UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

APUNTES: VECTORES EN $\Re^N$

Por: Benigna E. Fernández de Guardia

Edición 2020

ÍNDICE

Página

INTRODUCCIÓN

En este folleto se despliega el desarrollo del tema Vectores en $\Re^N$ que es común en algunos cursos de matemática y física para las carreras que se ofrecen en la Universidad Tecnológica de Panamá. Han sido actualizados a lo largo de los años generando esta reciente versión que es utilizada actualmente.

Este folleto se ha editado en un lenguaje sencillo y puntual que pueda contribuir en la comprensión de los temas por parte de los estudiantes. Se plantea una variedad de ejemplos que complementan la teoría de tal manera que el alumno pueda movilizar los conocimientos previos para integrarlos al curso y seguir avanzando en el conocimiento que a su vez no solo sirvan de base para los posteriores cursos, si no que aprovechen el conocimiento y aprendan a disfrutarlo. Al final del folleto se plantea una prueba formativa que se puede discutir en grupo y en el pleno de la clase.

El estudio matemático de los vectores, tiene un gran interés, sobre todo a partir de los estudios de David Hilbert (1862-1943) y Stefan Banach (1892-1945), que hicieron uso de la teoría de espacios vectoriales, aplicándolos a las técnicas del análisis matemático.

Los vectores son muy importantes para estudiar fenómenos que suceden a nuestro alrededor. Por ejemplo, la velocidad, la aceleración y las fuerzas que causan el movimiento de los cuerpos, son vectores. Los vectores y las ecuaciones vectoriales permiten formular las leyes y principios de la Física de un modo preciso y sistemático. En el ámbito de la ingeniería existe multitud de magnitudes vectoriales, como el campo eléctrico, campo magnético, entre otros.

Este folleto representa un valioso recurso que contribuye a la mejora del proceso enseñanza-aprendizaje, permitiendo ampliar de manera significativa los conocimientos sobre los vectores y su importancia en el desarrollo científico y tecnológico.

1. VECTORES EN $\Re^N$

1.1. Introducción al concepto de vector

1.1.1. Definición de escalar

Muchas cantidades utilizadas en el campo de la ingeniería, tales como: área, volumen, masa y tiempo, pueden caracterizarse mediante un solo número real, el cual se conoce como magnitudes escalares y se denomina escalar al número asociado con una de ellas. Es decir, un escalar es un tipo de magnitud física que se expresa por un solo número y tiene el mismo valor para todos los observadores.

1.1.2. Definición de vector

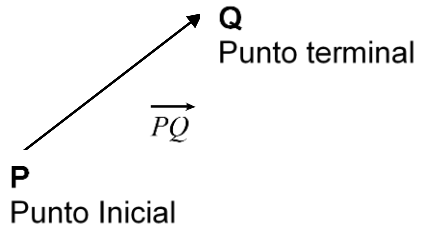
Otros conceptos como la fuerza y la velocidad, poseen tanto magnitud como dirección, y no se pueden caracterizar completamente mediante un único número real, por ello se les define como vectores. En decir, un vector es una magnitud física definida en un sistema de referencia que se caracteriza por tener módulo (o longitud) y una dirección (u orientación).

1.2. Representación de un vector en $\Re^2$

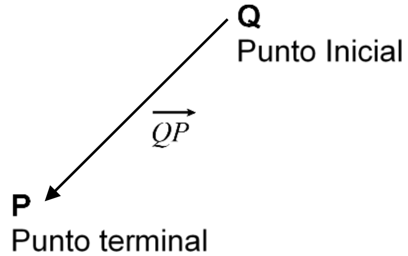
1.2.1. Representación de un vector por medio de segmento de recta dirigido

Para representar los vectores se utiliza un segmento dirigido.

EJEMPLO



El segmento dirigido **PQ** tiene por punto inicial a **P** y por punto final a **Q.**

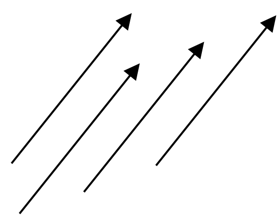


El segmento dirigido **QP** tiene por punto inicial a **Q** y por punto final a **P.**

Dos segmentos dirigidos de la misma longitud y dirección se llaman **equivalentes**.

Definición geométrica de un vector:

Al conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos que son equivalentes a uno dado, es lo que se denomina vector. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina representación del vector.



Un vector se representa de múltiples formas, gráficamente mediante una flecha. Se denotan, generalmente, mediante letras minúsculas tales como $u, \ v, \ w$

La palabra vector proviene de "vectoris" que significa "que conduce".

Definición algebraica de un vector en el plano

Un vector v en el plano es un par ordenado de números reales (v_1, v_2)**.** Los números v_1 y v_2 se denominan elementos o componentes del vector v, y se denota por: $v = \langle v_1, v_2 \rangle$

Algunos autores lo representan $v = (v_1, v_2)$

Representación de un vector en $\Re^2$

La definición algebraica de un vector implica que un segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ se puede mover para obtener un segmento de recta equivalente, **con su punto inicial en el origen,** y a esta última representación se le denomina generalmente vector de posición.

Algebraicamente, para buscar un vector de posición, dado un segmento dirigido se utiliza el siguiente procedimiento:

1. Sean los puntos $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$ entonces el vector de posición v está representado por:

$$\boxed{v = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2 \rangle}$$

2. Si $v = \langle v_1, v_2 \rangle$**,** entonces v puede representarse mediante el segmento dirigido, en **posición normal** , o v es un vector de posición que va de $(0, 0)$ a (v_1, v_2)**.**

1.2.2. Módulo y dirección de un vector

La longitud o **norma de** v viene dada por:

$$\boxed{\|v\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

La longitud de v también se conoce como módulo, magnitud o norma de v, y otra forma de denotarla es $|v|$

EJEMPLO 1

Calcular las componentes y la longitud de un vector v cuyo punto inicial es (3 , –7) y el terminal (–2 , 5).

Solución:

Componentes de v

Sea P (3, –7) y Q (–2,5)

$v = \langle v_1 \ , v_2 \rangle$

$v = \langle q_1 - p_1 \ , \ q_2 - p_2 \rangle$

$v = \langle -2 - 3 \ , \ 5 + 7 \rangle$

$v = \langle -5 \ , \ 12 \rangle$

Módulo de $v = \langle -5 \ , \ 12 \rangle$

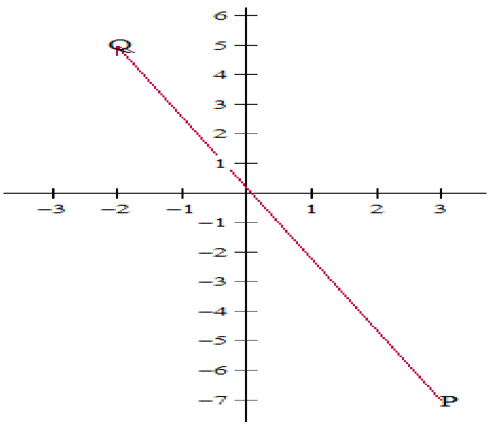
$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

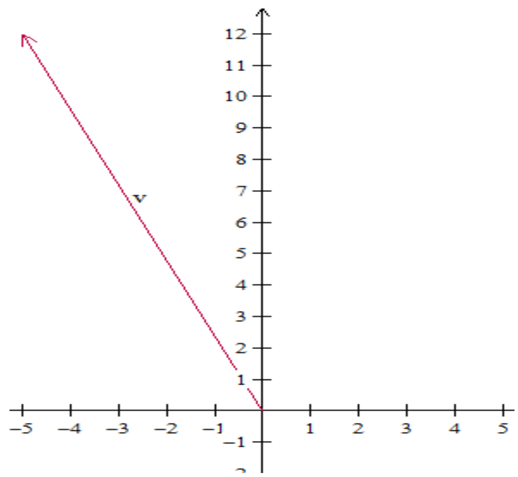
$\|v\| = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2}$

$\|v\| = \sqrt{25 + 144}$

$\|v\| = 13$

Gráficamente





Ambas son representaciones del mismo vector

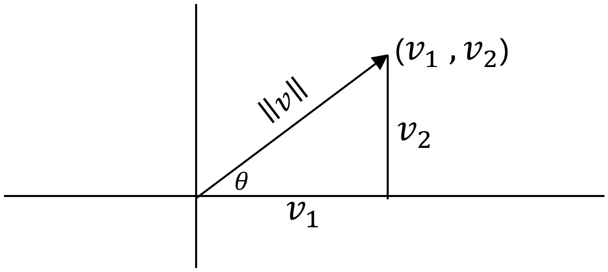
Dirección de un Vector

Se define la dirección del vector $v = \langle v_1 , v_2 \rangle$ como el ángulo θ, medido en radianes, que forma el vector con el lado positivo del eje x. Se selecciona por convención θ tal que $0 \leq \theta < 2\pi$. Para determinar θ de manera única, es necesario determinar el cuadrante donde se encuentra v. Este ángulo también es denominado ángulo director.

Sea $v = \langle v_1 , v_2 \rangle$, entonces $tan\,\theta = \frac{v_2}{v_1}$; si $v_1 \neq 0$ de donde $\theta = tan^{-1}\frac{v_2}{v_1}$

Si $v_1 = 0$ y $v_2 > 0$ entonces $\theta = \frac{1}{2}\pi$ o $\theta = 90°$

Si $v_1 = 0$ y $v_2 < 0$ entonces $\theta = \frac{3}{2}\pi$ o $\theta = 270°$



EJEMPLO 2

Determinar la longitud y la medida en radianes del ángulo director de cada uno de los siguientes vectores. Represéntelos en el plano.

a) $v = \langle 2\,,\ 2\rangle$ **b)** $v = \langle 0\,,\ 3\rangle$ **c)** $v = \langle -2\sqrt{3}\,,\ 2\rangle$ **d)** $v = \langle 6\,, -6\rangle$

Solución:

a) Si $v = \langle 2\,,\ 2\rangle$ entonces:

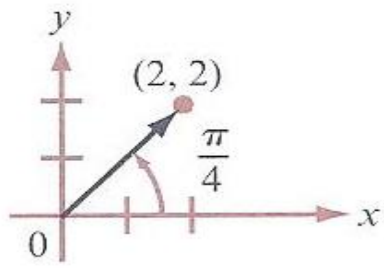
$$\|v\| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2}$$

$$\|v\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$tan\,\theta = \frac{2}{2}$$

$$\theta = tan^{-1}(1)$$

$$\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$$



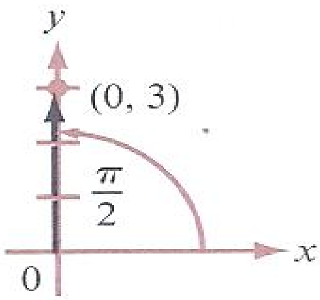
b) Si $v = \langle 0\,,\ 3\rangle$ entonces:

$\|v\| = \sqrt{(0)^2 + (3)^2}$

$\|v\| = \sqrt{9} = 3$

Dado que $v_1 = 0$ y $v_2 > 0$

entonces $\theta = \frac{1}{2}\pi$



c) Si $v = \langle -2\sqrt{3}\,,\ 2\rangle$ entonces

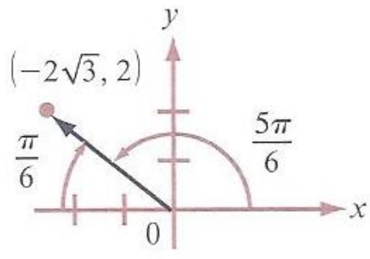
$\|v\| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (2)^2}$

$\|v\| = 4$

$tan\,\alpha = \frac{2}{-2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ **Segundo Cuadrante**

$\alpha = tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$



d) Si $v = \langle 6\,, -6\rangle$

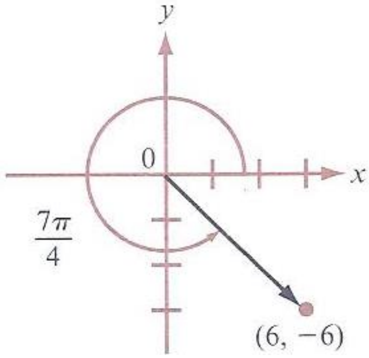
$\|v\| = \sqrt{(6)^2 + (-6)^2}$

$\|v\| = 6\sqrt{2}$

$tan\alpha = \frac{6}{-6} = -1$ **Cuarto Cuadrante**

$\alpha = -\frac{\pi}{4}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$



Vector Cero

Si ambos puntos, el inicial y el final, son el origen, entonces a v se le llama **vector cero** y se denota por $v = 0 = \langle 0\,,\ 0\rangle$ El vector cero tiene magnitud cero y como los puntos inicial y final coinciden, se dice que el vector cero no tiene dirección.

1.2.3. Vectores unitarios

Vector Unitario

Si $\|v\| = 1$, entonces a v se le llama vector unitario.

1.2.4. Vectores unitarios canónicos

Los vectores unitarios $\langle 1\,,\ 0\rangle$ y $\langle 0\,,\ 1\rangle$ se conocen como **vectores unitarios canónicos** del plano. Estos vectores permiten representar a cualquier otro vector en el plano de una forma conveniente. Se denotan de la siguiente manera:

$$i = \langle 1\,,\ 0\rangle \qquad \text{y} \qquad j = \langle 0\,,\ 1\rangle$$

Estos vectores pueden usarse para representar cualquier vector. Así,

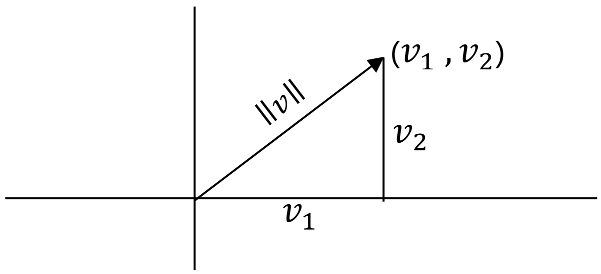
$$v = \langle v_1\,, v_2\rangle = v_1\langle 1\,, 0\rangle + v_2\,\langle 0\,, 1\rangle = v_1 i + v_2\, j$$

A la expresión $v = v_1 i + v_2\, j$ se le denomina combinación lineal de i y j **.**

Los escalares v_1 y v_2 son las **componentes horizontal** y **vertical** de v, respectivamente.

