

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
специалиста

**ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА
ПРИ ЗАДАННЫХ ПУНКТАХ ОТПРАВЛЕНИЯ И НАЗНАЧЕНИЯ
ВСЕХ УЧАСТНИКОВ ДВИЖЕНИЯ**

Выполнил студент 610 группы
Пехтерев Станислав Игоревич

подпись студента

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Васенин Валерий Александрович

подпись научного руководителя

Москва
2022

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	4
3	Построение функций временных затрат	5
4	Модели движения	7

Тема

1 Введение

2 Постановка задачи

Пусть задан граф $G = (V, E)$, описывающий некоторую *дорожную сеть*. Предположим, что имеется n участников движения по этому графу. Каждый участник i имеет точки отправления $A_i \in V$ и точки прибытия $B_i \in V$. Пусть множество P_i - есть множество всех простых путей из A_i в B_i . Пусть декартово произведение $P = \prod_{i=1}^n P_i$ есть множество всех возможных комбинаций путей участников. Элементы этого множества назовем *комбинацией путей*. Пусть известно, что при комбинации путей участников $\mathbf{p} \in P$ i -ый участник затрачивает $T_i(\mathbf{p})$ времени на передвижение. Суммарные временные затраты положим $T(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n T_i(\mathbf{p})$. Пару $(P, \{T_i\}_{i=1}^n)$ назовем *некооперативным передвижением* на графе G . Функции $T_i : P \rightarrow R_+$ назовем *функцией временных затрат*.

Необходимо найти такую комбинацию путей участников \mathbf{p}^* , что суммарные временные затраты на передвижение - минимальны

$$T(\mathbf{p}^*) = \min_{\mathbf{p} \in P} T(\mathbf{p}) \quad (1)$$

Комбинацию путей \mathbf{p}^* будем называть *оптимальной*, а суммарные временные затраты $T(\mathbf{p}^*)$ *оптимальным временем передвижения участников*.

3 Построение функций временных затрат

Сложность численного решения задачи поиска оптимальной комбинации путей во многом зависит от аналитического задания функций $T_i(\mathbf{p})$. Интуитивно вполне очевидно, что на временные затраты при проезде по пути \mathbf{p}_i в первую очередь влияют временные затраты на ребрах, составляющих маршрут \mathbf{p}_i . Поэтому без ограничения общности считаем, что функции временных затрат есть суммарные временные затраты на каждом ребре этого пути

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in E} \bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) = \sum_{e \in \mathbf{p}_i} \bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}),$$

где функции $\bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p})$ есть временные затраты i -ого участника на ребре e при комбинации путей \mathbf{p} . Поскольку подразумевается, что передвижение участников происходит непрерывно во времени, то, можно считать, что временные затраты на ребре e есть затраченное участником время на этом ребре

$$\bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) = \int_0^{\infty} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) dt,$$

где

$$\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый участник движется по ребру } e \text{ в момент времени } t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Для простоты записи введем функцию, отвечающую за количество машин на ребре e в момент времени t

$$n_e(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^n \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) = \{\text{количество машин на ребре } e \text{ в момент времени } t\}$$

Таким образом, суммарные временные затраты есть

$$T(\mathbf{p}) = \sum_{e \in E} \int_0^{\infty} n_e(\mathbf{p}, t) dt \quad (2)$$

Поскольку передвижение каждого участника проходит непрерывно, функции $\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t)$ являются индикаторами некоторых интервалов $[t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})]$. Также $\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t)$ описывают движение по некоторому простому пути \mathbf{p}_i , поэтому стоит ввести ограничения на $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})$:

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{e,i}^{min} \leq t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \leq \bar{\tau}_{e,i}^{max}, e \in \mathbf{p}_i, i = 1, \dots, n, \\ t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) = 0, e \notin \mathbf{p}_i, i = 1, \dots, n, \\ \sum_{\substack{E_1 = \{e \in E: e = (X_1, B)\} \\ e \in E_1}} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) = \sum_{\substack{E_2 = \{e \in E: e = (B, X_2)\} \\ e \in E_2}} t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), B \in V, i = 1, \dots, n, E_1 \neq \emptyset, E_2 \neq \emptyset, \end{cases} \quad (3)$$

где константы $\bar{\tau}_{e,i}^{min}$ и $\bar{\tau}_{e,i}^{max}$ - ограничения на функцию $\bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p})$. Без ограничения общности считаем, что мы рассматриваем такое движение, что эти константы существуют (ограничено время проезда участника по ребру) и они положительны (нельзя пройти ребро за время $\bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) = 0$).

