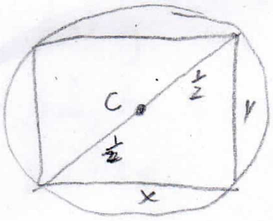
Práctica de Problemas de Optimización

Robert Lu Zheng
Cálculo 1
11L702

1)- Dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un círculo de radio $\frac{1}{2}$.



$r = \frac{1}{2}$

Función a optimizar: $A = x \cdot y$

$c^2 = x^2 + y^2$

$(1)^2 = x^2 + y^2$

$1 = x^2 + y^2$

$1 - x^2 = y^2$

$y = \sqrt{1-x^2}$

$A = x\sqrt{1-x^2}$

$A' = x(1-x^2)^{1/2}$

$A' = x'(1-x^2)^{1/2} + (1-x^2)^{1/2'} \cdot x$

$A' = (1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x)(x)$

$A' = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$A' = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$0 = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$0 = 1-2x^2$

$\frac{-1}{-2} = x^2$

$\frac{1}{2} = x^2$

$\pm\frac{1}{\sqrt{2}} = x$

$\pm\frac{\sqrt{2}}{2} = x$

$A'' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = (1-2x^2)(1-x^2)^{-1/2} = (1-2x^2)'(1-x^2)^{-1/2} + (1-x^2)^{-1/2'}(1-2x^2)$

$= \frac{-4x}{\sqrt{1-x^2}} + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)\frac{(1-2x^2)(\cancel{2}x)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

$= \frac{-4x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x-2x^3}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

$= \frac{-4x(1-x^2)^{3/2} + (x-2x^3)(1-x^2)^{1/2}}{(1-x^2)^2}$

$= \frac{(1-x^2)^{1/2}\left[-4x(1-x^2) + (x-2x^3)\right]}{(1-x^2)^2}$

$= \frac{-4x + 4x^3 + x - 2x^3}{(1-x^2)^{3/2}}$

$A'' = \frac{2x^3 - 3x}{(1-x^2)^{3/2}}$

máximo

$A''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -$

$A''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = +$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$y = \sqrt{1 - \frac{2}{4}}$

$y = \sqrt{1 - \frac{1}{2}}$

$y = \sqrt{\frac{2-1}{2}}$

$y = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

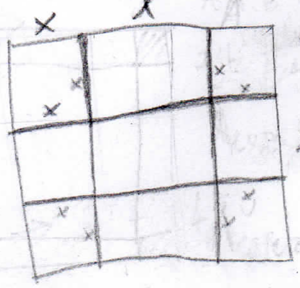
lados =

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) V de la mayor caja abierta que pueda fabricarse con una pieza de cartón de 24 pulgadas de lado ~~cuadradas~~, recortando cuadrados iguales a partir de las esquinas y doblando hacia arriba los lados.

$V = b \cdot h \cdot l$ $\quad A = 24 \text{ pulg}^2$



$A_{cartón} = 24 \text{ pulg}^2$

$A_{cartón} = b \cdot L^2$

$l = 24 - 2x$

$V = (24-2x)(24-2x)x$

$V = x(24-2x)^2$

$V' = x'(24-2x)^2 + (24-2x)^{2'} x$

$= (24-2x)^2 + 2(24-2x)(-2)x$

$V' = (24-2x)^2 - 4x(24-2x)$

$= 12x^2 - 192x + 576$

$V'' = 24x - 192$

$0 = 12x^2 - 192x + 576$

$0 = x^2 - 16x + 48$

$0 = (x-12)(x-4)$

$x = 12 \qquad x = 4$

$V''(12) = + \qquad V''(4) = -$ máximo

$V = x(24-2x)^2$

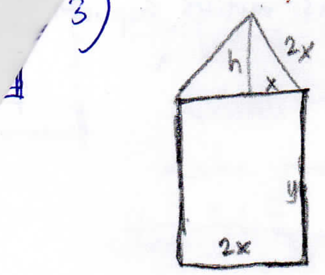
$= 4(24-2(4))^2$

$= 4(24-8)^2$

$= 4(16)^2$

$= 1024 \text{ pulg}^3$

3)



