

Notes on Quantum Field Theory

Yuchen Wang

May 4, 2023

Contents

0 Prerequisites and Notations	9
1 Classical Fields	13
1.1 QFT=QM+SR	13
1.2 Classical Field Theory and Noether's Theorem	14
1.3 The Poincare Group and The Poincare Algebra	18
1.4 Representations of the Lorentz Group	21
1.4.1 The Representation (1,1)	22
1.4.2 The Representation (2,1) and (1,2)	23
1.4.3 The Representation (2,2)	27
1.4.4 Dirac Spinors	29
1.5 Poincare Invariance of Classical Field Theory	33
2 Quantum Fields: Canonical Formalism	35
2.1 Canonical Quantization of Free Scalar Field	35
2.2 Canonical Quantization of Free Spinor Field	40
2.3 Canonical Quantization of Free Electromagnetic Field	50
2.4 The Spin-Statistics Theorem	57
2.5 From Free Field Theory to Interacting Field Theory	59
2.6 Scattering Problems	61
2.7 The LSZ Reduction Formula	67
2.8 The Lehmann-Kallen Spectral Representation	70
3 Quantum Fields: Path Integral Formalism	73
3.1 Why We Need Path Integral?	73
3.2 Canonical Formalism From Path Integral Principle	77
3.3 Path Integral Quantization of Scalar Fields	81
3.4 Path Integral Quantization of Fermion Fields	86
3.5 Path Integral Quantization of Gauge Fields	90

3.6	From Path Integral to Feynman Diagrams	93
3.7	The Quantum Action	101
3.8	From Canonical Formalism to Path Integral Formalism	110
3.9	Summary: What is Quantum Field Theory?	113
4	Quantum Electrodynamics	119
4.1	Spinor QED and Scalar QED	119
4.2	Feynman Rules of Spinor QED	120
4.3	Discrete Symmetries of Spinor QED	124
4.4	$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ and Crossing Symmetry	126
4.5	Helicity Amplitudes	130
4.6	Compton Scattering	132
4.7	Unstable Particles and Resonances	134
5	Renormalization	141
5.1	Regularization and Renormalization	141
5.2	One-Loop Corrections of ϕ^4 Theory	146
5.3	The Renormalization Group	153
5.4	One-Loop Corrections of Spinor QED	158
5.5	Electric Charge and Magnetic Moment	170
5.6	Renormalization of Local Operators	174
5.7	Effective Field Theory	177
5.8	Infrared Divergences in Spinor QED	188
5.8.1	Dimensional Regularization of Infrared Divergences	189
5.8.2	Cancel of Infrared Divergences	192
6	Symmetries in Quantum Field Theory	203
6.1	Classical Symmetries and Quantum Symmetries	203
6.2	Conserved Currents in Quantum Field Theory	206
6.3	Ward-Takahashi Identities in Spinor QED	212
6.4	Local Gauge Invariance in Spinor QED	216
6.5	Spontaneous Symmetry Breaking	220
6.5.1	An Example: SSB in ϕ^4 Theory	220
6.5.2	Searching for Vacuum	223
6.6	Spontaneous Breaking of Continuous Symmetries	227
6.6.1	Goldstone's Theorem	227
6.6.2	Operators and Broken Continuous Symmetries	230
6.6.3	The Higgs Mechanism in Scalar QED	233

6.7	Axial Current Anomaly in Spinor QED	234
7	Non-Abelian Gauge Theory	243
7.1	Yang-Mills Theory	243
7.2	Quantization of Yang-Mills Theory	248
7.3	Symmetries of Yang-Mills Theory	254
7.3.1	Gauge Invariance and Gluon Proper Vertices	254
7.3.2	BRST Symmetry and Physical States	257
7.4	One-Loop Corrections of Yang-Mills Theory	264
7.5	Confinement and IR Phases of Yang-Mills Theory	271
8	The Standard Model	279
8.1	Electroweak Unification and The Standard Model	279
8.2	Quantization of Gauge Theories with SSB	287
8.3	Anomalies in the Standard Model	293
8.3.1	Anomalies in Chiral Gauge Theories	293
8.3.2	't-Hooft Anomaly Matching and Chiral Symmetry Breaking	298
8.4	QCD and Chiral Perturbation Theory	304
8.4.1	Nonlinear Realizations and Goldstone Bosons	304
8.4.2	Chiral Symmetry Breaking in Two-Flavor QCD	307
8.4.3	The Wess-Zumino-Witten Term	315
8.4.4	Axions and Peccei-Quinn Mechanism	315
8.5	QCD and the Parton Model	317
8.6	Beyond the Standard Model	326
Appendix A	Finite-Temperature Field Theory	333
A.1	Matsubara Formalism	333
A.2	Linear Response and Transportation Properties	336
A.3	Mass Correction and Electroweak Phase Transition	340
Appendix B	Topological Objects in Quantum Field Theory	343
B.1	Mathematical Prerequisites: Homotopy Groups	343
B.2	Solitons in Scalar Field Theory	350
B.2.1	The Kink Solution	351
B.2.2	Semi-Classical Quantization of Kink	353
B.2.3	Quantization of Moduli	355
B.2.4	Fermions in Kink Background	356
B.2.5	Are There Any Solitons in Higher Dimension?	358

B.3	Solitons in Gauge Theory	359
B.3.1	't Hooft-Polyakov Monopole	359
B.3.2	Quantization of Moduli	363
B.3.3	Witten Effect	366
B.4	Instantons	367
B.4.1	Setup: Euclidean Spinors and 't Hooft Symbols	367
B.4.2	Instantons and Theta Vacua	371
B.4.3	The BPST Instanton	374
B.4.4	Moduli of BPST Instanton	376
B.4.5	Zero Modes from Atiyah-Singer Index Theorem	379
B.4.6	Instantonic Path Integral and Instanton Calculus	385
B.4.7	Massless Fermions in Instanton Background	390
B.4.8	Large Instantons, Higgs Mechanism and Constrained Instantons	393
A	Appendix C Supersymmetry	401
C.1	The SUSY Algebra	401
C.2	Constructing Supersymmetric Actions	407
C.2.1	Superspace and Superfields	407
C.2.2	Chiral Superfields	409
C.2.3	Vector Superfields	412
C.2.4	Supersymmetric Gauge Theories	414
C.2.5	SUSY Breaking	418
C.3	Holomorphy and Non-Renormalization Theorem	422
C.3.1	The Non-Renormalization Theorem	422
C.3.2	The NSVZ Beta Function	428
C.4	IR Behavior of Supersymmetric QCD	431
C.4.1	Pure Supersymmetric Yang-Mills at $\mathbf{N}_f = \mathbf{0}$	433
C.4.2	Classical Moduli of Supersymmetric Theories	434
C.4.3	Vacuum Runaway at $\mathbf{N}_f < \mathbf{N}_c$	437
C.4.4	Confinement with Chiral Symmetry Breaking at $\mathbf{N}_f = \mathbf{N}_c$	446
C.4.5	Confinement without Chiral Symmetry Breaking at $\mathbf{N}_f = \mathbf{N}_c + \mathbf{1}$	451
C.4.6	The Conformal Window at $\frac{3}{2}\mathbf{N}_c \leq \mathbf{N}_f < 3\mathbf{N}_c$	453
C.4.7	Seiberg Duality and Free Pion Gas at $\mathbf{N}_c + \mathbf{2} \leq \mathbf{N}_f < \frac{3}{2}\mathbf{N}_c$	458
C.5	Exact Solution of $\mathcal{N} = 2$ Super Yang-Mills Theory	465
C.5.1	$\mathcal{N} = 2$ SYM and Seiberg-Witten Duality	465
C.5.2	Dynamics of $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ SYM	469
C.5.3	Seiberg-Witten Solution to $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ SYM	477

C.6	2D $\mathcal{N} = (2, 2)$ Supersymmetry and Mirror Symmetry	482
C.6.1	$\mathcal{N} = (2, 2)$ Supersymmetry	482
C.6.2	Dynamics of $\mathcal{N} = (2, 2)$ Abelian Gauge Theories	487
C.6.3	Mirror Symmetry	493
Appendix D	Conformal Field Theory	503
D.1	Conformal Invariance	503
D.1.1	The Conformal Group and its Representations	503
D.1.2	Energy-Momentum Tensor as the Conformal Flow	508
D.1.3	Conformal Invariance of Quantum Theory	510
D.2	Conformal Invariance in 2 Dimensions	512
D.2.1	Global and Local Conformal Invariance	512
D.2.2	Conformal Ward Identities and Operator Product Expansion	515
D.3	The Virasoro Algebra	524
D.3.1	The Virasoro Algebra	524
D.3.2	Central Charge, Casimir Energy and the Weyl Anomaly	527
D.3.3	Highest Weight Representations of Virasoro Algebra	529
D.3.4	The Operator-State Correspondence	532
D.3.5	Conformal Families and Operator Algebra	539
D.4	Modular Invariance	544
D.4.1	Defining Properties of 2D CFTs	544
D.4.2	CFT on the Torus	545
D.4.3	CFT on Riemann Surfaces	553
D.5	Conformal Bootstrap	559
D.5.1	Virasoro Conformal Blocks and Crossing Equation	559
D.5.2	Recursive Representation of the Conformal Block	561
D.5.3	The Pillow Geometry and Analytic Continuation of the Conformal Block	565
D.5.4	Solution to Crossing Equation: Minimal Model	572
D.5.5	Solution to Crossing Equation: Liouville Theory	574
D.6	A Brief Survey of Known 2D CFTs	576
D.6.1	Narain Lattice	576
D.6.2	Orbifolds	578
D.6.3	Minimal Models	585
D.6.4	Wess-Zumino-Witten and Coset Models	587
D.6.5	Superconformal Field Theory	591
D.6.6	Boot Camp: Complex, Kähler and Calabi-Yau Manifolds	597
D.6.7	Nonlinear Sigma Models on Calabi-Yau Manifolds	603

D.6.8	Exactly Marginal Deformations and CFT Moduli Spaces	606
D.6.9	RG Flows and Conformal Perturbation Theory	608
D.7	Topological Defect Lines and Generalized Symmetries	609
Appendix E	Integrable Quantum Field Theories	611

Chapter 0

Prerequisites and Notations

在开始整个 notes 之前，我想说明一下这个 notes 究竟是什么。首先，这个 notes 并不是一个所谓的“教材”，我想也并不能纯粹依照这个 notes 来学习量子场论——它可能有些错误，对初学者也可能太难了。与之相反的，这个 notes 的正确使用方法可能是作为学习量子场论时的一个参考：它给出了我对“量子场论究竟是什么”这个问题的认识，也写了一些我对教材中含糊其辞的地方的见解。我想如果看 Srednicki 或者 Peskin 这些通行的教材时遇到一些问题的话，可以尝试在这个 notes 中得到解答。

Prerequisites

这个 notes 的目标是讨论**相对论性量子场论**。我想在开始讨论之前有必要明确一下要学会这些内容有什么前置知识。首先我们看到，“相对论性量子场论”这一学科名可以分为三个部分：“相对论”、“量子”和“场论”。这分别就对应着这一 notes 的三部分前置知识：

- “相对论”：相对论性量子场论是一个基于狭义相对论的理论。于是为了学明白相对论性量子场论，首先需要明白狭义相对论的基本原理。这包括基础的相对论运动学、相对论质能关系和协变语言表述的电动力学。也就是说：你至少需要明白且熟悉以下公式的意义：

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}), \quad E^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + c^4 m^2, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1)$$

如果你不明白这些公式，那么我想需要折返一下，学习一下狭义相对论相关的知识。至少在国内，这些知识可以在《力学》和《电动力学》这两门课程中学到。

- “量子”：为了学明白相对论性量子场论，还需要熟悉非相对论性的量子力学。这包括最基本的 Schrodinger 方程、Dirac 符号，以及稍微不那么基本的三大绘景、二次量子化和散射理论的内容。你至少需要明白且熟悉以下公式的意义：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad \langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad \hat{\mathcal{O}}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{\mathcal{O}}_S(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \quad (2)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 \quad (3)$$

这些知识可以在《量子力学》和《高等量子力学》这两门课程中学到。

- “场论”：我还希望读者掌握最基础的相对论性分析力学、相对论性经典场论的内容。具体而言，也就是下面的公式：

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)), \quad \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (4)$$

这些知识可以在《理论力学》的课程中学到。

在此之外，我想数学方面也有一些必要的前置知识。这包括最最基本的微积分和线性代数、复变函数、最基本的群论、李群李代数及其表示论的内容（至少要知道“群表示”和“不可约表示”的定义，并且明白量子力学中大量应用的关于 $SU(2)$ 群表示的内容！）。在此之外的数学知识，例如第七章中大量用到的李群李代数的表示论的内容，会在每章的附录中详细阐明。顺便，在正文的 1 到 8 章中，一切都是严格按照逻辑顺序阐述的，后面的内容不会用到前面内容及这些前置知识中不包含的知识。但是由于附录 A 到 D 本身是单独的 notes，于是在附录 A 到 D 中，我们可能会用到一些前文及这些前置知识中均不包含的内容¹。

Special Relativity

在开始讨论之前，我想先确定我们将要使用的记号也是有益的。既然相对论性量子场论是一个基于狭义相对论的理论，那么首先当然要确定要使用哪一种 Minkowski 度规。在物理学界，常用的 Minkowski 度规有两种：一种是弦论家和宇宙学家常用的**东海岸度规**，也就是： $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$ ，其好处是空间分量上的度规分量和我们平时习惯的 Euclidean 空间的度规相同。另一种是大部分粒子物理学家常用的**西海岸度规**，也就是 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ ，其好处是关系 $p^2 = m^2$ 不用添加额外的负号²。在下面的讨论中，我们将一直使用东海岸度规，也就是：

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

另外，4-坐标 x^μ ，4-动量 p^μ 在“出厂时”将会带有一个上指标，而四维导数 $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 在“出厂时”将会带有一个下指标。指标结构不同于此的 Lorentz 指标都被定义为用度规升降后的结果。

Units

另外一个要着重强调的记号是单位制。由于物理学家的本质都是懒惰的，我们完全不想写出公式中无处不在的真空光速 c 和约化 Planck 常数 \hbar 。这引导我们采用如下的**自然单位制**：

$$\hbar = c = 1 \quad (6)$$

¹由于笔者在 Harvard 大学访问期间改用英语进行学术写作，而附录 D 的一部分来自于这段时期的 notes，于是在现在的版本中，附录 D 的一部分是用英文写成的。如果笔者在之后还有大块时间的话，可能会抽时间将其改写为全中文的 notes。

²其实还有第三种：没有任何物理学家喜欢用的 ict。不过不要急着鄙视这一度规选择：在第五章的讨论中，我们会看到这一度规选择其实蕴涵着一个很深刻的物理本质——Wick 转动。

仅仅选择了自然单位制还是不够的。在选择了 $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 1$ 之后, ε_0, μ_0 也有不同的选择。在这里, 我们将会使用所谓的 **Heaviside-Lorentz 单位制**, 也就是:

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \mu_0 = 1 \quad (7)$$

啊! 这是多么自然! 这样一来, Maxwell 方程组的所有系数就都是 1 了。顺便一提, 如果采取另外一个选择, 也就是 **Gauss 单位制**, 那么 Maxwell 方程组中就会出现奇怪的 4π , 而 Coulomb 定律中的 4π 将会消失。多么不自然!

Fourier Transforms

最后, 不同的数理书籍对 Fourier 变换中 2π 出现的位置也有不同的处理方式。在这里, 我们将会将 2π 全都放在频域的积分测度里。也就是:

$$F(p) = \int d^4x e^{ipx} f(x), \quad f(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ipx} F(p) \quad (8)$$

顺便说一下, 这里的 ipx 指的是 $i(-Et + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$ 。有了这些准备之后, 我们就能正式开始这一 notes 的第一章了。

Chapter 1

Classical Fields

1.1 QFT=QM+SR

量子力学和相对论是不兼容的。在历史上有许多建立一个相对论性量子力学理论的尝试，如尝试用相对论的能动量关系将波函数 ψ 满足的 Schrodinger 方程改写为如下的 Klein-Gordon 方程：

$$(-\partial^2 + m^2) \psi = 0 \quad (1.1)$$

Klein-Gordon 方程的问题在于统计诠释：如果仍然类似非相对论量子力学一般，将 $|\psi|^2$ 取为概率密度，那么会发现“总概率” $\int d^3x |\psi|^2$ 是不守恒的。这就要求我们去寻找另一个守恒量来反映概率这一物理实在。可以证明，这个理论中的一个守恒量是 $\int d^3x (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*)$ ，但是我们可以轻易的看出，这一守恒量并不正定，也就是说如果将其解释为概率的话，理论中将不可避免地存在“负概率密度”。而这当然是不物理的。

物理学家们发现，任何含有二阶以上导数的“Schrodinger 方程”都会导致概率不正定这一问题的出现。于是为了保证概率密度的正定性，我们只能利用一阶导数来构建相对论性波函数的运动方程。而显然，如果不引入额外的数学结构，一阶导数是无法重现出相对论性的能动量关系的。于是，另外的一个尝试是采用矩阵重现相对论的能动量关系，得到 Dirac 方程：

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (1.2)$$

其中 γ^μ 是 4×4 的 Gamma 矩阵，它们满足 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}$ ¹。这样一来，就有：

$$\gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu = \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -p^2 \quad (1.3)$$

从而，对 Dirac 方程再作用一个 $(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)$ ，我们就能回到 Klein-Gordon 方程。这也相当于得到了正确的能动量关系。

Dirac 方程存在负能解。对此 Dirac 的做法是利用 Fermion 的 Pauli 不相容原理，将所有负能态解释为已经被占据的态，也就是所谓的 Dirac 海。并且如果在 Dirac 海中的一个负能电子跃迁到了正能能级，那么 Dirac 海中就相当于出现了带有一定动量、能量和一定正电荷的空穴。这就被 Dirac 解释为正电子。

¹这里的花括号是反对易子。在本章后面，我们将会从 Lorentz 群表示的角度重新认识这些 Gamma 矩阵。

Dirac 方程无疑是成功的：首先它预言了正电子的存在，并且如果考虑电磁场下的 Dirac 方程，经过一些化简，那么方程中将会自然地出现磁矩-磁场的相互作用项。从而利用 Dirac 方程可以成功的解释电子的自旋。不过不幸的是，Dirac 方程也存在诸多的问题。首先，如果利用 Dirac 海来描述一个体系，就需要引入无穷多个粒子去描述体系的状态；并且由于 Boson 没有 Pauli 不相容原理，我们无法利用类似的方法无法解释 Boson 的负能解。另外的一个尖锐问题是，Dirac 理论中，类空间隔的两点间的传播子 $\langle x, t | x', t' \rangle$ 可以不为 0，这意味着因果律被违反。

经过众多试图建立相对论量子力学失败的尝试后，物理学家们提出：可能存在一个更大的理论，QM 和 SR 分别是它的经典极限和非相对论极限。为了构造这个理论，需要统一量子力学中时间和空间的地位。这有两种操作方式，第一种是将时间作为算符，但是这么构建的理论过于复杂。第二种是将时间和位置都看作参量，为此可以引入场算符来试图构建理论：

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \hat{\phi}(x^\mu) \quad (1.4)$$

另外的一个角度引入“场”，是由于 Dirac 海中具有无穷多的电子，要描述体系可以使用二次量子化的语言²。在二次量子化中，使用真空态 $|0\rangle$ 和产生湮灭算符，例如 $\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$ 来描述体系。利用这些产生湮灭算符，任何一个算符也可以利用产生湮灭算符写成二次量子化的形式。这些产生湮灭算符经 Fourier 变换后事实上就是某种场算符，而这实际上就是构建了一个量子场论。

上面提到的这两种构建量子场论的方式的根本不同在于，前者认为场是基本的，量子场论就是一个基本自由度是场的量子理论；而后者认为产生湮灭算符是基本的，而量子场实际上是通过产生湮灭算符构建出来的。在后面的讨论中，我们将会使用第一种方式来构建量子场论³。事实上，这两种构建方式其实是殊途同归的，它们最后都将导向这个 notes 的后续部分将要讨论的量子场论。

1.2 Classical Field Theory and Noether's Theorem

既然我们认为量子场论就是一个场作为基本自由度的量子理论，那么自然我们的讨论就要从“场”开始。那么，场究竟是什么呢？我们平常说的场论又是什么呢？为了解答这个问题，想象一些我们通常见过的经典场：温度场，引力场或是电磁场，这些场的共性是：在每一个时空点上都有一个取值，并且为了确定一个时刻上场的，我们需要确定了具有同一时间坐标的所有时空点上场的取值。回忆一下经典力学里面对广义坐标的定义：广义坐标就是描述系统状态所需的独立变量，于是我们就能说，一个场 ϕ 就是一个具有无穷多个广义坐标 $\phi(\mathbf{x})$ 的系统，这些广义坐标 $\phi(\mathbf{x})$ 一一对应一个空间点 \mathbf{x} 。

仅仅明白如何描述场的状态当然是不够的，要给出一个描述场的理论，我们还需要给出场的动力学。所谓“动力学”，也就是指已知一个体系的状态，从中得出在此之后任意时刻体系的状态的理论。而描述场的动力学的理论就被我们称为一个场论。无论是我们这个 notes 的主角量子场论，还是在电动力学、广义相对论等课程中接触到的经典场论，都是上面所说的“场论”的一个例子。

²可以利用粒子-空穴变换将 Dirac 海视为一个真空态。

³顺便说一下，Weinberg 的场论使用的是第二种理解，他从产生湮灭算符出发，加上一些表征局域性和因果性的基本原理，便导出了整个量子场论。这样的构建方式虽然突出了量子场论在逻辑上的必然性，但是对“量子场论的基本自由度是什么”这样一个问题缺乏自然的答案。

在开始我们对量子场论的讨论前，我们最好看一看经典场论是一个什么样的理论。对于任何一个现代物理学理论而言，它都满足以下的现代物理学的三大基本要素：

- 体系的广义坐标确定一个构型空间，体系的演化可以通过构型空间中的一个路径给出。
- 物理体系的动力学可以通过路径的泛函——作用量来描述。
- 作用量可以通过少数一般性原理来给出。

首先来看第一个基本要素。对于一个场论而言，其广义坐标就是场 $\phi(\mathbf{x})$ ，而由于确定了一个时刻上每个空间点上场的取值，我们就可以确定一个场构型，于是体系构型空间中的一个路径就可以用两个同时面之间每个时空点上场的取值来确定。

而对于一个经典理论而言，其第二个基本要素就体现为 **最小作用量原理**。这也就是说，对于一个经典系统，我们可以写出它的 **作用量** $S[\phi]$ ，它是一个前述路径的泛函。根据前面的讨论，它也就是场在一个时空区域中的取值的泛函。在分析力学中，要知道体系的作用量，只需知道其 **Lagrangian** 即可。由于 Lagrangian 是作用量的时间导数，于是其中出现的所有场都应该具有相同的时间坐标。而由于我们的理论是一个相对论性的理论，它必然满足因果性和 Lorentz 不变性。因果性告诉我们，两个类空间隔的时空点上的场之间不能有相互作用。而在一个同时面上的两个点必然是类空间隔的。从而 Lagrangian 中的所有耦合都应该是局域的。这也就是说，一个相对论性场论的 Lagrangian 一定一定有形式：

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(x) \quad (1.5)$$

这里出现的 $\mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha)$ 被称为 **Lagrange 密度**。将 Lagrangian 对时间积分，就可以得到体系的作用量。从而一个相对论性场论的作用量可以写为：

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad (1.6)$$

前面说到，作为一个相对论性的场论，它一定是满足相对性原理的。这就蕴含着其作用量一定具有 Lorentz 变换下的不变性。更深入地，既然我们希望我们的理论能够描述我们所处的整个宇宙，那么在宇宙上的任何位置、任何时间，我们希望物理规律都不发生变化。从而我们还希望作用量具有时空平移下的不变性。在下一节中会看到，这就要求作用量在 **Poincare 群** 下是不变的。不过事实上，这个平移部分已经被局域性天然满足了。为了看到这一点，考虑一个平移变换：

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(x) \rightarrow \int d^4x \mathcal{L}(x + \delta x) = \int d^4(x + \delta x) \mathcal{L}(x + \delta x) = S[\phi] \quad (1.7)$$

从而，一个具有局域性的理论中天然就具有平移对称性，从而我们只需要考虑 Lagrange 密度的 Lorentz 不变性。于是这些不变性对 Lagrange 密度的唯一要求就是作用量是一个 Lorentz 标量。由于 4-体积元 d^4x 在坐标变换下也类似一个 Lorentz 标量，于是这要求 Lagrange 密度也是一个 Lorentz 标量。

另外，既然体系的广义坐标是场，于是 Lagrange 密度就一定是通过场构建的。进一步地，如果 Lagrange 密度中存在场的超过一阶导数的项，那么可以证明，体系的 Hamiltonian 将是无下界的。这被称为 **Ostrogradski 不稳定性**。于是综合上面的所有讨论，我们就对 Lagrange 密度有以下的三个要求：

- 局域性，也就是说 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x)$ 。
- Lagrange 密度是一个 Lorentz 标量。
- Lagrange 密度中的导数项中最多只有场的一阶导数。于是 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha)$ 。

有了场的作用量，就可以通过最小作用量原理给出经典的场方程：

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} \quad (1.8)$$

这就完全确定了一个经典场如何随着时间演化，从而确定了经典场的动力学。分析力学告诉我们，除去上面我们使用的这一套被称为 Lagrange 力学的形式理论之外，也可以使用 Hamilton 力学来研究这个体系。对于广义坐标 ϕ_α ，与之相关的**广义动量密度**就被定义为：

$$\pi^\alpha := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_\alpha)} \quad (1.9)$$

和经典力学相似的，我们也可以通过 Legendre 变换定义出场的 **Hamilton 密度** 和 **Hamiltonian**：

$$\mathcal{H} = \pi^\alpha \partial_0 \phi_\alpha - \mathcal{L}, \quad H = \int d^3x \mathcal{H} \quad (1.10)$$

Hamilton 力学的核心就是将以下的两个 Hamilton 正则方程作为公理。这一公理是和最小作用量原理所等价的：

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \phi_\alpha)} = -\partial_0 \pi^\alpha, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\alpha} = \partial_0 \phi_\alpha \quad (1.11)$$

利用这两个正则方程，就可以得到场的时间演化行为。现在我们已经明白了什么是一个经典场，并且知道了经典场的动力学是什么样子的。但是我们还有一个问题没有解决：作用量是怎么来的？这就要涉及到物理学这一学科的运作机制。首先要说明的是，物理学理论绝不是自然真理，而是人类对这个世界的认识。人类是如何认识自然界的呢？答案就是通过某些办法猜测出一个个的理论。如何检验这些猜测出的理论的正确性呢？答案当然是用实验去检验。一个理论仅仅给出对实验的解释是不够的，它还需要给出对未来实验的预言。如果这个理论的预言和未来的实验数据相符合，那么这个理论就还没错；如果一个理论给出了错误的预言，那么这个理论就是错误的。当然，一个理论即使是错误的，也不妨碍我们在其适用范围内继续使用这一理论，如同我们当今还在用 Newton 力学处理世界上大部分的运动一样。

明白了这一运作机制，“作用量是怎么来的”这一问题的答案也就自明了：作用量都是我们猜出来的。当然，猜也要有猜的方法，不能胡乱猜测。事实上，猜测作用量的过程也就是将“体系如何演化”这一问题转化为“作用量是怎么来的”这一问题的过程。而在我们做问题之间的转化时，我们总是希望更多的问题变成更少的问题。这也就是上面给出的第三个基本要素告诉我们的事情：作用量来自于少数的一般性原理。这也大概就是某种“猜测的艺术”吧。不过如果不考虑这一猜测的美感如何，仅仅关注这个理论是否能够解释并预言实验的话，其实前两条基本要素也就足够了。

在此之外，经典场论的另一个重要结论是 **Noether 定理**。它告诉我们，每一个连续的对称性都给出一个守恒量。在对这句话做更多解释之前，我们应该回过头来，看看经典场

论中的对称性究竟意味着什么。在小学课堂上，我们就知道：等边三角形具有关于其三个高线的镜像对称性。这其实是在说：在关于其三个高线的镜像变换下，这个三角形是不变的。也就是说，对称性实际上是某些对称性下的不变性。由于在经典场论中，作用量唯一确定了一个理论，于是经典场论的对称性也就是作用量的不变性⁴。于是为了看到对称性的影响，我们就需要考虑一些保持作用量不变的对称操作。并且由于作用量原理要求时空边界上的场固定，于是保持作用量不变的对称变换下，Lagrange 密度可以在变换下差一个全微分 $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$ 。

首先，让我们考虑不变换时空，只有场变化的对称操作。此时可以将无穷小的对称变换写为 $\phi_\alpha \rightarrow \phi_\alpha + \delta\phi_\alpha$ 。并且由于我们只改变场，不直接改变场的导数，于是所有场的导数的变换全部都来自于场的变换。从而我们有关系：

$$\delta(\partial_\mu \phi_\alpha) = \partial_\mu \delta\phi_\alpha \quad (1.12)$$

而由于 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha)$ 是场及其时空导数的函数，于是 Lagrangian 的变换一定来自于场及其时空导数的变换。这告诉我们：

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\alpha} \delta\phi_\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial_\mu \delta\phi_\alpha = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \delta\phi_\alpha \right) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\alpha} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \right) \right) \delta\phi_\alpha = \partial_\mu K^\mu \quad (1.13)$$

对于物理的场而言，场方程一定是满足的，从而上式中第二项为零。于是就得到了以下的守恒律：

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \delta\phi_\alpha - K^\mu \right) = 0 \quad (1.14)$$

从而，如果定义 Noether 流为：

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \delta\phi_\alpha - K^\mu \quad (1.15)$$

那么这个 Noether 流就满足连续性方程 $\partial_\mu J^\mu = 0$ 。这也就意味着量 $Q = \int d^3x J^0$ 是一个守恒量。我们将其称为 Noether 荷。

第二，当对称操作不仅变换时空，还变换场时，可以将无穷小的对称变换写为 $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \tilde{\phi}_\alpha(\tilde{x}) = \phi_\alpha(x) + \delta\phi_\alpha(x)$ ，此时由于时空也发生了变换，于是不同点上的导数算子也会发生变换，从 $\partial/\partial x^\mu$ 变为 $\partial/\partial \tilde{x}^\mu$ 。于是此时，场的导数的变换也就不仅仅来自于场的变换，而有一部分来自于导数算子的变换。于是 $\delta(\partial_\mu \phi_\alpha) = \partial_\mu \delta\phi_\alpha$ 这一关系也就不再成立了。

不过我们仍然可以修好这一关系：如果定义一个 $\bar{\delta}\phi_\alpha(x) := \tilde{\phi}_\alpha(x) - \phi_\alpha(x)$ 。由于在这一步没有考虑到时空的变换，于是对于 $\bar{\delta}\phi_\alpha$ 而言，导数算子也就没有任何变换。于是这一部分就满足：

$$\bar{\delta}\partial_\mu \phi_\alpha = \partial_\mu \bar{\delta}\phi_\alpha \quad (1.16)$$

有了这个关系之后，根据 $\bar{\delta}\phi_\alpha$ 的定义，还可以得到关系：

$$\delta\phi_\alpha(x) = \bar{\delta}\phi_\alpha(x) + \partial_\mu \tilde{\phi}_\alpha(x) \delta x^\mu \approx \bar{\delta}\phi_\alpha(x) + \partial_\mu \phi_\alpha(x) \delta x^\mu \quad (1.17)$$

⁴我在这里一再强调“经典场论的对称性”。在第六章中我们会看到，在量子场论中这件事情会变得复杂一些：一些 Lagrangian 的对称性将不再是量子理论的对称性。这个现象被称为量子反常。

有了这些准备工作，我们就能考虑 Lagrangian 的变换：

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L} &= \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu + \bar{\delta}\mathcal{L} = \partial_\mu L\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\alpha}\bar{\delta}\phi_\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)}\partial_\mu\bar{\delta}\phi_\alpha \\
 &= \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\alpha}(\delta\phi_\alpha - \partial_\mu\phi_\alpha\delta x^\mu) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)}\partial_\mu(\delta\phi_\alpha - \partial_\mu\phi_\alpha\delta x^\mu) \quad (1.18) \\
 &= \partial_\mu \left[\left(\eta_\nu^\mu \mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)}\partial_\nu\phi_\alpha \right) \delta x^\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)}\delta\phi_\alpha \right] = \partial_\mu K^\mu
 \end{aligned}$$

从而，Noether 流可以定义为：

$$J^\mu = \left(\eta_\nu^\mu \mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)}\partial_\nu\phi_\alpha \right) \delta x^\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)}\delta\phi_\alpha - K^\mu \quad (1.19)$$

如此定义的 Noether 流也就满足流守恒定律，其时间分量的空间积分也就仍然是一个守恒量。直到此处，我们就明白了最初那句话中的深意：每一个连续的对称性都给出一个守恒量。

1.3 The Poincare Group and The Poincare Algebra

上一节讨论了经典场论这一“理论生成器”的用法——输入一些广义坐标和一个 Lagrange 密度，输出一个理论。而明白这一用法之后，我们就即将面临两个问题：第一，如何猜出一个 Lagrangian？第二，我们可不可以将这些东西试图“搬运”到相对论性量子场论中？要给出这两个问题的答案，我们都要更深入地去研究体系在 Lorentz 变换以及平移下的行为。

对于第一个问题而言，由于 Lagrange 密度一定是 Lorentz 标量，于是在写出 Lagrange 密度的时候，就需要知道如何用不同变换关系的场组合出一个 Lorentz 标量。这些可能的组合方式就是 Lagrangian 中可能出现的项。由于任何一个变换关系的场都可以写成 Lorentz 群中不同不可约表示的场的叠加，于是如果我们知道了不同的不可约表示中的场如何组合出一个 Lorentz 标量，也就知道了 Lagrangian 中能够存在什么样的项。我们的猜测过程也就要从这些可能存在的项中选择一些合适的项，从而构建出一个理论。这么看来，为了明白如何猜测出一个 Lagrangian，就需要考虑 Lorentz 群的不可约表示。

而对于第二个问题而言，一个相对论性量子场论首先应该是一个相对论性的量子理论。而由于一个量子理论的动力学实际上就是量子态在时间平移下的性质，也就是时间平移群在 Hilbert 空间上的表示⁵⁶。由于在不同的参考系下，时间和空间方向是相对的。于是要讨论量子理论的动力学，需要考虑时空平移群下的投影表示。

⁵事实上是所谓的“投影表示”，也就是满足 $U(g)U(g') = e^{i\phi(g,g')}U(gg')$ 的映射 U 。这其实就是在相差一个相因子的意义上保乘法的“群表示”。至于为什么量子理论是一个投影表示，这是因为两个量子态之间相差一个相因子也代表一个相同的量子态。这会造成什么样的物理后果呢？一般而言，投影表示对应的李代数对易关系中可能会多出一项被称为**中心荷**的项。不过幸运的是，对于下面看到的 Poincare 群而言，所有的中心荷都是 0，于是其投影表示和正常表示给出的李代数对易关系是相同的。故我们就不再需要对 Poincare 群的投影表示加以额外的讨论。

⁶看到这段文字之后，你可能会问：究竟什么是一个“量子理论”呢？这里就先将疑问放一放，我们会在第二章、第三章中着重去讨论这一问题。

为了得到上面两个问题的答案, 这一节的目标就是深入讨论 **Poincare 群**, 也就是 Lorentz 变换和平移构成的群。它的一个更加简洁的定义就是 Minkowski 时空中的等度规群。也就是满足下式的所有变换 $x \mapsto y$ 构成的群:

$$\eta_{\mu'\nu'} \frac{dy^{\mu'}}{dx^\mu} \frac{dy^{\nu'}}{dx^\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (1.20)$$

我们首先看看这个群为什么会由 Lorentz 变换和平移构成。首先由于满足上式的变换一定是线性变换, 于是对于任何的 Poincare 变换, 有:

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (1.21)$$

其中 Λ^μ_ν 是一个 Lorentz 变换矩阵。为了使整个变换不改变 Minkowski 度规, 它也要满足:

$$\eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_\mu \Lambda^{\nu'}_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad (1.22)$$

