

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
специалиста

**ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТА
ПРИ ЗАДАННОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ДРУГИХ
УЧАСТНИКОВ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ**

Выполнил студент 610 группы
Разумова Любовь Евгеньевна

подпись студента

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Афонин Сергей Александрович

подпись научного руководителя

Москва
2022

Содержание

1	Постановка задачи	5
2	Модели движения	6
2.1	Макроскопические модели	7
2.2	Микроскопические модели	7
3	Моделирование	9
3.1	Независимость движения участников от добавленного АТС	9
3.2	Взаимосвязь движений нового участника и группы АТС	9
4	Поиск оптимального пути	10
4.1	Перебор. Сложность	10
4.2	Дейкстра	11
4.2.1	Модифицированный алгоритм Дейкстры	11
	Литература	19

Введение

В данной работе рассматривается задача нахождения наилучшего в каком-то смысле пути с учетом движения фиксированного количества участников по заданным ранее маршрутам в условиях ограниченности модели дорожной системы. Новый построенный маршрут должен отвечать выбранным критериям кратчайшести среди всевозможных путей на всем временном промежутке, но не обязательно в каждый момент времени. Знание маршрутов изначальных участников помогает определить плотность автомобильного потока на конкретных отрезках пути. Рассматриваемая модель приближена к реальной дорожной системе городов, поэтому на всех ее участках наложены ограничения по вместимости участников и скорости их движения. Такие ограничения влияют на показатели маршрутов участников, такие как итоговое время движения и длину пути.

Тема актуальна в наше время, так как она помогает решить проблему пробок на дорогах, а также призвана упростить водителям выбор маршрута, который займет у них наименьшее время. Задача имеет практический характер... Проблема пробок в Москве стоит очень остро, ученые решают ее не первый год..

В мире прогнозы загруженности используются для автоматического управления дорожным движением в некоторых городах. Первые прототипы, в которых были применены прогнозы, появились в 1998 году в США. А первое пилотное использование системы, «заглядывающей в будущее», началось в 2006 году в Сингапуре. Среди наших соотечественников похожей задачей занимается отдел навигации Яндекс. Разработчики собирают информацию по трекам движения автомобилей, осуществляют привязку треков к ребрам графа дорожной сети, вычисляют некоторую усредненную скорость на отдельных участках, рисуют карту прогноза дорожной ситуации на ближайший час и в связи с этим предлагают оптимальный по времени путь, а также еще пару альтернативных маршрутов. Сложность сбора информации и построения треков движения состоит в том, что, во-первых, не все пользуются сервисами Яндекс при построении своего маршрута, и во-вторых, в данных постоянно возникают лишние шумы, что приводит к выбросам на графиках, и с таким качеством информации работать очень сложно. Мы же рассматриваем более прозрачную и простую модель, когда все маршруты изначально проложены и нам известны, и они не меняются с течением времени. Это не умаляет значимости и важности поставленной нами задачи. Мы получим более четкие результаты, идеи в дальнейшем могут развиваться и открывать новые возможности для более широкой задачи, например, как у Яндекс. Также стоит отметить, что специалисты по навигации используют статистические методы и машинное обучение в качестве инструмента для решения своих задач, мы же подойдем к вопросу с другой стороны и применим другие алгоритмы. На данный момент отдел навигации Яндекс проводит улучшения своих методов и подходов к решению задач, а также придумывает какие-то новые метрики и способы оценки качества этих решений.

Задачи, которые мы ставили перед собой в рамках выбранной темы дипломной работы: формальная постановка задачи, анализ полученных ранее результатов в этой теме, разработка простого алгоритма решения на основе моделирования и его оценка, оценка устойчивости

полученного решения, попытка обобщения дорожной сети, ее расширение (или сужение?). Методы исследования включают в себя: построение графа с вершинами в концевых точках заданных маршрутов и ребрами, отображающими дороги между ними, определение функции веса-загруженности дорог,

Основа нашей задачи - нахождение наилучшего пути в условиях изменчивости плотности и скорости дорожного потока на участках в зависимости от времени.

В первой главе вы сможете ознакомиться с деталями поставленной задачи, далее мы решим ее путем моделирования дорожной ситуации и применением некоторых известных алгоритмов, в третьей главе поговорим о достоинствах и недостатках такого решения, его сложности и реализуемости в реальной жизни. Четвертая глава будет содержать описание некоторых модификаций графа дорожной сети, а также улучшений решения на таком графе. В завершении поделимся результатами проделанной работы, оценим их качество и сделаем выводы.

