

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
специалиста

**ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА  
ПРИ ЗАДАННЫХ ПУНКТАХ ОТПРАВЛЕНИЯ И НАЗНАЧЕНИЯ  
ВСЕХ УЧАСТНИКОВ ДВИЖЕНИЯ**

Выполнил студент 610 группы  
Пехтерев Станислав Игоревич

---

подпись студента

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Васенин Валерий Александрович

---

подпись научного руководителя

Москва  
2022

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Постановка задачи</b>	<b>5</b>
1.1 Общая постановка задачи . . . . .	5
1.2 Постановка задачи в терминах модели движения . . . . .	6
<b>2 Модели движения</b>	<b>10</b>
2.1 Макроскопические модели . . . . .	10
2.2 Микроскопические модели . . . . .	13
<b>3 Равновесие транспортных потоков</b>	<b>15</b>
3.1 Некооперативное и кооперативное равновесие . . . . .	15
3.2 Поиск кооперативного равновесия . . . . .	17
<b>4 Результаты</b>	<b>20</b>
4.1 Поиск оптимальной комбинации при одинаковом приоритете участников . . . .	20
<b>5 Заключение</b>	<b>21</b>
<b>Литература</b>	<b>22</b>

# Введение

Данная дипломная работа посвящена одной из задач математического моделирования транспортных потоков. А именно нас интересует построение оптимальных путей при заданных пунктах начала и конца всех участников движения на ориентированном графе в предположении, что участники следуют нашим рекомендациям. Участники могут оказывать влияние друг на друга, и что хорошо для одного, может критически отразиться на движении другого. Такая модель взаимодействия хорошо описывается некооперативной игрой, в процессе которой они не могут формировать коалиции и координировать свои действия. Однако наша задача — скооперировать всех участников движения с помощью некоторой качественной оценки всевозможных комбинаций путей. Выбор такой оценки достаточно широк и неоднозначен и зависит от преследуемых целей. Они могут быть заданы приоритетами участников движения. Например, целью может быть обеспечение свободного передвижения служб спасения или кортежа, а может быть уменьшение общего времени движения участников.

Говоря об актуальности задачи, достаточно сказать, что на данный момент существует множество научных журналов<sup>1</sup>, в которых регулярно публикуются статьи на транспортную тематику. Также известное немецкое издательство *Springer* публикует труды ученых, представленных на конференции по математическому моделированию транспортных потоков “*Traffic and granular flow*”, которая проводится с периодичностью в 2 года.

На сегодняшний день предложено множество математических моделей, позволяющих исследовать движения участников, однако они имеют свои недостатки. Так, например, в учебном пособии А. Е. Гасникова [2] изложены модели, описывающие плотный статический поток машин, передвигающихся из множества точек истока во множество точек стока. Такой подход является корректным, только если в каждый момент времени на участке некоторого пути можно задать постоянную плотность машин — количество машин на единицу длины. Также в учебном пособии отдельное место занимает применение теории гидродинамики к описанию движения транспортных потоков. Их представляют как потоки сжимаемой жидкости, описываемые законом сохранения количества автомобилей. В отличие от предыдущей модели, этот подход подразумевает возможность исследования нестатического потока, но не позволяет отслеживать движения участников на путях.

Наш подход заключается в задании некоторой модели взаимодействия участников, с помощью которой можно полностью промоделировать движение каждого из них. Основа модели — ограничения на скорости и законы их изменения при взаимодействии участников друг с другом. Такой подход отличается индивидуализацией участников движения — их количественные характеристики могут быть исследованы по отдельности. Заданная нами модель взаимодействия участников способна описать естественное движение автомобилей, что позволяет исследовать влияние добавления или расширения дорог на количество и длины пробок.

---

<sup>1</sup>Перечень научных журналов: *Transportation Research: Part B*, *Physical Review E*, *Review of modern physics*, *Transportation Science*.

Общая постановка задачи, описанная в первом разделе, основана только на функции затрат. В том же разделе будут разработаны и исследованы некоторые модели движения участников, будет предложена классификация этих моделей. Среди них мы выделим класс, для которого доказана возможность сведения задачи оптимизации к задаче смешанного целочисленного линейного программирования. В третьем разделе, руководствуясь принципами в теории транспортного равновесия, мы попробуем решить задачу построения оптимальных маршрутов путем поиска таких равновесий.

# 1 Постановка задачи

Для начала сформулируем задачу оптимизации транспортного потока в общей форме. В разделе 1.2 мы конкретизируем постановку задачи, задав некоторую модель движения.

## 1.1 Общая постановка задачи

*Дорожной сетью* назовем тройку  $G = (V, E, l)$ , где  $(V, E)$  — ориентированный граф с длинами ребер  $l : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ . Предположим, что имеется  $n$  участников с заданными точками отправления  $A_i \in V$  и прибытия  $B_i \in V$ . Пусть множество  $P_i$  есть множество всех простых путей из  $A_i$  в  $B_i$ . Элемент декартового произведения  $P = \prod_{i=1}^n P_i$  назовем *комбинацией путей*. Пусть известно, что при комбинации путей участников  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in P$   $i$ -ый участник затрачивает  $T_i(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  времени на свой путь. Функции  $T_i$  назовем *функциями временных затрат* участника  $i$ . *Некооперативным прокладыванием пути* в дорожной сети  $G$  назовем пятерку  $F = (n, G, \{A_i\}_{i=1}^n, \{B_i\}_{i=1}^n, \{T_i\}_{i=1}^n)$ . Некооперативное прокладывание пути предполагает, что каждый участник стремится сократить собственные временные затраты выбором пути  $p_i$ , несмотря на временные затраты других участников. Для того, чтобы скооперировать участников, введем некоторую функцию  $\Phi(\mathbf{p}) = \phi(T_1(\mathbf{p}), \dots, T_n(\mathbf{p}))$ , определенную на множестве всех возможных комбинаций путей  $P$  и отображающую его во множество действительных чисел. С помощью нее участники могут отслеживать, как влияет изменение их пути на общую картину движения. Такую функцию назовем *функцией стоимости*.