这就告诉我们, 可以用 $T(\Lambda, a)$ 来标记一个 Poincare 群元素。特殊地, $a^\mu = 0$ 的这些 Poincare 群元素构成的群, 也就是齐次的等度规变换构成的群, 被称为**赝正交群 $O(3,1)$** 。很容易从 $\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$ 中看到, a 的物理意义就是时空平移, 而 Λ 的物理意义则是混合、拉伸四个时空坐标, 这其实也就是 Lorentz 变换。从而这样定义的 Poincare 群的确由 Lorentz 变换和平移构成。

既然一个 Poincare 群元素可以被写为 $T(\Lambda, a)$, 那么连续作用两次 Poincare 变换, 就可以得到 Poincare 群的群乘法是:

$$T(\Lambda', a') T(\Lambda, a) = T(\Lambda' \Lambda, \Lambda' a + a') \quad (1.23)$$

现在我们知道了 Poincare 群能够分解成平移和 Lorentz 变换的两部分, 事实上 $O(3,1)$ 群还可以进一步分解, 给我们更多的结构信息。首先, 通过对 $\eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_\mu \Lambda^{\nu'}_\nu = \eta_{\mu\nu}$ 求行列式, 可以知道:

$$\det \Lambda = \pm 1 \quad (1.24)$$

并且, 如果令 $\eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_\mu \Lambda^{\nu'}_\nu = \eta_{\mu\nu}$ 中的 $\mu, \nu = 0$, 就可以得到:

$$\Lambda^0_0 \Lambda_{\mu 0} = -1 \quad (1.25)$$

于是, 有 $(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \Lambda^i_0 \Lambda^i_0$ 。这告诉我们, $\Lambda^0_0 \geq 1$ 或者 $\Lambda^0_0 \leq -1$ 。由于在群元素的连续变换下, 其行列式及 Λ^0_0 也需要连续变化, 从而这些不连续的取值告诉我们, 可以利用 $\det \Lambda$ 和 Λ^0_0 将 $O(3,1)$ 分为四个联通分支:

- $\det \Lambda = 1$ 和 $\Lambda^0_0 \geq 1$ 的分支被称为正规正时 Lorentz 群, 通常它也被简称为 **Lorentz 群**。由于其中含有单位元素, 于是它也构成一个 $O(3,1)$ 的子群。特殊地, $O(3,1)$ 和 Lorentz 群都是李群, 由于它们在单位元附近的局部结构完全相同, 于是它们的李代数就是相同的。
- $\det \Lambda = -1$ 和 $\Lambda^0_0 \geq 1$ 的分支被称为非正规、正时 Lorentz 群。它可以通过空间反射变换 $\mathcal{P} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 和 Lorentz 群联系起来。
- $\det \Lambda = -1$ 和 $\Lambda^0_0 \leq 1$ 的分支被称为非正规、非正时 Lorentz 群。它可以通过时间反演变换 $\mathcal{T} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ 和 Lorentz 群联系起来。

- $\det \Lambda = 1$ 和 $\Lambda^0_0 \leq 1$ 的分支被称为正规、非正时 Lorentz 群。它可以通过 \mathcal{P} 和 \mathcal{T} 的共同作用和 Lorentz 群联系起来。这个群和 Lorentz 群的并集也构成一个群，被称为 $\text{SO}(3,1)$ 群。

在上面的讨论中，我们仅仅考虑了 Poincare 群的结构，而我们在上面也看到，最重要的内容还是关于 Poincare 群及其子群 Lorentz 群的表示的内容。作为一个李群，如果想要知道关于其表示的信息，可以通过考虑其李代数的信息来将李群这种“拼合起来的复杂的东西”转换为线性空间及线性算子这样简单的结构。为此，我们应该先求出 Poincare 群的李代数。

先看看 Poincare 群有多少个生成元：决定一个 Poincare 群元的参数有 a^μ 的 4 个分量和 Lorentz 变换矩阵 Λ 的独立分量。如果对于一个无穷小 Lorentz 变换，它可以被展开为：

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu + O(\omega^2) \quad (1.26)$$

于是， ω^μ_ν 的自由度数就是一个无穷小 Lorentz 变换的自由度数。从关系 $\eta_{\mu'v'}\Lambda^{\mu'}_\mu\Lambda^{\nu'}_\nu = \eta_{\mu\nu}$ 中可以得出， $\omega_{\mu\nu}$ 是一个反对称实矩阵，于是有 6 个独立分量。这也就告诉我们：Lorentz 群有 6 个生成元。加上时空平移给出的 4 个生成元，Poincare 群就有 10 个生成元。我们知道，从 Lie 代数到 Lie 群的指数映射在单位元的一个邻域中是可逆的。从而在这个邻域中，任何一个无穷小 Poincare 变换都可以写为⁷⁸⁹：

$$T(\Lambda, a) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - ia_\mu P^\mu\right) \approx 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - ia_\mu P^\mu \quad (1.27)$$

在这个式子中，我们将 $P^\mu, J^{\mu\nu}$ 定义为了平移和 Lorentz 变换的生成元。利用 Poincare 群的群乘法，经过一些复杂的计算，就可以得到 Poincare 群的 Lie 代数的结构常数¹⁰：

$$\begin{aligned} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= i(\eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}J^{\nu\rho} + \eta^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}) \\ [P^\mu, J^{\rho\sigma}] &= i(\eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho) \\ [P^\mu, P^\nu] &= 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

如果定义¹¹：

$$J_i := \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J^{jk}, \quad K_i := J^{i0}, \quad P_i := P^i, \quad H := P^0 \quad (1.29)$$

⁷ 在这里使用的符号和 Srednicki 与 Weinberg 相同，和 Peskin 相反。这是由于使用的 Minkowski 度规相反，而我们要求 ω^μ_ν 是相同的张量，从而 $\omega_{\mu\nu}$ 的定义相差一个符号。

⁸ 这个看起来和 QM 中的时间演化算符 e^{-iHt} 的符号相反，但是这里的算符的作用是“反向平移”，更确切地说，对于一个量子场， $T^{-1}(a)\phi(x)T(a) = \phi(x-a)$ 。从而 $e^{iH_a}\phi(t-a)e^{-iH_a} = \phi(t)$ （想想波函数在时空平移下的变换关系）。这和 QM 中的结论没有任何矛盾。

⁹ 对于紧致李群而言，其任意元素都可以写成这样的指数形式。可惜 Poincare 群和 Lorentz 群都并不是紧致李群。

¹⁰ 具体思路就是，将群乘法带来的关系 $T(\Lambda'^{-1}, -a')T(\Lambda, a)T(\Lambda', a') = T(\Lambda'^{-1}\Lambda\Lambda', \Lambda'^{-1}\Lambda a' + \Lambda'^{-1}a - a')$ 展开到二阶，再匹配对应项的系数。由于这里并不是十分重要的计算，就容我略过了。

¹¹ 在一些和我们使用相反度规的教科书，例如 Peskin 上， K^i 被定义为 J^{0i} 而非 J^{i0} 。在那些书上无穷小 Lorentz 变换也被定义为 $\exp(-i\eta \cdot \mathbf{K})$

那么就有以下的对易关系：

$$\begin{aligned}
 [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k & [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk}K_k \\
 [K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk}J_k & [J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk}P_k \\
 [K_i, P_j] &= -iH\delta_{ij} & [J_i, H] &= 0 \\
 [K_i, H] &= -iP_i & [P_i, P_j] &= 0 \\
 [P_i, H] &= 0
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

其中，前三个关系就告诉我们 Lorentz 群的 Lie 代数。这也是 $SO(3,1)$ 群的 Lie 代数。故将它记做 $so(3,1)$ 代数。在这组生成元的定义下，无穷小 Lorentz 变换成为：

$$\exp [i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + i\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{K}] \tag{1.31}$$

其中， θ 是转角， η 被称为快度。特殊地，对于朝向单一方向或具有单一转轴的 boost 或旋转，这个关系对任何有限变换，而不是无穷小变换都成立。有了这些讨论之后，我们就可以尝试回答前面的两个问题了。

1.4 Representations of the Lorentz Group

¹²我们先尝试回答第一个问题：如何猜出一个 Lagrangian？在上面说到，为了明白如何从不同变换关系的场中构建出 Lorentz 标量，需要知道 Lorentz 群的所有不可约表示是什么，这些表示具有什么样的性质。鉴于 Lorentz 群是一个李群，由于李群的表示一一对应李代数的表示¹³，于是为了回答这一问题，我们就可以转而考虑 Lorentz 代数 $so(3,1)$ 的所有不可约表示。在上一节中计算出， $so(3,1)$ 的对易关系是：

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k \tag{1.32}$$

我们接下来就要求出这个李代数的所有不可约表示。这听起来是一个非常困难的任务，不过由于这个李代数实际上可以分为两个理想子代数的直和¹⁴，这个问题实际上会变得简单很多。为了看到这一点，可以定义：

$$M_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \quad N_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \tag{1.33}$$

计算 M_i, N_i 的对易关系，就可以得到：

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk}M_k, \quad [N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}N_k, \quad [M_i, N_j] = 0 \tag{1.34}$$

我们发现 M 和 N 各构成两个 $su(2)$ 子代数。用数学一点的语言说，就是这两部分元素各构成 Lorentz 代数 $so(3,1)$ 的两个 $su(2)$ 理想。这也就蕴含着李代数关系¹⁵：

$$so(3, 1) = su(2) \oplus su(2) \tag{1.35}$$

¹²这一节的讨论可能过于群论了。如果只是想要明白什么是不同 Lorentz 群表示中的场，不愿意深究背后的群论细节的话，可以看看 Peskin 或者 Schwartz 的对应章节。

¹³其实是李群的通用覆盖群的表示一一对应李代数的表示。对于 Lorentz 群而言，其通用覆盖群是 $SL(2, \mathbb{C})$ 。于是下面讨论的“Lorentz 群表示”实际上都是 $SL(2, \mathbb{C})$ 群表示。

¹⁴如果你不知道什么是“理想子代数”，你可以把它想象为两个互相对易的独立部分的直和。

¹⁵事实上没有这么简单：由于我们在定义 M 和 N 的时候用到了生成元在复数域上的叠加，于是我们考虑的实际上并不是 $so(3,1)$ 代数本身，而是其复化 $so(3,1)_{\mathbb{C}}$ 。不过一个李代数复化的表示一一对应李代数的表示，复化李代数的不可约表示也对应李代数的不可约表示，从而这套方案仍然可以用来讨论 $so(3,1)$ 的不可约表示。限于篇幅原因，我们在这里就不再多提李代数复化相关的内容了。

这个李代数关系告诉我们, $so(3,1)$ 的任何不可约表示可以写为两个 $su(2)$ 不可约表示的直积。更加具体地说, 如果这两个 $su(2)$ 不可约表示分别是 D_1, D_2 , 对应的 $so(3,1)$ 表示是 $D = D_1 \otimes D_2$, 那么 D 表示的表示空间就是 D_1, D_2 的表示空间的直积。对于任何一个 $so(3,1)$ 元素 $a_i M_i + b_j N_j$, 其表示矩阵可以写为:

$$D(a_i M_i + b_j N_j) = a_i D_1(M_i) \otimes 1 + 1 \otimes b_j D_2(N_j) \quad (1.36)$$

如果将表示 D_1, D_2 的指标分别记作 α, a , 那么其分量也就是:

$$(D(a_i M_i + b_j N_j))_{\alpha, a}^{\beta, b} = a_i (D_1(M_i))_{\alpha}^{\beta} + b_j (D_2(N_j))_a^b \quad (1.37)$$

从而, 我们仅仅需要知道 $su(2)$ 的所有不可约表示, 就能得到 $so(3,1)$ 的所有不可约表示。而在学习高等量子力学的时候我们就知道, $su(2)$ 代数的不可约表示就是 $|j, m\rangle$ 基所张成空间上的表示 $(2j+1)_{SU(2)}$ 。故任何一个 $so(3,1)$ 表示都可以用两个数标记为 $(u, v) = (u)_{SU(2)} \otimes (v)_{SU(2)}$ 。通过表示空间的关系, 可以轻易的看出表示 (u, v) 的维数就是 uv 。并且容易看出, 表示 (u, v) 中生成元 J_i, K_i 的表示矩阵就是:

$$J_i = M_i^{(u)} \otimes 1 + 1 \otimes N_i^{(v)}, \quad K_i = -i(M_i^{(u)} \otimes 1 - 1 \otimes N_i^{(v)}) \quad (1.38)$$

在明白了 $so(3,1)$ 代数的一般的不可约表示是什么样子之后, 接下来就来看几个常用的不可约表示。

1.4.1 The Representation (1,1)

首先考虑最简单的表示, 也就是 $(1, 1)$ 。由于我们知道, 在 $su(2)$ 群的平凡表示 (1) 中, 所有生成元 M_i, N_i 的表示矩阵都是 0。从而在 $(1, 1)$ 表示中, Lorentz 群的六个生成元对应的表示矩阵也都是 0。这也就是说, $(1, 1)$ 表示的表示空间中的元素在任何 Lorentz 变换下都不变。从而, $(1, 1)$ 表示就对应 Lorentz 标量。

由于 Lagrangian 必须是 Lorentz 标量, 于是 Lorentz 标量当然是非常重要的。我们的目标是要得到不同不可约表示中的场如何组合出 Lorentz 标量, 这其实也就意味着要找到某种场的乘积的线性组合, 使得组合后得到的东西在 Lorentz 变换下不变。如果我们用来组合的场用来组合的场分别是 ϕ_i, ψ_a , 它们处于表示 D_1, D_2 。那么它们就各自具有变换关系¹⁶:

$$\phi'_i(x) = (D_1(\Lambda))_i^j \phi_j(\Lambda^{-1}x), \quad \psi'_a(x) = (D_2(\Lambda))_a^b \psi_b(\Lambda^{-1}x) \quad (1.39)$$

于是, $\phi_i \psi_a$ 的变换关系就是:

$$\phi'_i(x) \psi'_a(x) = (D_1(\Lambda))_i^j (D_2(\Lambda))_a^b \phi_j(\Lambda^{-1}x) \psi_b(\Lambda^{-1}x) \quad (1.40)$$

也就是说, $\phi_i \psi_a$ 按照表示 $D_1 \otimes D_2$ 变换。我们希望 $\phi_i \psi_a$ 的某种线性组合 $C^{ia} \phi_i \psi_a$ 按照表示 $(1, 1)$ 变化。由于 $C^{ia} \phi_i \psi_a$ 是表示 $D_1 \otimes D_2$ 的表示空间中的元素, 而它自己构成一个平凡表示, 从而这也要求 $D_1 \otimes D_2$ 这直积表示的约化中含有一个不可约表示 $(1, 1)$ 。

¹⁶对于一个标量场, 例如温度场而言, 坐标变换不会改变坐标对应点的值, 只是变换了一下坐标轴。于是就有 $\phi'(\Lambda x) = \phi(x)$ 。从而 $\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$ 。而对于其他表示中的场而言, 坐标变换也不会改变坐标对应点上的场这一实体, 场分量的变换仅仅来自于坐标变换导致的分量定义不同。而我们所讨论的场在 Lorentz 群下的表示实际上描述的是一部分变换。于是有 $\phi'_i(x) = (D(\Lambda))_i^j \phi_j(\Lambda^{-1}x)$ 。

这一约化对应的线性组合方式也就由**投影张量** C^{ia} 刻画。我们接下来的目标，其实就是寻找含有 $(1,1)$ 表示的表示直积，并且求出对应的投影张量。

如何寻找投影张量呢？既然 $C^{ia}\phi_i\psi_a$ 在 Lorentz 群下不变，也就是：

$$C^{ia}\phi'_i(x)\psi'_a(x) = C^{ia}(D_1(\Lambda))_i^j(D_2(\Lambda))_a^b\phi_j(\Lambda^{-1}x)\psi_b(\Lambda^{-1}x) = C^{jb}\phi_j(\Lambda^{-1}x)\psi_b(\Lambda^{-1}x) \quad (1.41)$$

这也就要求：

$$C^{ia}(D_1(\Lambda))_i^j(D_2(\Lambda))_a^b = C^{jb} \quad (1.42)$$

写成无穷小形式的话，也就是：

$$C^{ib}D_1(J^{\mu\nu})_i^j + C^{ja}D_2(J^{\mu\nu})_a^b = 0 \quad (1.43)$$

这就是投影张量要满足的要求。当然，不仅仅有投影到 $(1,1)$ 表示的投影张量，如果 $D_1 \otimes D_2$ 这一表示中含有不可约表示 D ，那么也存在一个表示 $D_1 \otimes D_2$ 到表示 D 的投影张量 C_{ia}^{α} ¹⁷，使得 $C_{ia}^{\alpha}\phi_i\psi_a$ 按照表示 D 变换。由于我们要求：

$$C_{\alpha}^{ia}(D_1(\Lambda))_i^j(D_2(\Lambda))_a^b\phi_j\psi_b = (D(\Lambda))_{\alpha}^{\beta}C_{\beta}^{jb}\phi_j\psi_b \quad (1.44)$$

这样的一个投影张量就要满足：

$$C_{\alpha}^{ia}(D_1(\Lambda))_i^j(D_2(\Lambda))_a^b = (D(\Lambda))_{\alpha}^{\beta}C_{\beta}^{jb} \quad (1.45)$$

分量形式也就是：

$$C_{\alpha}^{ib}D_1(J^{\mu\nu})_i^j + C_{\alpha}^{ja}D_2(J^{\mu\nu})_a^b = D(J^{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta}C_{\beta}^{jb} \quad (1.46)$$

最后，要注意一下：“投影张量”本身并不是一个张量，它仅仅是一组数，从而不随 Lorentz 变换而变换。我们称之为“投影张量”，只是因为它能够帮助我们从张量空间中“投影”出平凡表示，并且其“携带的”指标类似一个张量，从而有些数学家、物理学家也将这个东西称为**不变符号**。但是为了体现出其本质，我们接下来仍然将其冠以“投影张量”之名。

1.4.2 The Representation (2,1) and (1,2)

我们首先考虑的不可约表示是表示 $(2,1)$ 和 $(1,2)$ 。处于这些表示中的量称为**右手/左手 Weyl 旋量**。根据上面给出的 Lorentz 群生成元的公式，在这两个旋量表示下，Lorentz 群的生成元是：

$$S_L^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\sigma_k, \quad S_L^{k0} = \frac{1}{2}i\sigma_k, \quad S_R^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\sigma_k, \quad S_R^{k0} = -\frac{1}{2}i\sigma_k \quad (1.47)$$

¹⁷ 其中 α 是表示 D 的指标。

从而, 旋量场在 Lorentz 变换下的变换关系就是¹⁸¹⁹:

$$\tilde{\psi}_{La}(x) = D_L(\Lambda)_a^b \psi_{Lb}(\Lambda^{-1}x), \quad \tilde{\psi}_{RA}(x) = D_R(\Lambda)_A^B \psi_{RB}(\Lambda^{-1}x) \quad (1.48)$$

$$D_{L/R}(\Lambda) = \exp \left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S_{L/R}^{\mu\nu} \right) \quad (1.49)$$

这里, 我们用小写拉丁字母 a, b, c 代表左手旋量指标, 大写拉丁字母 A, B, C 代表右手旋量指标。这两个表示之间有着很紧密的联系。为了看到这一个联系, 考虑一个任意李群 G 的表示 R 中的场 ϕ_i 。如果 R 表示中, G 的生成元是 T_R^a ²⁰, 那么在一个无穷小变换下, 其变换关系是:

$$\phi'_i = \phi_i + i\theta^a (T_R^a)_i^j \phi_j \quad (1.50)$$

对于这个场的复共轭 ϕ_i^* , 有²¹:

$$(\phi'_i)^* = (\phi_i + i\theta^a (T_R^a)_i^j \phi_j)^* = \phi_i^\dagger - i\theta^a [(T_R^a)_i^j]^* \phi_j^\dagger \quad (1.51)$$

于是 ϕ^* 所在表示 \bar{R} 的生成元就是:

$$T_R^a = -(T_R^a)^* \quad (1.52)$$

这样写出的表示 \bar{R} 就称为表示 R 的**复共轭表示**。上面这些讨论就告诉我们, 如果一个场处于表示 R , 其 Hermitian 共轭无非就是对复共轭做个转置, 于是它也将处于 R 的复共轭表示。有了这些准备工作之后, 我们就能考虑左手和右手旋量场之间的关系了。对于表示 (1,2), 也就是左手旋量所处的表示而言, 其复共轭表示的表示矩阵是:

$$-(J_{i,L})^* = -\frac{1}{2} \sigma_i^*, \quad -(K_{i,L})^* = \frac{i}{2} \sigma_i^* \quad (1.53)$$

容易验证, Pauli 矩阵满足关系:

$$-\sigma_i^* = \sigma_2 \sigma_i \sigma_2 \quad (1.54)$$

从而:

$$-(S_L^{\mu\nu})^* = \sigma_2 S_R^{\mu\nu} \sigma_2 \quad (1.55)$$

从而, 表示 (2,1) 和 (1,2) 的复共轭等价。这告诉我们, 左手旋量所处的表示和右手旋量所处的表示互为复共轭表示。如果 ψ_L 按照表示 (1,2) 变化, 那么 $i\sigma_2 \psi_L^*$ 就按照表示 (2,1)

¹⁸这个关系仅仅在单位元的一个邻域中成立。对于任意的 Lorentz 变换, 还需要特殊的处理。具体的处理就是: 一个将 $k = (k_0, 0, 0, k_z)$ 变换到 k' 的任意 Lorentz 变换 Λ 可以分解为三个步骤: (1) 作用一个 z 方向的 boost \mathcal{B}_k^{-1} , 使 k 的空间分量为 0, (2) 作用一个旋转 \mathcal{R} , 将 z 轴的空间方向旋转到 k' 的空间方向, (3) 沿新的 z 轴作用 boost $\mathcal{B}_{k'}$, 使 k 变换到 k' 。从而 $\Lambda = \mathcal{B}_{k'} \mathcal{R} \mathcal{B}_k^{-1}$ 。由于这三个都是仅涉及到单一生成元的对称操作, 于是这三个变换都能写成指数形式。

¹⁹我在下面通常使用的记号是: 一个一般的表示中矢量的分量 ϕ_i “出生时” 带一个下指标, 表示空间中的基 e^i 出生时带一个上指标。对于我们常用的 Lorentz 群表示而言, 旋量表示“出生时” 带一个下指标, 而 4-矢量 A^μ 出生时带一个上指标。这些东西都是纯粹的记号约定, 不蕴含任何物理, 所以你不用这个记号也无所谓。

²⁰请原谅我和左手旋量指标用了同样的字母, 我实在不知道该用什么字母了。由于这里的讨论相对独立, 我想应该不会造成混淆。顺便说一下, 我们通常将一般的表示称作 R , 上面所有一般的表示称作 D 的原因其实是为了避免 R 和“右手”混淆。

²¹由于物理中讨论的李群都是实李群, 于是所有 θ^a 都是实的。

变化²²。同样地, $-i\sigma_2\psi_R^*$ 按照 (2,1) 变化。后面我们将会看到, 这会是电荷共轭变换的基础。

既然三维旋转群是 Lorentz 群的子群, 于是给出一个 Lorentz 群表示之后, 我们也就明白了这些表示中的态在三维旋转下的变换关系。这也就相当于将这个 $so(3,1)$ 表示限制在其子代数 $so(3)$ 上。由于一个不可约表示限制在子群上未必不可约, 于是我们可能得到一些 $so(3)$ 表示的直和。

我们在下一节中会看到, 这给出的实际上就是这个场的自旋角动量: 如果表示 (u, v) 限制在 $so(3)$ 上分解为表示 $(2j_1 + 1), (2j_2 + 1), \dots, (2j_k + 1)$, 也就意味着 (u, v) 中的场具有自旋 j_1, \dots, j_k 的分量。在下一章中会看到, 在量子场论中, 这也对应场能够激发出的粒子的自旋。

对于 Weyl 旋量而言, 考虑 J_i 的表示矩阵。可以发现, 这些表示矩阵和 $so(3)$ 群的表示 (2) 中的表示矩阵完全相同。这也就是说, $(2,1), (1,2)$ 这两个表示限制在 $so(3)$ 中给出表示 (2), 从而 Weyl 旋量场是自旋 $1/2$ 的。

完成这两个旋量表示的基本性质的讨论之后, 我们就应该看看从旋量表示中该如何构造出 Lorentz 标量, 并且讨论相应的投影张量。对于 Lorentz 群而言, 由于其表示 (u, v) 是两个 $su(2)$ 表示的直积, 于是两个 Lorentz 群表示直积 $(u, v) \otimes (u', v')$ 也就是将两个 $su(2)$ 表示分别直积, 得到两个大表示 $(u) \otimes (u'), (v) \otimes (v')$, 然后再取两个大表示的直积的结果。而 $su(2)$ 的直积表示可以通过 Clebsch-Gordon 分解分解为各不可约表示的直和, 从而要将 Lorentz 群的直积表示分解为不可约表示, 就可以对两个 $su(2)$ 表示分别做 Clebsch-Gordon 分解, 再对分解结果求直积来的到新的 Lorentz 群不可约表示。这说起来可能有些晦涩, 不过举一个例子就可以让这件事情变得非常清楚。用 $(2,2) \otimes (2,2)$ 举例, 就是:

$$\begin{aligned} (2,2) \otimes (2,2) &= ((2)_M \otimes (2)_N) \otimes ((2)_M \otimes (2)_N) = ((2) \otimes (2))_M \otimes ((2) \otimes (2))_N \\ &= ((1) \oplus (3))_M \otimes ((1) \oplus (3))_N = (1,1) \oplus (1,3) \oplus (3,1) \oplus (3,3) \end{aligned} \quad (1.56)$$

利用类似的计算, 我们就能得到直积表示的如下分解关系:

$$(1,2) \otimes (1,2) = (1,1) \oplus (1,3), \quad (2,1) \otimes (2,1) = (1,1) \oplus (3,1), \quad (1,2) \otimes (2,1) = (2,2) \quad (1.57)$$

$(1,2) \otimes (1,2), (2,1) \otimes (2,1)$ Contains $(1,1)$

首先我们看到, $(1,2) \otimes (1,2)$ 和 $(2,1) \otimes (2,1)$ 都包含平凡表示。而由于 $so(3,1)$ 不可约表示就是两个 $su(2)$ 不可约表示的直和, 于是这个表示直积中的投影张量也可以通过 $su(2)$ 表示的投影张量求出。我们知道, $su(2)$ 中, 表示 $(2) \otimes (2)$ 到 (1) 的投影张量就是如下定义的 Levi-Civita 符号²³:

$$\varepsilon^{12} = 1, \quad \varepsilon^{21} = -1 \quad (1.58)$$

于是, Levi-Civita 符号的确是表示 $(1,2) \otimes (1,2), (2,1) \otimes (2,1)$ 到平凡表示的投影张

²²这里加了一个 i , 是因为我们希望这个相似变换矩阵是实的。至于为什么将一个定义为 i , 另一个定义为 $-i$, 本节后面会揭晓其中奥妙。

²³顺便说一下, 对于一般的 $su(2)$ 表示而言, $(2j_1 + 1) \otimes (2j_2 + 1)$ 到 $(2j + 1)$ 的投影张量其实就是 Clebsch-Gordan 系数 $C_{m_1, m_2}^m := \langle j, m | j_1, j_2, m_1, m_2 \rangle$ 。这里的 Levi-Civita 符号其实也就是“角动量单态波函数”。

量²⁴。据此我们可以构造出以下的 Lorentz 不变量：

$$\varepsilon^{ab}\psi_{La}\phi_{Lb}, \quad \varepsilon^{AB}\psi_{RA}\phi_{RB}, \quad \varepsilon^{AB}\psi_{RA}(i\sigma_2\phi_L)_B, \quad \varepsilon^{ab}\psi_{Ra}(-i\sigma_2\phi_R)_b \quad (1.60)$$

这些 Lorentz 不变量都可以作为 Lagrangian 中出现的项的备选而存在。为了更好地表达出前面这些 Lorentz 不变量，我们也可以利用 Levi-Civita 符号定义一个具有上指标的左手旋量²⁵：

$$\psi_L^a := \varepsilon^{ab}\psi_{Lb} \quad (1.61)$$

这样一来，Lorentz 不变量 $\varepsilon^{ab}\psi_{La}\phi_{Lb}$ 就可以被写成 $\psi_{La}\psi^{La}$ 。类似的，我们也可以定义一个具有上指标的右手 Weyl 旋量：

$$\psi_R^A := -\varepsilon^{AB}\psi_{RB} \quad (1.62)$$

注意：这里比左手旋量的式子多出了一个负号。这个负号中不蕴含任何的物理本质，而仅仅是一个习惯上的选取。由于这样定义的具有上指标的旋量其实也就相当于将表示 (2,1) 和 (1,2) 的表示空间换了一组基，于是它们也处于表示 (2,1) 和 (1,2) 中。为了寻求在这组基下的投影张量，我们也可以定义一个具有下指标的 Levi-Civita 符号：

$$\varepsilon_{12} = -1, \quad \varepsilon_{21} = 1 \quad (1.63)$$

容易验证， ε_{ab} 就是这组基下的投影张量。在引入了具有下指标的 Levi-Civita 符号之后，我们可以发现很多有趣的事情：首先，这样定义的 Levi-Civita 符号满足关系：

$$\varepsilon_{ab}\varepsilon^{bc} = \varepsilon^{cb}\varepsilon_{ba} = \delta_a^c \quad (1.64)$$

利用这个关系，就可以写出 $\psi_{La} = \varepsilon_{ab}\psi_L^b, \psi_{RA} = -\varepsilon_{AB}\psi_R^B$ 。这也就是说，可以利用具有下指标的 Levi-Civita 符号将具有上指标的旋量“复原”成具有下指标的旋量。这其实也就相当于，我们可以利用这些 Levi-Civita 符号升降旋量指标。

另外一个有趣的事情来自于带有上指标的旋量的变换关系：

$$\tilde{\psi}_L^a = \varepsilon^{ab}\tilde{\psi}_{Lb} = \varepsilon^{ab}D_L(\Lambda)_b^c\psi_{Lc} = \varepsilon^{ab}D_L(\Lambda)_b^c\varepsilon_{cd}\psi_L^d \equiv D_L(\Lambda)_d^a\psi_L^d \quad (1.65)$$

从而，在 ψ_L^a 这组基下，表示矩阵就是 $D_L(\Lambda)_d^a := \varepsilon^{ab}D_L(\Lambda)_b^c\varepsilon_{cd}$ 。按照相似的过程，也可以证明 ψ_R^A 基下的表示矩阵是 $D_R(\Lambda)_D^A := \varepsilon^{AB}D_L(\Lambda)_B^C\varepsilon_{CD}$ 。我们可以验证有关系：

$$\varepsilon^{ca}(S_L^{\mu\nu})_a^b\varepsilon_{bd} = -(S_L^{\mu\nu})_d^c, \quad \varepsilon^{CA}(S_R^{\mu\nu})_A^B\varepsilon_{BD} = -(S_R^{\mu\nu})_D^C \quad (1.66)$$

这也就蕴含了：

$$D_L(\Lambda)_b^a D_L(\Lambda)_c^b = \delta_a^c, \quad D_R(\Lambda)_B^A D_R(\Lambda)_C^B = \delta_C^A \quad (1.67)$$

²⁴如果你不太信服这件事情，可以验证，Levi-Civita 符号具有以下性质：

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ac}(S_L^{\mu\nu})_c^b + \varepsilon^{cb}(S_L^{\mu\nu})_c^a &= \varepsilon S_L - (\varepsilon S_L)^T = 0 \\ \varepsilon^{AC}(S_R^{\mu\nu})_C^B + \varepsilon^{CB}(S_R^{\mu\nu})_C^A &= \varepsilon S_R - (\varepsilon S_R)^T = 0 \end{aligned} \quad (1.59)$$

²⁵注意指标顺序！如果指标顺序错误，由于 Levi-Civita 符号的反对称性，整体会相差一个负号。

于是，带有上指标的旋量按照相应表示中表示矩阵的逆变换。这些关系也就说明，表示(2,1), (1,2) 及其逆互为等价表示²⁶。

最后一件有趣的事情来自于前面给出的 (1,2) 和 (2,1) 表示的共轭关系。由于 $i\sigma_2\psi_L^*$ 的变换关系与 ψ_R 相同，那么也就有 $-i\sigma_2\psi_R = \psi_L^*$ 。并且我们发现： $i\sigma_2$ 和带有上指标的 Levi-Civita 张量的矩阵元完全相同。从而其左手边的变换关系也就和带有一个上指标的右手旋量的变换关系完全相同。于是可以写出：

$$(\psi_{La})^* = (\psi_L^*)^A \quad (1.68)$$

比起这个记号而言，物理学家更加喜欢另外一套被称为 **Dotted-Undotted 指标**的记号。这其实就是定义上指标为“默认的”右手旋量指标：

$$\psi_{R\dot{a}} := \psi_R^A \quad (1.69)$$

于是，上面的共轭关系就可以写为：

$$(\psi_{La})^* = \psi_{L\dot{a}}^* \quad (1.70)$$

也就是说，对场做 Hermitian 共轭，对应的指标也要在 Dotted 和 Undotted 之间相互转换。我们也可以利用 Levi-Civita 张量定义相应的上指标： $\psi_R^{\dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\psi_{R\dot{b}}$ 。代入上面的定义，就可以得到：

$$\psi_R^{\dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\psi_{R\dot{b}} = -\varepsilon_{AB}\psi_R^B = \psi_{RA} \quad (1.71)$$

从而，Dotted-Undotted 指标其实就是翻转了一下上面定义的右手旋量指标的上下。这也就解释了为什么我们在刚才定义具有上指标的右手旋量时要加上额外的负号——这是为了保证 Dotted-Undotted 指标的“升降关系”和左手指标完全相同。根据定义，容易发现在带有 Dotted 指标的基下，表示 (2,1) 中的生成元是：

$$(S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}^{\dot{b}} = (S_R^{\mu\nu})_B^A = -[(S_L^{\mu\nu})_a^b]^*, \quad (S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}^{\dot{b}} = (S_R^{\mu\nu})_A^B \quad (1.72)$$

于是，“指标上下相反的” Dotted 右手生成元才是上面所给出的 $S_R^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\sigma_k$, $S_R^{k0} = -\frac{1}{2}i\sigma_k$ 。这是一个稍稍容易混淆的地方。

由于 Dotted-Undotted 指标是物理学界比较通用的指标体系²⁷，于是在下面的讨论中，我们都将使用 Dotted-Undotted 指标而非更加“自然”的 spin-1/2 指标。这一定是由于 Dotted-Undotted 指标比起自然的 spin-1/2 指标而言有着更好的性质。在本节的后面就将看到， $(1,2) \otimes (2,1)$ 表示等价于 4-矢量构成的 Lorentz 群表示。如果我们选用 Dotted-Undotted 指标，那么这个直积到 4-矢量表示的投影张量就是简单的 Pauli 矩阵，而如果选用 spin-1/2 指标的话，还需要在 Pauli 矩阵的基础上乘上一些 Levi-Civita 张量。这可能是 Dotted-Undotted 指标比起 spin-1/2 指标而言最优越的地方。

1.4.3 The Representation (2,2)

刚刚我们讨论了直积 $(1,2) \otimes (1,2)$ 和 $(2,1) \otimes (2,1)$ 的分解，而还没有讨论 $(1,2) \otimes (2,1) = (2,2)$ 。为了从这个直积表示中得出 Lorentz 标量，最好考虑一下表示 (2,2) 的性质。如果

²⁶一般来讲，一个群表示的逆并不是群表示。不过上面这个指标的顺序告诉我们，这里在说“表示的逆”的时候，事实上意味着表示矩阵逆的转置。这仍然构成一个群表示。

²⁷特别是在超对称中！

我们选择两个表示 (2) 的基为 Dotted-Undotted 指标对应的基 $e^a, e^{\dot{a}} = \varepsilon_{AB} e^B$, 那么表示 (2,2) 的基可以取为 $e^a \otimes e^{\dot{a}}$ 。如果我们换一下这个表示空间的基, 将新的基取为:

$$\sigma_{a\dot{a}}^\mu e^a \otimes e^{\dot{a}} \quad (1.73)$$

其中 $\sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma})$ 就是 **Pauli 矩阵**。那么经过简单的计算可以发现, 在新的基下, 表示 (2,2) 下的生成元是:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

$$K_1 = - \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

我们发现: 这正是 4-矢量所处的 Lorentz 群表示的生成元。Lorentz 群的表示 (2,2) 也就是 4-矢量所处的表示, 我们也有时候将这个表示称为 Lorentz 群的**定义表示**。

