数学建模

作者：陶理

中三（2）班 28号

上海市实验学校

日期：2022 年 12 月 4 日

1 第一题

1.1 问题分析

分析方式

编程：Python语言

所需第三方库：numpy,matplotlib

将题目所给的x、y数据转化为python中的list数据类型（即数组），通过plotfit函数进行多项式拟合。

判断耦合程度

思路来源：方差和标准差

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2, s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2} \qquad (\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)$$

记原本的数值是x_i对应$y_i(1 \leqslant x \leqslant n, x \in \mathbb{Z}^+)$

记拟合函数为$f(x)$，使用拟合函数预测的数值为$p_i = f(a_i)$ $(1 \leqslant x \leqslant n, x \in \mathbb{Z}^+)$

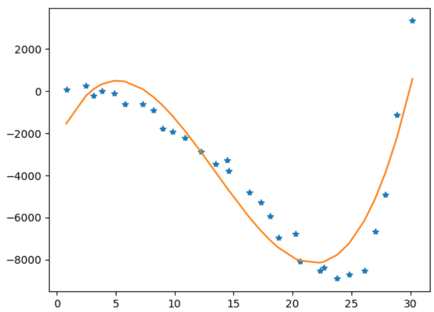
通过p_i和b_i之间的误差可以判断拟合函数f(x)和原曲线的耦合程度，误差越小说明耦合程度越好。

$$\Delta^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(p_i - b_i)^2, \Delta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(p_i - b_i)^2}$$

1.2 拟合结果

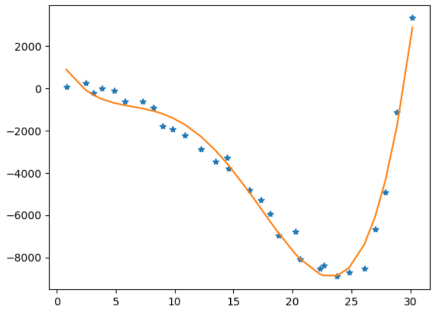
三次：$y = 3.734x^3 - 150.8x^2 + 1251x - 2447$

$\Delta_3 = 1122.1100$



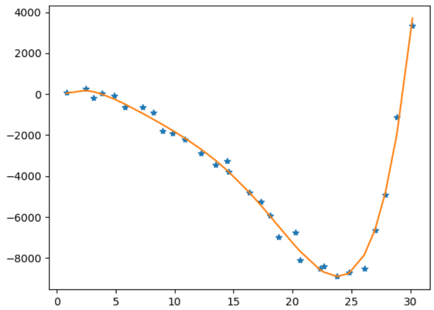
四次：$y = 0.2556x^4 - 12.13x^3 + 169.2x^2 - 1041x + 1633$

$\Delta_4 = 502.2787$



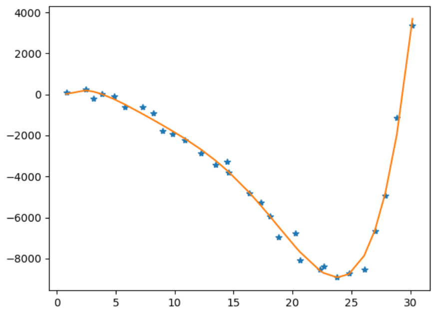
五次：$y = 0.01262x^5 - 0.7224x^4 + 15.01x^3 - 152.9x^2 - 464.9x - 236.6$

$\Delta_5 = 322.8720$

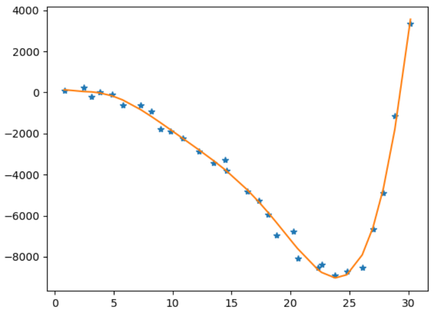


六次：$y = -5.661 \times 10^{-5}x^6 + 0.01787x^5 - 0.9075x^4 + 18.09x^3 - 177.4x^2 + 545.3x - 309.3$