Por otro lado, hemos visto que si $v = \langle v_1 , v_2 \rangle$ y θ es el ángulo director de v entonces:

$$\boxed{v_1 = \|v\| \cos\theta \qquad\qquad v_2 = \|v\| \operatorname{sen}\theta}$$



Dado que el punto final de un vector unitario, que tiene su punto inicial en el origen, está sobre el círculo unitario, entonces si θ es el ángulo director de v es claro que un vector unitario v se puede escribir en la forma: $v = (cos\theta)i + (sen\theta)j$

EJEMPLO 3

Sea u el vector con punto inicial (2, –5) y punto terminal (–1, 3) y sea $v = 2i - j$

Escribir los vectores siguientes como combinación lineal de los vectores unitarios canónicos i y j

Solución:

a) u

Para el vector u, cuyo punto inicial es P (2 ,–5) y el terminal es Q (–1, 3) se tiene:

$$u = \langle q_1 - p_1 \ , \ q_2 - p_2 \rangle = \langle -3 \ , \ 8 \rangle = -3i + 8j$$

b) $w = 2u - 3v$

Para el vector w, se tiene: $w = 2u - 3v = 2(-3i + 8j) - 3(2i - j)$

$$w = -6i + 16j - 6i + 3j$$

$$w = -12i + 19j$$

EJEMPLO 4

Sea el vector unitario $u = \left(\frac{1}{2}\right) i + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) j$

Exprese en la forma $u = (cos\theta)\, i + (sen\theta)\, j$

Solución:

Dado que $u = \left(\frac{1}{2}\right) i + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) j$ Se debe encontrar θ

Analizando el vector dado, se tiene que $cos\,\theta = \frac{1}{2}$ luego $\theta = cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\pi$

Por tanto, $u = \left(cos\frac{1}{3}\pi\right) i + \left(sen\frac{1}{3}\pi\right) j$

Vector Unitario en la dirección de v

Si v es un vector no nulo en el plano, el siguiente vector u tiene longitud 1 y la misma dirección que v:

$$\boxed{u = \frac{1}{\|v\|}\, v}$$

EJEMPLO 5

Calcular un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{v} = \langle \mathbf{-2, 5} \rangle$ y comprobar que el resultado tiene longitud 1.

Solución:

El vector unitario en la dirección de v es:

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{\langle -2\,,5\rangle}{\sqrt{(-2)^2+(5)^2}} = \frac{1}{\sqrt{29}}\langle -2\,,5\rangle = \left\langle \frac{-2}{\sqrt{29}}\ ,\ \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle$$

Este vector tiene longitud 1, ya que

$$\|\,u\,\| = \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{29}+\frac{25}{29}} = \sqrt{\frac{29}{29}} = 1$$

1.3. Operaciones Básicas sobre Vectores en $\mathfrak{R}^2$

Las dos operaciones básicas con vectores son la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar.

1.3.1. Suma y diferencia de Vectores. Producto de un vector por un escalar.

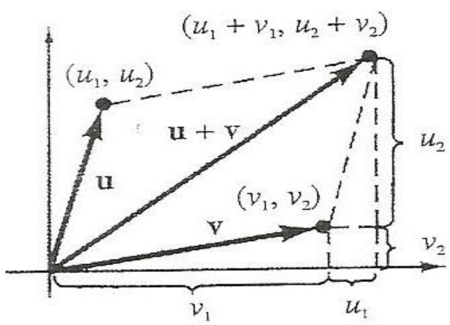
Sean los vectores $u = \langle u_1 , u_2 \rangle$ y $v = \langle v_1 , v_2 \rangle$. Se definen las operaciones siguientes:

1. La suma de los vectores u y v es el vector $u + v = \langle u_1 + v_1 , u_2 + v_2 \rangle$

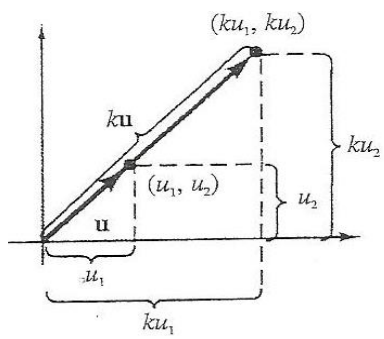
2. El producto de un escalar k por un vector u es el vector $ku = \langle ku_1 , ku_2 \rangle$

3. El opuesto de v es el vector $-v = (-1)v = \langle - v_1 , - v_2 \rangle$

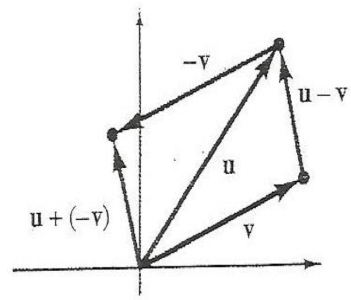
4. La diferencia de u y v es $u - v = u + (-v) = \langle u_1 - v_1 , u_2 - v_2 \rangle$



Suma de vectores



Producto por un escalar



Diferencia de vectores

Nótese que para representar gráficamente $u - v$ usamos segmentos orientados con los mismos puntos iniciales. La diferencia $u - v$ es el vector que va del punto final de v al punto final de u.

EJEMPLO 6

Dados los vectores $v = \langle -2\,, 5\rangle$ y $w = \langle 3\,, 4\rangle$ calcule los vectores siguientes:

a) $\frac{1}{2}v$ **1.** $v + 2w$ **2.** $v + w$ **3.** $v - w$

Solución:

a) $\frac{1}{2}v$

Como $v = \langle -2\;,\;5\rangle$ se tiene que $\frac{1}{2}v = \left\langle \frac{1}{2}(-2)\;,\;\frac{1}{2}(5)\right\rangle = \left\langle -1\;,\;\frac{5}{2}\right\rangle$

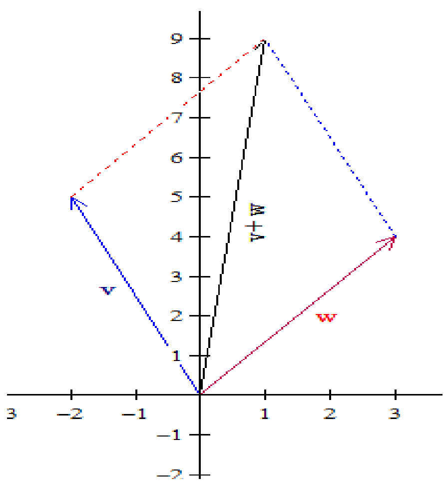
b) $v + 2w$

Dado que $w = \langle 3\,, 4\rangle$; $2w = \langle 6\,, 8\rangle$ y $v = \langle -2\,, 5\rangle$ se sigue que

$v + 2w = \langle -2\;,\;5\rangle + \langle 6\,, 8\rangle = \langle 4, 13\rangle$

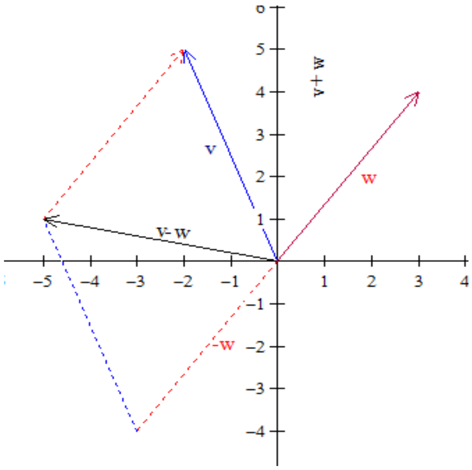
c) $v + w$

Dado que $v = \langle -2\;,\;5\rangle$ y $w = \langle 3\;,\;4\rangle$ entonces $v + w = \langle 1\;,\;9\rangle$



d) $v - w$

Dado que $v = \langle -2\ ,\ 5 \rangle$ y $w = \langle 3\ ,\ 4 \rangle$ entonces $v - w = \langle -5\ ,\ 1 \rangle$



1.3.2. Propiedades de las operaciones básicas sobre vectores

Sean $u,\ v$ y w vectores del plano y sean c y d escalares.

1. $u + v = v + u$ Propiedad conmutativa

2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ Propiedad asociativa

3. $u + 0 = u$ Vector neutro bajo la adición

4. $u + (-u) = 0$ Vector opuesto

5. $c(du) = (cd)u$ Asociativa respecto al producto escalar

6. $(c + d)u = cu + du$ Propiedad distributiva respecto a los escalares

7. $c(u + v) = cu + cv$ Propiedad distributiva respecto a la suma de vectores

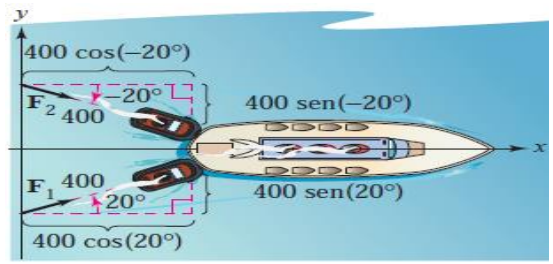
8. $1(u) = u$; $0(u) = 0$ Propiedades consecuentes respecto al producto escalar

Aplicaciones de los vectores

Las aplicaciones en las que intervienen los vectores son múltiples tanto en Física como en Ingeniería.

EJEMPLO 7

Dos botes remolcadores empujan un barco, como se muestra en la figura. Cada remolcador ejerce una fuerza de 400 libras. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre el barco?



Fuerza resultante sobre el barco ejercida por los dos remolcadores

Solución:

Se representan las fuerzas ejercidas por el primer y segundo remolcador como:

$F_1 = 400\langle cos20°\,, sen20°\,\rangle = 400\cos(20°)\,\boldsymbol{i} \,+\, 400\, sen(20°)\boldsymbol{j}$

$F_2 = 400\langle\cos\,(-20°)\,, sen(-20°)\,\rangle = 400\cos(20°)\,\boldsymbol{i} - \,400\, sen(20°)\boldsymbol{j}$

Para obtener la fuerza resultante sobre el barco se suman estas dos fuerzas.

$F = F_1 + \,F_2$

$F = \,400\cos(20°)\,\boldsymbol{i} \,+\, 400\, sen(20°)\boldsymbol{j} \,+\, 400\cos(20°)\,\boldsymbol{i} - \,400\, sen(20°)\boldsymbol{j}$

$F = 800\cos(20°)\,\boldsymbol{i}$

$F \approx 752\;\,\boldsymbol{i}$

Luego la fuerza resultante sobre el barco es aproximadamente 752 libras en la dirección del eje x positivo.

1.4. Vectores en el espacio tridimensional ($\Re^3$)

1.4.1. Definición y operaciones básicas sobre vectores en $\Re^3$

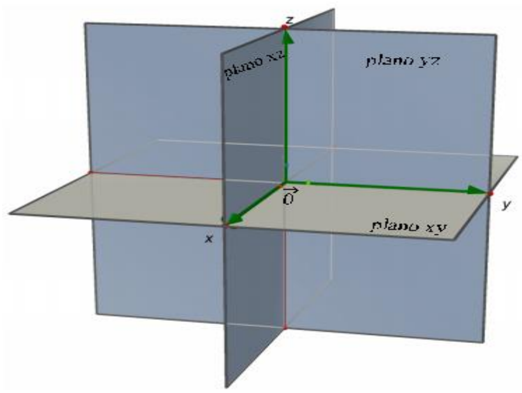
Se ha podido observar que cualquier punto en el plano puede representarse como un par ordenado de números reales. De manera análoga, cualquier punto en el espacio se puede representar por una terna ordenada de números reales.

Definición de espacio numérico tridimensional.

El conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales recibe el nombre de espacio numérico tridimensional, y se denota por $\boldsymbol{\Re^3}$. Cada terna ordenada se denomina punto del espacio numérico tridimensional.

Para representar el espacio tridimensional $\boldsymbol{\Re^3}$, se definen tres rectas perpendiculares entre sí, a las que se les denomina el eje x, eje y, el eje z. Estos ejes se pueden seleccionar de muchas maneras, pero la más común tiene los ejes x y y horizontales, y el eje z eje vertical. Sobre cada eje se elige una dirección positiva y la distancia a lo largo de cada eje se mide como el número de unidades en esta dirección positiva a partir del origen.

Los tres ejes determinan tres planos coordenados, que se denominan plano xy, plano xz y plano yz. El plano xy contienen los ejes x y y (el plano con el que se trabaja en $\Re^2$), y se puede pensar en los planos xz y yz de modo similar. Los tres planos coordenados dividen el espacio $\boldsymbol{\Re^3}$ en ocho octantes (similar a $\Re^2$ donde el plano se divide en cuatro cuadrantes).



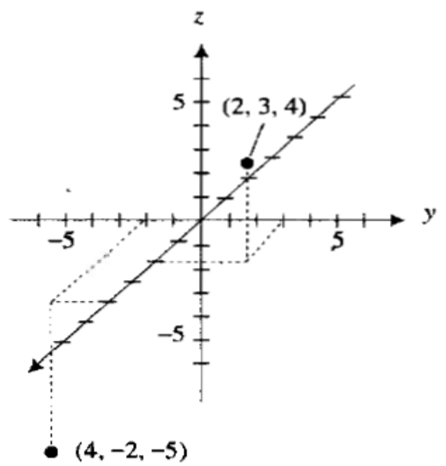
Localización de Puntos en $\Re^3$

EJEMPLO 8

Ubique en el espacio los puntos P(4 , –2 , –5) y Q (2 , 3 , 4)

Solución:

Ubicando en el espacio los puntos P(4 , –2 , –5) y Q (2 , 3 , 4) tenemos:



Localice el punto R(0 , 3 ,1) en el espacio del dibujo

Vectores en el espacio

Un vector en el espacio tridimensional es una terna ordenada de números reales $\langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle$. Los números reales v_1 , v_2 y v_3 se denominan componentes del vector $\langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle$.