在开始利用 (2,2) 表示构造 Lorentz 标量之前, 最后考虑一下 (2,2) 表示的自旋。可以从这个生成元的形式中看出, 在 $so(3,1)$ 表示 (2,2) 中, 0 分量在 $so(3)$ 子群下按照平凡表示 (1) 变换, 而 1,2,3 三个分量按照表示 (3) 变换。这意味着以下的分解:

$$(2,2)_{so(3,1)} = (1)_{so(3)} \oplus (3)_{so(3)} \quad (1.76)$$

这两部分的表示分别就对应自旋 0 和自旋 1, 于是我们说, 一个矢量场是具有自旋 0 和自旋 1 的分量的。当然, 标量场在任何 Lorentz 变换下都不变, 限制在 $so(3)$ 子代数上也当然不变, 从而标量场就是自旋 0 的。我们在下一章中会看到, 这意味着这些场激发出的粒子是自旋 1/自旋 0 的。既然不同的场有不同的自旋, 那么我们就可以按照观测到的粒子的自旋来选择理论中出现什么 Lorentz 群表示的场。观测到了自旋 1 的粒子, 就可以在理论中引入矢量场, 观测到了自旋 1/2 的粒子, 就可以在理论中引入旋量场。

(2,2) \otimes (2,2) Contains (1,1)

明白了表示 (2,2) 的性质之后, 我们考虑从表示 (2,2) 中能够如何构造出表示 (1,1)。由于 $su(2)$ 表示的 Clebsch-Gordan 分解, 我们知道:

$$(2,2) \otimes (2,2) = (1,1) \oplus (1,3) \oplus (3,1) \oplus (3,3) \quad (1.77)$$

利用这个结果, 我们发现: $(2,2) \otimes (2,2)$ 中含有表示 (1,1)。这也就是说, 存在一个投影张量 $C_{\mu\nu}$, 能把两个 (2,2) 表示中矢量的乘积投影到平凡表示中。Lorentz 变换保度规的性质, 我们立刻可以得出: 这个投影张量实际上就是 Minkowski 度规 $\eta_{\mu\nu}$ 。从而, 如果给定了表示 (2,2) 中的场 A_μ, B_μ , 那么就可以构造出以下的 Lorentz 标量:

$$A_\mu B^\mu, \quad \partial_\mu A^\mu, \quad (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (1.78)$$

另外值得提及的是, $(2,2) \otimes (2,2) \otimes (2,2) \otimes (2,2)$ 这个表示直积中, 除去两部分 (1,1) 组成的 (1,1) 表示之外, 还存在另外一个 (1,1) 表示。它对应的投影张量就是 **Levi-Civita 符号** $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 。利用这个投影张量, 就能构造出以下的 Lorentz 不变量:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu B_\nu C_\rho D_\sigma, \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial_\rho B_\sigma - \partial_\sigma B_\rho), \quad \dots \quad (1.79)$$

$(1, 2) \otimes (1, 2) \otimes (2, 2)$ Contains $(1, 1)$

有了这些准备之后，我们终于能够从 $(1, 2) \otimes (2, 1) = (2, 2)$ 中得到 Lorentz 标量了。由于 $(1, 2) \otimes (2, 1) = (2, 2)$ ，并且 $(2, 2) \otimes (2, 2)$ 含有 $(1, 1)$ ，于是 $(1, 2) \otimes (2, 1) \otimes (2, 2)$ 也包含表示 $(1, 1)$ 。由于 $(2, 2) \otimes (2, 2)$ 到 $(1, 1)$ 的投影张量就是 $\eta_{\mu\nu}$ ，于是我们只需要知道 $(1, 2) \otimes (2, 1)$ 到 $(2, 2)$ 的投影张量，就能知道 $(1, 2) \otimes (2, 1) \otimes (2, 2)$ 到表示 $(1, 1)$ 的投影张量。

为了求出 $(1, 2) \otimes (2, 1)$ 到 $(2, 2)$ 的投影张量，可以从 $\text{su}(2)$ 表示 $(2) \otimes (1)$ 到 (2) 的投影张量出发。很显然，这就是 δ_a^b 。由于 $(1, 2), (2, 1)$ 可以写成两个 $\text{su}(2)$ 表示的直积。从而， $(1, 2) \otimes (2, 1)$ 到 $(2, 2)$ 的投影张量就是 $\delta_a^b \delta_{\dot{a}}^{\dot{b}}$ 。当然，这里的 $(2, 2)$ 表示中的态是用两个旋量指标去标记的。如果要将其切换到平常意义上的 4-矢量，还需要做一个相似变换。这个相似变换矩阵就是 $\sigma_{a\dot{a}}^{\mu}$ 。从而，在两个旋量指标对应的基 $e^a, e^{\dot{a}}$ 下， $(1, 2) \otimes (2, 1)$ 到 $(2, 2)$ 的投影张量就是 $\sigma_{a\dot{a}}^{\mu}$ 。

知道这个投影张量之后，就可以构造出以下的 Lorentz 不变量：

$$\varepsilon^{ab} \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \sigma_{a\dot{a}}^{\mu} \psi_{Lb} \phi_{R\dot{b}} A_{\mu} = \sigma_{a\dot{a}}^{\mu} \psi_L^a \phi_R^{\dot{a}} A_{\mu}, \quad \varepsilon^{ab} \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \sigma_{a\dot{a}}^{\mu} \psi_{Lb} \partial_{\mu} \phi_{R\dot{b}} = \sigma_{a\dot{a}}^{\mu} \psi_L^a \partial_{\mu} \phi_R^{\dot{a}}, \quad \dots \quad (1.80)$$

同样，为了更好地表达出这些 Lorentz 不变量，定义：

$$\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} := \varepsilon^{ab} \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \sigma_{b\dot{b}}^{\mu} = (1, -\boldsymbol{\sigma}) \quad (1.81)$$

当然，这样定义的 $\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a}$ 也是 $(1, 2) \otimes (2, 1)$ 到 $(2, 2)$ 的投影张量，只不过选取的 $(1, 2) \otimes (2, 1)$ 基和上面的选取相差一个 Levi-Civita 张量给出的变换而已。利用这个定义，就可以将上面我们求出的 Lorentz 不变量写作 $\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} \psi_{La} \phi_{R\dot{a}} A_{\mu}$, $\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} \psi_{La} \partial_{\mu} \phi_{R\dot{a}}$ 。

1.4.4 Dirac Spinors

在物理中，用的最多的并不是 Weyl 旋量。在下一章中我们会看到，表示 $(2, 1)$ 中的旋量在空间反演变换下会变为表示 $(1, 2)$ 中的旋量，于是为了保持体系的空间反演不变性，物理中用的最多的是表示 $(2, 1) \oplus (1, 2)$ 中的 Dirac 旋量。其定义非常简单，就是：

$$\Psi := \begin{pmatrix} \chi_{La} \\ \xi_R^a \end{pmatrix} \quad (1.82)$$

由于 Weyl 旋量是二分量的，从而 Dirac 旋量是四分量的。接下来，我们就来尝试使用 Dirac 旋量来构造 Lorentz 标量。首先根据 $\text{su}(2)$ 群表示的 Clebsch-Gordan 分解，有以下的直积分解：

$$\begin{aligned} ((2, 1) \oplus (1, 2)) \otimes ((2, 1) \oplus (1, 2)) \\ = ((2, 1) \otimes (2, 1)) \oplus ((1, 2) \otimes (1, 2)) \oplus ((1, 2) \otimes (2, 1)) \oplus ((2, 1) \otimes (1, 2)) \\ = (1, 1) \oplus (1, 1) \oplus (2, 2) \oplus (2, 2) \oplus (1, 3) \oplus (3, 1) \end{aligned} \quad (1.83)$$

下面，我们就试图求出这个表示分解对应的投影张量。

$((\mathbf{2}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})) \otimes ((\mathbf{2}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}))$ Contains $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$

首先对于第一个 $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ 而言，它来自于两个左手部分的直积，根据前面的讨论，这个直积到 $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ 的投影张量就是 ε^{ab} 。而第二个来自于两个右手部分的直积，由于 Dirac 旋量的定义中使用的是带有上指标的右手旋量，于是这里的投影张量就是 $\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}$ 。如果写成作用在 Dirac 旋量上的矩阵的话，也就是：

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

这两个投影张量经过一定的线性组合，就能得到以下的两个矩阵：

$$\mathcal{C} := \begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}\gamma_5 \equiv \begin{pmatrix} -\varepsilon^{ac} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\dot{a}\dot{c}} \end{pmatrix} \quad (1.85)$$

这里我们定义了矩阵 \mathcal{C} 和矩阵 γ_5 。其中矩阵 γ_5 被定义为²⁸：

$$\gamma_5 := \begin{pmatrix} -\delta_b^a & 0 \\ 0 & \delta_b^{\dot{a}} \end{pmatrix} \quad (1.86)$$

既然 $\mathcal{C}, \mathcal{C}\gamma_5$ 是投影张量，于是用上面这两个矩阵构造出的 $\Psi^T \mathcal{C} \Psi, \Psi^T \mathcal{C}\gamma_5 \Psi$ 就都是 Lorentz 标量。这虽然很不错，但是由于我们平时看到的相互作用大都是保证费米子数守恒的，而如果我们用这个 notes 后面介绍的形式理论考虑这个耦合项，就会发现：这个耦合项是不满足费米子数守恒的。为了构造出合适的耦合，我们需要知道的是从 Ψ^\dagger 和 Ψ 中能够组合出什么样的 Lorentz 标量。为此我们还需要讨论 Ψ^\dagger 究竟处于哪个表示中²⁹。为此，可以将 Ψ^\dagger 写成 Weyl 旋量的形式：

$$\Psi^\dagger = \begin{pmatrix} \chi_{L\dot{a}}^\dagger & \xi_R^{\dot{a}a} \end{pmatrix} \quad (1.87)$$

其中，我们已经利用了上面得出的结论：对场做 Hermitian 共轭，对应的指标也要在 Dotted 和 Undotted 之间相互转换。而 Ψ^T 写成 Weyl 旋量的形式是：

$$\Psi^T = \begin{pmatrix} \chi_{L a} & \xi_R^{\dot{a}} \end{pmatrix} \quad (1.88)$$

这也就告诉我们，如果乘上一个额外的由 Levi-Civita 张量构成的矩阵 \mathcal{E} ， $\Psi^\dagger \mathcal{E}$ 就能和 Ψ^T 具有相同的指标结构：

$$\Psi^\dagger \mathcal{E} \equiv \begin{pmatrix} \chi_{L\dot{a}}^\dagger & \xi_R^{\dot{a}a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \\ \varepsilon_{ab} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_R^{\dot{a}a} & \chi_L^{\dot{a}} \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

这样一来，上面我们求出的两个投影张量 $\mathcal{C}, \mathcal{C}\gamma_5$ 也可以用来构造含有 Ψ^\dagger 和 Ψ 的 Lorentz 标量 $\Psi^\dagger \mathcal{E} \mathcal{C} \Psi$ 和 $\Psi^\dagger \mathcal{E} \mathcal{C}\gamma_5 \Psi$ 。为了更好地表达出这样的一个 Lorentz 标量，可以定义一个 Dirac 旋量的共轭旋量：

$$\beta = \mathcal{E} \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_b^{\dot{a}} \\ \delta_a^b & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \beta \quad (1.90)$$

²⁸这些名字可能有些奇怪。 \mathcal{C} 的来源是 Conjugation，我们在下一章中会看到，这个矩阵和电荷共轭变换有紧密的联系；而 γ_5 的命名完全是历史遗留问题——后面我们会看到 γ_0 到 γ_3 的四个 Gamma 矩阵，而在定义 γ_5 的时代，它们被称为 γ_1 到 γ_4 。这样一来，你就应该能猜到为什么它叫做 γ_5 了。

²⁹当然，这样一个 $\Psi^T \mathcal{C} \Psi$ 并不是没用的。它事实上给出了一个很重要的耦合项——Majorana 质量。我们会在第八章中详细讨论 Majorana 质量，并且考虑它在中微子物理中的应用。

从而, 这两个 Lorentz 标量也就可以写为:

$$\bar{\Psi}\Psi, \quad \bar{\Psi}\gamma_5\Psi \quad (1.91)$$

这些 Lorentz 标量都可以作为 Lagrangian 中可能出现的项。事实上, Lorentz 标量 $\bar{\Psi}\Psi$ 就给出了旋量场的质量项, 而后一个 Lorentz 不变量加上一个标量场得到的 $\bar{\Psi}\gamma_5\Psi\phi$ 在 Yukawa 理论中给出重子和 π 介子的耦合项。

为了得到 $\bar{\Psi}$ 的很多性质, 可以对 4×4 矩阵定义其共轭: 对于 $A_{4 \times 4}$, 定义 $\bar{A} := \beta A^\dagger \beta$ 。从而如果有一个对 Ψ 满足的方程, 只需要将所有的 4×4 矩阵的顺序倒过来, 并且在每个矩阵上加一个 bar, 就得到了 $\bar{\Psi}$ 满足的方程。特殊的, 对于 γ_5 和后面引入的矩阵 $\gamma^\mu, S^{\mu\nu}$ 而言, 有:

$$\bar{\gamma}_5 = \beta\gamma_5^\dagger\beta = -\gamma_5, \quad \bar{\gamma}^\mu = \beta(\gamma^\mu)^\dagger\beta = \gamma^\mu, \quad \bar{S}^{\mu\nu} = \beta(S^{\mu\nu})^\dagger\beta = S^{\mu\nu} \quad (1.92)$$

顺便, 上面定义出的矩阵 γ_5 还可以用来分解出一个 Dirac 旋量的左手/右手部分。具体而言, 就是可以如下定义出两个投影算符 P_L, P_R :

$$P_L\Psi = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} \chi_{La} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_R\Psi = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_L^{\dagger a} \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

这样一来, $P_L\Psi$ 就只有纯粹左手的分量, 而 $P_R\Psi$ 就只有纯粹右手的分量了。

$((2, 1) \oplus (1, 2)) \otimes ((2, 1) \oplus (1, 2))$ Contains $(2, 2)$

接下来, 考虑直积分解出的另一个不可约表示: 表示 $(2, 2)$ 。从直积分解的过程中看, 这个不可约表示来自于第一个 Dirac 旋量的左/右手部分和第二个 Dirac 旋量的右/左手部分的组合。这对应的投影张量分别就是 $\sigma_{a\dot{a}}^\mu$ 和 $\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a}$ 。由于 Dirac 旋量中左手指标是下指标, 右手 Dotted 指标是上指标, 于是我们需要的投影张量应该有指标结构 $C_{\dot{a}}^{\mu,a}$ 。于是在这个 Pauli 矩阵的基础上, 还需要乘一些 Levi-Civita 张量以给出正确的指标结构。这对应如下的矩阵:

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{ab}\sigma_{b\dot{a}}^\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon_{\dot{a}b}\bar{\sigma}^{\mu\dot{b}a} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.94)$$

从而, 这两个矩阵夹在 Ψ^T 和 Ψ 之间, 得到的东西按照表示 $(2, 2)$ 变化。我们仍然希望得出从 Ψ^\dagger 和 Ψ 中能够组合出什么样的 Lorentz 标量。类似前面的讨论, 由于 $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \mathcal{E} \mathcal{C} \approx \Psi^T \mathcal{C}$, 于是为了从 Ψ^\dagger 和 Ψ 中组合出 Lorentz 标量, 可以在这两个矩阵左边乘上一个 $\mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ 。经过一些线性组合后, 就能得到以下的两个矩阵, 将它们夹在 $\bar{\Psi}$ 和 Ψ 之间, 得到的东西会按照表示 $(2, 2)$ 变化:

$$\gamma^\mu := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{a\dot{a}}^\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^\mu\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{a\dot{a}}^\mu \\ -\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

矩阵 γ^μ 就被称为 **Gamma 矩阵**。利用它们, 可以构造出 Lorentz 标量:

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu, \quad \bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi, \quad \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi A_\mu, \quad \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\Psi, \quad \dots \quad (1.96)$$

它们可以作为 Lagrangian 中的项。事实上, $\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi$ 在很多理论中给出了旋量场的动力学项; $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu$ 在 QED 中给出电子和电磁场的耦合; $\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi A_\mu$ 稍经修改后就给出了电弱理论中费米子和规范玻色子的相互作用。

可以验证, Gamma 矩阵有以下的反对易关系:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu} \quad (1.97)$$

前面所定义出的 γ_5 实际上也可以通过四个 Gamma 矩阵表示出来: $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 。根据 Gamma 矩阵的反对易关系, 就可以得出 Gamma 矩阵和 γ_5 之间的反对易关系:

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 \quad (1.98)$$

在 1.1 节中, 我们为了复原出相对论性的能动量关系, 也在 Dirac 方程中引入了具有相同对易关系的 Gamma 矩阵。现在看来, 这些 Gamma 矩阵事实上也保持了 Dirac 方程的协变性: 由于前面的讨论, $\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi$ 和 $m\bar{\Psi}\Psi$ 都是 Lorentz 标量, 于是 Dirac 方程中的两项 $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi$ 在 Lorentz 群下的变换关系相同, 这也就保证了协变性。

Dirac 方程在量子场论中也有很重要的地位——在第二章中我们就会看到, 它是自由旋量场的运动方程。事实上, 它也就是 Lagrangian $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi$ 所给出的场方程。在前面的讨论中我们看到, 这个 Lagrangian 中的两项的确都是 Lorentz 标量, 从而作为场论, 这个理论也是满足协变性的。

$((2,1) \oplus (1,2)) \otimes ((2,1) \oplus (1,2))$ Contains $(3,1) \oplus (1,3)$

在直积表示 $((2,1) \oplus (1,2)) \otimes ((2,1) \oplus (1,2))$ 的直和分解中, 最后一部分分解出的不可约表示是表示 $(3,1) \oplus (1,3)$ 。为了从这部分表示中构造出 Lorentz 标量, 我们首先要考虑一下 $(3,1) \oplus (1,3)$ 的性质。

这里并不是第一次见到 $(3,1) \oplus (1,3)$ 这个表示了。前面的讨论中, 我们曾给出过 $(2,2) \otimes (2,2) = (1,1) \oplus (1,3) \oplus (3,1) \oplus (3,3)$ 。于是两个 4-矢量构成的 $A^\mu B^\nu$ 中就应该能分解出表示 $(3,1) \oplus (1,3)$ 。进一步地, 由于 $(2) \otimes (2)$ 到 (1) 的投影张量 ε^{ab} 关于两个指标是反对称的, 而 $(2) \otimes (2)$ 到 (3) 的投影张量是 $\varepsilon^{ac}(\sigma^i)_c^b$ ³⁰, 它关于指标 a, b 是对称的。于是在同时交换 $(2,2) \otimes (2,2)$ 的两个 $\text{su}(2)$ 指标时, 表示 $(1,1), (3,3)$ 都是对称的, 而 $(1,3) \oplus (3,1)$ 是反对称的。

这也就是说, 表示 $(1,3) \oplus (3,1)$ 就是反对称的二阶 Lorentz 张量 $A^{[\mu}B^{\nu]}$ 构成的表示。利用 $(2) \otimes (2)$ 到 (3) 的投影张量是 $\varepsilon^{ac}(\sigma^i)_c^b$ 这一事实, 利用和上面类似的方法, 就可以得到相应的投影张量是³¹:

$$\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (1.99)$$

从而, 就可以构造出如下的 Lorentz 不变量:

$$\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi(A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu), \quad \bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \quad \dots \quad (1.100)$$

由于可重整性的原因³², 这些 Lorentz 不变量不太经常在理论中出现。不过在有效场论中, 我们不是很在意理论的可重整性, 于是在有效场论中, 这些 Lorentz 不变量可以作为有效 Lagrangian 的一部分而存在。事实上, 后一个不变量就给出了费米子的反常磁矩。

³⁰当然可以直接验证这是一个投影张量。不过这在数学上这涉及到一个结论: 对 $\text{SU}(N)$ 群而言, $(N) \otimes (\bar{N})$ 到 (A) 的投影张量就是生成元矩阵 $(T^a)_i^j$, 其中 (N) 是 $\text{SU}(N)$ 的基础表示, (A) 是其生成元构成的伴随表示。而对于 $\text{SU}(2)$ 而言, 其生成元就是 Pauli 矩阵, 并且 (2) 和 $(\bar{2})$ 等价, 其相似矩阵就是 ε^{ab} 。于是 $(2) \otimes (2)$ 到 (3) 的投影张量才是 $\varepsilon\sigma^i$ 。我们会在第七章中涉及到更多的 $\text{SU}(N)$ 群表示论, 那时会对这个结论进行更深入的探讨。

³¹这里直接写出的是 $\bar{\Psi}$ 意义上的投影张量。

³²详细的原因可见第五章。

Dirac 旋量表示中的 Lorentz 群的生成元 $S^{\mu\nu}$ 也是一个反对称的二阶 Lorentz 张量, 于是 Lorentz 群的生成元也应该处于这个表示 $(1, 3) \oplus (3, 1)$ 中。事实上, 有关系:

$$S^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (S_L^{\mu\nu})_a^b & 0 \\ 0 & (S_R^{\mu\nu})_a^b \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \quad (1.101)$$

这就讨论完了 $((2, 1) \oplus (1, 2)) \otimes ((2, 1) \oplus (1, 2))$ 中可能分解出的所有不可约表示。

Dirac Bilinears

由于前面的讨论已经穷尽了 $((2, 1) \oplus (1, 2)) \otimes ((2, 1) \oplus (1, 2))$ 中能够分解出的所有不可约表示, 于是所有具有形式 $\bar{\Psi}\Gamma\Psi$ 的双线性型都可以被分解为以下 16 个双线性型的叠加:

$$\begin{array}{lll} \bar{\Psi}\Psi & \text{scalar} & 1 \\ \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi & \text{vector} & 4 \\ \bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi := \frac{i}{2}\bar{\Psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\Psi & \text{rank-2 tensor} & 6 \\ \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi & \text{vector} & 4 \\ \bar{\Psi}\gamma_5\Psi & \text{scalar} & 1 \end{array} \quad (1.102)$$

既然这 16 个双线性型是完备的, 那么对于所有的 4×4 的, 携带两个 Dirac 旋量指标的矩阵, 它们应该都有形式:

$$\Gamma = A_S + A_P\gamma_5 + A_{V,\mu}\gamma^\mu + A_{A,\mu}\gamma^\mu\gamma_5 + A_{T,\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \quad (1.103)$$

并且可以证明, 这 16 个 4×4 矩阵之间有如下的正交关系:

$$\text{Tr}(\Gamma^i\Gamma^j) = 4\delta^{ij}, \quad \Gamma^i = \{1, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}\} \quad (1.104)$$

于是, 每个系数就可以被写为 $A_i = \text{Tr}(\Gamma\Gamma^i)/4$, 就有:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{4} \text{Tr}(\Gamma\Gamma^i)\Gamma^i \quad (1.105)$$

这个关系被称为 Fierz 等式。在后面的讨论中, 我们还会用到这个关系。

1.5 Poincaré Invariance of Classical Field Theory

在相对论中, 能动张量和角动量被定义为 Poincaré 群下的守恒量。于是可以利用场在 Poincaré 群下的 Noether 定理来求出场的能量、动量和角动量。

能动张量是时空平移下的守恒流。在时空平移下, 有 $\delta x^\mu = a^\mu \delta\phi_\alpha = 0$ 。代入上面得到的守恒流表达式中, 就得到:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu \left(\eta^{\mu\nu} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial^\nu \phi_\alpha \right) = 0, \quad T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial^\nu \phi_\alpha \quad (1.106)$$

T 称为能动张量。根据我们上面的讨论，每个 $P^\mu := \int d^3x T^{0\mu}$ 都是一个守恒量。并且有：

$$T^{00} = \pi^\alpha \partial_0 \phi_\alpha - \mathcal{L} = \mathcal{H}, \quad P^0 = \int d^3x \mathcal{H} = H \quad (1.107)$$

$$T^{0i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_\alpha)} \partial^v \phi_\alpha = -\pi^\alpha \partial_i \phi_\alpha, \quad P^i = -\int d^3x \pi_\alpha \partial_i \phi_\alpha \quad (1.108)$$

这里定义的这个守恒量 P 就被定义为系统的 4-动量，也就是说 P^0 就是系统的能量，而 P^i 就是系统的动量。

角动量是时空旋转下的 Lorentz 变换下的守恒流。在前面我们讨论过：由于场算符在 Lorentz 群下的变换构成 Lorentz 群的一个表示。这个表示可以被分解为 Lorentz 群的各不可约表示，于是对于任何场而言，就可以将其分解为处于各不可约表示的场之和。从而可以分别考虑不同不可约表示中的场。先考虑一个普遍的不可约表示。可以将任意的一个无穷小变换写为：

$$\tilde{\phi}_\alpha(\tilde{x}) = \left(\exp \left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right) \right)^\beta_\alpha \phi_\beta(x) \quad (1.109)$$

其中 J 为场 ϕ_α 所在的不可约表示中 Lorentz 群生成元的表示矩阵。从而对于一个无穷小 Lorentz 变换 $\Lambda_v^\mu = \delta_v^\mu + \omega_{\mu\nu}$ ，有 $\delta\phi_\alpha(x) = \frac{i}{2} \delta\omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})_\alpha^\beta \phi_\beta(x), \delta x^\mu = \delta\omega_v^\mu x^v$ 。代入守恒流的表达式，就得到：

$$\partial_\mu \left[T^{\mu\nu} x^\sigma + \frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} (J^{\nu\sigma})_\alpha^\beta \phi_\beta(x) \right] \delta\omega_{v\sigma} = 0 \quad (1.110)$$

于是守恒流是（这一步做了一个反对称化）：

$$M^{\mu\nu\sigma} = T^{\mu\nu} x^\sigma - T^{\mu\sigma} x^\nu + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_\alpha)} (J^{\nu\sigma})_\alpha^\beta \phi_\beta(x) \quad (1.111)$$

它对应的守恒荷是 $J^{\mu\nu} := -\int d^3x M^{0\mu\nu}$ ，也就是³³：

$$J^{\nu\sigma} = -\int d^3x \left[T^{0\nu} x^\sigma - T^{0\sigma} x^\nu + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_\alpha)} (J^{0\sigma})_\alpha^\beta \phi_\beta(x) \right] \quad (1.112)$$

这称为角动量张量。对于 $\nu, \sigma = i, j$ 时，有：

$$J^{ij} = -\int d^3x \pi^\alpha \left[(x^i \partial_j - x^j \partial_i) \delta_\alpha^\beta + i (J^{ij})_\alpha^\beta \right] \phi_\beta(x) \quad (1.113)$$

这就被定义为体系的角动量。可以看到，前面一项有着 $p_i x_j - p_j x_i$ 的形式，我们将其理解为轨道角动量。在轨道角动量之外，体系的角动量还有一项 $S^{ij} := i \int d^3x \pi^\alpha (J^{ij})_\alpha^\beta \phi_\beta(x)$ 。这就是**自旋角动量**。于是就可以说，自旋是在 Lorentz 群下非标量的场所具有的额外角动量。

在上面的讨论中，我们似乎重复定义了能量、动量和角动量：一方面将其定义为了 Poincare 群的生成元，而另一方面将其定义为了体系在 Poincare 群下的守恒荷。事实上，前者是量子意义上的能量、动量和角动量，而后者是经典场论意义上的能量、动量和角动量。在后面会看到，在量子场论中，体系在 Poincare 群下的守恒荷经量子化为算符之后正是 Poincare 群在 Hilbert 空间上的生成元。从而在量子场论中，经典场论意义上的能量、动量和角动量就是量子意义上的能量、动量和角动量。

³³这里为了和平常意义上的的角动量相同，加了一个负号

Chapter 2

Quantum Fields: Canonical Formalism

2.1 Canonical Quantization of Free Scalar Field

在完成上面做的这些准备工作后，就可以开始构建量子场论了。首先，正如在量子力学中将坐标量子化一样，需要对场量子化。所谓“量子化”，其实就是将物理量提升到 Hilbert 空间上的算符¹。在构建量子力学时，我们采用了正则量子化，也就是规定对易子 $[x, p] = i$ 。在量子场论中，我们从而考虑场算符及其正则动量的对易关系。

Creation and Annihilation Operators

首先考虑一个自由的实标量场。猜测其 Lagrangian 为：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.1)$$

容易发现，其经典运动方程是 Klein-Gordon 方程，并且有平面波解 $\phi_k = e^{ikx} = \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ ，其中 $\omega_k := \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ 。由于这些平面波解是完备的，我们可以利用这些平面波解展开一个任意的场：

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} [a(\mathbf{k})e^{ik \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x}] \quad (2.2)$$

其中 $d^3k/(2\pi)^3 2\omega$ 是我们选择的一个 3 动量体积元。可以将其记做：

$$\widetilde{dk} := \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \quad (2.3)$$

事实上，这个体积元的选择是有一些任意性的，不过不同的选择只会带来展开系数的不同²。那么为什么我们要如此选择这个体积元呢？答案在于 Lorentz 不变性。对于这个体积

¹你一定在好奇：这个 Hilbert 空间是什么？我们暂时先回避一下这个问题，在 3.1 节中再对这个事情做一个完整的解答。

²事实上，Peskin 和我们的选择就不同。于是他导出的产生湮灭算符的对易关系中会出现 $\sqrt{2\omega}$ 而不是 2ω 。不出这些奇怪的东西也是我们选择这个体积元的一个原因。

元, 可以证明:

$$\int dk^0 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) = \frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \quad (2.4)$$

由于左手边的积分测度是 d^4k , 并且由于正规正时 Lorentz 变换不改变 k^0 的符号, 从而等式左边的每个量都是在 Lorentz 群下不变的。于是我们选择的这个体积元也是 Lorentz 不变的。有了这个展开之后, 可以从中可以求出展开系数:

$$a(\mathbf{k}) = i \int d^3x e^{-ikx} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \phi(x) \quad (2.5)$$

其中利用了一个简写: $f \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 g := f \partial_0 g - g \partial_0 f$ 。接下来会看到, 这些展开系数在场的量子理论中具有很重要的地位。

有了这些准备, 就可以正式开始对场做正则量子化了。我们在 Heisenberg 绘景下工作, 试图将场 $\phi(x)$ 量子化为算符 $\hat{\phi}(x)$, 并要求它满足某个正则对易关系。在场论中, 对于广义坐标 ϕ 而言, 其正则动量就是 $\pi = -\partial^0 \phi = \partial_0 \phi$ 。于是当我们把它们量子化为算符时, 就要求它满足:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = 0 \quad (2.6)$$

由于这组对易关系只在这些算符对应的时间相同时成立, 于是被称为**等时对易关系**。除此之外, 我们再要求量子场满足经典场所满足的场方程。于是对于量子场, 我们也可以做和经典场类似的模式展开。这个量子的模式展开和上面的经典模式展开中唯一的区别就是 ϕ 被提升为了算符, 展开系数 $a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})$ 也被提升为算符。接下来就要说明, 这些展开系数的算符有明确的物理意义。

先计算这些算符的对易关系。由等时对易关系, 有 $[\phi(x, t), \partial_0 \phi(x, t)] = i\delta^3(x - x')$, 于是:

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= - \int d^3x \int d^3x' e^{-ikx+ik'x'} [\partial_0 \phi(\mathbf{x}, t) - i\omega_k \phi(\mathbf{x}, t), \partial_0 \phi(\mathbf{x}', t) + i\omega_{k'} \phi(\mathbf{x}', t)] \\ &= \int d^3x \int d^3x' e^{-ikx+ik'x'} (2\omega_k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \\ &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (2.7)$$

经过类似的计算, 也可以得出这些算符的对易关系:

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = 0, \quad [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0, \quad [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (2.8)$$

接下来就要说明: 这些算符 $a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})$ 携带的 Hamilton 算符、动量算符的本征值和一个具有动量 \mathbf{k} 的粒子完全相同。为此考虑场的经典 Hamiltonian:

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial^0 \phi \partial_0 \phi + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad (2.9)$$

我们可以将其中所有的 ϕ 替换为响应的场算符, 于是这个 Hamiltonian 也就被量子化为了一个算符。在其中代入场的模式展开, 就可以得到:

$$H = \frac{1}{2} \int \widetilde{dk} \omega (\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k}) + \hat{a}(\mathbf{k}) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})) = \int \widetilde{dk} \omega_k \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k \delta^3(0) \quad (2.10)$$

其中，在最后一个等号处利用了刚刚出炉的对易关系。在这个表达式中，后面一项显然是无穷大，于是这个能量似乎是紫外发散的³。不过由于这一项贡献的是一个常数的能量，而物理应该和能量零点的选取无关，所以我们可以直接将这一项扔掉不管。考虑完了能量，接下来将经典场的动量量子化为算符。类似的计算也表明：

$$\mathbf{P} = - \int d^3x \partial_0 \phi \nabla \phi = \int \tilde{dk} \mathbf{k} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \quad (2.11)$$

事实上，这里我们仅仅将经典场的能量、动量量子化为了 Hilbert 空间上的算符，而并没有证明这些算符就是量子理论中真正的能量和动量算符。在量子理论中，Hilbert 空间上的向量 form 了 Poincare 群的表示 $U(\Lambda, a)$ ，而能量和动量就被定义为这个表示中时空平移的生成元。我们接下来要证明，上面定义的这两个算符正是这个表示中时空平移的生成元。换句话说，当我们对场做量子化后，场在场论意义上的能动量就是量子力学意义上的能动量。

为此先考虑场算符和 Hamiltonian 算符、动量算符的对易子：

$$[\phi(x), P^\mu] = [\phi(x), \int \tilde{dk} k^\mu a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})] = \int \tilde{dk} k^\mu [a(\mathbf{k}) e^{ikx} - a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx}] = -i \partial^\mu \phi(x) \quad (2.12)$$

从而，由 Baker-Hausdorff 公式：

$$e^{iP_a} \phi(x) e^{-iP_a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} [P^{\mu_1} a_{\mu_1}, \dots, [P^{\mu_n} a_{\mu_n}, \phi(x)]] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{\mu_1} \dots a^{\mu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \phi(x) = \phi(x-a) \quad (2.13)$$

这说明，平移下的守恒荷就是量子平移的生成元。不仅仅对平移如此，对于 Lorentz 变换的生成元——角动量张量而言，这件事情也是成立的。不过由于其守恒荷比较复杂，其推导要比平移复杂一些，这里就不展开讨论了。综合上面的讨论，就得到：Poincare 群得到守恒荷就是 Poincare 群在 Hilbert 空间上表示的生成元。换句话说，量子力学意味上的能量、动量和角动量和经典场论意味上的能量、动量和角动量是相同的。

有了这些讨论之后，算符 $a(k), a^\dagger(k)$ 的诠释就很明显了。由于 $[H, a^\dagger(k)] = \omega_k a^\dagger(k)$, $[\mathbf{P}, a^\dagger(k)] = k a^\dagger(k)$ ，于是对任何一个量子态作用 $a^\dagger(k)$ 会使能量、动量本征值升高 ω_k, k 。从而认为算符 $a^\dagger(k)$ 是一个动量为 k ，能量为 ω_k 的粒子的产生算符， $a(k)$ 是这样一个粒子的湮灭算符。

从 Hamiltonian 的形式中就可以看出，这个体系的基态是作用任何湮灭算符均为 0 的态，我们将其称为**真空态** $|0\rangle$ 。如果忽视掉那些无穷大的零点能的话，真空态就具有 0 能量和 0 动量本征值。从 Hamiltonian 的形式中可以看到，真空态是这个体系的基态。对真空态作用一个产生算符，就生成了单粒子态 $|\mathbf{k}\rangle := a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$ 。

粒子是一份能动量的载体，它们是场的激发态。为了在量子理论中描述多粒子态，我们可以构造出 Hilbert 空间中的以下态，并且容易证明其能动量本征值是：

$$|\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n\rangle = \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1) \dots \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_n) |0\rangle, \quad E(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \sum_i \omega(\mathbf{k}_i) \quad (2.14)$$

这些本征态是完备的。于是在整个 Hilbert 空间中有：

$$1 = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \int \tilde{dk} |\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{k}| + \int \tilde{dk} \sum_{\alpha} |\mathbf{k}, \alpha\rangle\langle\mathbf{k}, \alpha| \quad (2.15)$$

³这里其实还没有证明这个算符就是 Hilbert 空间上的 Hamilton 算符，于是在这个阶段无法称之为“能量”。我们马上会证明这件事情是成立的。

其中 α 是多粒子态的除动量之外的所有参数, 例如相对速度等。

在我们结束对产生湮灭算符的讨论之前, 还有一件事情值得说明: 注意到在上面的讨论中, 我们舍去了算符 $a(\mathbf{k}, t)$ 中的时间指标。这是由于在自由场论中对任何时刻的场定义的这些算符是相同的。接下来就来证明这件事。考虑一个 $\phi(\mathbf{x}, 0)$ 的展开:

