

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
специалиста

**ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА
ПРИ ЗАДАННЫХ ПУНКТАХ ОТПРАВЛЕНИЯ И НАЗНАЧЕНИЯ
ВСЕХ УЧАСТНИКОВ ДВИЖЕНИЯ**

Выполнил студент 610 группы
Пехтерев Станислав Игоревич

подпись студента

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Васенин Валерий Александрович

подпись научного руководителя

Москва
2022

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	4
2.1	Общая постановка задачи	4
2.2	Постановка задачи в терминах модели движения	5
3	Модели движения	9
3.1	Макроскопические модели	9
3.2	Микроскопические модели	12
4	Равновесие транспортных потоков	13

Тема

1 Введение

2 Постановка задачи

Для начала поставим общую задачу оптимизации транспортного потока.

2.1 Общая постановка задачи

Пусть задан ориентированный граф $G = (V, E)$, описывающий некоторую *дорожную сеть*. Предположим, что имеется n участников движения по этому графу. Каждый участник i имеет точки отправления $A_i \in V$ и точки прибытия $B_i \in V$. Пусть множество P_i есть множество всех простых путей из A_i в B_i . Пусть декартово произведение $P = \prod_{i=1}^n P_i$ есть множество всех возможных комбинаций путей участников. Элементы этого множества назовем *комбинацией путей*. Пусть известно, что при комбинации путей участников $\mathbf{p} \in P$ i -ый участник затрачивает $T_i(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}$ времени на путь. Функции T_i назовем *функциями временных затрат* участника i . *Некооперативным прокладыванием пути в ориентированном графе G* назовем пятерку $F = (n, G, \{A_i\}_{i=1}^n, \{B_i\}_{i=1}^n, \{T_i\}_{i=1}^n)$. Некооперативное прокладывание пути предполагает, что каждый участник стремится сократить собственные временные затраты путем выбора пути \mathbf{p}_i , невзирая на временные затраты других участников. Для того чтобы скооперировать участников, введем некоторую функцию $\Phi(\mathbf{p}) = \phi(T_1(\mathbf{p}), \dots, T_n(\mathbf{p}))$, определенную на множестве всех возможных комбинаций путей P и отображающая его в множество действительных чисел, посредством которой они могут отслеживать как влияет изменение их пути на общую картину движения. Такую функцию назовем *функцией стоимости*.

Для заданного некооперативного прокладывания пути F и функции стоимости Φ необходимо найти такую комбинацию путей \mathbf{p}^* , что функция стоимости минимальна на ней, то есть

$$\Phi(\mathbf{p}^*) = \min_{\mathbf{p} \in P} \Phi(\mathbf{p}). \quad (1)$$

Комбинацию путей \mathbf{p}^* будем называть *оптимальной*, а стоимость $\Phi(\mathbf{p}^*)$ *оптимальной стоимостью*.

Далее будем считать, что каждый участник имеет одинаковый приоритет в вопросе изменения своих временных затрат, то есть

$$\frac{\partial \phi}{\partial T_i} \equiv 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

или,

$$\phi(T_1, \dots, T_n) = \sum_{i=1}^n T_i. \quad (3)$$

2.2 Постановка задачи в терминах модели движения

Сложность численного решения задачи поиска оптимальной комбинации путей во многом зависит от аналитического задания функций $T_i(\mathbf{p})$. Далее приведем ряд ограничений на функции $T_i(\mathbf{p})$ нашей задачи, которую собираемся исследовать.

Будем считать, что на временные затраты при проезде по пути \mathbf{p}_i в первую очередь влияют временные затраты на ребрах, составляющих маршрут \mathbf{p}_i . Поэтому без ограничения общности считаем, что функции временных затрат есть суммарные временные затраты на каждом ребре этого пути.

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in E} \bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) = \sum_{e \in \mathbf{p}_i} \bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}),$$

где функции $\bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p})$ есть временные затраты i -ого участника на ребре e при комбинации путей \mathbf{p} .

