para la suma de matrices
5) α (A + B) = α A + α B Ley distributiva para la multiplicación por un escalar
6) 1A = A
7) (α + β) A = α A + β A

Propiedades del producto de matrices

1) AB $\neq$ BA .
2) Si ocurre que AB = BA se dice que A y B conmutan.
3) Puede ocurrir que AB esté definida y BA no lo esté, o viceversa.
4) Si A es una matriz de m x p ; B de p x n y C de n x q entonces la ley asociativa se cumple A(BC) = (AB)C y ABC es una matriz m x q
   Esta ley puede ser extendida a productos de más matrices
5) Si las sumas y los productos siguientes están definidos, entonces
   A(B + C) = AB + AC y (A + B)C = AC + BC

1.4. Sistema de ecuaciones lineales

1.4.1. Definición y notación de sistemas de ecuaciones lineales

Una ecuación lineal en las *n* variables x_1 , x_2 , ... , x_n es una ecuación que puede escribirse en la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + . . . + a_nx_n = b$ donde los coeficientes a_1 , a_2 , . . . , a_n y el término independiente *b* es constante.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto finito de ecuaciones lineales, cada una con las mismas variables. Por tanto, este sistema puede escribirse en la forma:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & . \; . \; . & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & . \; . \; . & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
. & & . & & & & . & & . \\
. & & . & & & & . & & . \\
. & & . & & & & . & & . \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & . \; . \; . & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

Si todas las constantes b_1 , b_2 , . . . , b_m son cero, entonces el sistema se denomina **sistema homogéneo**. Si por lo menos una de estas constantes es diferente de cero, el sistema se denomina **no homogéneo**.

Ejemplo 21

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & & & + & 4z & = & 1 \\ -x & + & 3y & - & 5z & = & 0 \end{array}$$

Es un sistema no homogéneo

Ejemplo 22

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3A & + & 5B & - & 4C & = & 0 \\ -3A & - & 2B & + & 4C & = & 0 \\ 6A & + & B & - & 8C & = & 0 \end{array}$$

Es un sistema homogéneo

1.4.2. Representación matricial

1.4.2.1. Matrices asociadas con un sistema lineal: matriz de coeficientes y matriz aumentada.

Existen dos importantes matrices asociadas con un sistema lineal. Ellas son la matriz de coeficientes, que es aquella que contiene los coeficientes de las variables; y la matriz aumentada, que es aquella matriz de coeficientes aumentada en una columna extra que contiene los términos constantes (o independientes).

Ejemplo 23

Halle la matriz de coeficientes y la matriz aumentada asociadas al siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & & & + & 4z & = & 1 \\ -x & + & 3y & - & 5z & = & 0 \end{array}$$

Solución

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Es la matriz de coeficientes

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Es la matriz aumentada.

Se observa que al asociar un sistema lineal con matrices se trabaja sobre los coeficientes, no sobre las variables. Así, en la matriz aumentada las primeras columnas contienen los coeficientes de las variables en orden, y la columna final los términos constantes, mientras que la barra vertical recuerda los signos de igualdad existente entre las ecuaciones. Esto es:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

La representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales es $Ax = b$ donde A es la matriz de coeficientes, x es el vector de las incógnitas (que es la solución del sistema) y b es el vector formado por los términos independientes.

Ejemplo 24: Escribir una representación matricial del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 18 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 24 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

Solución

A= $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ A es la matriz de coeficientes   *x* = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *x* es el vector de las incógnitas (solución)   b = $\begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$ b es el vector de los términos independientes

El sistema se puede escribir como $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$

A *x* = b

1.4.3. Solución de sistemas de ecuaciones lineales

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, es un conjunto de números que satisface todas las ecuaciones del sistema.

Con respecto a las soluciones de los sistemas lineales **no homogéneos** existen tres posibilidades: que no tengan soluciones, que tenga una solución, o que tenga un número infinito de soluciones.

Para sistemas generales homogéneos, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$,... , $x_n = 0$ es siempre una solución que se denomina **solución trivial** o **solución cero**. Cualquier solución distinta a la trivial, es decir, en la que al menos una variable tiene un valor distinto de cero se denomina **solución no trivial**. Por tanto, con respecto a las soluciones de los sistemas lineales **homogéneos** existen dos posibilidades: que la solución trivial sea la única solución, o que tenga un número infinito de soluciones, además de la trivial.

En general un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales tiene, ya sea:

a) Una solución única, o un número infinito de soluciones, con lo cual se le denomina **sistema consistente**.
b) No tiene soluciones con lo cual se le denomina **sistema inconsistente**.

Observaciones:

- ✓ Un sistema homogéneo siempre es consistente, pues siempre tiene solución trivial.
- ✓ Un sistema homogéneo de m ecuaciones en n incógnitas siempre tiene un número infinito de soluciones si $n > m$, es decir, si el número de incógnitas es **mayor** que el número de ecuaciones, y se trata de un tipo de solución **no trivial**.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Existen algunos métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales, y éstos hacen uso de la matriz asociada al sistema lineal. Estos métodos consisten en reducir la matriz aumentada del sistema dado a una forma que pueda ser resuelta con mayor facilidad por los métodos que a continuación se describirán.

