

Тема

Оптимизация транспортного потока при заданных пунктах отправления и назначения всех участников движения

1 Введение

2 Постановка задачи

Пусть задан граф $G = (V, E)$, описывающий некоторую *дорожную сеть*. Предположим, что имеется n участников движения по этому графу. Каждый участник i имеет точки отправления $A_i \in V$ и точки прибытия $B_i \in V$. Пусть множество P_i - есть множество всех простых путей из A_i в B_i . Пусть декартово произведение $P = \prod_{i=1}^n P_i$ есть множество всех возможных комбинаций путей участников. Элементы этого множества назовем *комбинацией путей*. Пусть известно, что при комбинации путей участников $\mathbf{p} \in P$ i -ый участник затрачивает $T_i(\mathbf{p})$ времени на передвижение. Суммарные временные затраты положим $T(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n T_i(\mathbf{p})$. Пару $(P, \{T_i\}_{i=1}^n)$ назовем *некооперативным передвижением* на графе G . Функции $T_i : P \rightarrow R_+$ назовем *функцией временных затрат*.

Необходимо найти такую комбинацию путей участников \mathbf{p}^* , что суммарные временные затраты на передвижение - минимальны

$$T(\mathbf{p}^*) = \min_{\mathbf{p} \in P} T(\mathbf{p}) \quad (1)$$

Комбинацию путей \mathbf{p}^* будем называть *оптимальной*, а суммарные временные затраты $T(\mathbf{p}^*)$ *оптимальным временем передвижения участников*.

3 Поиск функции временных затрат

Сложность численного решения задачи поиска оптимальной комбинации путей во многом зависит от аналитического задания функций $T_i(\mathbf{p})$. Интуитивно вполне очевидно, что на временные затраты при проезде по пути \mathbf{p}_i в первую очередь влияют временные затраты на ребрах, составляющих маршрут \mathbf{p}_i . Поэтому без ограничения общности считаем, что функции временных затрат есть суммарные временные затраты на каждом ребре этого пути

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in E} \bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) = \sum_{e \in \mathbf{p}_i} \bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}),$$

где функции $\bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p})$ есть временные затраты i -ого участника на ребре e при комбинации путей \mathbf{p} . Поскольку подразумевается, что передвижение участников происходит непрерывно во времени, то, можно считать, что временные затраты на ребре e есть затраченное участником время на этом ребре

$$\bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) = \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) dt,$$

где

$$\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый участник движется по ребру } e \text{ в момент времени } t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Для простоты записи введем функцию, отвечающую за количество машин на ребре e в момент времени t

$$n_e(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^n \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) = \{\text{количество машин на ребре } e \text{ в момент времени } t\}$$

Таким образом, суммарные временные затраты есть

$$T(\mathbf{p}) = \sum_{e \in E} \int_0^\infty n_e(\mathbf{p}, t) dt \quad (2)$$

Поскольку передвижение каждого участника проходит непрерывно, функции $\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t)$ являются индикаторами некоторых интервалов $[t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})]$. Также $\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t)$ описывают движение по некоторому простому пути \mathbf{p}_i , поэтому стоит ввести ограничения на $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})$:

$$\begin{cases} I_{e,i}(\mathbf{p}) \bar{\tau}_{e,i}^{min}(\mathbf{p}) \leq t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \leq I_{e,i}(\mathbf{p}) \bar{\tau}_{e,i}^{max}(\mathbf{p}), e \in E, i = 1, \dots, n, \\ \sum_{\substack{E_1 = \{e \in E: e = (X_1, B)\} \\ e \in E_1}} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) = \sum_{\substack{E_2 = \{e \in E: e = (B, X_2)\} \\ e \in E_2}} t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), B \in V, i = 1, \dots, n, E_1 \neq \emptyset, E_2 \neq \emptyset, \\ I_{e,i}(\mathbf{p}) \in \{0, 1\} - \text{описывают простой путь } \mathbf{p}_i^1, \end{cases} \quad (3)$$

¹ Данное условие есть система уравнений на $I_{e,i}(\mathbf{p})$, строящая биекцию между $I_{e,i}$ и \mathbf{p}

где константы $\bar{\tau}_{e,i}^{min}$ и $\bar{\tau}_{e,i}^{max}$ - ограничения на функцию $\bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p})$. Без ограничения общности считаем, что мы рассматриваем такое движение, что эти константы существуют (ограничено время проезда участника по ребру) и они положительны (нельзя пройти ребро за время $\bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) = 0$).

Заметим, что система (3) эквивалентна задаче смешанного целочисленного линейного программирования. Однако, в такой постановке задача эквивалентна задаче поиска кратчайшего пути между вершинами A_i в B_i с весами $\bar{\tau}_{e,i}^{min}$. На практике машины, находящиеся вблизи друг друга влияют на скорости друг друга.

Для того, чтобы учесть влияние участников друг на друга, для каждого участника i введем микроскопическую характеристику движения $v_i(\mathbf{p}, t)$, описывающую скорость участника. Тогда, имеет место

$$\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t) dt = l_e, e \in \mathbf{p}_i, i = 1, \dots, n \quad (4)$$

Будем говорить, что уравнения (4) задают *модель движения участников*. Таким образом задача (1) эквивалентна следующей системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{e \in E} \int_0^\infty n_e(\mathbf{p}, t) dt - > \min_{\mathbf{p} \in P} \\ I_{e,i}(\mathbf{p}) \bar{\tau}_{e,i}^{min}(\mathbf{p}) \leq t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \leq I_{e,i}(\mathbf{p}) \bar{\tau}_{e,i}^{max}(\mathbf{p}), e \in E, i = 1, \dots, n, \\ \sum_{\substack{E_1 = \{e \in E: e = (X_1, B)\} \\ e \in E_1}} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) = \sum_{\substack{E_2 = \{e \in E: e = (B, X_2)\} \\ e \in E_2}} t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), B \in V, i = 1, \dots, n, E_1 \neq \emptyset, E_2 \neq \emptyset, \\ I_{e,i}(\mathbf{p}) \in \{0, 1\} - \text{описывают простой путь } \mathbf{p}_i, \\ \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t) dt = l_e, e \in \mathbf{p}_i \end{array} \right. \quad (5)$$

Заметим, что в случае, когда условие (4) можно описать в виде задачи смешанного целочисленного программирования, задача (5) может быть решена стандартным решателем.

Макроскопические модели

Предположим скорость участника зависит только загруженности ребра, на котором он находится:

$$v_i(\mathbf{p}, t) = \sum_{e \in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)), i = 1, \dots, n \quad (6)$$

Такую модель движения в дальнейшем будем называть *макроскопической*. Например, естественно рассмотреть модель $v(n_e(\mathbf{p}, t)) = \frac{v_{max}}{n_e(\mathbf{p}, t)}$

Утверждение 3.1. Пусть модель движения $v_i(\mathbf{p}, t)$ макроскопическая. Тогда задача (5) есть задача смешанного целочисленного линейного программирования.

Доказательство. Докажем для случая $n = 2$. Для случаев $n \geq 2$ доказательство аналогичное.

Пусть имеется задача смешанного целочисленного линейного программирования (3) с переменными $t_{e,i}^{in}, t_{e,i}^{out}, I_{e,i}, e \in E, i = 1, 2$

$$\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t)$$

□