De la misma manera que para vectores de $\Re^2$, un vector de $\Re^3$ puede representarse mediante un segmento dirigido. Es decir, si $v = \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle$ entonces el segmento dirigido que tiene su punto inicial en el origen y su punto terminal en el punto (v_1 , v_2 , v_3) recibe el nombre de representación de posición de v, o vector de posición.

Algebraicamente, para buscar un vector de posición, dado un segmento dirigido se utiliza un proceso similar al utilizado en el plano. Si v está representado por el segmento dirigido de $P\,(p_1 , p_2 , p_3)$ hasta $Q(q_1 , q_2 , q_3)$ entonces v se obtiene restando de las coordenadas del punto terminal menos las del punto inicial.

$$\boxed{v = \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle = \langle q_1 - p_1 \ , q_2 - p_2 , q_3 - p_3 \rangle}$$

Vectores unitarios canónicos

Si se utilizan los vectores unitarios $i = \langle 1, 0, 0 \rangle$ $j = \langle 0,\ 1, 0 \rangle$ y $k = \langle 0,\ 0,\ 1 \rangle$ en las direcciones de los semiejes x, y y z positivos respectivamente, la notación canónica para v es: $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$

EJEMPLO 9

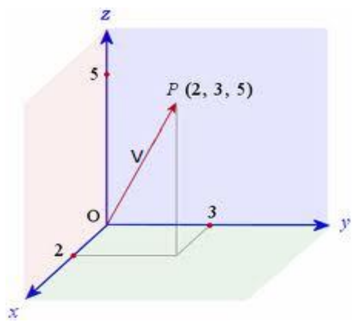
Exprese el vector $v = 4i - 5k$ en forma de componentes.

Solución:

El vector $v = 4i - 5k$ se puede expresar como $v = \langle 4\,,\ 0, -5\rangle$

EJEMPLO 10

Gráfica del vector $v = \langle 2\,,\ 3,\ 5\rangle$



EJEMPLO 11

Hallar el punto terminal del vector $v = 7i - \mathrm{j} + 3k$, sabiendo que su punto inicial es $P(-2,\ 3,\ 5)$

Solución:

Dado el vector $v = \langle 7\,, -1,\ 3\rangle$ y el punto $P(-2,\ 3,\ 5)$. Sea $Q(q_1\,, q_2\,, q_3)$ el punto terminal. Entonces,

$$v = \overrightarrow{PQ}$$

$$\langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle = \langle q_1 - p_1 , q_2 - p_2 , q_3 - p_3 \rangle$$

$$\langle 7 , -1 , 3 \rangle = \langle q_1 + 2 , q_2 - 3 , q_3 - 5 \rangle$$

Comparando componentes se concluye que:

$q_1 + 2 = 7 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 5$

$q_2 - 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad q_2 = 2$

$q_3 - 5 = 3 \quad \Rightarrow \quad q_3 = 8$

Por lo tanto $Q(5, \ 2, \ 8)$ es el punto terminal.

Operaciones sobre vectores en $\Re^3$

La interpretación geométrica de la suma y la diferencia de dos vectores en $\Re^3$ es semejante a los vectores en $\Re^2$.

1. La suma de los vectores u y v es el vector:

$$u + v = \langle u_1 + v_1 , u_2 + v_2 , u_3 + v_3 \rangle$$

2. La diferencia de los vectores u y v es el vector:

$$u - v = \langle u_1 - v_1 , u_2 - v_2 , u_3 - v_3 \rangle$$

3. El producto por un escalar de k y u es el vector:

$$ku = \langle ku_1, \ k\, u_2, \ ku_3 \rangle$$

Norma de un Vector en $\Re^3$

La norma de un vector en $\Re^3$ está dado por $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Vector unitario en la dirección de v

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{1}{\|v\|}\right)\langle v_1, v_2, v_3\rangle$$

EJEMPLO 12

Sea el vector $v = \langle -3,\ 4,\ -8\rangle$. Hallar el módulo o norma de v

Solución:

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{89}$$

EJEMPLO 13

Sea $v = \langle -1\ ,\ 3, -2\rangle$. Hallar un vector unitario en la dirección v.

Solución:

$$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$u = \frac{v}{\|v\|}$ entonces $u = \frac{\langle -1,\ 3, -2\rangle}{\sqrt{14}} = \left\langle \frac{-1}{\sqrt{14}}\ ,\ \frac{3}{\sqrt{14}}\ ,\ \frac{-2}{\sqrt{14}} \right\rangle$

$$u = \left\langle \frac{-1}{\sqrt{14}}\ ,\ \frac{3}{\sqrt{14}}\ ,\ \frac{-2}{\sqrt{14}} \right\rangle$$

Entonces $u = \left\langle \frac{-1}{\sqrt{14}}\ ,\ \frac{3}{\sqrt{14}}\ ,\ \frac{-2}{\sqrt{14}} \right\rangle$ es el vector unitario en la dirección de v y se puede comprobar que su norma es 1

EJEMPLO 14

Hallar las componentes y la longitud de un vector v cuyo punto inicial es (–2, 3, 1) y cuyo punto terminal es (0, –4, 4). Obtener un vector unitario en la dirección de v.

Solución:

Sea $P(-2,\ 3,\ 1)$ el punto inicial del vector v y $Q(0\,,-4\,,\ 4)$ el punto terminal.

Las componentes del vector v son:

$$v = \langle q_1 - p_1\ , q_2 - p_2\, , q_3 - p_3\rangle$$

$$v = \langle 2\ , -7\, , 3\rangle$$

Para obtener un vector unitario en la dirección de v se calcula primero $\|v\|$.

$$\|v\| = \sqrt{(2)^2 + (-7)^2 + (3)^2} = \sqrt{4 + 49 + 9} = \sqrt{62}$$

Luego el vector unitario en la dirección de v es:

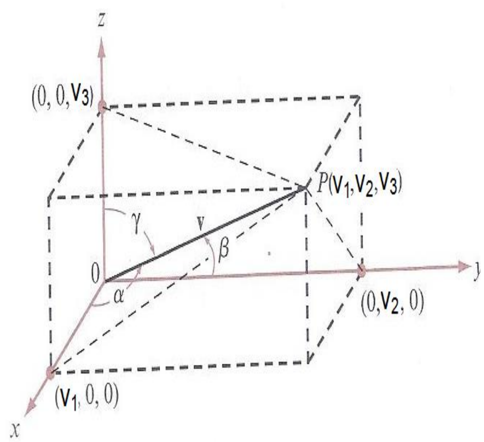
$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{62}}\langle 2, -7\, , 3\rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{62}}\, , \frac{-7}{\sqrt{62}}\, , \frac{3}{\sqrt{62}} \right\rangle$$

Dirección de un vector en $\Re^3$

Para un vector en el espacio es conveniente definir su dirección en términos de algunos ángulos. Sea v el vector descrito en la figura siguiente. Definimos α como el ángulo entre v y el eje x positivo, β el ángulo entre v y el eje y positivo, y γ el ángulo entre v y el eje z positivo. Los ángulos α , β y γ se denominan **ángulos directores** de v.

Entonces, analizando la figura se tiene:

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|v\|}, \quad \cos\beta = \frac{v_2}{\|v\|}, \quad \cos\gamma = \frac{v_3}{\|v\|}$$



Si v es un vector unitario entonces $\|v\| = 1$

y $\quad \cos\alpha = v_1 \qquad \cos\beta = v_2 \qquad \cos\gamma = v_3$

de donde se deduce que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Los cosenos de estos ángulos $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ se denominan **cosenos directores** de v.

Si $v = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ y $\|v\| \neq 1$, entonces los números v_1, v_2, v_3 se les llaman **números directores** del vector v.

EJEMPLO 15

Hallar los cosenos directores del vector $v = 2\,i + 3\,j + 4k$ y probar que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Solución:

Como: $\|v\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$ se tiene que

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|v\|} = \frac{2}{\sqrt{29}} \qquad \cos\beta = \frac{v_2}{\|v\|} = \frac{3}{\sqrt{29}} \qquad \cos\gamma = \frac{v_3}{\|v\|} = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

Además, se puede comprobar que $cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1$, pues la suma de los cuadrados de los cosenos directores es

$$cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = \frac{4}{29} + \frac{9}{29} + \frac{16}{29} = \frac{29}{29} = 1$$

1.5. Generalización del concepto de vector en $\Re^N$

En los espacios de tres dimensiones un punto se caracteriza por un conjunto de tres números, llamados coordenadas, que lo determinan completamente en un sistema de referencia dado. Por ejemplo, $(x,\ y,\ z)$, son las coordenadas de un punto en los sistemas tridimensionales rectangulares. Por analogía, un punto en el espacio de N dimensiones se caracteriza por un conjunto de N números que se nombran por $(x_1\,, x_2\,, x_3, \dots, x_n)$.

Un vector de $\Re^N$ es un conjunto ordenado de n números reales los cuales son llamados componentes del vector y se pueden denotar $v = \langle v_1\,, v_2\,, v_3\,, \dots\,, v_n\rangle$

1.6. Producto escalar o producto punto. Proyecciones.

1.6.1 Definición y propiedades

Producto Punto

Al producto punto también se le denomina producto escalar o producto interno, y es una operación que involucra la multiplicación de dos vectores, y tiene como resultado un escalar. El producto punto o producto escalar de dos vectores u y v, denotado por $u.v$ se define de la siguiente manera:

Si $u = \langle u_1\,, u_2\rangle$ y $v = \langle v_1\,, v_2\rangle$ son dos vectores de $\Re^2$, entonces:

$$\boxed{u.v = u_1 v_1 + u_2 v_2}$$

Si $u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ son dos vectores de $\Re^3$, entonces:

$$\boxed{u.v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$$

IMPORTANTE

Los productos puntos que tienen los vectores unitarios i, j, k son útiles y se pueden verificar fácilmente.

Dado que $i = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $j = \langle 0, 1, 0 \rangle$ y $k = \langle 0, 0, 1 \rangle$ entonces,

$$i.i = i^2 = 1 \qquad j.j = j^2 = 1 \qquad k.k = k^2 = 1$$

$$i.j = 0 \qquad i.k = 0 \qquad j.k = 0$$

EJEMPLO 16

Si $A = \langle 4, 1, -5 \rangle$ y $B = \langle -3, 4, -2 \rangle$ Hallar $A.B$

Solución:

$A.B = (4)(-3) + (1)(4) + (-5)(-2)$

$A.B = -12 + 4 + 10$

$A.B = 2$

EJEMPLO 17

Si $u = i - 2j - k$ y $v = -6i + 2j - 3k$ Hallar $u.v$

Solución:

Puede resolverse de dos formas. Escoja la que le resulte más fácil.

Primera: Dado que $u = i - 2j - k$ y $v = -6i + 2j - 3k$

$u.v = (1)(-6) + (-2)(2) + (-1)(-3)$

$u.v = -6 - 4 + 3$

$u.v = -7$

Segunda: Dado que $u = i - 2j - k$ y $v = -6i + 2j - 3k$

$u.v = (i)(-6i) + (-2j)(2j) + (-k)(-3k)$

$u.v = -6i^2 - 4j^2 + 3k^2$

$u.v = -6(1) - 4(1) + 3(1)$

$u.v = -6 - 4 + 3$

$u.v = -7$

EJEMPLO 18

Si $u = 3i + 4j$ y $v = -i + 2j$ Hallar $u.v$

Solución:

Escogiendo una de las maneras de resolver, se tiene:

$u.v = (3)(-1) + (4)(2)$

$u.v = -3 + 8$

$u.v = 5$

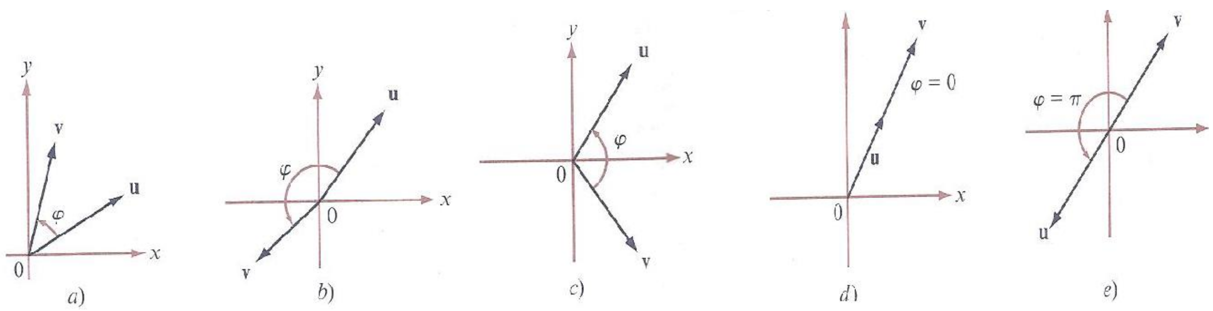
Propiedades del Producto Punto

1. $u.v = v.u$
2. $u.(v + w) = u.v + u.w$
3. $c\,(u.v) = (cu).v = u.(cv)$
4. $0.v = 0$
5. $v.v = \|v\|^2$

1.6.2. Ángulo entre dos vectores

Sean u y v vectores diferentes del vector cero. Entonces el ángulo φ entre u y v está definido como el ángulo no negativo más pequeño entre las representaciones de u y v que tienen el origen como punto inicial.

