

# Тема

Построение оптимального маршрута при заданной модели движения других участников транспортной сети

## 1 Введение

В данной работе рассматривается задача нахождения наилучшего в каком-то смысле пути с учетом движения фиксированного количества участников по заданным ранее маршрутам в условиях ограниченности модели дорожной системы. Новый построенный маршрут должен отвечать выбранным критериям кратчайшести среди всевозможных путей на всем временном промежутке, но не обязательно в каждый момент времени. Знание маршрутов изначальных участников помогает определить плотность автомобильного потока на конкретных отрезках пути. Рассматриваемая модель приближена к реальной дорожной системе городов, поэтому на всех ее участках наложены ограничения по вместимости участников и скорости их движения. Такие ограничения влияют на показатели маршрутов участников, такие как итоговое время движения и длину пути.

Тема актуальна в наше время, так как она помогает решить проблему пробок на дорогах, а также призвана упростить водителям выбор маршрута, который займет у них наименьшее время. Задача имеет практический характер... Проблема пробок в Москве стоит очень остро, ученые решают ее не первый год..

В мире прогнозы загруженности используются для автоматического управления дорожным движением в некоторых городах. Первые прототипы, в которых были применены прогнозы, появились появились в 1998 году в США. А первое пилотное использование системы, «заглядывающей в будущее», началось в 2006 году в Сингапуре. Среди наших соотечественников похожей задачей занимается отдел навигации Яндекс. Разработчики собирают информацию по трекам движения автомобилей, осуществляют привязку треков к ребрам графа дорожной сети, вычисляют некоторую усредненную скорость на отдельных участках, рисуют карту прогноза дорожной ситуации на ближайший час и в связи с этим предлагают оптимальный по времени путь, а также еще пару альтернативных маршрутов. Сложность сбора информации и построения треков движения состоит в том, что, во-первых, не все пользуются сервисами Яндекс при построении своего маршрута, и во-вторых, в данных постоянно возникают лишние шумы, что приводит к выбросам на графиках, и с таким качеством информации работать очень сложно. Мы же рассматриваем более прозрачную и простую модель, когда все маршруты изначально проложены и нам известны, и они не меняются с течением времени. Это не умаляет значимости и важности поставленной нами задачи. Мы получим более четкие результаты, идеи в дальнейшем могут развиваться и открывать новые возможности для более широкой задачи, например, как у Яндекс. Также стоит отметить, что специалисты по навигации используют статистические методы и машинное обучение в качестве инструмента для решения своих задач, мы же подойдем к вопросу с другой сторо-

ны и применим другие алгоритмы. На данный момент отдел навигации Яндекс проводит улучшения своих методов и подходов к решению задач, а также придумывает какие-то новые метрики и способы оценки качества этих решений.

Задачи, которые мы ставили перед собой в рамках выбранной темы дипломной работы: формальная постановка задачи, анализ полученных ранее результатов в этой теме, разработка простого алгоритма решения на основе моделирования и его оценка, оценка устойчивости полученного решения, попытка обобщения дорожной сети, ее расширение (или сужение?). Методы исследования включают в себя: построение графа с вершинами в концевых точках заданных маршрутов и ребрами, отображающими дороги между ними, определение функции веса-загруженности дорог,

Основа нашей задачи - нахождение наилучшего пути в условиях изменчивости плотности и скорости дорожного потока на участках в зависимости от времени.

В первой главе вы сможете ознакомиться с деталями поставленной задачи, далее мы решим ее путем моделирования дорожной ситуации и применением некоторых известных алгоритмов, в третьей главе поговорим о достоинствах и недостатках такого решения, его сложности и реализуемости в реальной жизни. Четвертая глава будет содержать описание некоторых модификаций графа дорожной сети, а также улучшений решения на таком графе. В завершении поделимся результатами проделанной работы, оценим их качество и сделаем выводы.