1 Постановка задачи

Пусть задан ориентированный *граф дорожной сети* $G(V, E, l)$ таким образом, что вершины $v \in V$ осуществляют роль перекрестков, а ребра $e \in E$ - роль дорог. Каждое ребро имеет длину, т.е. задана функция $l : E \rightarrow \mathbb{R}$. Также задана *модель движения* АТС – набор правил, определяющих поведение участников в зависимости от ситуации на дороге.

Пусть имеется n участников, которые движутся по заранее заданным маршрутам: $p_i = \langle E_{j_1}^i, E_{j_2}^i, \dots, E_{j_{m_i}}^i \rangle$, $E_{j_k}^i \in E$ $i = 1, \dots, n$. Добавим к ним $(n + 1)$ -ого участника, которому нужно добраться из пункта A в пункт B , $A, B \in V$. Определим $P(A, B)$ – множество всех простых путей из A в B . Модель движения позволяет определить *часть пройденного пути* для каждой АТС в зависимости от движения других участников, т.е. определить непрерывные монотонные функции

$$x_i(G, p_1, \dots, p_n, p, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], i = 1, \dots, n + 1, p \in P(A, B).$$

Ввиду однозначной определенности последовательности ребер p_j и графа дорожной сети G , явную зависимость x_i от данных параметров можно не указывать.

На множестве путей $P(A, B)$ определим $T(p) = \inf_t \{t : x_{n+1}(p, t) = 1\}$ – время прибытия $(n + 1)$ -ого участника в вершину B при движении по маршруту p . Требуется найти такой путь $p^* \in P(A, B)$, что $T(p^*)$ - минимальна. Другими словами, для заданной модели движения на графе дорожной сети $G(V, E, l)$ при движении n участников по путям p_1, \dots, p_n требуется найти такой путь p^* из A в B , что движение нового участника по этому пути p^* будет *оптимально*, то есть

$$p^* = \operatorname{argmin}_{p \in P(A, B)} T(p).$$

2 Модели движения

Формализуем понятие модели движения, упомянутое в постановке задачи. Обратимся к теории автоматов и с ее помощью попробуем описать правила движения АТС. Аналогичный подход использовали К. Нагель и М. Шрекенберг [1]. В своей работе авторы рассматривают модель клеточных автоматов, которая предполагает разбиение дорог на клетки и использование дискретного времени. Эта идея нашла применение в описании движения физических частиц [2], а также в исследовании пробок на дорогах [3]. Мы же не будем ограничиваться клеточными автоматами и опишем случай непрерывного движения.

Моделью движения АТС назовем $M = (n, G, S, F, \{t_i\}_{i=1}^n, \{\varphi_i\}_{i=1}^n)$, где n - количество участников движения, G - граф дорожной сети, S - множество состояний, которые могут принимать участники, $F \subset S$ - множество заключительных состояний, $t_i : S^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ - функция критического момента движения участника i , $\varphi_i : S^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow S$ - функция перехода состояния i -ого участника в некоторый момент времени t . Считаем, что попав в заключительное состояние, мы не можем его покинуть:

$$\varphi_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n, t) = s_i, \quad s_1, \dots, s_n \in S, \quad s_i \in F, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Множество S описывает текущий характер движения машины. Это, в первую очередь, ребро, на котором едет участник, координата на этом ребре и скорость участника. Если модель описывает некоторое изменение ускорения, то под состоянием s также имеется ввиду текущее ускорение машины. Подразумевается, что состояния можно разбить на классы, например «свободное движение», «ожидание», «прибытие», «торможение перед лидером» и тд. Функция t_i описывает время, когда участнику необходимо совершить переход из текущего состояния в состояние другого класса.

