Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчёт

по лабораторной работе №2

Название «Интервальные оценки»

Дисциплина «Математическая статистика»

Вариант 3

Студент ИУ7-65Б ______________ Клименко А.К.
(подпись, дата) (Фамилия И.О.)

Преподаватель ______________ Андреева Т.В.
(подпись, дата) (Фамилия И.О.)

Москва, 2022

Содержание

Введение

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы

1. Для выборки объема n из генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ:
   a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ и $S^2(\overrightarrow{x_n})$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$, $\overline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\overrightarrow{x_n})$, $\overline{\sigma}^2(\overrightarrow{x_n})$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта.
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:
   a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x_n})$, $y = \underline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$, и $y = \overline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\overrightarrow{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\overrightarrow{x_n})$, $z = \underline{\sigma}^2(\overrightarrow{x_n})$ и $z = \overline{\sigma}^2(\overrightarrow{x_n})$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

Содержание отчета

1. определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины;
2. формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины;
3. текст программы;
4. результаты расчетов и графики для выборки из индивидуального варианта (при построении графиков принять $\gamma = 0.9$).

1 Выполнение работы

1.1 Расчётные соотношения

В списке ниже в скобках указаны идентификаторы соответствующих величин, рассчитываемые в программе.

- Объем выборки n (`N`)
- точечная оценка математического ожидания $\hat{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ (`mu_hat`)

$$\hat{\mu}(\overrightarrow{x_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1.1}$$

- точечная оценка дисперсии $S^2(\overrightarrow{x_n})$ (`S_2`)

$$S^2(\overrightarrow{x_n}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[x_i - \hat{\mu}(\overrightarrow{x_n})]^2 \tag{1.2}$$

- границы γ-доверительного интервала для математического ожидания (`mu_hat_low`, `mu_hat_high`)

$$\underline{\mu}(\overrightarrow{x_n}) = \hat{\mu}(\overrightarrow{x_n}) + \sqrt{\frac{S^2(\overrightarrow{x_n})}{n}} \cdot t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \tag{1.3}$$

$$\overline{\mu}(\overrightarrow{x_n}) = \hat{\mu}(\overrightarrow{x_n}) + \sqrt{\frac{S^2(\overrightarrow{x_n})}{n}} \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1), \tag{1.4}$$

где $t_\alpha(m)$ – α-квантиль распределения Стьюдента с m степенями свободы.

- границы γ-доверительного интервала для дисперсии (`S_2_low`, `S_2_high`)

$$\underline{\sigma}^2(\overrightarrow{x_n}) = S^2(\overrightarrow{x_n}) \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}} \tag{1.5}$$

$$\overline{\sigma}^2(\overrightarrow{x_n}) = S^2(\overrightarrow{x_n}) \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}}, \tag{1.6}$$

где $\chi^2_\alpha(m)$ – α-квантиль распределения хи-квадрат с m степенями свободы.

1.2 Определение γ-доверительного интервала

Пусть:

a) X – случайная величина, закон распределения которой зависит от неизвестного параметра θ,

b) $\overrightarrow{X}$ – случайная выборка из X.

Определение: интервальной оценкой уровня γ параметра θ называется интервал со случайными границами, который накрывает теоретическое значение параметра θ с вероятностью γ.

Определение: γ-доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня γ) параметра θ называют реализацию (выборочное значение) интервальной оценки уровня γ для этого параметра, то есть интервал с детерминированными границами $(\underline{\theta}(\overrightarrow{x}), \overline{\theta}(\overrightarrow{x}))$.

1.3 Результаты работы

Величина	**Значение**
n	120
$\hat{\mu}$	0.2322
S^2	1.0406
$(\underline{\mu}, \overline{\mu})$	(0.077, 0.39)
$(\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2)$	(0.94, 1.17)

