

# Оптимизация транспортного потока при заданных пунктах отправления и назначения всех участников движения

Пехтерев С.И. 610 группа  
Научный руководитель: д.ф.-м.н. Васенин В.А.

16 мая 2022

# Основные определения

- *Дорожной сетью* назовем тройку  $G = (V, E, l)$ , где  $(V, E)$  — ориентированный граф с длинами ребер  $l : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ .
- Предположим, что имеется  $n$  участников с заданными точками отправления  $A_i \in V$  и прибытия  $B_i \in V$ . Пусть множество  $P_i$  есть множество всех простых путей из  $A_i$  в  $B_i$ . Элемент декартового произведения  $P = \prod_{i=1}^n P_i$  назовем *комбинацией путей*.
- Пусть известно, что при комбинации путей участников  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in P$   $i$ -ый участник затрачивает  $T_i(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  времени на свой путь. Функции  $T_i$  назовем *функциями временных затрат* участника  $i$ .

# Некооперативное прокладывание пути

*Некооперативным прокладыванием пути* в дорожной сети  $G$  назовем пятерку  $F = (n, G, \{A_i\}_{i=1}^n, \{B_i\}_{i=1}^n, \{T_i\}_{i=1}^n)$ .

Некооперативное прокладывание пути предполагает, что каждый участник стремится сократить собственные временные затраты выбором пути  $p_i$ , несмотря на временные затраты других участников.

Равновесие Нэша: ни одному из участников невыгодно изменение его маршрута.

# Парадокс Браеса

Равновесие Нэша может не соответствовать оптимальному решению. Пусть из A в B отправляется 4 000 участников, а время проезда по ребру зависит от числа участников (метка на ребре).

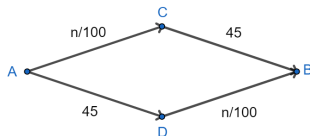


Рис.: Оптимальное некооперативное равновесие: 2 000 едут по ACB, остальные по ADB. Затраты каждого  $\frac{2000}{100} + 45 = 65$ .

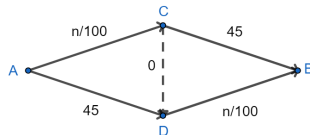


Рис.: Добавим ребро CD. Неоптимальное некооперативное равновесие: все едут по ACDB. Затраты: 80.

# Кооперативное прокладывание пути

Введем некоторую функцию  $\Phi(\mathbf{p}) = \phi(T_1(\mathbf{p}), \dots, T_n(\mathbf{p}))$ , определенную на множестве всех возможных комбинаций путей  $P$  и отображающую его во множество действительных чисел. С помощью нее участники могут отслеживать, как влияет изменение их пути на общую картину движения. Такую функцию назовем *функцией стоимости*.

Для заданных некооперативного прокладывания пути  $F$  и функции стоимости  $\Phi$  необходимо найти комбинацию путей  $\mathbf{p}^*$  такую, что функция стоимости на ней минимальна, то есть

$$\Phi(\mathbf{p}^*) = \min_{\mathbf{p} \in P} \Phi(\mathbf{p}). \quad (1)$$

# Примеры функции затрат

- ❶  $\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i(\mathbf{p})$  - средние временные затраты.
- ❷  $\Phi(\mathbf{p}) = T_k(\mathbf{p})$  - приоритетные временные затраты.
- ❸  $\Phi(\mathbf{p}) = \max_{i=1, \dots, n} T_i(\mathbf{p})$  - максимальные временные затраты.

# Проблемы практической интерпретации

- 1 Как задаются функции  $T_i(\mathbf{p})$ ?
- 2 Как заложено взаимодействие участников в функциях  $T_i(\mathbf{p})$ ?

# Модель движения

Модель движения  $v_i(\mathbf{p}, t)$  - положительная ограниченная функция, отделенная от нуля функция, для которой верно

$$\int_{t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})}^{t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})} v_i(\mathbf{p}, t) dt = l_e, e \in p_i, i = 1, \dots, n.$$

$t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})$  - неизвестные функции моментов въезда на ребро  $e$  участником  $i$ .



# Моделирование движения

## Теорема

Для заданной модели движения  $v_i(\mathbf{p}, t)$  существует единственный набор функций  $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}), T_i(\mathbf{p})$  - моменты перехода между ребрами и время нахождения в пути участником  $i$  соответственно, для которых верно

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in p_i} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}).$$

Поиск таких функций называется *моделированием движения*.

