Dr. Steffen Basting
Dipl.-Technomath. Christopher Basting
Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

Sommersemester 2017
Übungsblatt 3

Abgabe der **Theorieaufgaben bis Donnerstag, 18.05.2017, 16:00 Uhr vor der Vorlesung** (einzeln oder zu zweit) **in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe**. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe Ihre Übungsgruppe sowie Name und Matrikelnummer. Heften Sie mehrere Blätter zusammen.
Abgabe der **Programmieraufgaben bis Donnerstag, 18.05.2017, 16:00 Uhr digital im Moodle-Arbeitsraum der Veranstaltung**. Bei Abgabe zu zweit bitte nur einmal einreichen und im Kommentar den Namen und E-Mail Adresse des/der Koautors/Koautorin nennen. Die Aufgaben sollen mit MATLAB bzw. OCTAVE gelöst werden.

Aufgabe 3.1 (Lagrange-Interpolation | 4 Punkte)

Bestimmen Sie das Lagrangesche Interpolationspolynom $\Phi \in P_2$, welches die gegebenen Werte y_i an den Stützstellen x_i interpoliert und berechnen Sie $\Phi(-1)$:

x_i	1	2	5
y_i	6	28	214

Aufgabe 3.2 (Newton-Interpolation und Fehlerabschätzung | 4 + 4 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = 5\sin(3\pi x) + 36x^2$$

soll mittels eines quadratischen Interpolationspolynoms an den Stützstellen $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{12}$ und $x_2 = \frac{1}{6}$ interpoliert werden.

- Berechnen Sie das Interpolationspolynom $p \in P_2$ in der Newton-Darstellung, und werten Sie es an der Stelle $x = \frac{1}{24}$ aus.
- Geben Sie eine Abschätzung für den maximalen Fehler

  $$\max_{x\in[0,\frac{1}{6}]} |f(x) - p(x)|$$

  an, indem Sie die Abschätzung (2.4) aus der Vorlesung verwenden, und eine möglichst scharfe (d.h. möglichst kleine) obere Schranke für den Term

  $$\prod_{j=0}^{n} |x - x_j|$$

  finden. Bestimmen Sie $|f(\frac{1}{24}) - p(\frac{1}{24})|$, und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Fehlerschranke aus Ihrer Abschätzung.

Programmieraufgabe 3.1 (Interpolation | 4 + 6 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir das Verhalten der Interpolierenden der Runge-Funktion für $n \to \infty$, sowie den Einfluss einer geschickten Wahl von Stützstellen numerisch untersuchen.

a) Schreiben Sie eine Funktion `[c]=myNewtonInterpol(x,f)`, die zu gegebenen Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ und den zugehörigen Werten $f_0, \dots, f_n$ die Koeffizienten c_i des Newtonschen Interpolationspolynoms $p \in P_n$ berechnet.

b) Erstellen Sie ein Skript `myNewtonInterpolTest()`, welches für $n = 7, 12, 17$ das Newtonsche Interpolationspolynom zur **Runge-Funktion**

$$f(x) := \frac{1}{1 + 25x^2}$$

mit

- äquidistanten Knoten $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$, $i = 0, \dots, n$ und
- Tschebyscheff-Knoten $x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right)$, $i = 0, \dots, n$

berechnet. Das Skript soll für jedes n in je einer eigenen `figure` folgende Plots für das Interval $[-1, 1]$ erstellen:

- die Runge-Funktion als durchgezogener, grüner Polygonzug,
- die äquidistanten Knoten als rote $*$ Markierungen,
- die Tschebyscheff-Knoten als blaue $*$ Markierungen,
- das zu den äquidistanten Stützstellen gehörige Interpolationspolynom als durchgezogener, roter Polygonzug und
- das entsprechende Tschebyscheff-Interpolationspolynom als durchgezogener, blauer Polygonzug.

Was beobachten Sie? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit äquidistanten Stützstellen mit denen der Tschebyscheff-Stützstellen. Speichern Sie die drei Abbildungen jeweils als `PA2-1-N7.fig`, `PA2-1-N12.fig` und `PA2-1-N17.fig` ab. Das Skript soll schließlich noch den maximalen Fehler

$$\max_{\xi \in \Delta} |f(\xi) - p(\xi)|$$

auf einem feinen Gitter $\Delta = \{-1 + 2j/m,\ j = 0, \dots, m\}$ für $m = 100$ für die berechneten Interpolationspolynome p ausgeben.