Модель движения АТС можно описать некоторой диаграммой, описывающей переходы между классами для каждого участника. Диаграмма представляет собой ориентированный граф, где вершины - классы состояний, а ребра являются переходами в другое состояние. Метка на ребре - условие перехода, который осуществляется, если $t = t_i(s_1, \dots, s_n)$ для некоторого s_i из класса состояний. Непомеченные ребра соответствуют условию $t < t_i(s_1, \dots, s_n)$. Например, правила движения, в которых поведение участника зависит от расстояния, до впереди идущего участника может быть задано следующей диаграммой (см. рис. 1):

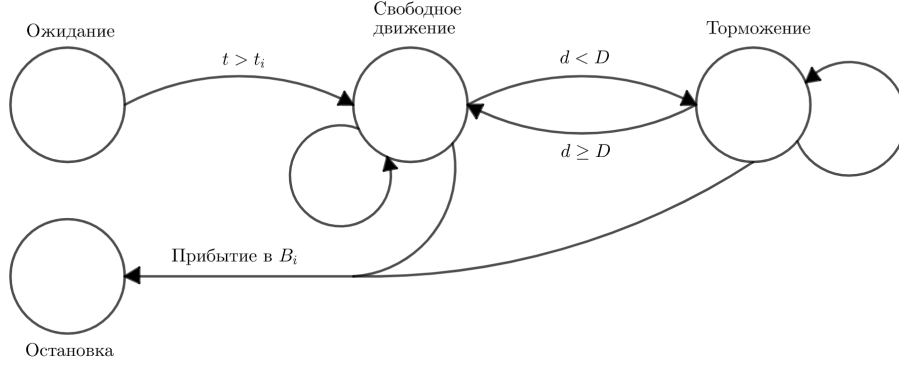


Рис. 1: Диаграмма для i -ого участника в модели движения, где d – расстояние до впереди идущего участника, D – максимальное расстояние взаимодействия с впереди идущим участником

Рассмотрим модели движения, в которых изменения скорости участников базируются только на количестве участников на ребре в момент времени t . Назовем такие модели *макроскопическими*, а все остальные — *микроскопическими*.

2.1 Макроскопические модели

При движении n участников такие модели можно параметризовать набором действительных чисел v_1, \dots, v_n , где v_k – скорость при k участниках на ребре. Множество состояний в макроскопических моделях движения можно разбить на n классов по количеству участников на ребре.

2.2 Микроскопические модели

Опишем модель *следования за лидером* – модель, в которой поведение движения участника зависит от расстояния до впереди идущего АТС. Введем понятие *дистанции видимости* D — расстояние, на котором текущий участник начинает взаимодействовать с впереди идущим лидером. Также будем считать, что участники должны соблюдать *безопасное расстояние* l — оказавшись на расстоянии $d \leq l$ до лидера, участник мгновенно сбрасывает свою скорость до нуля. Скорости участников будут изменяться посредством ускорений, положим

$$a_+ = \frac{v_m^2}{D}$$

— ускорение такое, что позволяет разогнаться с нулевой до максимальной скорости за время, которое нужно для преодоления расстояния D с постоянной максимальной скоростью. Также пусть

$$a_- = -\frac{v_m^2}{2l}$$

— торможение такое, что позволяет снизить скорость с максимальной до нуля, проехав расстояние l .

Пусть i -ый и $(i+1)$ -ый участники, лидер и следующий за ним соответственно, оказались в момент времени t на расстоянии d относительно друг друга со скоростями v_i и v_{i+1} . Опишем характер их движения.

1. $d \geq D$

(a) $v_{i+1} = v_{max} \Rightarrow a_{i+1} = 0$, продолжаем ехать с максимальной скоростью.

(b) $v_{i+1} < v_{max} \Rightarrow a_{i+1} = a_+$ на время $t = \frac{v_{max}-v_{i+1}}{a_+}$, после чего $v_{i+1} = v_{max}$, $a_{i+1} = 0$

2. $d \leq l \Rightarrow v_{i+1} = 0$

3. $l < d < D$

(a) $v_{i+1} \leq v_i$

i. $a_i = 0$, т.е. его движение равномерно, это может быть только в 2-х случаях:

A. $v_i = v_{max} \Rightarrow a_{i+1} = a_+$ на время $t = \frac{v_{max}-v_{i+1}}{a_+}$, после чего $v_{i+1} = v_{max}$, $a_{i+1} = 0$

B. $v_i = 0$, едем время $t = \frac{d-l}{v_{i+1}}$, не меняя скорость, после чего останавливаемся, $v_{i+1} = 0$.

ii. $a_i \neq 0 \Rightarrow a_{i+1} = a_i$

(b) $v_{i+1} > v_i$

i. $a_i = a_+ \Rightarrow a_{i+1} = a_-$ до момента, когда $v_i + a_i t = v_{i+1} + a_{i+1} t$ или v_{i+1} станет 0, т.е. до $t = \min \left(\frac{2Dl(v_{i+1}-v_i)}{v_{max}^2(l+D)}, \frac{2lv_{i+1}}{v_{max}^2} \right)$, после чего $a_{i+1} = a_i = a_+$.

ii. $a_i = a_- \Rightarrow a_{i+1} = a_i = a_-$.