Таблица 1.1 — Результаты расчетов параметров выборки

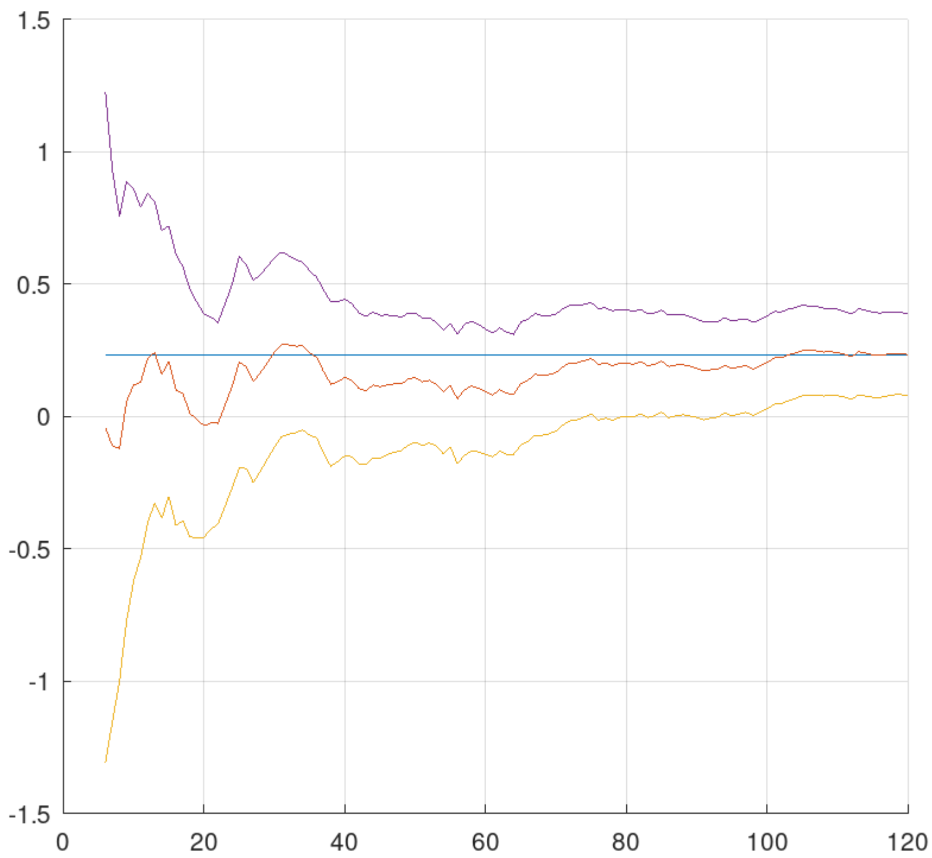

Рисунок 1.1 — Графики зависимостей нижней и верхней границ интервала для математического ожидания от объема выборки.

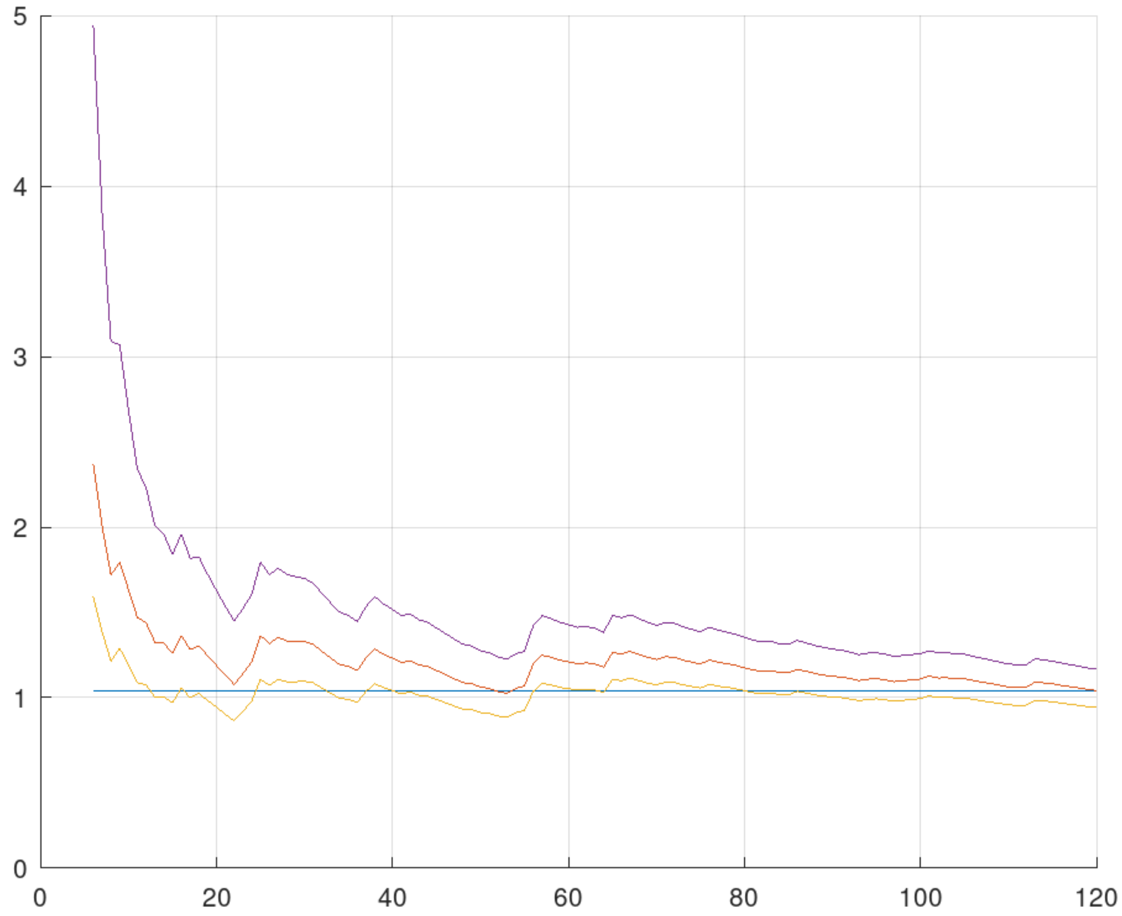

Рисунок 1.2 — График эмпирической функции распределения и функции распределения нормальной случайной величины $Y \sim \mathbb{N}(\hat{\mu}, S^2)$