$\Delta_6 = 319.3721$



七次：$y=-5.622\times10^{-5}x^7+0.006036x^6-0.2443x^5+4.778x^4-47.04x^3+198.1x^2-382x+331.3$
$\Delta_7=498.2919$



1.3 对比分析

误差排序：$\Delta_6<\Delta_5<\Delta_7<\Delta_4<\Delta_3$ 在所记录的5个不同次数的多项式中，六次多项式和五次多项式的拟合效果较好，因为误差较小。

2 第二题

2.1 问题分析

题目：

小旭家现有1千克馄饨/饺子馅，小旭准备自己动手包一些馄饨/饺子，他想知道需要准备多少馄饨/饺子皮。试建立数学模型，讨论对于肉馅或菜肉馅、对于方形的馄饨皮或圆形的饺子皮，1千克馅料分别需要多少面皮可以恰好把所有馅料做成馄饨/饺子?

条件：

- 有1kg的馄饨/饺子馅
- 馄饨皮是方的，饺子皮是圆的
- 馅有两种选择：肉馅或菜肉馅

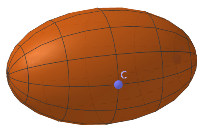
分析：

问1kg馅料分别需要多少面皮可以恰好把所有馅料做成馄饨/饺子，其实可以等效看作1kg的馅料可以包多少馄饨/饺子。而这个问题可以最终看作一个饺子能包多少质量的馅料，即一张面皮对应的馅料的质量。

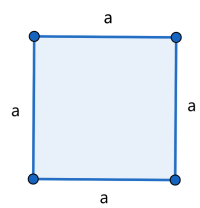
根据化简后问题"一张面皮对应的馅料的质量"以及物理公式$m = \rho V$,需要知道馅料的密度以及一张面皮中能放多少体积的馅料。而一张面皮中能放多少体积的馅料取决于面皮的大小，所以需要设定面皮的边长或者直径（或半径）。

2.2 建立模型

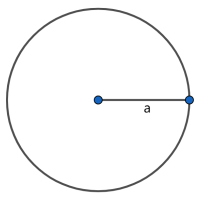
将馅料看作一个长径为$r_1\ cm$,两条短径相同均为$r_2\ cm$的椭球体（如下图所示）。



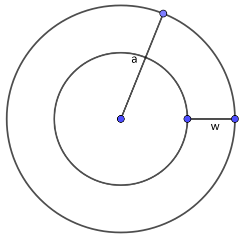
将馄饨皮近似看成以$a\ cm$为边长的正方形（如图所示）



将饺子皮近似看成以$a\ cm$为半径的圆



需要考虑到饺子/馄饨皮并不是完全用于包裹馅料，还需要有部分用来粘合和包外层的褶皱。对于饺子皮而言，可以看作有一圈周围的圆环用于粘合，实际包裹馅料的面积应减掉圆环部分。通过观察，周围褶皱部分宽度$w\ cm$大概为半径的$\frac{1}{3}$到$\frac{1}{2}$左右，此处折中考虑，即为$w=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2}a=\frac{5}{12}a\ cm$



则馅料椭球体的长径r_1约为$a-w=\frac{7}{12}a\ cm$，两条短径相等，r_2约为$\frac{r_1}{2}=\frac{a-w}{2}=\frac{\frac{7}{12}a}{2}=\frac{7}{24}a\ cm$，根据椭球体体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi abc$，则馅料的体积约为$V_{fill}=\frac{4}{3}\pi r_1 r_2^2=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{7}{12}a\cdot(\frac{7}{24}a)^2=\frac{343}{5184}\pi a^3\ cm^3$