Целевая функция в этом случае есть

$$\sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \rightarrow \min_{\mathbf{p} \in P} \quad (4)$$

Заметим, что система (3), (4) эквивалентна задаче смешанного целочисленного линейного программирования. Однако, в такой постановке задача эквивалентна задаче поиска кратчайшего пути для каждой машины i между вершинами A_i в B_i с весами $\bar{\tau}_{e,i}^{min}$. На практике машины, находящиеся вблизи друг друга влияют на скорости друг друга.

Для того, чтобы учесть влияние участников друг на друга, для каждого участника i введем микроскопическую характеристику движения $v_i(\mathbf{p}, t)$, описывающую скорость участника. Тогда, имеет место

$$\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t) dt = l_e, e \in \mathbf{p}_i, i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где l_e - длина ребра $e \in E$. Будем говорить, что уравнения (5) задают *модель движения участников*. Таким образом задача (1) эквивалентна следующей задаче оптимизации

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \rightarrow \min_{\mathbf{p} \in P} \\ \bar{\tau}_{e,i}^{min} \leq t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \leq \bar{\tau}_{e,i}^{max}, e \in \mathbf{p}_i, i = 1, \dots, n, \\ t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) = 0, e \notin \mathbf{p}_i, i = 1, \dots, n, \\ \sum_{\substack{E_1 = \{e \in E: e = (X_1, B)\} \\ e \in E_1}} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) = \sum_{\substack{E_2 = \{e \in E: e = (B, X_2)\} \\ e \in E_2}} t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), B \in V, i = 1, \dots, n, E_1 \neq \emptyset, E_2 \neq \emptyset, \\ \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t) dt = l_e, e \in \mathbf{p}_i \end{array} \right. \quad (6)$$

Заметим, что в случае, когда условие (5) можно описать в виде задачи смешанного целочисленного программирования, задача (6) может быть решена стандартным решателем.

4 Модели движения

Макроскопические модели

Предположим скорость участника зависит только загруженности ребра, на котором он находится:

$$v_i(\mathbf{p}, t) = \sum_{e \in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)), i = 1, \dots, n \quad (7)$$

Такую модель движения в дальнейшем будем называть *макроскопической*. Например, естественно рассмотреть модель $v(n_e(\mathbf{p}, t)) = \frac{v_{max}}{n_e(\mathbf{p}, t)}$

Лемма 4.1. Пусть даны переменные a, b целочисленного программирования и известно, что существует $M > 0 : |a| < M, |b| < M$. Тогда можно добавить новую целочисленную переменную $\mathbf{1}(\{a < b\}) \in \{0, 1\}$ такую, что

$$\mathbf{1}(\{a < b\}) = \begin{cases} 1, & a < b, \\ 0, & a \geq b \end{cases}$$

Доказательство. Добавим в нашу задачу два неравенства:

$$2M(\mathbf{1}(\{a < b\}) - 1) < b - a \leq 2M\mathbf{1}(\{a < b\})$$

Очевидная проверка показывает, что неравенство выполняется для любых a, b .

□

Утверждение 4.1. Пусть модель движения $v_i(\mathbf{p}, t)$ макроскопическая. Тогда задача (6) есть задача смешанного целочисленного линейного программирования.

Доказательство. Докажем для случая $n = 2$. Для случаев $n \geq 2$ доказательство аналогичное.

