ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
специалиста

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА ПРИ ЗАДАННЫХ ПУНКТАХ ОТПРАВЛЕНИЯ И НАЗНАЧЕНИЯ ВСЕХ УЧАСТНИКОВ ДВИЖЕНИЯ

Выполнил студент 610 группы
Пехтерев Станислав Игоревич

____
подпись студента

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Васенин Валерий Александрович

____
подпись научного руководителя

Москва
2022

Содержание

Тема

1 Введение

2 Постановка задачи

Для начала поставим общую задачу оптимизации транспортного потока.

2.1 Общая постановка задачи

Пусть задан граф $G = (V, E)$, описывающий некоторую *дорожную сеть*. Предположим, что имеется n участников движения по этому графу. Каждый участник i имеет точки отправления $A_i \in V$ и точки прибытия $B_i \in V$. Пусть множество P_i есть множество всех простых путей из A_i в B_i. Пусть декартово произведение $P = \prod\limits_{i=1}^{n} P_i$ есть множество всех возможных комбинаций путей участников. Элементы этого множества назовем *комбинацией путей*. Пусть известно, что при комбинации путей участников $\mathbf{p} \in P$ i-ый участник затрачивает $T_i(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}$ времени на передвижение. Функции T_i назовем *функциями временных затрат* участника i. *Некооперативным передвижение по графу* G назовем пятерку $F = (n, G, \{A_i\}_{i=1}^n, \{B_i\}_{i=1}^n, \{T_i\}_{i=1}^n)$. Предположим, что задана некоторая *общая функция временных затрат* $\Phi(\mathbf{p}) = \phi(T_1(\mathbf{p}), \ldots, T_n(\mathbf{p}))$, определенная на множестве всех возможных комбинацией путей P и отображающая его в множество действительных чисел.

Для заданного некооперативного передвижения F и общей функцией временных затрат Φ необходимо найти такую комбинацию путей $\mathbf{p}^*$, что общая функция временных затрат минимальна на ней, то есть

$$\Phi(\mathbf{p}^*) = \min_{\mathbf{p} \in P} \Phi(\mathbf{p}). \tag{1}$$

Комбинацию путей $\mathbf{p}^*$ будем называть *оптимальной*, а общие временные затраты $T(\mathbf{p}^*)$ *оптимальным общим временем передвижения участников*.

Другими словами мы хотим проложить маршруты всеми участниками дорожной сети так, чтобы некооперативное передвижения по графу стало кооперативным посредством минимизации некоторой общей функции.

Далее будем считать, что каждый участник имеет одинаковый приоритет в вопросе выбора маршрута, то есть

$$\phi(T_1, \ldots, T_n) = \sum_{i=1}^{n} T_i. \tag{2}$$

2.2 Постановка задачи в терминах модели движения

Сложность численного решения задачи поиска оптимальной комбинации путей во многом зависит от аналитического задания функций $T_i(\mathbf{p})$. Далее приведем ряд ограничений на функции $T_i(\mathbf{p})$ нашей задачи, которую собираемся исследовать.

Будем считать, что на временные затраты при проезде по пути $\mathbf{p}_i$ в первую очередь влияют временные затраты на ребрах, составляющих маршрут $\mathbf{p}_i$. Поэтому без ограничения общности считаем, что функции временных затрат есть суммарные временные затраты на каждом ребре этого пути.

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in E} \overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) = \sum_{e \in \mathbf{p}_i} \overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}),$$

где функции $\overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p})$ есть временные затраты i-ого участника на ребре e при комбинации путей $\mathbf{p}$.

Будем рассматривать те некооперативные передвижения по графу, в которых движение каждого участника можно промоделировать для каждой комбинации путей $\mathbf{p}$, то есть в каждый момент времени $t \in \mathbb{R}$ известно положение участника на дороге. Таким образом, будем считать, что для каждой комбинации путей $\mathbf{p}$ и времени t известно присутствует ли участник i на ребре e, то есть известны функции

$$\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый участник движется по ребру } e \text{ в момент времени } t, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\sum\limits_{e \in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t)$ принимает значение 1 пока участник не доедет до своей точки назначения B_i, и 0 после. Также будем считать, что достижение участником i вершины B_i наступает в момент $T_i(\mathbf{p})$, то есть