3 Моделирование

Под моделированием будем понимать воспроизведение движения всех АТС по установленным правилам. Рассмотрим 2 различных способа моделирования с $(n+1)$ -ым участником:

1. он влияет на движение n участников и вследствие на самого себя;
2. движение n участников не зависит от добавленного АТС.

3.1 Независимость движения участников от добавленного АТС

3.2 Взаимосвязь движений нового участника и группы АТС

4 Поиск оптимального пути

Отметим, что количество путей конечно, поэтому первое, что приходит на ум в качестве решения, это перебор всех возможных путей и нахождение подходящего по затраченному времени. Посчитаем сложность этого алгоритма и сделаем вывод о его использовании в нашей задаче на практике.

4.1 Перебор. Сложность

Чтобы узнать, применим ли перебор в нашем случае, посчитаем сложность нахождения кратчайшего пути среди множества всех простых путей из A в B . Пусть $S_x(p)$ – сложность моделирования, т.е. нахождения функции $x_{n+1}^p(t)$, при выборе пути p . Тогда сложность перебора

$$S = \sum_{p \in P(A,B)} S_x(p) = |P(A,B)| * \bar{S}_x, \text{ где } \bar{S}_x - \text{средняя сложность.}$$

Заметим, что S растет при увеличении количества возможных путей. Так, в полном графе на $|V|$ вершинах получим $S = 2^{|V|-2} * \bar{S}_x$.

В качестве примера можем рассмотреть также регулярный граф-решетку на \mathbb{R}^2 и на нем оценить снизу сложность поиска пути с минимальными тратами. Пусть точки A и B имеют координаты (a_1, a_2) и (b_1, b_2) соответственно. Тогда количество путей минимальной длины в метрике Манхэттена будет составлять $C_{|a_1-b_1|+|a_2-b_2|}^{|a_1-b_1|}$. Понятно, что путей $|P(A,B)|$ в таком графе гораздо больше. Таким образом, получаем оценку снизу для регулярного решеточного графа

$$C_{|a_1-b_1|+|a_2-b_2|}^{|a_1-b_1|} * \bar{S}_x \leq |P(A,B)| * \bar{S}_x = S.$$

Например, в решетке-квадрате со стороной m при движении из угловой точки по диагонали в угловую точку напротив количество путей минимальной длины составит $C_{2m}^m = \frac{(2m)!}{m!m!}$. По формуле Стирлинга

$$C_{2m}^m = \frac{\sqrt{2\pi(2m)} \left(\frac{2m}{\exp}\right)^{2m}}{(\sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{\exp}\right)^m)^2} = \frac{2\sqrt{\pi m} \left(\frac{2m}{\exp}\right)^{2m}}{2\pi m \left(\frac{m}{\exp}\right)^{2m}} = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}.$$

Понятно, что при увеличении m , количество путей экспоненциально растет.

С помощью перебора можно находить кратчайшие пути быстро, если $|P(A,B)|$ не велико. Однако изначально наша задача была сформулирована в терминах дорожной сети и предполагала графы с достаточно большим количеством вершин и ребер, что влияет на количество маршрутов для заданных точек. Таким образом, можно сделать вывод, что в общем случае перебор путей в нашей задаче на практике не применим.