1.4.3.1. Método de Eliminación Gaussiana

Este método también es conocido como Eliminación de Gauss ó Método de Gauss. Fue ideado por el alemán Carl Friedrich Gauss, considerado el más grande matemático del siglo XIX. Este método implica reducir la matriz aumentada a la forma escalonada por renglones, y luego mediante la sustitución hacia atrás se resuelve el sistema equivalente. Es decir, se despeja en primer lugar el valor de la última incógnita, y después se sustituye ésta hacia atrás para las demás incógnitas.

Para aplicar el método de Eliminación Gaussiana, se debe comprender primero cuando una matriz está en la forma escalonada por renglones (ver pág 6 y 7); cuáles son las operaciones elementales por renglones; y el proceso de reducir una matriz a la forma escalonada mediante las operaciones elementales con renglones.
La forma escalonada por renglones de una matriz **no es única**.

Operaciones elementales de renglón

Para reducir una matriz a la forma escalonada por renglones se debe hacer uso de ciertas operaciones permisibles denominadas operaciones elementales de renglón, que corresponden a aquellas que se puede efectuar en un sistema de ecuaciones lineales para transformarlo en un sistema equivalente. Estas operaciones son las siguientes:

1) El intercambio de dos renglones.
2) La multiplicación (o división) de un renglón por una constante diferente de cero.
3) La adición de un múltiplo de un renglón a otro renglón.

Al aplicar estas operaciones, la estrategia es crear un pivote en una columna, y luego utilizarla para crear ceros por debajo de ella. Esta fase del proceso se denomina **pivoteo**. Como el propósito es crear ceros debajo de la diagonal principal, algunos autores también le denominan a este proceso **triangulación**. Aunque no es estrictamente necesario, se recomienda hacer de cada pivote un 1.
Las operaciones elementales de renglón son reversibles, es decir pueden “deshacerse”. Esto es, si alguna operación elemental de renglón convierte a la matriz A en la matriz B, existe también una operación elemental de renglón que convierte la matriz B en la matriz A.

Ejemplo 25

Resuelva el siguiente sistema por el método de Eliminación Gaussiana.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -5 \end{array}$$

Solución

Este sistema es no homogéneo. Del sistema se obtiene la matriz aumentada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

El método de eliminación Gaussiana consiste en reducir la matriz aumentada a la forma escalonada por renglones, a través de operaciones elementales de renglón permisibles. Reduciendo la matriz a la forma escalonada por renglones se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 = R_3 - R_1]{R_2 = R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 = R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 = -\frac{1}{5}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Este paso no es necesario, pero conviene para reducir cálculos

Cálculos				
Para hacer cero el 2 en el segundo renglón				
R_2	2	3	1	5
$-2R_1$	-2	-2	-2	-6
El 2º renglón quedará	0	1	-1	-1
Para hacer cero el 1 en el tercer renglón				
R_3	1	-1	-2	-5
$-R_1$	-1	-1	-1	-3
El 3º renglón quedará	0	-2	-3	-8
Para hacer cero el -2 en el tercer renglón				
R_3	0	-2	-3	-8
$+2R_2$	0	2	-2	-2
El 3º renglón quedará	0	0	-5	-10

La matriz $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ está en la forma escalonada.

El sistema equivalente correspondiente es:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Siguiendo el método de Eliminación Gaussiana se despeja el valor de la última incógnita para posteriormente **sustituir hacia atrás** para las demás incógnitas.

En este ejemplo, se reemplaza x_3 en la segunda ecuación y luego x_3 y x_2 en la primera ecuación. Así

$$x_3 = 2 \qquad \begin{aligned} x_2 - x_3 &= -1 \\ x_2 - 2 &= -1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 1 + 2 &= 3 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x_1 = 0 \;;\; x_2 = 1 \;;\; x_3 = 2$

La solución expresada en forma vectorial es: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dado que tiene **una solución** el sistema **es consistente.**

Se puede comprobar que esta solución satisface **cada una** de las ecuaciones del sistema, esto es:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 &\rightarrow\quad& 0+1+2=3 &\rightarrow\quad& 3=3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 &\rightarrow\quad& 2(0)+3(1)+2 = 5 &\rightarrow\quad& 5 = 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 &\rightarrow\quad& 0-1-2(2) = -5 &\rightarrow\quad& -5=-5 \end{aligned}$$

Se verificó que satisface **cada una** de las ecuaciones del sistema, por tanto es correcta la solución

Ejemplo 26

Resuelva el siguiente sistema por el método de Eliminación Gaussiana.

