Тема

Оптимизация транспортного потока при заданных пунктах отправления и назначения всех участников движения

1 Введение

2 Постановка задачи

Пусть задан граф $G = (V, E)$, описывающий некоторую *дорожную сеть*. Предположим, что имеется n участников движения по этому графу. Каждый участник i имеет точки отправления $A_i \in V$ и точки прибытия $B_i \in V$. Пусть множество P_i - есть множество всех простых путей из A_i в B_i. Пусть декартово произведение $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$ есть множество всех возможных комбинаций путей участников. Элементы этого множества назовем *комбинацией путей*. Пусть известно, что при комбинации путей участников $\mathbf{p} \in P$ i-ый участник затрачивает $T_i(\mathbf{p})$ времени на передвижение. Суммарные временные затраты положим $T(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} T_i(\mathbf{p})$. Пару $(P, \{T_i\}_{i=1}^{n})$ назовем *некооперативным передвижением* на графе G. Функции $T_i : P \to R_+$ назовем *функцией временных затрат*.

Необходимо найти такую комбинацию путей участников $\mathbf{p}^*$, что суммарные временные затраты на передвижение - минимальны

$$T(\mathbf{p}^*) = \min_{\mathbf{p} \in P} T(\mathbf{p}) \tag{1}$$

Комбинацию путей $\mathbf{p}^*$ будем называть *оптимальной*, а суммарные временные затраты $T(\mathbf{p}^*)$ *оптимальным временем передвижения участников*.

3 Построение функций временных затрат

Сложность численного решения задачи поиска оптимальной комбинации путей во многом зависит от аналитического задания функций $T_i(\mathbf{p})$. Интуитивно вполне очевидно, что на временные затраты при проезде по пути $\mathbf{p}_i$ в первую очередь влияют временные затраты на ребрах, составляющих маршрут $\mathbf{p}_i$. Поэтому без ограничения общности считаем, что функции временных затрат есть суммарные временные затраты на каждом ребре этого пути

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in E} \overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) = \sum_{e \in \mathbf{p}_i} \overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}),$$

где функции $\overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p})$ есть временные затраты i-ого участника на ребре e при комбинации путей $\mathbf{p}$. Поскольку подразумевается, что передвижение участников происходит непрерывно во времени, то, можно считать, что временные затраты на ребре e есть затраченное участником время на этом ребре

$$\overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) = \int\limits_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) dt,$$

где

$$\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) = \begin{cases} 1, & \text{если i-ый участник движется по ребру } e \text{ в момент времени } t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Для простоты записи введем функцию, отвечающую за количество машин на ребре e в момент времени t

$$n_e(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^n \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) = \{\text{количество машин на ребре } e \text{ в момент времени } t\}$$

Таким образом, суммарные временные затраты есть

$$T(\mathbf{p}) = \sum_{e \in E} \int\limits_0^\infty n_e(\mathbf{p}, t) dt \tag{2}$$

Поскольку передвижение каждого участника проходит непрерывно, функции $\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t)$ являются индикаторами некоторых интервалов $[t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}), t^{out}_{e,i}(\mathbf{p})]$. Также $\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t)$ описывают движение по некоторому простому пути $\mathbf{p}_i$, поэтому стоит ввести ограничения на $t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}), t^{out}_{e,i}(\mathbf{p})$:

$$\begin{cases} \overline{\tau}^{min}_{e,i} \le t^{out}_{e,i}(\mathbf{p}) - t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}) \le \overline{\tau}^{max}_{e,i}, e \in \mathbf{p}_i, i = 1, \ldots, n, \\ t^{out}_{e,i}(\mathbf{p}) - t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}) = 0, e \notin \mathbf{p}_i, i = 1, \ldots, n, \\ \sum\limits_{\substack{E_1 = \{e \in E : e = (X_1, B)\} \\ e \in E_1}} t^{out}_{e,i}(\mathbf{p}) = \sum\limits_{\substack{E_2 = \{e \in E : e = (B, X_2)\} \\ e \in E_2}} t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}), B \in V, i = 1, \ldots, n, E_1 \ne \emptyset, E_2 \ne \emptyset, \end{cases} \tag{3}$$

где констнанты $\overline{\tau}_{e,i}^{min}$ и $\overline{\tau}_{e,i}^{max}$ - ограничения на функцию $\overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p})$. Без ограничения общности считаем, что мы рассматриваем такое движение, что эти константы существуют (ограничено время проезда участника по ребру) и они положительны (нельзя пройти ребро за время $\overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) = 0$).

