Тема

Оптимизация транспортного потока при заданных пунктах отправления и назначения всех участников движения

1 Введение

2 Постановка задачи

Пусть задан граф $G = (V, E)$, описывающий некоторую *дорожную сеть*. Предположим, что имеется n участников движения по этому графу. Каждый участник i имеет точки отправления $A_i \in V$ и точки прибытия $B_i \in V$. Пусть множество P_i - есть множество всех простых путей из A_i в B_i. Пусть декартово произведение $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$ есть множество всех возможных комбинаций путей участников. Элементы этого множества назовем *комбинацией путей*. Пусть известно, что при комбинации путей участников $\mathbf{p} \in P$ i-ый участник затрачивает $T_i(\mathbf{p})$ времени на передвижение. Суммарные временные затраты положим $T(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} T_i(\mathbf{p})$. Пару $(P, \{T_i\}_{i=1}^{n})$ назовем *некооперативным передвижением* на графе G. Функции $T_i : P \to R_+$ назовем *функцией временных затрат*.

Необходимо найти такую комбинацию путей участников $\mathbf{p}^*$, что суммарные временные затраты на передвижение - минимальны

$$T(\mathbf{p}^*) = \min_{\mathbf{p} \in P} T(\mathbf{p}) \tag{1}$$

Комбинацию путей $\mathbf{p}^*$ будем называть *оптимальной*, а суммарные временные затраты $T(\mathbf{p}^*)$ *оптимальным временем передвижения участников*.

3 Поиск функции временных затрат

Сложность численного решения задачи поиска оптимальной комбинации путей во многом зависит от аналитического задания функций $T_i(\mathbf{p})$. Интуитивно вполне очевидно, что на временные затраты при проезде по пути $\mathbf{p}_i$ в первую очередь влияют временные затраты на ребрах, составляющих маршрут $\mathbf{p}_i$. Поэтому без ограничения общности считаем, что функции временных затрат есть суммарные временные затраты на каждом ребре этого пути

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in E} \overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) = \sum_{e \in \mathbf{p}_i} \overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}),$$

где функции $\overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p})$ есть временные затраты i-ого участника на ребре e при комбинации путей $\mathbf{p}$. Поскольку подразумевается, что передвижение участников происходит непрерывно во времени, то, можно считать, что временные затраты на ребре e есть затраченное участником время на этом ребре

$$\overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) = \int\limits_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) dt,$$

где

$$\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) = \begin{cases} 1, & \text{если i-ый участник движется по ребру } e \text{ в момент времени } t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Для простоты записи введем функцию, отвечающую за количество машин на ребре e в момент времени t

$$n_e(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{n} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) = \{\text{количество машин на ребре } e \text{ в момент времени } t\}$$

Таким образом, суммарные временные затраты есть

$$T(\mathbf{p}) = \sum_{e \in E} \int\limits_0^\infty n_e(\mathbf{p}, t) dt \tag{2}$$

Поскольку передвижение каждого участника проходит непрерывно, функции $\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t)$ являются индикаторами некоторых интервалов $[t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}), t^{out}_{e,i}(\mathbf{p})]$. Также $\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t)$ описывают движение по некоторому простому пути $\mathbf{p}_i$, поэтому стоит ввести ограничения на $t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}), t^{out}_{e,i}(\mathbf{p})$:

$$\begin{cases} I_{e,i}(\mathbf{p})\overline{\tau}^{min}_{e,i}(\mathbf{p}) \le t^{out}_{e,i}(\mathbf{p}) - t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}) \le I_{e,i}(\mathbf{p})\overline{\tau}^{max}_{e,i}(\mathbf{p}), e \in E, i = 1, \dots, n, \\ \sum\limits_{\substack{E_1 = \{e \in E: e = (X_1, B)\} \\ e \in E_1}} t^{out}_{e,i}(\mathbf{p}) = \sum\limits_{\substack{E_2 = \{e \in E: e = (B, X_2)\} \\ e \in E_2}} t^{in}_{e,i}(\mathbf{p}), B \in V, i = 1, \dots, n, E_1 \ne \emptyset, E_2 \ne \emptyset, \\ I_{e,i}(\mathbf{p}) \in \{0, 1\} \text{ - описывают простой путь } \mathbf{p}_i \text{ [1]}, \end{cases} \tag{3}$$

где конснтанты $\overline{\tau}_{e,i}^{min}$ и $\overline{\tau}_{e,i}^{max}$ - ограничения на функцию $\overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p})$. Без ограничения общности считаем, что мы рассматриваем такое движение, что эти константы существуют (ограничено время проезда участника по ребру) и они положительны (нельзя пройти ребро за время $\overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) = 0$).