Для заданных некооперативного прокладывания пути  $F$  и функции стоимости  $\Phi$  необходимо найти комбинацию путей  $\mathbf{p}^*$  такую, что функция стоимости на ней минимальна, то есть

$$\Phi(\mathbf{p}^*) = \min_{\mathbf{p} \in P} \Phi(\mathbf{p}). \quad (1)$$

Комбинацию путей  $\mathbf{p}^*$  будем называть *оптимальной*, а стоимость  $\Phi(\mathbf{p}^*)$  — *оптимальной стоимостью*.

В данной работе мы рассматриваем случай, когда каждый участник имеет одинаковый приоритет в вопросе изменения своих временных затрат, то есть

$$\frac{\partial \phi}{\partial T_i} \equiv 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

или

$$\phi(T_1, \dots, T_n) = \sum_{i=1}^n T_i.$$

Приведем ряд ограничений на функции  $T_i(\mathbf{p})$ , которые позволят задать движения всех участников во времени при комбинации путей  $\mathbf{p}$ .

## 1.2 Постановка задачи в терминах модели движения

Будем считать, что временные затраты участника на выбранном пути состоят из временных затрат на каждом ребре этого пути:

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in p_i} \bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}),$$

где функции  $\bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p})$  — временные затраты  $i$ -ого участника на ребре  $e$  при комбинации путей  $\mathbf{p}$ .

Для того, чтобы задать движение участника на пути, введем функции присутствия участника на ребре в момент времени  $t$ :

$$\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый участник движется по ребру } e \text{ в момент времени } t, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $\sum_{e \in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t)$  принимает значение 1, пока  $i$ -ый участник не посетит свою точку назначения  $B_i$ . Пусть достижение конца пути  $p_i$  наступает в момент  $T_i(\mathbf{p})$ , после чего  $\sum_{e \in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t)$  принимает значение 0. Получаем, что

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in p_i} \int_0^{\infty} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) dt, \quad \forall \Delta t > 0. \quad (2)$$

Будем считать, что движение каждого участника является непрерывным и однонаправленным в дорожной сети  $G$ . Другими словами, участник не может резко появляться и исчезать на несмежных ребрах, а также находиться на уже пройденных ребрах. Таким образом, функции  $\theta_{e,i}(\mathbf{p}, t)$  являются индикаторами некоторых временных отрезков  $[t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})]$ , которые описывают однонаправленное движение:

$$\begin{cases} t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}), t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}_+, & i = 1, \dots, n, \quad e \in E, \\ t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \leq t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}), & i = 1, \dots, n, \quad e \in p_i, \\ t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) = t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) = 0, & i = 1, \dots, n, \quad e \notin p_i, \\ t_{e_1,i}^{in}(\mathbf{p}) = t_{e_2,i}^{out}(\mathbf{p}), & i = 1, \dots, n, \quad e_1, e_2 \in p_i, \quad \exists A, B, C \in V : e_1 = (A, B), e_2 = (B, C) \\ t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) = 0, & i = 1, \dots, n, \quad e = (A_i, X), \quad X \in V. \end{cases} \quad (3)$$

Заметим, что выбор таких отрезков пока неоднозначен. Далее считаем, что для каждого ребра  $e$ , участника  $i$  и комбинации путей  $\mathbf{p}$  каким-то образом выбраны некоторые величины  $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})$ ,  $t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})$ , удовлетворяющие ограничениям (3). Тогда функция временных затрат (2)  $i$ -ого участника примет вид

$$T_i(\mathbf{p}) = \sum_{e \in E} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}). \quad (4)$$

Функция стоимости в этом случае равна

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}). \quad (5)$$

Считаем, что временные затраты участника  $i$  на ребре  $e$  ограничены некоторыми положительными константами  $\bar{\tau}_{e,i}^{min}$ ,  $\bar{\tau}_{e,i}^{max}$ :

$$0 < \bar{\tau}_{e,i}^{min} \leq t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \leq \bar{\tau}_{e,i}^{max}, \quad e \in p_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Заметим, что задача оптимизации целевой функции (5) с ограничениями (3), (6) ставится в терминах задачи смешанного целочисленного линейного программирования [3] с булевыми переменными  $I_{e,i}$  и вещественными переменными  $t_{e,i}^{in}$ ,  $t_{e,i}^{out}$ . Для участника  $i$  первые отвечают факту проезда по ребру  $e$ , вторые — моментам прохождения этого ребра. Однако в данных ограничениях решение уже есть — участник  $i$  передвигается по кратчайшему пути в дорожной сети  $G$  с весами  $\bar{\tau}_{e,i}^{min}$ . Тривиальность решения связана с тем, что в данной задаче оптимизации отсутствуют влияния участников друг на друга. Для того, чтобы учесть это влияние, для каждого участника  $i$  введем микроскопическую характеристику движения  $v_i(\mathbf{p}, t)$  — положительную, ограниченную функцию, описывающую скорость участника. Тогда имеет место следующее ограничение

$$\int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t) dt = l_e, \quad e \in p_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

или

$$\int_{t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})}^{t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})} v_i(\mathbf{p}, t) dt = l_e, \quad e \in p_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Будем говорить, что уравнения (8) задают *движения участников*, а функции  $v_i(\mathbf{p}, t)$  назовем *моделью движения*. Будем считать, что функции  $v_i$  ограничены некоторыми положительными константами. Обозначим верхние и нижне грани этих функции  $v_i^{max} > 0$  и  $v_i^{min} > 0$  соответственно. Без ограничения общности считаем, что  $\bar{\tau}_{e,i}^{min}$ ,  $\bar{\tau}_{e,i}^{max}$  вычисляются в самом быстром и самом медленном вариантах передвижения по ребру  $e$  участником  $i$ , а именно

$$\bar{\tau}_{e,i}^{min} = \frac{l_e}{v_i^{max}}, \quad \bar{\tau}_{e,i}^{max} = \frac{l_e}{v_i^{min}}. \quad (9)$$

Заметим, что величины  $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})$ ,  $t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}_+$  — произвольные вещественные величины, которые удовлетворяют ограничениям (3), (6), (8), (9).

