Оптимизация транспортного потока при заданных пунктах отправления и назначения всех участников движения

Пехтерев С.И. 610 группа
Научный руководитель: д.ф.-м.н. Васенин В.А.

16 мая 2022

Основные определения

- *Дорожной сетью* назовем тройку $G = (V, E, l)$, где (V, E) — ориентированный граф с длинами ребер $l : E \to \mathbb{R}_{>0}$.
- Предположим, что имеется n участников с заданными точками отправления $A_i \in V$ и прибытия $B_i \in V$. Пусть множество P_i есть множество всех простых путей из A_i в B_i. Элемент декартового произведения $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$ назовем *комбинацией путей*.
- Пусть известно, что при комбинации путей участников $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in P$ i-ый участник затрачивает $T_i(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ времени на свой путь. Функции T_i назовем *функциями временных затрат* участника i.

Некооперативное прокладывание пути

Некооперативным прокладыванием пути в дорожной сети G назовем пятерку $F = (n, G, \{A_i\}_{i=1}^n, \{B_i\}_{i=1}^n, \{T_i\}_{i=1}^n)$.
Некооперативное прокладывание пути предполагает, что каждый участник стремится сократить собственные временные затраты выбором пути p_i, несмотря на временные затраты других участников.

Равновесие Нэша: ни одному из участников невыгодно изменение его маршрута.

Парадокс Браеса

Равновесие Нэша может не соответствовать оптимальному решению. Пусть из A в B отправляется 4 000 участников, а время проезда по ребру зависит от числа участников (метка на ребре).

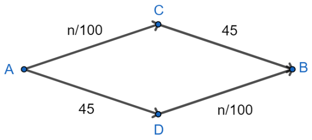

Рис.: Оптимальное некооперативное равновесие: 2 000 едут по ACB, остальные по ADB. Затраты каждого $\frac{2000}{100} + 45 = 65$.

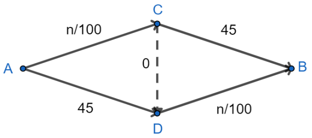

Рис.: Добавим ребро CD. Неоптимальное некооперативное равновесие: все едут по ACDB. Затраты: 80.

Кооперативное прокладывание пути

Введем некоторую функцию $\Phi(\mathbf{p}) = \phi(T_1(\mathbf{p}), \ldots, T_n(\mathbf{p}))$, определенную на множестве всех возможных комбинаций путей P и отображающую его во множество действительных чисел. С помощью нее участники могут отслеживать, как влияет изменение их пути на общую картину движения. Такую функцию назовем *функцией стоимости*.

Для заданных некооперативного прокладывания пути F и функции стоимости Φ необходимо найти комбинацию путей $\mathbf{p}^*$ такую, что функция стоимости на ней минимальна, то есть

$$\Phi(\mathbf{p}^*) = \min_{\mathbf{p} \in P} \Phi(\mathbf{p}). \qquad (1)$$

Примеры функции затрат

1. $\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i(\mathbf{p})$ - средние временные затраты.
2. $\Phi(\mathbf{p}) = T_k(\mathbf{p})$ - приоритетные временные затраты.
3. $\Phi(\mathbf{p}) = \max\limits_{i=1,\dots,n} T_i(\mathbf{p})$ - максимальные временные затраты.

Проблемы практической интерпретации

1. Как задаются функции $T_i(\mathbf{p})$?
2. Как заложено взаимодействие участников в функциях $T_i(\mathbf{p})$?

Модель движения

Модель движения $v_i(\mathbf{p}, t)$ - положительная ограниченная функция, отделенная от нуля функция, для которой верно

$$\int\limits_{t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})}^{t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})} v_i(\mathbf{p}, t)dt = l_e, e \in p_i, i = 1, \dots, n.$$

$t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})$ - неизвестные функции моментов въезда на ребро e участником i.

Моделирование движения

Теорема

Для заданной модели движения $v_i(\boldsymbol{p}, t)$ *существует единственный набор функций* $t^{in}_{e,i}(\boldsymbol{p}), t^{out}_{e,i}(\boldsymbol{p}), T_i(\boldsymbol{p})$ *- моменты перехода между ребрами и время нахождения в пути участником* i *соответственно, для которых верно*

$$T_i(\boldsymbol{p}) = \sum_{e \in p_i} t^{out}_{e,i}(\boldsymbol{p}) - t^{in}_{e,i}(\boldsymbol{p}).$$

Поиск таких функций называется *моделированием движения.*

Проблемы практической интерпретации

1. ~~Как задаются функции $T_i(\mathbf{p})$~~?
2. ~~Как заложено взаимодействие участников в функциях $T_i(\mathbf{p})$~~?
3. Как задаются функции $v_i(\mathbf{p}, t)$?
4. Как заложено взаимодействие участников в функциях $v_i(\mathbf{p}, t)$?