# Проблемы практической интерпретации

- ❶ Как задаются функции  $T_i(\mathbf{p})$ ?
- ❷ Как заложено взаимодействие участников в функциях  $T_i(\mathbf{p})$ ?
- ❸ Как задаются функции  $v_i(\mathbf{p}, t)$ ?
- ❹ Как заложено взаимодействие участников в функциях  $v_i(\mathbf{p}, t)$ ?

# Правила движения

Имеем некоторую информацию о текущем состоянии (скорости, положения на графе, ускорения и тд.) и правилах его изменения:

- 1 Тормозим, если впереди идущий слишком близко к нам.
- 2 Ускоряемся, если впереди идущий достаточно далеко от нас.
- 3 Не превышаем скорость.
- 4 Тормозим перед поворотом.

Значения функции  $v_i(\mathbf{p}, t)$  могут быть посчитаны применением правил движения в момент моделирования.

# Макроскопические модели движения

Все определяется количеством участников на текущем ребре (плотность потока):

$$v_i(\mathbf{p}, t) = \sum_{e \in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)), \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{1}_{[t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})]}(t), \quad \text{— индикатор проезда по ребру}$$

$$n_e(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^n \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) \quad \text{— количество участников на ребре}$$

# Примеры макроскопических моделей движения

- ❶  $v(k) = \frac{v_{max}}{k}.$
- ❷  $v(k) = v_{max}(1 - \frac{k}{n}).$
- ❸ Некоторая положительная последовательность  $\{v(k)\}_{k=1}^n.$

Плюс: Малая сложность моделирования.

Минус: Плохо описывает реальное движение участников.

# Поиск оптимальной комбинации путей в макроскопических моделях движения

## Теорема

*Пусть модель движения  $v_i(\mathbf{p}, t)$  макроскопическая и функция затрат  $\phi$  - линейная. Тогда задача поиска оптимальной комбинации путей есть задача смешанного целочисленного линейного программирования.*

Сведение требует экспоненциального числа переменных.

# Микроскопические модели движения

*Микроскопическими* называются модели движения, которые не являются макроскопическими. В таких моделях явно исследуется движение каждого автомобиля.

В качестве примера рассмотрим движение по бесконечному ребру. Пусть  $x_i(t) \in [0, +\infty)$  — координаты участника  $i$ .

Предположим, что скорости участников ограничены некоторой общей величиной  $v_{max}$ . Пусть в момент времени  $t = 0$  выполняется  $x_1(0) \leq x_2(0) \leq \dots \leq x_n(0)$ .

# Модель пропорциональной скорости

Рассмотрим модель, в которой скорость участника пропорциональна расстоянию до впереди идущего участника. Положим  $d_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ . Без ограничения общности считаем, что  $d_i(0) < D$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , где  $D$  — расстояние, на котором происходит взаимодействие участников. Иначе рассмотрим подпоследовательности участников, для которых выполняется это условие.

Модель движения, задающуюся уравнением

$$v_i(t) = \begin{cases} v_{max}, & i = n, \\ v_{max} \frac{d_i(t)}{D}, & i \neq n, \end{cases} \quad (2)$$

назовем *моделью пропорциональной скорости*.



# Модель пропорциональной скорости

Для поиска функций  $x_i(t)$  достаточно рассмотреть систему дифференциальных уравнений

$$\dot{d}_i(t) = v_{i+1}(t) - v_i(t).$$

Плюс: Хорошо описывает реальное движение участников.

Минус: Решением такой системы является

$$d_{n-k}(\tau) = \sum_{l=0}^{k-1} \left( \frac{d_{n-k+l}(0) - D}{l!} \tau^l e^{-\tau} \right) + D,$$

где  $\tau = \frac{v_{max}}{D} t$ . Поэтому решение уравнения  $d_i(t) = d_0$ , необходимое в процессе моделирования может быть вычисленно только приближенно.

# Модель снижения скорости

Предположим, что существует некоторая величина  $c_n$ , которая отвечает за последовательное снижение скорости участников относительно их порядка:

$$v_{n-k} = v_{max} - c_n k, \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

Плюс: Малая сложность моделирования.

Минус: Не использует расстояние до впереди идущей машины.

# Равновесие для микроскопических моделей

Возможность сведения микроскопических моделей к задаче MILP зависит от свойств модели. Поэтому в работе реализованы итерационные алгоритмы моделирования движения:

- поиск неподвижной точки;
- алгоритм последовательного добавления участников.