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ 2w - 2x - y + 3z &= 3 \\ -w + x - y \qquad &= -3 \end{aligned}$$

Solución

Este sistema es no homogéneo. Reduciendo la matriz a la forma escalonada por renglones se tiene:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 = R_3 + R_1]{R_2 = R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 = R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se observa que el último renglón está formado con ceros lo que indica que $0 = 0$. Cuando esto sucede se dice que el sistema tiene infinitas soluciones y es consistente.

Cuando el sistema tiene infinitas soluciones, como en este caso se debe expresar las variables correspondientes a los pivotes (llamadas variables principales), en términos de las otras variables (llamadas variables libres). En este ejemplo las variables principales son w y y; y las variables libres son x y z.

El sistema equivalente correspondiente a la matriz será:

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ y - z &= 1 \end{aligned}$$

El sistema tiene infinitas soluciones

$x = t$ (arbitrario) $\quad z = s$ (arbitrario) $\quad y - z = 1 \quad w - x - y + 2z = 1$

$\quad y = z + 1 \quad w = x + y - 2z + 1$

La solución **general** del sistema es

$$\boxed{\begin{aligned} w &= x + y - 2z + 1 \\ x &= t \\ y &= z + 1 \\ z &= s \end{aligned}}$$

Para buscar **una solución particular**, a las variables libres se les asigna valores arbitrarios (denominados parámetros).

En este sistema por ejemplo si:

$x = -2$ valor arbitrario $\quad y = z + 1 \quad w = x + y - 2z + 1$

$z = -4$ valor arbitrario $\quad y = -4 + 1 \quad w = -2 - 3 - 2(-4) + 1$

$y = -3 \quad w = 4$

Por tanto una solución **particular** del sistema es: $w = 4$; $x = -2$; $y = -3$; $z = -4$

Una solución particular del sistema expresada en forma vectorial es: $\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Dado que tiene infinitas soluciones el sistema es consistente.

Compruebe que esta solución satisface cada una de las ecuaciones del sistema.

Ejemplo 27

Resuelva el siguiente sistema por el método de Eliminación Gaussiana.

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2B & + & 3C & = & 4 \\ 2A & - & 6B & + & 7C & = & 15 \\ A & - & 2B & + & 5C & = & 10 \end{array}$$

Solución:

Es un sistema no homogéneo. Reduciendo la matriz a la forma escalonada por renglones se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right) \quad R_1 \longleftrightarrow R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 = R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Se observa que en este último renglón queda $0 = -1$ lo que no tiene sentido. Cuando esto sucede se dice que **el sistema no tiene solución**, y por tanto **es inconsistente**.

1.4.3.2. Método de Eliminación por Gauss - Jordan

Una modificación del método de Eliminación Gaussiana simplifica en gran medida la fase de la sustitución hacia atrás, y es particularmente útil cuando se hacen los cálculos a mano en un sistema que tiene un número infinito de ecuaciones. Esta variante, que se denomina Método de Gauss-Jordan, depende de reducir aún más la matriz aumentada, para ello se utiliza la matriz en forma escalonada reducida por renglones.

Este método también es conocido como Eliminación por Gauss-Jordan. Recibe este nombre en honor del gran matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y del ingeniero alemán Wilhelm Jordan (1844-1899).

A diferencia de la forma escalonada, la forma escalonada reducida de una matriz **es única.**

Al aplicar el método de Eliminación Gauss-Jordan se procede de manera similar al de Eliminación Gaussiana con la única diferencia que se lleva la matriz a la forma escalonada reducida por renglones.

Ejemplo 28

Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

Solución

Este sistema es no homogéneo. El método de eliminación Gauss-Jordan consiste en reducir la matriz aumentada a la forma escalonada reducida por renglones, a través de operaciones elementales de renglón permisibles.

Reduciendo la matriz a la forma escalonada reducida por renglones se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 = R_3 - R_1]{R_2 = R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 = R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 = R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 = -\frac{1}{5}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 = R_2 + R_3]{R_1 = R_1 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

La matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ está en la forma escalonada reducida

El sistema equivalente correspondiente es: $\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$ que es la solución del sistema

Dado que tiene **una solución** el sistema **es consistente**.

Compruebe que esta solución satisface cada una de las ecuaciones del sistema

Ejemplo 29

Resuelva el siguiente sistema por el método de Eliminación Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ 2w - 2x - y + 3z &= 3 \\ -w + x - y &= -3 \end{aligned}$$

Solución

Este sistema es no homogéneo. Reduciendo la matriz a la forma escalonada reducida por renglones se tiene:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 = R_3 + R_1]{R_2 = R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 = R_3 + 2R_2]{R_1 = R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ está en la forma escalonada reducida y se observa que el último renglón está formado con ceros lo que indica que $0 = 0$. Cuando esto sucede se dice que **el sistema tiene infinitas soluciones y es consistente**.