Пусть имеется задача смешанного целочисленного линейного программирования (3) с переменными $t_{e,i}^{in}, t_{e,i}^{out}, I_{e,i}, e \in E, i = 1, 2$. Преобразуем условие (5) к каноническому виду. Для удобства обозначим обоих участников индексами $i, j \in \{1, 2\}$.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t) dt &= \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) \sum_{e^1 \in E} \theta_{e^1,i}(\mathbf{p}, t) v(n_{e^1}(\mathbf{p}, t)) dt = \\ \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)) dt &= \int_{n_e(\mathbf{p}, t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)) dt + \int_{n_e(\mathbf{p}, t)=2} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)) dt = \\ &= \int_{\theta_{e,j}(\mathbf{p}, t)=0} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(1) dt + \int_{\theta_{e,j}(\mathbf{p}, t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(2) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(1) dt - \int_{\theta_{e,j}(\mathbf{p}, t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(1) dt + \int_{\theta_{e,j}(\mathbf{p}, t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(2) dt = \\
& v(1) \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) dt + (v(2) - v(1)) \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) \theta_{e,j}(\mathbf{p}, t) dt = \\
& v(1) \bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) + (v(2) - v(1)) \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) \theta_{e,j}(\mathbf{p}, t) dt = l_e, e \in \mathbf{p}_i
\end{aligned}$$

Неизвестный интеграл - время совместного проезда участников на ребре e .

В переменных задачи смешанного целочисленного программирования получим:

$$v(1)(t_{e,i}^{out} - t_{e,i}^{in}) + (v(2) - v(1))(t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in}) = l_e I_{e,i},$$

где новые переменные $t_{e,ij}^{in}$, $t_{e,ij}^{out}$ отвечают за начало и конец совместного проезда участников. Просуммировав по всем ребрам $e \in E$, получим

$$v(1) \sum_{e \in E} (t_{e,i}^{out} - t_{e,i}^{in}) = \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} - (v(2) - v(1)) \sum_{e \in E} (t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in})$$

Заметим, что левая часть есть временные затраты участника i , поэтому задачу оптимизации можно переписать в виде

$$\frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} + \frac{v(1) - v(2)}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} (t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in}) \rightarrow \min$$

Для завершения доказательства необходимо показать, что переменные $t_{e,ij}^{in}$, $t_{e,ij}^{out}$ описываются линейными ограничениями. Напомним, что $[t_{e,ij}^{in}, t_{e,ij}^{out}] = [t_{e,i}^{in}, t_{e,i}^{out}] \cap [t_{e,j}^{in}, t_{e,j}^{out}]$. Обозначим $\Delta t = t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in}$, $\Delta t_1 = t_{e,i}^{out} - t_{e,i}^{in}$, $\Delta t_2 = t_{e,j}^{out} - t_{e,j}^{in}$, $\Delta t_3 = t_{e,i}^{out} - t_{e,j}^{in}$, $\Delta t_4 = t_{e,j}^{out} - t_{e,i}^{in}$

Используя лемму 4.1, при $M = \max(\bar{\tau}_{e,i}^{max}, \bar{\tau}_{e,j}^{max})$, добавим в задачу новые переменные $\mathbf{1}(\{\Delta t_k > \Delta t_l\})$, $k \neq l$, $k, l \in 1, 2, 3, 4$. Рассмотрим величину $T_{max} = \sum_{e \in E} \max(\bar{\tau}_{e,i}^{max}, \bar{\tau}_{e,j}^{max})$. Добавим в нашу задачу следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
& \Delta t \geq 0, \\
& \Delta t \geq \Delta t_k - T_{max} \sum_{l=k} \mathbf{1}(\{\Delta t_k > \Delta t_l\}), k = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}$$

Тогда переменная Δt есть длина отрезка $[t_{e,ij}^{in}, t_{e,ij}^{out}]$.

□

Следствие 4.1. Пусть модель движения $v_i(\mathbf{p}, t) = \sum_{e \in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t))$ макроскопическая и последовательность $v(n) > 0, \forall n \in \mathbb{Z}_+$ убывает. Предположим, что оптимальное время движения в модели с постоянными скоростями $v(1)$ есть \tilde{T} . Тогда имеет место

$$\frac{2v(1) - v(n)}{v(1)} \tilde{T} \leq T \leq \frac{v(1)}{v(n)} \tilde{T}$$

Доказательство. Докажем каждое неравенство в отдельности

1. В модели, где все участники едут с постоянными скоростям движение происходит по кратчайшим путям. Тогда временные затраты есть $\tilde{T} = \frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in p_i} l_e$, где p_i - кратчайшие пути. На тех же путях задается самый худший случай макроскопической модели - все едут с минимальной скоростью, то есть $T = \frac{1}{v(n)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in p_i} l_e$. Тогда получим

$$T \leq \frac{1}{v(n)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in p_i} l_e = \frac{v(1)}{v(n)} \tilde{T}$$

