Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____*«Информатика и системы управления»*_____

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа №2

тема: «Построение и программная реализация алгоритма многомерной интерполяции табличных функций»

Выполнил студент: __*Клименко Алексей Константинович*_____

фамилия, имя, отчество

Группа: _____*ИУ7-45Б*_____

Проверил, к.п.н.: _____

подпись, дата

Оценка _____ Дата _____

2020 г.

Цель работы

Получение навыков построения алгоритма интерполяции таблично заданных функций двух переменных.

Исходные данные

1. Таблица функции с количеством узлов 5x5.

y \ x	0	1	2	3	4
0	0	1	4	9	16
1	1	2	5	10	17
2	4	5	8	13	20
3	9	10	13	18	25
4	16	17	20	25	32

2. Степень аппроксимирующих полиномов - n_x и n_y.

3. Значение агрументов x, y, для которых выполняется интерполяция.

Код программы

```
import sys

# загрузка данных из файла
filename = sys.argv[1]
X, Y, Z = [], [], {}
with open(filename, "rt") as file:
    X = list(map(float, file.readline().split()[1:]))
    for line in file:
        y, *vals = list(map(float, line.split()))
        Y.append(y)
        for x, val in zip(X, vals):
            Z[(x, y)] = val

# линейный сплайн
def calc_lin_spline_data(X, Y):
    A = Y[:-1]
    B = [(Y[i] - Y[i - 1]) / (X[i] - X[i - 1]) for i in range(1, len(X))]

    return A, B

# квадратичный сплайн
def calc_quad_spline_data(X, Y, slope0=0):
    n = len(X)
```

```
    A = Y[:-1]
    B, C = [0] * (n - 1), [0] * (n - 1)

    B[0] = slope0
    C[0] = ((Y[1] - Y[0]) / (X[1] - X[0]) - B[0]) / (X[1] - X[0])
    for i in range(1, n - 1):
        B[i] = B[i - 1] + 2 * C[i - 1] * (X[i] - X[i - 1])
        C[i] = ((Y[i + 1] - Y[i]) / (X[i + 1] - X[i]) - B[i]) / (X[i + 1] - X[i])

    return A, B, C

# кубический сплайн
def calc_qubic_spline_data(X, Y):
    n = len(X)
    A = Y[:-1]

    ksi, eta = [0, 0], [0, 0]
    for i in range(2, n): # прямой проход
        hi, him1 = X[i] - X[i - 1], X[i - 1] - X[i - 2]
        fi = 3 * ((Y[i] - Y[i - 1]) / hi - (Y[i - 1] - Y[i - 2]) / him1)
        ksi.append(- hi / (him1 * ksi[i - 1] + 2 * (him1 + hi)))
        eta.append((fi - him1 * eta[i - 1]) / (him1 * ksi[i - 1] + 2 * (him1 + hi)))

    C = [0] * (n - 1)
    C[n - 2] = eta[-1]
    for i in range(n - 2, 0, -1): # обратный проход
        C[i - 1] = ksi[i] * C[i] + eta[i]

    B, D = [], []
    for i in range(1, n - 1):
        hi = X[i] - X[i - 1]
        B.append((Y[i] - Y[i - 1]) / hi - hi / 3 * (C[i] + 2 * C[i - 1]))
        D.append((C[i] - C[i - 1]) / 3 / hi)
    B.append((Y[-1] - Y[-2]) / (X[-1] - X[-2]) - (X[-1] - X[-2]) / 3 * 2 * C[-1])
    D.append(- C[n - 2] / 3 / (X[-1] - X[-2]))

    return A, B, C, D

# использование коэф.-тов интерполяции для нахождения
# интерполированного значения табличной функции
def apply_interp_data(X, data, x):
    i = max([0] + list(filter(lambda i: X[i] < x, range(len(X)))))
    y, h = 0, x - X[i]
    for k, row in enumerate(data):
        y += row[i] * h ** k
    return y

# интерполяция по табличной функции одной
# переменной с заданной степенью полиномов
def interpolate(X, Y, x, n):
    if   n == 1: data = calc_lin_spline_data(X, Y)
```

```
    elif n == 2: data = calc_quad_spline_data(X, Y)
    elif n == 3: data = calc_qubic_spline_data(X, Y)
    else: raise RuntimeError("invalid param 'n'. Must be 1, 2 or 3")

    return apply_interp_data(X, data, x)

# интерполирования исходной табличной функции
# двух переменных с заданными степенями полиномов
def z_func(x, y, n_x, n_y):
    ZX = [interpolate(X, [Z[(xi, yi)] for yi in Y], x, n_x) for xi in X]
    return interpolate(Y, ZX, y, n_y)

# начальные параметры интерполирования
x, y = 1.5, 1.5

print(" n |  x  |  y  | z real | z interp ")
print("===|=====|=====|========|==========")
for n in [1, 2, 3]:
    z = z_func(x, y, n, n)
    print(f" {n} | {x} | {y} | {x ** 2 + y ** 2:.4f} | {z:.6f}")
```

