

数学建模

作者：陶理

中三（2）班 28号

上海市实验学校

日期：2022 年 12 月 4 日

1 第一题

1.1 问题分析

分析方式

编程：Python语言

所需第三方库：numpy,matplotlib

将题目所给的x、y数据转化为python中的list数据类型（即数组），通过plotfit函数进行多项式拟合。

判断耦合程度

思路来源：方差和标准差

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2, s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2} \quad (\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i)$$

记原本的数值是 x_i 对应 y_i ($1 \leq x \leq n, x \in \mathbb{Z}^+$)

记拟合函数为 $f(x)$ ，使用拟合函数预测的数值为 $p_i = f(a_i)$ ($1 \leq x \leq n, x \in \mathbb{Z}^+$)

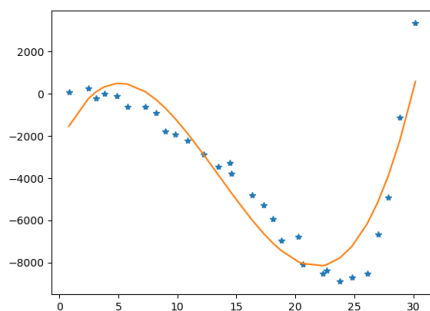
通过 p_i 和 b_i 之间的误差可以判断拟合函数 $f(x)$ 和原曲线的耦合程度，误差越小说明耦合程度越好。

$$\Delta^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (p_i - b_i)^2, \Delta = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (p_i - b_i)^2}$$

1.2 拟合结果

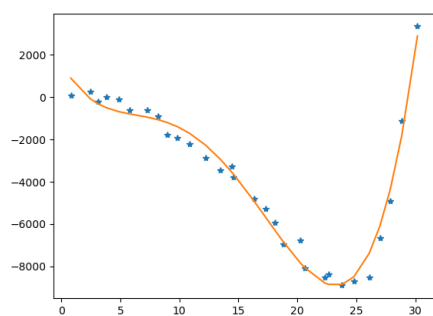
三次： $y = 3.734x^3 - 150.8x^2 + 1251x - 2447$

$\Delta_3 = 1122.1100$



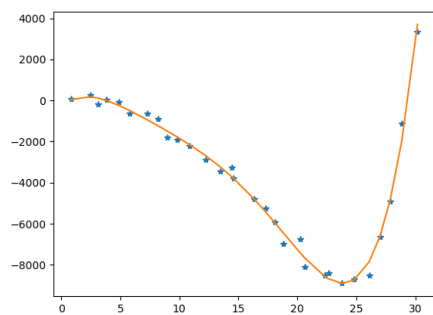
四次: $y = 0.2556x^4 - 12.13x^3 + 169.2x^2 - 1041x + 1633$

$\Delta_4 = 502.2787$



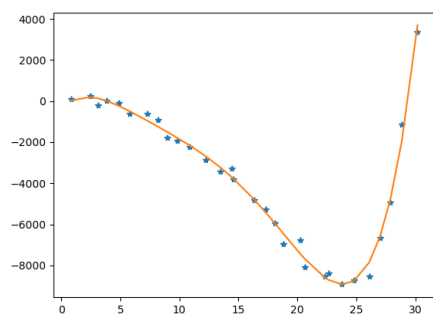
五次: $y = 0.01262x^5 - 0.7224x^4 + 15.01x^3 - 152.9x^2 - 464.9x - 236.6$

$\Delta_5 = 322.8720$

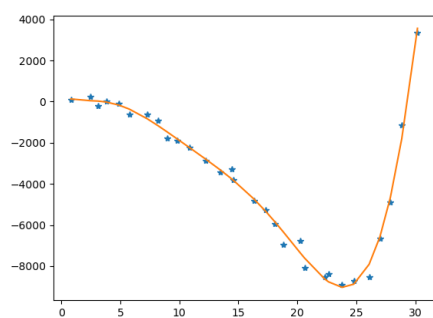


六次: $y = -5.661 \times 10^{-5}x^6 + 0.01787x^5 - 0.9075x^4 + 18.09x^3 - 177.4x^2 + 545.3x - 309.3$

$\Delta_6 = 319.3721$



七次: $y = -5.622 \times 10^{-5}x^7 + 0.006036x^6 - 0.2443x^5 + 4.778x^4 - 47.04x^3 + 198.1x^2 - 382x + 331.3$
 $\Delta_7 = 498.2919$



1.3 对比分析

误差排序: $\Delta_6 < \Delta_5 < \Delta_7 < \Delta_4 < \Delta_3$ 在所记录的5个不同次数的多项式中, 六次多项式和五次多项式的拟合效果较好, 因为误差较小。