Si $u = c\,v$ para algún escalar c, entonces $\varphi = 0$ si $c > 0$ y $\varphi = \pi$ si $c < 0$



Si θ es un ángulo entre dos vectores no nulos u y v entonces:

$$\cos\theta = \frac{u\,.\,v}{\|u\|\ \|v\|}$$

Este resultado conduce a otra manera de calcular el producto escalar:

$$\boxed{u\,.\,v = \|u\|\,\|v\|\,\cos\theta}$$

EJEMPLO 19

Dados $u = \langle 3, -1, 2\rangle$, $v = \langle -4, 0, 2\rangle$, $w = \langle 1, -1, -2\rangle$ y $z = \langle 2, 0, -1\rangle$

Hallar el ángulo que forman los vectores: **a)** u y w **b)** v y z

Solución:

a) u y w

Dado que $u = \langle 3, -1, 2\rangle$ y $w = \langle 1, -1, -2\rangle$

$$u\,.\,w = 3(1) + (-1)(-1) + (2)(-2) = 3 + 1 - 4 = 0$$

$$\|u\| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{14} \quad \text{y} \quad \|w\| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

Entonces $cos\,\theta = \frac{u\,.\,w}{\|u\|\ \|w\|} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{0}{\sqrt{84}} = 0$ En consecuencia $\theta = \frac{\pi}{2}$

b) v y z

Dado que $v = \langle -4, 0, 2\rangle$ y $z = \langle 2, 0, -1\rangle$

$cos\,\theta = \frac{v\,.\,z}{\|v\|\,\|z\|} = \frac{-8\ +\ 0\ -2}{\sqrt{20}\ \sqrt{5}} = \frac{-10}{\sqrt{100}} = -1$ En consecuencia $\theta = \pi$

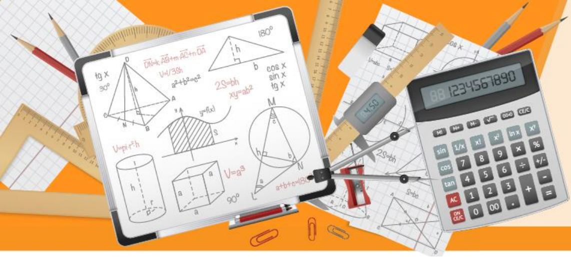
EJEMPLO 20

Calcule el ángulo entre u y v, si $u = i - 2j - 2k$ y $v = 6i + 3j + 2k$

Solución:

$$\cos\theta = \frac{u.\,v}{\|u\|\ \|v\|} = \frac{6\ -6\ -4}{3(7)} = -\frac{4}{21}$$

En consecuencia $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{21}\right) \approx 1.76 \text{ rad} \approx 0.56\pi$



Vectores Paralelos

Dos vectores u y v diferentes de cero son paralelos si el ángulo entre ellos es 0 o π .

Los vectores paralelos tienen la misma dirección o direcciones opuestas.

También dos vectores son paralelos si y solo si uno de los vectores es múltiplo escalar del otro. Esto significa que si $u \neq 0$ entonces $v = c\,u$ para alguna constante c.

EJEMPLO 21

El punto inicial del vector w es (2, −1, 3) y el punto final el (−4, 7, 5). ¿Cuál de los vectores siguientes es paralelo a w ?

a) $u = \langle 3\,, -4, -1 \rangle$ b) $u = \langle 12\,, -16,\ 4 \rangle$

Solución:

Dado que el punto inicial del vector w es (2, −1, 3) y el punto final el (−4, 7, 5), se calcula las componentes del vector w y resulta $w = \langle -6\,, 8, 2 \rangle$

a) $u = \langle 3\,, -4, -1 \rangle$

Se busca el múltiplo escalar si es que existe, haciendo $u = c\,w$

$$
\begin{aligned}
u &= c\,w \\
\langle 3\,, -4, -1 \rangle &= c\,\langle -6\,, 8, 2 \rangle \\
\langle 3\,, -4, -1 \rangle &= \langle -6c\,,\ 8c,\ 2c \rangle
\end{aligned}
$$

De donde se obtiene:

$$-6c = 3 \qquad 8c = -4 \qquad 2c = -1$$
$$c = -\frac{1}{2} \qquad c = -\frac{1}{2} \qquad c = -\frac{1}{2}$$

Resulta $c = -\frac{1}{2}$ para cada expresión, por tanto $u = -\frac{1}{2}w$, es decir

$$u = -\frac{1}{2}w$$

$\langle 3, -4, -1\rangle = -\frac{1}{2}\langle -6, 8, 2\rangle$ lo que se verifica

Es así como uno de los vectores es múltiplo escalar del otro y en consecuencia u es paralelo a w.

b) $u = \langle 12, -16, 4\rangle$

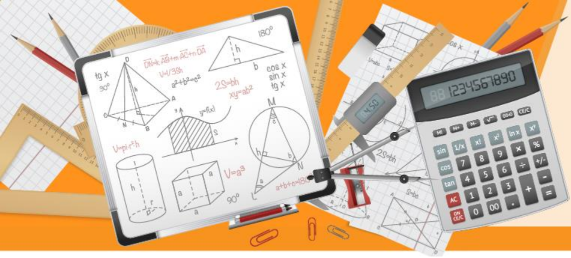
Se busca el múltiplo escalar si es que existe, haciendo $u = c\,w$

$$u = c\,w$$
$$\langle 12, -16, 4\rangle = c\langle -6, 8, 2\rangle$$
$$\langle 12, -16, 4\rangle = \langle -6c, 8c, 2c\rangle$$

De donde se obtiene:

$$-6c = 12 \qquad 8c = -16 \qquad 2c = 4$$
$$c = -2 \qquad c = -2 \qquad c = 2$$

Resulta $c = -2$ para las dos primeras componentes y $c = 2$ para la tercera. Por tanto, uno de los vectores NO es múltiplo escalar del otro y en consecuencia v no es paralelo a w.



EJEMPLO 22

Determinar si lo vectores dados, son paralelos o no. $u = \langle 2\,, -3 \rangle$ y $v = \langle -4\,,\ 6 \rangle$

Solución:

Este problema se puede resolver de dos maneras:

Primera forma de resolver

Mostrar que $u = c\ v$

$$\langle 2\,, -3 \rangle = c\,\langle -4\,,\ 6 \rangle$$

$$\langle 2\,, -3 \rangle = \langle -4c\,,\ 6c \rangle$$

De donde se observa que para cada componente $c = -\frac{1}{2}$ por tanto $u = -\frac{1}{2}v$, por tanto u y v son paralelos.

Segunda forma de resolver

Se estudió que dos vectores u y v diferentes de cero son paralelos si el ángulo entre ellos es 0 o π . Por tanto, para buscar el ángulo entre estos dos vectores se calcula el ángulo en $cos\,\theta = \frac{u\,.v}{\|u\|\|v\|}$ para los vectores dados $u = \langle 2\,, -3 \rangle$ y $v = \langle -4\,,\ 6 \rangle$

$$u\,.\,v = (2)(4) + (-3)(6) = -26$$

$$\|u\| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \qquad\qquad \|v\| = \sqrt{(-4)^2 + (6)^2} = \sqrt{52}$$

$cos\,\theta = \frac{u\,.v}{\|u\|\|v\|} = \frac{-26}{\sqrt{13}\ \sqrt{52}} = \frac{-26}{\sqrt{676}} = \frac{-26}{26} = -1$ y en consecuencia $\theta = 180^\circ = \pi$

y por tanto son paralelos.

Vectores Ortogonales

Dos vectores diferentes de cero u y v son ortogonales (o perpendiculares) si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$

También, dos vectores diferentes de cero u y v son ortogonales (o perpendiculares) y solo si $u.v = 0$.

EJEMPLO 23

Verifique si los vectores $u = 3i - 4j$ y $v = 4i + 3j$ son ortogonales.

Solución:

$u.v = (3)(4) + (-4)(3) = 0$

Dado que el producto punto resultó 0, los vectores u y v son ortogonales.

1.6.3. Proyección escalar y vectorial de un vector sobre otro

Proyección escalar o Componente de u en la dirección de v

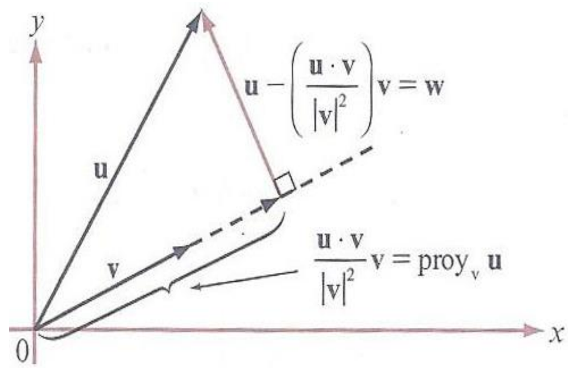
La proyección escalar o la componente de u en la dirección de v es $comp_{v}\, u = \frac{u.v}{\|v\|}$, y es un escalar.

Se observa además que $\frac{v}{\|v\|}$ es un vector unitario en la dirección de v.

Proyección Vectorial

Muchos interesantes problemas se refieren a la noción de proyección de un vector sobre otro.

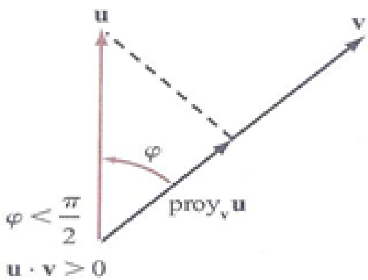
Sea v un vector diferente de cero. Entonces para cualquier otro vector u, el vector $w = u - \frac{u\,.\,v}{\|v\|^2}v$ es ortogonal a v. Observe la gráfica.

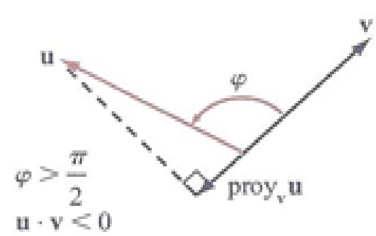


Si u y v son vectores no nulos, entonces **la proyección de u sobre v** se define por:

$$\boxed{proy_{\,v}\,u = \frac{u.v}{\|v\|^2}v}$$

Dado que $cos\,\phi = \frac{u\,.v}{\|u\|\,\|v\|}$ se deduce que v y $proy_{\,v}\,u$ tienen la misma dirección si $u.v > 0$ y direcciones opuestas si $u.v < 0$





Observaciones:

a) Si u y v son ortogonales, entonces $u.v = 0$ de manera que $proy_{\,v}\, u = 0$

b) Una definición alternativa de la proyección es: si u y v son vectores diferentes de cero, entonces $proy_{\,v}\, u$ es el único vector con las siguientes propiedades:

- $proy_{\,v}\, u$ es paralelo a v
- $u - proy_{\,v}\, u$ es ortogonal a v

EJEMPLO 24

Sean los vectores $u = 2\,i + 3\,j$ y $v = i + j$ Hallar la $proy_v\, u$.

Solución:

Dado que $proy_{\,v}\, u = \frac{u\,.\,v}{\|v\|^2} v$ se debe calcular primero $u.v$ y $\|v\|$

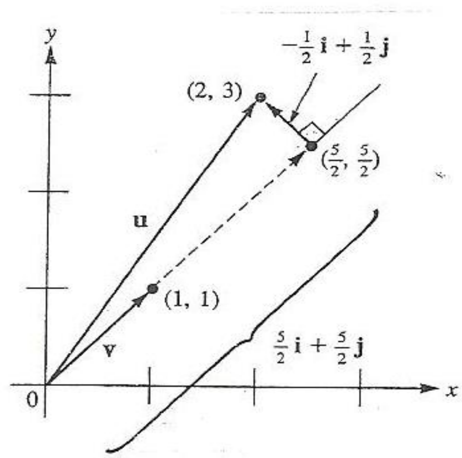
Con $u = 2\,i + 3\,j$ y $v = i + j$

$u.v = (2)(1) + (3)(1) = 5$ y $\|v\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$proy_{\,v}\, u = \frac{u\,.\,v}{\|v\|^2} v$$

$$proy_{\,v}\, u = \frac{5}{(\sqrt{2})^2}(i + j)$$

$$proy_{\,v}\, u = \frac{5}{2}\, i + \frac{5}{2} j$$



EJEMPLO 25

Sean los vectores $u = -5\,i + j$ y $v = 4\,i + 2\,j$

Determine: a) La componente de v en la dirección de u

b) La proyección de v sobre u.

Solución:

$$u.v = (-5)(4) + (1)(2) = -18 \qquad \text{y} \qquad \|u\| = \sqrt{26}$$

a) La componente de v en la dirección de u o proyección escalar se calcula con

$$comp_{\,u}\, v = \frac{u\,.\,v}{\|u\|} = \frac{-18}{\sqrt{26}}$$

b) La proyección de v sobre u es $proy_{\,u}\, v = \dfrac{u\,.\,v}{\|u\|^2}\, u$

$$proy_{\,u}\, v = \frac{u\,.\,v}{\|u\|^2}\, u = \frac{-18}{\left(\sqrt{26}\right)^2}(-5i + j) = \frac{45}{13}\, i - \frac{9}{13}\, j$$

1.7. Producto vectorial o producto cruz. Regla de la mano derecha.

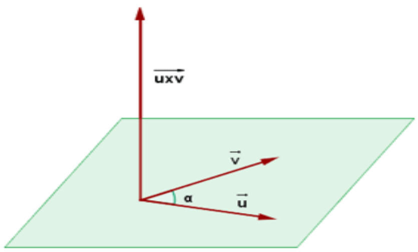
1.7.1. Definición y propiedades

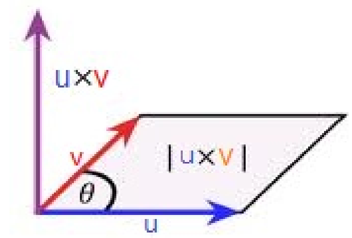
El producto cruz tiene aplicaciones en diversas áreas como la geometría, electricidad, magnetismo y la mecánica.