Будем рассматривать те некооперативные прокладывания пути, в которых существует движение каждого участника для каждой комбинации путей \mathbf{p} , то есть в каждый момент времени $t \in \mathbb{R}$ известно положение участника на пути. Таким образом, будем считать, что для каждой комбинации путей \mathbf{p} и времени t известно присутствует ли участник i на ребре e , то есть известны функции

$$\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый участник движется по ребру } e \text{ в момент времени } t, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\sum_{e \in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t)$ принимает значение 1 пока участник не доедет до своей точки назначения B_i , и 0 после. Также будем считать, что достижение участником i вершины B_i наступает в момент $T_i(\mathbf{p})$, то есть

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in \mathbf{p}_i} \int_0^{T_i(\mathbf{p}) + \Delta t} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) dt, \forall \Delta t > 0. \quad (4)$$

Будем считать, что передвижение каждого участника является непрерывным и последовательным относительно графа G . Другими словами участник не может резко появиться и исчезнуть на несмежных ребрах, а также посещать пройденные ребра. Таким образом считаем, что функции $\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t)$ являются индикаторами некоторых интервалов $[t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})]$, которые описывают последовательное передвижение:

$$\begin{cases} t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}_+, & i = 1, \dots, n, e \in E, \\ t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \leq t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}), & i = 1, \dots, n, e \in \mathbf{p}_i, \\ t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) = t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) = 0, & i = 1, \dots, n, e \notin \mathbf{p}_i, \\ t_{e_1,i}^{in}(\mathbf{p}) = t_{e_2,i}^{out}(\mathbf{p}), & i = 1, \dots, n, e_1, e_2 \in \mathbf{p}_i, \exists A, B, C \in V : e_1 = (A, B), e_2 = (B, C) \\ t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) = 0, & i = 1, \dots, n, e = (A_i, X), X \in V. \end{cases} \quad (5)$$

Заметим, что выбор таких интервалов пока неоднозначен. Далее считаем, что для каждого ребра e , участника i и комбинации путей \mathbf{p} каким-то образом выбраны некоторые величины $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})$, удовлетворяющие ограничениям (5). Тогда функция временных затрат (4) i -ого участника примет вид

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in E} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}). \quad (6)$$

Функция стоимости в этом случае есть

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}). \quad (7)$$

Без ограничения общности считаем, что временные затраты участником i на ребре e ограничены некоторыми положительными константами $\bar{\tau}_{e,i}^{min}, \bar{\tau}_{e,i}^{max}$:

$$0 < \bar{\tau}_{e,i}^{min} \leq t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \leq \bar{\tau}_{e,i}^{max}, e \in \mathbf{p}_i, i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

Заметим, что задача оптимизации с целевой функцией (7) и ограничениями (5), (8) ставится в терминах задачи смешанного целочисленного линейного программирования с вещественными переменными $t_{e,i}^{in}, t_{e,i}^{out} \in \mathbb{R}_+$, отвечающими за моменты прохождения i -ым участником ребра e и булевыми переменными $I_{e,i} \in \{0, 1\}$, отвечающими за проезд по ребру e участником i . Однако в данных ограничениях решение уже имеется — участник i передвигается по кратчайшему пути в графе G с весами $\bar{\tau}_{e,i}^{min}$. Тривиальность решения связана с тем, что в данной задаче оптимизации отсутствуют влияния участников друг на друга. Для того, чтобы учесть это влияние, для каждого участника i введем микроскопическую характеристику движения $v_i(\mathbf{p}, t)$ — положительная, ограниченная функция, описывающую скорость участника.

Тогда, имеет место следующее ограничение

$$\int_0^{T_i(\mathbf{p})} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t) dt = l_e, e \in \mathbf{p}_i, i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

или,

$$\int_{t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})}^{t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})} v_i(\mathbf{p}, t) dt = l_e, e \in \mathbf{p}_i, i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

где l_e — длина ребра $e \in E$. Будем говорить, что уравнения (10) задают *модель движения участников*. Без ограничения общности считаем, что $\bar{\tau}_{e,i}^{min}, \bar{\tau}_{e,i}^{max}$ вычисляются в самом быстром и самом медленном варианте передвижения по ребру e участником i , а именно

$$\bar{\tau}_{e,i}^{min} = \frac{l_e}{\max_{\mathbf{p} \in P, t \in \mathbb{R}} (v_i(\mathbf{p}, t))}, \bar{\tau}_{e,i}^{max} = \frac{l_e}{\min_{\mathbf{p} \in P, t \in \mathbb{R}} (v_i(\mathbf{p}, t))} \quad (11)$$

Заметим, что величины $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}_+$ - произвольные вещественные величины, которые удовлетворяют ограничениям (5), (8), (10), (11).

Утверждение 2.1. Пусть задан ориентированный граф G и для каждого ребра e , участника i и комбинации путей \mathbf{p} задано множество величин $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}_+$, для которых выполняются ограничения (5), (8), (10), (11). Тогда $t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})$ и $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})$, $e \in \mathbf{p}_i$ есть функции от комбинации путей $\mathbf{p} \in P$.