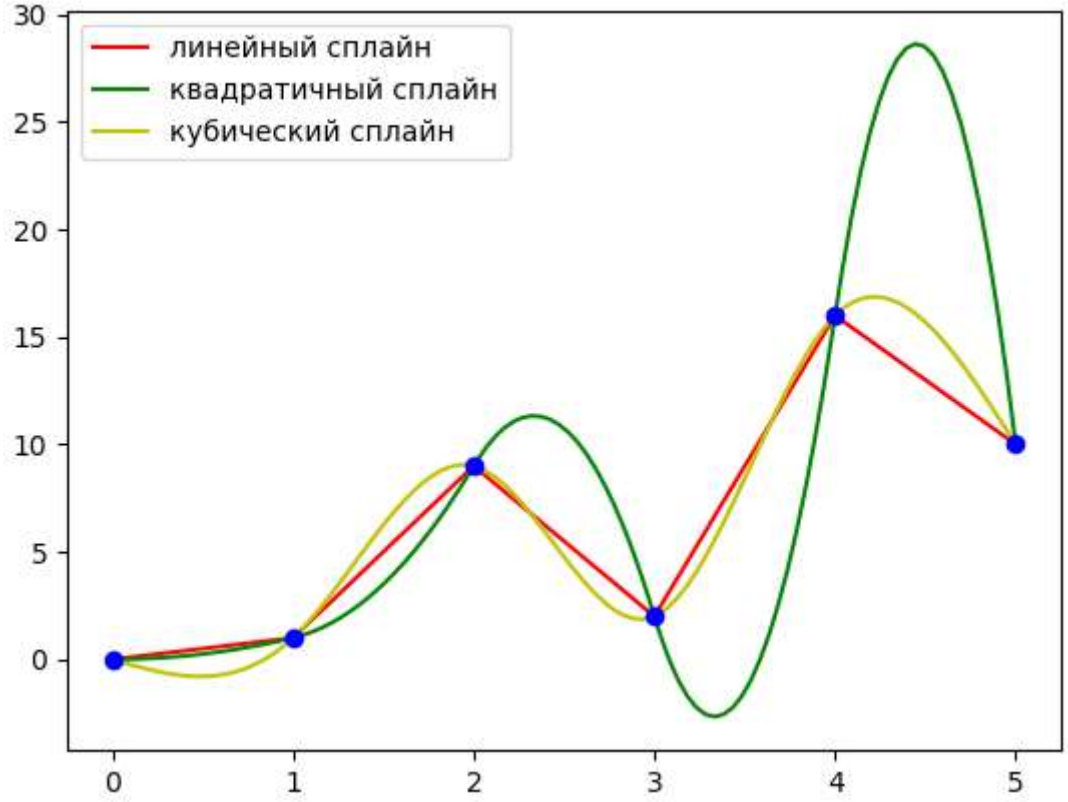
Результаты работы

1. Вывод работы программы для x = 1.5 и y = 1.5 для n = 1, 2, 3:

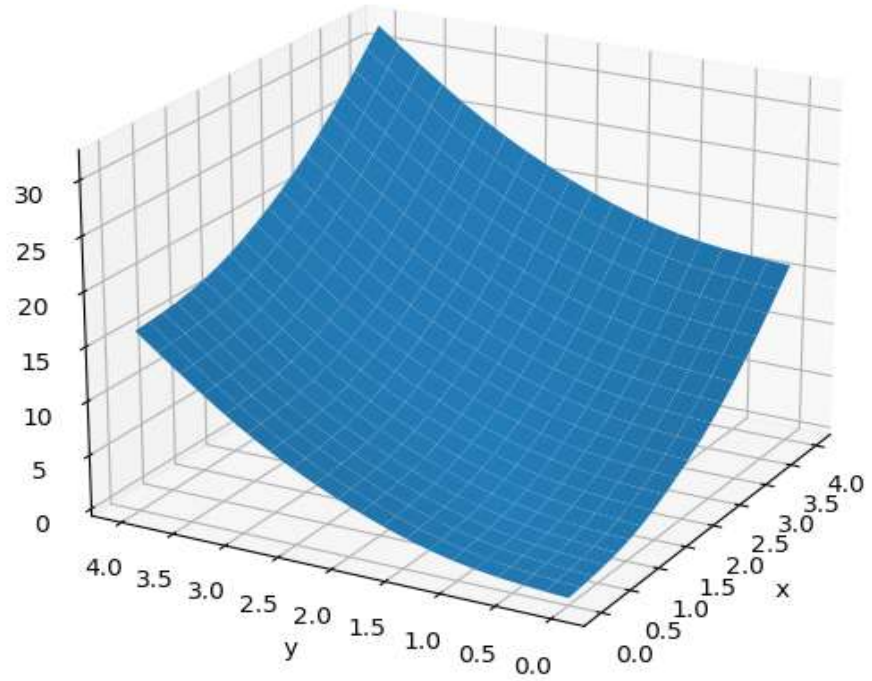
```
MSI_PC@MSI /cygdrive/d/Dev/ca-lab/lab_2
$ make
py main.py data.txt
 n |  x  |  y  | z real | z interp
===|=====|=====|========|==========
 1 | 1.5 | 1.5 | 4.5000 | 5.000000
 2 | 1.5 | 1.5 | 4.5000 | 4.500000
 3 | 1.5 | 1.5 | 4.5000 | 4.464286
```