Правила движения

Имеем некоторую информацию о текущем состоянии (скорости, положения на графе, ускорения и тд.) и правилах его изменения:

1. Тормозим, если впереди идущий слишком близко к нам.
2. Ускоряемся, если впереди идущий достаточно далеко от нас.
3. Не превышаем скорость.
4. Тормозим перед поворотом.

Значения функции $v_i(\mathbf{p}, t)$ могут быть посчитаны применением правил движения в момент моделирования.

Макроскопические модели движения

Все определяется количеством участников на текущем ребре (плотность потока):

$$v_i(\mathbf{p}, t) = \sum_{e \in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)), \;\; i = 1, \ldots, n,$$

где

$$\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{1}_{[t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}), t^{out}_{e,i}(\mathbf{p})]}(t), \;\; \text{— } \textit{индикатор проезда по ребру}$$

$$n_e(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{n} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) \;\; \text{— } \textit{количество участников на ребре}$$

Примеры макроскопических моделей движения

1. $v(k) = \frac{v_{max}}{k}$.
2. $v(k) = v_{max}(1 - \frac{k}{n})$.
3. Некоторая положительная последовательность $\{v(k)\}_{k=1}^{n}$.

Плюс: Малая сложность моделирования.
Минус: Плохо описывает реальное движение участников.

Поиск оптимальной комбинации путей в макроскопических моделях движения

Теорема

Пусть модель движения $v_i(\boldsymbol{p}, t)$ макроскопическая и функция затрат ϕ - линейная. Тогда задача поиска оптимальной комбинации путей есть задача смешанного целочисленного линейного программирования.

Сведение требует экспоненциального числа переменных.

Микроскопические модели движения

Микроскопическими называются модели движения, которые не являются макроскопическими. В таких моделях явно исследуется движение каждого автомобиля.
В качестве примера рассмотрим движение по бесконечному ребру. Пусть $x_i(t) \in [0, +\infty)$ — координаты участника i. Предположим, что скорости участников ограничены некоторой общей величиной v_{max}. Пусть в момент времени $t = 0$ выполняется $x_1(0) \leq x_2(0) \leq \cdots \leq x_n(0)$.

Модель пропорциональной скорости

Рассмотрим модель, в которой скорость участника пропорциональна расстоянию до впереди идущего участника. Положим $d_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n-1$.
Без ограничения общности считаем, что $d_i(0) < D$, $i = 1, \ldots, n-1$, где D — расстояние, на котором происходит взаимодействие участников. Иначе рассмотрим подпоследовательности участников, для которых выполняется это условие.
Модель движения, задающуюся уравнением

$$v_i(t) = \begin{cases} v_{max}, & i = n, \\ v_{max}\frac{d_i(t)}{D}, & i \neq n, \end{cases} \qquad (2)$$

назовем *моделью пропорциональной скорости.*

Модель пропорциональной скорости

Для поиска функций $x_i(t)$ достаточно рассмотреть систему дифференциальных уравнений

$$\dot{d}_i(t) = v_{i+1}(t) - v_i(t).$$

Плюс: Хорошо описывает реальное движение участников.
Минус: Решением такой системы является

$$d_{n-k}(\tau) = \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{d_{n-k+l}(0) - D}{l!} \tau^l e^{-\tau} \right) + D,$$

где $\tau = \frac{v_{max}}{D} t$. Поэтому решение уравнения $d_i(t) = d_0$, необходимое в процессе моделирования может быть вычисленно только приближенно.

Модель снижения скорости

Предположим, что существует некоторая величина c_n, которая отвечает за последовательное снижение скорости участников относительно их порядка:

$$v_{n-k} = v_{max} - c_n k,\ k = 0, \ldots, n-1.$$

Плюс: Малая сложность моделирования.
Минус: Не использует расстояние до впереди идущей машины.

Равновесие для микроскопических моделей

Возможность сведения микроскопических моделей к задаче MILP зависит от свойств модели. Поэтому в работе реализованы итерационные алгоритмы моделирования движения:

- поиск неподвижной точки;
- алгоритм последовательного добавления участников.