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \int \widetilde{dk}(a(\mathbf{k})e^{ik \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x}), \quad \phi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}\phi(\mathbf{x}, 0)e^{-iHt} \quad (2.16)$$

从而有:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \widetilde{dk}(a(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}e^{-i\omega_k t} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x}e^{i\omega_k t}) \quad (2.17)$$

可以看到, 这正是 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 的展开。于是就说, 对任何时刻的场定义的这些算符是相同的, 从而在自由场论中, 我们就没必要再区分不同时刻的产生湮灭算符了。

总结一下正则量子化。我们在 Heisenberg 绘景下工作, 假设了两个公理, 也就是:

- 正则对易关系: $[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 。

从这个公理出发, 就可以得到 Poincare 群的守恒荷是 Poincare 群在 Hilbert 空间上表示的生成元, 从而就能得出场算符在 Poincare 群⁴下的变换关系。

- 量子场满足作为算符方程的经典场方程。

这允许我们对量子场做模式展开。并且发现, 场模式展开的展开系数正好携带一个粒子的能动量, 从而将它诠释为粒子的产生湮灭算符。有了产生湮灭算符, 就可以对多粒子态做一个描述。这些多粒子态在整个 Hilbert 空间上是完备的。

The Free Propagator

在实际的运算中, 我们计算的量大多是**关联函数**, 也就是有以下形式 $\langle 0 | T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)\} | 0 \rangle$ 的量。其中这里的 T 是编时算符, 它的意义会在本节后面阐明。我们会在下一章中考虑 LSZ 约化公式时开始看到关联函数的重要性。一言以蔽之, 如果我们知道了一个场论的所有关联函数, 那么就知道了这个场论的所有性质⁵。

于是, 研究一个场论的目标就是求出这个场论的关联函数。对于自由标量场论而言, 这些关联函数之中最重要的一个量就是**自由传播子**。它也就是自由场论中的两点关联函数:

$$\Delta_F(x - y) := i\langle 0 | T\{\phi(x)\phi(y)\} | 0 \rangle \quad (2.18)$$

这个式子中的 T 是编时算符。它的作用是使其后的算符总是按照时间从后到前的顺序排列:

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x) \quad (2.19)$$

⁴由于 Poincare 群不联通, 这其实只能给出场在正规、正时的联通分支下的变换关系。对于其他分支的变化关系, 我们马上就会讨论。

⁵很遗憾, 在正则量子化的框架下, 我找不到一个合适的叙述顺序来使所有的 motivation 都能够在定义之前给出——LSZ 约化公式来自于相互作用的量子场论, 定义它的一些 motivation 来自于自由场论。经权衡, 我想如此给出定义自由传播子的 motivation 是最合理的选择。

将上式展开为产生湮灭算符，有：

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T\{\phi(x)\phi(y)\} | 0 \rangle &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y)\phi(x) | 0 \rangle \\
 &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} [a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot x}] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega'} [a^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot y}] | 0 \rangle \\
 &\quad + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} [a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot y}] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega'} [a^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot x}] | 0 \rangle \\
 &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} e^{ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} e^{ik(y-x)}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

利用阶跃函数的 Fourier 展开：

$$\theta(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt e^{-ixt}}{t + i\varepsilon} \tag{2.21}$$

于是：

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T\{\phi(x)\phi(y)\} | 0 \rangle &= -\frac{1}{2\pi i} \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \frac{1}{t + i\varepsilon} e^{ik(x-y) - it(x^0 - y^0)} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \frac{1}{t + i\varepsilon} e^{-ik(x-y) + it(x^0 - y^0)} \right] \\
 &= -\int \frac{d^4q}{2(2\pi)^4 \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}} e^{iq(x-y)} \left(\frac{1}{q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\varepsilon} + \frac{1}{-q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\varepsilon} \right) \\
 &= -\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 + m^2 - i\varepsilon} e^{iq(x-y)}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

其中第二个等号处做了换元 $q = (k^0 + t, \mathbf{k})$ 。并且注意，在最后一行中，4-动量不再是 on shell 的，这就等效于引入了虚粒子。从上面这个式子中可以得到，动量空间中的自由传播子就是：

$$\tilde{\Delta}_F(k) = \frac{1}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} \tag{2.23}$$

对自由传播子作用一个算子 $(-\partial^2 + m^2)$ ，就得到：

$$(-\partial^2 + m^2) \tilde{\Delta}_F(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} = \delta^4(x - y) \tag{2.24}$$

于是就发现，自由传播子同时也是 Klein-Gordon 方程的 Green 函数。于是也将其称为**两点编时 Green 函数**。在之后的讨论中会看到，不仅仅是在自由场论中，自由传播子在相互作用场论中也扮演一个很重要的角色。

Discrete Symmetries

我们在说一个场处于 Lorentz 群的某一个表示时，只给出了这个场在 Lorentz 变换下的性质，而并没有给出场在整个 Poincare 群下的性质。为了得到场在整个 Poincare 群下的变换性质，还需要考虑场在宇称和时间反演这两个分立对称变换下的性质。

在上面看到, Hilbert 空间中的向量 form 了 Poincare 群的表示 U 。称在这个表示下的宇称、时间反演算符分别为 P 和 T ⁶。于是就有:

$$P^{-1}\phi(x)P = D(\mathcal{P})\phi(\mathcal{P}x), \quad T^{-1}\phi(x)T = D(\mathcal{T})\phi(\mathcal{T}x) \quad (2.25)$$

我们希望作用两次 P 或 T 变换, 得到的可观测量和原来相同。在本章后面会看到, 可观测量直接依赖于编时关联函数 $\langle 0|T\{\phi_1 \dots \phi_n\}|0\rangle$ 的模方。而如果对它做一个 P 或 T 变换, 就会得到 $|D(\mathcal{P})|^{2n}\langle 0|T\{\phi_1 \dots \phi_n\}|0\rangle$ 。由于我们希望这个东西在 P 或 T 变换前后不变, 从而对一个单个的场, 我们就希望有关系 $|D(\mathcal{P})|^2 = |D(\mathcal{T})|^2 = 1$ 。并且由于这里讨论的场是一个实标量场, 它满足 $\phi = \phi^\dagger$ 。将这个条件代入上面这个表达式, 就会发现这额外要求 $D(\mathcal{P}), D(\mathcal{T})$ 是实数。于是也就是要求 $(D(\mathcal{P}))^2 = 1$ 。

可以看到, 这个要求并不能完全确定表示矩阵 $D(\mathcal{P}), D(\mathcal{T})$, 于是这些矩阵有许多选择的余地。一个简单的选择这些矩阵的方法是选择产生湮灭算符的变换关系:

由于 $a^\dagger(k)$ 是一个动量为 k 的粒子的产生算符, 我们希望在宇称和时间反演下它变为动量- k 的粒子。为此要求:

$$P^{-1}a^\dagger(\mathbf{k})P = \eta a^\dagger(-\mathbf{k}), \quad T^{-1}a^\dagger(\mathbf{k})T = \zeta a^\dagger(-\mathbf{k}) \quad (2.26)$$

称 η, ζ 为粒子 a 的 **P 宇称** 和 **T 宇称**。将上式取 Hermitian 共轭, 就得到:

$$P^{-1}a(\mathbf{k})P = \eta^* a(-\mathbf{k}), \quad T^{-1}a(\mathbf{k})T = \zeta^* a(-\mathbf{k}) \quad (2.27)$$

将这些关系代入场的模式展开, 就有:

$$P^{-1}\phi(x)P = \eta^* \phi(\mathcal{P}x), \quad T^{-1}\phi(x)T = \zeta^* \phi(\mathcal{T}x) \quad (2.28)$$

这就是自由标量场的分立对称性。由于我们要求 $D(\mathcal{T}) = \pm 1$, 于是 **P 宇称** $\eta = \pm 1$ 。同样的, 也可以说明 **T 宇称** $\zeta = \pm 1$ 。对于 **P 宇称为 1** 的标量场, 称之为真标量场, 而对于 **P 宇称为-1** 的标量场, 称之为赝标量场。

2.2 Canonical Quantization of Free Spinor Field

Lagrangian of Spinor Field

明白了自由标量场是如何被量子化的之后, 就可以按照类似的步骤量子化一个自由的 Dirac 旋量场了。首先要做的是写出自由旋量场的 Lagrangian。在上一章中, 我们给出了从 Dirac 旋量中构造出的两个 Lorentz 不变量。如果有一个按照 Dirac 旋量表示变换的场: 那么这个场的 Lagrangian 可以用这些 Lorentz 不变量来构造。我们猜测一个自由的 Dirac 旋量场具有以下的 Lagrangian⁷:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi \quad (2.29)$$

其中我们利用了 Feynman slash 的记号, 也就是 $\cancel{a} := \gamma^\mu a_\mu$ 。容易验证, 这个 Lagrangian 对应的经典场方程就是 **Dirac 方程**:

$$(i\cancel{\partial} - m)\Psi = 0, \quad \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} + m) = 0 \quad (2.30)$$

⁶回忆高等量子力学中学过的: T 是反么正算符。

⁷为什么要猜出这样的一个 Lagrangian 呢? 答案可能是我们希望 Dirac 旋量场满足的经典场方程是 Dirac 方程。

有了 Lagrangian 之后，就可以按照上面的程序做量子化了。先是有两个公理：等时对易关系和场方程，先通过等时对易关系给出场算符的对易子，然后将场的模式展开系数提升为算符，将 Poincare 生成元通过这些算符表示出来，并从中得到这些算符的物理意义——产生湮灭算符。

为了分析旋量场的等时对易关系，首先需要考虑的就是旋量场的正则动量。对于 $\Psi, \bar{\Psi}$ 而言，有：

$$\pi_\Psi^\alpha = i\bar{\Psi}^\beta(\gamma^0)_\beta^\alpha, \quad \pi_{\bar{\Psi}} = 0 \quad (2.31)$$

按照这个程序，下一步就应该是引入等时对易关系 $[\Psi(\mathbf{x}), \pi_\Psi(\mathbf{x}')] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 了。不过对于旋量场而言，这件事情比较复杂：之后会在讨论自旋-统计定理时看到，如果采用这个对易关系来量子化旋量场，那么理论将出现一系列问题——违反因果律、Hamiltonian 无下界等。事实上，旋量场所满足的并不是等时对易关系，而是以下的等时反对易关系：

$$\{\Psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi^\beta(\mathbf{x}, t)\} = i\{\Psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \bar{\Psi}^\beta(\mathbf{x}', t)\}(\gamma^0)_\beta^\alpha = i\delta_\beta^\alpha\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.32)$$

这也就给出了 Dirac 场之间的如下反对易关系：

$$\{\Psi_a(\mathbf{x}, t), \bar{\Psi}^\beta(\mathbf{x}', t)\} = (\gamma^0)_\alpha^\beta\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.33)$$

在此之外，由于 $\{\Psi, \Psi\} = \{\pi_\Psi, \pi_\Psi\} = 0$ ，于是也有 $\{\Psi, \Psi\} = \{P\bar{s}i, \bar{\Psi}\} = 0$ 。

Plane-Wave Solution of Dirac Equation

在我们的量子化程序中，下一步是求出 Dirac 旋量场的模式展开。为此需要求出 Dirac 旋量场满足的经典运动方程——Dirac 方程的平面波解。如同 1.1 节中所讨论的，由于 Dirac 旋量场 Ψ 满足 Dirac 方程 $(-i\partial + m)\Psi = 0$ ，如果对它作用 $(i\partial + m)$ ，那么就会回到有 Klein-Gordon 方程 $(-\partial^2 + m^2)\Psi = 0$ 。

这也就是说，Dirac 旋量有平面波解：

$$\Psi(x) = u(\mathbf{p})e^{ipx} + v(\mathbf{p})e^{-ipx} \quad (2.34)$$

其中 u 和 v 都是 4 分量的 Dirac 旋量。将这个结果代入 Dirac 方程，发现这两个分量满足：

$$(\not{p} + m)u(\mathbf{p}) = 0, \quad (-\not{p} + m)v(\mathbf{p}) = 0 \quad (2.35)$$

为了求出完整的平面波解，就要求解这两个方程。对于质量非零的情形，我们先在 $\mathbf{p} = 0$ 的坐标系中考虑问题，在这个坐标系中有 $\not{p} = -\gamma^0 m$ ，于是上面两个方程有以下的四个解⁸：

$$\begin{aligned} u_+(0) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & u_-(0) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_+(0) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & v_-(0) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.36)$$

⁸这里的符号和 Srednicki 相同，和 Peskin 相反。这导致后面讨论自旋的时候和 Peskin 差一个负号。

可以验证，这些态是 $S_z = \frac{i}{4}[\gamma^1, \gamma^2] = \frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2$ 的本征态，且本征值为 $\pm\frac{1}{2}$ 。在后面的讨论中，我们也会发现，它们对应的粒子也具有相应方向的自旋。从而可以说，它们对应自旋向上/向下的分量。

现在已经有了 $p=(m,0,0,0)$ 时的平面波解。如果想要得到任何动量的平面波解，只需要将这些平面波解 boost 到相应的动量，那么 boost 后的旋量就应该满足对应的 Dirac 方程。我们知道，对于 Dirac 旋量表示，Boost 的生成元是：

$$K_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\sigma_i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i\sigma_i \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

任意的一个 Lorentz boost 可以写为 $D(\Lambda) = \exp(i\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{K})$ 。在矢量表示中，有 $\begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cosh \eta \\ m \sinh \eta \end{pmatrix}$ ，从而有 $\eta = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \operatorname{arcsinh}(p/m)$ 。于是可以将任何 \mathbf{p} 的平面波解取为⁹：

$$u_s(\mathbf{p}) = \exp(i\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{K}) u_s(0) = \exp\left(i \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \cdot \mathbf{K} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{|\mathbf{p}|}{m}\right)\right) u_s(0) \quad (2.38)$$

$$v_s(\mathbf{p}) = \exp(i\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{K}) v_s(0) = \exp\left(i \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \cdot \mathbf{K} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{|\mathbf{p}|}{m}\right)\right) v_s(0) \quad (2.39)$$

有了这些平面波解之后，就可以用它们展开一个任意的 Dirac 旋量场了。不过在此之前，我们最好先阐述几个后面常用的 $u(\mathbf{p}), v(\mathbf{p})$ 满足的关系。首先，通过计算 $\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}')(\not{p}'\gamma^\mu + \gamma^\mu/\not{p})u_s(\mathbf{p})$ ，可以证明 **Gordon 恒等式**：

$$\begin{aligned} 2m\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}')\gamma^\mu u_s(\mathbf{p}) &= \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}')[(p'+p)^\mu - 2iS^{\mu\nu}(p'-p)_\nu]u_s(\mathbf{p}) \\ -2m\bar{v}_{s'}(\mathbf{p}')\gamma^\mu v_s(\mathbf{p}) &= \bar{v}_{s'}(\mathbf{p}')[(p'+p)^\mu - 2iS^{\mu\nu}(p'-p)_\nu]v_s(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

它的特殊情况是 $p' = p$ 的情况，有：

$$\bar{u}_{s'}(p')\gamma^\mu u_s(p) = 2p^\mu \delta_{s's}, \quad \bar{v}_{s'}(p')\gamma^\mu v_s(p) = 2p^\mu \delta_{s's} \quad (2.41)$$

在此之外，利用类似的证明方法，还可以证明以下的关系：

$$\bar{u}_{s'}(\mathbf{p})\gamma^0 v_s(-\mathbf{p}) = 0, \quad \bar{v}_{s'}(\mathbf{p})\gamma^0 u_s(-\mathbf{p}) = 0 \quad (2.42)$$

最后，来考虑的两个被称为 **spin sum** 的量： $\sum_s u_s(\mathbf{p})\bar{u}_s(\mathbf{p})$ 和 $\sum_s v_s(\mathbf{p})\bar{v}_s(\mathbf{p})$ 。它们是 4×4 的矩阵。可以验证有：

$$2mP_+ := \sum_s u_s(\mathbf{p})\bar{u}_s(\mathbf{p}) = -\not{p} + m, \quad 2mP_- := \sum_s v_s(\mathbf{p})\bar{v}_s(\mathbf{p}) = -\not{p} - m \quad (2.43)$$

由 Dirac 方程可以得知，上面的这两个 spin sum 都是投影算符：

$$P_+ u_s(\mathbf{p}) = u_s(\mathbf{p}), \quad P_+ v_s(\mathbf{p}) = 0, \quad P_- u_s(\mathbf{p}) = 0, \quad P_- v_s(\mathbf{p}) = v_s(\mathbf{p}) \quad (2.44)$$

于是，我们可以通过作用 P_+, P_- 来分开一个旋量场的 u 部分和 v 部分。我们将在之后的讨论中十分频繁地用到这些关系。

⁹注意，这里的两个式子是作为 $u_s(p), v_s(p)$ 的定义而存在的。

Creation and Annihilation Operators

我们的程序中的下一步局势用平面波解展开旋量场，并将其展开系数提升为算符。首先来展开旋量场：利用这些平面波解，就可以将任何的一个 Dirac 旋量场写为以下的形式：

$$\Psi(x) = \sum_{s=\pm} \int \widetilde{dp} (b_s(p)u_s(p)e^{ipx} + d_s^\dagger(p)v_s(p)e^{-ipx}) \quad (2.45)$$

取旋量共轭，就得到了共轭旋量场 $\bar{\Psi}$ 的模式展开：

$$\bar{\Psi}(x) = \sum_{s=\pm} \int \widetilde{dp} (b_s^\dagger(p)\bar{u}_s(k)e^{-ikx} + d_s(k)\bar{v}_s(k)e^{ikx}) \quad (2.46)$$

这些展开的展开系数也可以利用 Gordon 恒等式求出。稍加计算就可以发现：

$$\begin{aligned} b_s(\mathbf{p}) &= \int d^3x e^{-ipx} \bar{u}_s(\mathbf{p}) \gamma^0 \Psi(x), & d_s^\dagger(\mathbf{p}) &= \int d^3x e^{ipx} \bar{v}_s(\mathbf{p}) \gamma^0 \Psi(x) \\ b_s^\dagger(\mathbf{p}) &= \int d^3x e^{ipx} \bar{\Psi}(x) \gamma^0 u_s(\mathbf{p}), & d_s(\mathbf{p}) &= \int d^3x e^{-ipx} \bar{\Psi}(x) \gamma^0 v_s(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (2.47)$$

在将场量子化后，这些展开系数也就被提升为了算符。利用场的等时反对易关系，可以得出这些算符的反对易关系：

$$\begin{aligned} \{b_s(\mathbf{p}), b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} &= \int d^3x e^{-ipx} \int d^3x' e^{ip'x'} \bar{u}_s(\mathbf{p}) \gamma^0 \{\Psi(x), \bar{\Psi}(x)\} \gamma^0 u_s(\mathbf{p}') \\ &= \int d^3x e^{-ipx} e^{ip'x} \bar{u}_s(\mathbf{p}) \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 u_s(p') = \int d^3x e^{-ipx} e^{ip'x} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}) \gamma^0 u_s(\mathbf{p}') \\ &= (2\pi)^3 2\omega_p \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \end{aligned} \quad (2.48)$$

利用类似的方法，还可以得到：

$$\{d_s(p), d_{s'}^\dagger(p')\} = (2\pi)^3 2\omega \delta_{ss'} \delta^3(p - p') \quad (2.49)$$

除此之外的反对易子均为零。为了讨论这些算符的物理意义，考虑 Dirac 场在 Poincare 群下的守恒荷。首先是 Hamiltonian：

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x (\pi^\alpha \partial_0 \phi_\alpha - \mathcal{L}) = \int d^3x \bar{\Psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \Psi \\ &= \sum_{s=\pm} \int \widetilde{dp} \omega_p [b_s^\dagger(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p}) + d_s^\dagger(\mathbf{p})d_s(\mathbf{p})] + (\text{Infinity}) \end{aligned} \quad (2.50)$$

其次是动量：

$$\mathbf{P} = - \int d^3x \pi^\alpha \nabla \phi_\alpha = -i \int d^3x \bar{\Psi} \gamma^0 \nabla \Psi = \sum_{s=\pm} \int \widetilde{dp} \mathbf{p} [b_s^\dagger(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p}) + d_s^\dagger(\mathbf{p})d_s(\mathbf{p})] + (\text{Infinity}) \quad (2.51)$$

通过 Hamiltonian 和动量的形式，我们已经可以轻松的得到它们和场算符的对易关系 $[\Psi(x), P^\mu] = -i\partial^\mu\Psi(x)$ 。根据 Baker-Hausdorff 公式，就能说这个 Hamiltonian 和动量就是 Poincare 群在 Hilbert 空间上表示的生成元。为了考虑这些粒子的自旋，我们额外考虑一下旋量场的角动量张量：

$$J^{v\sigma} = - \int d^3x \left[T^{0v}x^\sigma - T^{0\sigma}x^v + i\pi^\alpha(x) (S^{v\sigma})_\alpha^\beta \Psi_\beta(x) \right] \quad (2.52)$$

在分量 μ, ν 取 i, j 时，有：

$$J^{ij} = - \int d^3x \pi^\alpha \left[(x^i\partial^j - x^j\partial^i) \delta_\alpha^\beta + i (J^{ij})_\alpha^\beta \right] \phi_\beta = - \int d^3x i\bar{\Psi}(x) \gamma^0 \left[(x^i\partial^j - x^j\partial^i) + iS^{ij} \right] \Psi(x) \quad (2.53)$$

利用这个表达式，我们可以证明：

$$[\Psi_\alpha(x), J^{\mu\nu}] = -i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) \Psi_\alpha(x) + (S^{\mu\nu})_\alpha^\beta \Psi_\beta(x) \quad (2.54)$$

例如，对于一个 $J_3 := J^{12}$ ，有：

$$\begin{aligned} [\Psi_\alpha(x), J_3] &= -i \left[\Psi_\alpha(x), \int d^3x' \bar{\Psi}^\beta(x') (\gamma^0)_\beta^\gamma ((x^1\partial_2 - x^2\partial_1) \delta_\gamma^\lambda + i(S^{12})_\gamma^\lambda) \Psi_\lambda(x') \right] \\ &= -i \int d^3x' [\Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}^\beta(x')] (\gamma^0)_\beta^\gamma ((x^1\partial_2 - x^2\partial_1) \delta_\gamma^\lambda + i(S^{12})_\gamma^\lambda) \Psi_\lambda(x') \\ &= -i(x^1\partial_2 - x^2\partial_1) \Psi_\alpha(x) + (S^{12})_\alpha^\beta \Psi_\beta(x) \end{aligned} \quad (2.55)$$

其他分量的证明过程是类似的。这也就蕴含着，Lorentz 变换下的守恒荷也是 Lorentz 群的生成元。综合上面的讨论，就证明了：对于旋量场而言，Poincare 群下的守恒荷就是 Poincare 群在 Hilbert 空间上表示的生成元。从而上面的“能量、动量、角动量”就是真正的能量、动量和角动量。于是也可以将算符 $b_s(\mathbf{p}), d_s(\mathbf{p}), b_s^\dagger(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p})$ 理解为粒子的产生湮灭算符。类似的，真空态 $|0\rangle$ ，单粒子态 $|\mathbf{p}, s\rangle$ 和多粒子态也可以和上一节中被类似地定义。

到此为止，我们还没有得到 b 和 d 粒子携带怎样的自旋。和上面那些讨论不同，由于角动量的叠加并没有能量、动量那么简单，于是试图将自旋写为某些粒子数算符的和的尝试是一定会失败的。为了说明每个产生湮灭算符携带的自旋，我们只能对单粒子态作用角动量算符。为了排除轨道角动量的干扰，我们计算 $J_3 b_s^\dagger(p\hat{\mathbf{z}})|0\rangle$ 。为此考虑上面对易关系的共轭，有 $[J_3, \bar{\Psi}^\alpha] = i(x^1\partial^2 - x^2\partial^1)\bar{\Psi}^\alpha + \bar{\Psi}^\beta(S^{12})_\beta^\alpha$ 。从而：

$$\begin{aligned} J_3 b_s^\dagger(p\hat{\mathbf{z}})|0\rangle &= [J_3, b_s^\dagger(p\hat{\mathbf{z}})]|0\rangle = \int d^3x e^{ipx} [J_3, \bar{\Psi}(x)] \gamma^0 u_s(p\hat{\mathbf{z}})|0\rangle \\ &= \int d^3x e^{ipx} (i(x^1\partial^2 - x^2\partial^1)\bar{\Psi} + \bar{\Psi} S^{12}) \gamma^0 u_s(p\hat{\mathbf{z}})|0\rangle \end{aligned} \quad (2.56)$$

对第一项分部积分，发现其他项和空间无关，于是这一项是 0，从而：

$$J_3 b_s^\dagger(p\hat{\mathbf{k}})|0\rangle = \int d^3x e^{ipx} \bar{\Psi} S^{12} \gamma^0 u_s(p\hat{\mathbf{z}})|0\rangle \quad (2.57)$$

利用这个表达式，如果我们将 $\bar{\Psi}$ 展开，并且将 S^{12} 写为 $i\gamma^1\gamma^2/2$ ，重复利用 Gordon 恒等式，就得到：

$$J_3 b_s^\dagger(p\hat{\mathbf{z}})|0\rangle = \frac{1}{2} s b_s^\dagger(p\hat{\mathbf{z}})|0\rangle \quad (2.58)$$

通过类似的证明过程，也可以计算出：

$$J_3 d_s^\dagger(p\hat{\mathbf{z}})|0\rangle = \frac{1}{2} s d_s^\dagger(p\hat{\mathbf{z}})|0\rangle \quad (2.59)$$

从而我们就知道了一个 b 和 d 粒子所带的角动量为 $s/2$ 。综上所述，就得到每一个 b 或 d 粒子携带能量 ω_p ，动量 \mathbf{p} 以及 z 方向的自旋角动量 $s/2$ 。

除去这些时空对称性外，Dirac 场还具有一个内部的 $U(1)$ 对称性，也就是变换 $\tilde{\Psi} = \Psi e^{i\alpha}$, $\tilde{\bar{\Psi}} = \bar{\Psi} e^{-i\alpha}$ 下的对称性。可以利用 Noether 定理求出这个变换下的守恒流 $J^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ 。从而有守恒荷：

$$Q = \int d^3x \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi = \sum_{s=\pm} \int \tilde{dp} (b_s^\dagger(p)b_s(p) - d_s^\dagger(p)d_s(p)) \quad (2.60)$$

从而 b 粒子和 d 粒子除去携带的 $U(1)$ 守恒荷不同之外，其他的性质全部相同。在第四章中讨论量子电动力学的时候会知道， $U(1)$ 守恒荷就正比于电荷。于是这两种粒子除去电荷相反之外完全相同。于是 d 粒子是 b 粒子的反粒子。

Massless Particle, Helicity and Chirality

上面给出的这一套理论在静止质量趋于 0 时，也就是极端相对论情形下有更多有趣的性质。首先我们将要说明，在无质量极限下，Dirac 方程的平面波解 $u_s(\mathbf{p}), v_s(\mathbf{p})$ 具有特定的手征。

为了看到这一点，需要给出 $u_s(\mathbf{p}), v_s(\mathbf{p})$ 的显式。为了使讨论简单，选择动量的方向沿 z 轴。从而：

$$\begin{aligned} \exp(i\eta K_z) &= \exp\left[-\frac{\eta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(-\frac{\eta}{2}\right)^{2n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(-\frac{\eta}{2}\right)^{2n+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \frac{\eta}{2} - \sinh \frac{\eta}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \frac{\eta}{2} + \sinh \frac{\eta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \frac{\eta}{2} + \sinh \frac{\eta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh \frac{\eta}{2} - \sinh \frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.61)$$

在极端相对论极限下，有 $\cosh \eta = \sinh \eta = \frac{1}{2}e^\eta = E/m$ ，其中 $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 。于是 $\cosh(\eta/2) = \sinh(\eta/2) = \frac{1}{2}e^{\eta/2} = \sqrt{E/2m}$ 从而：

$$\exp(i\eta K_z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2E}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2E}{m}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

就看到了：

$$u_+(p\hat{\mathbf{z}}) = \sqrt{2E}(0, 0, 1, 0)^T, \quad u_-(p\hat{\mathbf{z}}) = \sqrt{2E}(0, 1, 0, 0)^T \quad (2.63)$$

$$v_+(p\hat{\mathbf{z}}) = \sqrt{2E}(0, 1, 0, 0)^T, \quad v_-(p\hat{\mathbf{z}}) = \sqrt{2E}(0, 0, 1, 0)^T \quad (2.64)$$

这还告诉我们， $u_s(p\hat{\mathbf{z}}) = v_{-s}(p\hat{\mathbf{z}})$ 。由于左右手旋量在旋转下的关系是相同的，故对任何的极端相对论旋量都有 $u_s(\mathbf{p}) = v_{-s}(\mathbf{p})$ 。

如果需要知道任意的 \mathbf{p} 对应的旋量，只需要将 $u_s(p\hat{\mathbf{z}})$ 旋转到相应的角度。由于对于绕一个轴 \mathbf{k} 的旋转，有 $D(\mathcal{R}) = \exp(-i\theta\hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\sigma}{2})$ 。于是如果 \mathbf{p} 可以通过将 $p\hat{\mathbf{z}}$ 先绕 y 旋转 θ ，再绕 z 旋转 ϕ 得到，那么就有：

$$u_+(\mathbf{p}) = v_-(\mathbf{p}) = \exp\left(-i\phi\frac{\sigma^3}{2}\right) \exp\left(-i\theta\frac{\sigma^2}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-i\phi/2} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

$$u_-(\mathbf{p}) = v_+(\mathbf{p}) = \exp\left(-i\theta\frac{\sigma^2}{2}\right) \exp\left(-i\phi\frac{\sigma^3}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2} \sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2} \cos\frac{\theta}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

从中可以看出，在极端相对论极限下， $u_-(p), v_+(p)$ 是纯左手的，而 $u_+(p), v_-(p)$ 是纯右手的。从而不同手性的场只含有不同自旋的粒子和反粒子：

$$P_L \Psi(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi(x) = \int \widetilde{dp} [b_-(p)u_-(p)e^{ipx} + d_+^\dagger(p)v_+(p)e^{-ipx}] \quad (2.67)$$

$$P_R \Psi(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi(x) = \int \widetilde{dp} [b_+(p)u_+(p)e^{ipx} + d_-^\dagger(p)v_-(p)e^{-ipx}] \quad (2.68)$$

如果我们定义螺旋度为自旋在动量方向上的投影：

$$h = \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (2.69)$$

那么，无质量粒子的螺旋度是不随参考系变化的，一个单粒子态 $|p, s, \pm\rangle$ 始终带有螺旋度 $s/2$ 。可以看到，在极端相对论情况下，螺旋度和上面讨论的手征性是一一对应的。为此称：一个螺旋度为 $+1/2$ 的 Fermion 是一个**右手 Fermion**，一个螺旋度为 $-1/2$ 的 Fermion 是一个**左手 Fermion**。从而，对于极端相对性的正粒子，左右手 Fermion 分别对应左右手的旋量，而对于极端相对论的反粒子，左右手 Fermion 对应右、左手旋量。

Discrete Symmetries

接下来考虑 Dirac 场的分立对称性。和标量场一样，我们从产生湮灭算符的变换关系开始构造 Dirac 场的变换关系。我们已经知道，宇称和时间反演将动量 \mathbf{p} 变为 $-\mathbf{p}$ 。但是对于有自旋的场，我们还没有考虑这些变换下自旋的变化。对于角动量，有 $\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ 。由于宇称下 \mathbf{x} 和 \mathbf{p} 均反向，于是宇称下角动量不变。在时间反演下， \mathbf{x} 不变而 t 变化，从而角动量反向。于是要求：

$$P^{-1}b_s^\dagger(\mathbf{p})P = \eta_{s,b}b_s^\dagger(-\mathbf{p}), \quad T^{-1}b_s^\dagger(\mathbf{p})T = \zeta_{s,b}b_{-s}^\dagger(-\mathbf{p}) \quad (2.70)$$

$$P^{-1}d_s^\dagger(\mathbf{p})P = \eta_{s,d}d_s^\dagger(-\mathbf{p}), \quad T^{-1}d_s^\dagger(\mathbf{p})T = \zeta_{s,d}d_{-s}^\dagger(-\mathbf{p}) \quad (2.71)$$

由于我们要求 $P^{-1}\phi(x)P = D(\mathcal{P})\phi(\mathcal{P}x)$, $T^{-1}\phi(x)T = D(\mathcal{T})\phi(\mathcal{T}x)$ 。于是有:

$$\begin{aligned} P^{-1}\Psi(x)P &= P^{-1} \left[\sum_s \int \widetilde{dp} (b_s(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})e^{ipx} + d_s^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})e^{-ipx}) \right] P \\ &= \sum_s \int \widetilde{dp} (\eta_{s,b}^*b_s(-\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})e^{ipx} + \eta_{s,d}d_s^\dagger(-\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})e^{-ipx}) \end{aligned} \quad (2.72)$$

并且我们知道, 在 Beta 矩阵作用下, 由于 $\beta K^\dagger \beta = K$, 于是有 $\beta K_i = -K_i \beta$ 。并且由于 $\beta u_s(0) = u_s(0)$, $\beta v_s(0) = -v_s(0)$, 有:

$$\beta u_s(\mathbf{p}) = u_s(-\mathbf{p}), \quad \beta v_s(\mathbf{p}) = -v_s(-\mathbf{p}) \quad (2.73)$$

那么, 如果我们要求 $P^{-1}\Psi(x)P$ 是一个 $\Psi(\mathcal{P}x)$ 的场的基础上作用一个矩阵, 那么就一定有:

$$\eta_{s,b}^* = -\eta_{s,d} = \eta_{-s,b}^* = -\eta_{-s,d} = \eta^*, \quad P^{-1}\Psi(x)P = \eta^* \beta \Psi(\mathcal{P}x) \quad (2.74)$$

于是最终得到:

$$P^{-1}b_s^\dagger(\mathbf{p})P = \eta b_s^\dagger(-\mathbf{p}), \quad P^{-1}b_s(\mathbf{p})P = \eta^* b_s^\dagger(-\mathbf{p}) \quad (2.75)$$

$$P^{-1}d_s^\dagger(\mathbf{p})P = -\eta^* d_s^\dagger(-\mathbf{p}), \quad P^{-1}d_s(\mathbf{p})P = -\eta d_s^\dagger(-\mathbf{p}) \quad (2.76)$$

$$P^{-1}\Psi(x)P = \eta^* \beta \Psi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\bar{\Psi}(x)P = \eta \bar{\Psi}(\mathcal{P}x) \beta \quad (2.77)$$

再来看时间反演:

$$\begin{aligned} T^{-1}\Psi(x)T &= T^{-1} \left[\sum_s \int \widetilde{dp} (b_s(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})e^{ipx} + d_s^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})e^{-ipx}) \right] T \\ &= \sum_s \int \widetilde{dp} (\zeta_{s,b}^* b_{-s}(-\mathbf{p})u_s^*(\mathbf{p})e^{-ipx} + \zeta_{s,d} d_{-s}^\dagger(-\mathbf{p})v_s^*(\mathbf{p})e^{ipx}) \end{aligned} \quad (2.78)$$

类似上面的讨论, 我们希望寻找一个可以将 $u_s(\mathbf{p})$ 变换到 $u_{-s}^*(-\mathbf{p})$, 将 $v_s(k)$ 变换到 $v_{-s}^*(-k)$ 的矩阵, 这样 $T^{-1}\Psi(x)T$ 才能是某个矩阵乘上 $\Psi(\mathcal{T}x)$ 。为此, 可以回忆一下 1.4 中我们定义的矩阵 \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{AB} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

它满足 $\mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^T = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ 。可以验证:

$$u_{-s}^*(-\mathbf{p}) = -s\mathcal{C}\gamma_5 u_s(\mathbf{p}), \quad v_{-s}^*(-\mathbf{p}) = -s\mathcal{C}\gamma_5 v_s(\mathbf{p}) \quad (2.80)$$

从而, 如果要求 $T^{-1}\Psi(x)T$ 是一个矩阵乘上一个 $\Psi(\mathcal{T}x)$ 的场, 那么就有:

$$\zeta_{s,b}^* = \zeta_{s,d} = s\zeta^* \quad (2.81)$$

于是就得到了 Dirac 场在时间反演下的变换关系：

$$T^{-1}\Psi(x)T = -\zeta^* \mathcal{C} \gamma_5 \Psi(\mathcal{T}x) \quad (2.82)$$

