Dr. Steffen Basting
Dipl.-Technomath. Christopher Basting
Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

Abgabe der **Theorieaufgaben bis Donnerstag, 08.06.2017, 16:00 Uhr vor der Vorlesung** (einzeln oder zu zweit) **in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe**. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe Ihre Übungsgruppe sowie Name und Matrikelnummer. Heften Sie mehrere Blätter zusammen.
Abgabe der **Programmieraufgaben bis Donnerstag, 08.06.2017, 16:00 Uhr digital im Moodle-Arbeitsraum der Veranstaltung**. Bei Abgabe zu zweit bitte nur einmal einreichen und im Kommentar den Namen und E-Mail Adresse des/der Koautors/Koautorin nennen. Die Aufgaben sollen mit MATLAB bzw. OCTAVE gelöst werden.

Aufgabe 5.1 (Quadratur | 4 Punkte)

Das bestimmte Integral

$$I(f) := \int_{0.5}^{1} \exp(2x)\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\left[\exp(2) - \exp(1)\right] \approx 2.335387$$

soll näherungsweise durch folgende Quadraturformeln bestimmt werden:

- $I^{(1)}(f)$: Trapezregel
- $I^{(2)}(f)$: Simpson-Regel
- $I^{(3)}(f)$: Newton's $\frac{3}{8}$-Regel

a) Bestimmen Sie für die obigen Quadraturformeln jeweils den Wert $I^{(n)}(f)$, sowie den Quadraturfehler

$$\left|I(f) - I^{(n)}(f)\right| = \left|\frac{1}{2}\left[\exp(2) - \exp(1)\right] - I^{(n)}(f)\right|$$

b) Leiten Sie für jede dieser Quadraturformeln eine einfache, auf der Abschätzung (3.3) aus der Vorlesung beruhende obere Fehlerschranke für $\left|I(f) - I^{(n)}(f)\right|$ her, und vergleichen Sie diese obere Schranke jeweils mit Ihrem berechneten Fehler.

Hinweis: Es sollen *nicht* die verfeinerten Abschätzungen aus der Tabelle im Vorlesungsskript abgeschrieben werden.

Aufgabe 5.2 (Quadratur | 2 + 4 + 2 Punkte)

Zur numerischen Berechnung von

$$I(f) := \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

für eine stetige Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ wird die folgende Formel vorgeschlagen:

$$I_h(f) := \tfrac{1}{9}\big(f(-1) + 8f(-\tfrac{1}{2}) + 8f(\tfrac{1}{2}) + f(1)\big).$$

a) Finden Sie ein Polynom $p \in P_4$ welches durch $I_h(p)$ nicht exakt integriert wird.

Dr. Steffen Basting
Dipl.-Technomath. Christopher Basting

b) Überprüfen Sie, dass alle Polynome dritten Grades exakt integriert werden.

c) Sei

$$I^{(n)}(f) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k)$$

eine interpolatorische Quadraturformel, wobei für mindestens ein k gilt: $\alpha_k < 0$. Konstruieren Sie eine stetige Funktion $f \geq 0$, sodass $\int f(x)\mathrm{d}\mathbf{x} > 0$, aber $I^{(n)}(f) < 0$ gilt.

Programmieraufgabe 5.1 (Quadratur | 3 + 3 Punkte)

a) Implementieren Sie eine Funktion `[c]=myQuadratur1D(f,w,x)`, welche eine beliebige abgeschlossene Quadraturformel

$$I^{(n)}(f) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k)$$

zur numerischen Integration von f auf dem Intervall (a, b) realisiert. Als Übergabeparameter sollen die Funktion f, repräsentiert durch ein `function_handle` `f`, der Vektor der Quadraturgewichte $\mathbf{w} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, sowie der Vektor der Quadraturpunkte $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ übergeben werden. Abgeschlossen bedeutet für die Quadraturpunkte, dass $x_0 = a$ und $x_n = b$ gelten soll.

b) Schreiben Sie eine Routine `myQuadratur1DTest()`, in welcher Sie Ihre Implementierung aus Teilaufgabe **a)** für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{auf } (0.5, 1)$$

und den Quadraturformeln aus Aufgabe 5.1 testen.