Sean $u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vectores en el espacio.

El producto cruz (producto vectorial) de u y v denotado por $u \times v$, es un nuevo vector definido por:

$$\boxed{u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2)\,i - (u_1v_3 - u_3v_1)\,j + (u_1v_2 - u_2v_1)\,k}$$





Como se observa el resultado del producto cruz es un vector, y es aplicable sólo en $\Re^3$. Su módulo o norma coincide con el área del paralelogramo determinado por u y v. Es decir, su norma es $\|u \times v\| = \|u\|\,\|v\|\,sen\theta$

Su dirección es perpendicular a los dos vectores y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha (o regla del sacacorcho). Esta regla consiste en colocar la mano derecha de manera que el índice apunte en la dirección de u y el dedo medio en la dirección de v, entonces el pulgar apuntará en la dirección de $u \times v$.

Existe otra forma de calcular $u \times v$ sin necesidad de memorizar la fórmula anterior, y es aquella en donde se utiliza determinantes, pero con la observación de que el uso del determinante (que acostumbra usar números reales) se constituye en un recurso para recordar la fórmula del producto cruz que involucra vectores. Así:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k$$

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2)\,i - (u_1v_3 - u_3v_1)\,j + (u_1v_2 - u_2v_1)\,k$$

EJEMPLO 26

Calcule el producto cruz de $u = 2i - 3j + k$ y $v = i + 2j + k$

$$u \text{ x } v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$u \text{ x } v = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} k$$

$$u \text{ x } v = (-3 - 2)\, i - (2 - 1)\, j + (4 + 3)\, k$$

$$u \text{ x } v = -5\, i - j + 7\, k$$

Propiedades del producto cruz

Sean u, v y w tres vectores en $\Re^3$ y sea α un escalar, entonces:

1. $u \text{ x } 0 = 0 \text{ x } u = 0$

2. $u \text{ x } v = -(v \text{ x } u)$

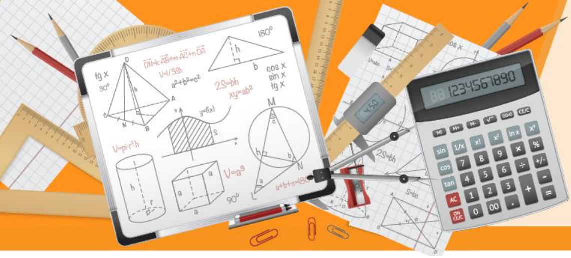
3. $(\alpha\, u) \text{ x } v = \alpha\, (u \text{ x } v)$

4. $u \text{ x } (v + w) = (u \text{ x } v) + (u \text{ x } w)$ Propiedad distributiva

5. $(u \text{ x } v). w = u. (v \text{ x } w)$ Triple producto **escalar** de u, v y w

6. $u. (u \text{ x } v) = v. (u \text{ x } v) = 0$ ($u \text{ x } v$ es ortogonal a u y a v)

Si ni u ni v son el vector cero, entonces u y v son paralelos si y solo si $u \text{ x } v = 0$



Producto Vectorial doble

Si u , v y w son tres vectores cualesquiera en $\Re^3$, entonces al producto $u \text{ x } (v \text{ x } w)$ se le denomina doble producto vectorial, y se define como:

$$u \text{ x } (v \text{ x } w) = (u.w)\, v - (u.v)\, w$$

EJEMPLO 27

Sean $u = \langle 1, -1, 2\rangle$ $\quad v = \langle 3, 4, -2\rangle$ $\quad w = \langle -5, 1, -4\rangle$

Verifique el doble producto vectorial $u \text{ x } (v \text{ x } w) = (u.w)\, v - (u.v)\, w$

Solución:

Primeramente se calcula

$$v \text{ x } w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & -2 \\ -5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -14i + 22j + 23k$$

Luego con $u = \langle 1, -1, 2\rangle$ y $v \text{ x } w = -14i + 22j + 23k$ se calcula

$$u \text{ x } (v \text{ x } w) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -14 & 22 & 23 \end{vmatrix} = -67i - 51j + 8k = \langle -67, -51, 8\rangle$$

Por otro lado, también se calcula

$$u.w = \langle 1, -1, 2\rangle . \langle -5, 1, -4\rangle = -5 - 1 - 8 = -14$$

$$(u.w)v = -14\, \langle 3, 4, -2\rangle = \langle -42, -56, 28\rangle$$

$$u.v = \langle 1, -1, 2\rangle . \langle 3, 4, -2\rangle = 3 - 4 - 4 = -5$$

$$(u.v)w = -5\, \langle 3, 4, -2\rangle = \langle 25, -5, 20\rangle$$

Finalmente se verifica el doble producto vectorial

$u \text{ x } (v \text{ x } w) = (u.w)\, v - (u.v)\, w$

$-67i - 51j + 8k = -42i - 56j + 28k - (25i - 5j + 20k)$

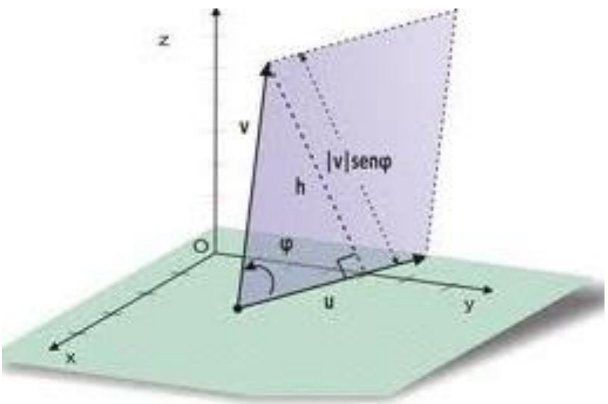
$-67i - 51j + 8k = -42i - 56j + 28k - 25i + 5j - 20k$

$-67i - 51j + 8\,k = -67i - 51j + 8k$

1.7.2. Área de un paralelogramo

El producto cruz en la obtención del área de un paralelogramo

Una de las características del producto cruz es que su módulo (norma) coincide con el área del paralelogramo determinado por u y v. De la geometría elemental se observa que el área de un paralelogramo que tiene a u y v como lados adyacentes, es igual a $\|uxv\| = \|u\|\,\|v\|\, sen\phi$



Por tanto para hallar el área de un paralelogramo se obtiene $u \text{ x } v$ con

$u \text{ x } v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$ y luego se determina la norma del vector que resulta.

Así el área de un paralelogramo se obtiene con $\boxed{A = \|u \text{ x } v\|}$

EJEMPLO 28

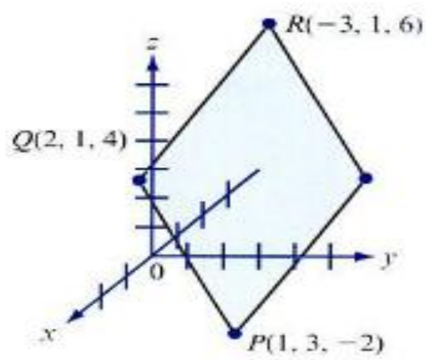
Encuentre el área del paralelogramo con vértices consecutivos en P(1, 3, –2) ; Q(2, 1, 4) y R(–3, 1, 6).

Solución:

Se observa el paralelogramo en la figura. Dado que P, Q, R son los vértices consecutivos del paralelogramo, el área se puede obtener con la norma del producto cruz de los vectores $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{QR}$ que constituyen los lados adyacentes del paralelogramo.

Dados P(1, 3, –2) , Q(2, 1, 4) y R(–3, 1 6)

Sea $\overrightarrow{QP} = -i + 2j - 6k$ y $\overrightarrow{QR} = -5i + 2k$



$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -6 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4i - 32j + 10k$$

$A = \left\| \overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR} \right\| = \sqrt{(4)^2 + (-32)^2 + (10)^2} = \sqrt{1140} \approx$ 33.76 unidades cuadradas

El área del paralelogramo es **33.76 unidades cuadradas**

EJEMPLO 29

Demuestre que el cuadrilátero que tiene vértices en P(1, −2, 3) ; Q(4, 3, −1) ; R(2, 2, 1) y S(5, 7, −3) es un paralelogramo y obtenga su área.

Solución:

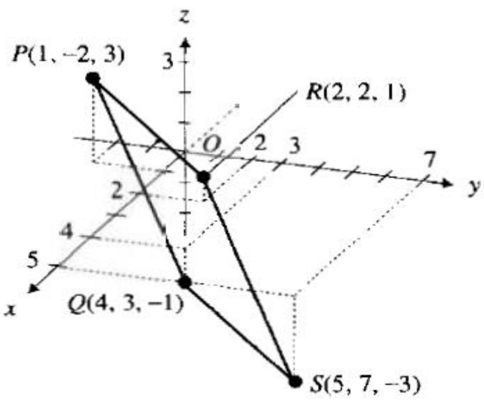
Se observa el paralelogramo en la figura.

$\overrightarrow{PQ} = 3i + 5j - 4k$; $\overrightarrow{PR} = i + 4j - 2k$ $\overrightarrow{RS} = 3i + 5j - 4k$; $\overrightarrow{QS} = i + 4j - 2k$

Se observa que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ por tanto $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo a $\overrightarrow{RS}$.

Dado que $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ por tanto $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\overrightarrow{QS}$.

Se concluye que PQSR es un paralelogramo.



Para hallar el área se buscan dos lados adyacentes. Para este caso tiene algunas opciones. Se tomará $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RS}$

$$\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{RS} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -6i - 2j - 7k$$

$$A = \left\| \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{RS} \right\| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{89} \approx 9.43 \text{ unidades cuadradas}$$

El área del paralelogramo es 9.43 unidades cuadradas.

1.7.3. Producto vectorial mixto. Volumen de un paralelepípedo.

El producto mixto (o también conocido como triple producto escalar) es una operación entre tres vectores que combina el producto escalar con el producto vectorial para obtener un resultado un escalar. Se utiliza para calcular **volumen de un paralelepípedo.**

Entre las propiedades del producto vectorial o producto cruz estudiadas se encuentra el del triple producto **escalar** de u , v y w que es:

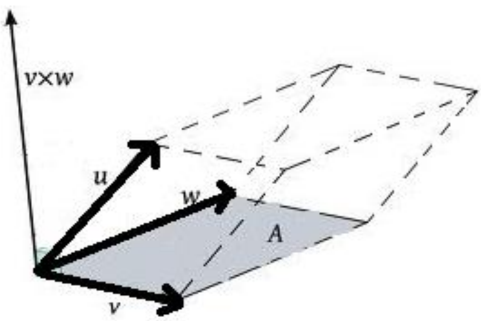
$$w.(u \times v) = u.(v \times w) = v.(w \times u)$$

El triple producto escalar se puede resolver mediante determinantes

Sea $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$; $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$; $w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$

$$u.(v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Si u , v y w no están en el mismo plano, entonces el triple producto escalar puede usarse para calcular el **volumen del paralelepípedo** (paralelepípedo es un sólido con seis caras que son paralelogramos) cuyos lados adyacentes son u , v y w. Observe la figura.



Área de la base $A = \|v \times w\|$

El volumen del paralelepípedo está dado por:

$$v = u.(v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Las barras representan el determinante, cuyo resultado es un escalar.

EJEMPLO 30

Calcule el volumen del paralelepípedo que tiene vértices en P(5, 4, 5) ; Q(4, 10, 6); R(1, 8, 7) y S(2, 6, 9) . Sus aristas son $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$

Solución:

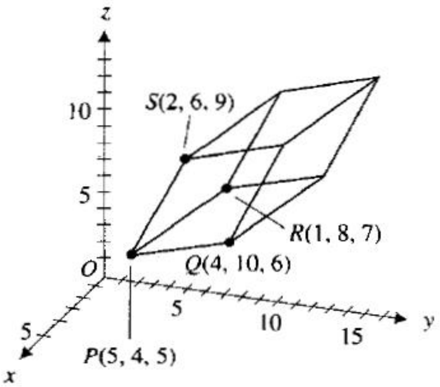
$\overrightarrow{PQ} = -i + 6j + k$; $\overrightarrow{PR} = -4i + 4j + 2k$; $\overrightarrow{PS} = -3i + 2j + 4k$

$$V = \overrightarrow{PQ}.\left(\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$V = -1\,(16-4) - 6(-16+6) + 1(-8+12)$

$V = 52$ unidades cúbicas

El volumen del paralelepípedo es de **52 unidades cúbicas**



Aplicaciones del producto punto y del producto cruz

Una de las aplicaciones del producto punto es en el "trabajo" que en el campo de la física se define como el producto de la componente de la fuerza a lo largo de la recta de movimiento, por el desplazamiento.

Trabajo

El trabajo W realizado por una fuerza constante F, que actúa a lo largo de una recta movimiento de un objeto está dado por

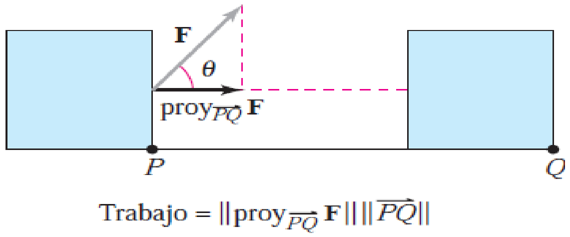
W = (magnitud de la fuerza)(distancia) = $\|F\| \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$

Si la fuerza constante F no está dirigida a lo largo de la recta de movimiento, entonces el trabajo realizado por la fuerza es:

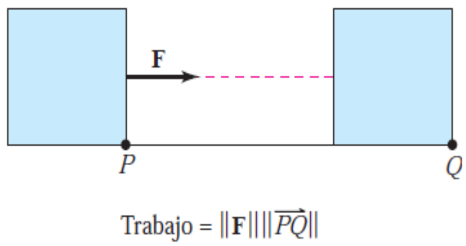
W = $\left\|proy_{\overrightarrow{PQ}}F\right\| \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$ = $\cos\theta \, \|F\| \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = F.\,\overrightarrow{PQ}$

Es decir, el trabajo puede obtenerse utilizando proyección o producto escalar:

En forma de proyección	En forma de producto escalar
W = $\left\|proy_{\overrightarrow{PQ}}F\right\| \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$ ó	W = $F.\overrightarrow{PQ}$
W = $\cos\theta \, \|F\| \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$	



La fuerza actúa formando un ángulo θ con la recta de movimiento.