2. Прodelывая аналогичне выкладки что и в доказательстве 4.1, можно получить, что функция оптимизация есть

$$\frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} + \sum_{k=2}^n \frac{v(1) - v(k)}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} \sum_{\substack{s_k \in 2^n \\ |s_k|=k}} \Delta t_{e,s_k} \rightarrow \min,$$

где имеются ограничения

$$I_{e,i} \frac{l_e}{v(1)} \leq \sum_{\substack{s_k \in 2^n \\ i \in s_k}} \Delta t_{e,s_k} \leq I_{e,i} \frac{l_e}{v(n)}, e \in E, i = 1, \dots, n$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} T &\geq \min \left(\frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} \right) + \min \left(\sum_{k=2}^n \frac{v(1) - v(k)}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} \sum_{\substack{s_k \in 2^n \\ |s_k|=k}} \Delta t_{e,s_k} \right) \geq \\ &\geq \tilde{T} + \frac{v(1) - v(n)}{v(1)} \tilde{T} = \frac{2v(1) - v(n)}{v(1)} \tilde{T} \end{aligned}$$

□

Микроскопические модели

Микроскопическими называются модели, в которых явно исследуется движение каждого автомобиля. Выбор такой модели позволяет теоретически достичь более точного описания движения автомобилей по сравнению с макроскопической моделью, однако этот подход требует больших вычислительных ресурсов при практических применениях.

Например, на практике скорость автомобиля напрямую зависит от скорости и положения автомобиля спереди.

Для простоты рассмотрим однополосное бесконечное движение. Пусть $x_i(t) \in [0, +\infty)$ - координаты на полосе участника i . Предположим, что скорость участника ограничена некоторой общей величиной v_{max} . Пусть в момент времени $t = 0$ выполняется $x_1(0) \leq x_2(0) \leq \dots \leq x_n(0)$.

Модель пропорциональной скорости

Рассмотрим пример, когда скорость машины пропорциональна расстоянию до следующей машины. Для удобства положим $d_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t)$, $i = 1, \dots, n-1$. Без ограничения общности считаем, что $d_i(0) < D$, где D - характерное расстояние взаимодействия участников.

Пусть модель движения есть

$$v_i(t) = \begin{cases} v_{max}, & i = n \\ v_{max} \frac{d_i(t)}{D}, & i \neq n \end{cases} \quad (8)$$

Для поиска функций $x_i(t)$ достаточно рассмотреть систему дифференциальных уравнений

$$\dot{d}_i(t) = v_{i+1}(t) - v_i(t)$$

Решением такой системы является

$$d_{n-k}(\tau) = \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{d_{n-k+l}(0) - D}{l!} \tau^l e^{-\tau} \right) + D,$$

где $\tau = \frac{v_{max}}{D} t$. Модель обладает тем свойством, что порядок участников постоянен и участники не покидают зону взаимодействия D .

Данная модель хорошо описывает реальное движение участников, однако ее практическое применение вызывает сложности, поскольку решение уравнения $x_i(t) = x_0$ может быть найдено только приближенно.

Модель снижения скорости

Предположим, что существует некоторая величина c_n , которая отвечает за снижение скорости хвоста скопления участников:

$$v_{n-k} = v_{max} - c_n k, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Величину c_n выберем из соображений, что $v_0 = \frac{v_{max}}{n}$. Тогда $c_n = \frac{v_{max}}{n}$. Если исследовать данную модель на графе, то функция скоростей будут кусочно постоянными. Это связано с тем, что некоторые участники съезжают с пути друг друга или покидают характерное расстояние взаимодействия. Поэтому она не лучшим образом описывает реальное движение, однако проста в использовании.