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in \mathbf{p}_i} \int\limits_0^{T_i(\mathbf{p})+\Delta t} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) dt, \forall \Delta t > 0. \tag{3}$$

Будем считать, что передвижение каждого участника по графу является непрерывным и последовательным относительно графа G. Другими словами участник не может резко появлятся и исчезать на несмежных ребрах, а также посещать пройденные ребра. Таким образом считаем, что функции $\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t)$ являются индикаторами некоторых интервалов $[t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}), t^{out}_{e,i}(\mathbf{p})]$, которые описывают последовательное передвижение:

$$\begin{cases} t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}) \le t^{out}_{e,i}(\mathbf{p}), i = 1, \ldots, n, \\ t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}) = t^{out}_{e,i}(\mathbf{p}) = 0, e \notin \mathbf{p}_i,\ i = 1, \ldots, n, \\ \sum\limits_{\substack{E_1 = \{e \in E : e = (X_1, B)\} \\ e \in E_1}} t^{out}_{e,i}(\mathbf{p}) = \sum\limits_{\substack{E_2 = \{e \in E : e = (B, X_2)\} \\ e \in E_2}} t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}), B \in V,\ i = 1, \ldots, n, E_1 \ne \emptyset, E_2 \ne \emptyset, \\ t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}) = 0, i = 1, \ldots, n, e = (A_i, X), X \in V. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда функция временных затрат (3) i-ого участника примет вид

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in E} t^{out}_{e,i}(\mathbf{p}) - t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}). \tag{5}$$

Общая функция временных затрат в этом случае есть

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in E} t^{out}_{e,i}(\mathbf{p}) - t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}). \tag{6}$$

Без ограничения общности считаем, что временные затраты участником i на ребре e ограничены некоторыми положительными константами $\overline{\tau}_{e,i}^{min}, \overline{\tau}_{e,i}^{max}$:

$$0 < \overline{\tau}_{e,i}^{min} \leq t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \leq \overline{\tau}_{e,i}^{max}, e \in \mathbf{p}_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

Заметим, что задача оптимизации с целевой функцией (6) и ограничениями (4), (7) ставится в терминах задачи смешанного целочисленного линейного программирования с вещественными переменными $t_{e,i}^{in}, t_{e,i}^{out} \in \mathbb{R}_+$, отвечающими за моменты прохождения i-ым участником ребра e и булевыми переменными $I_{e,i} \in \{0, 1\}$, отвечающими за проезд по ребру e участником i. Однако в данных ограничениях решение уже имеется — участник i передвигается по кратчайшему пути в графе G с весами $\overline{\tau}_{e,i}^{min}$. Это связано с тем, что в данной задаче оптимизации отсутвутют влияния участников друг на друга. Для того, чтобы учесть это влияние, для каждого участника i введем микроскопическую характеристику движения $v_i(\mathbf{p}, t)$ — положительная, ограниченная функция, описывающую скорость участника.

Тогда, имеет место следующее ограничение

$$\int\limits_0^{T_i(\mathbf{p})} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t) dt = l_e, e \in \mathbf{p}_i, i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

или,

$$\int\limits_{t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})}^{t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})} v_i(\mathbf{p}, t) dt = l_e, e \in \mathbf{p}_i, i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

где l_e — длина ребра $e \in E$. Будем говорить, что уравнения (9) задают *модель движения участников*. Без ограничения общности считаем, что $\overline{\tau}_{e,i}^{min}, \overline{\tau}_{e,i}^{max}$ вычисляются в самом быстром и самом медленном варианте передвижения по ребру e участником i, а именно

$$\overline{\tau}_{e,i}^{min} = \frac{l_e}{\max\limits_{\mathbf{p} \in P, t \in \mathbb{R}} (v_i(\mathbf{p}, t))}, \overline{\tau}_{e,i}^{max} = \frac{l_e}{\min\limits_{\mathbf{p} \in P, t \in \mathbb{R}} (v_i(\mathbf{p}, t))} \tag{10}$$

Заметим, что $t_{e,i}^{in}, t_{e,i}^{out} \in \mathbb{R}_+$ - произвольные вещественные велечины, которые удовлетворяют ограничениям (4), (9).