El sistema equivalente correspondiente a la matriz será:
$$\begin{array}{l} w - x + z = 2 \\ \quad y - z = 1 \end{array}$$

La solución **general** del sistema es
$$\begin{cases} w = x - z + 2 \\ x = t \\ y = z + 1 \\ z = s \end{cases}$$

Para buscar **una solución particular**, a las variables libres se les asigna valores arbitrarios (denominados parámetros).

En este sistema por ejemplo si**:** $x = 0$ (valor arbitrario) y $z = 0$ (valor arbitrario)

Una solución particular del sistema es:
$$\begin{cases} w = 2 \\ x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Compruebe que esta solución satisface cada una de las ecuaciones del sistema.

Ejemplo 30

Resuelva el siguiente sistema por el método de Eliminación Gauss-Jordan.

$$\begin{array}{l} 3x + 5y - 4z = 0 \\ -3x - 2y + 4z = 0 \\ 6x + y - 8z = 0 \end{array}$$

Solución:

Es un sistema homogéneo. Reduciendo la matriz a la forma escalonada reducida por renglones se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 = R_3 - 2R_1]{R_2 = R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 = -\frac{1}{9}R_3]{R_2 = \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 = R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = R_1 - 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = \frac{1}{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema tiene infinitas soluciones. El sistema equivalente correspondiente a la matriz es: $\left\{\begin{array}{l} x - \frac{4}{3}z = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$ Luego el conjunto solución es $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{4}{3}z \\ y = 0 \\ z = arbitario \end{array}\right.$

Una solución particular es por ejemplo:

$x = 0$

$y = 0$

$z = 0 \quad (arbitario)$

que es la solución trivial, puesto que es un sistema homogéneo.

Otra solución particular sería por ejemplo *x= 4 ; y = 0 ; z = 3*

1.4.4. Sistema de ecuaciones lineales y matriz inversa

1.4.4.1. Matriz inversa y propiedades

La inversa de una matriz cuadrada A que se denota por A^{-1} es tal que

$$\mathbf{A.A^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Si A tiene inversa**, entonces se dice que** A es invertible o regular**; en caso contrario, si** A no tiene inversa, **entonces se dice que** A es singular.

Propiedades de la inversión de matrices

1. La matriz inversa si existe es única.

2. $A.A^{-1} = A^{-1}A = I$

3. $(A.B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4. $(A^{-1})^{-1} = A$

5. $(k\,A)^{-1} = \frac{1}{k}\,A^{-1}$

6. $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$

1.4.4.2. Uso del método de Gauss para el cálculo de la matriz inversa

Hay varios métodos para calcular la inversa de una matriz dada.

Calculo de la Inversa por el Método de Gauss

El Método de Gauss se basa en una triangulación superior y luego otra inferior de la matriz a la cual se desea calcular la inversa. El procedimiento para determinar la inversa de una matriz cuadrada A es el siguiente:

1. Se escribe la matriz en la forma $(A\,|\,I)$
2. Se utiliza la reducción por renglones para poner la matriz A en su forma escalonada reducida por renglones.
3. Se decide sí A es invertible dependiendo:

- Si la forma escalonada reducida por renglones de A es la matriz identidad I, entonces A^{-1} es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical.
- Si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical entonces A no es invertible.

Ejemplo 31

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \\ 5 & 1 & 35 \end{bmatrix}$ Determinar la inversa de A por el método de Gauss

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 35 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 = R_2 - 2R_1 \\ R_3 = R_3 - 5R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 = \frac{1}{2}R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -14 & 15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_3 = R_3 + 14R_2$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & 7 & 1 \end{array}\right]$ $R_1 = R_1 - 3R_2$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & 4 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & 7 & 1 \end{array}\right]$

$R_1 = R_1 - 7R_3$

$R_2 = R_2 + R_3$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 137 & \frac{-101}{2} & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -20 & \frac{15}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & 7 & 1 \end{array}\right]$ Se observa la matriz identidad del lado izquierdo, y por tanto la inversa es la matriz que queda en el lado derecho. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 137 & \frac{-101}{2} & -7 \\ -20 & \frac{15}{2} & 1 \\ -19 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

Se puede verificar que $A.A^{-1} = A^{-1}A = I$

1.4.5. Solución de un sistema de ecuaciones lineales utilizando la inversa

Si A es una matriz invertible nxn, entonces un sistema de ecuaciones lineales está dado por:

Ax = b A es la matriz de coeficientes del sistema $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ representa a las variables $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ representa a los términos independiente

El sistema Ax = b tiene solución única y si se multiplica ambos miembros de la ecuación por A^{-1} se obtiene

$$\mathbf{A^{-1} A}x = A^{-1} b$$

$$\mathbf{I}\, x = A^{-1} b$$

$$x = A^{-1} b$$

Este resultado indica que la matriz inversa puede ser utilizada para resolver un sistema de ecuaciones.