Perímetro = 6.6m   Hallar dimensiones donde la superficie sea máxima

Perímetro = $6x + 2y$

$h^2 = (2x)^2 - (x)^2$

$h^2 = 4x^2 - x^2$

$h^2 = 3x^2$

$h = x\sqrt{3}$

$A_{rectangulo} = 2x \cdot y$

$A_{triangulo} = \frac{\cancel{2}x \cdot x\sqrt{3}}{\cancel{2}} = x x\sqrt{3}$

$A_{figura} = 2xy + x^2\sqrt{3}$

$6.6 = 6x + 2y$

$2y = 6.6 - 6x$

$y = 3.3 - 3x$

$A_{figura} = 2x(3.3 - 3x) + x^2\sqrt{3}$

$= 6.6x - 6x^2 + x^2\sqrt{3}$

$A' = 6.6 - 12x + 2x\sqrt{3}$

$A'' = -12 + 2\sqrt{3}$

$A\left(\frac{-3.3}{-6+\sqrt{3}}\right) = -$ ← máximo

$0 = 6.6 - 12x + 2x\sqrt{3}$

$0 = 3.3 - 6x + x\sqrt{3}$

$-3.3 = x(-6 + \sqrt{3})$

$\frac{-3.3}{-6+\sqrt{3}} = x = 0.77$

$h = x\sqrt{3}$

$h = (0.77)\sqrt{3}$

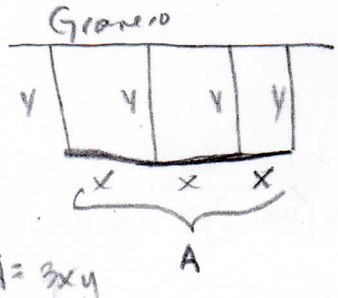
$h = 1.33$

$y = 3.3 - 3(0.77)$

$y = 0.99$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Base} = 2x = 2(0.77) = 1.54m\\ &\text{Altura de triángulo} = h = x\sqrt{3} = (0.77)\sqrt{3} = 1.33m\\ &\text{Altura de rectángulo} = y = 3.3 - 3x = 0.99m\end{aligned}}$$

4) Un granjero tiene 80 pies de malla de alambre con el cual decide hacer tres corrales idénticos. (El lado largo del granero no necesita valla). ¿Qué dimensiones del área total encerrada hacen el área de los corrales tan grande como sea posible?



$P = 80$ pies

$P = 4y + 3x$

$80 = 4y + 3x$

$\frac{80 - 3x}{4} = y$

$y = \frac{80 - 3\left(\frac{40}{3}\right)}{4}$

$= \frac{80 - 40}{4} = \frac{40}{4} = 10$

$A = 3xy$

$= 3x\left(\frac{80 - 3x}{4}\right)$

$A = \frac{240x - 9x^2}{4}$

$A' = \frac{1}{4}(240x - 9x^2)$

$= \frac{1}{4}(240 - 18x)$

$0 = \frac{1}{4}(240 - 18x)$

$0 = 240 - 18x$

$\frac{-240}{-18} = x$

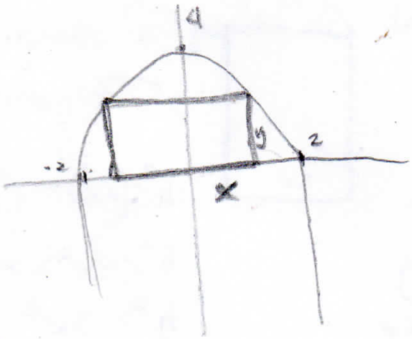
$\frac{40}{3} = x$

$A = 3x$

$A = \cancel{3}\left(\frac{40}{\cancel{3}}\right)$

$$\boxed{\begin{aligned}&A = 40 \text{ pies}\\ &y = 10 \text{ pies}\end{aligned}}$$

5) Área máxima de un rectángulo cuya base se halle sobre el eje x, y sus vértices superior[es] sobre la parábola $y = 4 - x^2$



$A_{\text{rectángulo}}: 2x\,y$ ← dos veces porque la base es doble.