La fuerza actúa a lo largo de la recta de movimiento

EJEMPLO 31

Para cerrar una puerta corrediza, una persona tira de una cuerda con una fuerza constante de 50 libras y un ángulo constante de 60º, como se muestra en la figura. Hallar el trabajo realizado al mover la puerta 12 pies hacia la posición en que queda cerrada

Solución:

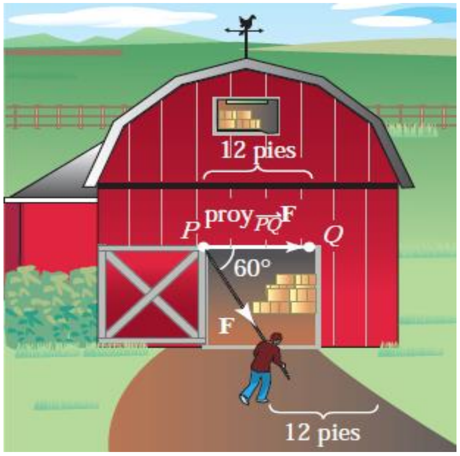
Utilizando proyección se calcula el trabajo de la siguiente manera

W = $\cos\theta\ \|F\|\ \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$

W = $\cos(60^{o})\ \|F\|\ \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$

W = $\frac{1}{2}(50)(12) = 300$

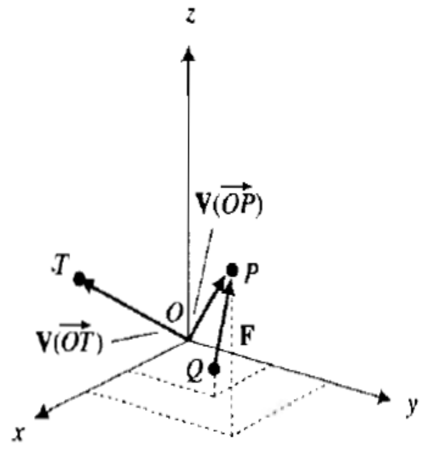
El trabajo realizado es de 300 libras-pie



Vector torque

El producto cruz tiene aplicación a la mecánica, con el **vector torque**.

Se observa en la figura que el vector de fuerza F, que tiene la representación $\overrightarrow{QP}$, se aplica en el punto P de un objeto situado a lo largo de $\overrightarrow{OP}$. La fuerza F ocasiona que el objeto rote alrededor de una recta perpendicular al plano determinado por $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{QP}$. El vector torque que denotaremos por τ cuya representación de posición es $\overrightarrow{OT}$ es el momento de F alrededor de 0 ; y proporciona la intensidad (o módulo) y dirección de la resultante de rotación generada por F.



Este vector torque está definido por: τ = V($\overrightarrow{OT}$) = V($\overrightarrow{OP}$) X F

La intensidad o módulo del vector torque está dado por

$$\|\tau\| = \left\| V(\overrightarrow{OP}) \text{ X } F \right\| = \left\| V(\overrightarrow{OP}) \right\| \|F\| \; sen\theta$$

EJEMPLO 32

Una fuerza F cuya intensidad es de 15 lbs, se aplica en un ángulo de 40º en el extremo derecho P de una barra de 5 pies de longitud, como se indica. Calcule el módulo del vector torque inducido por F en el extremo izquierdo 0.

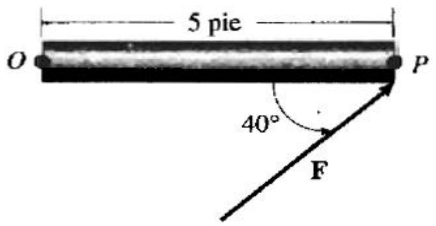
Solución:

La intensidad o módulo del vector torque es

$$\|\tau\| = \left\|V(\overrightarrow{OP})\right\| \; \|F\| \; sen\theta$$

$\|\tau\|$ = (5) (15)sen 40º = 48.21

La intensidad del vector torque es de 48.21 pie-libra



1.8. Geometría del espacio $\Re^3$

1.8.1. Ecuaciones paramétricas y simétricas de una recta.

Rectas y planos en el espacio

En el plano $\Re^2$ se puede encontrar la ecuación de una recta si se conocen dos puntos sobre la recta, o bien un punto y la pendiente de la misma. En $\mathbf{\Re^3}$ las ideas básicas son similares, y resulta más conveniente usar vectores para determinar la ecuación de una recta.

Ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas de una recta en el espacio.

Se considera la recta L, y dos puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ sobre ella. Un vector v paralelo a L es aquel con representación $\overrightarrow{PQ}$.

Luego, $v = \overrightarrow{PQ} = \langle x_2 - x_1 \; , \; y_2 - y_1 \; , \; z_2 - z_1 \rangle$ es un vector paralelo a la recta L.

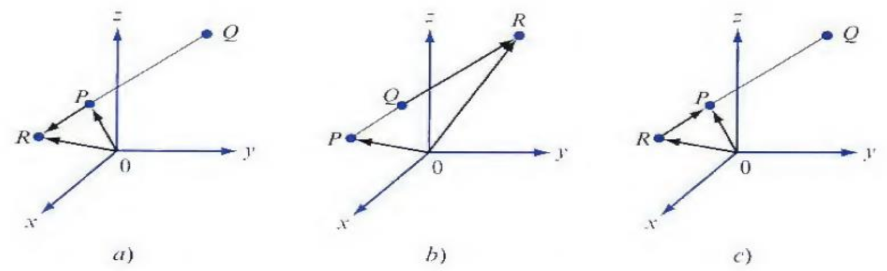
Este vector paralelo a la recta L que denotaremos v, se denomina vector de dirección de la recta L, y a las componentes de este vector que denotaremos como a, b, c se le denominan números directores del vector v. Esto es,

$v = \overrightarrow{PQ} = \langle x_2 - x_1 \ , \ y_2 - y_1 \ , \ z_2 - z_1 \rangle$, de donde

$a \ = \ x_2 - x_1 \qquad \mathrm{b} \ = \ y_2 - y_1 \qquad \mathrm{c} \ = \ z_2 - z_1$

$v = \langle \mathrm{a} \ , \ \mathrm{b} \ , \ \mathrm{c} \rangle$ $\quad \mathrm{a} \ , \ \mathrm{b} \ , \ \mathrm{c}$ se denominan **números directores** del vector v

Sea $R(x \, , \ y \, , \ z)$ otro punto sobre la recta. Entonces $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$, que a su vez es paralelo a v. Esto significa que $\overrightarrow{PR}$ es un múltiplo escalar de v y se escribe: $\quad \overrightarrow{PR} \ = \ \boldsymbol{t} \, v \quad$ donde $\boldsymbol{t}$ es un escalar llamado parámetro



En la figura, en los tres casos se observa que $\quad \overrightarrow{OR} \ = \ \overrightarrow{OP} \ + \ \overrightarrow{PR}$

porque $\overrightarrow{PR} \ = \ \boldsymbol{t} \, v$ $\qquad \boxed{\overrightarrow{OR} \ = \ \overrightarrow{OP} \ + \ t \, v}$ ecuación vectorial de la recta L

Dado que $v = \langle \mathrm{a} \ , \ \mathrm{b}, \ \mathrm{c} \rangle$ el vector de dirección de la recta L, y como $\overrightarrow{PR} \ = \ \boldsymbol{t} \, v$

$$\overrightarrow{PR} \ = \ \boldsymbol{t} \, v$$

$$\langle \boldsymbol{x - x_1, \ y - y_1, \ z - z_1} \rangle = \boldsymbol{t} \, \langle \boldsymbol{a, \ b, \ c} \rangle$$

$$\langle \boldsymbol{x - x_1, \ y - y_1, \ z - z_1} \rangle = \langle \boldsymbol{ta, tb, t\,c} \rangle$$

Igualando las componentes correspondientes se obtienen las ecuaciones que son denominadas ecuaciones **paramétricas** de la recta en el espacio.

$x - x_1 = ta$ de donde $x = x_1 + at$

$y - y_1 = tb$ de donde $y = y_1 + bt$

$z - z_1 = tc$ de donde $z = z_1 + ct$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + ta \\ y &= y_1 + tb \\ z &= z_1 + tc \end{aligned}}$$

Ecuaciones **paramétricas** de la recta en el espacio

Si se despeja "t" en cada una de las ecuaciones paramétricas y si $a.b.c \neq 0$, entonces:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}}$$

Ecuaciones **simétricas** de la recta

En conclusión, se puede obtener la ecuación de una recta en el espacio a partir de un **punto de dicha recta**, y de un **vector paralelo a ella**. Se hace la observación que las ecuaciones paramétricas y simétricas de una recta **no son únicas**.

EJEMPLO 33

Encuentre la ecuación vectorial y un conjunto de ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta L que pasa por los puntos P (–1, 5, 3) y Q (2, 3, 6)

Solución:

Un vector paralelo a L es aquel con representación $\overrightarrow{PQ}$. Luego $\overrightarrow{PQ} = 3i - 2j + 3k$ de donde se obtienen los números directores $a = 3$, $b = -2$ y $c = 3$

Para obtener la ecuación vectorial se toma un punto cualquiera de los puntos dados que están sobre la recta por ejemplo P y se hace otro punto $R(x, y, z)$

$R(x, y, z)$ otro punto sobre la recta, luego $\overrightarrow{0R} = \langle x,\ y,\ z\rangle$. Luego $\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + t\,v$

También se puede hacer $\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0Q} + t\,v$

$\overrightarrow{0R} = \langle -1\,,5\,,3\rangle + t\,\langle 3\,,-2\,,3\rangle$ **Ecuación vectorial de la recta L**

Para obtener el conjunto de ecuaciones paramétricas y simétricas se puede resolver la ecuación vectorial, o con uno de los puntos sobre la recta y v se buscan las ecuaciones.

Un conjunto de ecuaciones **paramétricas:**

$$x = x_1 + at \qquad y = y_1 + bt \qquad z = z_1 + ct$$

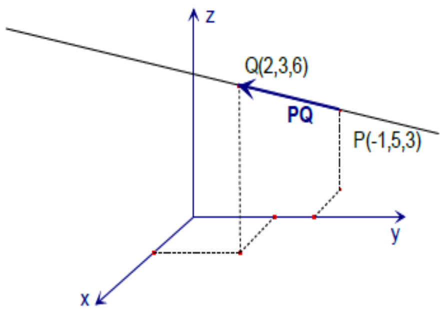
$$x = -1 + 3t \qquad y = 5 - 2t \qquad z = 3 + 3t$$

Para obtener las ecuaciones simétricas se despeja “t”.

$$\frac{x+1}{3} = t \qquad \frac{y-5}{-2} = t \qquad \frac{z-3}{3} = t$$

Por tanto, un conjunto de ecuaciones **simétricas:**

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-3}{3}$$



Si en vez de P, se considera el punto Q (2, 3, 6) tendríamos un diferente conjunto de ecuaciones: paramétricas $\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = 6 + 3t \end{array}$ y simétricas $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-6}{3}$

EJEMPLO 34

Encuentre las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta L que pasa por los puntos P (2, –1, 6) y Q (3, 1, –2)

Solución:

Un vector paralelo a L es aquel con representación $\overrightarrow{PQ}$.

Entonces: $\overrightarrow{PQ} = i + 2j - 8k$ de donde $a = 1,\ \ b = 2$ y $c = -8$

Utilizando los números directores del vector v , $a = 1,\ \ b = 2$ y $c = -8$ con el punto P (2, –1, 6) , obtenemos las ecuaciones paramétricas:

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = x_1 + at \qquad y = y_1 + bt \qquad z = z_1 + ct$$

$$x = 2 + t \qquad y = -1 + 2t \qquad z = 6 - 8t$$

Por lo tanto las ecuaciones simétricas son:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-6}{-8}$$

Observaciones:

- Dado que P (2, −1, 6) y Q (3, 1, −2) deben estar en la recta, se puede verificar reemplazando estos puntos en las ecuaciones encontradas.