2 第二题

2.1 问题分析

题目：

小旭家现有1千克馄饨/饺子馅，小旭准备自己动手包一些馄饨/饺子，他想知道需要准备多少馄饨/饺子皮。试建立数学模型，讨论对于肉馅或菜肉馅、对于方形的馄饨皮或圆形的饺子皮，1千克馅料分别需要多少面皮可以恰好把所有馅料做成馄饨/饺子？

条件：

- 有1kg的馄饨/饺子馅
- 馄饨皮是方的，饺子皮是圆的
- 馅有两种选择：肉馅或菜肉馅

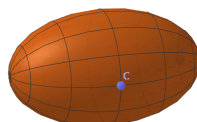
分析：

问1kg馅料分别需要多少面皮可以恰好把所有馅料做成馄饨/饺子，其实可以等效看作1kg的馅料可以包多少馄饨/饺子。而这个问题可以最终看作一个饺子能包多少质量的馅料，即一张面皮对应的馅料的质量。

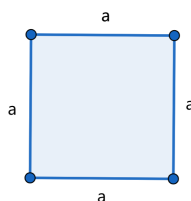
根据化简后问题“一张面皮对应的馅料的质量”以及物理公式 $m = \rho V$, 需要知道馅料的密度以及一张面皮中能放多少体积的馅料。而一张面皮中能放多少体积的馅料取决于面皮的大小，所以需要设定面皮的边长或者直径（或半径）。

2.2 建立模型

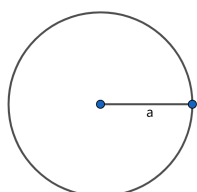
将馅料看作一个椭球体（如下图所示）。



将馄饨皮近似看成以a为边长的正方形（如图所示）



将饺子皮近似看成以a为半径的圆



需要考虑到饺子/馄饨皮并不是完全用于包裹馅料，还需要有部分用来粘合和包外层的褶皱

3 第三题

3.1 分析问题

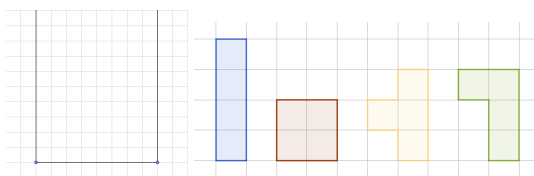
题目

俄罗斯方块是一款家喻户晓的电子游戏，小数对其深感兴趣，将其简化规则如下：

- 游戏中，一共有四种基础方块
- 每一轮游戏中，给定的基础方块的种类和数目一定，但摆放方块的先后顺序锁定，不可更改
- 游戏提供的“方格容器”宽度为八个单位长度，高度无限每一个基础方块都可以进行自由旋转、翻转
- 玩家的最终目的是使用最小的高度完成所有方块的摆放
- 得到摆放完整的一行并不可以消除方块，但可以得到额外加分

1. 根据题目描述，给出一种界定方块摆放有效率的方式(即这个游戏的分数计算方式),并用数学语言进行描述。

2. 若某一局游戏中，方块下落的顺序已提前知晓如图2所示，试找到赢得这场比赛的最佳策略并用文字语言、数学语言或者图表描述你的策略.并根据你提供的计分方式得出结果。



3.1.1 第一小问

根据“玩家的最终目的是使用最小的高度完成所有方块的摆放”，可以看出，层数越高分数应该越低。根据“得到摆放完整的一行并不可以消除方块，但可以得到额外加分”，可以看出，分数计算方式应该考虑到完整的一行加分。其余条件与分数无关。

假设分数函数为 $F(x) = S(x) + Ex(x)$, 其中 $S(x)$ 为高度所对应的分数, $Ex(x)$ 为摆放完整的行所对应的加分。则 $\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = 0$

既然对于每一局，给定的基础方块的种类和数目一定，所以覆盖的总面积应该是已知的。将基础方块进行编号，“ 1×4 ”的蓝色方块标记为1号，“ 2×2 ”的橙色方块标记为2号，凸状的黄色方块标记为3号，类似“7”的绿色方块标记为4号。记一共出现 i 号方块 cnt_i 次 ($1 \leq i \leq 4, i \in \mathbb{Z}$)，则方块覆盖面积 $A = \sum_{i=1}^4 4cnt_i = 4 \sum_{i=1}^4 cnt_i$ 。

摆放的理论最高高度为 $H_{max} = 4cnt_1 + 2cnt_2 + 3cnt_3 + 3cnt_4 = 3 \sum_{i=1}^4 cnt_i + cnt_1 - cnt_2$ 。因为“方格容器”宽度为8个单位长度，所以摆放的理论最小高度为 $H_{min} = \lceil \frac{A}{8} \rceil = \lceil \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 cnt_i \rceil$ 。所以摆放的高度范围：

$$3 \sum_{i=1}^4 cnt_i + cnt_1 - cnt_2 \leq H \leq \lceil \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 cnt_i \rceil$$