Dr. Steffen Basting
Dipl.-Technomath. Christopher Basting
Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

Abgabe der **Theorieaufgaben bis Donnerstag, 29.06.2017, 16:00 Uhr vor der Vorlesung** (einzeln oder zu zweit) **in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe**. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe Ihre Übungsgruppe sowie Name und Matrikelnummer. Heften Sie mehrere Blätter zusammen.
Abgabe der **Programmieraufgaben bis Donnerstag, 06.07.2017, 16:00 Uhr digital im Moodle-Arbeitsraum der Veranstaltung**. Bei Abgabe zu zweit bitte nur einmal einreichen und im Kommentar den Namen und E-Mail Adresse des/der Koautors/Koautorin nennen. Die Aufgaben sollen mit MATLAB bzw. OCTAVE gelöst werden.

Hinweis für alle folgenden Aufgaben: Geben Sie in jedem Gauß'schen Eliminationsschritt alle durchgeführten Zeilenumformungen explizit an (z. B. "$-2(\mathrm{II})$; $\cdot(-7)$" für: "ziehe zwei mal Zeile (II) ab, multipliziere anschließend mit -7.").

Aufgabe 7.1 (Gauß-Elimination ohne Pivotisierung | 2 + 2 + 2 Punkte)

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -8 & 7 & 3 \\ 24 & -26 & -13 \end{pmatrix}$$

b) Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n > 0$ mit Einträgen

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die obere Dreiecksmatrix R der LR-Zerlegung.

c) Berechnen Sie $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ von A und R aus Teilaufgabe b).

Aufgabe 7.2 (Gauß-Elimination mit Pivotisierung | 4 + 2 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 23 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$, indem Sie zunächst

a) die LR-Zerlegung von A mit Pivotisierung bestimmen, also P Permutationsmatrix, L untere Dreiecksmatrix mit Diagonale eins, R obere Dreiecksmatrix, sodass

$$PA = LR$$

gilt, und anschließend

b) das Gleichungssystem $Ax = b$ über den Zusammenhang $PAx = LRx = Pb$ mittels Vorwärts- und Rückwärtssubstitution lösen.

Aufgabe 7.3 (Pivotisierung und Rundungsfehler | 3 + 3 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-3} & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie mit dem Eliminationsverfahren von Gauß **ohne Pivotisierung** eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ unter Verwendung einer dreistelligen Gleitpunktarithmetik.

Hinweis: Beispielsweise ergibt die Addition $x \oplus y$ mit $x = 5000$ und $y = 2$ in dreistelliger Gleitpunktarithmetik

$$x \oplus y = \mathrm{rd}(x + y) = \mathrm{rd}(5002) = \mathrm{rd}(0.\underline{500}2 \cdot 10^4) = 0.5 \cdot 10^4 = 5000$$

b) Die auf drei Stellen nach dem Komma gerundete exakte Lösung lautet

$$x = A^{-1}b \approx (-1.996, 3.998)^\top.$$

Berechnen Sie nun eine Lösung in dreistelliger Gleitpunktarithmetik **mit Pivotisierung** und vergleichen Sie mit Teil a) sowie der exakten Lösung.

Programmieraufgabe 7.1 (Gauß-Elimination | 8 + 2 + 3 + 1 Punkte)

Implementieren Sie die **LR-Zerlegung (ohne Pivotisierung)** mit Vorwärts- und Rückwärtssubstitution. Schreiben Sie dazu die folgenden Routinen, ohne dabei enstprechende Funktionen in Matlab zu nutzen (wie etwa den Backslash-Löser \):

a) `function LR = LR_decompose(A)`
Diese Funktion soll die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $A = L * R$ zerlegen, wobei L eine untere Dreiecksmatrix ist, bei der die Diagonaleinträge immer 1 sind und R eine obere Dreiecksmatrix ist. Die Matrizen L und R sollen, wie in der Vorlesung vorgestellt platzsparend in **einer einzigen** Matrix namens LR gespeichert werden (also ohne eine explizite Speicherung der Einsen auf der Diagonale von L).

b) `function y = forward_solve(LR,b)`
Diese Funktion soll das Gleichungssystem $Ly = b$ durch Vorwärtssubstitution lösen, wobei LR die oben beschriebene Matrix aus der LR-Zerlegung ist.

`function x = backward_solve(LR,y)`
Diese Funktion soll das Gleichungssystem $Rx = y$ durch Rückwartssubstitution lösen, wobei LR die oben beschriebene Matrix aus der LR-Zerlegung ist.

c) `function LR_Test()`
Testen Sie in dieser Funktion Ihre Implementierung aus Teilen **a)** und **b)** jeweils für $n = 10, 15, 20, 25$ für das lineare $n \times n$ Gleichungssystem

$$Vx = b$$

mit der Vandermonde-Matrix V bezüglich der Stützstellen $x_i = \frac{n-i}{n}$, $i = 1, \ldots, n$, sowie der rechten Seite $b_i = 1$ für $i < \frac{n}{2}$ und $b_i = 2$ sonst. Geben Sie insbesondere für jedes n das Residuum $\|Vx - b\|_2$ an.

Hinweis: Zur Berechnung der Stützstellen und der Vandermonde-Matrix für gegebenes n dürfen die MATLAB-Befehle `x = ((n-1):-1:0)/ n; V = vander(x);` verwendet werden.

d) Was können Sie in **c)** beobachten? Schreiben Sie Ihre Beobachtung und Erklärung dieses numerischen Verhaltens in eine Text-Datei `PA_7.txt`.

Die Routinen sollen Schleifen möglichst vermeiden und natürlich nicht die in Matlab bereits vorhandene LR-Zerlegung benutzen.