4.2 Дейкстра

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть на каждом ребре $e \in E$ графа $G(V, E)$ определена функция *временных затрат* $\phi_e(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Если мы оказались в начальной вершине ребра e в момент времени t , то время преодоления ребра будет равняться $\phi_e(t)$. Рассмотрим путь $p = \langle V_0, e_1, V_1, e_2, V_2, \dots, V_{k-1}, e_k, V_k \rangle$ и начало движения происходит в вершине V_0 в момент времени $t_0 = t$, тогда

$$\begin{aligned} t_0 &= t \\ t_1 &= \phi_{e_1}(t) + t = \phi_{e_1}(t_0) + t_0 \\ t_2 &= \phi_{e_2}(\phi_{e_1}(t) + t) + \phi_{e_1}(t) + t = \phi_{e_2}(t_1) + t_1 \\ &\dots \\ t_i &= \phi_{e_i}(t_{i-1}) + t_{i-1} \\ &\dots \\ t_k &= \phi_{e_k}(t_{k-1}) + t_{k-1} \end{aligned}$$

Пусть $P(A, B)$ – множество всех простых путей из A в B в графе $G(V, E)$. Необходимо найти путь из A в B , который требует минимальных затрат, т.е.

$$T = \min_{p \in P(A, B)} t_{|p|}.$$

В общем случае функции временных затрат могут быть любыми. Давайте рассмотрим эту задачу с дополнительным условием на $\phi_e(t)$:

$$\phi_e(t) \leq \Delta + \phi_e(t + \Delta), \quad \Delta \geq 0$$

Назовем это условие *неравенством прохождения ребер*. Утверждается, что если для $\forall e \in E$ функции временных затрат ϕ_e удовлетворяют неравенству прохождения ребер, то задачу можно решить модифицированным алгоритмом Дейкстры.

4.2.1 Модифицированный алгоритм Дейкстры

Алгоритм построения минимального маршрута

Для каждой вершины будем хранить два значения: минимальное время, за которое можно добраться до этой вершины, и ребро, через которое проходит кратчайший маршрут до вершины. Применяем стандартный алгоритм Дейкстры, с отличием, что при посещении вершины мы фиксируем время для нее и пересчитываем функции временных затрат на всех ребрах, исходящих из этой вершины.

Для запуска алгоритма потребуется задать начальное время - минимальное время в точке старта. Это можно использовать в анализе маршрута.

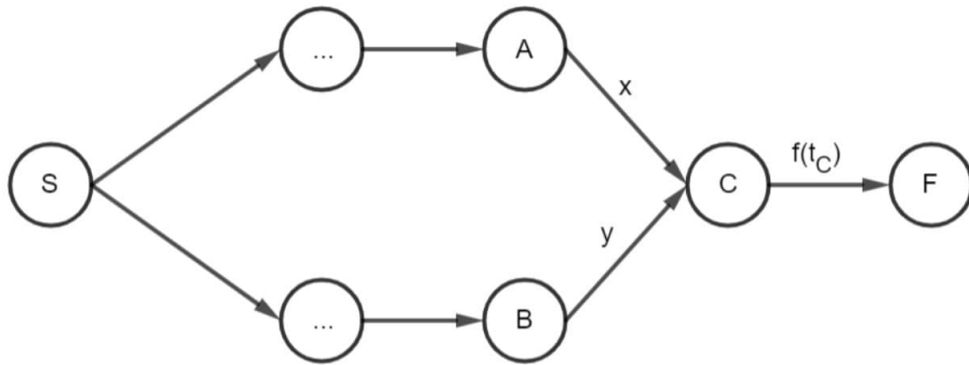
Утверждение 4.1. *Данный маршрут обладает наименьшим временем прохождения.*

Доказательство. Будем доказывать по индукции :

База индукции - в графе 2 вершины и несколько ребер между ними. Минимальным маршрутом будет то ребро, у которого наименьшее время прохождения.

Шаг индукции - считаем что в случае с m ($< n$) вершинами лемма справедлива. Рассмотрим граф, содержащий n вершин. Пусть \exists маршрут P в этом графе, требующий меньше затрат, чем построенный нашим алгоритмом, тогда возьмем ближайшую к началу точку, обозначим ее C , в которой выбрано ребро, отличное от минимального по затратам. Очевидно, что если точка C совпадает с точкой F , концом маршрута, то P не является минимальным по времени прохождения.

Пусть ребро маршрута P в точку C выходит из точки B , а минимальное - из точки A . Построим маршрут по нашему алгоритму из S - начала маршрута в C . Заметим, что он проходит через точку A . Обозначим время этого маршрута за $t_a = T(S - \dots - A - C)$, а время для части маршрута P из S в C , проходящего через точку B , за $t_b = T(S - \dots - B - C)$. В подграфе $(P - C)$ вершин меньше чем n , а значит по индукции $t_a < t_b$.



