Prof. Dr. Dmitri Kuzmin
Dipl.-Technomath. Christopher Basting
Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

Sommersemester 2016
Klausur vom 27. September 2016

Zum Bestehen der Klausur sind **50%** der Maximalpunktzahl hinreichend. Neben Schreibutensilien ist das einzig erlaubte Hilfsmittel ein ein- oder beidseitig handschriftlich beschriebenes Blatt DIN-A4.

Alle Antworten erfordern eine klare Begründung. Geben Sie ausreichend Zwischenschritte an und vereinfachen Sie jeweils soweit wie möglich.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Überprüfen Sie folgende Behauptungen auf "wahr" oder "falsch" und begründen Sie Ihre Antwort.

a) "Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert für beliebige Startwerte."

b) "Das CG-Verfahren konvergiert für beliebige symmetrische Matrizen A."

c) "Das Jacobi-Verfahren mit Iterations-Matrix J divergiert, falls $\|J\|_\infty > 1$."

d) "Für $0 < h \ll r$ (d. h. h deutlich kleiner als r) ist die numerische Auswertung des Ausdrucks $\frac{4}{3}\pi(3r^2h + 3rh^2 + h^3)$ besser geeignet als die des Ausdrucks $\frac{4}{3}\pi\big((r+h)^3 - r^3\big)$."

e) Es bezeichnet

$$I_G^n(f) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k)$$

eine Quadraturformel mit Ordnung $2n+2$ zur Approximation des Integrals $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Stützstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ und Gewichten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Behauptung: "Die Gewichte α_k sind stets echt positiv."
Tipp: Betrachten Sie die quadrierten Lagrange-Basispolynome.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Erstellen Sie für das Polynom

$$p(x) = 2x^4 + 11 + 7x - 5x^2 - 4x^3,$$

an der Stelle $\xi = 2$ die Horner-Tabelle.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Für die Funktion $f(x) := 2x^3 + 7x + 5$ soll die Nullstelle bestimmt werden.

a) Überprüfen Sie, dass die Funktion eine Nullstelle hat.

b) Formulieren Sie das Bisektionsverfahren zur numerischen Lösung des Problems. Schlagen Sie geeignete Startwerte vor und begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Mit Hilfe einer Fixpunktiteration soll eine Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^2 - \ln(x) - 2, \qquad x \in [1, \infty),$$

bestimmt werden.

a) Zeigen Sie, dass f nur eine Nullstelle im Interval $[1, \infty)$ besitzt.

b) Wir betrachten konkret die Wahl $g(x) := \sqrt{\ln(x) + 2}$. Betrachten Sie das Teilintervall $[1, 2] \subset [1, \infty)$ und überprüfen Sie, dass die Iterationsvorschrift

$$x_{m+1} = g(x_m), \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

mit $x_0 \in [1, 2]$ gegen eine Nullstelle von f konvergiert.
Hinweis: Es gilt $\ln(2) < 1$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$.

a) Bestimmen Sie ein Polynom $\varphi \in P_2$, welches die Funktion $f(x)$ an den Stützstellen $x_i = i$, $i \in 0, 1, 2$, exakt interpoliert, d. h. $f(x_i) = \varphi(x_i)$ für $i \in \{0, 1, 2\}$.

b) Approximieren Sie unter Verwendung Ihres Ergebnisses aus Teil a) das Integral

$$\int_0^2 f(x) \mathrm{d}x,$$

indem Sie das Interpolationspolynom φ von f exakt integrieren.

c) Der Anwendung welcher Quadraturformel entspricht dieses Vorgehen? Verizifieren Sie damit Ihr Ergebnis.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Formulieren Sie zur iterativen Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ das Gauss-Seidel-Verfahren in expliziter, komponentenweiser Darstellung ohne Verwendung von Matrix-Vektor Multiplikationen.