总结一下：

$$T^{-1}b_s^\dagger(\mathbf{p})T = s\zeta b_{-s}^\dagger(-\mathbf{p}), \quad T^{-1}b_s(\mathbf{p})T = s\zeta^* b_{-s}(-\mathbf{p}) \quad (2.83)$$

$$T^{-1}d_s^\dagger(\mathbf{p})T = s\zeta^* d_{-s}^\dagger(-\mathbf{p}), \quad T^{-1}d_s(\mathbf{p})T = s\zeta d_{-s}(-\mathbf{p}) \quad (2.84)$$

$$T^{-1}\Psi(x)T = \zeta^* \mathcal{C} \gamma_5 \Psi(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}\bar{\Psi}(x)T = \zeta \bar{\Psi}(\mathcal{T}x) \gamma_5 \mathcal{C}^{-1} \quad (2.85)$$

上面的讨论中引入的相因子 η, ζ 就称为 Dirac 场的 P 宇称和 T 宇称。除去上面讨论的时间反演和宇称之外，还可以对 Dirac 场做如下的对称变换 C：

$$C^{-1}b_s^\dagger(\mathbf{p})C = \xi_{b,s} d_s^\dagger(\mathbf{p}), \quad C^{-1}d_s^\dagger(\mathbf{p})C = \xi_{d,s} b_s^\dagger(\mathbf{p}) \quad (2.86)$$

可以看到，变换 C 将粒子的产生算符变为其反粒子的产生算符。由于粒子和反粒子带有大小相等而正负相反的电荷，从而称 C 变换为**电荷共轭变换**。电荷共轭并不涉及到时空变换，于是我们希望 $C^{-1}\Psi(x)C$ 是某些矩阵作用后的 $\Psi(x)$ 。为此考虑：

$$\begin{aligned} C^{-1}\Psi(x)C &= C^{-1} \left[\sum_s \int \widetilde{dp} (b_s(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})e^{ipx} + d_s^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})e^{-ipx}) \right] C \\ &= \sum_s \int \widetilde{dp} (\xi_{b,s}^* d_s(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})e^{ipx} + \xi_{d,s} b_s^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})e^{-ipx}) \end{aligned} \quad (2.87)$$

于是，需要考虑将 $u_s(k)$ 变为 $\bar{v}_s(k)$ 的矩阵。可以找到：

$$\mathcal{C}\bar{u}_s(\mathbf{p})^T = v_s(p), \quad \mathcal{C}\bar{v}_s(\mathbf{p})^T = u_s(p) \quad (2.88)$$

从而如果令：

$$\xi_{b,s} = \xi_{d,s}^* = \xi_{b,-s} = \xi_{d,-s}^* = \xi \quad (2.89)$$

那么就有：

$$C^{-1}\Psi(x)C = \xi^* \mathcal{C} \bar{\Psi}^T(x) \quad (2.90)$$

总结起来，就是：

$$C^{-1}b_s^\dagger(\mathbf{p})C = \xi d_s^\dagger(\mathbf{p}), \quad C^{-1}b_s(\mathbf{p})C = \xi^* d_s(\mathbf{p}) \quad (2.91)$$

$$C^{-1}d_s^\dagger(\mathbf{p})C = \xi^* b_s^\dagger(\mathbf{p}), \quad C^{-1}d_s(\mathbf{p})C = \xi b_s^\dagger(\mathbf{p}) \quad (2.92)$$

$$C^{-1}\Psi(x)C = \xi^* \mathcal{C} \bar{\Psi}^T(x), \quad C^{-1}\bar{\Psi}(x)C = \xi \Psi^T(x) \mathcal{C} \quad (2.93)$$

这些关系是对具有任意 C, P, T 宇称的 Dirac 场都成立的。不过到此为止，我们还没有讨论一个 Dirac 场的 C, P, T 宇称的值有什么限制。首先，类似上面的讨论，如果需要使得这些分立变换构成一个分立变换群在 Hilbert 空间上的表示，那么需要有 $D(\mathcal{P})^2 = 1$ (其他的分立对称性类似)。但是在 Dirac 场中，我们可以放宽这个条件：由于量子力学实际上是定义在一个射影空间上的，我们其实不需要这些分立变换构成一个分立变换群在 Hilbert

空间上的表示，而只需要它们构成一个射影表示。从而我们可以在矩阵 $D(\mathcal{P})$ 中任意乘一个相位因子，从而看起来我们只需要使 $D(\mathcal{P})^2$ 是任何的一个相位因子即可。

但是量子力学还有一条别的要求：作用两次分立对称变换，得到的可观测量（也就是 Hermitian 算符）不变。而根据我们在下面会探讨的 LSZ 约化公式，需要偶数个 Dirac 场来构成一个可观测量。从而对于单个的 Dirac 场，我们要求 $D(\mathcal{P})^2 = \pm 1$ 。

将这个条件代入上面的分立变换式中，就得到了对 Fermion 内禀宇称的要求：

$$\eta^2 = \pm 1, \quad \zeta^2 = \pm 1, \quad |\xi|^2 = 1 \quad (2.94)$$

内禀宇称通常是和粒子的种类有关的。于是对于普遍的旋量场而言，这是我们能走到的最远了。

除去场本身的分立对称性之外，由于我们希望得知 Lagrangian 中的项是否是在这些分立变换下不变的，而正如 1.4 节的讨论，与 Dirac 旋量场有关的 Lagrangian 大都是从 16 个 Dirac 双线性型 $\bar{\Psi}\gamma\Psi$ 中构造出来的。于是我们还通常关注这些 Dirac 双线性型在分立对称性下的变换关系。在 C, P, T 三个分立对称性下，可以验证有¹⁰：

	$\bar{\Psi}\Psi$	$i\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$	$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$	$\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi$	$\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi$
P	+1	-1	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu(-1)^\nu$
T	+1	-1	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$
C	+1	+1	-1	+1	-1
CPT	+1	+1	-1	-1	+1

由于笔者的懒惰天性，我们将不会全部证明这些结论，而是抓其中一个作为例子来证明：

$$\begin{aligned} T^{-1}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi T &= T^{-1}\bar{\Psi}T\gamma^\mu\gamma_5T^{-1}\Psi T = |\zeta|^2\bar{\Psi}(\mathcal{T}x)\gamma_5\mathcal{C}(\gamma^\mu\gamma_5)^*\mathcal{C}\gamma_5\Psi(\mathcal{T}x) \\ &= \bar{\Psi}(\mathcal{T}x)\gamma_5\mathcal{C}(\gamma^\mu)^*\gamma_5\mathcal{C}\gamma_5\Psi(\mathcal{T}x) \end{aligned} \quad (2.96)$$

利用关系 $\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C} = -(\gamma^\mu)^T$, $\mathcal{C}^{-1}\gamma_5\mathcal{C} = \gamma_5$, 有：

$$\begin{aligned} T^{-1}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi T &= -\bar{\Psi}(\mathcal{T}x)\gamma_5\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^*\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\gamma_5\mathcal{C}\gamma_5\Psi(\mathcal{T}x) = \bar{\Psi}(\mathcal{T}x)\gamma_5(\gamma^\mu)^\dagger\gamma_5\gamma_5\Psi(\mathcal{T}x) \\ &= (-1)^\mu\bar{\Psi}(\mathcal{T}x)\gamma_5\gamma^\mu\Psi(\mathcal{T}x) = (-1)^\mu\bar{\Psi}(\mathcal{T}x)\gamma^\mu\gamma_5\Psi(\mathcal{T}x) \end{aligned} \quad (2.97)$$

有了这些关系之后，由于在第一章中，我们已经得出了这些双线性型在 Lorentz 群下的变化关系，于是我们就完全明白了这些双线性型在 Poincare 群下的变换关系。

The Free Propagator

最后，我们来求出 Dirac 场的自由传播子。其定义是：

$$(S_F(x-y))_\alpha^\beta := i\langle 0|\{T\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}^\beta(y)\}|0\rangle \quad (2.98)$$

至于为什么要这么定义这个自由传播子，而不是定义为看起来更“好看”的 $\langle 0|T\{\bar{\Psi}(x)\Psi(y)\}|0\rangle$ ，就要等到我们讨论 LSZ 约化公式的时候才能说清楚了。简单地来说，在给出 LSZ 约化公式后会说明，在物理上关心的所有关联函数都具有形式 $\langle 0|\{T\Psi_{\alpha_2'}(x_2')\Psi_{\alpha_1'}(x_1')\dots\bar{\Psi}^{\alpha_1}(x_1)\bar{\Psi}^{\alpha_2}(x_2)\}|0\rangle$ 。

¹⁰ 其中 $(-1)^\mu$ 指对指标 0 为 1 而指标 1,2,3 为-1。

还有一点需要注意的是，由于旋量场是反对易的，于是我们需要稍微更改一下编时算符的定义，为：

$$T\{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y)\} = \theta(x^0 - y^0)\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}^\beta(y) - \theta(y^0 - x^0)\bar{\Psi}^\beta(y)\Psi_\alpha(x) \quad (2.99)$$

根据在上一节证明的恒等式：

$$\theta(x^0 - y^0) \int \tilde{d}k e^{ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) \int \tilde{d}k e^{-ik(x-y)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (2.100)$$

再加上场的模式展开，就得到：

$$\begin{aligned} (S_F(x-y))_\alpha^\beta &= i\theta(x^0 - y^0) \int \tilde{d}p e^{ip(x-y)} (-\not{p} + m)_\alpha^\beta + i\theta(y^0 - x^0) \int \tilde{d}p e^{-ip(x-y)} (\not{p} + m)_\alpha^\beta \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)} (-\not{p} + m)_\alpha^\beta}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.101)$$

这就是 Dirac 场的自由传播子。我们也可以将其写为动量空间中的形式：

$$\tilde{S}_F = \frac{-\not{p} + m}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} = \frac{1}{\not{p} + m - i\varepsilon} \quad (2.102)$$

最后一个形式中的除号意味着矩阵的逆。

2.3 Canonical Quantization of Free Electromagnetic Field

Classical Electrodynamics in Coulomb Gauge

我们先写出自由电磁场的 Lagrangian，确定广义坐标。我们已经在经典电动力学中得到了自由电磁场的 Lagrangian：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (2.103)$$

电磁场的广义坐标是规范场 A^μ ，而直接出现在 Lagrangian 中的是场强 $F^{\mu\nu}$ 。如果我们作用一个规范变换：

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) - \partial^\mu \Gamma(x) \quad (2.104)$$

那么，我们可以证明场强 $F^{\mu\nu}$ 是不变的，也就是说这个 Lagrangian 有全局规范变换下的不变性。对于自由场，从 Lagrangian 中可以得到运动方程是：

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = (g^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu = 0 \quad (2.105)$$

由于规范不变性，场 A 中有一些非物理的自由度，这些自由度并不是广义坐标，不对应广义动量。为了消去这些非物理的自由度，需要固定一个规范。在这里我们选用 Coulomb 规范，也就是 $\partial_i A^{C,i} = 0, A^{C,0} = 0$ 。将 Coulomb 规范代入 Lagrangian，我们得到：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_0 A_i \partial^0 A^i - \frac{1}{2}\partial_j A_i \partial^j A^i \quad (2.106)$$

对应的场方程就是 $\partial^2 A_i = 0$, 于是就有平面波解:

$$A_i(x) = \sum_{\lambda=\pm} \int \widetilde{dk} \left[\varepsilon_{\lambda,i}^*(k) a_{\lambda}(k) e^{ikx} + \varepsilon_{\lambda,i}(k) a_{\lambda}^\dagger(k) e^{-ikx} \right] \quad (2.107)$$

其中, ε_{λ} 是极化矢量。由 Coulomb 规范, 就有 $k_i \varepsilon_{\lambda}^i = 0$, 也就是极化矢量垂直于波矢。我们可以选择一个坐标系, 使得波矢 \mathbf{k} 沿 z 方向, 那么在这个坐标系下我们可以将极化矢量选为:

$$\varepsilon_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0), \quad \varepsilon_-(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0) \quad (2.108)$$

于是就有以下的关系:

$$\varepsilon_{\lambda}(k) \cdot \varepsilon_{\lambda'}^*(k) = \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_{\lambda,i}^*(k) \varepsilon_{\lambda,j}(k) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} \quad (2.109)$$

由此可知展开系数为:

$$a_{\lambda}(k) = +i \varepsilon_{\lambda}^{*i}(k) \int d^3x e^{-ikx} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 A_i(x) \quad (2.110)$$

$$a_{\lambda}^\dagger(k) = -i \varepsilon_{\lambda}^i(k) \int d^3x e^{ikx} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 A_i(x) \quad (2.111)$$

Quantization in Coulomb Gauge

我们接下来将电磁场在 Coulomb 规范下正则量子化。在 Coulomb 规范下, 自由度 A_i 对应的广义动量是 $\Pi^i = \partial_0 A^i$ 。我们现在面对的一个问题是: 系统是有约束 $\partial_i A^i = 0$, $\partial_i \pi^i = 0$ 的。而如果我们直接将这些物理量代入正则对易关系, 就会得到:

$$[A_i(x, t), \Pi^j(x', t)] = i \delta_i^j \delta^3(x - x') \quad (2.112)$$

对等式两边作用对 x 的散度, 就得到 $[\partial^i A_i(x), \Pi^j(x')] = i \partial^i \delta_i^j \delta^3(x - x')$ 。我们发现等式右边不为 0, 也就是说正则对易关系和 Coulomb 规范条件相违背的。为了修正这个对易关系, 我们引入一个投影算子:

$$P_{ij} := \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \quad (2.113)$$

将等式右边的 δ_{ij} 换成这个投影算子, 就得到:

$$[A_i(x), \Pi^j(x')] = i P_{ij} \delta^3(x - x') = i \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right) \delta^3(x - x') = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(x-x')} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} \right) \quad (2.114)$$

另外的两个正则量子化关系不变:

$$[A_i(x, t), A_j(x', t)] = 0, \quad [\Pi_i(x, t), \Pi_j(x', t)] = 0 \quad (2.115)$$

当然, 这样的处理是不严格的。如果要严格处理 Coulomb 规范下的正则量子化, 需要考虑有约束体系的正则量子化。另一种规避这个不严格的推导的方式是在另一个规范, 例

如 Lorentz 规范或与之相似的 Feynman 规范下考虑问题，但是这样的处理会引入非物理的鬼态。在这一节中，我们也会对 Feynman 规范下的量子化做讨论。

由于量子场满足场方程，就可以对量子场做模式展开，将展开系数 $a_\lambda(k), a_\lambda^\dagger(k)$ 量子化为算符。利用上面得到的表达式，我们可以计算出：

$$[a_\lambda(k), a_\lambda^\dagger(k')] = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(k - k'), \quad [a_\lambda(k), a_\lambda(k')] = 0, \quad [a_\lambda^\dagger(k), a_\lambda^\dagger(k')] = 0 \quad (2.116)$$

为了给出这些算符的物理意义，考虑电磁场的 Hamiltonian:

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x (\Pi_i(x) \partial_0 A^i(x) - \mathcal{L}) = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_0 A_i \partial^0 A^i + \frac{1}{2} \partial_j A_i \partial^j A^i \right) \quad (2.117)$$

代入 A_i 的模式展开后，我们得到：

$$H = \sum_{\lambda=\pm} \int \tilde{dk} \omega a_\lambda^\dagger(k) a_\lambda(k) + \text{Infinity} \quad (2.118)$$

其次，考虑电磁场的动量：

$$\mathbf{P} = - \int d^3x (\Pi^i \nabla A_i) = - \int d^3x (\partial_0 A^i \nabla A_i) = \sum_{\lambda} \int \tilde{dk} \mathbf{k} a_\lambda^\dagger(k) a_\lambda(k) \quad (2.119)$$

我们从而可以证明这个能量和动量就是平移群在 Hilbert 空间的表示的生成元，也就是量子力学意味下的的能量和动量。也就是说，算符 $a_\lambda(k), a_\lambda^\dagger(k)$ 可以分别被诠释为光子的湮灭算符和产生算符。一个光子带能量 ω ，动量 \mathbf{k} 。

为了讨论这两个偏振态的螺旋度，考虑 $a_\lambda^\dagger(p\hat{\mathbf{k}})$ 生成的光子的角动量。光子场的角动量是：

$$\begin{aligned} J^{ij} &= - \int d^3x \pi^\alpha \left[(x^i \partial_j - x^j \partial_i) \delta_\alpha^\beta + i (J^{ij})_\alpha^\beta \right] \phi_\beta(x) \\ &= - \int d^3x (\partial_0 A^k) \left[(x^i \partial_j - x^j \partial_i) \delta_k^l + i (\mathcal{J}^{ij})_k^l \right] A_l(x) \end{aligned} \quad (2.120)$$

按照和上一节类似的方法，我们可以证明：

$$[A_i(x), J^{jk}] = -i(x^j \partial^k - x^k \partial^j) A_i(x) + (\mathcal{J}^{jk})_i^l A_l(x) \quad (2.121)$$

于是，对于 z 方向的角动量，就有：

$$\begin{aligned} J_z a_\lambda^\dagger(p\hat{\mathbf{z}}) |0\rangle &= -i \int d^3x e^{ipz - i\omega t} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 [J_3, \varepsilon_\lambda^{*i}(p\hat{\mathbf{z}}) A_i(x)] |0\rangle \\ &= i \int d^3x e^{ipz - i\omega t} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \left(-i(x^1 \partial^2 - x^2 \partial^1) (\varepsilon_\lambda^{*i}(p\hat{\mathbf{z}}) A_i(x)) + (\mathcal{J}^{12})_i^j \varepsilon_\lambda^{*i}(p\hat{\mathbf{z}}) A_j(x) \right) |0\rangle \end{aligned} \quad (2.122)$$

对第一项分部积分，得到 0。并且由于 $(\mathcal{J}^{12})_i^j \varepsilon_\lambda^{*i} = \lambda \varepsilon_\lambda^j$ ，于是就有：

$$J_z a_\lambda^\dagger(p\hat{\mathbf{z}}) |0\rangle = \lambda a_\lambda^\dagger(p\hat{\mathbf{z}}) |0\rangle \quad (2.123)$$

于是, $\lambda = +$ 的粒子是螺旋度 +1 的光子, $\lambda = -$ 的粒子是螺旋度 -1 的光子。

我们仍然关心考虑产生湮灭算符在 Lorentz 群下的变换关系。对于电磁势 A_i , 就有:

$$U(\Lambda)^{-1} A_i(x) U(\Lambda) = \Lambda_i^j A_j(\Lambda^{-1}x) \quad (2.124)$$

代入电磁势的模式展开, 于是对于产生湮灭算符有:

$$U(\Lambda)^{-1} a_\lambda^\dagger(k) U(\Lambda) = a_\lambda^\dagger(\Lambda^{-1}k) \quad (2.125)$$

和之前类似的, 考虑 Coulomb 规范下电磁场的自由传播子 $\Delta^{\mu\nu}(x-y) := i\langle 0|T A^\mu(x) A^\nu(y)|0\rangle$ 。我们仍然可以利用模式展开和阶跃函数的 Fourier 展开得到:

$$\begin{aligned} \Delta^{ij}(x-y) &= i\theta(x^0 - y^0) \sum_{\lambda, \lambda'} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega'} \langle 0 | \left(\varepsilon_\lambda^{i*}(k) a_\lambda(k) e^{ikx} + \varepsilon_\lambda^i a_\lambda^\dagger(k) e^{-ikx} \right) \\ &\quad \times \left(\varepsilon_{\lambda'}^{j*}(k') a_{\lambda'}(k') e^{iky} + \varepsilon_{\lambda'}^j a_{\lambda'}^\dagger(k') e^{-iky} \right) | 0 \rangle + ((i, x) \leftrightarrow (j, y)) \\ &= i\theta(x^0 - y^0) \sum_\lambda \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \varepsilon_\lambda^{i*}(k) \varepsilon_\lambda^j(k) e^{ik(x-y)} + ((i, x) \leftrightarrow (j, y)) \\ &= i\theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \left(\eta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} \right) e^{ik(x-y)} + ((i, x) \leftrightarrow (j, y)) \\ &= -i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\eta^{ij} - \frac{q^i q^j}{|\mathbf{q}|^2} \right) \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2 - i\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.126)$$

从而, 就有:

$$\tilde{\Delta}^{ij}(k) = \left(\eta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} \right) \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} \quad (2.127)$$

Quantization in Feynman Gauge

既然正则对易关系和 Coulomb 规范条件是相违背的, 我们就切换一个规范考虑问题。不过这样我们马上就会遇到一个新的问题: 由于 A_0 不是零, 但是它对应的正则动量为 0。从而就有 $[A_0, \pi^0] = 0$ 。这也和我们希望给出的 $[A_0, \pi^0] = -\delta^3(x - x')$ 是不同的, 为此的解决方法是, 在 Lagrangian 中加上一项没有任何物理后果的项, 从而使 $\pi^0 \neq 0$ 。同时, 加上这样一个项的过程也会破坏规范对称性, 这在某种程度上相当于选择了一个规范, 为此在 Lagrangian 中引入的这一项被称为规范固定项。

我们将规范固定项取为:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.128)$$

至于为什么可以这么添加一项规范固定项, 我们会在下一章中讨论 Faddeev-Popov 方法的时候做出说明。在那时候, 我们会看到这一项的确不造成任何的物理影响。

由于加入规范固定项在某种程度上相当于选择了一个规范, 我们将这称为 **R_ξ 规范**, 意为“可重整 ξ 规范”。我们常用的 ξ 值有 $\xi = 0, 1$ 。 $\xi = 0$ 对应 **Landau 规范**, $\xi = 1$ 对应

Feynman 规范。对于 Landau 规范, 由于任何的 $\partial_\mu A^\mu \neq 0$ 都会带来作用量的发散, 于是 Landau 规范蕴含着要求 $\partial_\mu A^\mu = 0$, 也就等价于 Lorentz 规范。

Feynman 规范的形式和 Coulomb 规范是不同的。为理解 Feynman 规范的本质, 需要理解这些规范如何给出一个对规范自由度的约束。让我们考虑频域中的场强 $\tilde{F}_{\mu\nu}(k) = k_\mu \tilde{A}_\nu(k) - k_\nu \tilde{A}_\mu(k)$, 可以看到, 只有和 k 垂直的场才对场强有贡献 (这点在下面也会看到: 和 k 平行的纵场对应的粒子是纯规范的, 而非物理的)。对于 Coulomb 规范和 Lorentz 规范, 它们给出了一个对纵场的约束, 从而消去了规范自由度。而对于 Feynman 规范, 它允许纵场有一定的涨落, 也就没有完全确定规范自由度。采用 Feynman 规范并不能完全从运动方程和边界条件确定一个电磁场。采用 Feynman 规范只是消去了规范不变性带来的量子化上的问题。从这个角度上看, Feynman 规范其实并不是一个严格意义上的规范。

接下来, 让我们试着在 Feynman 规范下量子化电磁场。此时对应 A^μ 的正则动量是:

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\mu)} = \partial_0 A_\mu - \partial_\mu A_0 + \eta_{\mu 0} \partial_\nu A^\nu \quad (2.129)$$

正则量子化告诉我们以下的等时对易关系:

$$[A_\mu(x, t), \Pi^\nu(y, t)] = i\delta_\mu^\nu \delta^3(x - y), \quad [A_\mu(x, t), A_\nu(y, t)] = 0, \quad [\Pi^\mu(x, t), \Pi^\nu(y, t)] = 0 \quad (2.130)$$

而这个关系等价于:

$$[A^\mu(x, t), \partial_0 A^\nu(y, t)] = i\eta^{\mu\nu} \delta^3(x - y), \quad [A^\mu(x, t), A^\nu(y, t)] = 0, \quad [\partial_0 A^\mu(x, t), \partial_0 A^\nu(y, t)] = 0 \quad (2.131)$$

在 Feynman 规范下, 场方程仍然是 $\partial^2 A = 0$, 于是我们可以将 A 展开为平面波解:

$$A_\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \widetilde{dk} \left[\varepsilon_{\lambda, \mu}^*(k) a_\lambda(k) e^{ikx} + \varepsilon_{\lambda, \mu}(k) a_\lambda^\dagger(k) e^{-ikx} \right] \quad (2.132)$$

其中动量 k 满足 $k^2 = 0$ 。不过和之前不同的是, 由于没有了 Coulomb 规范的限制, 我们需要考虑电磁场的全部四个分量。如果动量是 $(k, 0, 0, k)$, 我们就可以将四个极化矢量取为:

$$\varepsilon_0 = (1, 0, 0, 0), \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 0, 1) \quad (2.133)$$

对于任意的动量 k^μ 而言, 其极化矢量就可以通过 boost 得到:

$$\varepsilon_\lambda(k) := \mathcal{B}_\mu^\nu(k) \varepsilon_\lambda(k) \quad (2.134)$$

其中 $\mathcal{B}(k)$ 是将 $(m, 0)$ 变为 (E_k, \mathbf{k}) 的 boost。通过这个关系, 我们就可以证明: 对于任何的 k , 这些极化矢量都是正交归一且完备的:

$$\varepsilon_\lambda(k) \cdot \varepsilon^{* \lambda'}(k) = \eta_{\lambda \lambda'}, \quad \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_{\lambda, \mu}^*(k) \varepsilon_{\lambda, \nu}(k) = \eta_{\mu \nu} \quad (2.135)$$

从平面波解中, 我们可以得到产生湮灭算符和场算符的关系 (我们将不在指标 λ 上采用 Einstein 求和约定):

$$a_\lambda(k) = i \sum_{\lambda=0}^3 \eta_{\lambda \lambda'} \varepsilon_{\lambda', \mu} \int d^4 x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0^\mu A^\mu(x), \quad a_\lambda(k) = -i \sum_{\lambda=0}^3 \eta_{\lambda \lambda'} \varepsilon_{\lambda', \mu}^* \int d^4 x e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0^\mu A^\mu(x) \quad (2.136)$$

将其代入正则对易关系，我们就可以得到产生湮灭算符满足的对易关系（其他对易子为 0）：

$$[a_\lambda(k), a_{\lambda'}^\dagger(k')] = (2\pi)^3 2\omega \eta_{\lambda,\lambda'} \delta^3(k - k') \quad (2.137)$$

我们发现，对于 $a_0^\dagger(k)$ 生成的态，有 $\langle 0 | a_0(k) a_0^\dagger(k) | 0 \rangle < 0$ ，也就是说如果我们采用 Feynman 规范，那么 Hilbert 空间就不再具有正定的度规。由于这些具有负的模的态给出了错误的统计诠释，显然它们是不物理的。我们将这些非物理的态称为**鬼态**。这意味着：如果我们利用 Feynman 规范量子化电磁场，那么得到的 Hilbert 空间并不是物理的 Hilbert 空间。而为了得到物理的 Hilbert 空间，我们还需要试图从 Hilbert 空间中排除这些鬼态。从规范自由度的角度上来看，这件事情很好理解：由于我们的 Feynman 规范并没有确定所有的规范自由度，很多非物理的场构型被我们当做了物理的构型来处理，这势必会导致 Hilbert 空间的扩大。我们从 Hilbert 空间中排除鬼态的过程也就相当于规范掉 Feynman 规范所没有确定的这部分规范自由度的过程¹¹。

为了排除鬼态，我们可以要求所有**物理态**的模都是正的。并且为了排除非物理的场构型，需要额外对物理态规定一些规范条件。在这里，我们可以要求所有物理态必须满足：

$$\partial_\mu A^\mu(x) | \text{Phy} \rangle = 0 \quad (2.138)$$

这被称为**弱 Lorentz 条件**。有了这个条件之后，我们就可以试图筛选出 Hilbert 空间的物理态了。为此，考虑一个场的湮灭分量和产生分量：

$$A_\mu^+(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \widetilde{dk} a_\lambda(k) \varepsilon_{\lambda,\mu}^*(k) e^{ikx}, \quad A_\mu^-(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \widetilde{dk} a_\lambda^\dagger(k) \varepsilon_{\lambda,\mu}(k) e^{-ikx} \quad (2.139)$$

由于 $(A^-)^\dagger = A^+$ ，于是物理态的条件变为：

$$\sum_{\lambda=0}^3 \int \widetilde{dk} e^{ikx} k^\mu \varepsilon_{\lambda,\mu}^*(k) a_\lambda(k) | \text{Phy} \rangle = 0 \quad (2.140)$$

这蕴含：

$$(a_3(k) - a_0(k)) | \text{Phy} \rangle = 0, \quad \langle \text{Phy} | a_3^\dagger(k) a_3(k) - a_0^\dagger(k) a_0(k) | \text{Phy} \rangle = 0 \quad (2.141)$$

也就是说，对于一个物理态，它一定包含一样多的偏振为 0 和 3 方向的光子。由于 0 偏振的光子态是非物理的，3 偏振的光子态也就不具有物理意义。于是我们回到了之前的结果：只有两种物理的光子，分别具有螺旋度为 ± 1 。这两种光子算符的对易关系和我们之前在 Coulomb 规范中求出的相同。如果我们局限在这两种物理的偏振态中，场的模式展开也和 Coulomb 规范相同。于是我们在下面的对电磁场的讨论中，无需区分我们采用的规范是 Coulomb 规范还是 Feynman 规范。

在讨论传播子时，Feynman 规范和 Coulomb 规范的唯一区别就是有 $\sum_\lambda \varepsilon_\lambda^{\mu*}(k) \varepsilon_\lambda^\nu(k) = \eta^{\mu\nu}$ 。仿照上面的讨论过程，就可以得到 Feynman 规范下电磁场的自由传播子：

$$\Delta^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon} \quad (2.142)$$

可以看到，不同规范中的自由传播子是不同的。不过规范不变性导致了这并不会带来任何的物理后果。在后面我们会看到，U(1) 规范对称性的推论——Ward 恒等式保证了这两个传播子的差异不会对可观测量造成任何影响。

¹¹值得一提的是，在一般的规范理论中，我们通常使用的是所谓的 BRST 量子化来规范掉这些额外的自由度。关于此的讨论可以详见第七章中与 BRST 量子化相关的章节。

Discrete Symmetries

接下来考虑光子的分立对称性。我们所遵循的步骤和上面是相似的。由于宇称翻转动量，而不翻转角动量，我们假设（这里的 λ 是光子的两种物理极化，也就是在本节开头引入的 + 和 -。）：

$$P a_\lambda^\dagger(k) P^{-1} = \eta_\lambda a_\lambda^\dagger(-k) \quad (2.143)$$

于是，对于电磁场，其宇称变换就是：

$$\begin{aligned} PA_\mu(x) P^{-1} &= P \left\{ \sum_\lambda \int \widetilde{dk} \left[\varepsilon_{\lambda,\mu}^*(k) a_\lambda(k) e^{ikx} + \varepsilon_{\lambda,\mu}(k) a_\lambda^\dagger(k) e^{-ikx} \right] \right\} P^{-1} \\ &= \sum_\lambda \int \widetilde{dk} \left[\eta_\lambda^* \varepsilon_{\lambda,\mu}^*(k) a_\lambda(-k) e^{ikx} + \eta_\lambda \varepsilon_{\lambda,\mu}(k) a_\lambda^\dagger(-k) e^{-ikx} \right] \quad (2.144) \\ &= \sum_\lambda \int \widetilde{dk} \left[\eta_\lambda^* \varepsilon_{\lambda,\mu}^*(k) a_\lambda(-k) e^{ik \cdot \mathcal{P}x} + \eta_\lambda \varepsilon_{\lambda,\mu}(k) a_\lambda^\dagger(-k) e^{-ik \cdot \mathcal{P}x} \right] \end{aligned}$$

于是，为了得到电磁场的变换关系，我们需要找到一个矩阵，使得 $\varepsilon_\lambda(k)$ 和 $\varepsilon_\lambda(-k)$ 互相联系起来：

$$\varepsilon_{\lambda,v}(-k) = \mathcal{B}(-k)_v^\mu \varepsilon_{\lambda,\mu}(0) = \mathcal{P}_v^\rho \mathcal{B}(k)_\rho^\sigma \mathcal{P}_\sigma^\mu \varepsilon_{\lambda,\mu}(0) = -\mathcal{P}_v^\sigma \mathcal{B}(k)_\sigma^\mu \varepsilon_{\lambda,\mu}(0) = -\mathcal{P}_v^\mu \varepsilon_{\lambda,\mu}(k) \quad (2.145)$$

从而，如果我们有：

$$\eta_\lambda = \eta_\lambda^* = \eta \quad (2.146)$$

就能得到：

$$\begin{aligned} PA_\mu(x) P^{-1} &= -\eta \mathcal{P}_\mu^v A_v(\mathcal{P}x) \\ Pa_\lambda^\dagger(k) P^{-1} &= \eta a_\lambda^\dagger(-k) \quad (2.147) \end{aligned}$$

再考虑时间反演变换。同样假设：

$$Ta_\lambda^\dagger(k) T^{-1} = \zeta_\lambda a_{-\lambda}^\dagger(-k) \quad (2.148)$$

那么对电磁场而言：

$$\begin{aligned} TA_\mu T^{-1} &= \sum_\lambda \int \widetilde{dk} \left[\zeta_\lambda^* \varepsilon_{\lambda,\mu}(k) a_{-\lambda}(-k) e^{-ikx} + \zeta_\lambda \varepsilon_{\lambda,\mu}^*(k) a_{-\lambda}^\dagger(-k) e^{ikx} \right] \\ &= \sum_\lambda \int \widetilde{dk} \left[\zeta_\lambda^* \varepsilon_{\lambda,\mu}(-k) a_{-\lambda}(k) e^{iEt+ikx} + \zeta_\lambda \varepsilon_{\lambda,\mu}^*(-k) a_{-\lambda}^\dagger(k) e^{-(iEt+ikx)} \right] \quad (2.149) \\ &= \sum_\lambda \int \widetilde{dk} \left[\zeta_{-\lambda}^* \varepsilon_{-\lambda,\mu}(-k) a_\lambda(k) e^{ik(Tx)} + \zeta_{-\lambda} \varepsilon_{-\lambda,\mu}^*(-k) a_\lambda^\dagger(k) e^{-ik(Tx)} \right] \end{aligned}$$

现在，我们需要找到 $\varepsilon_{-\lambda,\mu}(-k)$ 和 $\varepsilon_{\lambda,\mu}^*(k)$ 的关系¹²：

$$\varepsilon_{-\lambda,\mu}(-k) = \mathcal{B}(-k)_\mu^v \varepsilon_{-\lambda,v}(0) = \mathcal{P}_\mu^\rho \mathcal{B}(k)_\rho^\sigma \mathcal{P}_\sigma^v \varepsilon_{\lambda,v}^*(0) = \mathcal{P}_\mu^\rho \mathcal{B}(k)_\rho^v \varepsilon_{\lambda,v}^*(0) = \mathcal{P}_\mu^v \varepsilon_{\lambda,v}^*(k) \quad (2.150)$$

¹²由于极化矢量的选取和 Weinberg 不同，这里的结果和 Weinberg 不同。

于是, 如果我们要求:

$$\zeta_\lambda = \zeta_\lambda^* = \zeta \quad (2.151)$$

就有:

$$\begin{aligned} TA_v(x)T^{-1} &= \zeta \mathcal{P}_v^\mu A_\mu(\mathcal{T}x) \\ Ta_\lambda^\dagger(k)T^{-1} &= \zeta a_{-\lambda}^\dagger(-k) \end{aligned} \quad (2.152)$$

由于我们要求对可观测量而言, 作用两次宇称和时间反演的结果不变。于是就有 $\xi^2 = \eta^2 = 1$ 。从而就有 $\eta = \pm 1, \xi = \pm 1$ 。

2.4 The Spin-Statistics Theorem

在本章的前几节, 当我们对不同自旋的场做正则量子化的时候, 我们默认对整数自旋的场应用对易子, 而对半整数自旋的场应用反对易子。当时我们只是阐述了: 如果我们采用与之相反的对易关系来量子化场, 那么理论将违反因果律。在这一节, 我们将对这个结论做更进一步的阐述¹³。

为了阐述自旋-统计定理, 需要对引入量子场的 motivation 做一个讨论。在第一章第一节我们说过, 有两种引入量子场论的动机: 第一种是因为我们要求时空在理论中的地位平等, 于是我们体系的参量不仅仅是时间, 而是时空。这就相当于引入了场。第二种就是为了描述一个多粒子系统, 需要使用二次量子化的语言。在第一种 motivation 中, 场算符是我们构建理论时使用的最基本的东西, 而在第二种 motivation 下, 二次量子化才是基本的。在这一节, 我们从第二种 motivation 出发构建量子场论。