Заметим, что система (3) эквивалентна задаче смешнного целочисленного линейного программирования. Однако, в такой постановке задача эквивалентна задаче поиска кратчайшего пути между вершинами A_i в B_i с весами $\overline{\tau}_{e,i}^{min}$. На практике машины, находящиеся вблизи друг друга влияют на скорости друг друга.

Для того, чтобы учесть влияние участников друг на друга, для каждого участника i введем микроскопическую характеристику движения $v_i(\mathbf{p}, t)$, описывающую скорость участника. Тогда, имеет место

$$\int\limits_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t) dt = l_e, e \in \mathbf{p}_i, i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

Будем говорить, что уравнения (4) задают *модель движения участников*. Таким образом задача (1) эквивалентна следующей системе

$$\begin{cases} \sum\limits_{e \in E} \int\limits_0^\infty n_e(\mathbf{p}, t) dt -> \min\limits_{\mathbf{p} \in P} \\ I_{e,i}(\mathbf{p}) \overline{\tau}_{e,i}^{min}(\mathbf{p}) \le t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \le I_{e,i}(\mathbf{p}) \overline{\tau}_{e,i}^{max}(\mathbf{p}), e \in E, i = 1, \ldots, n, \\ \sum\limits_{\substack{E_1 = \{e \in E: e = (X_1, B)\} \\ e \in E_1}} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) = \sum\limits_{\substack{E_2 = \{e \in E: e = (B, X_2)\} \\ e \in E_2}} t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), B \in V, i = 1, \ldots, n, E_1 \neq \emptyset, E_2 \neq \emptyset, \\ I_{e,i}(\mathbf{p}) \in \{0, 1\} \text{ - описывают простой путь } \mathbf{p}_i, \\ \int\limits_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t) dt = l_e, e \in \mathbf{p}_i \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что в случае, когда условие (4) можно описать в виде задачи смешанного целочисленного программирования, задача (5) может быть решена стандартным решателем.

Макроскопические модели

Предположим скорость участника зависит только загруженности ребра, на котором он находится:

$$v_i(\mathbf{p}, t) = \sum_{e \in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)), i = 1, \ldots, n \tag{6}$$

Такую модель движения в дальнейшем будем называть *макроскопической*. Например, естествено расмотреть модель $v(n_e(\mathbf{p}, t)) = \frac{v_{max}}{n_e(\mathbf{p}, t)}$

[1]Данное условие есть система уравнений на $I_{e,i}(\mathbf{p})$, строющая биекцию между $I_{e,i}$ и $\mathbf{p}$

Лемма 3.1. *Пусть даны переменные a, b целочисленного программирования и известно, что существует $M > 0 : |a| < M$, $|b| < M$. Тогда можно добавить новую целочисленную переменную $\mathbf{1}(\{a < b\}) \in \{0, 1\}$ такую, что*

$$\mathbf{1}(\{a < b\}) = \begin{cases} 1, a < b, \\ 0, a \geq b \end{cases}$$

Доказательство. Добавим в нашу задачу два неравенства:

$$2M(\mathbf{1}(\{a < b\}) - 1) < b - a \leq 2M\mathbf{1}(\{a < b\})$$

Очевидная проверка показывает, что неравенство выполняется для любых a, b.

□

Утверждение 3.1. *Пусть модель движения $v_i(\boldsymbol{p}, t)$ макроскопическая. Тогда задача* (5) *есть задача смешанного целочисленного линейного программирования.*

Доказательство. Докажем для случая $n = 2$. Для случаев $n \geq 2$ доказательство аналогичное.