## 2 Постановка задачи

Пусть задан ориентированный *граф дорожной сети*  $G(V, E, l)$  таким образом, что вершины  $v \in V$  осуществляют роль перекрестков, а ребра  $e \in E$  - роль дорог. Каждое ребро имеет длину, т.е. задана функция  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Также задана *система правил* движения АТС – набор неравенств, определяющих поведение участников в каждый момент времени.

Пусть имеется  $n$  участников, которые движутся по заранее заданным маршрутам:  $p_i = \langle E_{j_1}^i, E_{j_2}^i, \dots, E_{j_{m_i}}^i \rangle$ ,  $E_{j_k}^i \in E$   $i = 1, \dots, n$ . И к ним добавляется  $(n + 1)$ -ый участник, которому нужно добраться из пункта  $A$  в пункт  $B$ ,  $A, B \in V$ . Определим  $P(A, B)$  – множество всех простых путей из  $A$  в  $B$ . Правила движения позволяют определить *часть пройденного пути* для каждой АТС в зависимости от движения других участников, т.е. определить непрерывные функции

$$\begin{aligned} x_i^{p_i}(G, \cdot) : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1], i = 1, \dots, n \\ x_{n+1}^p(G, \cdot) : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1], p \in P(A, B). \end{aligned}$$

Ввиду однозначной определенности последовательности ребер, по которым осуществляется движение, индекс, означающий путь  $p_i$ , для заданных  $n$  участников можно опустить. Также для простоты записи не будем писать зависимость функций от графа  $G$ . Считаем, что первые  $n$  участников влияют на движение всех АТС, но их движение не зависит от  $(n + 1)$ -ого добавленного участника. Будем говорить, что функции

$$\begin{aligned} x_i(t) : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1], i = 1, \dots, n \\ x_{n+1}^p(t) : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1], p \in P(A, B). \end{aligned}$$

*задают модель движения АТС.*

На множестве путей  $P(A, B)$  определим  $T(p) = \inf_t \{t : x_{n+1}^p(t) = 1\}$  – время прибытия  $(n + 1)$ -ого участника в вершину  $B$  при движении по маршруту  $p$ . Требуется найти такой путь  $p^* \in P(A, B)$ , что  $T(x_{n+1}^{p^*})$  - минимальна. Другими словами, на графе  $G(V, E, l)$  при движении  $n$  участников по фиксированным путям для заданных вершин  $A$  и  $B$  требуется найти путь

$$p^* = \operatorname{argmin}_{p \in P(A, B)} T(x_{n+1}^p).$$

### 3 Возможные правила движения

Поведение движения АТС в нашей постановке задачи определяется некоторой системой правил. Представим примеры таких правил, которые описывают естественный, близкий к реальности характер движения автомобилей.

#### 3.1 Микроскопические модели

Опишем модель *следования за лидером* – модель, в которой поведение движения участника зависит от взаимодействия с впереди идущим АТС. Определим функции *скорости*  $v_i(t) = \dot{x}_i(t)$  и *ускорения*  $a_i(t) = \dot{v}_i(t) = \ddot{x}_i(t)$ . Обозначим через  $v_m \in \mathbb{R}$  максимально возможную скорость, или *скорость свободного движения*:  $v_i(t) \leq v_m, \forall t \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ . Введем также *безопасное расстояние*  $D$  – дистанция, на котором участники характер движения лидера

#### 3.2 Макроскопические модели

- 1.

## 4 Моделирование

## 5 Решения

Первое, что приходит на ум в качестве решения, это перебор всех возможных путей и нахождение подходящего по затраченному времени. Посчитаем сложность этого алгоритма и сделаем вывод о его использовании в нашей задаче на практике.

