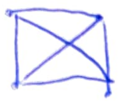
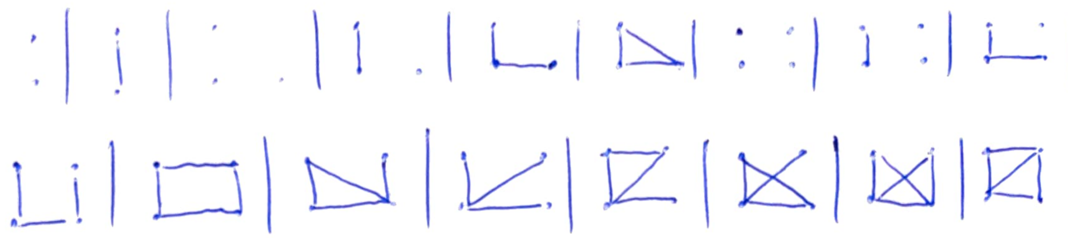
Ejercicios Grafos - Parte 1

3.1

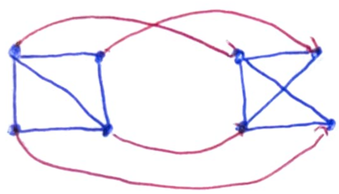


$\Rightarrow$

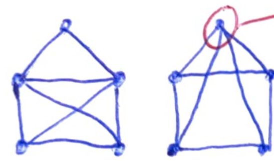


3.2

Buscamos biyecciones

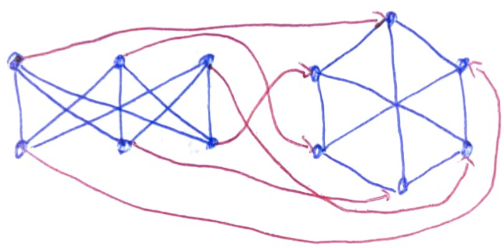


Son isomorfos

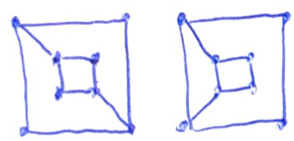


Grado 4

No son isomorfos

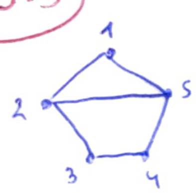


Son isomorfos

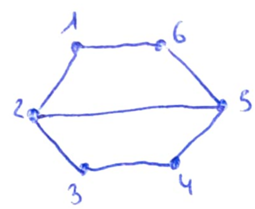


No son isomorfos

3.3

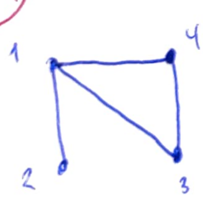


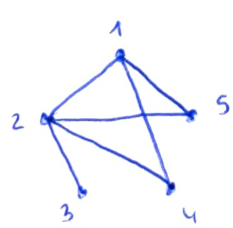
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



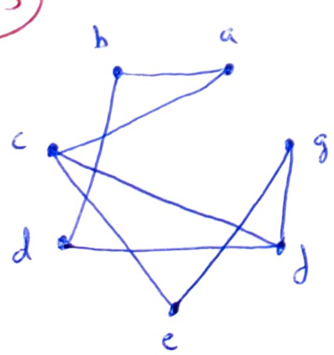
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4





3.5



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Fuera de la diagonal principal hay 0's. Por lo tanto no es posible.

3.6

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 2l$$: Por tanto el número de vértices de grado impar tiene que ser par.

$3 \cdot 2 = 6$, $5 \cdot 2 = 10$

3.7

n vértices → n-1 lados máximo, o los dos mismos

$0, 1, 2, \dots, n-1$ → Tiene que haber dos repetidos, con el mismo número de grados "Principio del palomar"

3.8

K_3 = 

1 → 1	1 → 2	1 → 1	1 → 3	1 → 3	1 → 2
2 → 2	2 → 1	2 → 3	2 → 2	2 → 1	2 → 3
3 → 3	3 → 3	3 → 2	3 → 1	3 → 2	3 → 1

$Aut(K_n) = n!$

3.9

5 5 5 5 5   5 5 5 5 5   5 5 5 5 5   5 5 5 5 5   5 5 5 5 5

Usamos Havel-Hakimi

$\cancel{24}$ 19 · 5   44444 → 15 · 4   33333 → 13 · 3   222 →
$\cancel{18}$ 13 · 5   10 · 4   10 · 4   9 · 3   9 · 3   6 · 2
$\cancel{12}$ 7 · 5   15 · 4   5 · 4   13 · 3   5 · 3   9 · 2
$\cancel{6}$ 5   20 · 4   17 · 3   3   12 · 2