1.4 Текст программы

```
#!/bin/octave -qf

pkg load statistics

X = [-0.45, -0.33, 2.92, -1.25, -1.20, 0.05, -0.53, -0.19, 1.49, 0.67, 0.22, 1.23, 0.50, -0.92,
    0.90, -1.52, -0.15, -1.24, -0.47, -0.45, 0.18, -0.05, 1.58, 1.74, 2.37, -0.24, -1.34, 1.05,
    1.28, 1.37, 1.18, 0.22, 0.11, 0.28, -0.64, -0.39, -1.77, -1.61, 0.47, 0.77, -0.27, -1.19,
    -0.25, 1.04, -0.16, 0.42, 0.29, 0.10, 1.04, 0.43, -0.67, 0.41, -0.62, -1.49, 1.46, -2.77,
    2.09, 0.88, -0.36, -0.71, -0.62, 1.34, -0.78, -0.15, 2.69, 0.92, 1.68, -0.12, 0.34, 0.74,
    1.72, 1.24, 0.23, 0.76, 0.87, -1.52, 0.63, -0.56, 0.83, 0.31, -0.18, 0.99, -1.01, 0.58,
    1.21, -1.51, 0.65, 0.35, -0.37, -0.50, -0.73, 0.63, 0.33, 1.56, -0.98, 0.85, 0.56, -1.07,
    1.47, 1.44, 1.91, 0.24, 1.34, 0.99, 1.27, 0.11, 0.22, -0.25, 0.35, -0.03, -0.56, -0.79,
    2.41, -0.45, -0.44, 0.07, 0.64, 0.69, 0.10, -0.28];

gam = 0.9;
n = length(X)

function mu = mu_hat(X)
    mu = sum(X) / length(X);
endfunction

function s2 = S_2(X)
    s2 = sum((X - mu_hat(X)) .^ 2)/(length(X) - 1);
endfunction

function mu = mu_hat_low(X, gam)
    n = length(X);
    mu = mu_hat(X) + sqrt(S_2(X) / n) * tinv([(1 - gam)/2], n - 1);
endfunction

function mu = mu_hat_high(X, gam)
    n = length(X);
    mu = mu_hat(X) + sqrt(S_2(X) / n) * tinv([(1 + gam)/2], n - 1);
endfunction

function s2 = S_2_low(X, gam)
    n = length(X);
    s2 = S_2(X) * sqrt((n - 1)/chi2inv([(1 + gam)/2], n - 1));
endfunction

function s2 = S_2_high(X, gam)
    n = length(X);
    s2 = S_2(X) * sqrt((n - 1)/chi2inv([(1 - gam)/2], n - 1));
endfunction
```

```
mu_hat(X)
S_2(X)
mu_hat_low(X, gam)
mu_hat_high(X, gam)
S_2_low(X, gam)
S_2_high(X, gam)

N = zeros(1, n);
y_mu_hat = zeros(1, n);
y_mu_hat_n = zeros(1, n);
y_mu_hat_low = zeros(1, n);
y_mu_hat_high = zeros(1, n);
z_S_2 = zeros(1, n);
z_S_2_n = zeros(1, n);
z_S_2_low = zeros(1, n);
z_S_2_high = zeros(1, n);
for i = 1:n
    Xn = X(1:i);
    N(1, i) = i;
    y_mu_hat(1, i) = mu_hat(X);
    y_mu_hat_n(1, i) = mu_hat(Xn);
    y_mu_hat_low(1, i) = mu_hat_low(Xn, gam);
    y_mu_hat_high(1, i) = mu_hat_high(Xn, gam);
    z_S_2(1, i) = S_2(X);
    z_S_2_n(1, i) = S_2(Xn);
    z_S_2_low(1, i) = S_2_low(Xn, gam);
    z_S_2_high(1, i) = S_2_high(Xn, gam);
endfor;

skip_n = 6;
hold on
plot(N(1, skip_n:n), y_mu_hat(1, skip_n:n))
plot(N(1, skip_n:n), y_mu_hat_n(1, skip_n:n))
plot(N(1, skip_n:n), y_mu_hat_low(1, skip_n:n))
plot(N(1, skip_n:n), y_mu_hat_high(1, skip_n:n))
hold off
pause;

hold on
plot(N(1, skip_n:n), z_S_2(1, skip_n:n))
plot(N(1, skip_n:n), z_S_2_n(1, skip_n:n))
plot(N(1, skip_n:n), z_S_2_low(1, skip_n:n))
plot(N(1, skip_n:n), z_S_2_high(1, skip_n:n))
hold off
pause;
```

Заключение

В ходе работы были приобретены навыки предварительной обработки исходных данных, построения доверительных интервалов для различных параметров распределения по выборке.

Все расчёты были проведены с использованием ПО «GNU Octave».