**Утверждение 1.1.** Пусть задана дорожная сеть  $G$ , модель движения  $v_i(\mathbf{p}, t)$ , и для каждого ребра  $e$ , участника  $i$  и комбинации путей  $\mathbf{p}$  задано множество величин  $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})$ ,  $t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}_+$ , для которых выполняются ограничения (3), (6), (8), (9). Тогда  $t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})$  и  $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})$ ,  $e \in p_i$  есть функции от комбинации путей  $\mathbf{p} \in P$ .

*Доказательство.* Зафиксируем некоторую комбинацию путей  $\mathbf{p}$ . Опишем алгоритм поиска значений  $t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})$  и  $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})$  и покажем его корректность.

---

**Algorithm 1** Моделирование движения участников

---

**Input:** количество участников  $n$ , дорожная сеть  $G$ , комбинация путей  $\mathbf{p}$  сети  $G$

**Output:**  $t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})$ ,  $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})$ ,  $e \in p_i, i = 1, \dots, n$

**Data:** текущее время  $t$ , текущее ребро  $e_i$  и часть пройденного ребра  $x_i$  участника  $i$

```
1:  $t = 0$ 
2: for  $i = 1, \dots, n$  do
3:    $e_i \leftarrow$  первое ребро пути  $p_i$ 
4:    $x_i \leftarrow 0$ 
5:    $t_{e_i,i}^{in}(\mathbf{p}) \leftarrow 0$ 
6: end for
7: while  $\exists j : j$  — не достиг  $B_j$  do
8:    $\tau^* \leftarrow \operatorname{argmin}\{\tau \in \mathbb{R} : \tau > t, \int_t^\tau v_i(\mathbf{p}, t) dt = (1 - x_i)l_{e_i}, i \text{ — не достиг } B_i\}_{i=1}^n$ 
9:   for  $i = 1, \dots, n$  and  $i$  — не достиг  $B_i$  do
10:     $x_i \leftarrow x_i + \frac{1}{l_{e_i}} \int_t^{\tau^*} v_i(\mathbf{p}, t) dt$ 
11:    if  $x_i = 1$  and  $e_i$  — не последнее ребро пути  $p_i$  then
12:       $x_i \leftarrow 0$ 
13:       $t_{e_i,i}^{out}(\mathbf{p}) \leftarrow \tau^*$ 
14:       $e_i \leftarrow$  следующее ребро за  $e_i$  в пути  $p_i$ 
15:       $t_{e_i,i}^{in}(\mathbf{p}) \leftarrow \tau^*$ 
16:    end if
17:  end for
18:   $t \leftarrow \tau^*$ 
19: end while
```

---

Будем называть данный алгоритм *моделированием движения*.

*Корректность.* Для доказательства корректности алгоритма достаточно доказать корректность шага 8 и достижимость шага 11. Это следует из того, что функция скорости ограничена снизу (см. ограничения (6), (9)). Алгоритм сойдется, поскольку пути  $p_i$  конечны.  $\square$

Используя это утверждение, можем ввести следующее понятие:

*Некооперативным передвижением* в дорожной сети  $G$  в модели движения  $v_i(\mathbf{p}, t)$  назовем такое некооперативное прокладывание пути

$$F = \left( n, G, \{A_i\}_{i=1}^n, \{B_i\}_{i=1}^n, \left\{ \sum_{e \in p_i} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \right\}_{i=1}^n \right),$$

где функции  $t_{e,i}^{in}(\mathbf{p})$ ,  $t_{e,i}^{out}(\mathbf{p})$  получены путем моделирования движения с моделью движения  $v_i(\mathbf{p}, t)$ . Значит, постановка задачи в терминах модели движения следующая:

Пусть задано некооперативное передвижение в дорожной сети  $G$  в модели движения  $v_i(\mathbf{p}, t)$ . Требуется найти комбинацию путей  $\mathbf{p}$  такую, что функция



$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} t_{e,i}^{out}(\mathbf{p}) - t_{e,i}^{in}(\mathbf{p}) \quad (10)$$

минимальна.

Оказывается, что для любого некооперативного прокладывания пути существует эквивалентное ему некооперативное передвижение в некоторой модели движения  $v_i(\mathbf{p}, t)$ . Другими словами, любое некооперативное прокладывание пути можно промоделировать.

## 2 Модели движения

**Утверждение 2.1.** Пусть заданы некоторое некооперативное прокладывание пути  $F$ . Тогда можно задать модель движения  $v_i(\mathbf{p}, t)$  такую, что затраченное время на передвижение  $i$ -ым участником при комбинации путей  $\mathbf{p}$  совпадает с его временными затратами, то есть выполняется (4).

*Доказательство.* Рассмотрим модель движения с постоянными скоростями

$$v_i(\mathbf{p}, t) = \bar{v}_i(\mathbf{p}) = \frac{T_i(\mathbf{p})}{\sum_{e \in P_i} l_e}.$$

Промоделировав движение с такими скоростями, получим (4). □

Таким образом, можно считать, что существует, по крайней мере, одна модель движения, описывающая некооперативное прокладывание пути.