### 5.1 Перебор. Сложность

Чтобы узнать, применим ли перебор в нашем случае, посчитаем сложность нахождения кратчайшего пути среди множества всех простых путей из  $A$  в  $B$ . Пусть  $S_x(p)$  – сложность нахождения функции  $x_{n+1}^p(t)$ , при выборе пути  $p$ . Тогда сложность перебора

$$S = \sum_{p \in P(A,B)} S_x(p) = |P(A,B)| * \bar{S}_x, \text{ где } \bar{S}_x - \text{средняя сложность.}$$

Заметим, что  $S$  растет при увеличении количества возможных путей. Так, в полном графе на  $|V|$  вершинах получим  $S = 2^{|V|-2} * \bar{S}_x$ .

В качестве примера можем рассмотреть также регулярный граф-решетку на  $\mathbb{R}^2$  и на нем оценить снизу сложность поиска пути с минимальными тратами. Пусть точки  $A$  и  $B$  имеют координаты  $(a_1, a_2)$  и  $(b_1, b_2)$  соответственно. Тогда количество путей минимальной длины в метрике Манхэттенна будет составлять  $C_{|a_1-b_1|+|a_2-b_2|}^{|a_1-b_1|}$ . Понятно, что путей  $|P(A,B)|$  в таком графе гораздо больше. Таким образом, получаем оценку снизу для регулярного решеточного графа

$$C_{|a_1-b_1|+|a_2-b_2|}^{|a_1-b_1|} * \bar{S}_x \leq |P(A,B)| * \bar{S}_x = S.$$

Например, в решетке-квадрате со стороной  $m$  при движении из угловой точки по диагонали в угловую точку напротив количество путей минимальной длины составит  $C_{2m}^m = \frac{(2m)!}{m!m!}$ . По формуле Стирлинга

$$C_{2m}^m = \frac{\sqrt{2\pi(2m)} \left(\frac{2m}{\exp}\right)^{2m}}{\left(\sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{\exp}\right)^m\right) \left(\sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{\exp}\right)^m\right)} = \frac{2\sqrt{\pi m} \left(\frac{2m}{\exp}\right)^{2m}}{2\pi m \left(\frac{m}{\exp}\right)^{2m}} = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}.$$

Понятно, что при увеличении  $m$ , количество путей экспоненциально растет.

С помощью перебора можно находить кратчайшие пути быстро, если  $|P(A,B)|$  не велико. Однако изначально наша задача была сформулирована в терминах дорожной сети и предполагала графы с достаточно большим количеством вершин и ребер, что влияет на количество маршрутов для заданных точек. Таким образом, можно сделать вывод, что в общем случае перебор путей в нашей задаче на практике не применим.

## 5.2 Дейкстра

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть на каждом ребре  $e \in E$  графа  $G(V, E)$  определена функция *временных затрат*  $\phi_e(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Если мы оказались в начальной вершине ребра  $e$  в момент времени  $t$ , то время преодоления ребра будет равняться  $\phi_e(t)$ . Рассмотрим путь  $p = \langle V_0, e_1, V_1, e_2, V_2, \dots, V_{k-1}, e_k, V_k \rangle$  и начало движения происходит в вершине  $V_0$  в момент времени  $t_0 = t$ , тогда

$$\begin{aligned} t_0 &= t \\ t_1 &= \phi_{e_1}(t) + t = \phi_{e_1}(t_0) + t_0 \\ t_2 &= \phi_{e_2}(\phi_{e_1}(t) + t) + \phi_{e_1}(t) + t = \phi_{e_2}(t_1) + t_1 \\ &\dots \\ t_i &= \phi_{e_i}(t_{i-1}) + t_{i-1} \\ &\dots \\ t_k &= \phi_{e_k}(t_{k-1}) + t_{k-1} \end{aligned}$$

Пусть  $P(A, B)$  – множество всех простых путей из  $A$  в  $B$  в графе  $G(V, E)$ . Необходимо найти путь из  $A$  в  $B$ , который требует минимальных затрат, т.е.

$$T = \min_{p \in P(A, B)} t_{|p|}.$$

В общем случае функции временных затрат могут быть любыми. Давайте рассмотрим эту задачу с дополнительным условием на  $\phi_e(t)$  :

$$\phi_e(t) \leq \Delta + \phi_e(t + \Delta), \quad \Delta \geq 0$$

Назовем это условие *неравенством прохождения ребер*. Утверждается, что если для  $\forall e \in E$  функции временных затрат  $\phi_e$  удовлетворяют неравенству прохождения ребер, то задачу можно решить модифицированным алгоритмом Дейкстры.