既然二次量子化是基本的, 我们就一定有一些单粒子态的产生湮灭算符也有产生湮灭算符的对易关系。出于一些 Lorentz 不变性的考虑, 将这个对易关系取为 $[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ 。

接下来需要构造整个理论的 Hamiltonian。需要让 Hamiltonian 是一个局域的标量, 也就是要求它可以写为:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(x) \quad (2.153)$$

但是产生湮灭算符不是局域的。它产生的波函数弥漫整个空间。为此定义**产生场**和**湮灭场**, 它们分别局域的产生和湮灭一个粒子¹⁴:

$$\phi^+(x) = \int \widetilde{dk} e^{ikx} a(\mathbf{k}), \quad \phi^-(x) = \int \widetilde{dk} e^{-ikx} a^\dagger(\mathbf{k}) \quad (2.154)$$

根据产生湮灭算符的变换关系, 可以得到这些部分在 Lorentz 变换下都是标量场。通过产生湮灭算符的对易/反对易关系, 可以得到正负频部分的对易关系 (取对易子还是反对易子依赖于产生湮灭算符是 Bose 的还是 Fermi 的):

$$[\phi^+(x), \phi^-(x')]_\mp = \int \widetilde{dk} e^{ik(x-x')}, \quad [\phi^+(x), \phi^+(x')]_\mp = 0, \quad [\phi^-(x), \phi^-(x')]_\mp = 0 \quad (2.155)$$

¹³遗憾的是, 对自旋-统计定理的严格证明是十分数学、十分复杂的。于是在这里我们只能对其给出一个阐述而非证明。

¹⁴事实上, 这些产生场和湮灭场就是一个处于坐标 x 的单粒子态的产生湮灭算符。

由于我们要求 Hamiltonian 密度是局域的，并且可以由产生湮灭算符构造出来，于是我们可以从产生和湮灭场中构造这个 Hamiltonian。在此之外，相对论还给我们一些额外的要求，那就是跃迁振幅的 Lorentz 不变性。考虑一个 $t = -\infty$ 的态和一个 $t = \infty$ 的态之间的跃迁振幅。我们知道，时间演化算符有以下的形式：

$$\mathcal{T}_{fi} = \left\langle f \left| \text{T exp} \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H(t) \right] \right| i \right\rangle = \left\langle f \left| \text{T exp} \left[-i \int d^4x \mathcal{H}(x) \right] \right| i \right\rangle \quad (2.156)$$

对于类空间隔的两个 $\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y), (x - y)^2 > 0$, Lorentz 变换可能会改变它们的时间顺序，从而导致不同的参考系看到的相互作用发生的顺序不同。这是违背跃迁振幅的 Lorentz 不变性的。为了修好这一点，需要要求类空间隔的两点间的 Hamiltonian 密度可交换：

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)] = 0, \quad \forall (x - y)^2 > 0 \quad (2.157)$$

在这个条件下，Lorentz 变换带来的时序变化就不会对跃迁振幅产生影响。由于我们是通过产生场和湮灭场来构造 Hamiltonian 密度的，从而我们最好需要 $[\phi^+(x), \phi^-(x')]_{\mp}$ 对类空间隔为零。

不幸的是， $[\phi^+(x), \phi^-(x')]_{\mp} = \int dk e^{ik(x-x')}$ ，这不为零。我们的解决方法是，寻找一组产生场和湮灭场的叠加 $\phi(x) = \phi^+(x) + \lambda \phi^-(x)$ 和 $\phi^\dagger(x) = \phi^-(x) + \lambda^* \phi^+(x)$ ，使用这些场构造 Hamiltonian。此时，如果我们有：

$$[\phi(x), \phi(x')]_{\pm} = 0, \quad [\phi(x), \phi^\dagger(x')]_{\pm} = 0, \quad \forall (x - x')^2 > 0 \quad (2.158)$$

那么 Hamiltonian 就满足相对论的要求。这个条件又被我们称为**微观因果律原理**：如果我们可以测量这个场 ϕ ，那么上面的要求除去跃迁振幅的 Lorentz 不变性还有一个含义，就是当我们测量一个 $\phi(x)$ 时，它不会对与其相差一个类空间隔的 x' 处的场的测量产生任何的影响。于是这个条件也在某些程度上反映了因果性。

那么我们就来计算这个对易子。有：

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi^\dagger(x')]_{\pm} &= [\phi^+(x) + \lambda \phi^-(x), \phi^-(x) + \lambda^* \phi^+(x)]_{\pm} = \int dk (e^{ik(x-x')} \mp |\lambda|^2 e^{ik(x-x')}) \\ [\phi(x), \phi(x')]_{\pm} &= [\phi^+(x) + \lambda \phi^-(x), \phi^+(x) + \lambda \phi^-(x)]_{\pm} = \lambda \int dk (e^{ik(x-x')} \mp e^{ik(x-x')}) \end{aligned} \quad (2.159)$$

我们发现，如果要求上面的关系成立， $|\lambda|$ 只能取 1，并且对易关系只能取对易子而非反对易子。于是标量场的激发一定是 Boson。

实际上我们不必局限于要求产生场和湮灭场都是标量。我们可以选择产生湮灭算符的叠加系数，使得产生场、湮灭场 form Lorentz 群的任何不可约表示。我们可以有旋量的产生和湮灭场：

$$\Psi^+(x) = \sum_{s=\pm} \int \widetilde{dp} b_s(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) e^{ipx}, \quad \Psi^-(x) = \sum_{s=\pm} \int \widetilde{dp} b_s^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) e^{-ipx} \quad (2.160)$$

经过计算，我们也有：

$$[\Psi_\alpha^+(x), \Psi_\beta^-(x')]_{\mp} = - [(i\partial_x + m) \mathcal{C}]_{\alpha\beta} \int \widetilde{dp} e^{ip(x-y)} \neq 0 \quad (2.161)$$

于是为了构造一个满足因果律的 Hamiltonian, 考虑叠加 $\Psi = \Psi^+(x) + \lambda\Psi^-(x)$ 。如果我们要求 $[\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(y)]_\mp = 0, [\Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(y)]_\mp = 0, \forall (x - x')^2 > 0$, 那么 $|\lambda| = 1$, 且必须选择反对易子, 于是旋量场的激发是 Fermion。

我们也可以让产生和湮灭场是矢量场:

$$A_i^+(x) = \sum_\lambda \int \widetilde{dk} a_\lambda(\mathbf{k}) \varepsilon_{\lambda,i}^*(\mathbf{k}) e^{ikx}, \quad A_i^-(x) = \sum_\lambda \int \widetilde{dk} a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \varepsilon_{\lambda,i}(\mathbf{k}) e^{-ikx} \quad (2.162)$$

同样, 可以计算出 $[A_i^+(x), A_i^-(x')]_\mp = \int \widetilde{dk} (\delta_{ij} - k_i k_j / |\mathbf{k}|^2) e^{ik(x-x')} \neq 0$ 。故同样考虑一个叠加的场 $A_i(x) = A_i^+(x) + \lambda A_i^-(x)$, 如果我们要求 $[A_i(x), A_j(x')] = 0, [A_i(x), A_j^\dagger(x')] = 0, \forall (x - x')^2 > 0$, 那么只能取 $|\lambda| = 1$ 和对易子。也就是说, 电磁场的激发是 Boson。

这些讨论可以被推广到任意自旋的场, 得到**自旋-统计定理**: 对于任何整数自旋的场, 其激发是 Boson, 对于任何半整数自旋的场, 其激发是 Fermion。

2.5 From Free Field Theory to Interacting Field Theory

在上面的讨论中, 我们研究的都是自由的量子场。在自由场论中, 所有的粒子都是自由粒子, 它们不会和外界发生任何的相互作用。而在真实世界中, 我们观测到的粒子之间是存在多种的相互作用的。只有我们在理论中加入量子场间的相互作用时, 我们的理论才能预言粒子之间的相互作用, 从而描述真实世界。

于是需要构建出一个相互作用的量子场论。自由场论的基本对象是场算符, 在场算符的基础上猜出了一个 Lagrangian, 体系的动力学就可以用这个 Lagrangian 来描述。而在相互作用的量子场论中, 我们自然也有一些场算符 $\phi(x), \Psi(x), A_\mu(x)$ 和一个 Lagrangian。但是和自由场论不同的是, Lagrangian 中是存在相互作用项的:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad H = H_0 + H_{\text{int}} \quad (2.163)$$

我们自然会问, 有哪些相互作用的 Lagrangian? 或者说, 对相互作用的 Lagrangian 有什么要求? 这个问题的答案是简单的: 在理论中出现的 Lagrangian, 其耦合常数的量纲必须不小于 0。例如标量场的自耦合 $\lambda\phi^4/4!$, 由于自然单位制下, 作用量 S 不具有量纲, $[d^4x] = -4$, 从而 $[\mathcal{L}] = 4, [\phi] = 1$ 。于是可以看出, 这个相互作用的耦合常数 λ 具有量纲 $[\lambda] = 0$, 从而是满足上面的要求的。

虽然这个问题具有简单的答案, 但是其中蕴含的物理是复杂的。我们会在第五章讨论重整化时详细讨论这个原因。在这里仅做一个定性的阐述: 从重整化的角度来看, 所有耦合常数具有负量纲的相互作用都是不可重整的, 从而含有这些相互作用的理论中必然会出现不可消去的无穷大。这使得理论失去了预言能力。从重整化的本质, 也就是有效场论的角度来看的话, 我们的理论是一个低能有效理论。一个高能下的场论可以具有任何的负量纲的耦合, 但是这些耦合在我们降低能标的過程中会被压低, 于是在有效理论中看到的耦合都必然只有量纲的非负的耦合常数。

接下来我们来大致阐述以下相互作用场论的结构。我们的理论有以下的基本假设:

- 量子场满足作为算符方程的经典场方程。
- 正则对易关系: $[\phi_\alpha(x, t), \pi^\beta(y, t)] = i\delta_\alpha^\beta \delta^3(x - y)$ 。

- Poincare 群在 Hilbert 空间上表示的生成元是 Poincare 群下的 Noether 荷。这也就是说：

$$[\phi_\alpha(x), P^\mu] = -i\partial^\mu\phi_\alpha(x), \quad [\phi_\alpha(x), J^{\mu\nu}] = -i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\phi_\alpha(x) + (J^{\mu\nu})_\alpha^\beta\phi_\beta(x) \quad (2.164)$$

其中 $J^{\mu\nu}$ 是 Lorentz 群在 Hilbert 空间上表示的生成元, $(J^{\mu\nu})_\alpha^\beta$ 是场所在的 Lorentz 群表示的生成元。

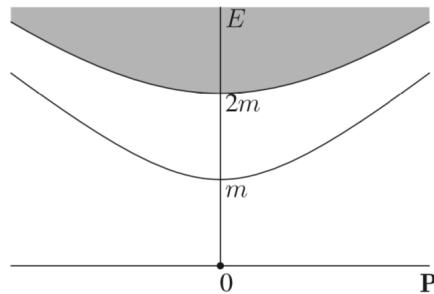
- 在相互作用场论中也有一个真空态 $|\Omega\rangle$, 它被定义为相互作用 Hamiltonian 的基态, 不携带任何动量和能量。
- 在真空之外, 相互作用的 Hamiltonian 也有一系列能量和动量的共同本征态 $|\lambda_p\rangle$ 。它携带能量 E_λ 和动量 \mathbf{p} 。这些 $|\lambda_p\rangle$ 可以用 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 互相联系。这些本征态在 Hilbert 空间上是完备的。这也就是说：

$$1 = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_\lambda \int \widetilde{dp} |\lambda_p\rangle\langle\lambda_p| \quad (2.165)$$

- 有一系列上述的本征态, 称为**单粒子态**。它们的能量和动量满足 $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ 。其中静止质量 m 就是这个粒子的**物理质量**¹⁵。这些单粒子态处于 E-p 图的一条孤立的线上。

这六条就是我们的基本假设。我们在前一节看到, 这些东西在自由场论中是可以被轻易导出的。而由于相互作用场论的数学结构过于复杂, 而我们的讨论又离不开这些事物, 于是就将这些自由场论中的性质作为基本假设搬到相互作用场论中来。

在此之外, 我们还可以对 E-p 平面的事情做更多的讨论。对于多粒子态, 由于其静止质量与相对速度等参量有关, 于是这些多粒子态的 E-p 关系在 E-p 图上是一个连续的区域, 而不是一条线, 如下图。



当然, 既然就有了一些相互作用, 就可能存在一些相互作用下的束缚态。这些态具有孤立的静止质量 m_{bound} 。于是在上图中, 它们应该处于 $2m$ 到 m 之间的一条孤立的线上。

接下来, 我们为了叙述简单, 采用以下的 Lagrangian 作为例子来叙述我们对相互作用场论的一些要求。由于显而易见的原因, 这个理论被称为 ϕ^4 理论：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (2.166)$$

¹⁵后面我们会看到, 物理质量不一定等于 Lagrangian 中的参数 m 。这是依赖于我们做重整化的方式的。

在自由场论中，考虑场算符在真空态和单粒子态 $a^\dagger(k)|0\rangle = |k\rangle$ 间的矩阵元，有：

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0, \quad \langle k|\phi(x)|0\rangle = e^{-ikx} \quad (2.167)$$

在下一节中我们会看到，为了描述散射过程，需要场在无穷时刻趋近于一个自由场。于是我们希望这些关系在相互作用的场论中也成立。也就是对相互作用的真空 $|\Omega\rangle$ 和相互作用的单粒子态 $|k\rangle$ ，有：

$$\langle \Omega|\phi(x)|\Omega\rangle = 0, \quad \langle k|\phi(x)|\Omega\rangle = e^{-ikx} \quad (2.168)$$

如果这不成立的话，我们也可以对场做平移和重新标度（也就是乘一个因子），使得这些关系成立¹⁶。这具有什么样的物理意义呢？我们将在下一节中看到答案。对于 ϕ^4 理论的 Lagrangian，经过这些平移和重新标度后，Lagrangian 变成：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z_\phi\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}Z_m m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}Z_\lambda\lambda\phi^4 \quad (2.169)$$

其中我们忽略了 Lagrangian 中出现的常数，由于它并不蕴含任何的物理。这个过程实际上就是一种重整化：我们对场进行了重标度，从而使得我们希望的关系成立。因为我们可以做这些操作使得上面的关系被满足，所以我们不认为这是我们场论的一个基本假设，而认为是我们对场论附加的一些操作。

我们在这个操作中引入的重整化常数在后面会发挥重要作用：不仅使得我们希望成立的关系成立，它们还能用于抵消理论中的紫外发散。我们会在第五章中看到这一点。

2.6 Scattering Problems

Introduction to Scattering

现在就有了一个相互作用的量子场论，就可以用这个理论来解释或者预言实验现象了。现在量子场论能够解释的最成功的一类问题就是散射问题：一些粒子带有一定的动量，从 $t = -\infty$ 时刻从非常远的地方飞来，经过一些过程，在 $t = \infty$ 时刻变为另外一些粒子，飞到非常远的地方。对于这样一个过程，我们可以观测到的物理量有两类：对于两个粒子散射到多个粒子的过程，我们可以测量散射截面。而对于单个粒子衰变为多个粒子的过程，我们可以测量衰变率。其定义分别为：

对于一个两粒子到多粒子的散射过程，定义散射截面为：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} := \frac{1}{I} \frac{dN}{dt} \quad (2.170)$$

其中 I 是入射的粒子束流强度， dN/dt 为单位时间内被散射到立体角 $\Omega + d\Omega$ 中的粒子数。

对于单粒子衰变的过程，我们通常在粒子静止的参考系中考虑问题。如果粒子数是 N ，那么定义

$$\Gamma := \frac{1}{N} \left| \frac{dN}{dt} \right| \quad (2.171)$$

¹⁶有的教科书中，在上面的表达式中多了一个因子 $\sqrt{Z_\phi}$ 。这和我们在这里的讨论其实是等价的，只是叙述方式不一样而已——这些教科书中的 $\langle k|\phi(x)|0\rangle$ 是裸场，也就是没有经过重整的场。而我们这里的场是重整化过后的场。

我们在量子场论中，可以分别计算每个过程对散射截面或衰变率的贡献，对这些贡献进行加和，就得到了总的衰变率或散射截面。这些总的衰变率和截面才是我们在实验中的可观测量。

The LSZ Theory

有了这样的一个直观图像，我们就该思考如何刻画这个散射过程。由于我们看到的是两束粒子从非常远的地方飞来，相撞后又飞向非常远的地方。于是在无穷远的过去和无穷远的将来，两个粒子相距甚远，其间的相互作用可忽略不计。此时，这两个粒子就可以被独自看做自由的粒子，于是可以用自由场的多粒子态来描写。从而在物理上而言，在 $t = -\infty$ 时刻的态是一个自由的多粒子态。这个多粒子态在相互作用的 Hamiltonian 下演化到 $t = \infty$ 。这个态又“渐进于”某些自由多粒子态的线性组合。于是需要描述一个按照相互作用的 Hamiltonian 演化，并且在正或负无穷时刻渐进于一个自由多粒子态的态。

为了描述这些渐进态，需要引入一些假设。我们在这里遵循 Bjorken 的足迹，使用被称为 **LSZ 理论** 的一套假设¹⁷。这些假设如下所示：

- 存在一个遵循上一节所叙述的假设的相互作用场论。回顾一下，它们是正则对易关系、Poincare 群下的变换关系、真空态 $|\Omega\rangle$ 的存在性、4-动量本征态 $|\lambda_p\rangle$ 及其完备性和单粒子态的孤立性。这个相互作用场论中的 (Heisenberg 绘景) 场算符被我们称为 $\phi(x)$ 。
- 与此同时，还有两个自由场论¹⁸。它们和相互作用场论共用一个 Hilbert 空间，且有相同的真空态 $|\Omega\rangle$ ¹⁹²⁰。这两个自由场论中的 (Heisenberg 绘景) 场算符被称为 ϕ_{in} 和

¹⁷除去 LSZ 理论，还有一套与 LSZ 理论等价的，被称为 **Haag-Ruelle 理论** 的假设。它认为自由场论和相互作用场论不共用一个真空，只是 $\pm\infty$ 时刻的态（在波包意义上）渐进于自由态而已。Haag-Ruelle 理论在 Weinberg 和 Peskin 这些流行的教科书中被使用。这也是我们的叙述方式和这些教科书不同的一个原因。

¹⁸这个“自由场论”的说法有一点点迷惑性：首先，在这个自由场论中，Lagrangian 中的参数 m 就是粒子的物理质量。其次，这个自由场论中还包含一些可以“射入”的束缚态，例如正负电子构成的电子偶素、夸克构成的强子等。后面会看到，我们“关掉”相互作用是因为粒子之间相距甚远，相互作用可以忽略。但是对于组成这些束缚态的粒子，它们在射入时就已经在不断的相互作用，于是我们在自由场论中不应该将形成这些束缚态的相互作用关掉，而是应该将这些束缚态看作基本粒子。最后，所有的渐进态都应该可以被我们观测到。例如我们在第七章中会看到，夸克由于色禁闭的原因是无法被我们观测到的。于是渐进场论中也就没有单夸克态，只有它们的束缚态——强子。这些问题说明，我们的这个自由场论并不是原来意义上的“没有相互作用的场论”。

¹⁹真空态被定义为 Hamiltonian 的基态。我在这里的处理比较野蛮：直接将三个场论的真空 $|0_{in}\rangle, |0_{out}\rangle$ 和 $|\Omega\rangle$ 视为相同的真空。我们为什么可以这么做呢？答案就是，这些真空之间仅仅相差一个相因子。首先，渐进真空 $|0_{in}\rangle, |0_{out}\rangle$ 之间仅相差一个相因子这件事情是比较明显的：它可以直接从这两个场论的 Lagrangian 相同看到。而对于渐进真空和相互作用真空而言，我们事实上是用了一个小 trick：在 Hamiltonian 上加上一个微小的虚部，从而所有 $|0_{in}\rangle$ 中非真空态的部分将会消失，仅仅留下 $|0_{in}\rangle \propto |\Omega\rangle$ 。我们会在 3.3 节中详细讨论这个小 trick。

事实上，你甚至可以通过计算真空图来计算渐进真空和相互作用真空之间的相因子，也可以通过选择能量零点的方式使得“入”渐进真空和“出”渐进真空之间存在一些相因子。如果带着这些相因子的话，渐进多粒子态就是 $|\alpha_{in}\rangle = a_{in}^\dagger(k_1) \dots a_{in}^\dagger(k_n) |0_{in}\rangle$ 。而我们这里的操作相当于：将这些相因子吸收到渐进多粒子态的定义中，也就是定义：

$$|\alpha_{in}\rangle := e^{i\phi} |\alpha_{in}\rangle_{Original} = a_{in}^\dagger(k_1) \dots a_{in}^\dagger(k_n) |\Omega\rangle \quad (2.172)$$

我们会在下一章中看到，真空上的所有相因子是无法影响任何可观测量的，于是将这些真空取做相同的并不影响任何的物理，并且也不影响我们用路径积分构建起的微扰论。不过如果要用相互作用绘景和正则理论构建微扰论（下面几个脚注会更详细说明这件事情），那么这些相因子实际上蕴含了一些信息：它们告诉我们，需要在计算 S-矩阵时扔掉所有真空图的贡献。

²⁰你可能还会觉得： $|\Omega\rangle$ 是相互作用理论的基态， $|0\rangle$ 是自由理论的基态。既然 Hamiltonian 的形式不一样，

ϕ_{out} 。这些自由场算符生成的多粒子态是完备的。

我们为什么需要这些自由场论呢？这是因为在时间处于正负无穷处，粒子和粒子之间相距甚远，粒子和粒子之间是不存在相互作用的，这些自由场论被我们用来描写“射入”和“射出”的、之间无相互作用的物理粒子态。

- 联系相互作用场论和两个自由场论的是以下的两个弱渐进条件²¹²²²³：

$$\forall |\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \alpha | \phi(x) | \beta \rangle = \langle \alpha | \phi_{\text{in}}(x) | \beta \rangle, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \alpha | \phi(x) | \beta \rangle = \langle \alpha | \phi_{\text{out}}(x) | \beta \rangle \quad (2.175)$$

这也就是说，在正负无穷时刻，相互作用场论的场在波包的意义上是渐进于自由场的。为什么要引入这个假设呢？因为我们希望能够将这些无相互作用的物理粒子态和相互作用场联系起来。如果相互作用场论的场能够渐进于自由场，我们就可以认为这些渐进粒子态能够被正负无穷时刻的场所激发。

你可能会问：既然相互作用场论中算符的演化已经是确定的了，为什么我们还能引入这些渐进条件呢？正如前面所说，在无穷时刻，粒子和粒子之间相距甚远，粒子和粒子之间是不存在相互作用的。于是我们可以认为无穷时刻的场论中的相互作用是被“关闭”的。在时间从负无穷演化到 0 的过程中，相互作用被绝热地“打开”，再在时间从 0 到正无穷的过程中绝热地“关闭”。这个过程可以通过在 Hamiltonian 的相互作用部分中引入一个绝热因子 $e^{-\epsilon|t|}$ 来实现。对于加上了这个绝热因子的理论而言，无穷远时刻的场一定是渐进于自由场的。不过重点是：如果你带着这个绝热因子去计算物理过程，可以发现计算出的物理结果和没有渐进因子、只有弱渐进条件的理论计算出的结果完全一致。于是在实际操作中，我们可以人为的忽略这个绝热因子，但是仍然使用渐进条件。这在某种程度上相当于：这些弱渐进条件“内含”了相互作用绝热打开、绝热关闭的过程。

这些假设加起来也就回答了我们上一节遗留的这个问题：为什么要做重整化呢？因为我们想要让相互作用场满足关系 $\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle = 0, \langle k | \phi(x) | \Omega \rangle = e^{-ikx}$ 。为什么要让它满足这个关系呢？因为我们希望相互作用场在无穷时刻的激发能够描述一个物理的单粒子态。这就

它们的 H_0, H_{int} 本征值也应该不一样，为什么能将它看成一样的呢？答案也很简单：我们需要在相互作用的 Lagrangian 中加入一个常数项 \mathcal{L}_0 ，使得两个基态有相同的本征值。这也相当于一个宇宙学常数的重整化。

²¹“弱”的意思是：它们只在波包的意义上成立，否则这就和场方程相矛盾。

²²有了这里的弱渐进条件，我们仅仅知道了一个能用产生湮灭算符描述的多粒子态和一个相互作用场论中的态有什么关系。但是这并不是渐近场论中的所有态。我们现在发展的这套理论（后面会看到，这套理论的核心是 LSZ 约化公式）只能处理自由多粒子态的散射，但是仍然无法处理渐进场论中的非自由多粒子态，例如束缚态、孤子态等等。在这个 notes 的第六章及之前，我们仅仅会讨论量子电动力学，这仅仅是无法处理氢原子等类似态的问题。不过当我们在第七章中开始讨论量子色动力学的时候，这件事情就会变得尖锐：量子色动力学中可以观测的态只有强子束缚态，由于色禁闭的原因，自由多粒子态无法被观测。于是我们会在第八章末尾给出一个处理量子色动力学中束缚态的方法——共线因子化来解决当时的燃眉之急。

²³利用渐进关系，我们可以知道渐进场算符就是相互作用绘景的场算符。从无穷时刻的场出发，我们可以知道 $\phi_{\text{in}}(x) = e^{iH_0(x^0-T)} \phi_{\text{in}}(T) e^{-iH_0(x^0-T)}$, $\phi(x) = e^{iH(x^0-T)} \phi(T) e^{-iH(x^0-T)}$ 。将 T 取做无穷远的过去，再利用渐进关系就能得到：

$$\phi(x) = U_I(-\infty, x^0) \phi_{\text{in}}(x) U_I(x^0, -\infty) \quad (2.173)$$

其中 $U_I(t_2, t_1) := e^{-iH(t_2-t_1)} e^{iH_0(t_2-t_1)}$ 就是相互作用绘景中的时间演化算符。

利用渐进条件，我们还可以知道更多的东西：如果在上式中将 x^0 取做无穷远的未来，那么就会有：

$$\phi_{\text{out}}(x) = U_I(-\infty, \infty) \phi_{\text{in}}(x) U_I(\infty, -\infty) \quad (2.174)$$

我们会在后面的脚注中明白这件事情中蕴含的更深刻意义。

给了重整化一个很清晰的物理诠释：由于粒子会和自身不断发生自相互作用，例如一个电子在飞行的过程中会不断发射出光子，并且迅速吸收掉这些光子，这相当于给电子裹上了一层相互作用的“外衣”。而一个原本的、未重整化的场的激发只能描述一个“裸”的粒子。而如果我们想要描述一个包含这些复杂的自相互作用的粒子，就可以引入一个等效的场和等效的耦合常数，将这些复杂的自作用吸收到重整化常数中去²⁴，使得相互作用场在无穷时刻的激发能够描述一个物理的粒子。这也就是重整化背后蕴含的物理。由于这个原因，我们也将没有经过重整化的场称为**裸场**。

有了这些描述渐进多粒子态的方式，就能开始计算散射截面和衰变率了。我们在 Heisenberg 绘景中工作。对于一个相互作用场，我们也可以通过以下的关系定义一个产生湮灭算符²⁵：

$$a(k) := i \int d^3x e^{-ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \quad (2.176)$$

但是在相互作用场论中，场不满足自由场方程，于是我们就没有类似的模式展开，从而 Hamiltonian 中的自由部分就不能写成产生湮灭算符的粒子数算符的形式。

当我们说初态是一个多粒子态时，我们事实上在说初态是 $|\alpha_{\text{in}}\rangle := a_{\text{in}}^\dagger(k_1) \dots a_{\text{in}}^\dagger(k_n) |\Omega\rangle$ 。其中 a_{in} 是由场 ϕ_{in} 定义的产生湮灭算符，即：

$$a_{\text{in}}(k) := i \int d^3x e^{-ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{in}}(x) \quad (2.177)$$

同样，当我们说末态是一个多粒子态时，我们说末态是 $|\beta_{\text{out}}\rangle := a_{\text{out}}^\dagger(p_1) \dots a_{\text{out}}^\dagger(p_m) |\Omega\rangle$ 。由于这些都是 Hilbert 空间中的态，我们可以对这些态做内积。从而我们从初态跃迁到末态的概率幅就是以下的矩阵元：

$$S_{\beta\alpha} := \langle \beta_{\text{out}} | \alpha_{\text{in}} \rangle \quad (2.178)$$

这个矩阵元在理论中有十分重要的地位。我们将它称为 **S 矩阵**。由于入态和出态分别在这个 Hilbert 空间上完备，于是存在一个算符，将出态和入态互相映射²⁶：

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta_{\text{out}} | \alpha_{\text{in}} \rangle = \langle \beta_{\text{in}} | S | \alpha_{\text{in}} \rangle \quad (2.180)$$

这被称为 **S 算符**。S 算符保态的内积，从而是么正算符，有 $S^\dagger S = S S^\dagger = 1$ 。如果我们知道一个初态有多少概率散射为一个末态，那么我们就知道了这个散射过程中的所有信息。于是我们说，S 矩阵编码了散射理论中的所有信息，我们要考虑一个散射问题，就只需要求出这个散射过程的 S 矩阵，理论上就能从中得出所有对这个散射过程的可观测量的预言。

²⁴至于为什么能够吸收这些复杂的自相互作用，我们可以在 3.7 节中讨论正规传播子时看到这个问题的答案。

²⁵我们要求这里的 k 是 on shell 的，也就是说 $k^0 = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$ ，其中 m 是粒子的物理质量。为什么这里是物理质量呢？这是因为需要这个算符在渐进时刻成为渐进场的产生湮灭算符。

²⁶由于“入”真空和“出”真空相同，于是 S 算符作用于真空态上满足 $S|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$ 。既然 S 算符将入态和出态互相映射，那么它就应该将入态和出态的产生湮灭算符也互相映射，由于产生湮灭算符是用场算符定义出的，S 算符也应该将入态和出态的场互相映射。从而就有 $S^\dagger \phi_{\text{in}} S = \phi_{\text{out}}$ 。对比我们在前面一页的脚注中计算出的结果 $\phi_{\text{out}}(x) = U_I(-\infty, \infty) \phi_{\text{in}}(x) U_I(\infty, -\infty)$ ，我们便知道：S 算符其实就是相互作用绘景中，从无穷远的过去到无穷远的将来的时间演化算符：

$$S = U_I(\infty, -\infty) \quad (2.179)$$

这个关系也是一种建立微扰论的方式。我们只需要将这个演化算符展开成 Dyson 级数，然后依次计算出自由场论中的这些项，就可以计算出相互作用场论中的散射过程。不过在这个 notes 中，我们会利用更加优雅的路径积分来建立微扰论。

Crosssections and Decay Rates

接下来我们就考虑, 如果求出了 S 矩阵, 该如何给出对可观测量的预言呢?

我们先考虑散射截面。如果初态是一个 n 粒子态 $|\alpha\rangle$, 末态是一个 n' 粒子态 $|\beta\rangle$, 那么根据上面的讨论, 这个过程发生的概率就是 $|\langle\beta|S|\alpha\rangle|^2$ 。不过由于我们对自由粒子态使用的归一化并非 $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$, 于是实际上的概率就是:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \frac{|\langle\beta|S|\alpha\rangle|^2}{\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle} \quad (2.181)$$

由于在自由场论中, 有 $[a(k), a^\dagger(k')] = (2\pi)^3(2\omega_k)\delta^3(k - k')$, 于是对于一个自由场论中的多粒子态 $|\alpha\rangle = a^\dagger(k_1)\dots a^\dagger(k_n)|0\rangle$, 有:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \prod_{i=1}^n (2\pi)^3(2\omega_{k_i})\delta^3(0) \quad (2.182)$$

虽然这看起来是无穷大, 但是因为散射实验是不会持续无穷长时间、在无穷大体积中发生的。我们可以将散射实验认为是持续时间 T , 在体积为 V 的方形箱子中进行的。并且为了使得平移不变性仍然成立, 需要附加上周期性边界条件。从而可以取的动量就从连续的变为离散的 $k_i = \frac{2\pi}{L}n_i$ 。

在箱归一化下, 积分就变为了求和。由于一个动量空间中的“格子”占据体积为 $(2\pi)^3/V$, 于是 $\int d^3k\delta^3(k) = \sum_i \frac{(2\pi)^3}{V}\delta^3(k_i) = 1$, 于是就有 $\delta^3(0) = V/(2\pi)^3$ 。按照类似的讨论, 也有 $\delta^4(0) = VT/(2\pi)^4$ 。从而就有 $\langle\alpha|\alpha\rangle = \prod_i (2\omega_{k_i}V)$ 。

由于我们要求初末态的 4-动量守恒, 并且不考虑从初态散射到初态的没有发生散射的过程, 于是可以定义以下的 **Feynman 振幅** \mathcal{M} , 将我们关心的部分提取出来:

$$S = \mathbb{I} + (2\pi)^4\delta^4(k_{\text{in}} - k_{\text{out}})(i\mathcal{M}) \quad (2.183)$$

从而发生散射的概率就可以写为:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \frac{(2\pi)^4\delta^4(k_{\text{in}} - k_{\text{out}})|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2VT}{\prod_i (2\omega_{k_i}V) \prod_j (2\omega_{k'_j}V)} \quad (2.184)$$

这也就是说, 散射到末态动量空间体积 $((2\pi)^3/V)^{n'}$ 的概率是 $P_{\alpha \rightarrow \beta}$ 。于是散射到动量空间单位体积的概率就是:

$$dP_{\alpha \rightarrow \beta} = \left(\prod_i \frac{V}{(2\pi^3)} d^3k_i \right) P_{\alpha \rightarrow \beta} = \frac{(2\pi)^4\delta^4(k_{\text{in}} - k_{\text{out}})|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2VT}{\prod_i (2\omega_{k_i}V)} \prod_j \widetilde{dk'_j} \quad (2.185)$$

为了简化这个表达式, 定义一个 n 粒子不变相体积元 $d\text{LIPS}_n := (2\pi)^4\delta^4(k_{\text{in}} - k_{\text{out}}) \prod_j \widetilde{dk'_j}$ 。从而就有:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{V^{n-1} \prod_i (2\omega_{k_i})} d\text{LIPS}_n \quad (2.186)$$

注意由于这涉及到能量, 于是这并不是 Lorentz 不变的。在真实的散射实验中, 我们都是用两个粒子束来对撞, 于是我们重点关注 $n=2$ 的过程。为了计算方便, 我们在实验室坐

标系中，也就是粒子束 B 静止的参考系中考虑问题。在这个参考系中，入射的粒子数强度就是：

$$I_{\text{lab}} = nv = \frac{|\mathbf{k}_1|_{\text{lab}}}{V(E_1)_{\text{lab}}} \quad (2.187)$$

从而我们就得到了散射截面：

$$d\sigma(k) = \frac{dP}{Idt} = \frac{1}{\prod_m n_m!} \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4(E_2)_{\text{lab}} |\mathbf{k}_1|_{\text{lab}}} d\text{LIPS}_n = \frac{1}{\prod_m n_m!} \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{s} |\mathbf{k}_1|_{\text{CM}}} d\text{LIPS}_n \quad (2.188)$$

其中 CM 指质心系， $s = -(k_1 + k_2)^2$ 。注意到我们并没有写出这个散射截面是在什么坐标系中讨论的。这是由于：如果考虑一个沿着 k_1 的 boost，那么 I 变为 γI ，dt 变为 dt/γ ，从而散射截面是沿 k_1 的 boost 不变的。于是无论是实验室参考系还是质心系，微分散射截面都是上面的值。

注意到，在上式中我们乘了一个额外的因子 $1/\prod_m n_m!$ ，其中 m 是末态中不同的粒子，而 n_m 是这个粒子在末态中出现的个数。这个因子来源是末态粒子的全同性：如果末态有两个全同的粒子，那么我们无法区分这两个粒子分别处于 k_1, k_2 和 k_2, k_1 的状态。这会造成我们对相空间积分时候积分过了两次同样的态。我们的这个因子就是为了消除这个重复求和而引入的。