$= 2x(4-x^2)$

$= 8x - 2x^3$

$A' = 8 - 6x^2$

$0 = 8 - 6x^2$

$-8 = -6x^2$

$\frac{8}{6} = x^2 \rightarrow \frac{4}{3} = x^2$

$\pm\frac{2}{\sqrt{3}} = x \rightarrow \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} = x$

$A'' = -12x$

$A''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -$ ← máximo

$A''\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = +$

$A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 8\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) - 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3$

$= \frac{16\sqrt{3}}{3} - 2\left(\frac{24\sqrt{3}}{3}\right)$

$= \frac{16\sqrt{3}}{3} - \frac{16\sqrt{3}}{9}$

$= \frac{144\sqrt{3} - 48\sqrt{3}}{27}$

$= \frac{96\sqrt{3}}{27} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$

Área máxima $= \frac{32\sqrt{3}}{9}$

Base: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Altura: $\frac{8}{3}$

Base $= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)2$

$= \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Alturas

$\frac{32\sqrt{3}}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\,y$

$y = \frac{32\sqrt{3}(3)}{9(4\sqrt{3})}$ $\quad y = \frac{8}{3}$

6) Una fábrica que elabora un solo producto estima que su función de costo total diario es: $C(x) = x^3 - 6x^2 + 13x + 15$. Su función de ingreso total es $I(x) = 28x$. Encuentra el valor de x que maximiza la utilidad diaria. $P(x) = I(x) - C(x)$

$P(x) = 28x - (x^3 - 6x^2 + 13x + 15)$

$= 28x - x^3 + 6x^2 - 13x - 15$

$P(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x - 15$

$P'(x) = -3x^2 + 12x + 15$

$0 = -3x^2 + 12x + 15$

$0 = x^2 - 4x - 5$

$0 = (x-5)(x+1)$

$x = 5 \quad x = -1$

$P''(x) = -6x + 12$

$P''(5) = -$

$P''(-1) = +$

Valor que maximiza → $x = 5$

7) Para fabricar un depósito cilíndrico de agua se necesitan materiales distintos para las bases y el lateral. El precio por metro cuadrado del material de las bases es de \$2 y el del lateral es de \$15. Calcula la altura h y el diámetro D, para que el coste de un depósito de 10000 litros de capacidad sea máxima. ¿Cuál es el precio del depósito?

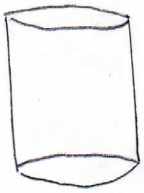
$1L = 1dm^3$

$1m^3 = 1000dm^3$

$A_{base} = A = \pi r^2$

$A_{lateral} = A = b \cdot h$

$A = 2\pi r h$



$V_{cilindro} = \pi r^2 h$

$10m^3 = \pi r^2 h$

$\frac{10m^3}{\pi r^2} = h$

$b = 2\pi r$

$10.000L\left(\frac{1m^3}{1000L}\right) = 10m^3$

$P_{depósito} = (2A_{base} * 2) + (A_{lateral} * 15)$

$P_{depósito} = 4\pi r^2 + 30\pi r h$

$P = 4\pi r^2 + 30\pi r\left(\frac{10}{\pi r^2}\right)$

$P = 4\pi r^2 + \frac{300}{r}$

$P' = (4\pi)(r^2)' + (300)(r^{-1})'$

$= 8\pi r + (300)(-1)(r^{-2})$

$P' = 8\pi r - \frac{300}{r^2}$

$0 = 8\pi r - \frac{300}{r^2}$

$\frac{300}{r^2} = 8\pi r$

$300 = 8\pi r^3$

$\sqrt[3]{\frac{\frac{300}{8}}{\pi}} = r$

$r = 2.29$

$\frac{10m^3}{\pi r^2} = h$

$\frac{10m^3}{\pi(2.29)^2} = h = 0.61$

$A_{lateral} = 2\pi(2.29)(0.61)$

$= 8.78$

$A_{base} = \pi r^2$

$= \pi(2.29)^2$

$= 16.47$

$D = 2r = 2(2.29) = 4.58m$

$h = 0.61m$

$P_{depósito} = (2(16.47)) + (8.78 * 15)$

$= 65.88 + 131.70$

$= \$197.58$