Доказательство. Зафиксируем некоторую комбинацию путей \mathbf{p} . Опишем алгоритм поиска значений $t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})$ и $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})$ и покажем его корректность.

Algorithm 1 Моделирование движения участников

Input: количество участников n , ориентированный граф G , комбинация путей \mathbf{p} графа G

Output: $t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})$, $e \in \mathbf{p}_i, i = 1, \dots, n$

Data: текущее время t , текущее ребро e_i и часть пройденного ребра x_i участника i

```

1:  $t = 0$ 
2: for  $i = 1, \dots, n$  do
3:    $e_i \leftarrow$  первое ребро пути  $\mathbf{p}_i$ 
4:    $x_i \leftarrow 0$ 
5:    $t_{e_i,i}^{in}(\mathbf{p}) \leftarrow 0$ 
6: end for
7: while  $\exists i : i$  — не доехал do
8:    $\tau^* \leftarrow \operatorname{argmin}\{\tau \in \mathbb{R} : \tau > t, \int_t^\tau v_i(\mathbf{p}, t) dt = (1 - x_i)l_{e_i}, i \text{ — не доехал}\}_{i=1}^n$ 
9:   for  $i = 1, \dots, n$  and  $i$  — не доехал do
10:     $x_i \leftarrow x_i + \frac{1}{l_{e_i}} \int_t^{\tau^*} v_i(\mathbf{p}, t) dt$ 
11:    if  $x_i = 1$  and  $e_i$  - не последнее ребро пути  $\mathbf{p}_i$  then
12:       $x_i \leftarrow 0$ 
13:       $t_{e_i,i}^{out}(\mathbf{p}) \leftarrow \tau^*$ 
14:       $e_i \leftarrow$  следующее ребро за  $e_i$  в пути  $\mathbf{p}_i$ 
15:       $t_{e_i,i}^{in}(\mathbf{p}) \leftarrow \tau^*$ 
16:    end if
17:  end for
18:   $t \leftarrow \tau^*$ 
19: end while

```

Описанный алгоритм называется *моделированием движения*.

Корректность. Корректность шага 8 алгоритма и достижимость шага 11 следует из того, что функция скорости ограничена снизу (см. ограничения (8), (11)). Алгоритм сойдется, поскольку пути \mathbf{p}_i конечны.

□

Используя это утверждение, задача (1) с учетом введенных ограничений (5), (6), (8), (10), (11) формулируется следующим образом:

Пусть задано некооперативное прокладывание пути $F = (n, G, \{A_i\}_{i=1}^n, \{B_i\}_{i=1}^n, \{\sum_{e \in E} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})\}_{i=1}^n)$ и модель движения $v_i(\mathbf{p}, t)$, где функции $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})$ получены путем моделирования с моделью движения $v_i(\mathbf{p}, t)$. Требуется найти такую комбинацию путей \mathbf{p} , что функция

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \quad (12)$$

минимальна.

Заметим, что в случае, когда условие (10) можно описать в терминах задачи удовлетворения ограничений, задача оптимизации (12) может быть описана в терминах смешанного целочисленного линейного программирования и, как следствие, может быть решена стандартным решателем.

3 Модели движения

Рассмотрим несколько видов моделей движений, которые в разной степени описывают влияние участников друг на друга.

3.1 Макроскопические модели

Предположим, что скорость участника зависит от некоторой общей для участников величины. Например, от функции загрузки ребра

$$n_e(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^n \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t),$$

значение которой в момент времени t соответствует количеству участников на ребре e в этот момент при комбинации путей \mathbf{p} . Предположим скорость участника зависит только от загрузки ребра, на котором он находится:

$$v_i(\mathbf{p}, t) = \sum_{e \in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)), i = 1, \dots, n \quad (13)$$

Такую модель движения в дальнейшем будем называть *макроскопической*. Например, естественно рассмотреть модель $v(n_e(\mathbf{p}, t)) = \frac{v_{max}}{n_e(\mathbf{p}, t)}$. В общем случае такая модель задается последовательностью значений $\{v(k)\}_{k=1}^n$.