在我们的讨论中，最常见的情况是 2 体到 2 体的散射。此时在质心系中的散射截面是²⁷：

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{s}|\mathbf{k}_1|} (2\pi)^4 \delta^4(k - k'_1 - k'_2) \frac{d^3 k'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \frac{d^3 k'_2}{(2\pi)^3 2E'_2} \\ &= \int \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{s}|\mathbf{k}_1|} \frac{d^3 k'_1}{(2\pi)^2 4\sqrt{|\mathbf{k}'_1|^2 + m'^2_1} \sqrt{|\mathbf{k}'_1|^2 + m'^2_2}} \delta \left(\sqrt{s} - \sqrt{|\mathbf{k}'_1|^2 + m'^2_1} - \sqrt{|\mathbf{k}'_1|^2 + m'^2_2} \right) \\ &= \int \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{s}|\mathbf{k}_1|} \frac{|\mathbf{k}'_1|^2 d|\mathbf{k}'_1| d\Omega}{(2\pi)^2 4\sqrt{|\mathbf{k}'_1|^2 + m'^2_1} \sqrt{|\mathbf{k}'_1|^2 + m'^2_2}} \delta \left(\sqrt{s} - \sqrt{|\mathbf{k}'_1|^2 + m'^2_1} - \sqrt{|\mathbf{k}'_1|^2 + m'^2_2} \right) \\ &= \int \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{s}|\mathbf{k}_1|} \frac{|\mathbf{k}'_1| d\Omega}{(2\pi)^2 4\sqrt{s}} \end{aligned} \quad (2.189)$$

于是，质心系中 2 体到 2 体散射的微分散射截面就是：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{64\pi^2 s} \frac{|\mathbf{k}'_1|_{\text{CM}}}{|\mathbf{k}_1|_{\text{CM}}} \quad (2.190)$$

最后，考虑衰变率。由于我们已经讨论出了一个过程的散射概率，代入 $n=1$ ，并且在粒子静止参考系中讨论，从而这个过程对衰变率的贡献就是：

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \int \frac{|\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2}{2m} d\text{LIPS}_n \quad (2.191)$$

我们必须在这里说一句，这里对衰变率的讨论其实并不是严格的。事实上，当我们定义渐进场 $\phi_{\text{in}}, \phi_{\text{out}}$ 时，就已经隐含了渐进场所生成的粒子都是稳定粒子：如果要求入、出多

²⁷这里所有量都是在质心系中的。为了书写简便，省略角标“CM”。在讨论中先认为末态粒子都是可分辨粒子。对于全同粒子，还需要乘上一个全同性因子。

粒子态是完备的，那么就说明，所有的“入”多粒子态都对应一个相应的“出”多粒子态。而对于一个不稳定粒子而言，当我们考虑一个其衰变过程时，我们的时间尺度的量级其实就是 $1/\Gamma$ 。但是在这个时间尺度下，我们并不能谈论一个在 $-\infty$ 时刻下的这个粒子。由于我们当作 ∞ 的时间是远大于我们关注的时间尺度的。于是当我们的体系演化到 ∞ 时刻时，这个粒子应该早就衰变完毕了。于是末态中没有不稳定粒子态。这也就告诉我们，如果要求入、出多粒子态是完备的，那么渐进场的激发一定是稳定粒子。从而不稳定粒子是无法出现在 S 矩阵两侧的。对于究竟如何计算不稳定粒子的衰变率的问题，我们等到第四章再回答。

直到这里，我们就完成了对散射过程的可观测量的讨论。于是如果需要预言一个散射过程中的现象，就只需要求出 S 矩阵。

2.7 The LSZ Reduction Formula

LSZ Reduction for Scalar Fields

在这一节，我们给出一个计算 S 矩阵的强有力的方法——**Lehmann-Symanzik-Zimmerman 约化公式**。它将 S 矩阵和关联函数联系起来。从而如果我们求出了关联函数，就求出了 S 矩阵。

我们先以标量场为例，给出 LSZ 约化公式的具体形式，而后我们再对其进行证明：

$$\begin{aligned} \langle k'_1 \dots k'_n | S | k_1 \dots k_n \rangle &= i^{n+n'} \left(\prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{ik_i x_i} (-\partial_i^2 + m^2) \right) \\ &\times \left(\prod_{j=1}^{n'} \int d^4 x'_j e^{-ik'_j x'_j} (-\partial_j'^2 + m^2) \right) \langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x'_1) \dots\} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (2.192)$$

接下来证明这个公式。我们证明的大致思路是，通过渐进关系和产生湮灭算符的演化，可以将一个产生湮灭算符从初末态中移除，并在两个态之间加入一个场算符，且在矩阵元上作用一个 Klein-Gordon 算子。在将所有初末态的产生湮灭算符都移除之后，我们就得到了 LSZ 约化公式。

我们先看看，如何约化掉一个初态上的的产生湮灭算符。如果初态可以写为 $a_{in}^\dagger(k)|\alpha_{in}\rangle$ ，末态可以写为 $|\beta_{out}\rangle$ ，那么 S 矩阵就是：

$$\begin{aligned} \langle \beta | S | k \alpha \rangle &= \langle \beta_{out} | a_{in}^\dagger(k) | \alpha_{in} \rangle = \langle \beta_{out} | a_{out}^\dagger(k) | \alpha_{in} \rangle - \langle \beta_{out} | a_{out}^\dagger(k) - a_{in}^\dagger(k) | \alpha_{in} \rangle \\ &= \langle \beta_{out} | a_{out}^\dagger(k) | \alpha_{in} \rangle - \langle \beta_{out} | a^\dagger(+\infty) - a^\dagger(-\infty) | \alpha_{in} \rangle \end{aligned} \quad (2.193)$$

由于就有²⁸²⁹:

$$\begin{aligned}
 a^\dagger(+\infty) - a^\dagger(-\infty) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \partial_0 a^\dagger(t) = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \partial_0 \int d^3x e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \\
 &= -i \int d^4x e^{ikx} (\partial_0^2 + \omega^2) \phi(x) = -i \int d^4x e^{ikx} (\partial_0^2 + \mathbf{k}^2 + m_{\text{ph}}^2) \phi(x) \\
 &= -i \int d^4x e^{ikx} (\partial_0^2 + \overleftarrow{\nabla}^2 + m_{\text{ph}}^2) \phi(x) = -i \int d^4x e^{ikx} (\partial_0^2 - \nabla^2 + m_{\text{ph}}^2) \phi(x) \\
 &= -i \int d^4x e^{ikx} (-\partial^2 + m_{\text{ph}}^2) \phi(x)
 \end{aligned} \tag{2.194}$$

从而, 有:

$$\langle \beta | S | k\alpha \rangle = \langle (\beta - k)_{\text{out}} | \alpha_{\text{in}} \rangle + i \int d^4x e^{ikx} (-\partial^2 + m_{\text{ph}}^2) \langle \beta_{\text{out}} | \phi(x) | \alpha_{\text{in}} \rangle \tag{2.195}$$

我们再来看如何约化一个末态中的产生湮灭算符。对于初态 $|\alpha_{\text{in}}\rangle$, 末态 $a_{\text{out}}^\dagger(k)|\beta_{\text{out}}\rangle$ 的过程, 就有:

$$\begin{aligned}
 \langle k\beta | S | \alpha \rangle &= \langle \beta_{\text{out}} | a_{\text{out}}(k) | \alpha_{\text{in}} \rangle = \langle \beta_{\text{out}} | a_{\text{in}}(k) | \alpha_{\text{in}} \rangle + \langle \beta_{\text{out}} | a_{\text{out}}(k) - a_{\text{in}}(k) | \alpha_{\text{in}} \rangle \\
 &= \langle \beta_{\text{out}} | a_{\text{in}}(k) | \alpha_{\text{in}} \rangle + \langle \beta_{\text{out}} | a(+\infty) - a(-\infty) | \alpha_{\text{in}} \rangle \\
 &= \langle \beta_{\text{out}} | (\alpha - k)_{\text{in}} \rangle + i \int d^4x e^{-ikx} (-\partial^2 + m_{\text{ph}}^2) \langle \beta_{\text{out}} | \phi(x) | \alpha_{\text{in}} \rangle
 \end{aligned} \tag{2.196}$$

当我们约化了一个产生湮灭算符后, 两个态之间会出现场算符。我们如何在有场算符的情况下约化其他的态呢? 让我们看这个过程:

$$\begin{aligned}
 &\langle \beta_{\text{out}} | a_{\text{out}}(k) \phi(x) | \alpha_{\text{in}} \rangle \\
 &= \langle \beta_{\text{out}} | \phi(x) a_{\text{in}}(k) | \alpha_{\text{in}} \rangle + \langle \beta_{\text{out}} | a_{\text{out}}(k) \phi(x) - \phi(x) a_{\text{in}}(k) | \alpha_{\text{in}} \rangle \\
 &= \langle \beta_{\text{out}} | \phi(x) | (\alpha - k)_{\text{in}} \rangle + i \lim_{y^0 \rightarrow +\infty} \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \langle \beta_{\text{out}} | \int d^3y e^{-iky} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(y) \phi(x) - \int d^3y' \phi(x) e^{-iky'} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(y') | \alpha_{\text{in}} \rangle \\
 &= \langle \beta_{\text{out}} | \phi(x) | (\alpha - k)_{\text{in}} \rangle + i \left(\lim_{y^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \right) \int d^3y e^{-iky} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \beta_{\text{out}} | T\{\phi(x)\phi(y)\} | \alpha_{\text{in}} \rangle \\
 &= \langle \beta_{\text{out}} | \phi(x) | (\alpha - k)_{\text{in}} \rangle + i \int d^4y e^{-iky} (-\partial_y^2 + m_{\text{ph}}^2) \langle \beta_{\text{out}} | T\{\phi(x)\phi(y)\} | \alpha_{\text{in}} \rangle
 \end{aligned} \tag{2.197}$$

其中最后一行利用到了以下的公式:

$$\left(\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \right) \int d^3x g_1(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 g_2(x) = \int d^4x [g_1(x) \partial_0^2 g_2(x) - (\partial_0^2 g_1(x)) g_2(x)] \tag{2.198}$$

²⁸由于定义的相互作用场产生湮灭算符中的 k 是 on shell 的, 且质量 $m_{\text{ph}} = \sqrt{-k^2}$ 是物理质量。于是这里的质量是物理质量, 在一些重整化方案中这并不是 Lagrange 中的参数质量。

²⁹这里要说明一点: 将 Klein-Gordon 算符从关联函数中提出来并不是一个平凡的操作。根据后面讨论的 Schwinger-Dyson 方程, 这个操作会带来额外的接触项, 但是可以证明这些额外的东西对 S-矩阵没有贡献, 于是这里的这个操作是安全的。

可以看到, 当两个态之间有场算符时, 只需要引入一个编时算符, 就可以做和上面完全相同的约化。于是, 就可以先将初末态的所有粒子逐个移除。如果初末态不完全相同的话, 就会有以下的关系:

$$\begin{aligned} \langle k'_1 \dots k'_n | S | k_1 \dots k_n \rangle &= i^{n+n'} \left(\prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{ik_i x_i} (-\partial_i^2 + m_{\text{ph}}^2) \right) \\ &\times \left(\prod_{j=1}^{n'} \int d^4 x'_i e^{-ik'_i x'_i} (-\partial_i'^2 + m_{\text{ph}}^2) \right) \langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x'_1) \dots\} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (2.199)$$

这就是 LSZ 约化公式。它可以说是量子场论中最重要的公式之一。它告诉我们, 如果想要求出 S 矩阵, 就只需要求出 **编时关联函数** $\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x'_1) \dots\} | \Omega \rangle$ 即可。于是我们下面的目标就是求出编时关联函数。利用正则形式理论当然可以求出编时关联函数, 不过由于我不希望将同一件事情在这个 notes 里面写两遍的原因, 我们将在第三章中正式考虑如何在量子场论中求出编时关联函数。

做一个分部积分, LSZ 约化公式也可以写成如下的形式:

$$\begin{aligned} &\left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{k_i^2 + m_{\text{ph}}^2} \right) \left(\prod_{j=1}^{n'} \frac{1}{k'^2 + m_{\text{ph}}^2} \right) \langle k'_1 \dots k'_n | S | k_1 \dots k_n \rangle \\ &= i^{n+n'} \left(\prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{ik_i x_i} \right) \left(\prod_{j=1}^{n'} \int d^4 x'_i e^{-ik'_i x'_i} \right) \langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x'_1) \dots\} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (2.200)$$

等式右边可以认为是关联函数的某种 Fourier 变换。由于 LSZ 约化公式涉及到的动量都是物理粒子的动量, 它们都是 on shell 的, 于是有 $k_i^2 = -m_{\text{ph}}^2$, 此时公式左手边的每个分母都是 0。这给予了 LSZ 约化公式一个新的解释: Fourier 变换后的关联函数在 $k_i^2 = -m_{\text{ph}}^2$ 处有一个多变量的奇点, 在这个奇点处的留数就是 S -矩阵元。也就是说, 关联函数的 Fourier 变换的解析性质蕴含了 S -矩阵的性质!

LSZ Reduction for Higher Spin

我们刚才的讨论很容易就可以推广到自旋 $1/2$ 和自旋 1 的情形。我们只要求出相应的产生湮灭算符在正负无穷时刻的差, 就可以做相应的约化。根据无趣的计算, 我们得到以下的关系:

$$b_{s_1}^\dagger(p_1, -\infty) - b_{s_1}^\dagger(p_1, \infty) = i \int d^4 x \bar{\Psi}(x) (i \overleftarrow{\partial} + m_{\text{ph}}) u_{s_1}(p_1) e^{ipx} \quad (2.201)$$

$$b_{s_1}(p_1, \infty) - b_{s_1}(p_1, -\infty) = i \int d^4 x \bar{u}_{s_1}(p_1) (-i \overrightarrow{\partial} + m_{\text{ph}}) \Psi(x) e^{-ipx} \quad (2.202)$$

$$d_{s_1}^\dagger(p_1, -\infty) - d_{s_1}^\dagger(p_1, \infty) = -i \int d^4 x \bar{v}_{s_1}(p_1) (-i \overrightarrow{\partial} + m_{\text{ph}}) \Psi(x) e^{ipx} \quad (2.203)$$

$$d_{s1}^\dagger(p_1, -\infty) - d_{s1}^\dagger(p_1, \infty) = -i \int d^4x \bar{\Psi}(x) (i \overleftarrow{\partial} + m_{\text{ph}}) v_{s1}(p_1) e^{-ipx} \quad (2.204)$$

$$a_\lambda(k, \infty) - a_\lambda(k, -\infty) = i \int d^4x e^{-ikx} \varepsilon_\lambda^\mu(k) (-\partial^2) A_\mu(x) \quad (2.205)$$

$$a_\lambda^\dagger(k, -\infty) - a_\lambda^\dagger(k, \infty) = i \int d^4x e^{-ikx} \varepsilon_\lambda^{*\mu}(k) (-\partial^2) A_\mu(x) \quad (2.206)$$

这可以告诉我们如何去约化一个单粒子产生湮灭算符。仿照上面的流程，我们只需要在 S 矩阵中做替换：

$$b_s^\dagger(p)_{\text{in}} \rightarrow +i \int d^4x \bar{\Psi}(x) (i \overleftarrow{\partial} + m_{\text{ph}}) u_s(p) e^{+ipx} \quad (2.207)$$

$$b_s(p)_{\text{out}} \rightarrow +i \int d^4x e^{-ipx} \bar{u}_s(p) (-i \overrightarrow{\partial} + m_{\text{ph}}) \Psi(x) \quad (2.208)$$

$$d_s^\dagger(p)_{\text{in}} \rightarrow -i \int d^4x e^{+ipx} \bar{v}_s(p) (-i \overrightarrow{\partial} + m_{\text{ph}}) \Psi(x) \quad (2.209)$$

$$d_s(p)_{\text{out}} \rightarrow -i \int d^4x \bar{\Psi}(x) (i \overleftarrow{\partial} + m_{\text{ph}}) v_s(p) e^{-ipx} \quad (2.210)$$

$$a_\lambda^\dagger(k)_{\text{in}} \rightarrow i \varepsilon_\lambda^{*\mu}(k) \int d^4x e^{+ikx} (-\partial^2) A_\mu(x) \quad (2.211)$$

$$a_\lambda(k)_{\text{out}} \rightarrow i \varepsilon_\lambda^\mu(k) \int d^4x e^{-ikx} (-\partial^2) A_\mu(x) \quad (2.212)$$

就可以得到 S 矩阵元和编时关联函数的相应的变换关系。当然这里有一点需要注意，就是为了保证自由场和相互作用场论的产生湮灭算符的归一化相同，我们在标量场论架设了 $\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle = 0$, $\langle k | \phi(x) | \Omega \rangle = e^{ikx}$ 。对于更高自旋的场，我们还需要单粒子态和真空态间的场算符满足自由场论中的关系，这样才能保证自由场和相互作用场论的产生湮灭算符的归一化相同。于是需要要求：

$$\langle \Omega | \Psi(x) | \Omega \rangle = 0, \quad \langle \Omega | A_\mu(x) | \Omega \rangle = 0, \quad (2.213)$$

$$\langle p, s, + | \Psi(x) | \Omega \rangle = 0, \quad \langle p, s, - | \Psi(x) | \Omega \rangle = v_s(p) e^{-ipx} \quad (2.214)$$

$$\langle p, s, + | \bar{\Psi}(x) | \Omega \rangle = \bar{u}_s(p) e^{-ipx}, \quad \langle p, s, - | \bar{\Psi}(x) | \Omega \rangle = 0 \quad (2.215)$$

$$\langle k, \lambda | A_\mu(x) | \Omega \rangle = \varepsilon_{\lambda, \mu} e^{ikx} \quad (2.216)$$

正如我们前面的讨论，为了实现这些要求，需要做重整化。

2.8 The Lehmann-Kallen Spectral Representation

我们之前说，一个粒子的物理质量 m_{ph} 不一定等于 Lagrangian 中的参数 m 。那么如果我们求出了一个理论中的所有关联函数，该怎么求出一个场粒子的物理质量呢？接下来讨论的 **Lehmann-Kallen 谱表示**就给出了这个问题的答案。它告诉我们：一个场的两点关联函数携带了这个场能够激发的多粒子态的静质量、态密度等信息。

我们首先从两点关联函数 $\langle \Omega | T\{\phi(x)\phi(y)\} | \Omega \rangle$ 开始。首先展开编时算符：

$$\langle \Omega | T\{\phi(x)\phi(y)\} | \Omega \rangle = \theta(x^0 - y^0) \langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle \Omega | \phi(y)\phi(x) | \Omega \rangle \quad (2.217)$$

首先考虑第一项。由于就有完备性关系（我们将单粒子态从后面的求和中拿了出来）：

$$1 = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \int \widetilde{dp} |p\rangle\langle p| + \sum_{\lambda} \int \widetilde{dp} |\lambda_p\rangle\langle\lambda_p| \quad (2.218)$$

在两个场之间插入这个完备性关系，得到：

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle &= \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle \langle \Omega | \phi(y) | \Omega \rangle + \int \widetilde{dp} \langle \Omega | \phi(x) | p \rangle \langle p | \phi(y) | \Omega \rangle \\ &\quad + \sum_{\lambda} \int \widetilde{dp} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_p \rangle \langle \lambda_p | \phi(y) | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (2.219)$$

由于关系 $\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle = 0$, $\langle \Omega | \phi(x) | p \rangle = e^{ipx}$, $\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_p \rangle = e^{ipx} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_p \rangle$ ³⁰, 就有：

$$\langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle = \int \widetilde{dp} e^{ip(x-y)} + \sum_{\lambda} \int \widetilde{dp} e^{ip(x-y)} |\langle \lambda_p | \phi(0) | \Omega \rangle|^2 \quad (2.220)$$

我们可以定义一个（多粒子态的）谱密度：

$$\rho(s) := \sum_{\lambda} |\langle \lambda_p | \phi(0) | \Omega \rangle|^2 \delta(s - M_{\lambda}^2) \quad (2.221)$$

其中 M_{λ} 是多粒子态 λ 的物理质量，也就定义为多粒子态 λ 的 $(k^0)^2 - \mathbf{k}^2$ 。那么就可以将上面的表达式写为：

$$\langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle = \int \widetilde{dp} e^{ip(x-y)} + \int_0^{\infty} ds \sum_{\lambda} \int \widetilde{dp} e^{ip(x-y)} \rho(s) \quad (2.222)$$

其中，在这个式子的第一项中的 p 满足 $p^2 = -m_{\text{ph}}^2$ ，第二项中的 p 满足 $p^2 = -s$ 。根据我们在 2.5 节叙述的单粒子态和多粒子态在 E - p 平面上的分布，我们可以知道，在 $s = 4m^2$ 以上会出现连续的多粒子态，从而 $4m^2$ 以上时谱密度是连续的。而我们的理论中还可以有能量低于 $4m^2$ 的束缚态。这些束缚态就对应谱密度 $s < 4m^2$ 时出现的 delta 函数项。

通过将这个式子代入两点关联函数的表达式，再利用我们在 2.1 节就推导出的公式：

$$i\theta(x^0 - y^0) \int \widetilde{dp} e^{ip(x-y)} + i\theta(y^0 - x^0) \int \widetilde{dp} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (2.223)$$

如果定义 $\tilde{\Delta}(k^2)$ 是 $\Delta(x-y) = i\langle \Omega | T\{\phi(x)\phi(y)\} | \Omega \rangle$ 的 Fourier 变换³¹，我们就能得出最终的结果：

$$\tilde{\Delta}(k^2) = \frac{1}{k^2 + m_{\text{ph}}^2 - i\varepsilon} + \int_0^{\infty} ds \rho(s) \frac{1}{k^2 + s - i\varepsilon} \quad (2.224)$$

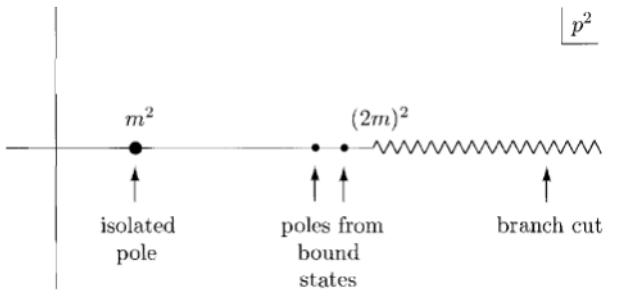
³⁰这里的 4 动量都是 on shell 的，并且质壳关系中的质量就是这个多粒子态的物理质量。

³¹这个 Fourier 变换是一个标量函数，并且应该只和 k 有关。当需要从 k 中构造出一个标量函数时，这个标量函数一定就是 k^2 的函数。于是我们才将这个量写作 $\Delta(k^2)$ 。

将束缚态的贡献分离出来，也就有：

$$\tilde{\Delta}(k^2) = \frac{1}{k^2 + m_{\text{ph}}^2 - i\varepsilon} + \sum_{\text{bound state}} \frac{|\langle \text{bound state} | \phi(0) | 0 \rangle|^2}{k^2 + m_{\text{bound}}^2 - i\varepsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} ds \rho(s) \frac{1}{k^2 + s - i\varepsilon} \quad (2.225)$$

这告诉我们，动量空间中的两点关联函数³²具有一系列极点，每一个极点都对应一个单粒子态或者束缚态。这些极点的位置就是 $k^2 = -m^2$ ，其中 m 是这些态的静止质量。在 $k^2 < -4m^2$ 处还有一条割线，对应多粒子态。于是在复平面上的解析结构如下图所示³³。



有了这些信息，我们就能回答这一节最开始的问题：如果我们想要求出一个相互作用场论中粒子的物理质量，就可以先求出这个理论中的两点关联函数，然后分析其极点，从极点的位置中就可以得出粒子的物理质量。原则上这样的分析还可以求出这个理论中所有的束缚态，不过事实上，由于对于大部分的相互作用场论，我们只能微扰的去求解这些理论中的量。而束缚态这种非微扰的性质是在微扰展开中求不出来的。于是微扰论中的动量空间两点关联函数中可能只有单粒子态的极点。

³²在下一章我们会看到，这个函数也叫“正规传播子”。

³³图截自 Peskin，这本书和我们用的度规是相反的，所以在我们的记号下，图上的极点位置应该关于虚轴做一个对称。

Chapter 3

Quantum Fields: Path Integral Formalism

3.1 Why We Need Path Integral?

这一章我们谈论路径积分量子化。这是一套和上面所描绘的正则量子化完全平行的一个建立量子场论的方式。

当我们在里谈到“用量子化建立量子场论”的时候，必须说明一下，究竟什么叫做量子化，什么又是一个量子场论。为了说明这个问题，就需要先明白什么是一个量子的理论。量子理论和经典理论的最大区别在于概率和态叠加原理——从一个态出发，经过一定的演化，有概率能得到另一个态。并且体系也不一定仅仅处于一个态，而可以处于两个态的叠加态上。为此我们对系统的每个时刻和位形 q_α 都定义一个“态” $|q, t\rangle$ ¹²，令所有可能存在的位形对应的态张成一个复线性空间，并在其上定义内积，使不同广义坐标的态两两正交。定义内积后，这个空间就成为了 Hilbert 空间，体系就可以用这个空间中的一个态描述。于是我们说，一个量子的理论就是在这个 Hilbert 空间上的一个理论。当我们说“量子化”的时候，我们实际上是在说，从一个经典理论出发，从广义坐标中定义这样的一个 Hilbert 空间，并且得到这个 Hilbert 空间上的动力学。无论是正则量子化还是路径积分量子化，都是在说确定 Hilbert 空间上的动力学的过程。

知道了什么是量子化和量子的理论，那么什么又是一个量子场论呢？答案很简单：量子场论就是遵循上述运动学的、广义坐标为场 $\phi_\alpha(x)$ 的理论。按照上面这样一个过程，选定一

¹ 顺便说一下，如果用正则形式理论来理解的话，这些态就是 t 时刻所有场算符的共同本征态。我们一直在采用 Heisenberg 绘景，于是这些态是含时的。不过在这里，正则形式理论是定义完这些态，想要给这些态赋予动力学后才出现的。于是“正确的”逻辑顺序应该是先有这些态，后通过这些态上的本征值定义时刻 t 的场算符。

² 这里我们破坏了显式的 Lorentz 协变性：我们其实是对每个同时面 t 上的 $q_\alpha(t)$ 分别定义一个 $|q, t\rangle$ 。并且认为，不同的同时面上的态处于同一个 Hilbert 空间中，它们通过时间演化算符联系起来。而确定这个时间演化算符的过程就是我们说的“确定动力学”。对于量子场论而言，如果我们要保持协变性的定义这个 Hilbert 空间，我们实际上是对每个 Minkowski 空间中的类空超曲面 σ 上的所有场构型 $\phi_\alpha(x_\sigma, \sigma)$ 定义一个态 $|\phi, \sigma\rangle$ 。为了讨论的简便，我们在这里仍然利用同时面来定义 Hilbert 空间。在这一章的最后一节中，我们会回来考虑这个协变的定义方式。

个时刻 t , 我们理论的 Hilbert 空间就是³⁴:

$$\mathcal{H} := \text{span}\{|\phi, t\rangle\} \quad (3.1)$$

其中 $\{|\phi, t\rangle\}$ 是这一时刻上所有可能的场构型 $\phi_\alpha(x, t)$ 对应的态。由于这些态张成了这个 Hilbert 空间, 于是它们当然是完备的, 有关系:

$$1 = \int (\mathcal{D}\phi)_t |\phi, t\rangle \langle \phi, t| \quad (3.2)$$

其中泛函积分测度 $(\mathcal{D}\phi)_t$ 意味着“对所有 t 时刻的场求和”, 我们会在本节后面的讨论中完善这一符号的含义。并且定义两个同一时刻的状态的内积是:

$$\langle \phi, t | \psi, t \rangle = \delta(\phi, \psi) \quad (3.3)$$

这是一个泛函 delta 函数, 它满足:

$$\int (\mathcal{D}\phi)_t \delta(\phi, \psi) F[\phi] = F[\psi] \quad (3.4)$$

完备性和正交性完全刻画了一个特定时刻上状态所满足的关系。为了得到体系的动力学, 我们还需要引入额外的动力学公理。在上面一章中, 我们相当于通过 $\hat{\phi}_\alpha(x, t)|\psi, t\rangle = \psi_\alpha(x, t)|\psi, t\rangle$ 引入了场算符 $\hat{\phi}_\alpha(x, t)$, 并且通过正则量子化的三个公理——场算符满足场方程; 正则对易关系; Poincare 群的 Noether 荷是 Poincare 群在 Hilbert 空间上表示的生成元。有了这三条公理之后, 虽然还不会计算, 但我们能够知道两个不同时刻的状态之间满足什么关系了。这就构建起了 Hilbert 空间上的动力学, 完成了量子化。

既然我们已经有了正则量子化, 那么我们为什么还要介绍一套全新的量子化方式呢? 这一定是因为正则量子化有某些重大的缺陷, 导致我们将理论发展到某一个阶段的时候, 发现这个缺陷使得我们寸步难行。对于正则量子化而言, 这个发展阶段就是非 Abel 规范场的量子化。我们在上一章中看到了 Abel 规范场, 也就是电磁场的量子化。正如我们所见, 这个过程的第一步就是选择一个规范来消去冗余的自由度。这个规范同时也是对场的一个约束条件。对于电磁场而言, 我们可以选择一些特定的规范来使得这个约束下的量子化变得容易, 但是对非 Abel 规范场, 这种规范的选择是做不到的。从而对非 Abel 规范场做正则量子化的过程是极端困难的。

而利用我们这一章讨论的路径积分量子化而言, 排除规范带来的冗余自由度是一个相对简单的过程。这就是路径积分量子化相对正则量子化的最大优点。在这一点之外, 路径

³ 你可能会问: 我们对每一个时刻定义了一个 Hilbert 空间, 那么不同时刻的 Hilbert 空间相同么? 答案是肯定的。首先由于我们考虑的理论都具有 Poincare 对称性, 于是对场的约束都不随着时间变化, 从而每一个不同时刻上的 Hilbert 空间是等大的。于是可以说, 不同时刻的场构型相当于在 Hilbert 空间中选择了不同的基。至于这些基的内积是什么, 这就不是“运动学”, 而是动力学所描述的范畴了。

⁴ 其实这里的讨论不是很严格: 这个 Hilbert 空间显然是不可数维的, 而前面的讨论中考虑的空间是 Fock 空间, 它是可数维的, 从而这个大的空间肯定不是我们之前考虑的 Hilbert 空间。事实上, 在不可数维的 Hilbert 空间中, 我们许多熟悉的结论都会坏掉。修好这件事情的方法就是: 考虑一个特定的态, 例如真空态 $|\Omega\rangle$ (它可以被定义为 Hamiltonian 算符的最低能量的本征态, 你很快就会看到路径积分理论中如何定义 Hamiltonian 算符), 并且将场算符的多项式 (及其极限, 例如场算符的积分和导数) 构成的代数称为 \mathcal{A} , 那么我们真正考虑的 Hilbert 空间其实是 $\mathcal{A}|\Omega\rangle$, 它是 $\text{span}\{|\phi, t\rangle\}$ 的子空间。这个空间中包含一切我们感兴趣的态, 我们感兴趣的一切算符也都是这个空间上的算符。由于场算符的多项式空间是可数维的, 从而这个子空间自然也是可数维的。事实上, 前面讨论中的 Fock 空间也就是这个子空间。

积分量子化还有其他的优点，例如它保持了我们理论中显式的 Lorentz 不变性。在正则量子化的框架下，如果需要引入一个正则对易关系，就需要定义广义动量，这将时间和空间以一种粗暴的方式分离开来，十分的不优雅。而我们会看到，在路径积分量子化的每一步中，时间和空间在理论中的地位都是相同的。在操作上，路径积分量子化中定义微扰论的程序也相对正则量子化简单——我们只需要将微扰项提出泛函积分就做完了微扰论。

从现代物理学的角度来看，路径积分也是更自然的。我们在第一章中曾给出，现代物理的三个核心要素是：

- 体系的演化可以通过构型空间中的一个路径给出。
- 物理体系的动力学可以通过路径的泛函——作用量来描述。
- 作用量可以通过少数一般性原理来给出。

在经典物理学中，第二个核心要素的具体表述就是最小作用量原理。而当我们踏入量子物理学时，我们就更希望追求和“路径”的概念具有更大关联的动力学原理。这也是路径积分量子化相较于正则量子化的一个优雅之处。

当然，路径积分相对正则量子化有这么多优点，并不意味着路径积分是一个正则量子化的“上位替代”。如果路径积分在所有的地方做的都比正则量子化更好，我们就不用在前面费尽周章的讨论那么多正则量子化了。路径积分虽然优雅，但是难以对一个单粒子态或多粒子态进行描述。这使得利用路径积分体系难以刻画散射问题。从而为了解释散射实验，我们仍然需要正则体系的帮助。这也就是为什么需要在下一节先给出路径积分和正则体系的等价性的原因。

接下来，我们就来给出路径积分量子化的基本原理——**路径积分原理**⁵⁶：

The Principle of Path Integral

对于一个体系，如果其 t_a 时刻处于广义坐标为 x_a 的态上，那么在 t_b 时刻，从这个态演化到广义坐标为 x_b 的态的概率幅是：

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle = \sum_{\substack{\text{all possible paths } x(t) \\ \text{satisfies } x(t_a) = x_a, x(t_b) = x_b}} \exp(iS[x(t)]) \quad (3.5)$$

也就是说，每一条路径都对这个传播振幅有一个相因子 e^{iS} 的贡献，其中 S 是这条路径的作用量。当我们考虑了以这两个构型为起止点的所有可能的路径时，这些相因子相干叠加，最终合成为这两个构型间的传播振幅。

⁵更加严格的路径积分需要利用 Hamiltonian 定义。但是对于我们的理论中所考虑的体系，也就是 Hamiltonian 是广义动量的二次型的体系而言，这个路径积分就足够了。我们在这里不给出前者的原因是，路径积分在这里是作为公理存在的，而利用 Hamiltonian 定义路径积分的 motivation 需要等到证明路径积分和正则量子化的等价性时才能明确的给出。

⁶上面提到，在我们熟悉的正则体系中，这些态是 Heisenberg 绘景算符 $q(t)$ 给出的基矢量，从而是含时的。此时这个传播振幅就是演化算符的矩阵元。如果我们将其转换到 Schrodinger 绘景，就有 $\langle q_1, t_1 | q_2, t_2 \rangle = \langle q_{1,S} | e^{-iH(t_1-t_2)} | q_{2,S} \rangle$ 。从此也可以看到，路径积分原理给出了不同的时间中的态之间的联系。

有了路径积分原理后，我们再回来看现代物理学的核心要素。这三条核心要素的前两条可以被理解为一个“理论生成器”：输入一个作用量，输出一个理论。第三条更像是一个“理论筛选器”，它筛选掉了作用量的来源不够“基本”的那些理论。我们现在已知的“理论生成器”其实只有两个型号——“经典理论”和“量子理论”。经典理论中，输入一个作用量，就可以用最小作用量原理来求出物理的路径。而在量子理论中，输入一个作用量，就可以通过考虑所有路径的相干叠加来给出体系演化到一个状态的概率。

回来看路径积分原理本身，我们发现：仅仅有这个表述是还不够的，其原因是并没有真正定义一个“对所有可能的路径的求和”。两个场构型之间的路径当然有无穷多条，我们该如何遍历这无穷多条路径呢？为此我们先将时间区间 $[t_a, t_b]$ 划分为 N 个格点。其具体划分方式就是定义 $(t_b - t_a)/N = \Delta t$, $t_m := t_a + m\Delta t$ 。从而就有了一系列 $t_a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_b$ 。

我们希望对所有路径求和。在我们这个格点上的体系而言，一条路径就是 $d(N-1)$ 个不同的值 $x_\alpha(t_m)$ (其中 d 是自由度数， α 是我们用来区分广义坐标的 index)。从而对所有不同的这 $d(N-1)$ 个值求和就意味着对这些 $x_\alpha(t_m)$ 积分。于是对于这个格点上的体系，有：

$$\sum_{\substack{\text{all possible} \\ \text{paths } x(t)}} = n(N) \int \prod_{\alpha=1}^d \prod_{m=1}^{N-1} dx_\alpha(t_m) \quad (3.6)$$

其中 $n(N)$ 是一个和 N 有关的归一化因子。定义一个泛函积分测度：

$$\mathcal{D}x := \lim_{N \rightarrow \infty} n(N) \prod_{m=1}^{N-1} \prod_{\alpha} dx_\alpha(t_m) \quad (3.7)$$

从而，我们可以将路径积分原理写为：

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle = \int \prod_{\alpha=1}^d \mathcal{D}x \exp(iS[x(t)]) \quad (3.8)$$