Целевая функция в этом случае есть

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{e\in E} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \to \min_{\mathbf{p}\in P} \tag{4}$$

Заметим, что система (3), (4) эквивалентна задаче смешнного целочисленного линейного программирования. Однако, в такой постановке задача эквивалентна задаче поиска кратчайшего пути для каждой машины i между вершинами A_i в B_i с весами $\overline{\tau}_{e,i}^{min}$. На практике машины, находящиеся вблизи друг друга влияют на скорости друг друга.

Для того, чтобы учесть влияние участников друг на друга, для каждого участника i введем микроскопическую характеристику движения $v_i(\mathbf{p}, t)$, описывающую скорость участника. Тогда, имеет место

$$\int_0^{\infty} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t) dt = l_e, e \in \mathbf{p}_i, i = 1, \dots, n, \tag{5}$$

где l_e - длина ребра $e \in E$. Будем говорить, что уравнения (5) задают *модель движения участников*. Таким образом задача (1) эквивалентна следующей задаче оптимизации

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{e\in E} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \to \min\limits_{\mathbf{p}\in P} \\ \overline{\tau}_{e,i}^{min} \le t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \le \overline{\tau}_{e,i}^{max}, e \in \mathbf{p}_i, i = 1, \dots, n, \\ t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) = 0, e \notin \mathbf{p}_i, i = 1, \dots, n, \\ \sum\limits_{\substack{E_1 = \{e\in E: e=(X_1,B)\} \\ e\in E_1}} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) = \sum\limits_{\substack{E_2 = \{e\in E: e=(B,X_2)\} \\ e\in E_2}} t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), B \in V, i = 1, \dots, n, E_1 \ne \emptyset, E_2 \ne \emptyset, \\ \int_0^{\infty} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t) dt = l_e, e \in \mathbf{p}_i \end{cases} \tag{6}$$

Заметим, что в случае, когда условие (5) можно описать в виде задачи смешанного целочисленного программирования, задача (6) может быть решена стандартным решателем.

4 Модели движения

Макроскопические модели

Предположим скорость участника зависит только загруженности ребра, на котором он находится:

$$v_i(\mathbf{p},t) = \sum_{e\in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p},t) v(n_e(\mathbf{p},t)), i = 1,\dots,n \tag{7}$$

Такую модель движения в дальнейшем будем называть *макроскопической*. Например, естествено расмотреть модель $v(n_e(\mathbf{p},t)) = \frac{v_{max}}{n_e(\mathbf{p},t)}$

Лемма 4.1. *Пусть даны переменные a, b целочисленного программирования и известно, что существует $M > 0 : |a| < M$, $|b| < M$. Тогда можно добавить новую целочисленную переменную $\boldsymbol{1}(\{a < b\}) \in \{0,1\}$ такую, что*

$$\boldsymbol{1}(\{a<b\}) = \begin{cases} 1, a < b, \\ 0, a \geq b \end{cases}$$

Доказательство. Добавим в нашу задачу два неравенства:

$$2M(\mathbf{1}(\{a<b\}) - 1) < b - a \leq 2M\mathbf{1}(\{a<b\})$$

Очевидная проверка показывает, что неравенство выполняется для любых a, b.

□

Утверждение 4.1. *Пусть модель движения $v_i(\boldsymbol{p},t)$ макроскопическая. Тогда задача* (6) *есть задача смешанного целочисленного линейного программирования.*

Доказательство. Докажем для случая $n = 2$. Для случаев $n \geq 2$ доказательство аналогичное.