### 5.2.1 Модифицированный алгоритм Дейкстры

#### Алгоритм построения минимального маршрута

Для каждой вершины будем хранить два значения: минимальное время, за которое можно добраться до этой вершины, и ребро, через которое проходит кратчайший маршрут до вершины. Применяем стандартный алгоритм Дейкстры, с отличием, что при посещении вершины мы фиксируем время для нее и пересчитываем функции временных затрат на всех ребрах, исходящих из этой вершины.

Для запуска алгоритма потребуется задать начальное время - минимальное время в точке старта. Это можно использовать в анализе маршрута.

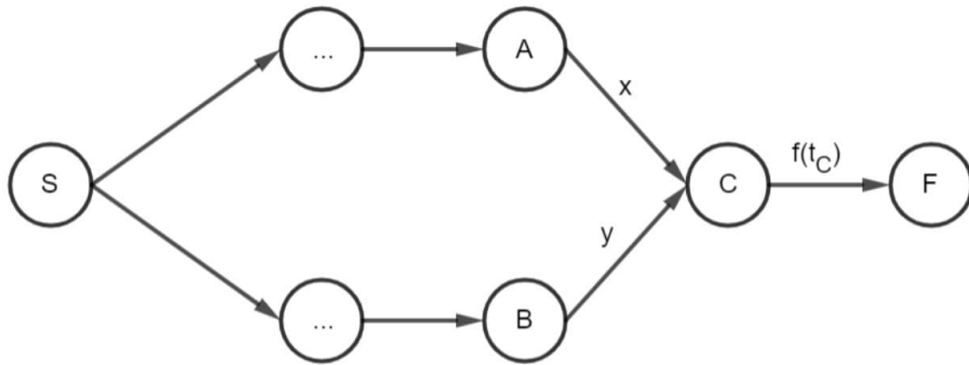
**Лемма 5.1.** *Данный маршрут обладает наименьшим временем прохождения.*

*Доказательство.* Будем доказывать по индукции :

База индукции - в графе 2 вершины и несколько ребер между ними. Минимальным маршрутом будет то ребро, у которого наименьшее время прохождения.

Шаг индукции - считаем что в случае с  $m$  ( $< n$ ) вершинами лемма справедлива. Рассмотрим граф, содержащий  $n$  вершин. Пусть  $\exists$  маршрут  $P$  в этом графе, требующий меньше затрат, чем построенный нашим алгоритмом, тогда возьмем ближайшую к началу точку, обозначим ее  $C$ , в которой выбрано ребро, отличное от минимального по затратам. Очевидно, что если точка  $C$  совпадает с точкой  $F$ , концом маршрута, то  $P$  не является минимальным по времени прохождения.

Пусть ребро маршрута  $P$  в точку  $C$  выходит из точки  $B$ , а минимальное - из точки  $A$ . Построим маршрут по нашему алгоритму из  $S$  - начала маршрута в  $C$ . Заметим, что он проходит через точку  $A$ . Обозначим время этого маршрута за  $t_a = T(S - \dots - A - C)$ , а время для части маршрута  $P$  из  $S$  в  $C$ , проходящего через точку  $B$ , за  $t_b = T(S - \dots - B - C)$ . В подграфе  $(P - C)$  вершин меньше чем  $n$ , а значит по индукции  $t_a < t_b$ .



