Antiderivadas, Integral Indefinida e Integral Definida

Definición de una antiderivada

Se dice que una función F es una **antiderivada** de f, en un intervalo I, si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

TEOREMA 4.1 Representación de antiderivadas

Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces G es una antiderivada de f en el intervalo I si y sólo si G es de la forma $G(x) = F(x) + C$, para todo x en I, donde C es una constante.

La operación para determinar todas las soluciones de esta ecuación se denomina **antiderivación** (o **integración indefinida**) y se denota mediante un signo integral $\int$. La solución se denota mediante

$$y = \int \underset{\text{Integrando}}{f(x)}\, \overset{\text{Variable de integración}}{dx} = \underset{\text{Antiderivada de } f(x)}{F(x)} + \overset{\text{Constante de integración}}{C}.$$

La expresión $\int f(x)dx$ se lee como la *antiderivada de f respecto a x*. De tal manera, la diferencial de dx sirve para identificar a x como la variable de integración. El término **integral indefinida** es sinónimo de antiderivada.

Consideremos las siguientes derivadas:

$$F(x) = x^2 \qquad G(x) = x^2 + 5 \qquad H(x) = x^2 - \frac{3}{4}$$

$$F'(x) = 2x \qquad G'(x) = 2x \qquad H'(x) = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad \frac{dy}{dx} = 2x \qquad \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$dy = 2xdx$$

$$\int dy = \int 2xdx$$

$$y = \int 2xdx$$

Reglas básicas de integración

La naturaleza inversa de la integración y la derivación puede comprobarse sustituyendo $F'(x)$ por $f(x)$ en la definición de integración indefinida para obtener

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

La integración es la "inversa" de la derivación.

Además, si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x).$$

La derivación es la "inversa" de la integración.

Estas dos ecuaciones le permiten obtener directamente fórmulas de integración a partir de fórmulas de derivación, como se muestra en el siguiente resumen.

Reglas básicas de integración

Fórmula de derivación	Fórmula de integración	
$\frac{d}{dx}[C] = 0$	$\int 0\,dx = C$	
$\frac{d}{dx}[kx] = k$	$\int k\,dx = kx + C$	
$\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$	$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$	
$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$	
$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	Regla de la potencia
$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	
$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$	

Ejemplos:

1. $\int(3x+8)dx = \int(3x)dx + \int 8dx = 3\int xdx + 8\int dx = 3\left[\frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1\right] + 8[x + C_2] =$
$$= 3\frac{x^2}{2} + 3C_1 + 8x + 8C_2 = \frac{3}{2}x^2 + 8x + (3C_1 + 8C_2) = \frac{3}{2}x^2 + 8x + C$$

2. $\int(x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 9)dx = \int x^4\,dx + 3\int x^3dx - 5\int x^2dx + 9\int dx =$
$$= \frac{x^5}{5} + 3\left(\frac{x^4}{4}\right) - 5\left(\frac{x^3}{3}\right) + 9x + C = \frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 9x + C$$

3. $\int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{1}{x}\right)dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx =$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{1}{2}}(x^2+5) + C$$
$$= \frac{2}{5}\sqrt{x}(x^2+5) + C$$

4. $\int \frac{x^3+2x^2-3}{\sqrt[3]{x}}dx = \int(x^3 + 2x^2 - 3)x^{-\frac{1}{3}}dx = \int\left(x^3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^2x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{8}{3}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = \frac{x^{\frac{8}{3}+1}}{\frac{8}{3}+1} + 2\left(\frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}\right) - 3\left(\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right) + C = \frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}} + 2\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - 3\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right) + C = \frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}} + 2\left(\frac{3}{8}\right)x^{\frac{8}{3}} - 3\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{2}{3}} + C =$
$$= \frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}} - \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{11}x^3\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$$

5. $\int(3cscxcotx - 4csc^2x)dx = 3\int cscxcotxdx - 4\int csc^2xdx$
$$= 3(-cscx + C_1) - 4(-\cot x + C_2)$$
$$= -3cscx + 3C_1 + 4\cot x - 4C_2$$
$$= -3cscx + 4\cot x + C$$

6. $\int(tan^2x + cot^2x + 3)dx = \int(sec^2 - 1 + csc^2x - 1 + 3)dx =$
$$= \int(sec^2x + csc^2x + 1)dx = \int sec^2xdx + \int csc^2xdx + \int dx =$$
$$= \tan x - \cot x + x + C$$

$$Desigualdades\text{:}\ 1 + tan^2x = sec^2x, \qquad 1 + cot^2x = csc^2x$$

Práctica N° 1

Resuelva los problemas del 11 al 30 del ejercicio 4.1 de la página 251

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 11 a 32, encuentre la integral indefinida y compruebe el resultado mediante derivación.

11. $\int (x + 7)\, dx$

12. $\int (13 - x)\, dx$

13. $\int (x^5 + 1)\, dx$

14. $\int (8x^3 - 9x^2 + 4)\, dx$

15. $\int (x^{3/2} + 2x + 1)\, dx$

16. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

17. $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$

18. $\int \left(\sqrt[4]{x^3} + 1\right) dx$

19. $\int \frac{1}{x^5}\, dx$

20. $\int \frac{3}{x^7}\, dx$

21. $\int \frac{x + 6}{\sqrt{x}}\, dx$

22. $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 5}{x^4}\, dx$

23. $\int (x + 1)(3x - 2)\, dx$

24. $\int (4t^2 + 3)^2\, dt$

25. $\int (5 \cos x + 4 \operatorname{sen} x)\, dx$

26. $\int (t^2 - \cos t)\, dt$

27. $\int (1 - \csc t \cot t)\, dt$

28. $\int (\theta^2 + \sec^2 \theta)\, d\theta$

29. $\int (\sec^2 \theta - \operatorname{sen} \theta)\, d\theta$

30. $\int \sec y (\tan y - \sec y)\, dy$

TEOREMA 4.9 El teorema fundamental del cálculo

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

ESTRATEGIA PARA UTILIZAR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

1. *Suponiendo que conozca* una antiderivada o primitiva f, dispone de una forma de calcular una integral definida sin tener que utilizar el límite de la suma.
2. Cuando se aplica el teorema fundamental del cálculo, la siguiente notación resulta conveniente.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Por ejemplo, para calcular $\int_1^3 x^3\,dx$, se puede escribir

