

# Тема

Оптимизация транспортного потока при заданных пунктах отправления и назначения всех участников движения

## 1 Введение

## 2 Постановка задачи

Пусть задан граф  $G = (V, E)$ , описывающий некоторую *дорожную сеть*. Предположим, что имеется  $n$  участников движения по этому графу. Каждый участник  $i$  имеет точки отправления  $A_i \in V$  и точки прибытия  $B_i \in V$ . Пусть множество  $P_i$  - есть множество всех простых путей из  $A_i$  в  $B_i$ . Пусть декартово произведение  $P = \prod_{i=1}^n P_i$  есть множество всех возможных комбинаций путей участников. Элементы этого множества назовем *комбинацией путей*. Пусть известно, что при комбинации путей участников  $\mathbf{p} \in P$   $i$ -ый участник затрачивает  $T_i(\mathbf{p})$  времени на передвижение. Пару  $(P, \{T_i\}_{i=1}^n)$  назовем *некооперативным передвижением* на графе  $G$ . Функции  $T_i : P \rightarrow R_+$  назовем *функцией временных затрат*.

Необходимо найти такую комбинацию путей участников  $\mathbf{p}^*$ , что суммарные временные затраты на передвижение - минимальны

$$\sum_{i=1}^n T_i(\mathbf{p}^*) = \min_{\mathbf{p} \in P} \sum_{i=1}^n T_i(\mathbf{p})$$

Комбинацию путей  $\mathbf{p}^*$  будем называть *оптимальной*, а суммарные временные затраты  $\sum_{i=1}^n T_i(\mathbf{p}^*)$  *оптимальным временем передвижения участников*

### 3 Поиск функции временных затрат

Сложность численного решения задачи поиска оптимальной комбинации путей во многом зависит от аналитического задания функций  $T_i(\mathbf{p})$ . Интуитивно вполне очевидно, что на временные затраты при проезде по пути  $\mathbf{p}_i$  в первую очередь влияют временные затраты на ребрах, составляющих маршрут  $\mathbf{p}_i$ . Поэтому без ограничения общности считаем, что функции временных затрат есть суммарные временные затраты на каждом ребре этого пути

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in \mathbf{p}_i} \bar{\tau}_e(\mathbf{p}),$$

где функции  $\bar{\tau}_e(\mathbf{p})$  есть временные затраты на ребре  $e$  при комбинации путей  $\mathbf{p}$ . Поскольку подразумевается, что передвижение участников происходит непрерывно во времени, то, можно считать, что временные затраты на ребре  $e$  есть усредненные временные затраты в течении времени движения

$$\bar{\tau}_e(\mathbf{p}) = \int_0^\infty \tau_e(\mathbf{p}, t) dt,$$

где функции  $\tau_e(\mathbf{p}, t)$  представляют из себя затраченное время на передвижение по ребру  $e$  в момент времени  $t$  при комбинации путей  $\mathbf{p}$ . Таким образом, без ограничения общности считаем, что

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in \mathbf{p}_i} \int_0^\infty \tau_e(\mathbf{p}, t) dt$$

Далее для простоты изложения будем опускать зависимость функций от выбранной комбинации  $\mathbf{p}$ .

Предположим, что у каждого участника движения имеется микроскопическая характеристика скорости движения  $v_i(t)$ , которая ограничена некоторой константой  $v_{max}$  - максимальной скоростью передвижения. В случае постоянных скоростей интуитивно очевидно, что вклад каждого участника, проехавшего по ребру  $e$  есть  $\frac{l_e}{v_i}$ , где  $l_e$  - длина ребра  $e$ . Обобщим это предположение на случай непостоянных скоростей:

$$\tau_e(t) = \sum_{j=1}^n \theta_{e,j}(t) \frac{l_e}{v_j(t)},$$

где

$$\theta_{e,j}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-ый участник движется по ребру } e \text{ в момент времени } t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Таким образом, введя микроскопическую характеристику скорости движения  $v_i(t)$  получим:

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in \mathbf{p}_i} l_e \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \theta_{e,j}(t) \frac{1}{v_j(t)} dt$$

## Пример 1

Предположим, что задана некоторая зависимость скорости участников  $v_j(t)$  от загрузки на ребре  $n_e(t) = \sum_{j=1}^n \theta_{e,j}(t)$ .

$$v_j(t) = \sum_{e \in \mathbf{p}_i} v(n_e(t)) \theta_{e,j}(t)$$

В этом случае временные затраты имеют вид

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in \mathbf{p}_i} l_e \int_0^\infty n_e(t) \frac{1}{v(n_e(t))} dt$$

Такую модель скорости будем в дальнейшем называть *макроскопической моделью*.

Простейшим примером такой модели является модель постоянной суммарной скорости

$$v(n_e(t)) = \frac{v_{max}}{n_e(t)},$$

или

$$T_i(\mathbf{p}) = v_{max} \sum_{e \in \mathbf{p}_i} l_e \int_0^\infty n_e^2(t) dt$$