Без ограничения общности, будем рассматривать часть маршрута  $P$  от точки  $C$  до  $F$  как одно ребро :  $C-F$ . Тогда время прохождения этого ребра  $\phi(t_C) = \phi_{CF}(t_C)$ , где  $t_C$  - время старта из точки  $C$ . Вспомним неравенство прохождения для ребер (см. выше) :  $\phi(t_a) \leq (t_b - t_a) + \phi(t_b)$ , где  $\Delta = (t_b - t_a)$

Рассмотрим два маршрута  $P : S - \dots - B - C - F$  и  $P' : S - \dots - A - C - F$ . Посчитаем время :  $T(P) = t_b + \phi(t_b)$  и  $T(P') = t_a + \phi(t_a)$  Используя неравенство, получаем :  $T(P') = t_a + \phi(t_a) \leq t_a + (t_b - t_a) + \phi(t_b) = T(P)$  Значит маршрут  $P$  не является минимальным.

□

Понятно, что если неравенство прохождения ребер не выполняется, то модифицированный алгоритм Дейкстры может построить не кратчайший маршрут в терминах временных



затрат. Рассмотрим такой пример (рис. 1):

$p_1 :$

$$t_0 = 0$$

$$\phi_{AC}(t) = 1$$

$$\phi_{CB}(t) = 1 + 2 * \mathbb{I}\{t < 1.5\}$$

$p_2 :$

$$t_0 = 0$$

$$\phi_{AC}(t) = 2$$

$$\phi_{CB}(t) = 1 + 2 * \mathbb{I}\{t < 1.5\}$$

Время прохождения пути  $p_1$  будет составлять  $t_{p_1} = t_0 + \phi_{AC}(t_0) + \phi_{CB}(\phi_{AC}(t_0)) = 1 + 3 = 4$ . Время прохождения пути  $p_2$  будет составлять  $t_{p_2} = 2 + 1 = 3$ . Очевидно, на путь  $p_2$  потребуется меньше времени, чем на путь  $p_1$ , но алгоритм Дейкстры предложит в качестве решения задачи маршрут  $p_1$ .

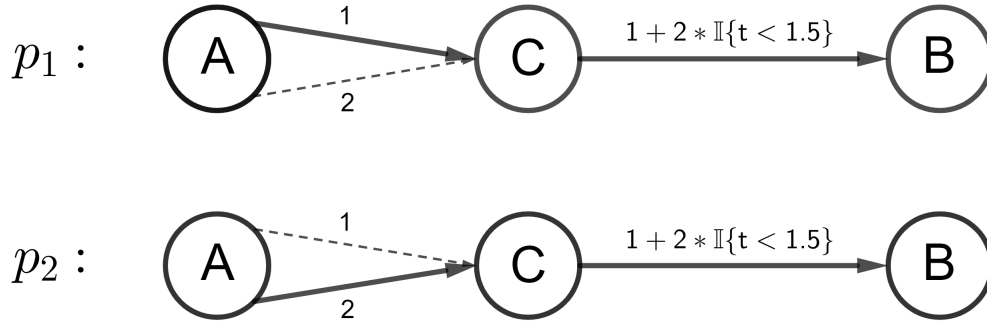


Рис. 1: Пример графа с невыполненным условием неравенства прохождения ребер

Отметим, что наша задача поиска оптимального маршрута сводится к вспомогательной задаче. Правила движения участников и их взаимодействий определяют функции  $\phi_e$ ,  $e \in E$ . Мы можем их получить путем численного моделирования. Неравенство прохождения ребер можно переформулировать так: дорожная сеть обладает условием FIFO — первый въехавший на дорогу первым ее покидает. Другими словами, если участники не обгоняют друг друга, то путь с минимальными затратами можно найти при помощи алгоритма Дейкстры.

## Устойчивость нашего решения

## Практические результаты

**Сложность решения**

## Альтернативные подходы

## Заключение

## Список литературы