Ejemplo 32

Resuelva el sistema utilizando la inversa

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

Solución:

La matriz de los coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

La matriz de los términos independientes

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Se determina A^{-1} por el método de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 = R_2 - 2R_1 \\ R_3 = R_3 - R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] R_1 = R_1 - R_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_3 = R_3 + 2R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad R_3 = -\frac{1}{5}R_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 = R_1 - 2R_3 \\ R_2 = R_2 + R_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Luego $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Así la solución única está dada por: $x = A^{-1}\, b$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Cálculos

$$1(3) - \frac{1}{5}(5) + \frac{2}{5}(-5) = 0$$

$$-1(3) + \frac{3}{5}(5) - \frac{1}{5}(-5) = 1$$

$$1(3) - \frac{2}{5}(5) - \frac{1}{5}(-5) = 2$$

Multiplicando se tiene $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Se evidencia que la solución del sistema: $x_1 = 0$ **;** $x_2 = 1$ **;** $x_3 = 2$

1.5. Rango de una matriz

Sea A una matriz de mxn que es equivalente en fila a una matriz E de forma escalonada reducida. Entonces el rango de A, denotada como *rango(A)*, es el número de renglones distintos de cero en E.

Una matriz de forma escalonada siempre es equivalente en fila a una matriz en forma escalonada reducida, con el mismo número de filas distintas de cero. Entonces para calcular el rango de una matriz, basta efectuar operaciones elementales de filas hasta que la matriz esté en la forma escalonada.

Ejemplo 33

El sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -5 \end{array}$$

cuya forma escalonada reducida es E= $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

***rango (E)* = 3** (puesto que hay tres filas diferentes de cero)

Ejemplo 34

El sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} w & - & x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2w & - & 2x & - & y & + & 3z & = & 3 \\ -w & + & x & - & y & & & = & -3 \end{array}$$

cuya forma escalonada reducida es E= $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

***rango (E)* = 2** (cantidad de renglones distintos de cero)

1.6. Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales

Hay una gran variedad de aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales en todas las áreas. A continuación se verá una muestra de dichas aplicaciones.

Ejemplo 35

Para el siguiente problema: a) Formule el sistema de ecuaciones que corresponda ; b) Resuelva el sistema por el método de Gauss o de Gauss-Jordan c) Responda a la pregunta formulada en el problema.

Problema:

Un investigador ha colocado tres cepas bacterianas (denotadas como A , B y C), en un tubo de ensayo, donde serán alimentadas con tres diferentes fuentes alimenticias (I, II y III). Cada día 2300 unidades de la fuente alimenticia I, 800 de II y 1500 de III se colocan en el tubo de ensayo. Cada bacteria consume cierto número de unidades de cada alimento por día, como se muestra en la tabla. ¿Cuántas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

	Cepa bacteriana A	Cepa bacteriana B	Cepa bacteriana C
Alimento I	2	2	4
Alimento II	1	2	0
Alimento III	1	3	1

Solución

Sean x_1, x_2 y x_3 la cantidad de bacterias de las cepas A, B y C respectivamente. Dado que cada una de las bacterias de la cepa A consume 2 unidades del alimento I por día, entonces la cepa bacteriana A consume $2x_1$ unidades del alimento I por día. Similar las cepas B consumen un total de $2x_2$ unidades del alimento I por día; y las cepas C consumen un total de $4x_3$ unidades del alimento I por día. Puesto que en total hay 2300 unidades del alimento I por día, se tiene $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2300$

Del mismo modo se obtienen las ecuaciones correspondientes al consumo de los alimentos II y III.

a) Entonces se tiene el sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2300 \\ x_1 + 2x_2 \quad\quad &= 800 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1500 \end{aligned}$$

b) Resolviendo el sistema por Gauss-Jordan se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2300 \\ 1 & 2 & 0 & 800 \\ 1 & 3 & 1 & 1500 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdots} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 350 \end{array}\right) \quad \text{de donde} \quad \begin{aligned} x_1 &= 100 \\ x_2 &= 350 \\ x_3 &= 350 \end{aligned}$$

* Resuelva el sistema y compruebe la matriz resultante

c) **Respuesta:** El investigador debería colocar 100 bacterias de la cepa A; 350 bacterias de la cepa B, y 350 bacterias de la cepa C en el tubo de ensayo si desea que todo el alimento sea consumido.

Aplicaciones a Redes

Otra situación práctica da origen a las denominadas redes: algunas de ellas , redes de transporte, redes eléctricas, redes de comunicaciones, redes económicas. De particular interés son los flujos posibles a través de las redes. Por ejemplo, el flujo de vehículos a través de una red de carreteras, el flujo de información a través de una red de datos, y los bienes y servicios que fluyen a través de una red económica.