Утверждение 2.1. *Пусть выполняются ограничения* (4), (9). *Тогда* $t_{e,i}^{out}(\boldsymbol{p})$ *и* $t_{e,i}^{in}(\boldsymbol{p})$ *есть функции от комбинации путей* $\boldsymbol{p} \in P$.

Доказательство. Пошагово найдем все $t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})$ и $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), e \in \mathbf{p}_i, i = 1, \ldots, n$. Введем обозначения: $e_1(k), \ldots, e_n(k) \in E, k \in \mathbb{N}$ - текущая последовательность ребер на шаге k, $x_i(k) \in [0, 1]$ - пройденная часть текущего ребра $e_i(k)$, $t(k) \in \mathbb{R}$ - текущее время.

1. Положим $e_i(1)$ - первое ребро пути $\mathbf{p}_i$, $x_i(1) = 0, i = 1, \ldots, n$, $t(1) = 0$.

2. Воспользуемся (9), чтобы найти ближайшее время $t(k+1)$ для смены ребра некоторым участником i:

$$t(k+1) = \underset{\substack{i=1,\dots,n \\ i\text{— в пути}}}{\operatorname{argmin}} \int\limits_{t(k)}^{t(k+1)} v_i(\mathbf{p}, t)dt = (1 - x_i(k))l_e.$$

Из положительности функции $v_i(\mathbf{p}, t)$ такой $t(k+1)$ существует.

3. Далее обновим пройденную часть ребра для тех участников i, которые находятся в пути:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \frac{1}{l} \int\limits_{t(k)}^{t(k+1)} v_i(\mathbf{p}, t)dt.$$

4. В случае если $x_i(k+1) = 1$, положим $x_i(k+1) = 0$. Если имеется в пути $\mathbf{p}_i$ имеется следующее ребро за $e_i(k)$, то считаем, что $e_i(k+1)$ такое ребро. Иначе будем считать, что участник доехал до точки назначения.

5. Если все участники добрались до точек назначения, закончим алгоритм. Иначе повторим шаг 2.

6. С учетом ограничений (4) считаем, что для любых $e \in E$, которые не лежат в пути $\mathbf{p}_i$: $t^{out}_{e,i}(\mathbf{p}_i) = t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}_i) = 0$.

Полученные значения времен $t(k)$ есть $t^{out}_{e(k),i}(\mathbf{p}_i)$ и $t^{in}_{e(k+1),i}(\mathbf{p}_i)$ соответственно для тех i, что обновили обнулили свои $x_i(k+1)$ на шаге 4.

$\square$

Алгоритм, описанный в утверждении (2.1) называется *моделированием движения*. Используя это утверждение, задача (1) с учетом введенных ограничений (4), (5), (7), (9) формулируется следующим образом:

Пусть задано некооперативное движение $F = (n, G, \{A_i\}_{i=1}^n, \{B_i\}_{i=1}^n, \{\sum\limits_{e \in E} t^{out}_{e,i}(\mathbf{p}) - t^{in}_{e,i}(\mathbf{p})\}_{i=1}^n)$ и модель движения $v_i(\mathbf{p}, t)$, где функции $t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}), t^{out}_{e,i}(\mathbf{p})$ удовлетворяют ограничениям (4), (9) с моделью движения $v_i(\mathbf{p}, t)$. Требуется найти такую комбинацию путей $\mathbf{p}$, что функция

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in E} t^{out}_{e,i}(\mathbf{p}) - t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}) \tag{11}$$

минимальна.

Заметим, что в случае, когда условие (9) можно описать в терминах задачи удовлетворения ограничений, задача оптимизации (11) может быть описана в терминах смешанного целочисленного линейного программирование и, как следствие, может быть решена стандартным решателем.

3 Модели движения

Рассмотрим несколько видов моделей движений, которые в разной степени описывают влияние участников друг на друга.