Как видим, интерполяция при степени полиномов n = 2 наиболее точно позволяет описать данную функцию. Можно ещё раз убедиться в том, что выбор степени интерполяционных полиномов зависит от задачи, и **не всегда больше значит лучше**.

2. Графический вывод интерполированной одномерной функции при разных значениях степени интерполяционных полиномов:



3. Графический вывод интерполяции кубическими сплайнами двумерной функции:



Контрольные вопросы

1. *Пусть производящая функция таблицы суть* $z(x, y) = x^2 + y^2$. *Область определения по x и y 0-5 и 0-5. Шаги по переменным равны 1. Степени:* $n_x = 1$, $n_y = 1$, *переменные:* $x = 1.5$, $y = 1.5$. *Приведите по шагам те значения функции, которые получаются в ходе последовательных интерполяций. По строкам и столбцу.*

Запишем таблицу функции z(x, y):

y \ x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	4	9	16	25
1	1	2	5	10	17	26
2	4	5	8	13	20	29
3	9	10	13	18	25	34
4	16	17	20	25	32	41
5	25	26	29	34	41	50

Проведём серию интерполяций по строкам для нахождения значений z(x, y) при x = 1.5:

$$y = 1: z(x, y) = 2 + 3(x - 1) \rightarrow z(1.5,1) = 2 + 3 * 0.5 = 3.5$$

$$y = 2: z(x, y) = 5 + 3(x - 1) \rightarrow z(1.5,2) = 5 + 3 * 0.5 = 6.5$$

Теперь интерполируем полученные значения для нахождения значения функциии при y = 1.5:

$$z(x, y) = 3.5 + 3(y - 1) \rightarrow z(1.5,1.5) = 3.5 + 3 * 0.5 = 5$$

Получили итоговое значение z(x, y) = **5**

2. *Какова минимальная степень двумерного полинома, построенного на четырёх узлах? На шести узлах?*

Граничные условия для двумерного полинома, опирающегося на 4 узла будут составлять 4 уравнения вида $\psi(x_i, y_i) = z_i, i = 1\ldots4$. Рассмотрим двумерный полином первой степени:

$$\psi(x, y) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(y - y_1)$$

Как видим, в таком полиноме всего 3 неизвестных параметра, в то время как ограничивающих уравнений 4. Поэтому минимальная степень двумерного полинома, построенного на 4 узлах **не может быть меньше двух**. (Функция билинейной интерполяции)

Для случая интерполяции по шести узлам, достаточно рассмотреть полином 2 степени с 6 неизвестными коэффициентами. Их можно

однозначно определить используя 6 заданных узлов, поэтому минимальная степень интерполяционного полинома на шести узлах будет 2.

3. *Предложите алгоритм двумерной интерполяции при хаотическом расположении узлов, т.е. когда таблицы функции на регулярной сетке нет, и метод последовательной интерполяции не работает. Какие имеются ограничения на расположение узлов при разных степенях полинома?*

Можно разбить множество узлов на группы по 3 (разбиение на треугольники). Для каждого такого треугольника определить на его вершинах углы наклона функции (например, используя соседние ближайшие вершины). Таким образом на каждом треугольнике мы будем иметь 9 параметров - значения функции и её первых производных в вершинах треугольника. По этим параметрам можно построить аппроксимирующий функцию полином 2 степени вида:

$$f(x,y) = a + b\,(x - x_1) + c\,(y - y_1) + d\,(x - x_1)^2 + e\,(y - y_1)^2 + f\,(x - x_1)(y - y_1)$$

Основная сложность этого метода состоит в оптимальном разбиении множества узлов на треугольники, ведь главное ограничение данного метода состоит в том, что размерность линейного пространства на множестве узлов, используемых при интерполяции не должна быть меньше размерности исходного пространства. Другими словами, при интерполяции двумерной функции узлы не должны лежать на одной прямой.