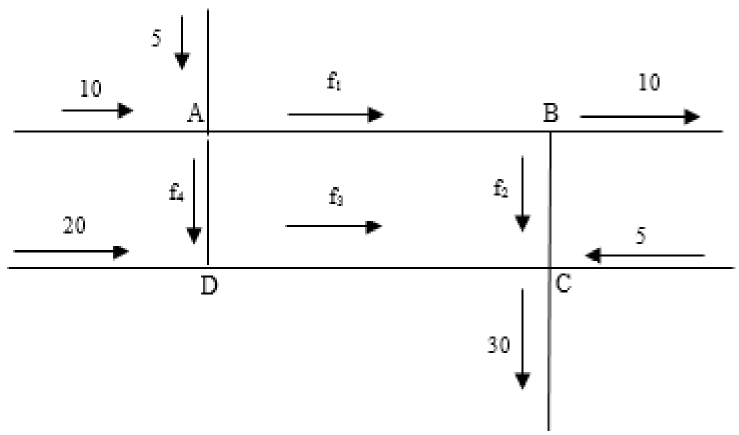
En esta ocasión una red se compondrá de un número finito de nodos (también denominados uniones o vértices), conectados por medio de una serie de líneas dirigidas conocidas como ramas o arcos. Cada rama estará etiquetada con un flujo que representa la cantidad de algún producto que puede fluir a lo largo o a través de esa rama en la dirección indicada. **La regla fundamental que gobierna el flujo a través de una red es la de la conservación del flujo: en cada nodo el flujo que entra es igual al flujo que sale.**

Ejemplo 36

Para el siguiente problema: a) Formule el sistema de ecuaciones que corresponda ; b) Resuelva el sistema por el método de Gauss o de Gauss-Jordan c) Responda a la pregunta formulada en el problema d) Si se controla el flujo en la rama AD a 5 L/min, calcule los otros flujos. e) Halle los flujos máximos y mínimo en cada rama.

Problema:

Describa los flujos posibles a través de la red de tuberías de agua que se muestra en la siguiente figura, donde el flujo se mide en litros por minuto.



Solución

Dado en cada nodo el flujo que entra es igual al flujo que sale, se tiene:

Nodo	Flujo que entra	=	Flujo que sale	Ecuación resultante
A	10 + 5	=	$f_1 + f_4$	$f_1 + f_4 = 15$
B	f_1	=	$10 + f_2$	$f_1 - f_2 = 10$
C	$f_2 + f_3 + 5$	=	30	$f_2 + f_3 = 25$
D	$f_4 + 20$	=	f_3	$f_3 - f_4 = 20$

a) El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{aligned} f_1 + f_4 &= 15 \\ f_1 - f_2 &= 10 \\ f_2 + f_3 &= 25 \\ f_3 - f_4 &= 20 \end{aligned}$$

b) Mediante el empleo del método de Gauss-Jordan, se tiene la solución:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{\dots} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

de donde
$$\begin{aligned} f_1 + f_4 &= 15 \\ f_2 + f_4 &= 5 \\ f_3 - f_4 &= 20 \\ f_4 &= t \end{aligned}$$

Se observa que el sistema tiene múltiples soluciones. Tiene una variable libre que es f_4

Si se establece que $f_4 = t$, y se expresan las variables principales en términos de f_4

c) se obtiene:
$$\begin{aligned} f_1 &= 15 - t \\ f_2 &= 5 - t \\ f_3 &= 20 + t \\ f_4 &= t \end{aligned}$$

Estas ecuaciones describen todos los flujos posibles y permiten realizar la red.

d) Si se controla el flujo en la rama AD de manera que $t = 5 \ l/\min$, entonces $f_4 = 5$

y los otros flujos son f_1 = 10 L/min , f_2 = 0 L/min y f_3 = 25 L/min

e) Si se desea encontrar los flujos máximos y mínimos posibles en cada rama, se debe tener en cuenta que cada uno de los flujos no puede ser negativo, y así

$$\begin{aligned} f_1 &= 15 - t \geq 0 \\ f_2 &= 5 - t \geq 0 \\ f_3 &= 20 + t \geq 0 \\ f_4 &= t \geq 0 \end{aligned}$$

de donde el t mínimo es t = 0

t máximo es t = 5

Así $t \geq 0$ y

$$\begin{aligned} 10 \leq f_1 &\leq 15 \\ 0 \leq f_2 &\leq 5 \\ 20 \leq f_3 &\leq 25 \\ 0 \leq f_4 &\leq 5 \end{aligned}$$

ANEXO: Tarea formativa

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
TAREA FORMATIVA
Tema: Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

Nombre: _________________________ **Cédula:**_____________ **Grupo:** ________
Prof. Benigna Fernández de Guardia **Fecha:** _____________ **Valor:** ________

I. Analizar los conceptos del Folleto y realizar lo indicado

1) Defina el concepto de matriz

2) Cómo se relacionan las matrices con los vectores

3) Mencione las características de cada tipo de matriz y de un ejemplo de cada tipo.