Очевидно, что решение задачи перебором не является практичным — оно сводится к перебору всех комбинаций путей  $\mathbf{p} \in P$ . Так, например, количество таких комбинаций в полном графе составляет  $2^{n(|V|-1)}$ , перебрать которые в условиях реальных данных вычислительно сложно. Однако в случае, когда условие (8) можно описать в терминах задачи удовлетворения ограничений, задача оптимизации (10) может быть описана в терминах смешанного целочисленного линейного программирования и, как следствие, может быть решена стандартным решателем. Оказывается, можно выделить целый класс таких моделей движения, для которых это возможно.

### 2.1 Макроскопические модели

Предположим, что скорость участника зависит от некоторой общей для участников величины. Например, от функции *загруженности ребра*

$$n_e(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^n \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t),$$

значение которой в момент времени  $t$  соответствует количеству участников на ребре  $e$  при комбинации путей  $\mathbf{p}$ . Предположим, скорость участника зависит только от загруженности ребра, на котором он находится в момент времени  $t$ , то есть существует ограниченная функция  $v : \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  такая, что

$$v_i(\mathbf{p}, t) = \sum_{e \in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)), \quad i = 1, \dots, n \quad (11)$$

Такую модель движения в дальнейшем будем называть *макроскопической*. Например, естественно рассмотреть модель  $v(n_e(\mathbf{p}, t)) = \frac{v_{max}}{n_e(\mathbf{p}, t)}$ . В общем случае такая модель задается последовательностью значений  $\{v(k)\}_{k=1}^n$ .

**Лемма 2.1.** Пусть даны вещественные переменные  $a, b$  целочисленного программирования, и известно, что существует константа  $M > 0$ :  $|a| < M$ ,  $|b| < M$ . Тогда можно добавить новую целочисленную переменную  $\mathbf{1}(\{a < b\}) \in \{0, 1\}$  такую, что

$$\mathbf{1}(\{a < b\}) = \begin{cases} 1, & a < b, \\ 0, & a \geq b. \end{cases}$$

*Доказательство.* Добавим в нашу задачу два неравенства:

$$2M(\mathbf{1}(\{a < b\}) - 1) < b - a \leq 2M\mathbf{1}(\{a < b\})$$

Очевидная проверка показывает, что неравенство выполняется для любых  $a, b$ . □

**Утверждение 2.2.** Пусть модель движения  $v_i(\mathbf{p}, t)$  макроскопическая. Тогда задача (10) есть задача смешанного целочисленного линейного программирования.

*Доказательство.* Докажем для случая  $n = 2$ . Для случаев  $n \geq 2$  доказательство аналогичное.

Пусть имеется задача смешанного целочисленного линейного программирования (3) с переменными  $t_{e,i}^{in}, t_{e,i}^{out}, I_{e,i}$ ,  $e \in E$ ,  $i = 1, 2$ . Преобразуем условие (8) к каноническому виду задачи удовлетворения ограничений. Для удобства обозначим обоих участников индексами  $i, j \in \{1, 2\}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v_i(\mathbf{p}, t) dt &= \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) \sum_{e^1 \in E} \theta_{e^1,i}(\mathbf{p}, t) v(n_{e^1}(\mathbf{p}, t)) dt = \\ \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)) dt &= \int_{n_e(\mathbf{p}, t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)) dt + \int_{n_e(\mathbf{p}, t)=2} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t)) dt = \\ &= \int_{\theta_{e,j}(\mathbf{p}, t)=0} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(1) dt + \int_{\theta_{e,j}(\mathbf{p}, t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(2) dt = \\ \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(1) dt - \int_{\theta_{e,j}(\mathbf{p}, t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(1) dt &+ \int_{\theta_{e,j}(\mathbf{p}, t)=1} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(2) dt = \\ v(1) \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) dt + (v(2) - v(1)) \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) \theta_{e,j}(\mathbf{p}, t) dt &= \\ v(1) \bar{\tau}_{e,i}(\mathbf{p}) + (v(2) - v(1)) \int_0^\infty \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) \theta_{e,j}(\mathbf{p}, t) dt &= l_e, \quad e \in p_i \end{aligned}$$

Неизвестный интеграл — время совместного проезда участников на ребре  $e$ .

В переменных задачи смешанного целочисленного программирования получим:

$$v(1)(t_{e,i}^{out} - t_{e,i}^{in}) + (v(2) - v(1))(t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in}) = l_e I_{e,i},$$

где новые переменные  $t_{e,ij}^{in}$ ,  $t_{e,ij}^{out}$  отвечают началу и концу совместного проезда участников. Иначе говоря,  $[t_{e,ij}^{in}, t_{e,ij}^{out}] = [t_{e,i}^{in}, t_{e,i}^{out}] \cap [t_{e,j}^{in}, t_{e,j}^{out}]$ . Просуммировав по всем ребрам  $e \in E$ , получим

$$v(1) \sum_{e \in E} (t_{e,i}^{out} - t_{e,i}^{in}) = \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} - (v(2) - v(1)) \sum_{e \in E} (t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in}).$$

Заметим, что левая часть представляет собой временные затраты участника  $i$  с коэффициентом  $v(1)$ , поэтому задачу оптимизации можно переписать в виде

$$\frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} + \frac{v(1) - v(2)}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} (t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in}) \rightarrow \min.$$