经调查，$\rho_{fat}=0.74g/cm^3, \rho_{muscle}=1.12g/cm^3$

一般做馄饨/饺子的肉馅中肥肉（主体为脂肪）和瘦肉（主体为肌肉）的比例约为3:7，所以$\rho_{fill}=\frac{3\rho_{fat}+7\rho_{muscle}}{10}=1.006g/cm^3$。又饺子馅中需要加酱油等调料和水，所以将馅料的密度近似看为水的密度，方便计算，即$\rho_{fill}\approx\rho_{\mathrm{H_2O}}=1g/cm^3$

所以$m_{fill}=p_{fill}V_{fill}=1g/cm^3\cdot\frac{343}{5184}\pi a^3\ cm^3=\frac{343}{5184}\pi a^3\ g$

所以$num_{Wonton}=\lfloor 1kg/m_{fill}\rfloor=\lfloor\frac{5184000}{343\pi a^3}\rfloor$

3 第三题

3.1 分析问题

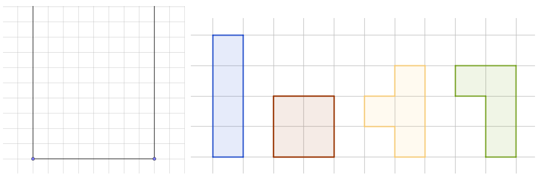
题目

俄罗斯方块是一款家喻户晓的电子游戏，小数对其深感兴趣，将其简化规则如下：

- 游戏中，一共有四种基础方块
- 每一轮游戏中，给定的基础方块的种类和数目一定，但摆放方块的先后顺序锁定，不可更改
- 游戏提供的“方格容器”宽度为八个单位长度，高度无限每一个基础方块都可以进行自由旋转、翻转
- 玩家的最终目的是使用最小的高度完成所有方块的摆放
- 得到摆放完整的一行并不可以消除方块，但可以得到额外加分

1. 根据题目描述，给出一种界定方块摆放有效率的方式(即这个游戏的分数计算方式),并用数学语言进行描述。

2. 若某一局游戏中，方块下落的顺序已提前知晓如图2所示，试找到赢得这场比赛的最佳策略并用文字语言、数学语言或者图表描述你的策略.并根据你提供的计分方式得出结果。



3.1.1 第一小问

根据“玩家的最终目的是使用最小的高度完成所有方块的摆放”，可以看出，层数越高分数应该越低。根据“得到摆放完整的一行并不可以消除方块，但可以得到额外加分”，可以看出，分数计算方式应该考虑到完整的一行加分。其余条件与分数无关。

假设分数函数为$F(x) = S(x) + Ex(x)$,其中$S(x)$为高度所对应的分数,$Ex(x)$为摆放完整的行所对应的加分。则$\lim_{x\to\infty} S(x) = 0$

既然对于每一局，给定的基础方块的种类和数目一定，所以覆盖的总面积应该是已知的。将基础方块进行编号，“1×4”的蓝色方块标记为1号，“2×2”的橙色方块标记为2号，凸状的黄色方块标记为3号，类似“7”的绿色方块标记为4号。记一共出现i号方块cnt_i次($1 \leqslant i \leqslant 4, i \in \mathbb{Z}$)，则方块覆盖面积$A = \sum_{i=1}^{4} 4cnt_i = 4\sum_{i=1}^{4} cnt_i$。

摆放的理论最大高度为$H_{max} = 4cnt_1 + 2cnt_2 + 3cnt_3 + 3cnt_4 = cnt_1 - cnt_2 + 3\sum_{i=1}^{4} cnt_i$.因为“方格容器”宽度为8个单位长度，所以摆放的理论最小高度为$H_{min} = \lceil \frac{A}{8} \rceil = \lceil \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} cnt_i \rceil$.所以摆放的高度范围为:$\lceil \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} cnt_i \rceil \leqslant H \leqslant cnt_1 - cnt_2 + 3\sum_{i=1}^{4} cnt_i$

设摆放的实际最小高度为H_F_{min}，则$H_F_{min} \geqslant H_{max}$