II. Realice los cálculos indicados, dada las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \;;\quad B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 2 & 7\end{pmatrix} \quad \text{C} = \begin{pmatrix}3 & 7 & 2\\ 4 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix} \;;\quad \text{D} = \begin{pmatrix}6\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 4 & 5 & 0\\ 2 & -3 & 7 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \;;\quad F=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 5\end{pmatrix} \quad \text{G} = \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -3\\ -1 & 0 & -1\\ 4 & -1 & -2\end{pmatrix} \;;\quad \text{H} = \begin{pmatrix}2\\ -1\\ 5\end{pmatrix}$$

$$\text{P} = \begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 0\end{pmatrix} \;;\quad \text{J} = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix} \;;\quad \text{K} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -5\end{pmatrix} \;;\quad \text{L} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 8\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & -1 & 8\end{pmatrix}$$

4) Calcule P + J

5) Calcule –2C + 3L

6) Calcule 2H – D

7) Calcule L + K

8) Calcule B – F + 2K

9) Halle una matriz R tal que 2B – 3K – R sea una matriz cero.

10) Calcule BH

11) Calcule EG

12) Calcule HJ

13) Calcule BC

14) Verifique si F y K conmutan

15) Verifique que si I es la matriz identidad de orden 3 entonces LI = IL = L

16) Verifique la Ley asociativa para el producto de matrices con A, D y P

17) Calcule DH

III. Calcule la matriz inversa utilizando el método de Gauss. Analice la existencia de la inversa.

18) A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

19) B = $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & -4 \end{bmatrix}$

20) C = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 9 & 13 \end{bmatrix}$

IV. Determine si el sistema es homogéneo o no homogéneo. Resuelva cada uno de los sistemas por tres métodos: Método de Gauss, Método de Gauss-Jordan, haciendo uso de la inversa. Determine además el rango de la matriz asociada al sistema y si el sistema es consistente o inconsistente. Si el sistema tiene infinitas soluciones, de la solución general y ejemplifique con una solución particular.

21)
$$\begin{aligned} x + y + 2z - 5w &= 3 \\ 2x + 5y - z - 9w &= -3 \\ 2x + y - z + 3w &= -11 \\ x - 3y + 2z + 7w &= -5 \end{aligned}$$

22)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= 5 \\ x + 3y + 5z + 7w &= 11 \\ x - z - 2w &= -6 \end{aligned}$$

23)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

24)
$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= -1 \\ 3x + 5y + 2z &= 8 \\ x + y + z &= 4 \\ 2x + 7y + 5z &= 9 \end{aligned}$$

25)
$$\begin{aligned} x + 2y - z + 3w &= 0 \\ 2x + 2y - z + 2w &= 0 \\ x + 3z + 3w &= 0 \end{aligned}$$

26)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ x_2 - 3x_3 &= -7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 10 \end{aligned}$$

27) De un circuito eléctrico, que consiste en resistencias y fuentes de voltaje, se obtuvo el siguiente sistema de ecuaciones donde se debe hallar corrientes de malla I $(I_1\ ,\ I_2\ ,\ I_3\ ,\ I_4)$

$$\begin{aligned}
-2I_1 + 4I_2 - I_3 - 3I_4 &= 0 \\
I_1 \qquad\quad - I_3 \qquad\quad &= 9 \\
-4I_1 + 4I_2 - I_3 + I_4 &= 0 \\
2I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 &= 2
\end{aligned}$$

28) De un circuito eléctrico se debe hallar los voltajes (v_a, v_b, v_c) en sus diferentes nodos obteniéndose el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}v_a - \frac{1}{2}v_b \qquad\qquad &= 10 \\
-\frac{1}{2}v_a + \frac{13}{12}v_b - \frac{1}{4}v_c &= 0 \\
-\frac{1}{4}v_b + \frac{9}{20}v_c &= 0
\end{aligned}$$

V. Resuelva los siguientes problemas, aplicando al sistema resultante el método de su preferencia.

29) Un mercader cafetero vende tres mezclas de café. Una bolsa de la mezcla de la casa contiene 300g de grano Colombiano y 200g de grano francés tostado. Una bolsa de la mezcla especial contiene 200g de grano Colombiano, 200g de la variedad de Kenia y 100g de grano francés tostado. Una bolsa de la mezcla gourmet contiene 100g de grano colombiano, 200g de grano de Kenia y 200g de grano francés tostado. El comerciante tiene disponibles 30000g de grano de Colombia, 15000g del de Kenia y 25000g del café tostado de Francia. Si deseamos utilizar la totalidad de los granos, ¿Cuántas bolsas de cada tipo de mezcla pueden hacerse?

30) Una floristería ofrece cuatro tipos de arreglos florales que contienen rosas, margaritas, claveles y crisantemos. Cada arreglo TIPO A contiene tres rosas, una margarita y dos claveles. Cada arreglo TIPO B contiene tres margaritas, dos claveles y tres crisantemos. Cada arreglo TIPO C contiene cinco rosas, tres claveles y dos crisantemos. Cada arreglo TIPO D contiene dos rosas, una margarita y cinco crisantemos. En un día la floristería ha utilizado un total de 60 rosas, 39 margaritas, 48 claveles y 57 crisantemos para preparar órdenes de estos cuatro tipos de arreglos. ¿Cuántos arreglos de cada tipo habrá hecho?