Для завершения доказательства необходимо показать, что переменные  $t_{e,ij}^{in}$ ,  $t_{e,ij}^{out}$  описываются линейными ограничениями. Обозначим

$$\Delta t = t_{e,ij}^{out} - t_{e,ij}^{in}$$

$$\Delta t_1 = t_{e,i}^{out} - t_{e,i}^{in}$$

$$\Delta t_2 = t_{e,j}^{out} - t_{e,j}^{in}$$

$$\Delta t_3 = t_{e,i}^{out} - t_{e,j}^{in}$$

$$\Delta t_4 = t_{e,j}^{out} - t_{e,i}^{in}.$$

Используя лемму 2.1 при  $M = \max_{e \in E, k=i,j} \bar{\tau}_{e,k}^{max}$ , добавим в задачу новые переменные  $\mathbf{1}(\{\Delta t_k > \Delta t_l\})$ ,  $k \neq l$ ,  $k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Рассмотрим величину  $T_{max} = |E|M$ . В случае  $v(1) \geq v(2)$  добавим в нашу задачу следующие неравенства:

$$\Delta t \geq 0,$$

$$\Delta t \geq \Delta t_k - T_{max} \sum_{l \neq k} \mathbf{1}(\{\Delta t_k > \Delta t_l\}), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

В случае  $v(1) < v(2)$  добавим те же ограничения с другим знаком неравенства. Тогда с учетом оптимизации переменная  $\Delta t$  есть длина отрезка  $[t_{e,ij}^{in}, t_{e,ij}^{out}]$ . □

**Следствие 2.1.** Пусть модель движения  $v_i(\mathbf{p}, t) = \sum_{e \in E} \theta_{e,i}(\mathbf{p}, t) v(n_e(\mathbf{p}, t))$  макроскопическая и последовательность  $v(n) > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+$  убывает. Предположим, что оптимальное время движения в модели с постоянной скоростью  $v(1)$  есть  $\tilde{T}$ . Тогда

$$\tilde{T} \leq T \leq \frac{v(1)}{v(n)} \tilde{T}.$$

*Доказательство.* Докажем каждое неравенство по отдельности

1. В модели, где все участники едут с постоянными скоростями, движение происходит по кратчайшим путям. Тогда временные затраты есть  $\tilde{T} = \frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in p_i} l_e$ , где  $p_i$  - кратчайшие пути. На тех же путях задается худший случай макроскопической модели — все едут с минимальной скоростью, то есть  $T = \frac{1}{v(n)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in p_i} l_e$ . Тогда получим

$$T \leq \frac{1}{v(n)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in p_i} l_e = \frac{v(1)}{v(n)} \tilde{T}.$$

2. Производя аналогичные вычисления, что и в доказательстве 2.2, получаем, что функция оптимизации имеет вид

$$\frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} + \sum_{k=2}^n \frac{v(1) - v(k)}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} \sum_{\substack{s_k \in 2^n \\ |s_k|=k}} \Delta t_{e,s_k} \rightarrow \min,$$

где переменные  $\Delta t_{e,s_k}$  отвечают времени совместного движения участников  $s_k$  (и только их) по ребру  $e$ .

Тогда получим

$$T \geq \min \left( \frac{1}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} l_e I_{e,i} \right) + \min \left( \sum_{k=2}^n \frac{v(1) - v(k)}{v(1)} \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} \sum_{\substack{s_k \in 2^n \\ |s_k|=k}} \Delta t_{e,s_k} \right) \geq \tilde{T}.$$

□

Таким образом, мы получили класс моделей движения, для которых задача оптимизации транспортного потока может быть поставлена в терминах смешанного целочисленного линейного программирования. Однако такой класс моделей движения плохо описывает реальное движение автомобилей. Так, например, модель не учитывает расстояние между участниками и их порядок на ребре.

## 2.2 Микроскопические модели

*Микроскопическими* называются модели движения, которые не являются макроскопическими, то есть не представимы в виде (11). В таких моделях явно исследуется движение каждого автомобиля. Выбор такой модели позволяет теоретически достичь более точного описания движения автомобилей по сравнению с макроскопической моделью, однако на практике этот подход требует больших вычислительных ресурсов.

В качестве примера рассмотрим движение по бесконечному ребру. Пусть  $x_i(t) \in [0, +\infty)$  — координаты участника  $i$ . Предположим, что скорости участников ограничены некоторой общей величиной  $v_{max}$ . Пусть в момент времени  $t = 0$  выполняется  $x_1(0) \leq x_2(0) \leq \dots \leq x_n(0)$ .

## Модель пропорциональной скорости

Рассмотрим модель, в которой скорость участника пропорциональна расстоянию до впереди идущего участника. Положим  $d_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Без ограничения общности считаем, что  $d_i(0) < D$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , где  $D$  — расстояние, на котором происходит взаимодействие участников. Иначе рассмотрим подпоследовательности участников, для которых выполняется это условие.

Пусть модель движения есть

$$v_i(t) = \begin{cases} v_{max}, & i = n, \\ v_{max} \frac{d_i(t)}{D}, & i \neq n. \end{cases} \quad (12)$$

Для поиска функций  $x_i(t)$  достаточно рассмотреть систему дифференциальных уравнений

$$\dot{d}_i(t) = v_{i+1}(t) - v_i(t).$$

Решением такой системы является

$$d_{n-k}(\tau) = \sum_{l=0}^{k-1} \left( \frac{d_{n-k+l}(0) - D}{l!} \tau^l e^{-\tau} \right) + D,$$

где  $\tau = \frac{v_{max}}{D} t$ . Модель обладает тем свойством, что порядок участников постоянен и участники не покидают зону взаимодействия  $D$ .

Данная модель хорошо описывает реальное движение участников, однако ее практическое применение вызывает сложности, поскольку решение уравнения, вычисляемое на шаге 2 моделирования движения (см. алгоритм 1), может быть найдено только приближенно.

