Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ______*«Информатика и системы управления»*____________

КАФЕДРА *«Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»*

Лабораторная работа №6

тема: «Построение и программная реализация алгоритмов численного дифференцирования»

Выполнил студент: __*Клименко Алексей Константинович*______________

фамилия, имя, отчество

Группа: _______________________*ИУ7-45Б*____________________________

Проверил, к.п.н.: ____

подпись, дата

Оценка ___________________________________ Дата ________________

2020 г.

Цель работы

Получение навыков построения алгоритма вычисления производных от сеточных функций.

Задание

Таблица функции:

n	**x_n**	**y_n**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	**1**	**0.571**	0.318	0.376	0.376	0.408	-0.116
1	**2**	**0.889**	0.202	0.260	0.233	0.247	-0.166
2	**3**	**1.091**	0.140	0.171	0.159	0.165	-0.062
3	**4**	**1.231**	0.102	0.121	0.113	0.118	-0.038
4	**5**	**1.333**	0.079	0.090	0.083	0.089	-0.023
5	**6**	**1.412**	0.079	0.067	0.068	0.089	-0.023

1 - Односторонная разностная производная

Будем вычислять правые разностные производные для первых 5 точек. Для последней используем формулу левой разностной производной. Обе формулы, очевидно, имеют первый порядок точности.

2 - Центральная разностная производная

Для крайних точек воспользуемся следующими формулами нахождения разностной производной второго порядка точности: $y'_0=\frac{-y_2+4y_1-3y_0}{2h}$ и $y'_5=\frac{3y_5-4y_4+y_3}{2h}$.

3 - 2-я формула Рунге с использованием односторонней производной

Рассмотрим для примера повышение точности формулы правой разностной производной:

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O(h), \;\; p = 1$$

$$\Phi(h) = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

$$\Phi(mh) = \frac{y_{n+m} - y_n}{mh} \quad \rightarrow \quad \Phi(2h) = \frac{y_{n+2} - y_n}{2h}$$

$$y'_n = \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1})$$

$$y'_n = 2\Phi(h) - \Phi(2h) + O(h^2)$$

$$y'_n = \frac{2y_{n+1} - 2y_n}{h} - \frac{y_{n+2} - y_n}{2h} + O(h^2) = \frac{-y_{n+2} + 4y_{n+1} - 3y_n}{2h} + O(h^2)$$

Для левой разностной производной аналогично получаем: $y'_n = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} + O(h^2)$ (вывод есть в контрольных вопросах).

При заполнении таблицы для всех узлов за исключением двух последних будем применять формулу правой разностной производной повышенной точности. А для двух оставшихся узлов - формулу левой разностной производной повышенной точности.

4 - С использованием выравнивающих переменных

Линеаризуем исходную зависимость $y = \frac{a_0 x}{a_1 + a_2 x}$ с помощью замены $\xi(x) = \frac{1}{x}, \; \eta(y) = \frac{1}{y}$. Получим: $a_0 \eta = a_1 \xi + a_2$.

Выразим производную исходной функции в новых переменных:

$$d\xi = -\frac{dx}{x^2}, \; d\eta = -\frac{dy}{y^2} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} \frac{d\eta}{d\xi}$$

Производная $\frac{d\eta}{d\xi}$ может быть без потери точности представлена своим разностным аналогом (т.к. зависимость - линейная):

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\eta_{n+1}-\eta_n}{\xi_{n+1}-\xi_n}=\frac{\frac{1}{y_{n+1}}-\frac{1}{y_n}}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\frac{(y_n-y_{n+1})}{y_n y_{n+1}}\frac{x_n x_{n+1}}{(x_n-x_{n+1})}$$

Окончательно получаем выражение для вычисления значения производной исходной функции: $y'_n=\frac{y_n}{x_n}\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\frac{(y_n-y_{n+1})}{(x_n-x_{n+1})}$