Пусть имеется задача смешанного целочисленного линейного программирования (3) с переменными $t_{e,i}^{in}, t_{e,i}^{out}, I_{e,i}, e \in E, i = 1, 2$. Преобразуем условие (4) к каноническому виду. Для удобства обозначим обоих участников индексами $i, j \in \{1, 2\}$.

$$\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t) dt = \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) \sum_{e^1 \in E} \theta_{e^1,i}(\mathbf{p}, t) v(n_{e^1}(\mathbf{p}, t)) dt =$$

$$\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)) dt = \int\limits_{n_e(\mathbf{p},t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)) dt + \int\limits_{n_e(\mathbf{p},t)=2} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)) dt =$$

$$\int\limits_{\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)=0} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(1) dt + \int\limits_{\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(2) dt =$$

$$\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(1) dt - \int\limits_{\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(1) dt + \int\limits_{\theta_{e,j}(\mathbf{p},t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(2) dt =$$

$$v(1) \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) dt + (v(2) - v(1)) \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) \theta_{e,j}(\mathbf{p}, t) dt =$$

$$v(1) \overline{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) + (v(2) - v(1)) \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) \theta_{e,j}(\mathbf{p}, t) dt = l_e, e \in \mathbf{p}_i$$

Неизвестный интеграл - время совместного проезда участников на ребре e.

В переменных задачи смешанного целочисленного программирования получим:

$$v(1)(t_{e,i}^{out} - t_{e,i}^{in}) + (v(2) - v(1))(t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in}) = l_e I_{e,i},$$

где новые перемнные $t_{e,ij}^{in}$, $t_{e,ij}^{out}$ отвечают за начало и конец совместного проезда участников. Просуммировав по всем ребрам $e \in E$, получим

$$v(1) \sum_{e \in E} (t_{e,i}^{out} - t_{e,i}^{in}) = \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} - (v(2) - v(1)) \sum_{e \in E} (t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in})$$

Заметим, что часть слева есть функция оптимизации, поэтому функцию оптимизации можно переписать в виде

$$v(1) \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} + (v(1) - v(2)) \sum_{e \in E} (t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in}) \to \min$$

Для завершения доказательства необходимо показать, что переменные $t_{e,ij}^{in}, t_{e,ij}^{out}$ описываются линейными ограничениями. Напомним, что $[t_{e,ij}^{in}, t_{e,ij}^{out}] = [t_{e,i}^{in}, t_{e,i}^{out}] \cap [t_{e,j}^{in}, t_{e,j}^{out}]$. Обозначим $\Delta t = t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in}, \Delta t_1 = t_{e,i}^{out} - t_{e,i}^{in}, \Delta t_2 = t_{e,j}^{out} - t_{e,j}^{in}, \Delta t_3 = t_{e,i}^{out} - t_{e,j}^{in}, \Delta t_4 = t_{e,j}^{out} - t_{e,i}^{in}$

Используя лемму 3.1, при $M = max(\overline{\tau}_{e,i}^{max}, \overline{\tau}_{e,j}^{max})$, добавим в задачу новые переменные $\mathbf{1}(\{\Delta t_k > \Delta t_l\}), k \neq l, k, l \in 1, 2, 3, 4$. Рассмотрим велечину $T_{max} = \sum\limits_{e \in E} max(\overline{\tau}_{e,i}^{max}, \overline{\tau}_{e,j}^{max})$. Добавим в нашу задачу следующие неравенства:

$$\Delta t \geq 0,$$
$$\Delta t \geq \Delta t_k - T_{max} \sum_{l != k} \mathbf{1}(\{\Delta t_k > \Delta t_l\}), k = 1, 2, 3, 4$$

Тогда переменная Δt есть длина отрезка $[t_{e,ij}^{in}, t_{e,ij}^{out}]$.

□

Следствие 3.1.

$$\boldsymbol{1}(\{a < b\}) = \begin{cases} 1, a < b, \\ 0, a \geq b \end{cases}$$

Доказательство. Добавим в нашу задачу два неравенства:

$$2M(\mathbf{1}(\{a < b\}) - 1) < b - a \leq 2M\mathbf{1}(\{a < b\})$$

Очевидная проверка показывает, что неравенство выполняется для любых a, b.

□