# Некооперативная игра. Равновесие Нэша

- *Некооперативной игрой в нормальной форме* назовем тройку  $\Gamma = (n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{H_i\}_{i=1}^n)$ , где  $n \in \mathbb{N}$  — количество участников игры,  $S_i$  — множество стратегий участника  $i \in 1, \dots, n$ ,  $H_i$  — функция выигрыша участника  $i$ , определенная на множестве ситуаций  $S = \prod_{i=1}^n S_i$  и отображающая его во множество действительных чисел.
- *Равновесием Нэша* некооперативной игры в нормальной форме  $\Gamma = (n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{H_i\}_{i=1}^n)$  назовем стратегию  $\mathbf{s}^* = (s_1^*, \dots, s_n^*) \in S$  такую, что ни одному игроку  $i$  невыгодно изменение своей стратегии с  $s_i^*$  на любую другую  $s \in S_i$ :

$$H_i(\mathbf{s}^*) \geq H_i((s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)), \quad \forall s \in S_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

# Кооперативное равновесие

- Кооперативным равновесием некооперативного прокладывания пути  $F$  и функции стоимости  $\Phi(\mathbf{p})$  назовем комбинацию путей  $\tilde{\mathbf{p}} \in P$ , которая является равновесием Нэша некооперативной игры  $\tilde{\Gamma} = (n, \{P_i\}_{i=1}^n, \{-\Phi\}_{i=1}^n)$ . Множество всех кооперативных равновесий обозначим  $\tilde{P}$

## Утверждение

Множество кооперативных равновесий  $\tilde{P}$  не пусто, причем оптимальная комбинация путей является таким равновесием, то есть  $\mathbf{p}^* \in \tilde{P}$ .

# Алгоритм поиска кооперативного равновесия

Считаем, что мы умеем решать задачу

$$\Phi(\mathbf{p}) \rightarrow \min_{p_i \in P_i}$$

Алгоритмы поиска кооперативного равновесия:

- *Поиск неподвижной точки:* последовательно решаем задачу оптимизации по каждому из путей, пока это возможно.
- *Алгоритм последовательного добавления участников:* будем добавлять в нашу задачу по одному участнику и сводить их к неподвижной точке.

# Одинаковый приоритет участников

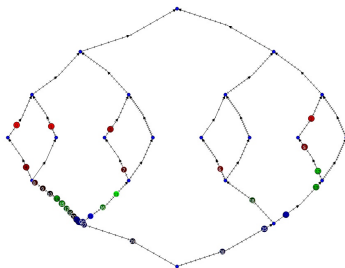


Рис.: Пример лучшего случая распределения путей участников в модели снижения скорости с средним временем прибытия  $T = 1063$ .

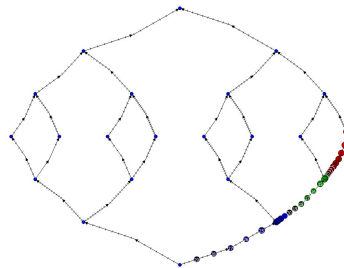


Рис.: Пример худшего случая распределения путей участников в модели снижения скорости с средним временем прибытия  $T = 1576$ .

# Поиск путей для приоритетных участников

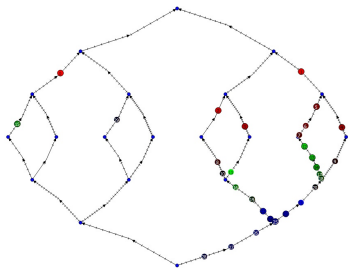


Рис.: Оптимальное кооперативное равновесие в модели снижения скорости с средним временем прибытия  $T = 778.34$

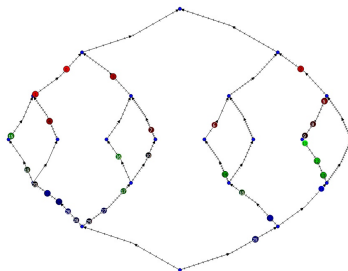


Рис.: Неоптимальное кооперативное равновесие в модели снижения скорости с средним временем прибытия  $T = 950.37$



# Выводы

- Предложено описание общего принципа взаимодействия участников, заключающегося в задании некоторой модели движения.
- Разработан и реализован алгоритм моделирования движения в соответствии с заданной моделью движения.
- Выделили класс моделей, для которого доказали возможность сведения к задаче смешанного целочисленного линейного программирования
- Разработаны и реализованы алгоритмы поиска корпоративного равновесия
- Разработано ПО для моделирования, поиска оптимального пути и оптимальной комбинации путей в произвольной модели движения.