$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

3. No es necesario incluir una constante de integración C en la antiderivada o primitiva, ya que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x) + C\Big]_a^b = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

Ejemplos: Calcule las siguientes integrales definidas

1. $\int_1^3 (2x^2 - 5x)dx = 2\int_1^3 x^2dx - 5\int_1^3 xdx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 - 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 =$

$$= 2\left[\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right] - 5\left[\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] = 2\left[\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right] - 5\left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right] =$$

$$= 2\left[\frac{26}{3}\right] - 5[4] = \frac{52}{3} - 20 = \frac{52-60}{3} = -\frac{8}{3}$$

Otra forma:

$$\int_1^3 (2x^2-5x)dx = \left[2\left(\frac{x^3}{3}\right)-5\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^3$$

$$= \left[2\left(\frac{3^3}{3}\right)-5\left(\frac{3^2}{2}\right)\right]-\left[2\left(\frac{1^3}{3}\right)-5\left(\frac{1^2}{2}\right)\right]$$

$$= \left[2\left(\frac{27}{3}\right)-5\left(\frac{9}{2}\right)\right]-\left[2\left(\frac{1}{3}\right)-5\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[\frac{54}{3}-\frac{45}{2}\right]-\left[\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\right] =$$

$$= \frac{54}{3}-\frac{45}{2}-\frac{2}{3}+\frac{5}{2} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - sen\ x)dx = [sen\ x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} =$

$$= \left[sen\left(\frac{\pi}{4}\right)+cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]-[sen(0)+cos(0)] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-0-1 = \frac{2\sqrt{2}}{2}-1 = \sqrt{2}-1$$

Otra forma:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - sen\ x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} sen\ x dx = [sen\ x]_0^{\frac{\pi}{4}} +$$

$$[\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[sen\ \left(\frac{\pi}{4}\right)-sen(0)\right]+\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos(0)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}-0+\frac{\sqrt{2}}{2}-1 = = \frac{2\sqrt{2}}{2}-1 = \sqrt{2}-1$$

3. $\int_1^4 (3-|x-3|)dx = \int_1^3 [3-(-x+3)]dx + \int_3^4 [3-(x-3)]dx =$

$$= \int_1^3 (3+x-3)dx + \int_3^4 (3-x+3)dx \quad = \int_1^3 x dx + \int_3^4 (6-x)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 + \left[6x-\frac{x^2}{2}\right]_3^4 = \left[\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right]+\left\{\left[6(4)-\frac{4^2}{2}\right]-\left[6(3)-\frac{3^2}{2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{9}{2}-\frac{1}{2}+24-8-18+\frac{9}{2} = \frac{17}{2}-2 = \frac{17-4}{2} = \frac{13}{2}$$

Valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} -x & x<0 \\ x & x>0 \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} -(x-3) & si \;\; x < 3 \\ (x-3) \;\; si & x > \;\; 3 \end{cases}$$

$$x - 3 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = 3$$

Práctica N° 2

Resuelva los problemas del 5 al 34 del ejercicio 4.4 de la página 288

5. $\int_0^2 6x \, dx$

6. $\int_{-3}^1 8 \, dt$

7. $\int_{-1}^0 (2x-1) \, dx$

8. $\int_{-1}^2 (7-3t) \, dt$

9. $\int_{-1}^1 (t^2-2) \, dt$

10. $\int_1^2 (6x^2-3x) \, dx$

11. $\int_0^1 (2t-1)^2 \, dt$

12. $\int_1^3 (4x^3-3x^2) \, dx$

13. $\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2}-1\right) dx$

14. $\int_{-2}^{-1} \left(u-\frac{1}{u^2}\right) du$

15. $\int_1^4 \frac{u-2}{\sqrt{u}} \, du$

16. $\int_{-8}^8 x^{1/3} \, dx$

17. $\int_{-1}^1 (\sqrt[3]{t}-2) \, dt$

18. $\int_1^8 \sqrt{\frac{2}{x}} \, dx$

19. $\int_0^1 \frac{x-\sqrt{x}}{3} \, dx$

20. $\int_0^2 (2-t)\sqrt{t} \, dt$

21. $\int_{-1}^0 (t^{1/3}-t^{2/3}) \, dt$

22. $\int_{-8}^{-1} \frac{x-x^2}{2\sqrt[3]{x}} \, dx$

23. $\int_0^5 |2x-5| \, dx$

24. $\int_1^4 (3-|x-3|) \, dx$

25. $\int_0^4 |x^2-9| \, dx$

26. $\int_0^4 |x^2-4x+3| \, dx$

27. $\int_0^{\pi} (1+\operatorname{sen} x) \, dx$

28. $\int_0^{\pi} (2+\cos x) \, dx$

29. $\int_0^{\pi/4} \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} \, d\theta$

30. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1} \, d\theta$

31. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sec^2 x\, dx$

32. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (2 - \csc^2 x)\, dx$

33. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4 \sec \theta \tan \theta \, d\theta$

34. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2t + \cos t)\, dt$