Некооперативная игра. Равновесие Нэша

- *Некооперативной игрой в нормальной форме* назовем тройку $\Gamma = (n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{H_i\}_{i=1}^n)$, где $n \in \mathbb{N}$ — количество участников игры, S_i — множество стратегий участника $i \in 1, \dots, n$, H_i — функция выигрыша участника i, определенная на множестве ситуаций $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ и отображающая его во множество действительных чисел.
- *Равновесием Нэша* некооперативной игры в нормальной форме $\Gamma = (n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{H_i\}_{i=1}^n)$ назовем стратегию $\mathbf{s}^* = (s_1^*, \dots, s_n^*) \in S$ такую, что ни одному игроку i невыгодно изменение своей стратегии с s_i^* на любую другую $s \in S_i$:

$$H_i(\mathbf{s}^*) \geq H_i\big((s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)\big), \ \forall s \in S_i, \ \ i = 1, \dots, n.$$

Кооперативное равновесие

- *Кооперативным равновесием* некооперативного прокладывания пути F и функции стоимости $\Phi(\mathbf{p})$ назовем комбинацию путей $\widetilde{\mathbf{p}} \in P$, которая является равновесием Нэша некооперативной игры $\widetilde{\Gamma} = (n, \{P_i\}_{i=1}^n, \{-\Phi\}_{i=1}^n)$. Множество всех кооперативных равновесий обозначим $\widetilde{P}$

Утверждение

Множество кооперативных равновесий $\widetilde{P}$ не пусто, причем оптимальная комбинация путей является таким равновесием, то есть $\mathbf{p}^* \in \widetilde{P}$.

Алгоритм поиска кооперативного равновесия

Считаем, что мы умеем решать задачу

$$\Phi(\mathbf{p}) \to \min_{p_i \in P_i}$$

Алгоритмы поиска кооперативного равновесия:

- *Поиск неподвижной точки*: последовательно решаем задачу оптимизации по каждому из путей, пока это возможно.
- *Алгоритм последовательного добавления участников*: будем добавлять в нашу задачу по одному участнику и сводить их к неподвижной точке.

Одинаковый приоритет участников

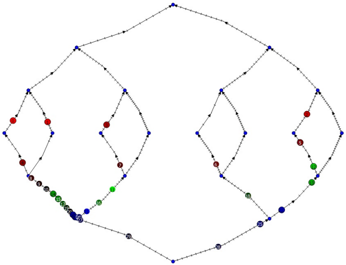

Рис.: Пример лучшего случая распределения путей участников в модели снижения скорости с средним временем прибытия $T = 1063$.

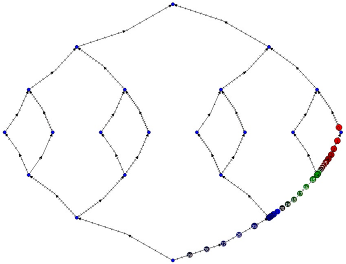

Рис.: Пример худшего случая распределения путей участников в модели снижения скорости с средним временем прибытия $T = 1576$.

Поиск путей для приоритетных участников

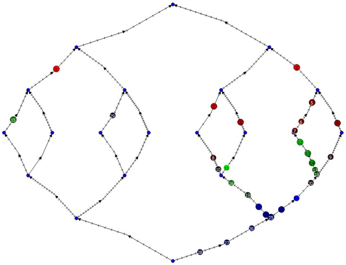

Рис.: Оптимальное кооперативное равновесие в модели снижения скорости с средним временем прибытия $T = 778.34$

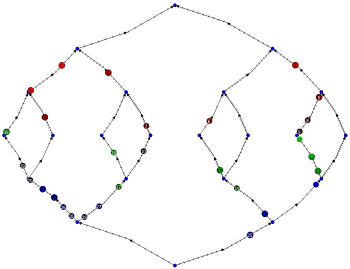

Рис.: Неоптимальное кооперативное равновесие в модели снижения скорости с средним временем прибытия $T = 950.37$

Выводы

- Предложено описание общего принципа взаимодействия участников, заключающегося в задании некоторой модели движения.
- Разработан и реализован алгоритм моделирования движения в соответствии с заданной моделью движения.
- Выделили класс моделей, для которого доказали возможность сведения к задаче смешанного целочисленного линейного программирования
- Разработаны и реализованы алгоритмы поиска корпоративного равновесия
- Разработоно ПО для моделирвоания, поиска оптимального пути и оптимальной комбинации путей в произвольной модели движения.