Пусть имеется задача смешанного целочисленного линейного программирования (3) с переменными $t^{in}_{e,i}, t^{out}_{e,i}, I_{e,i}, e \in E, i = 1,2$. Преобразуем условие (5) к каноническому виду. Для удобства обозначим обоих участников индексами $i, j \in \{1,2\}$.

$$\int\limits_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p},t) v_i(\mathbf{p},t)dt = \int\limits_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p},t) \sum_{e^1\in E} \theta_{e^1,i}(\mathbf{p},t) v(n_{e^1}(\mathbf{p},t))dt =$$

$$\int\limits_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p},t) v(n_e(\mathbf{p},t))dt = \int\limits_{n_e(\mathbf{p},t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p},t) v(n_e(\mathbf{p},t))dt + \int\limits_{n_e(\mathbf{p},t)=2} \theta_{e,i}(\mathbf{p},t) v(n_e(\mathbf{p},t))dt =$$

$$\int\limits_{\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)=0} \theta_{e,i}(\mathbf{p},t) v(1)dt + \int\limits_{\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p},t) v(2)dt =$$

$$\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)v(1)dt - \int\limits_{\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)v(1)dt + \int\limits_{\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)v(2)dt =$$

$$v(1)\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)dt + (v(2)-v(1))\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)dt =$$

$$v(1)\overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) + (v(2)-v(1))\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)dt = l_e, e \in \mathbf{p}_i$$

Неизвестный интеграл - время совместного проезда участников на ребре e.

В переменных задачи смешанного целочисленного программирования получим:

$$v(1)(t^{out}_{e,i} - t^{in}_{e,i}) + (v(2)-v(1))(t^{out}_{e,ij} - t^{in}_{e,ij}) = l_e I_{e,i},$$

где новые перемнные $t^{in}_{e,ij}$, $t^{out}_{e,ij}$ отвечают за начало и конец совместного проезда участников. Просуммировав по всем ребрам $e \in E$, получим

$$v(1)\sum_{e\in E}(t^{out}_{e,i} - t^{in}_{e,i}) = \sum_{e\in E} l_e I_{e,i} - (v(2)-v(1))\sum_{e\in E}(t^{out}_{e,ij} - t^{in}_{e,ij})$$

Заметим, что левая часть есть временные затраты участника i, поэтому задачу оптимизации можно переписать в виде

$$\frac{1}{v(1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{e\in E} l_e I_{e,i} + \frac{v(1)-v(2)}{v(1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{e\in E}(t^{out}_{e,ij} - t^{in}_{e,ij}) \to \min$$

Для завершения доказательства необходимо показать, что переменные $t^{in}_{e,ij}, t^{out}_{e,ij}$ описываются линейными ограничениями. Напомним, что $[t^{in}_{e,ij}, t^{out}_{e,ij}] = [t^{in}_{e,i}, t^{out}_{e,i}] \cap [t^{in}_{e,j}, t^{out}_{e,j}]$. Обозначим $\Delta t = t^{out}_{e,ij} - t^{in}_{e,ij}, \Delta t_1 = t^{out}_{e,i} - t^{in}_{e,i}, \Delta t_2 = t^{out}_{e,j} - t^{in}_{e,j}, \Delta t_3 = t^{out}_{e,i} - t^{in}_{e,j}, \Delta t_4 = t^{out}_{e,j} - t^{in}_{e,i}$

Используя лемму 4.1, при $M = max(\overline{\tau}^{max}_{e,i}, \overline{\tau}^{max}_{e,j})$, добавим в задачу новые переменные $\mathbf{1}(\{\Delta t_k > \Delta t_l\}), k \neq l, k, l \in 1,2,3,4$. Рассмотрим велечину $T_{max} = \sum\limits_{e\in E} max(\overline{\tau}^{max}_{e,i}, \overline{\tau}^{max}_{e,j})$. Добавим в нашу задачу следующие неравенства:

$$\Delta t \geq 0,$$

$$\Delta t \geq \Delta t_k - T_{max}\sum_{l!=k}\mathbf{1}(\{\Delta t_k > \Delta t_l\}), k = 1,2,3,4$$

Тогда переменная Δt есть длина отрезка $[t^{in}_{e,ij}, t^{out}_{e,ij}]$.

□

Следствие 4.1. *Пусть модель движения $v_i(\boldsymbol{p},t) = \sum\limits_{e\in E}\theta_{e,i}(\boldsymbol{p},t)v(n_e(\boldsymbol{p},t))$ макроскопическая и последовательность $v(n) > 0, \forall n \in \mathbb{Z}_+$ убывает. Предположим, что оптимальное время движения в модели с постоянными скоростями $v(1)$ есть $\widetilde{T}$. Тогда имеет место*

$$\frac{2v(1)-v(n)}{v(1)}\widetilde{T} \leq T \leq \frac{v(1)}{v(n)}\widetilde{T}$$