3.1 Макроскопические модели

Предположим, что скорость участника зависит от некоторой общей для участников велечины. Например, от функции загруженности ребра

$$n_e(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{n} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t),$$

значение которой в момент времени t соответствует количеству участников на ребре e в этот момент при комбинации путей $\mathbf{p}$. Предположим скорость участника зависит только от загруженности ребра, на котором он находится:

$$v_i(\mathbf{p}, t) = \sum_{e \in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)), i = 1, \dots, n \tag{12}$$

Такую модель движения в дальнейшем будем называть *макроскопической*. Например, естествено расмотреть модель $v(n_e(\mathbf{p}, t)) = \frac{v_{max}}{n_e(\mathbf{p},t)}$. В общем случае такая модель задается последовательностью значений $\{v(k)\}_{k=1}^{n}$.

Лемма 3.1. *Пусть даны вещественные переменные a, b целочисленного программирования и известно, что существует константа $M > 0 : |a| < M$, $|b| < M$. Тогда можно добавить новую целочисленную переменную $\boldsymbol{1}(\{a < b\}) \in \{0, 1\}$ такую, что*

$$\boldsymbol{1}(\{a < b\}) = \begin{cases} 1, \ a < b, \\ 0, \ a \geq b. \end{cases}$$

Доказательство. Добавим в нашу задачу два неравенства:

$$2M(\mathbf{1}(\{a < b\}) - 1) < b - a \leq 2M\mathbf{1}(\{a < b\})$$

Очевидная проверка показывает, что неравенство выполняется для любых a, b.

□

Утверждение 3.1. *Пусть модель движения $v_i(\boldsymbol{p}, t)$ макроскопическая. Тогда задача* (11) *есть задача смешанного целочисленного линейного программирования.*

Доказательство. Докажем для случая $n = 2$. Для случаев $n \geq 2$ доказательство аналогичное.

Пусть имеется задача смешанного целочисленного линейного программирования (4) с переменными $t_{e,i}^{in}, t_{e,i}^{out}, I_{e,i}, e \in E, i = 1, 2$. Преобразуем условие (9) к каноническому виду задачи удовлетворения ограничений. Для удобства обозначим обоих участников индексами $i, j \in \{1, 2\}$.

$$\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)v_i(\mathbf{p},t)dt = \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)\sum_{e^1\in E}\theta_{e^1,i}(\mathbf{p},t)v(n_{e^1}(\mathbf{p},t))dt =$$

$$\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)v(n_e(\mathbf{p},t))dt = \int\limits_{n_e(\mathbf{p},t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)v(n_e(\mathbf{p},t))dt + \int\limits_{n_e(\mathbf{p},t)=2} \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)v(n_e(\mathbf{p},t))dt =$$

$$\int\limits_{\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)=0} \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)v(1)dt + \int\limits_{\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)v(2)dt =$$

$$\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)v(1)dt - \int\limits_{\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)v(1)dt + \int\limits_{\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)v(2)dt =$$

$$v(1)\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)dt + (v(2)-v(1))\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)dt =$$

$$v(1)\overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) + (v(2)-v(1))\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p},t)\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)dt = l_e, e\in \mathbf{p}_i$$

Неизвестный интеграл - время совместного проезда участников на ребре e.

В переменных задачи смешанного целочисленного программирования получим:

$$v(1)(t^{out}_{e,i} - t^{in}_{e,i}) + (v(2)-v(1))(t^{out}_{e,ij} - t^{in}_{e,ij}) = l_e I_{e,i},$$

где новые перемнные $t^{in}_{e,ij}$, $t^{out}_{e,ij}$ отвечают за начало и конец совместного проезда участников. Другими словами $[t^{in}_{e,ij}, t^{out}_{e,ij}] = [t^{in}_{e,i}, t^{out}_{e,i}] \cap [t^{in}_{e,j}, t^{out}_{e,j}]$. Просуммировав по всем ребрам $e \in E$, получим

$$v(1)\sum_{e\in E}(t^{out}_{e,i} - t^{in}_{e,i}) = \sum_{e\in E} l_e I_{e,i} - (v(2)-v(1))\sum_{e\in E}(t^{out}_{e,ij} - t^{in}_{e,ij})$$

Заметим, что левая часть есть временные затраты участника i с коэффициентом $v(1)$, поэтому задачу оптимизации можно переписать в виде

$$\frac{1}{v(1)}\sum_{i=1}^n\sum_{e\in E} l_e I_{e,i} + \frac{v(1)-v(2)}{v(1)}\sum_{i=1}^n\sum_{e\in E}(t^{out}_{e,ij} - t^{in}_{e,ij}) \to \min$$