## Модель снижения скорости

Предположим, что существует некоторая величина  $c_n$ , которая отвечает за последовательное снижение скорости участников относительно их порядка:

$$v_{n-k} = v_{max} - c_n k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Величину  $c_n$  выберем из соображений, что  $v_0 = \frac{v_{max}}{n}$ . Тогда  $c_n = \frac{v_{max}}{n}$ . Если смоделировать данное движение в дорожной сети, то функции скоростей будут кусочно-постоянными. Это связано с тем, что при смене ребра некоторым участником меняются порядок и величина  $n_e(\mathbf{p}, t)$ . Поэтому модель снижения скорости не лучшим образом описывает реальное движение, однако проста в использовании.

В отличие от макроскопических моделей, микроскопические модели не сводятся к задаче целочисленного программирования. Однако для любой модели движения можно описать алгоритмы оптимизации, которые сходятся к «локальному минимуму». Рассмотрим такие алгоритмы в следующем разделе.

### 3 Равновесие транспортных потоков

В работе А. С. Piegou [5] показано, что в статическом транспортном потоке с линейными функциями затрат  $\tau_e(y) = a_e y_e + b_e$  суммарные затраты в состоянии равновесия могут составлять  $4/3$  от суммарных затрат системного оптимума. Оказывается, это соотношение представляет собой наилучшую оценку для таких функций затрат. Поскольку статический транспортный поток с линейными функциями затрат — частный случай макроскопической модели движения

$$v(n_e(\mathbf{p}, t)) = \frac{v_{max}}{n_e(\mathbf{p}, t)}$$

с бесконечным набором участников, то можно выдвинуть гипотезу, что данное соотношение выполняется и для нашего движения участников.

В этом разделе мы исследуем задачу поиска равновесия транспортных потоков как возможность поиска оптимального транспортного потока.

#### 3.1 Некооперативное и кооперативное равновесие

*Некооперативной игрой в нормальной форме* назовем тройку  $\Gamma = (n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{H_i\}_{i=1}^n)$ , где  $n \in \mathbb{N}$  — количество участников игры,  $S_i$  — множество стратегий участника  $i \in 1, \dots, n$ ,  $H_i$  — функция выигрыша участника  $i$ , определенная на множестве ситуаций  $S = \prod_{i=1}^n S_i$  и отображающая его во множество действительных чисел.

*Равновесием Нэша* некооперативной игры в нормальной форме  $\Gamma = (n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{H_i\}_{i=1}^n)$  назовем стратегию  $\mathbf{s}^* = (s_1^*, \dots, s_n^*) \in S$  такую, что ни одному игроку  $i$  невыгодно изменение своей стратегии с  $s_i^*$  на любую другую  $s \in S_i$ . В наших обозначениях равновесие Нэша принимает вид

$$H_i(\mathbf{s}^*) \geq H_i((s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)), \forall s \in S_i, i = 1, \dots, n.$$

Заметим, что в общем случае ничего нельзя сказать о существовании и единственности равновесия некооперативной игры.

Введем понятия некооперативного и кооперативного равновесия, которые являются равновесиями Нэша в терминах некооперативного прокладывания пути, где выигрыш заключается в сэкономленном времени передвижения и стоимости соответственно.

*Некооперативным равновесием* некооперативного прокладывания пути  $F$  назовем комбинацию путей  $\hat{\mathbf{p}} \in P$ , которая является равновесием Нэша некооперативной игры  $\hat{\Gamma} = (n, \{P_i\}_{i=1}^n, \{-T_i\}_{i=1}^n)$ . Множество всех некооперативных равновесий обозначим  $\hat{P}$ .

*Кооперативным равновесием* некооперативного прокладывания пути  $F$  и функции стоимости  $\Phi(\mathbf{p})$  назовем комбинацию путей  $\tilde{\mathbf{p}} \in P$ , которая является равновесием Нэша некооперативной игры  $\tilde{\Gamma} = (n, \{P_i\}_{i=1}^n, \{-\Phi\}_{i=1}^n)$ . Множество всех кооперативных равновесий обозначим  $\tilde{P}$ .

Заметим, что определения некооперативного прокладывания пути и некооперативной игры эквивалентны. Таким образом, любой пример игры, где равновесия Нэша не существует,

можно использовать как пример некооперативного передвижения в дорожной сети, где нет кооперативного равновесия. В работе Д. Браеса [4] рассмотрен пример транспортного потока, для которого транспортное равновесие перестает быть оптимальным после добавления дополнительного ребра в граф. Оказывается, что такое поведение наблюдается и в нашей модели движения.

Пусть имеется  $n = 4000$  участников движения. Рассмотрим ориентированный граф  $G$  (см. рис. 1).

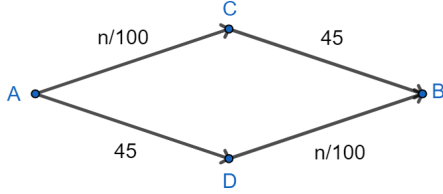


Рис. 1: Парадокс Браеса. Оптимальное некооперативное равновесие

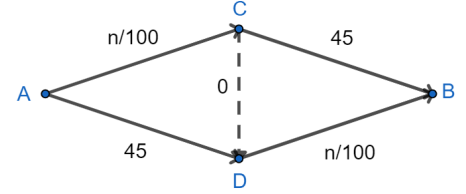


Рис. 2: Парадокс Браеса. Неоптимальное некооперативное равновесие

Положим, что временные затраты по ребрам есть

$$\bar{\tau}_{AC,i}(\mathbf{p}) = \frac{n_{AC,i}(\mathbf{p})}{100}, \quad \bar{\tau}_{CB,i}(\mathbf{p}) = 45,$$

$$\bar{\tau}_{AD,i}(\mathbf{p}) = 45, \quad \bar{\tau}_{DB,i}(\mathbf{p}) = \frac{n_{DB,i}(\mathbf{p})}{100}.$$