  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-6}{-8}$ o sea $\frac{2-2}{1} = \frac{-1+1}{2} = \frac{6-6}{-8} = 0$ (cada fracción da 0)

  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-6}{-8}$ o sea $\frac{3-2}{1} = \frac{1+1}{2} = \frac{-2-6}{-8} = 1$ (cada fracción da 1)

- También se puede encontrar otros puntos sobre la recta. Por ejemplo, si $t = 3$

  $$x - 2 = t \qquad \frac{y+1}{2} = t \qquad \frac{z-6}{-8} = t$$

  $$x - 2 = 3 \qquad \frac{y+1}{2} = 3 \qquad \frac{z-6}{-8} = 3$$

  $$x = 5 \qquad y = 5 \qquad z = -18$$

  De donde se obtiene el punto (5, 5, −18)

EJEMPLO 35

Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas y simétricas para la recta L que pasa por el punto P(1, 3, 5) y es paralela al vector $v = -2\,i + 4j + k$

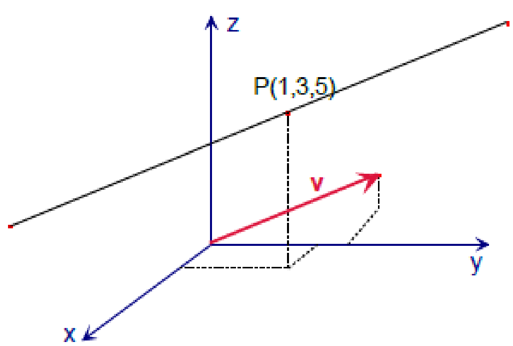
Solución:

Se toman las coordenadas del punto P(1, 3, 5) y dado que la recta es paralela a v los números directores del vector son $a = -2,\quad b = 4$ y $c = 1$

Un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta "L" es:
$$\begin{aligned} x &= 1 - 2t \\ y &= 3 + 4t \\ z &= 5 + t \end{aligned}$$

Un conjunto de ecuaciones simétricas se obtiene despejando t :

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{1}$$



EJEMPLO 36

Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas para la recta L que pasa por el punto (1, −2, 4) y es paralela a $v = \langle 2,\ 4,\ -4 \rangle$

Solución:

Un punto sobre la recta es P (1, −2, 4) y dado que la recta es paralela a v , los números directores son $a = 2,\quad b = 4$ y $c = -4$

Un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta "L" es: $\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= -2 + 4t \\ z &= 4 - 4t \end{aligned}$

Un conjunto de ecuaciones simétricas se obtiene despejando t:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-4}{-4}$$

1.8.2. Distancia de un punto a una recta en el espacio

Distancia de un punto a una recta en el espacio utilizando el Producto Cruz

En R^3, la distancia de un punto Q a una recta en el espacio está dada por:

$$D = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \text{ x } u\|}{\|u\|}$$

u es un vector de dirección para la recta

P es un punto sobre la recta

Q es un punto que no está sobre la recta

EJEMPLO 37

Calcular la distancia del punto P(4, 1, 6) a la recta que pasa por los puntos A(8, 3, 2) y B(2, –3, 5)

Solución:

Vector de dirección para la recta AB es $u = \overrightarrow{AB} = -6\,i - 6j + 3k$

Norma de u : $\|u\| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + (3)^2} = \sqrt{81} = 9$

Un punto sobre la recta es A ó B, tomemos A(8, 3, 2) y el punto de interés (que no está sobre la recta) es P(4, 1, 6), luego $\overrightarrow{AP} = -4i - 2j + 4k$

$$\overrightarrow{AP} \text{ x } u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -2 & 4 \\ -6 & -6 & 3 \end{vmatrix} = (-6 + 24)i - (-12 + 24)j + (24 - 12)k$$

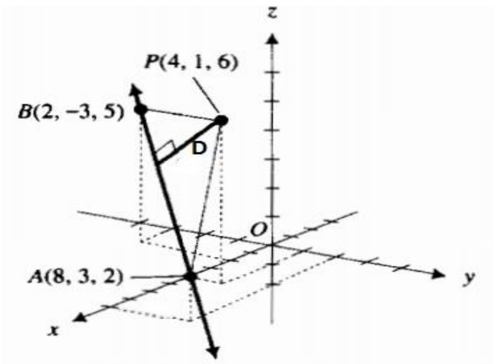
$$\overrightarrow{AP} \text{ x } u = 18i - 12j + 12k$$

$$\left\|\overrightarrow{AP} \text{ x } u\right\| = \sqrt{18^2 + (-12)^2 + 12^2} = \sqrt{612}$$

La distancia del punto a la recta es

$$D = \frac{\left\|\overrightarrow{AP} \text{ x } u\right\|}{\|u\|} = \frac{\sqrt{612}}{9} = \frac{2\sqrt{17}}{3}$$

$$D \approx 2.7 \; unidades$$



EJEMPLO 38

Hallar la distancia del punto Q (3, −1, 4) a la recta dada por $x = -2 + 3t$, $y = -2t$ y $z = 1 + 4t$

Solución:

De las ecuaciones paramétricas de la recta se obtienen los números directores que son 3, −2 y 4, y por tanto un vector de dirección de la recta es $u = \langle 3\,, -2,\; 4\rangle$

Para determinar un punto en la recta, se hace $t = 0$ y se obtiene el punto P(−2, 0, 1)

Así dados los puntos P(−2, 0, 1) y Q(3, −1, 4) entonces $\overrightarrow{PQ} = \langle 5\,, -1,\ 3\rangle$

Con los datos $u = \langle 3\,, -2,\ 4\rangle$ y $\overrightarrow{PQ} = \langle 5\,, -1,\ 3\rangle$ el producto vectorial es

$$\overrightarrow{PQ}\ \mathrm{x}\ u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (-4+6)i - (20-9)j + (-10+3)k = 2i - 11j - 7k$$

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\ \mathrm{x}\ u\right\| = \sqrt{2^2 + (-11)^2 + (-7)^2} = \sqrt{174}$$

Norma de u $u = \langle 3\,, -2,\ 4\rangle$ $\|u\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{29}$

La distancia del punto a la recta es**:**

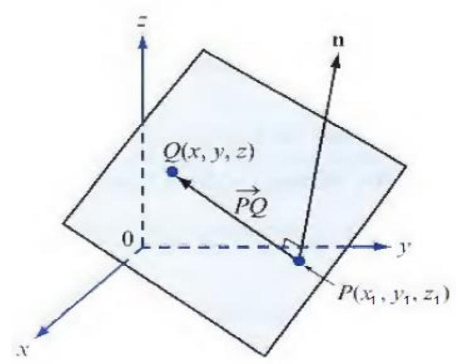
$$D = \frac{\left\|\overrightarrow{PQ}\ \mathrm{x}\ u\right\|}{\|u\|} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6} \approx 2.45\ unidades$$

1.8.3. Ecuación del plano

En $\Re^3$ la gráfica de una ecuación en tres variables x , y y z es una superficie. Una de esas superficies, la más simple es el plano, cuya ecuación es de primer grado en tres variables.

Por lo general un plano se denota con el símbolo π.

Se pueden derivar ecuaciones de un plano en el espacio especificando un punto en el plano y un vector ortogonal a todos los vectores en el plano. Este vector ortogonal se llama vector normal (perpendicular) al plano, y se denota por “n”.



Formas de la ecuación del plano

Así, el plano se define en $\Re^3$ de la siguiente manera:

Sea P un punto en el espacio, y sea **n** un vector dado, diferente de cero. Entonces el conjunto de todos los puntos Q para los que $\overrightarrow{PQ}\cdot$n = 0 constituye un plano en $\Re^3$. Esto implica que si el plano que contiene el punto (x_1, y_1, z_1) y tiene como vector normal a $n = \langle a, b, c\rangle$ puede representarse, en **forma canónica** o estándar, mediante la ecuación:

$$\boxed{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0}$$

Forma canónica o estándar de la ecuación de un plano

Una manera más común de escribir la ecuación de un plano se deriva de la reagrupación de términos de la ecuación estándar. Esta forma se denomina **forma cartesiana** de la ecuación de un plano en el espacio, y es:

$ax + by + cz = d$ donde $d = ax_1 + by_1 + cz_1$

Si se da esta forma general, para encontrar el vector normal al plano simplemente se usan los coeficientes de x, y, z y se escribe $n = \langle a, b, c\rangle$

También a la forma de la ecuación anterior se le conoce como la forma general de la ecuación de un plano en el espacio. Esto es:

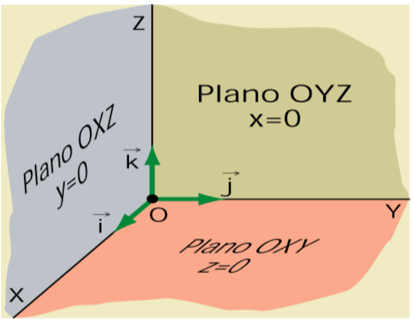
$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$ **Forma general de la ecuación de un plano en el espacio**

Visualización de planos en el espacio

Planos coordenados

Los tres ejes en $\Re^3$ determinan tres planos coordenados: el plano xy que contiene a los ejes x y y; el plano xz que contiene a los ejes x y z; y el plano yz que contiene a los ejes y y z

La ecuación del plano xy es $z = 0$ ya que el plano xy pasa por el origen y cualquier vector a lo largo del eje x es normal a él.

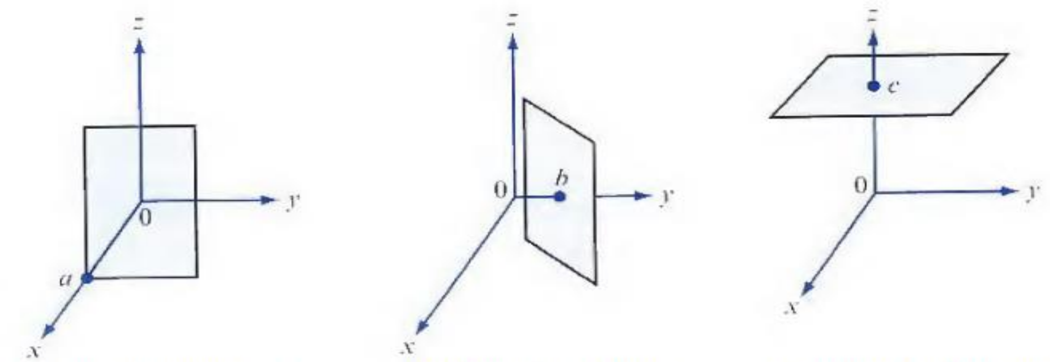


De manera similar la ecuación del plano xz es $y = 0$; y la ecuación del plano yz es $x = 0$

Plano paralelo a un plano coordenado

Si el plano es paralelo a uno de los planos coordenados, cada plano se dibuja como un rectángulo con lados paralelos a los otros dos ejes coordenados.

La ecuación del plano paralelo a un plano coordenado es una de las siguientes:



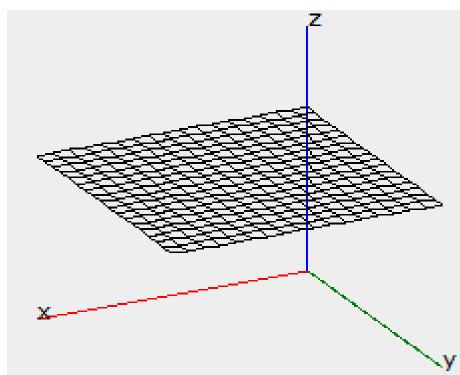
x=a (paralelo al plano *yz*) ***y=b*** (paralelo al plano *xz*) ***z=c*** (paralelo al plano *xy*)

EJEMPLO 39

Dibuje el plano $z = 2$

Solución:

El plano $z = 2$ *se* ubica en $z = 2$ y se construye paralelo al plano xy



Plano que intersecta a cada eje coordenado

El plano puede intersecar a cada uno de los ejes coordenados. Para dibujar un plano en el espacio, es útil hallar sus puntos de corte con los ejes de coordenadas.

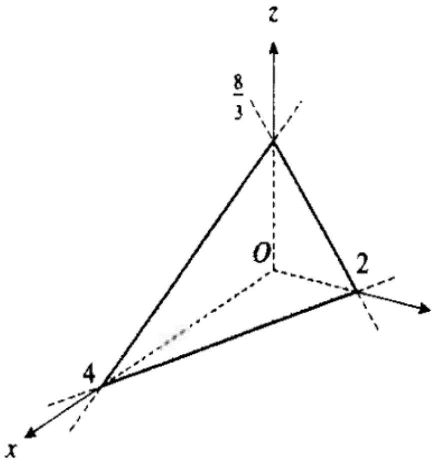
EJEMPLO 40

Considere el plano dado por $2x + 4y + 3z = 8$ y esboce su dibujo .

Solución:

- Al hacer y y z cero, se obtiene $x = 4$, luego la intersección x del plano es 4.
- Al hacer y y x cero, se obtiene $z = \frac{8}{3}$ luego la intercepción z del plano es $z = \frac{8}{3}$
- Al hacer x y z cero, se obtiene $y = 2$ luego la intersección y del plano es $y = 2$

Al localizar estas intersecciones y unirlas con rectas resulta el dibujo de la derecha, sin embargo en dicho dibujo se muestra solo una porción del plano.



EJEMPLO 41

Dibuje el plano que tiene como ecuación $3x + 2y - 6z = 0$

Solución:

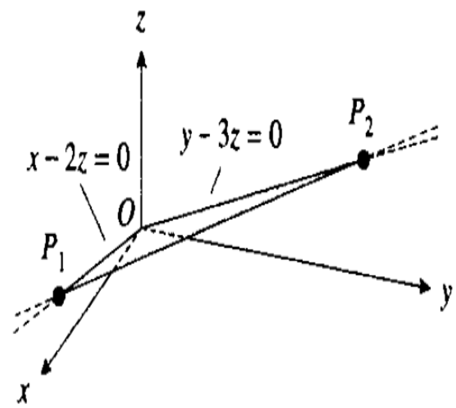
Se observa que al hacer cero dos de las variables, la que queda también es cero, es decir que la ecuación se satisface cuando x , y y z son cero, lo que significa que el plano interseca a cada uno de los ejes en el origen.

- Si $x = 0$, se obtiene $2y - 6z = 0$ o lo que es lo mismo $y - 3z = 0$ la cual es una recta en el plano , esto significa que *y – 3z = 0* es la recta de intersección del plano yz con el plano dado.

  La recta $y - 3z = 0$ se denomina *traza* en el plano yz del plano dado.

- Si $y = 0$, se obtiene $3x - 6z = 0$ o lo que es lo mismo $x - 2z = 0$ la cual es una recta en el plano xz, esto significa que $x - 2z = 0$ es la recta de intersección del plano xz con el plano dado.

  La recta $x - 2z = 0$ se denomina *traza* en el plano xz del plano dado.



Se obtiene el dibujo del plano uniendo puntos de cada recta mediante un segmento.

Planos paralelos

Dos planos son paralelos si y solo si sus vectores normales son paralelos, es decir si el producto cruz de sus vectores normales es cero.