Для завершения доказательства необходимо показать, что переменные $t^{in}_{e,ij}, t^{out}_{e,ij}$ описываются линейными ограничениями. Обозначим $\Delta t = t^{out}_{e,ij} - t^{in}_{e,ij}, \Delta t_1 = t^{out}_{e,i} - t^{in}_{e,i}, \Delta t_2 = t^{out}_{e,j} - t^{in}_{e,j}, \Delta t_3 = t^{out}_{e,i} - t^{in}_{e,j}, \Delta t_4 = t^{out}_{e,j} - t^{in}_{e,i}$

Используя лемму 3.1, при $M = \max\limits_{e\in E, k=i,j} \overline{\tau}^{max}_{e,k}$, добавим в задачу новые переменные $\mathbf{1}(\{\Delta t_k > \Delta t_l\}), k \neq l, k, l \in 1,2,3,4$. Рассмотрим велечину $T_{max} = |E|M$. Добавим в случае $v(1) \geq v(2)$ нашу задачу следующие неравенства:

$$\Delta t \geq 0,$$

$$\Delta t \geq \Delta t_k - T_{max} \sum_{l \neq k} \mathbf{1}(\{\Delta t_k > \Delta t_l\}), k = 1, 2, 3, 4.$$

В случае $v(1) < v(2)$ добавим те же ограничения с другим знаком неравенства. Тогда с учетом оптимизации переменная Δt есть длина отрезка $[t^{in}_{e,ij}, t^{out}_{e,ij}]$.

□

Следствие 3.1. *Пусть модель движения* $v_i(\boldsymbol{p}, t) = \sum\limits_{e \in E} \theta_{e,i}(\boldsymbol{p}, t) v(n_e(\boldsymbol{p}, t))$ *макроскопическая и последовательность* $v(n) > 0, \forall n \in \mathbb{Z}_+$ *убывает. Предположим, что оптимальное время движения в модели с постоянными скоростями* $v(1)$ *есть* $\widetilde{T}$. *Тогда имеет место*

$$\widetilde{T} \leq T \leq \frac{v(1)}{v(n)} \widetilde{T}.$$

Доказательство. Докажем каждое неравенство в отдельности

1. В модели, где все участники едут с постоянными скоростям движение происходит по кратчайшим путям. Тогда временные затраты есть $\widetilde{T} = \frac{1}{v(1)} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{e \in p_i} l_e$, где p_i - кратчайшие пути. На тех же путях задается самый худший случай макроскопической модели - все едут с минимальной скоростью, то есть $T = \frac{1}{v(n)} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{e \in p_i} l_e$. Тогда получим

$$T \leq \frac{1}{v(n)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in p_i} l_e = \frac{v(1)}{v(n)} \widetilde{T}.$$

2. Проделывая аналогичне выкладки что и в доказательстве 3.1, можно получить, что функция оптимизация есть

$$\frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} + \sum_{k=2}^{n} \frac{v(1) - v(k)}{v(1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in E} \sum_{\substack{s_k \in 2^n \\ |s_k| = k}} \Delta t_{e,s_k} \to \min,$$

где переменные $\Delta t_{e,s_k}$ отвечают за время совместного движения участников (и только их) s_k по ребру e.

Тогда получим

$$T \geq \min \left(\frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} \right) + \min \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{v(1) - v(k)}{v(1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in E} \sum_{\substack{s_k \in 2^n \\ |s_k| = k}} \Delta t_{e,s_k} \right) \geq \widetilde{T}.$$

□

Таким образом, мы получили класс моделей движения, для которых задача оптимизации транспортного потока может быть поставлена в терминах смешанного целочисленного линейного программирования. Однако такой класс моделей движения плохо описывает реальное движение участников. Так, например, модель не учитывает расстояние между участниками и их порядок на ребре.

3.2 Микроскопические модели

Микроскопическими называются модели, в которых явно исследуется движение каждого автомобиля. Выбор такой модели позволяет теоретически достичь более точного описания движения автомобилей по сравнению с макроскопической моделью, однако этот подход требует больших вычислительных ресурсов при практических применениях.