Предположим, что все участники движения имеют точку отправления  $A$  и прибытия  $B$ . Пусть  $a \in \mathbb{Z}_+$  участников выбирают путь  $ACB$  и  $b \in \mathbb{Z}_+$  участников — путь  $ADB$ . Тогда, некооперативное равновесие достигается в случае

$$\frac{a}{100} + 45 = \frac{b}{100} + 45,$$

то есть  $a = b$  и временные затраты каждого участника составляют 65 единиц времени. Такое распределение участников по путям является оптимальным, поскольку является решением задачи оптимизации

$$a \left( \frac{a}{100} + 45 \right) + b \left( \frac{b}{100} + 45 \right) \rightarrow \min_{\substack{a \geq 0, b \geq 0 \\ a+b=4000}}.$$

Теперь добавим в граф ребро  $CD$  (см. рис. 2) так, что временные затраты на проезд по нему близки к 0:

$$\bar{\tau}_{CD,i}(\mathbf{p}) \approx 0.$$

В таком случае никому из участников, передвигающихся через вершину  $C$ , не выгодно ехать по ребру  $CB$ . С другой стороны, самый быстрый способ добраться до вершины  $D$  — передвигаться по пути  $ACD$ . Таким образом, некооперативное равновесие достигается, когда все участники передвигаются по новому пути  $ACDB$ . При этом они затрачивают  $\frac{n}{100} + \frac{n}{100} = 80$  единиц времени. Поскольку стоимость комбинации путей увеличилась, данное некооперативное равновесие перестало быть оптимальным.

Заметим, что для кооперативного равновесия верно обратное:



**Утверждение 3.1.** Множество кооперативных равновесий  $\tilde{P}$  не пусто, причем оптимальная комбинация путей является таким равновесием, то есть  $\mathbf{p}^* \in \tilde{P}$ .

*Доказательство.* Поскольку для любого  $\mathbf{p} \in P$

$$\Phi(\mathbf{p}^*) \leq \Phi(\mathbf{p}),$$

то неравенство верно и для комбинаций путей  $\mathbf{p} = (p_1^*, \dots, p_{i-1}^*, p, p_{i+1}^*, \dots, p_n^*)$ ,  $p \in P_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .  $\square$

В некотором смысле кооперативным равновесием можно назвать «локальным минимум» функции  $\Phi$ .

### 3.2 Поиск кооперативного равновесия

Рассмотрим ряд алгоритмов, позволяющих получить некоторое кооперативное равновесие.

Общим свойством всех этих алгоритмов является предположение о том, что существует некоторый алгоритм  $\alpha(\Phi_i)$ , позволяющий решить задачу оптимизации некоторой функции стоимости  $\Phi_i(\mathbf{p}) = \phi_i(T_1(\mathbf{p}), \dots, T_n(\mathbf{p}))$  посредством выбора пути  $p_i$ :

$$\alpha(\Phi_i) : \Phi_i(\mathbf{p}) \rightarrow \min_{p_i \in P_i} \quad (13)$$

В работе Л. Е. Разумовой [1] представлен один из таких алгоритмов построения оптимального пути  $p_i$  за полиномиальное относительно входных данных время при условии, что функция  $\Phi_i(\mathbf{p})$  удовлетворяет неравенству

$$\Phi_i(p_1, \dots, p_{i-1}, pe, p_{i+1}, \dots, p_n) \leq \Phi_i(p_1, \dots, p_{i-1}, qe, p_{i+1}, \dots, p_n), \quad (14)$$

где  $p, q$  — два пути к некоторой вершине  $B \in V$ , ребро  $e$  выходит из этой вершины и путь  $p$  «дешевле», чем  $q$  относительно стоимости  $\Phi_i$ :

$$\Phi_i(p_1, \dots, p_{i-1}, p, p_{i+1}, \dots, p_n) \leq \Phi_i(p_1, \dots, p_{i-1}, q, p_{i+1}, \dots, p_n). \quad (15)$$

В той же работе показано, что в том случае, когда добавление любого участника не влияет на движение других участников, функции  $\Phi_i = T_i$  удовлетворяют условиям (14), (15) в моделях, описанных в нашей работе. На практике же, это влияние существует. Погрешность алгоритма  $\alpha(\Phi_i)$  в таком случае зависит от экстремальных свойств функции  $v_i(\mathbf{p}, \mathbf{t})$ .

Предположим, что имеются некоторые функции стоимости  $\Phi_i(\mathbf{p})$ , удовлетворяющие условиям (14), (15), и процессы оптимизации стоимостей  $\phi_i$  и  $\phi$  по времени  $T_i$  одинаковы:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial T_i} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial T_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

При условиях (14), (15), (16) возможно описать полиномиальный алгоритм  $\beta(\{\Phi_i\}_{i=1}^n)$ , позволяющий перейти к меньшей стоимости передвижения путем изменения некоторого пути

$p_i$  участника  $i$ . Для поиска кооперативного равновесия достаточно найти неподвижную точку алгоритма  $\beta$ .

---

**Algorithm 2** Поиск неподвижной точки алгоритма  $\beta$

---

**Input:** Начальная комбинация путей  $\mathbf{p}_0 \in P$ , алгоритм  $\beta$ , количество итераций  $iter$

**Output:** кооперативное равновесие  $\tilde{\mathbf{p}} \in \tilde{P}$

**Data:**  $\mathbf{p}_{cur}$  - текущая комбинация путей,  $\mathbf{p}_{new}$  - новая комбинация путей,  $i$  - номер итерации

```

1:  $\mathbf{p}_{cur} \leftarrow \mathbf{p}_0$ 
2:  $i \leftarrow 0$ 
3: while  $i < iter$  do
4:    $\mathbf{p}_{new} \leftarrow \beta(\mathbf{p}_{cur})$ 
5:    $i \leftarrow i + 1$ 
6:   if  $\mathbf{p}_{new} = \mathbf{p}_{cur}$  then
7:     return  $\mathbf{p}_{cur}$ 
8:   end if
9: end while
10: return  $\mathbf{p}_{cur}$ 

```

---

Данный алгоритм не дает гарантий, что сходимость произойдет за число итераций, не зависящее от количества комбинаций путей. Однако результатом каждой итерации алгоритма  $\beta$  является новая комбинация путей  $\mathbf{p}$  меньшей стоимости относительно  $\Phi$ .