Лемма 3.1. Пусть даны вещественные переменные a, b целочисленного программирования и известно, что существует константа $M > 0 : |a| < M, |b| < M$. Тогда можно добавить новую целочисленную переменную $\mathbf{1}(\{a < b\}) \in \{0, 1\}$ такую, что

$$\mathbf{1}(\{a < b\}) = \begin{cases} 1, & a < b, \\ 0, & a \geq b. \end{cases}$$

Доказательство. Добавим в нашу задачу два неравенства:

$$2M(\mathbf{1}(\{a < b\}) - 1) < b - a \leq 2M\mathbf{1}(\{a < b\})$$

Очевидная проверка показывает, что неравенство выполняется для любых a, b .

□

Утверждение 3.1. Пусть модель движения $v_i(\mathbf{p}, t)$ макроскопическая. Тогда задача (12) есть задача смешанного целочисленного линейного программирования.

Доказательство. Докажем для случая $n = 2$. Для случаев $n \geq 2$ доказательство аналогичное.

Пусть имеется задача смешанного целочисленного линейного программирования (5) с переменными $t_{e,i}^{in}, t_{e,i}^{out}, I_{e,i}, e \in E, i = 1, 2$. Преобразуем условие (10) к каноническому виду задачи удовлетворения ограничений. Для удобства обозначим обоих участников индексами $i, j \in \{1, 2\}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t) dt &= \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) \sum_{e^1 \in E} \theta_{e^1,i}(\mathbf{p}, t) v(n_{e^1}(\mathbf{p}, t)) dt = \\
\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)) dt &= \int_{n_e(\mathbf{p}, t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)) dt + \int_{n_e(\mathbf{p}, t)=2} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)) dt = \\
\int_{\theta_{e,j}(\mathbf{p}, t)=0} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(1) dt &+ \int_{\theta_{e,j}(\mathbf{p}, t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(2) dt = \\
\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(1) dt - \int_{\theta_{e,j}(\mathbf{p}, t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(1) dt &+ \int_{\theta_{e,j}(\mathbf{p}, t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(2) dt = \\
v(1) \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) dt + (v(2) - v(1)) \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) \theta_{e,j}(\mathbf{p}, t) dt &= \\
v(1) \bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) + (v(2) - v(1)) \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) \theta_{e,j}(\mathbf{p}, t) dt &= l_e, e \in \mathbf{p}_i
\end{aligned}$$

Неизвестный интеграл - время совместного проезда участников на ребре e .

В переменных задачи смешанного целочисленного программирования получим:

$$v(1)(t_{e,i}^{out} - t_{e,i}^{in}) + (v(2) - v(1))(t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in}) = l_e I_{e,i},$$

где новые переменные $t_{e,ij}^{in}, t_{e,ij}^{out}$ отвечают за начало и конец совместного проезда участников. Другими словами $[t_{e,ij}^{in}, t_{e,ij}^{out}] = [t_{e,i}^{in}, t_{e,i}^{out}] \cap [t_{e,j}^{in}, t_{e,j}^{out}]$. Просуммировав по всем ребрам $e \in E$, получим

$$v(1) \sum_{e \in E} (t_{e,i}^{out} - t_{e,i}^{in}) = \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} - (v(2) - v(1)) \sum_{e \in E} (t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in})$$

Заметим, что левая часть есть временные затраты участника i с коэффициентом $v(1)$, поэтому задачу оптимизации можно переписать в виде

$$\frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} + \frac{v(1) - v(2)}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} (t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in}) \rightarrow \min$$

Для завершения доказательства необходимо показать, что переменные $t_{e,ij}^{in}, t_{e,ij}^{out}$ описываются линейными ограничениями. Обозначим $\Delta t = t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in}, \Delta t_1 = t_{e,i}^{out} - t_{e,i}^{in}, \Delta t_2 = t_{e,j}^{out} - t_{e,j}^{in}, \Delta t_3 = t_{e,i}^{out} - t_{e,j}^{in}, \Delta t_4 = t_{e,i}^{out} - t_{e,i}^{in}$.

Используя лемму 3.1, при $M = \max_{e \in E, k=i,j} \bar{\tau}_{e,k}^{max}$, добавим в задачу новые переменные $\mathbf{1}(\{\Delta t_k > \Delta t_l\}), k \neq l, k, l \in 1, 2, 3, 4$. Рассмотрим величину $T_{max} = |E|M$. Добавим в случае $v(1) \geq v(2)$ нашу задачу следующие неравенства:

$$\Delta t \geq 0,$$

$$\Delta t \geq \Delta t_k - T_{max} \sum_{l \neq k} \mathbf{1}(\{\Delta t_k > \Delta t_l\}), k = 1, 2, 3, 4.$$

В случае $v(1) < v(2)$ добавим те же ограничения с другим знаком неравенства. Тогда с учетом оптимизации переменная Δt есть длина отрезка $[t_{e,ij}^{in}, t_{e,ij}^{out}]$.