Доказательство. Докажем каждое неравенство в отдельности

1. В модели, где все участники едут с постоянными скоростям движение происходит по кратчайшим путям. Тогда временные затраты есть $\widetilde{T} = \frac{1}{v(1)} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{e \in p_i} l_e$, где p_i - кратчайшие пути. На тех же путях задается самый худший случай макроскопической модели - все едут с минимальной скоростью, то есть $T = \frac{1}{v(n)} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{e \in p_i} l_e$. Тогда получим

$$T \leq \frac{1}{v(n)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in p_i} l_e = \frac{v(1)}{v(n)} \widetilde{T}$$

2. Проделывая аналогичне выкладки что и в доказательстве 4.1, можно получить, что функция оптимизация есть

$$\frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} + \sum_{k=2}^{n} \frac{v(1) - v(k)}{v(1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in E} \sum_{\substack{s_k \in 2^n \\ |s_k| = k}} \Delta t_{e,s_k} \to \min,$$

где имеются ограничения

$$I_{e,i} \frac{l_e}{v(1)} \leq \sum_{\substack{s_k \in 2^n \\ i \in s_k}} \Delta t_{e,s_k} \leq I_{e,i} \frac{l_e}{v(n)}, e \in E, i = 1, \dots, n$$

Тогда получим

$$T \geq \min \left(\frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} \right) + \min \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{v(1) - v(k)}{v(1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in E} \sum_{\substack{s_k \in 2^n \\ |s_k| = k}} \Delta t_{e,s_k} \right) \geq$$

$$\geq \widetilde{T} + \frac{v(1) - v(n)}{v(1)} \widetilde{T} = \frac{2v(1) - v(n)}{v(1)} \widetilde{T}$$

$\square$

Микроскопические модели

Микроскопическими называются модели, в которых явно исследуется движение каждого автомобиля. Выбор такой модели позволяет теоретически достичь более точного описания движения автомобилей по сравнению с макроскопической моделью, однако этот подход требует больших вычислительных ресурсов при практических применениях.

Например, на практике скорость автомобиля напрямую зависит от скорости и положения автомобиля спереди.

Для простоты рассмотрим однополосное бесконечное движение. Пусть $x_i(t) \in [0, +\infty)$ - координаты на полосе участника i. Предположим, что скорость участника ограничена некоторой общей велечиной v_{max}. Пусть в момент времени $t = 0$ выполняется $x_1(0) \leq {}_2(0) \leq \dots \leq x_n(0)$.

Модель пропорциональной скорости

Рассмотрим пример, когда скорость машины пропорциональна расстоянию до следующей машины. Для удобства положим $d_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t), i = 1, \ldots, n-1$. Без ограничения общности считаем, что $d_i(0) < D$, где D - характерное расстояние взаимодействия участников.

Пусть модель движения есть

$$v_i(t) = \begin{cases} v_{max}, & i = n \\ v_{max}\frac{d_i(t)}{D}, & i \neq n \end{cases} \tag{8}$$

Для поиска функций $x_i(t)$ достаточно рассмотреть систему дифференциальных уравнений

$$\dot{d}_i(t) = v_{i+1}(t) - v_i(t)$$

Решением такой системы является

$$d_{n-k}(\tau) = \sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{d_{n-k+l}(0) - D}{l!}\tau^l e^{-\tau}\right) + D,$$

где $\tau = \frac{v_{max}}{D}t$. Модель обладает тем свойством, что порядок участников постоянен и участники не покидают зону взаимодействия D.

Данная модель хорошо описывает реальное движение участников, однако ее практическое применение вызывает сложности, поскольку решение уравнения $x_i(t) = x_0$ может быть найдено только приближенно.

Модель снижения скорости

Предположим, что существует некоторая велечина c_n, которая отвечает за снижение скорости хвоста скопления участников:

$$v_{n-k} = v_{max} - c_n k,\ k = 0, \ldots, n-1$$

Велечину c_n выберем из соображений, что $v_0 = \frac{v_{max}}{n}$. Тогда $c_n = \frac{v_{max}}{n}$. Если исследовать данную модель на графе, то функция скоростей будут кусочно постоянными. Это связано с тем, что некоторые участники сьезжают с пути друг друга или покидают характерное расстояние взаимодействия. Поэтому она не лучшим образом описывает реальное движение, однако проста в использовании.