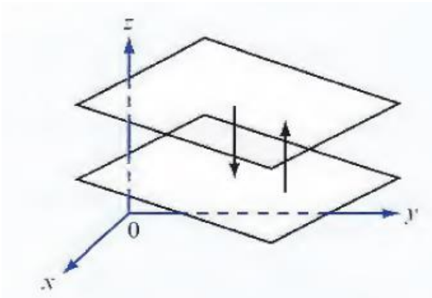
Observaciones:

- Dos planos paralelos pueden ser coincidentes.
- Si dos planos NO son paralelos, entonces se intersecan en una línea recta.
- Dado que dos vectores son paralelos si uno de los vectores es múltiplo escalar

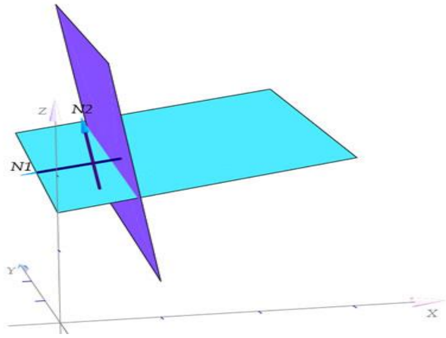
- del otro, luego dos planos con vectores normales N1 y N2 son paralelos si N1 = k N2 , k constante

Planos perpendiculares

Dos planos son perpendiculares si y solo si sus vectores normales son ortogonales, es decir si el producto punto de sus vectores normales es cero. Por tanto dos planos con vectores normales N1 y N2 son perpendiculares si N1 **.** N2 = 0



Planos paralelos

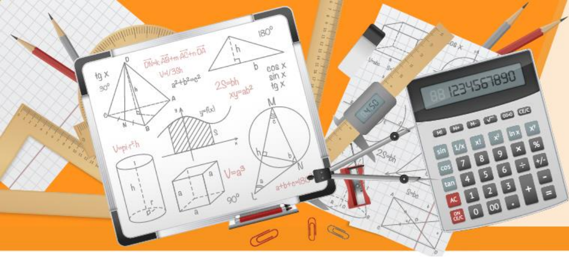


Planos perpendiculares

LA ECUACIÓN DE UN PLANO

EJEMPLO 42

Obtenga una ecuación del plano que contiene al punto (2, 1, 3) y tiene al vector $n = 3\,i - 4j + k$ como vector normal.



Solución:

Para $P(x_1\,, y_1\,, z_1)$ se observa que $x_1 = 2$; $y_1 = 1$; $z_1 = 3$. Dado que $v = \langle 3, -4, 1\rangle$; $a = 3,$ $b = -4$ y $c = 1$

La ecuación del plano será:

$a\,(x - x_1) + \; b(y - y_1) + \; c\,(z - z_1) = 0$

$3\,(x - 2) - 4\,(y - 1) + 1(z - 3) = 0$

$3x - 6 - 4y + 4 + z - 3 = 0$

$3x - 4y + z - 5 = 0$

El producto cruz en la obtención de la ecuación de un plano

El producto cruz se puede utilizar para obtener la ecuación de un plano que pasa por tres puntos $P(x_1\,, y_1\,, z_1)$; $Q(x_2\,, y_2\,, z_2)$ y $R(x_3\,, y_3\,, z_3)$

Para buscar la ecuación de un plano se necesita un punto del plano y un vector que sea normal al plano. Como se dan tres puntos del plano, hay tres posibles elecciones del punto, pero se tiene que obtener un vector que sea normal al plano, y para ello se debe utilizar el producto vectorial $n = u \text{ x } v$ con $u = \overrightarrow{PQ}$ y $v = \overrightarrow{PR}$

EJEMPLO 43

Obtener la ecuación del plano que pasa por P(1 , 2 , 0) ; Q(0 , 3 , 4) y R(2, 0, 2)

Solución:

Los vectores $u = \overrightarrow{PQ} = \langle -1,\ 1,\ 4\rangle$ y $v = \overrightarrow{PR} = \langle 1, -2,\ 2\rangle$

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$n = i\,(2+8) - j(-2-4) + k\,(2-1)$$

$n = 10\,i + 6j + k$ de donde $a = 10$, $b = 6$ y $c = 1$

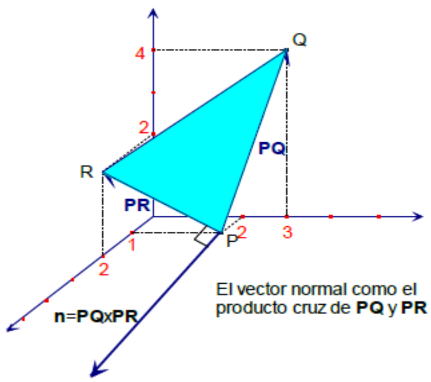
Sustituyendo en la ecuación con el punto P(1 , 2 , 0) se tiene:

$$a\,(x - x_1) + b(y - y_1) + c\,(z - z_1) = 0$$

$$10\,(x-1) + 6\,(y-2) + 1(z-0) = 0$$

$$10x - 10 + 6y - 12 + z = 0$$

$10x + 6y + z - 22 = 0$ es la ecuación pedida



EJEMPLO 44

Obtener la ecuación del plano que pasa por P(−2 , 2 , 2) ; Q(−8 , 1 , 6) y R(3, 4, −1)

Solución:

Los vectores $u = \overrightarrow{PQ} = -6i - j + 4k$ y $v = \overrightarrow{PR} = 5i + 2j - 3k$

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$n = i\,(3-8) - j(18-20) + k\,(-12+5)$

$n = -5\,i + 2j - 7\,k$ de donde $a = -5,\quad b = 2$ y $c = -7$

Sustituyendo en la ecuación con el punto P(−2 , 2 , 2) se tiene:

$a\,(x - x_1) + b(y - y_1) + c\,(z - z_1) = 0$

$-5\,(x + 2) + 2\,(y - 2) - 7(z - 2) = 0$

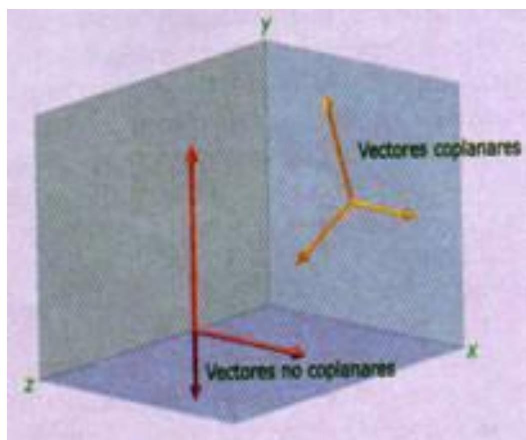
$-5x - 10 + 2y - 4 - 7z + 14 = 0$

$5x - 2y + 7z = 0$ es la ecuación del plano pedida

El triple producto escalar y los vectores coplanares

Tres vectores u , v y w son coplanares (están en el mismo plano) si y solo si su triple producto escalar es cero.

Recuerde que si el triple producto escalar no es cero, entonces el valor obtenido corresponde al volumen de un paralelepípedo.



EJEMPLO 45

Verificar si los vectores $u = \langle 1, 2, 3\rangle$, $v = \langle 1, 1, 1\rangle$ y $w = \langle 1, 2, 1\rangle$ son coplanares. Si no lo son, halle el volumen del paralelepípedo determinado.

Solución:

Para verificar se debe calcular el triple producto escalar que es:

$$w.(u \text{ x } v) = u.(v \text{ x } w) = v.(w \text{ x } u)$$

El triple producto escalar se puede resolver mediante determinantes. Luego:

$$u.(v \text{ x } w) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$u.(v \text{ x } w) = 1(1-2) - 2(1-1) + 3\,(2-1) = -1+3 = 2$$

Dado que $u.(v \text{ x } w) = 2 \neq 0$ (o sea que su triple producto escalar no dio cero)

Luego los vectores u , v y w dados NO son coplanares. Por tanto, el volumen del paralelepípedo determinado es: $V = 2\ unidades\ cúbicas$

EJEMPLO 46

Verificar si los vectores $u = \langle 1, 3, 1 \rangle$, $v = \langle 1, 1, 1 \rangle$ y $w = \langle 2, 2, 2 \rangle$ son coplanares.

Solución:

Para verificar se debe calcular el triple producto escalar que es:

$$(u \text{ x } v) = u.(v \text{ x } w) = v.(w \text{ x } u)$$

Este triple producto escalar se puede resolver mediante determinantes. Luego:

$$u.(v \text{ x } w) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$u.(v \text{ x } w) = 1(2-2) - 3(2-2) + 1\,(2-2) = 0$$

Luego los vectores u , v y w dados SI son coplanares, porque su triple producto escalar dio cero.

ANEXO

Tarea formativa

TAREA FORMATIVA

I. **Parte. Llenar espacios.** Escriba en los espacios la respuesta correcta. Cuide la notación.

1. Nombre dos conceptos expresados mediante vectores:
________________________________ y ________________________________

2. Se denomina vector:
____

3. Si P (4 , 1) y Q (2, –1), el vector $\overrightarrow{QP}$ tiene longitud: ________________

4. Halle la dirección de cada uno de los siguientes vectores:

$w = 2i + 2j$ es: ____________ $u = -2i - 2j$ es: ____________

$v = 2i - 2j$ es: ____________ $z = -2i + 2j$ es: ____________

5. Si $k = -2$; $u = -i + 4j - k$ y $v = i + j$ entonces $kv =$ ________________

$u + v =$ _______________ ; $u - v =$ ________________

6. Si $v = -2i + 3j$ entonces el vector unitario con la misma dirección de v es:
$u =$___________

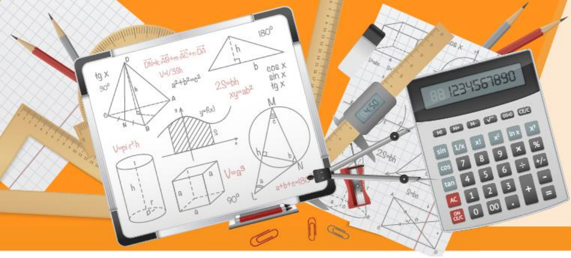
7. Si $u = i - j + 2k$ y $v = -i - j$ entonces $u.v$ es: ____________________

y uxv es: _____________________________

8. Sea F un vector fuerza $F = 5i + 2j$ y $w = i - 3j$ **,** entonces

la componente de F en la dirección de w es _____________________________

y la proyección de F sobre w es: _____________________________________



9. Dos vectores son ortogonales si ____

____

10. Dos vectores son paralelos si ____

____

II Parte. Desarrollo. Resuelva en forma clara y ordenada.

1) Obtenga el vector unitario que tiene la misma dirección de $\overrightarrow{PQ}$ si $P\,(2\,,1\,,-1)$ y $Q(-4,\ 1,\ 0)$
2) Determine los cosenos directores del vector A y verifique las respuestas al mostrar que la suma de sus cuadrados es 1, si $A = -3i + 2j + k$
3) Hallar la distancia del punto $P(3,-1,4)$ a la recta que pasa por los puntos $A(\,4,3,-5)$ y $B(\,3,5,-2)$
4) Hallar la distancia del punto P(1, –2, 4) a la recta que tiene ecuaciones

   $x = 2t$, $y = -3 + t$ y $z = 2 + 2t$
5) Determine el área del triángulo que tiene vértices en los puntos A(5, 4, 5), B(4 , 6, 10) y C(1, 8, 7)
6) Verificar que los siguientes puntos son los vértices de un paralelogramo, y calcular su área $P(\,3,-6,\ 4)$; $Q(\,7,\ 2,\ 2)$; $R(6,\ 5,-1)$ y $S(\,2,-3,1)$
7) Determine si los siguientes vectores son coplanares y si no lo son, calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $A = -i + 2j + 5k$; $B = -4i + 4j + 2k$; $C = -3i + 2j + 4k$

8) Determine si los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$ son coplanares y si no lo son, calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores.

$P(1,-1,\ 1)$, $Q(3,1,2)$, $R(0,-2,-2)$ y $S(3,1,1)$

9) Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que contiene a (1, –1, 4) y es paralela a $\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{7}$

10) Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los puntos: P (3, 1, –1) y Q (3, 2, –6)

11) Determine una ecuación del plano que pasa por A(0, 2, –1) y su vector normal es $n=3i-2j-k$ Dibuje el plano determinado.

12) Determine una ecuación del plano que pasa por P(2, 4, 5) ; Q(1, 5, 7) y R(–1, 6, 8). Dibuje el plano determinado

BIBLIOGRAFÍA

Anton, H (2011). *Introducción al Álgebra Lineal*. Quinta edición. Editorial Limusa Wiley. México.

Aranda, E. (2016). *Álgebra lineal con aplicaciones y Python*. Impreso por Lulu.com

Bernard, K. (2013). *Álgebra Lineal. Fundamentos y Aplicaciones*. Editorial Pearson.

Borobia, A y Estrada, B. (2015). *Álgebra Lineal y Geometría Vectorial*. Editorial Sanz y Torres. España.

Grossman, S. (2012). *Álgebra Lineal*. Editorial Mc Graw Hill. México.

Larson, R y Edwards, B. (2014). *Cálculo, Tomo II.* Editorial Cengage. Décima Edición.

Leithold, L (1998). *El Cálculo*. Editorial Oxford. Séptima Edición. 1998

Murray R., Spiegel, Lipschutz, S & Spellman, D. (2011). *Análisis Vectorial*. McGraw-Hill Mexico.

Pool, D. (2011). *Álgebra Lineal Una introducción Moderna*. Segunda edición. Ediciones Paraninfo. México.

Stewart, J (2011). *Cálculo Conceptos y Contextos*. Varias Variables. Cuarta edición. Editorial Cengage. México.

William, G. (2002). *Álgebra Lineal con Aplicaciones*. Editorial Mc Graw-Hill. México.