Для простоты рассмотрим однополосное бесконечное движение. Пусть $x_i(t) \in [0, +\infty)$ — координаты на полосе участника i. Предположим, что скорость участника ограничена некоторой общей велечиной v_{max}. Пусть в момент времени $t = 0$ выполняется $x_1(0) \leq x_2(0) \leq \dots \leq x_n(0)$.

Модель пропорциональной скорости

Рассмотрим пример, когда скорость машины пропорциональна расстоянию до следующей машины. Положим $d_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t), i = 1, \dots, n-1$. Без ограничения общности считаем, что $d_i(0) < D$, где D - характерное расстояние взаимодействия участников. Иначе рассмотрим подпоследовательности участников, для которых выполняется это условие.

Пусть модель движения есть

$$v_i(t) = \begin{cases} v_{max}, & i = n, \\ v_{max}\frac{d_i(t)}{D}, & i \neq n. \end{cases} \tag{13}$$

Для поиска функций $x_i(t)$ достаточно рассмотреть систему дифференциальных уравнений

$$\dot{d}_i(t) = v_{i+1}(t) - v_i(t).$$

Решением такой системы является

$$d_{n-k}(\tau) = \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{d_{n-k+l}(0) - D}{l!} \tau^l e^{-\tau} \right) + D,$$

где $\tau = \frac{v_{max}}{D}t$. Модель обладает тем свойством, что порядок участников постоянен и участники не покидают зону взаимодействия D.

Данная модель хорошо описывает реальное движение участников, однако ее практическое применение вызывает сложности, поскольку решение уравнения время, вычисляемое на шаге 2 процесса моделирования движения может быть найдено только приближенно.

Модель снижения скорости

Предположим, что существует некоторая велечина c_n, которая отвечает за последовательное снижение скорости участников относительно их порядка:

$$v_{n-k} = v_{max} - c_n k, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Велечину c_n выберем из соображений, что $v_0 = \frac{v_{max}}{n}$. Тогда $c_n = \frac{v_{max}}{n}$. Если смоделировать данное движение на графе, то функция скоростей будут кусочно постоянными. Это связано с тем, что некоторые участники сьезжают с пути друг друга или покидают характерное расстояние взаимодействия. Поэтому она не лучшим образом описывает реальное движение, однако проста в использовании.

4 Равновесие транспортных потоков

В этом разделе мы исследуем задачу равновесия транспортных потоков.

Некооперативной игрой в нормальной форме назовем тройку $\Gamma = (n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{H_i\}_{i=1}^n)$, где $n \in \mathbb{N}$ - количество участников игры, S_i - множество стратегий участника $i \in 1, \dots, n$, H_i - функция выйгрыша участника i, определенная на множестве ситуаций $S = \prod\limits_{i=1}^{n} S_i$ и отображающая его в множество действительных чисел.

Равновесием Нэша некооперативной игрой в нормальной форме $\Gamma = (n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{H_i\}_{i=1}^n)$ назовем такую стратегию $\mathbf{s}^* \in S$, если изменение своей стратегии с $\mathbf{s}_i^*$ на любую $\mathbf{s}_i \in S$ не выгодно ни одному игроку i, то есть

$$H_i(\mathbf{s}^*) \geq H_i(\big(\mathbf{s}_1^*, \mathbf{s}_{i-1}^*, \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_{i+1}^*, \mathbf{s}_n^*\big)),\ i = 1, \dots, n.$$

Заметим, что в общем случае ничего нельзя сказать о существовании и единственности равновесия некооперативной игры.

Пусть $F = (n, G, \{A\}_{i=1}^n, \{B\}_{i=1}^n, \{T\}_{i=1}^n)$ есть некооперативное передвижение по графу G. Совершенным эгоизмом $\widetilde{\mathbf{p}}$ назовем равновесие Нэша некооперативной игры $\widetilde{\Gamma} = (n, \{P_i\}_{i=1}^n, \{T_i\}_{i=1}^n)$. Множество всех совершенных эгоизмов обозначим $\widetilde{P}$.

Понятие совершенного эгоизма является классическим определением равновесия в некооперативном передвижении. Однако, заметим, что такое равновесие не всегда существует. Рассмотрим следующее некооперативное передвижение:

Для такого графа считаем, что выполнены следующие неравенства.

$$l2 < l3 < l1,$$

$$l4 >$$