Без ограничения общности, будем рассматривать часть маршрута P от точки C до F как одно ребро : $C-F$. Тогда время прохождения этого ребра $\phi(t_C) = \phi_{CF}(t_C)$, где t_C - время старта из точки C . Вспомним неравенство прохождения для ребер (см. выше) : $\phi(t_a) \leq (t_b - t_a) + \phi(t_b)$, где $\Delta = (t_b - t_a)$

Рассмотрим два маршрута $P : S - \dots - B - C - F$ и $P' : S - \dots - A - C - F$. Посчитаем время : $T(P) = t_b + \phi(t_b)$ и $T(P') = t_a + \phi(t_a)$ Используя неравенство, получаем : $T(P') = t_a + \phi(t_a) \leq t_a + (t_b - t_a) + \phi(t_b) = T(P)$ Значит маршрут P не является минимальным.

□

Понятно, что если неравенство прохождения ребер не выполняется, то модифицированный алгоритм Дейкстры может построить не кратчайший маршрут в терминах временных

затрат. Рассмотрим такой пример (рис. 1):

$p_1 :$

$$t_0 = 0$$

$$\phi_{AC}(t) = 1$$

$$\phi_{CB}(t) = 1 + 2 * \mathbb{I}\{t < 1.5\}$$

$p_2 :$

$$t_0 = 0$$

$$\phi_{AC}(t) = 2$$

$$\phi_{CB}(t) = 1 + 2 * \mathbb{I}\{t < 1.5\}$$

Время прохождения пути p_1 будет составлять $t_{p_1} = t_0 + \phi_{AC}(t_0) + \phi_{CB}(\phi_{AC}(t_0)) = 1 + 3 = 4$. Время прохождения пути p_2 будет составлять $t_{p_2} = 2 + 1 = 3$. Очевидно, на путь p_2 потребуется меньше времени, чем на путь p_1 , но алгоритм Дейкстры предложит в качестве решения задачи маршрут p_1 .

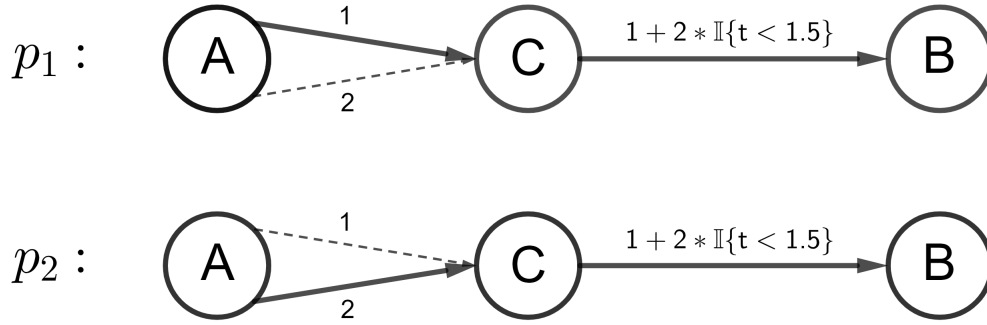


Рис. 2: Пример графа с невыполненным условием неравенства прохождения ребер

Отметим, что наша задача поиска оптимального маршрута сводится к вспомогательной задаче. Правила движения участников и их взаимодействий определяют функции ϕ_e , $e \in E$. Мы можем их получить путем численного моделирования. Неравенство прохождения ребер можно переформулировать так: дорожная сеть обладает условием FIFO — первый въехавший на дорогу первым ее покидает. Другими словами, если участники не обгоняют друг друга, то путь с минимальными затратами можно найти при помощи алгоритма Дейкстры.

Сложность модифицированного алгоритма Дейкстры

Устойчивость нашего решения

Практические результаты

Сложность решения

Альтернативные подходы

Заключение

Список литературы

- [1] *Nagel K., Schreckenberg M.* A cellular automation model for freeway traffic // Phys. I France. 1992. V. 2. P. 2221–2229.
- [2] *Chowdhury D., Santen L., Schadschneider A.* Statistical physics of vehicular traffic and some related systems // Phys. Rep. 2000. V. 329. P. 199–329.
- [3] *Nagatani T.* The physics of traffic jams // Reports on Progress in Physics. 2002. V. 65. P. 1331–1386.