□

Следствие 3.1. Пусть модель движения $v_i(\mathbf{p}, t) = \sum_{e \in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t))$ макроскопическая и последовательность $v(n) > 0, \forall n \in \mathbb{Z}_+$ убывает. Предположим, что оптимальное время движения в модели с постоянными скоростями $v(1)$ есть \tilde{T} . Тогда имеет место

$$\tilde{T} \leq T \leq \frac{v(1)}{v(n)} \tilde{T}.$$

Доказательство. Докажем каждое неравенство в отдельности

1. В модели, где все участники едут с постоянными скоростям движение происходит по кратчайшим путям. Тогда временные затраты есть $\tilde{T} = \frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in p_i} l_e$, где p_i - кратчайшие пути. На тех же путях задается самый худший случай макроскопической модели - все едут с минимальной скоростью, то есть $T = \frac{1}{v(n)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in p_i} l_e$. Тогда получим

$$T \leq \frac{1}{v(n)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in p_i} l_e = \frac{v(1)}{v(n)} \tilde{T}.$$

2. Прodelывая аналогичне выкладки что и в доказательстве 3.1, можно получить, что функция оптимизация есть

$$\frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} + \sum_{k=2}^n \frac{v(1) - v(k)}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} \sum_{\substack{s_k \in 2^n \\ |s_k|=k}} \Delta t_{e,s_k} \rightarrow \min,$$

где переменные $\Delta t_{e,s_k}$ отвечают за время совместного движения участников (и только их) s_k по ребру e .

Тогда получим

$$T \geq \min \left(\frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} \right) + \min \left(\sum_{k=2}^n \frac{v(1) - v(k)}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} \sum_{\substack{s_k \in 2^n \\ |s_k|=k}} \Delta t_{e,s_k} \right) \geq \tilde{T}.$$

□

Таким образом, мы получили класс моделей движения, для которых задача оптимизации транспортного потока может быть поставлена в терминах смешанного целочисленного линейного программирования. Однако такой класс моделей движения плохо описывает реальное движение участников. Так, например, модель не учитывает расстояние между участниками и их порядок на ребре.

3.2 Микроскопические модели

Микроскопическими называются модели, в которых явно исследуется движение каждого автомобиля. Выбор такой модели позволяет теоретически достичь более точного описания движения автомобилей по сравнению с макроскопической моделью, однако этот подход требует больших вычислительных ресурсов при практических применениях.

Для простоты рассмотрим однополосное бесконечное движение. Пусть $x_i(t) \in [0, +\infty)$ — координаты на полосе участника i . Предположим, что скорость участника ограничена некоторой общей величиной v_{max} . Пусть в момент времени $t = 0$ выполняется $x_1(0) \leq x_2(0) \leq \dots \leq x_n(0)$.

Модель пропорциональной скорости

Рассмотрим пример, когда скорость машины пропорциональна расстоянию до следующей машины. Положим $d_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t)$, $i = 1, \dots, n-1$. Без ограничения общности считаем, что $d_i(0) < D$, где D — характерное расстояние взаимодействия участников. Иначе рассмотрим подпоследовательности участников, для которых выполняется это условие.

Пусть модель движения есть

$$v_i(t) = \begin{cases} v_{max}, & i = n, \\ v_{max} \frac{d_i(t)}{D}, & i \neq n. \end{cases} \quad (14)$$

Для поиска функций $x_i(t)$ достаточно рассмотреть систему дифференциальных уравнений

$$\dot{d}_i(t) = v_{i+1}(t) - v_i(t).$$

Решением такой системы является

$$d_{n-k}(\tau) = \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{d_{n-k+l}(0) - D}{l!} \tau^l e^{-\tau} \right) + D,$$

где $\tau = \frac{v_{max}}{D} t$. Модель обладает тем свойством, что порядок участников постоянен и участники не покидают зону взаимодействия D .

Данная модель хорошо описывает реальное движение участников, однако ее практическое применение вызывает сложности, поскольку решение уравнения время, вычисляемое на шаге 2 процесса моделирования движения может быть найдено только приближенно.