→ 9 · 2   111 → ~~[illegible]~~
6 · 2 $\cancel{8}$11111   9 · 1 → Los 9 ~~[illegible]~~ unos, acabarán en 0,
3 · 2   7 · 1   por lo tanto es gráfica y <u>si existe</u>

3.10

Grafo completo → $l = \cancel{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n(n-1)}{2}$

$595 = \frac{n(n-1)}{2}$ → $1190 = n(n-1)$ → $1190 = n^2 - n$

$n^2 - n = 1190 = \begin{cases} 35 \rightarrow 35 \text{ vértices, } \underline{\text{si existe}} \\ -34 \rightarrow \text{El negativo no} \end{cases}$

3.12

$$\ell \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \to \binom{n}{2} \ge \ell = 1000 \to n = 46 \to \binom{46}{2} = 1035 \text{ lados}$$

Le quitamos 35 lados y ya lo tendríamos

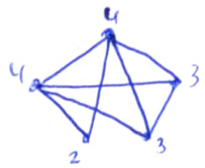
3.13

Como sería un grafo camino serían 1001 vértices.

↳ 

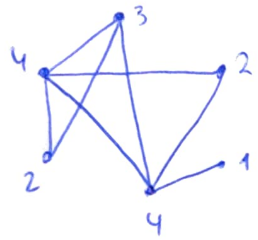
3.14

1) 2,4,4,3,3 → 1,0,3,2,2 → 0,0,0,1,1 → Sí es gráfica



2) 2,2,3,2,2,3 → 1,1,0,1,2,3 → 0,0,0,0,2,0 → No se puede

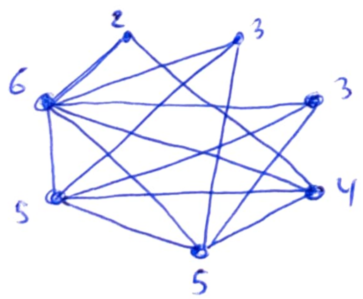
3) 4,4,3,2,2,1 → 0,3,2,1,1,1 → 0,0,1,0,0,1 → Sí se puede, es gráfica



4) 7,6,5,4,3,3,2 → No es una sucesión gráfica

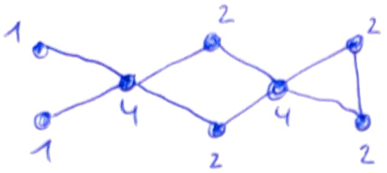
5) 6,5,5,4,3,3,2 → 0,4,4,3,2,2,1 → 0,0,3,2,1,1,1 → 0,0,0,1,0,0,1

Es gráfica



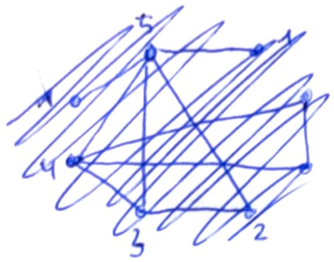
6) 6,6,5,4,3,3,1 → 0,5,4,3,2,2,1 → 0,0,3,2,1,1,0 → 0,0,0,1,0,0 → No se puede.

7) 1,4,1,2,2,4,2,2 -> 1,0,1,1,1,3,1,2 -> 0,0,0,1,1,0,1,1 -> Si es gráfica



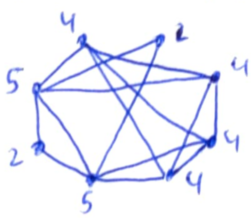
8) 1,5,1,4,2,4,2,3 -> 1,0,1,3,1,3,1,2 -> 0,0,1,0,1,2,1,1 -> 0,0,1,0,0,0,0,0 -> ~~No se pu~~

