Prof. Dr. Dmitri Kuzmin
Dipl.-Technomath. Christopher Basting
Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

Sommersemester 2016
Klausur vom 3. August 2016

Zum Bestehen der Klausur sind **50%** der Maximalpunktzahl hinreichend. Neben Schreibutensilien ist das einzig erlaubte Hilfsmittel ein ein- oder beidseitig handschriftlich beschriebenes Blatt DIN-A4.

Alle Antworten erfordern eine klare Begründung. Geben Sie ausreichend Zwischenschritte an und vereinfachen Sie jeweils soweit wie möglich.

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Überprüfen Sie folgende Behauptungen auf "wahr" oder "falsch" und begründen Sie Ihre Antwort.

a) Behauptung: "Eine möglichst große Kontraktions-Konstante (Lipschitz-Konstante mit Kontraktionseigenschaft) beschleunigt die Konvergenz der zugehörigen Fixpunktiteration."

b) Behauptung: "Es gibt Matrizen $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|M\|_\infty > 1$, für die das Gauss-Seidel-Verfahren aber konvergiert."

c) Behauptung: "Die Berechnung der harmonischen Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ führt im Rechner bei Verwendung einer 4-stelligen Mantissenlänge auf einen endlichen Wert."

d) Es seien die $n \in \mathbb{N}$ Datenpaare (x_i, y_i), $x_i \in \mathbb{R}$, $y_i \in \mathbb{R}$ gegeben. $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichne das Lagrange'sche Interpolationspolynom zu den Daten (x_i, y_i) und $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Lagrange'sche Interpolationspolynom zu den Daten $(x_i, \alpha \cdot y_i)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Behauptung: "Es gilt $\alpha \cdot \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$."

e) Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$ und deren numerische Integration mittels Trapezregel $I^{(1)}(f)$ auf einem beliebigen Interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Es sei $I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ der exakte Wert des Integrals. Behauptung: "Es gilt $I^{(1)}(f) > I(f)$."

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $\varphi \in P_2$ in Lagrange-Darstellung mit den zugehörigen Basisfunktionen, welches die gegebenen Werte y_i an den Stützstellen x_i, $i = 1, 2, 3$, interpoliert. Üperprüfen Sie Ihr Ergebnis.

x_i	0	1	3
y_i	2	2	4

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Betrachten Sie das nichtlineare Problem: für eine stetig differenzierbare Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, finde $x \in [0, 1]$ so dass

$$\sin(x) = f(x).$$

Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Lösung dieses Problems.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Integral

$$\int_{-1}^{-0.5} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$$

a) Bestimmen Sie den exakten Wert des Integrals.

b) Approximieren Sie das Integral numerisch mit der summierten Trapezregel mit 2 Teilintervallen. Skizzieren Sie die Funktion und die numerisch berechnete Fläche.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ist die pivotisierte LR-Zerlegung $PA = LR$ gegeben durch die Matrizen

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix},$$

und die orthogonale Permutationsmatrix P (PA entspricht Vertauschung der zweiten mit der dritten Zeile von A).

a) Geben Sie P an.

b) Berechnen Sie mittels dieser Zerlegung eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des Problems $Ax = b$ für $b = (8, 2, 1)^\top$.

c) Warum ist für die LR-Zerlegung von A eine Pivotisierung nötig?

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Geben Sie die Iterationsmatrix und Iterationsvorschrift des Gauss-Seidel-Verfahren zur Lösung des linearen Problems $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^3$, explizit an.

b) Ist das Jacobi-Verfahren bezüglich A konvergent?