5 - 2-я разностная производная

Воспользуемся простыми формулами, в которых для начального и конечного узлов порядок точности будет равен единице, тогда как для всех остальных будет равен двум.

$$y''_0=\frac{y_2-2y_1+y_0}{h^2}+O(h) \qquad \textit{для первого узла}$$

$$y''_n=\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}+O(h^2) \qquad \textit{для остальных узлов}$$

$$y''_n=\frac{y_n-2y_{n-1}+y_{n-2}}{h^2}+O(h) \qquad \textit{для последнего узла}$$

Контрольные вопросы

1. *Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для первой разностной производной y'_N в крайнем правом узле x_N .*

Воспользуемся разложениями в ряды Тейлора для узлов y_{N-1} и y_{N-2}:

$$y_{N-1}=y_N-hy'_N+\frac{h^2}{2}y''_N+O(h^3)$$

$$y_{N-2}=y_N-2hy'_N+2h^2y''_N+O(h^3)$$

Избавимся от слагаемых второй степени:

$$4y_{N-1}-y_{N-2}=3y_N-2hy'_N+O(h^3)$$

И выразим искомое значение разностной производной:

$$y'_N=\frac{3y_N-4y_{N-1}+y_{N-2}}{2h}+O(h^2)$$

2. *Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для второй разностной производной y''_0 в крайнем левом узле x_0 .*

Снова воспользуемся разложениями в ряды Тейлора:

$$y_1 = y_0 + h y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + O(h^3)$$
$$y_2 = y_0 + 2h y'_0 + 2h^2 y''_0 + O(h^3)$$

Выразим первую разностную производную с порядком точности O(h):

$$2y_1 - y_2 = y_0 - h^2 y''_0 + O(h^3) \quad \rightarrow \quad y''_0 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + O(h)$$

Теперь используем 2-ую формулу Рунге для повышения степени точности формулы:

$$y''_0 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + O(h)$$

$$\Phi(h) = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}, \quad \Phi(mh) = \frac{y_{2m} - 2y_m + y_0}{(mh)^2} \quad \rightarrow \quad \Phi(2h) = \frac{y_4 - 2y_2 + y_0}{4h^2}$$

$$y''_0 = \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1})$$
$$y''_0 = 2\Phi(h) - \Phi(2h) + O(h^2)$$

$$y''_0 = \frac{2y_2 - 4y_1 + 2y_0}{h^2} - \frac{y_4 - 2y_2 + y_0}{4h^2} + O(h^2) = \frac{-y_4 + 10y_2 - 8y_1 + 7y_0}{4h^2} + O(h^2)$$

3. *Используя 2-ую формулу Рунге, дать вывод выражения (9) из Лекции №7 для первой производной y'_0 в левом крайнем узле.*

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h), \quad p = 1$$
$$\Phi(h) = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad \Phi(2h) = \frac{y_2 - y_0}{2h}$$
$$y'_0 = 2\Phi(h) - \Phi(2h) + O(h^2)$$

$$y'_0 = \frac{2y_1 - 2y_0}{h} - \frac{y_2 - y_0}{2h} + O(h^2) = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} + O(h^2)$$

4. *Любым способом из Лекций №7, 8 получить формулу порядка точности $O(h^3)$ для первой разностной производной y'_0 в крайнем левом узле x_0 .*

Вопользуемся 2-ой формулой Рунге для выражение полученного в предыдущем пункте:

$$y'_0 = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} + O(h^2), \quad p = 2$$

$$\Phi(h) = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}, \quad \Phi(2h) = \frac{-y_4 + 4y_2 - 3y_0}{4h}$$

$$y'_0 = \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1})$$

$$y'_0 = \frac{4\Phi(h) - \Phi(2h)}{3} + O(h^3)$$

$$y'_0 = \frac{y_4 - 12y_2 + 16y_1 - 3y_0}{12h} + O(h^3)$$