Модель снижения скорости

Предположим, что существует некоторая величина c_n , которая отвечает за последовательное снижение скорости участников относительно их порядка:

$$v_{n-k} = v_{max} - c_n k, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Велечину c_n выберем из соображений, что $v_0 = \frac{v_{max}}{n}$. Тогда $c_n = \frac{v_{max}}{n}$. Если смоделировать данное движение на графе, то функция скоростей будут кусочно постоянными. Это связано с тем, при смене ребра некоторым участником меняется порядок и величина $n_e(\mathbf{p}, t)$. Поэтому она не лучшим образом описывает реальное движение, однако проста в использовании.

4 Равновесие транспортных потоков

В этом разделе мы исследуем задачу поиска равновесия транспортных потоков как возможность поиска оптимального транспортного потока.

Некооперативной игрой в нормальной форме назовем тройку $\Gamma = (n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{H_i\}_{i=1}^n)$, где $n \in \mathbb{N}$ - количество участников игры, S_i - множество стратегий участника $i \in 1, \dots, n$, H_i - функция выигрыша участника i , определенная на множестве ситуаций $S = \prod_{i=1}^n S_i$ и отображающая его в множество действительных чисел.

Равновесием Нэша некооперативной игрой в нормальной форме $\Gamma = (n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{H_i\}_{i=1}^n)$ назовем такую стратегию $\mathbf{s}^* \in S$, если изменение своей стратегии с \mathbf{s}_i^* на любую $s_i \in S_i$ не выгодно ни одному игроку i , то есть

$$H_i(\mathbf{s}^*) \geq H_i((\mathbf{s}_1^*, \mathbf{s}_{i-1}^*, s_i, \mathbf{s}_{i+1}^*, \mathbf{s}_n^*)), \forall s_i \in S_i, i = 1, \dots, n.$$

Заметим, что в общем случае ничего нельзя сказать о существовании и единственности равновесия некооперативной игры.

Пусть $F = (n, G, \{A\}_{i=1}^n, \{B\}_{i=1}^n, \{T\}_{i=1}^n)$ есть некооперативное прокладывания по графу G . *Некооперативным равновесием* назовем комбинацию путей $\tilde{\mathbf{p}} \in P$, которая является равновесием Нэша некооперативной игры $\tilde{\Gamma} = (n, \{P_i\}_{i=1}^n, \{T_i\}_{i=1}^n)$. Множество всех некооперативных равновесий обозначим \tilde{P} .

Понятие некооперативного равновесия является классическим определением равновесия в терминах некооперативном передвижении. Однако, заметим, что такое равновесие в некооперативном прокладывании пути по графу не всегда существует. Рассмотрим следующее некооперативное передвижение $F = (2, G_1, (A, B), (D, D), \{T\}_{i=1}^2)$ (см. рис 1) с некоторой нетривиальной макроскопической моделью движения $(v(1), v(2))$, такой что $v(2) < v(1)$.

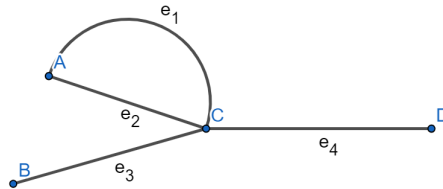


Рис. 1: Пример графа G_1 без некооперативного равновесия

Будем считать, что для длин ребер выполнены следующие неравенства:

$$l_{e_2} < l_{e_3} < l_{e_1}, \quad l_{e_4} > l_{e_3} - l_{e_2}, \quad l_{e_4} > l_{e_1} - l_{e_3}.$$

Данные ограничения необходимы для появления следующих ситуаций при выборе пути первым участником (см. рис 2):

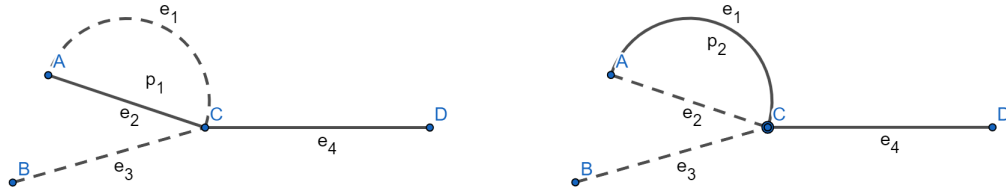


Рис. 2: Выгодная стратегия участника 1 (слева) и выгодная стратегия участника 2 (справа).

При выборе участником 1 пути $p_1 = Ae_2Ce_4D$

Для такого графа считаем, что выполнены следующие неравенства.

$$l_2 < l_3 < l_1,$$

$$l_4 >$$