AoC2021 - Day 7 - Part 2

7. Dezember 2021

Seien $n_i \in \mathbf{N}$ die Positionen der n Krabben-U-Boote. Die Bewegung des i-ten U-Bootes auf eine Zielposition x verursacht Kosten in Höhe von

$$c_i(x) = \sum_{j=1}^{|n_i - x|} j$$

was sich bei Nutzung der Gausschen Summenformel zu

$$c_i(x) = \frac{|n_i - x|^2 + |n_i - x|}{2}$$

vereinfacht. Die Gesamtkostenfunktion ist somit

$$c(x \,|\, \mathbf{n}) = \sum_i \frac{|n_i - x|^2 + |n_i - x|}{2}.$$

Diese Kostenfunktion soll minimiert werden, also muss

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} c(x \,|\, \mathbf{n}) \stackrel{!}{=} 0$$

gelten. Es ergibt sich also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} c(x \,|\, \mathbf{n}) = \sum_i \left(x - n_i - \frac{\operatorname{sgn}(x - n_i)}{2} \right) \stackrel{!}{=} 0,$$

durch weitere Umformung folgt

$$\hat{x} - \frac{\sum_i \operatorname{sgn}(\hat{x} - n_i)}{2n} = \frac{\sum_i n_i}{n}. \tag{1}$$

Dieser Ausdruck ist nicht analytisch für $\hat{x}$ lösbar, solange nicht einige Annahmen getroffen werden:

1. Die Werte n_i stammen aus einer um ihren Erwartungswert μ symmetrischen Verteilung.

2. Es liegen ausreichend Stichproben vor, sodass $\frac{\sum_i n_i}{n}$ ein guter Schätzer für μ ist, seine Varianz also gegen 0 geht.

In diesem Fall kann $\hat{x}$ zum Stichprobenmittel $\frac{\sum_i n_i}{n}$ geraten werden. Für diesen Fall fällt der *signum*-Term gerade zu 0 weg, wie die Berechnung des entsprechenden Erwartungswertes zeigt

$$\mathrm{E}\left(\frac{\sum_i \operatorname{sgn}(\frac{\sum_i n_i}{n} - n_i)}{2n}\right) = \frac{\sum_i \operatorname{sgn}\left(\mathrm{E}\left(\frac{\sum_i n_i}{n}\right) - \mathrm{E}(n_i)\right)}{2} = \frac{\mu - \mu}{2} = 0.$$

Aufgrund von Annahme 2 verschwindet auch die Varianz dieses Terms für ausreichend großes n, sodass sich

$$\hat{x} = \frac{\sum_i n_i}{n}$$

als bester Schätzer für die Zielposition ergibt. Da nur ganzzahlige Positionen erlaubt sind muss dieses Ergebnis gerundet werden.

Eine alternative Argumentation ausgehend von Formel 1 identifiziert den *signum*-Term mit dem mittleren Vorzeichen, entsprechend

$$\hat{x} - \frac{1}{2}\operatorname{mean}(\operatorname{sgn}(\hat{x} - n_i)) = \frac{\sum_i n_i}{n}.$$

Da $\operatorname{sgn}(\hat{x} - n_i) \in \{-1, 1\}$ gilt muss $-1 \leq \operatorname{mean}(\operatorname{sgn}(\hat{x} - n_i)) \geq 1$ gelten. Es ergibt sich somit

$$\left|\hat{x} - \frac{\sum_i n_i}{n}\right| \leq \frac{1}{2}, \tag{2}$$

der optimale Schätzwert liegt entsprechend maximal 0.5 vom Mittelwert entfernt, also auch hier wieder im Rahmen der Rundung, die aufgrund der ganzzahligen Positionen notwendig ist.