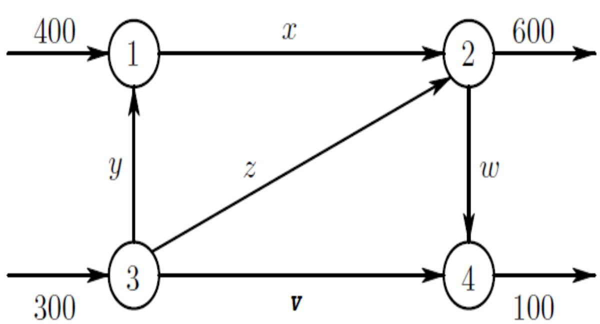
31) Una empresa fabrica 3 tipos de computadora personal: A, B, C. Para armar una del tipo A se necesitan 10 horas, otras 2 para probar sus componentes, y 2 horas más para instalar sus programas. Para una del tipo B se necesitan 12 horas en su ensamblado, 2.5 horas para probarla, y 2 horas para instalarle los programas. La del tipo C, la más sencilla de la línea, necesita 6 horas de armado, 1.5 horas de prueba y 1.5 horas de instalación. Si la empresa dispone de 1560 horas de trabajo por mes para armar, 340 horas para las pruebas y 320 horas para instalar, ¿cuántas computadoras de cada tipo pueden producirse en un mes?

32) Un ingeniero supervisa la producción de cuatro tipos de mezclas de concreto para la elaboración de prefabricados. Se requieren cuatro clases de recursos: mano de obra (horas-hombres), grava, agua y arena. En el siguiente cuadro se ilustra las cantidades necesarias para cada uno de estos recursos en la producción de cada tipo de mezcla.

Mezcla	Mano de obra	Grava	Arena	Agua
1	3	20	10	10
2	4	25	15	8
3	7	40	20	10
4	20	50	22	15

Si se dispone diariamente de 504 horas-hombre, 1970 kg de grava, 970 kg de arena y 601 litros de agua ¿Cuántas mezclas de cada tipo se pueden realizar por día?

33) La siguiente red representa el flujo vehicular por un sector de la ciudad donde, los nodos son las intersecciones y los arcos, las carreteras. Las flechas indican el sentido del movimiento de los vehículos.



a) Formule un sistema de ecuaciones lineales cuya solución aporte todas las opciones posibles de flujo vehicular.
b) Si el flujo vehicular entre el nodo 1 y 2 es 550 y entre el nodo 2 y 4 es 50, entonces calcule los otros flujos.

34) Una firma de transportes posee tres tipos distintos de camiones, I, II y III. Los camiones están equipados para el transporte de 2 clases de maquinaria pesada (Clase A y Clase B). El camión tipo I puede transportar solo dos máquinas de la clase A. El camión tipo II puede transportar una máquina de la clase A y una de la clase B y el camión tipo III puede transportar una máquina de la clase A y dos de la B. La firma consigue una orden para transportar 32 máquinas de la clase A y 10 máquinas de la clase B. Encuentre el número de camiones de cada tipo que se requieren para cumplir la orden, asumiendo que, cada camión debe estar completamente cargado y el número exacto de máquinas pedidas es el que se debe despachar. Si la operación de cada tipo de camión tiene el mismo costo para la firma, cuál es la solución más económica?

BIBLIOGRAFÍA

Anton, H (2011). *Introducción al Álgebra Lineal*. Quinta edición. Editorial Limusa Wiley. México.

Aranda, E. (2016). *Álgebra lineal con aplicaciones y Python*. Impreso por Lulu.com

Bernard, K. (2013). *Álgebra Lineal. Fundamentos y Aplicaciones*. Editorial Pearson.

Borobia, A y Estrada, B. (2015). *Álgebra Lineal y Geometría Vectorial*. Editorial Sanz y Torres. España.

De Burgos, J. (2012). *Matrices y Determinantes*. García Maroto Editores. España.

Delgado G, M. y Delgado P, M. (2015). *Algebra Lineal: Sistemas Matrices y Vectores*. Editorial Sanz y Torres. España.

Gamboa, J. (2004). *Álgebra Matricial*. Editorial Anaya. España.

Grossman, S. (2012). *Álgebra Lineal*. Editorial Mc Graw Hill. México.

Murray R., Spiegel, Lipschutz, S & Spellman, D. (2011). *Análisis Vectorial*. McGraw-Hill Mexico.

Pool, D. (2011). *Álgebra Lineal Una introducción Moderna*. Segunda edición. Ediciones Paraninfo. México.

William, G. (2002). *Álgebra Lineal con Aplicaciones*. Editorial Mc Graw-Hill. México.