No se puede

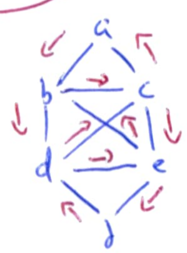


9) 5,5,4,4,4,4,2,2 -> 0,4,3,3,3,3,2,2 -> 0,0,2,2,2,2,2,2 -> 0,0,0,1,1,2,2,2 ->

-> 0,0,0,0,0,1,1,1,1 -> Si es gráfica

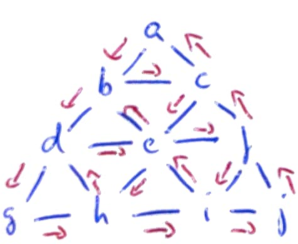


3.15



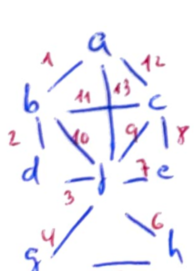
$\underbrace{a,b,d,e,f,d,c,e,b,c,a}$

Circuito de Euler



$\underbrace{a,b,d,g,h,d,e,h,i,j,f,i,e,f,c,e,b,c,a}$

Circuito Euler



$\underbrace{a,b,d,f,g,h,f,e,c,f,b,c,a,f}$

Circuito de Euler

3.16

K_n será un circuito de Euler si, y solo si el grado de V_i es igual a $n-1$ donde $i \in \{1,2,\dots,n\}$ y n debe ser un número par $(n=2m)$

3.17

Como $K_{2,2} \to$  4 lados y $K_{2,3}$  6 lados

Se deduce que el número de lados es $n \cdot m$. $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 3 = 6$.

3.18

Como para que sea un circuito de Euler, tiene que incidir en los vértices un número par de lados, para $K_{m,n}$, será un circuito de Euler, siempre que m sea par.

3.20

$$\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 \to \frac{n(n-1)-(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(n-1)(n-(n-2))}{2}$$

$\Rightarrow (n-1) \geq 2 \to$ $\boxed{\text{Se cumple cuando } n \geq 3}$ Demostrado

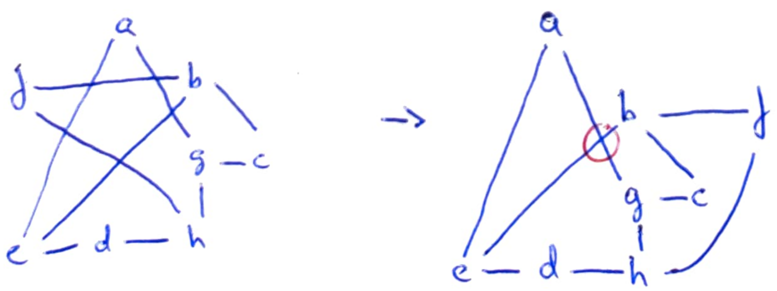
3.21

$K_{m,n}$ $m \cdot n$ $v = m+n$

$$\left.\begin{array}{l} m+n \geq n+m \Rightarrow m \geq n \\ n+n \geq n+m \Rightarrow n \geq m \end{array}\right\} m=n$$

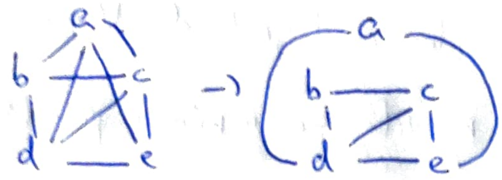
Cuando $m+n$ = par.

3.22

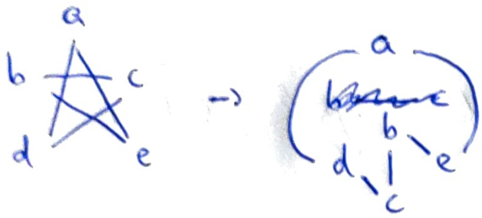


No es plano

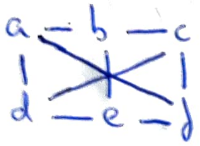
3.23



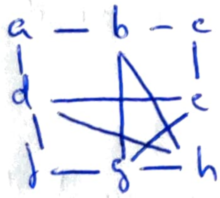
Sí es plano



Sí es plano



→ No es plano



→ No es plano

3.24

Esto es debido a que tanto el K_4 como el K_3 y menores son planos

K_4

K_3

3.25

Debido al Teorema de que G es un grafo plano con $n \geq 3$ vértices, entonces lados $\leq 3n - 6$ para ser plano

5 vértices → lados $\leq 3 \cdot 5 - 6$ → lados ≤ 9.

Podemos tener vértices con grado 2, que mientras no haya más de 9 en el grafo será plano

3.26

Plano, conexo, $v = 9$, grados$(v) = 5,4,4,3,3,3,2,2,2$

Lados → $\sum gr(v_i) = 2\ell \Rightarrow 28 \rightarrow \boxed{\ell = 14}$

Caras → $v + c - \ell = 2 \Rightarrow c = 2 + \ell - v \Rightarrow c = 16 - 9 = \boxed{7 \text{ caras}}$