Опишем алгоритм, который с некоторыми допущениями на модель движения имеет полиномиальную сложность и находит оптимальную комбинацию путей  $\mathbf{p}$ . Также алгоритм не зависит от начальной комбинации путей  $\mathbf{p}_0 \in P$ . Предположим, имеется набор функций  $\{\{\Phi_{i,k}\}_{i=1}^k\}_{k=1}^n$ , для каждого  $k$  отображающие декартово произведение  $\prod_{i=1}^k P_i$  во множество действительных чисел  $\mathbb{R}$ . Считаем, что все функции удовлетворяют условиям (14), (15), (16).

---

**Algorithm 3** Последовательное добавление участников в движение

---

**Input:** количество участников  $n$ , алгоритм  $\alpha$ , алгоритмы  $\{\beta_k\}_{k=1}^n$

**Output:** кооперативное равновесие  $\tilde{\mathbf{p}} \in \tilde{P}$

**Data:**  $\mathbf{p}_k \in \prod_{i=1}^k P_i$  - кооперативное отношение для первых  $k$  участников,  $\mathbf{p}_{new}$  - новая комбинация путей,  $k$  - номер итерации

```

1:  $k \leftarrow 0$ 
2: while  $k \leq n$  do
3:    $\mathbf{p}_{k+1} \leftarrow (\mathbf{p}_k, \alpha(\mathbf{p}_k))$ 
4:   Запустим алгоритм 2 на комбинации путей  $\mathbf{p}_{k+1}$ 
5:    $k \leftarrow k + 1$ 
6: end while

```

---

При наложенном на модель движения условии, что добавление оптимального пути участника-эгоиста не меняет свойства оптимальности итоговой комбинации путей, можно сказать,

что алгоритм сходится к оптимальной комбинации путей. Для того, чтобы алгоритм сошелся за  $n$  применений алгоритма  $\alpha$ , достаточно изменить условие оптимальности на условие кооперативного равновесия.

## 4 Результаты

Рассмотрим ряд примеров, которые исследуют движение участников, используя подход, основанный на поиске «локального минимума». В качестве алгоритма решения задачи (13) используется обычный перебор путей. Это обусловлено тем, что данный алгоритм дает точное решение и имеет меньшую сложность  $O(|P_i| * S)$  чем сложность  $O(|E| * S)$  алгоритма, описанного в [1]. Велечина  $S$  является сложностью моделирования движения (см. алгоритм 1).

### 4.1 Поиск оптимальной комбинации при одинаковом приоритете участников

Рассмотрим задачу поиска оптимальных комбинаций путей с функций затрат

$$\phi(T_1, \dots, T_n) = \sum_{i=1}^n T_i.$$

Рассмотрим движение  $n = 30$  участников по дорожной сети  $G$  (см. рис. 3).

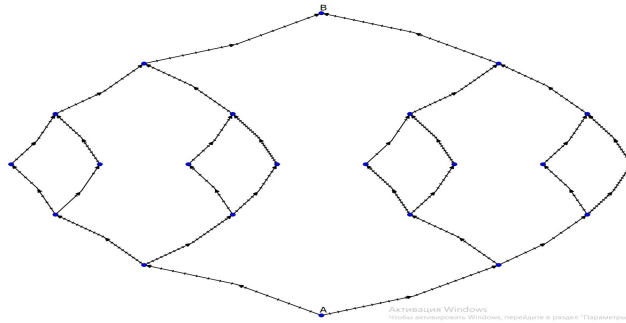


Рис. 3: Пример дорожной сети. Деление на ребрах - мера длины, равная  $L = 500$ .  $n = 30$  участников передвигается из точки  $A$  в точку  $B$ . Участники стартуют с небольшими задержками из точки отправления.

Для исследования алгоритма 2, запустим его с эмпирическими функциями  $\bar{\Phi}_i = \Phi$  и сравним результат с функциями  $\Phi_i = T_i$ . Также для поиска самых невыгодных комбинаций путей можно рассмотреть аналогичную задачу

$$\Phi(\mathbf{p}) \rightarrow \max_{\mathbf{p} \in P},$$



Рис. 4: Пример худшего (слева) и лучшего (справа) случая распределения путей участников.

## 5 Заключение

## Список литературы

- [1] *Л. Е. Разумова*, “Построение оптимального маршрута при заданной модели движения других участников движения” (2022)
- [2] *А. И. Гасников* “Введение в математическое моделирование транспортных потоков” — Издательство МЦНМО — 2013. — 427 с.
- [3] *L. Libralesso* “Mixed Integer Programming formulations for the balanced Traveling Salesman Problem with a lexicographic objective”. (2020)
- [4] *D. Braess, A. Nagurney, T. Wakolbinger*, “On a Paradox of Traffic Planning.” *Transportation Science*. 39. 446-450. 10.1287/trsc.1050.0127 (2005)
- [5] *A. C. Pigou* “The economics of welfare”, London: MacMillan, 1932, 4-th edition. (Русский перевод: Пигу А.С. Экономическая теория благосостояния Т. 1–2, Сер. Экономическая мысль Запада, М.: Прогресс, 1985).