直到这里，我们已经明白了一个有限自由度系统的的路径积分该如何表述。但由于我们研究的是一个场论，是一个具有无穷自由度 $\phi(x, t)$ 的系统。需要再额外做些工作。为了数清自由度数目，除去将时间划分为格点之外，我们还需要将空间装在盒子里，再划分为格点。这些措施的最终结果就是将时空划分为 N 个格点 x_i (这也被称为“**格点正规化**”，我们在第五章中会看到这个名字的含义)。从而对于单个的场而言，如果定义场的泛函积分测度为⁷：

$$\mathcal{D}\phi := \lim_{N \rightarrow \infty} n(N) \prod_{i=1}^N \prod_{\alpha} d\phi_\alpha(x_i) \quad (3.9)$$

可以看到，这个措施也统一了时间和空间的地位。于是对于一个有 d 个场 ϕ_α 的体系而言，路径积分原理的表述就是：从 t_a 时刻的场构型 ϕ_a 出发，演化到 t_b 时刻，场位于场构

⁷对于路径积分原理中的泛函积分测度，我们对两个同时面之间所有点的场做积分；而对于前面所提到的完备性关系中的泛函积分测度，我们对所有这一时刻的场做积分。

型 ϕ_b 的概率幅就是⁸:

$$\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = \int \prod_{\alpha=1}^d \mathcal{D}\phi_\alpha \exp \left(i \int_{t_a}^{t_b} d^4x \mathcal{L}(\phi) \right) \quad (3.10)$$

在接下来的几节中，我们就利用这个表达式建立起整个量子场论。

3.2 Canonical Formalism From Path Integral Principle

我们在这一章中的最终目标是从路径积分中得到 S-矩阵。有了 S-矩阵，就可以对散射实验做预言。不幸的是，从场构型中直接刻画一个自由多粒子态是一个比较困难，并且十分不直观的事情。所以为了解释散射实验，我们还是需要正则体系来构建散射理论。为了这个目的，需要先证明路径积分量子化和正则量子化的等价性。我们在这一节先跟随 Dyson 的脚步，从路径积分中推导出正则体系，而后在本章的末尾，会从正则体系中推导出路径积分。

The Schwinger Action Principle

首先我们注意到，正则体系是建立在算符上的，而在路径积分中没有任何算符的影子。为此要阐述这两个体系的等价性，需要在路径积分体系中定义算符。而我们知道，对于一个 Hilbert 空间上的算符，如果我们知道了一个算符的所有矩阵元，就其实知道了这个算符。如果一个由场构建的算符 $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(x, t)$ 是定义在等时面上一点的，那么可以定义对应物理量 $\mathcal{O}(x)$ 的算符的矩阵元是：

$$\langle \phi_a, t | \mathcal{O}(x, t) | \phi_b, t \rangle = \mathcal{O}_{\phi_a}(x, t) \delta(\phi_a, \phi_b) \quad (3.11)$$

其中 \mathcal{O}_{ϕ_a} 指的就是将场 ϕ_a 代入算符的定义中所得的值。有了算符在同一等时面上两个态之间的矩阵元，利用路径积分原理，我们就可以得出算符在两个不同时刻的场构型态之间的矩阵元：

$$\begin{aligned} & \langle \phi_a, t_a | \mathcal{O}(x, t) | \phi_b, t_b \rangle \\ &= \int (\mathcal{D}\phi)_t (\mathcal{D}\phi')_t \langle \phi_a, t_a | \phi, t \rangle \langle \phi, t | \mathcal{O}(x, t) | \phi', t \rangle \langle \phi', t | \phi_b, t_b \rangle \\ &= \int (\mathcal{D}\phi)_t (\mathcal{D}\phi')_t \langle \phi_a, t_a | \phi, t \rangle \langle \phi', t | \phi_b, t_b \rangle \delta(\phi, \phi') \mathcal{O}_\phi(x, t) \\ &= \int (\mathcal{D}\phi)_t (\mathcal{D}\phi)_{\phi, t}^{\phi_a, t_a} (\mathcal{D}\phi)_{\phi, t}^{\phi, t} \exp \left(i \int_t^{t_a} d^4x \mathcal{L}(x) \right) \exp \left(i \int_{t_b}^t d^4x \mathcal{L}(x) \right) \mathcal{O}_\phi(x, t) \\ &= \int (\mathcal{D}\phi)_{\phi_b, t_b}^{\phi_a, t_b} \mathcal{O}_\phi(x, t) \exp \left(i \int_{t_b}^{t_a} d^4x \mathcal{L}(x) \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中我们用了符号 $(\mathcal{D}\phi)_{\phi_b, t_b}^{\phi_a, t_b}$ 来标记具有特定起止点的泛函积分。而在等式右边的泛函积分中的 $\mathcal{O}_\phi(x)$ 意味着我们所选定的这个路径上算符 $\mathcal{O}(x)$ 的取值。当然，对于并不定义

⁸和上面的附注一样，如果要保持显式的 Lorentz 协变性，我们可以在一个 Minkowski 空间中的类空超曲面 σ_a, σ_b 上定义场构型 ϕ_a, ϕ_b ，将等式右边的积分区域改为这两张超曲面所围的 Ω 。我们这里的定义相当于将这两张超曲面取做了两个等时面。

在某个特定时空点上的算符，例如某些场算符对时空的积分，我们也可以利用这一结果定义其矩阵元，同样右边是对应这条选定的路径的 \mathcal{O} 的取值。

为导出正则体系，就需要导出正则体系的一些基本性质。我们在前一章中看到：在自由场论中，如果得到了场方程和正则对易关系，那么这些性质都能通过正则对易关系来导出。而在相互作用场论中，我们还需要额外导出场在 Poincare 群下的变换关系。当我们有了这些关系，再加上相互作用场论的另外几个基本假设，我们就能重现出上一章我们推导出的所有东西。于是我们接下来的任务就是推导正则对易关系和场在 Poincare 群下的变换关系。

如果我们对所有路径，将这个路径上任何一点的场都做改变 $\tilde{\phi}_\alpha(\tilde{x}) = \phi_\alpha(x) + \delta\phi_\alpha(x)$ 。在此之外，我们还对起止的同时面做一个微小改变，使得这两个同时面上有 $\tilde{x}_b = x_b + \delta x_b$, $\tilde{x}_a = x_a + \delta x_a$ ⁹。最后，我们对 Lagrangian 做一个微小改变，使得 $\mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x)$ 。在这些改变下，概率幅 $\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle$ 的改变就是¹⁰：

$$\begin{aligned} \delta\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle &= \delta \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int_{t_a}^{t_b} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right) \\ &= i \int \mathcal{D}\phi \delta \left(\int_{t_a}^{t_b} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right) \exp \left(i \int_{t_a}^{t_b} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

写成算符形式，也就是：

$$\delta\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = i \langle \phi_b, t_b | \delta S | \phi_a, t_a \rangle \quad (3.14)$$

由于这个表达式并不涉及到对路径的无穷求和，作为理论的一个公理而言是更为牢固的。于是 Schwinger 将这个式子作为整个量子场论的公理，这和路径积分原理是等价的。由于这个原因，有些文献将这个式子称为 **Schwinger 作用量原理**。不过在我们的公理体系中，出于一些美学上的原因，我们仍然将路径积分作为整个理论的基本假设。

我们来计算 δS 。其定义为：

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \left(\int_{t_a}^{t_b} d^4x \mathcal{L}(\phi) \right) = \int_{t_a+\delta t_a}^{t_b+\delta t_b} d^4x \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\phi}, \partial_\mu \tilde{\phi}) - \int_{t_a}^{t_b} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \\ &= \int_{t_b} d^3x \mathcal{L} \delta t_b - \int_{t_a} d^3x \mathcal{L} \delta t_a + \int_{t_a}^{t_b} d^4x \left(\delta \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} \delta \phi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial_\mu (\delta \phi_\alpha) \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

注意前一个积分和后一个积分的边界是不同的。由于需要的 $\delta\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle$ 的定义为 $\langle \phi_b, (t_b + \delta t_b) | \phi_a, (t_a + \delta t_a) \rangle - \delta\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle$ 。其中在前一个跃迁振幅中，由于我们对所有路径上的场做了一个操作 $\phi_\alpha(x) = \phi_\alpha(x) + \delta\phi_\alpha(x)$ ，从而做了这个操作后，边界上的场应该变成原来的场加上 $\delta\phi_\alpha$ 。这也就是说，如果我们用上面的第一个泛函积分计算 $\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle$ ，那么实际上计算出的应该是 $\langle (\phi_b + \delta\phi), t_b | (\phi_a + \delta\phi), t_a \rangle$ 。为得到正确的结果，在上面的计算过程中，边界上的场应该取为 $\phi_a(x) - \delta\phi(x)$, $\phi_b(x) - \delta\phi(x)$ 。

于是，对于 t_a, t_b 两个同时面，就有：

$$\delta\phi_\alpha(x, t_b) = -\delta\phi_\alpha(x) - \partial_\mu(\phi_\alpha) \delta x_b^\mu, \quad \delta\phi_\alpha(x, t_a) = -\delta\phi_\alpha(x) - \partial_\mu(\phi_\alpha) \delta x_a^\mu \quad (3.16)$$

⁹ 改变后，同时面可能会变得不同时。此时路径积分应该利用类空超曲面定义。

¹⁰ 这里和我们在第一章中遇到的变分是不同的。这里的时空不变，而只有我们在时空中积分区域的边界变化。在底下就有 $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$ ，这个式子的成立也是利用了这点。

从而我们可以处理上面的积分式中的最后一项：

$$\begin{aligned} \int_{t_a}^{t_b} d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial_\mu(\delta\phi_\alpha) &= - \int_{t_a}^{t_b} d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \right) \delta\phi_\alpha \\ &\quad + \int_{t_b} d^3x (\pi^\alpha \delta\phi_\alpha - \pi^\alpha \partial_\mu \phi_\alpha \delta x_b^\mu) - \int_{t_a} d^3x (\pi^\alpha \delta\phi_\alpha - \pi^\alpha \partial_\mu \phi_\alpha \delta x_a^\mu) \end{aligned} \quad (3.17)$$

我们最终得到在这些变化下作用量的变化：

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_b} d^3x \mathcal{L} \delta t_b - \int_{t_a} d^3x \mathcal{L} \delta t_a + \int_{t_a}^{t_b} d^4x \left(\delta \mathcal{L} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \right) \delta\phi_\alpha \right) \\ &= \int_{t_a}^{t_b} d^4x \left(\delta \mathcal{L} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \right) \delta\phi_\alpha \right) \\ &\quad + \int_{t_b} d^3x (\pi^\alpha \delta\phi_\alpha + (\mathcal{L}\eta_\mu^0 - \pi^\alpha \partial_\mu \phi_\alpha) \delta x_b^\mu) - \int_{t_a} d^3x (\pi^\alpha \delta\phi_\alpha + (\mathcal{L}\eta_\mu^0 - \pi^\alpha \partial_\mu \phi_\alpha) \delta x_a^\mu) \end{aligned} \quad (3.18)$$

其实我们可以更进一步：如果我们保持等时面和 Lagrangian，只变化场。并且我们取 $\delta\phi_\alpha$ 在边界上为 0，那么由于我们保持了边界点不变，路径积分不应该发生任何变化。于是有：

$$\delta \langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = 0 = i \int d^4x \langle \phi_b, t_b | \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \right) | \phi_a, t_a \rangle \delta\phi_\alpha \quad (3.19)$$

由于我们可以任意选取 $\delta\phi_\alpha$ 。从而对于任何的两个态，算符 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)}$ 的矩阵元都是 0。从而作为一个算符方程，就有：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} = 0 \quad (3.20)$$

也就是说，在量子理论中，场方程作为一个算符方程仍然是成立的。从而我们可以将算符 δS 写为：

$$\delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L} + \int_{t_b} d^3x (\pi^\alpha \delta\phi_\alpha + (\mathcal{L}\eta_\mu^0 - \pi^\alpha \partial_\mu \phi_\alpha) \delta x_b^\mu) - \int_{t_a} d^3x (\pi^\alpha \delta\phi_\alpha + (\mathcal{L}\eta_\mu^0 - \pi^\alpha \partial_\mu \phi_\alpha) \delta x_a^\mu) \quad (3.21)$$

Axioms of Canonical Formalism

由于正则理论中的公理都是以算符方程的形式写出的，于是如果我们可以将 Schwinger 作用量原理写成算符形式，那么推导出这些算符方程将会简单很多。为此可以考虑矩阵元 $\langle \phi_b, t | \mathcal{O} | \phi_a, t \rangle$ 。由于 \mathcal{O} 既然是个场算符的函数，它一定是定义在某一个同时面上的。我们称这个同时面为定义时刻 t_0 。而考虑的时刻 t 是一个参考时刻。由于我们仅仅定义了 t_0 时刻上算符的矩阵元，于是为了考虑 $\langle \phi_b, t | \mathcal{O}(t_0) | \phi_a, t \rangle$ ，需要回到这个算符的定义时刻。这可以通过插入一组定义时刻上的完备基来实现：

$$\langle \phi_b, t | \mathcal{O} | \phi_a, t \rangle = \int (\mathcal{D}\phi')_{t=t_0} (\mathcal{D}\phi'')_{t=t_0} \langle \phi_b, t | \phi', t_0 \rangle \langle \phi', t_0 | \mathcal{O}(t_0) | \phi'', t_0 \rangle \langle \phi'', t_0 | \phi_a, t \rangle \quad (3.22)$$

如果我们对定义这个算符的同时面做一个变化 $\delta\phi_\alpha, \delta x^\mu$, 且认为 Lagrangian 和参考面 t 不变。那么在这些条件下, 作用量的变分为:

$$\delta S = \int d^3x (\pi^\alpha \delta\phi_\alpha + (\mathcal{L}\eta_\mu^0 - \pi^\alpha \partial_\mu \phi_\alpha) \delta x^\mu) \quad (3.23)$$

利用 Schwinger 作用量原理, 就有:

$$\begin{aligned} \delta\langle\phi_b, t|\mathcal{O}(t_0)|\phi_a, t\rangle &= \langle\phi_b, t|\delta\mathcal{O}(t_0)|\phi_a, t\rangle \\ &= \int (\mathcal{D}\phi')_{t=t_0} (\mathcal{D}\phi'')_{t=t_0} \delta\langle\phi_b, t|\phi', t_0\rangle \langle\phi', t_0|\mathcal{O}(t_0)|\phi'', t_0\rangle \langle\phi'', t_0|\phi_a, t\rangle \\ &\quad + \int (\mathcal{D}\phi')_{t=t_0} (\mathcal{D}\phi'')_{t=t_0} \langle\phi_b, t|\phi', t_0\rangle \langle\phi', t_0|\mathcal{O}(t_0)|\phi'', t_0\rangle \delta\langle\phi'', t_0|\phi_a, t\rangle \\ &= -i \int (\mathcal{D}\phi')_{t=t_0} (\mathcal{D}\phi'')_{t=t_0} \langle\phi_b, t|\delta S|\phi', t_0\rangle \langle\phi', t_0|\mathcal{O}(t_0)|\phi'', t_0\rangle \langle\phi'', t_0|\phi_a, t\rangle \\ &\quad + i \int (\mathcal{D}\phi')_{t=t_0} (\mathcal{D}\phi'')_{t=t_0} \langle\phi_b, t|\phi', t_0\rangle \langle\phi', t_0|\mathcal{O}(t_0)|\phi'', t_0\rangle \langle\phi'', t_0|\delta S|\phi_a, t\rangle \\ &= -i\langle\phi_b, t|\delta S\mathcal{O}(t_0) - \mathcal{O}(t_0)\delta S|\phi_a, t\rangle \end{aligned} \quad (3.24)$$

从而对于一个 Heisenberg 绘景中的算符 $\mathcal{O}(t_0)$, 当我们稍微改变一下这个算符被定义的同时面 t_0 , 将其上的场平移 $\delta\phi$, 并且将这个同时面整体平移 δx^μ 时, 就有:

$$i\delta\mathcal{O}(t) = [\delta S, \mathcal{O}(t)], \quad \delta S = \int_t d^3x (\pi^\alpha \delta\phi_\alpha + (\mathcal{L}\eta_\mu^0 - \pi^\alpha \partial_\mu \phi_\alpha) \delta x^\mu) \quad (3.25)$$

可以看到, 这有着类似于 Heisenberg 方程的形式。我们称之为 Heisenberg 绘景下的 Schwinger 作用量原理。接下来我们就要利用它导出整个正则体系。我们还没有证明的动力学基本假设只有两条: (1) 正则对易关系, (2) Poincare 群下的 Noether 荷是 Poincare 群在 Hilbert 空间上表示的生成元。

先导出第一个基本假设: 正则对易关系。令 $\mathcal{O} = \phi_\alpha(x)$, 并取 $\delta\mathcal{L} = \delta x^\mu = 0$, 并且假设在边界上, 场是不变的。那么就有:

$$\delta S = \int d^3x (\pi^\alpha \delta\phi_\alpha) \quad (3.26)$$

从而, 利用 Heisenberg 绘景下的 Schwinger 作用量原理, 就有 (注意 $\delta\phi_\alpha$ 不是算符):

$$\delta\phi_\alpha(x) = i \int d^3x' [\pi^\beta(x'), \phi_\alpha(x)] \delta\phi_\beta(x') \quad (3.27)$$

于是, 我们得出了正则对易关系:

$$[\phi_\alpha(x), \pi^\beta(x')] = i\delta_\alpha^\beta \delta^3(x - x') \quad (3.28)$$

然后考虑第二个基本假设: Poincare 群下的 Noether 荷是 Poincare 群在 Hilbert 空间上表示的生成元。为此考虑 $\delta\phi_\alpha = 0, \delta\mathcal{L} = 0, \delta x^\mu = a^\mu$ 的情形, 也就是平移。此时作用量的变化量就是:

$$\delta S = \int d^3x (\mathcal{L}\eta_\mu^0 - \pi^\alpha \partial_\mu \phi_\alpha) a^\mu \quad (3.29)$$

从而我们可以得到 Heisenberg 方程:

$$i\partial_\mu \mathcal{O}(x) = [P_\mu, \mathcal{O}(x)] \quad (3.30)$$

于是, 由 Baker-Hausdorff 公式, 有:

$$e^{iP_a} \mathcal{O}(x) e^{-iP_a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} a^{\mu_1} \dots a^{\mu_n} [P_{\mu_1}, \dots [P_{\mu_n}, \mathcal{O}(x)]] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a^{\mu_1} \dots a^{\mu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(x-a) \quad (3.31)$$

再考虑 Lorentz 变换。在 Lorentz 变换下, 不但空间会变化, 而且场也会变化。对于一个无穷小 Lorentz 变换 $\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu$, 就有 $\delta x^\mu = \omega_\nu^\mu x^\nu$, $\delta \phi_\alpha(x) = \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})_\alpha^\beta \phi_\beta$ ¹¹。在这个变化下, 有:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^3x \left(\frac{i}{2} \pi^\alpha \omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})_\alpha^\beta \phi_\beta + T^{0\mu} \omega_{\mu\nu} x^\nu \right) = \int d^3x \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \left(i \pi^\alpha (J^{\mu\nu})_\alpha^\beta \phi_\beta + T^{0\mu} x^\nu - T^{0\nu} x^\mu \right) \\ &= -\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.32)$$

如果算符 \mathcal{O} 在 Lorentz 变换下 form 了某个表示, 这个表示中的算符若为 $\{\mathcal{O}_a\}$, 生成元为 $J_O^{\mu\nu}$, 那么:

$$\delta \mathcal{O}_a(x) = \tilde{\mathcal{O}}_{H,a}(\tilde{x}) - \mathcal{O}_a(x) = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \left(i (J_O^{\mu\nu})_a^b \mathcal{O}_b(x) + (x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu) \mathcal{O}_a(x) \right) \quad (3.33)$$

其中前一项来自于相同位置处的变化, 后一项来自于位置的变化。从而:

$$[\mathcal{O}_a(x), J^{\mu\nu}] = (J_O^{\mu\nu})_a^b \mathcal{O}_b(x) - i (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \mathcal{O}_a(x) \quad (3.34)$$

经过同样的 Baker-Hausdorff 操作就可以说明, 角动量张量的确是 Lorentz 变换的生成元。直到此处, 我们就证明了 Poincare 群下的 Noether 荷是 Poincare 群在 Hilbert 空间上表示的生成元。综合上面的讨论, 我们已经从路径积分中得到了正则理论的所有动力学基本假设, 从而就可以说, 路径积分蕴含正则理论。

3.3 Path Integral Quantization of Scalar Fields

The Generating Functional

虽然路径积分不擅长处理散射问题, 但是接下来我们会看到, 利用路径积分可以轻易的计算编时关联函数。首先, 编时关联函数 $\langle \Omega, \infty | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega, -\infty \rangle$ 是一些定义在不同时空点的算符在两个态间的矩阵元。为了弄明白这在路径积分的框架下究竟如何计算, 首先考虑以下的量:

$$\langle \phi_b, t_b | T\{\mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n)\} | \phi_a, t_a \rangle \quad (3.35)$$

¹¹这和前面所述的在参考时间上变分为 0 的假设矛盾。其原因是这个 Lorentz 变换并不需要是全时空上的 Lorentz 变换。我们实际上只考虑我们关注的同时面, 于是只需要让这个同时面上的变换关系正确即可。

其中 \mathcal{O} 是某些由场构建起来的算符。不失普遍性的，令 $x_1^0 > \dots > x_n^0$ 。那么就有：

$$\begin{aligned}
 & \langle \phi_b, t_b | T\{\mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n)\} | \phi_a, t_a \rangle = \langle \phi_b, t_b | \{\mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n)\} | \phi_a, t_a \rangle \\
 & = \int (\mathcal{D}\phi_1)_{t_1} \dots (\mathcal{D}\phi_{n+1})_{t_{n+1}} \langle \phi_b, t_b | \phi_1, t_1 \rangle \langle \phi_1, t_1 | \mathcal{O}_1(x_1) | \phi_2, t_2 \rangle \dots \\
 & \quad \times \langle \phi_n, t_n | \mathcal{O}_n(x_n) | \phi_{n+1}, t_{n+1} \rangle \langle \phi_{n+1}, t_{n+1} | \phi_a, t_a \rangle \\
 & = \int (\mathcal{D}\phi_1)_{t_1} \dots (\mathcal{D}\phi_{n+1})_{t_{n+1}} (\mathcal{D}\phi'_1)_{t_1 < t < t_b} (\mathcal{D}\phi'_2)_{t_2 < t < t_1} \dots (\mathcal{D}\phi'_{n+1})_{t_a < t < t_{n+1}} \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \\
 & \quad \times \exp \left(i \int_{t_1}^{t_b} d^4x \mathcal{L}(x) \right) \dots \exp \left(i \int_{t_a}^{t_{n+1}} d^4x \mathcal{L}(x) \right)
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

其中我们将 t_i 取为一个满足 $x_{i+1}^0 < t_i < x_i^0$ 的时间， $(\mathcal{D}\phi_i)_{t_i}$ 确定了时间为 t_i 的等时面上的场， $(\mathcal{D}\phi'_i)_{t_i < t < t_{i-1}}$ 就确定了一条起止点为上面所固定的同时面上的场的路径。从而前面的这些泛函积分测度就等于对所有的起止点为 $\phi_b(x, t_b), \phi_a(x, t_a)$ 的路径求和，也就是 $(\mathcal{D}\phi)_{t_a < t < t_b}$ 。后面的所有相因子之积刚好是所确定的路径上的作用量。从而：

$$\langle \phi_b, t_b | T\{\mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n)\} | \phi_a, t_a \rangle = \int (\mathcal{D}\phi)_{t_a < t < t_b} \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \exp \left(i \int_{t_a}^{t_b} d^4x \mathcal{L}(x) \right) \tag{3.37}$$

其中等式右边的 $\mathcal{O}(x)$ 仍然是我们所选定的这个路径上算符 $\mathcal{O}(x)$ 的取值。这个编时算符的存在是因为：要使得后面的所有相因子之积刚好是所确定的路径上的作用量，我们必须要求这些算符是按照时间顺序排列的。

现在就知道了任意两个场构型之间的关联函数该如何写为路径积分。而我们真正想要求出的是正负无穷时刻的真空之间的关联函数。真空态是用能量最低的态所定义的，它并不好用场构型写出，于是我们并不知道真空态有关的东西该如何写成路径积分的形式。为此可以有以下的小 trick：如果需要考虑正负无穷时刻间的某个传播振幅，需要取 $\lim_{T \rightarrow \infty}$ 的极限。此时一个场本征态可以用 Heisenberg 绘景中的完备能量本征态展开：

$$\begin{aligned}
 & \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \phi_b, T | T\{\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n\} | \phi_a, -T \rangle \\
 & = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n, n'} \langle \phi_b, T | n \rangle \langle n | T\{\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n\} | n' \rangle \langle n' | \phi_a, -T \rangle \\
 & = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n, n'} \langle \phi_b, 0 | e^{-iE_n T} | n \rangle \langle n | T\{\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n\} | n' \rangle \langle n' | e^{-iE_{n'} T} | \phi_a, 0 \rangle
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

在第二个等号处，我们利用了 Heisenberg 绘景中基矢量按照符号相反的 Hamiltonian 演化这一事实。我们的 trick 就是，通过稍微改变一下 Lagrangian，从而对场的 Hamiltonian 添加上一个微小的虚部，使得 $H_\epsilon = H(1 - i\epsilon)$ 。此时对于所有的 $E_{n'} \neq E_\Omega$ 而言，由于就有一个相对的指数压低 $\exp(-\epsilon(E_n - E_\Omega)\infty)$ ，从而贡献为 0。这就说明只有能量最低的态，也就是真空，才可以对这个展开有贡献。于是我们就得到了¹²：

$$\begin{aligned}
 & \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \phi_b, T | T\{\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n\} | \phi_a, -T \rangle \\
 & = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n, n'} \langle \phi_b, 0 | e^{-iE_n T(1-i\epsilon)} | n \rangle \langle n | T\{\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n\} | n' \rangle \langle n' | e^{-iE_{n'} T(1-i\epsilon)} | \phi_a, 0 \rangle \\
 & = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \Omega | T\{\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n\} | \Omega \rangle e^{-2iE_\Omega T(1-i\epsilon)} \langle \phi_b, 0 | \Omega \rangle \langle \Omega | \phi_a, 0 \rangle
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

¹²这其实也就是在说，在这个 trick 下，任何一个态在渐进时刻都以某种方式趋近于真空。

倘若我们不在这两个态之间插入任何的算符，根据和上面相同的推导，就有：

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \langle \phi_b, T | \phi_a, -T \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \Omega | \Omega \rangle e^{-2iE_\Omega T(1-i\varepsilon)} \langle \phi_b, 0 | \Omega \rangle \langle \Omega | \phi_a, 0 \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-2iE_\Omega T(1-i\varepsilon)} \langle \phi_b, 0 | \Omega \rangle \langle \Omega | \phi_a, 0 \rangle\end{aligned}\quad (3.40)$$

于是，关联函数就可以用这两者之商表达出来：

$$\langle \Omega | T\{\mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n)\} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle \phi_b, T | T\{\mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n)\} | \phi_a, -T \rangle}{\langle \phi_b, T | \phi_a, -T \rangle} \quad (3.41)$$

根据路径积分原理，这就能用路径积分写为：

$$\langle \Omega | T\{\mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n)\} | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \exp [i \int d^4x \mathcal{L}_\varepsilon]}{\int \mathcal{D}\phi \exp [i \int d^4x \mathcal{L}_\varepsilon]} \quad (3.42)$$

其中 \mathcal{L}_ε 就是取 $H(1 - i\varepsilon)$ 对应的 Lagrangian。为了记号上的方便，我们在下面的讨论中将不直接写出这个 \mathcal{L} 的角标 ε 。如果没有特殊的说明，当考虑涉及到真空的路径积分时， \mathcal{L} 都应该加上这个 ε 。这个式子还有一个小问题，就是虽然没有详细写出，但是这个等式中，每个路径的起点和终点都应该是渐进时刻中的一个固定的场 ϕ_a, ϕ_b 。为了将起止点扩充为所有可能的场，可以在分子、分母上一齐作用 $\int (\mathcal{D}\phi_a)_{-T} (\mathcal{D}\phi_b)_T$ 。由于对于任何的 ϕ_a, ϕ_b ，这个比值都是左手边这个和 ϕ_a, ϕ_b 无关的东西，于是一齐作用这个泛函积分不改变这个比值。从而就可以说，这个等式中的泛函积分是不限制起止点的， $\mathcal{D}\phi$ 中的路径就是所有起止点之间的所有可能的路径。

为了计算关联函数，可以引入以下的量：

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^4x (\mathcal{L}(x) + J(x)\phi(x)) \right) \quad (3.43)$$

这个量在理论中的地位十分重要，为此我们给这个量一个名字——**生成泛函**。生成泛函就是一个量子场论的特性函数，如果我们得到了一个理论的生成泛函，那么就能从中得到所有的关联函数。为了从生成泛函中得到关联函数，我们引入一个运算，称为**泛函导数**，其定义为：

$$\frac{\delta f(y)}{\delta f(x)} = \delta^4(x - y) \quad (3.44)$$

可以将这个理解为 $\partial x^\mu / \partial x^\nu = \delta_\nu^\mu$ 的一个无穷维推广。除了这个关系之外，我们要求这个泛函导数具有导数的大部分性质，例如线性，Leibnitz 律和链式法则¹³。如果我们对生成

¹³和普通导数的链式法则有一点点差异。泛函导数的链式法则是：

$$\frac{\delta f(x)}{\delta g(y)} = \int d^4z \frac{\delta f(x)}{\delta h(z)} \frac{\delta h(z)}{\delta g(y)} \quad (3.45)$$

泛函作用一个 $J(x_0)$ 的泛函导数, 就会得到:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{\delta J(x_0)} Z[J] &= \frac{\delta}{\delta J(x_0)} \int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left(i \int d^4x (\mathcal{L}(x) + J(x)\phi(x)) \right) \\
 &= \int \mathcal{D}\phi(x) \frac{\delta}{\delta J(x_0)} \exp \left(i \int d^4x (\mathcal{L}(x) + J(x)\phi(x)) \right) \\
 &= i \int \mathcal{D}\phi(x) \left(\frac{\delta}{\delta J(x_0)} \int d^4y (\mathcal{L}(y) + J(y)\phi(y)) \right) \exp \left(i \int d^4x (\mathcal{L}(x) + J(x)\phi(x)) \right) \\
 &= i \int \mathcal{D}\phi(x) \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y \phi(y) \delta^4(x_0 - y) \right) \exp \left(i \int d^4x (\mathcal{L}(x) + J(x)\phi(x)) \right) \\
 &= i \int \mathcal{D}\phi \phi(x_0) \exp \left(i \int d^4x (\mathcal{L}(x) + J(x)\phi(x)) \right)
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

于是可以看出, 生成泛函和编时关联函数之间有以下的联系:

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \right) Z[J] \right]_{J=0} \tag{3.47}$$

这就是我们之前叙述的结论: 只要求出体系的生成泛函, 就可以从中得出所有的关联函数。

Path Integral for Free Scalar Field

接下来, 我们用上面发展的体系去求出自由标量场论的编时关联函数。根据上面的讨论, 需要求出自由标量场论的生成泛函, 它是:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^4x (\mathcal{L}_\varepsilon(\phi, \partial_\mu \phi) + J\phi) \right) \tag{3.48}$$

需要求出 \mathcal{L}_ε 的具体形式。我们知道, 一个自由实标量场的 Hamiltonian 是 $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\phi}\dot{\phi} + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2$ 。如果在其上减去一个 $i\varepsilon$, 也就相当于在 Lagrangian 上加上 $i\varepsilon$, 其效果类似于令 $m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon$ 。于是 \mathcal{L}_ε 就是 $\mathcal{L}_\varepsilon = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}(m^2 - i\varepsilon)\phi^2(x)$ 。从而生成泛函是:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}(m^2 - i\varepsilon)\phi^2(x) + J(x)\phi(x) \right) \right) \tag{3.49}$$

为了求出生成泛函, 我们做一个变换:

$$\phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(k) e^{ikx}, \quad J(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{J}(k) e^{ikx} \tag{3.50}$$

代入, 得到:

$$\begin{aligned}
 Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \right. \\
 &\quad \times \left. \left(-\frac{1}{2} (-k^\mu k'_\mu + m^2 - i\varepsilon) \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}(k') + \tilde{J}(k) \tilde{\phi}(k') \right) e^{i(k+k')x} \right] \\
 &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left(\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(-(k^2 + m^2 - i\varepsilon) \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}(-k) + \tilde{J}(k) \tilde{\phi}(-k) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

我们希望将 J 和 ϕ 分开的写在两项中, 这样含有 J 的项就可以被提出泛函积分外, 而泛函积分中剩下的就是 $J = 0$ 时的生成泛函 $Z[0]$ 。为此做以下的变量替换:

$$\tilde{\psi}(k) := \tilde{\phi}(k) - \frac{1}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} \tilde{J}(k) \tag{3.52}$$

从而:

$$\begin{aligned}
 Z[J] &= \int \mathcal{D}\psi \exp \left(\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(-\tilde{\phi}(k) (k^2 + m^2 - i\varepsilon) \tilde{\phi}(-k) + \tilde{J}(k) \frac{1}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} \tilde{J}(-k) \right) \right) \\
 &= \exp \left(\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{J}(k) \frac{1}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} \tilde{J}(-k) \right) \\
 &\quad \times \int \mathcal{D}\psi \exp \left(\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(-\tilde{\phi}(k) (k^2 + m^2 - i\varepsilon) \tilde{\phi}(-k) \right) \right) \\
 &= Z[0] \exp \left(\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{J}(k) \frac{1}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} \tilde{J}(-k) \right)
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

再对外源做 Fourier 变换, 就得到:

$$Z[J] = Z[0] \exp \left(\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right) \tag{3.54}$$

其中:

$$\Delta_F(x) := \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} \tag{3.55}$$

直到此处, 我们已经求出了生成泛函, 接下来我们只需要从生成泛函中求出关联函数。在我们后面的讨论中会大量的用到自由场论的两点关联函数。它是:

$$\begin{aligned}
 \langle \Omega | T\phi(x_1)\phi(x_2) | \Omega \rangle &= \frac{1}{Z[0]} \frac{1}{i^2} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z[J] \Big|_{J=0} \\
 &= \frac{1}{i^2} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \exp \left(\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right) \Big|_{J=0} \\
 &= \frac{1}{i^2} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2} \right)^n \left(\int d^4x \int d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right)^n \right]_{J=0} \\
 &= \frac{1}{i^2} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left(\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right) \\
 &= \frac{1}{i} \Delta_F(x_1 - x_2)
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

可以看到, 这和我们在上一章中利用正则理论推导的两点关联函数是相同的。

3.4 Path Integral Quantization of Fermion Fields

Calculus of Grassmann Variables

由于自旋-统计定理, 我们只能用反对易关系来量子化旋量场。但是正如我们在这一章的前面所见, 如果我们认为旋量场的分量是复数, 那么得到的正则对易关系并不是反对易的。为了修好这一点, 我们认为: 和标量场不同, 旋量场并不是复数, 而是一种反对称的对象, 称为 **Grassmann 变量**。对于这种反对称的对象, 需要重新考虑它的运算法则才能建立旋量场的路径积分。Grassmann 变量 ψ_i 被定义为这样的一组反对易的对象:

$$\{\psi_i, \psi_j\} = 0 \quad (3.57)$$

由于 Grassmann 变量的反对易性, 对于一个它们的函数 $f(\psi)$, 它的 Taylor 展开一定只有前 n 项, 否则将一定会出现两个相同的 Grassmann 变量出现在同一项中的情形:

$$f(\psi) = a^{(0)} + a_i^{(1)}\psi_i + \frac{1}{2}a_{ij}^{(2)}\psi_i\psi_j + \dots + \frac{1}{n!}a_{i_1i_2\dots i_n}^{(n)}\psi_{i_1}\dots\psi_{i_n} \quad (3.58)$$

其中, 所有的这些展开系数 $a^{(j)}$ 都是指标反对称的。如果我们将 ψ_i 视为空间 V 的基, 将 Grassmann 变量的乘积视为楔积 \wedge , 那么就可以定义一个外代数 $\wedge(V) = \bigoplus_n \wedge^n(V)$, $\wedge^n(V) = V \wedge V \wedge \dots \wedge V$ 。Grassmann 变量的函数就是外代数中的元素。 $\wedge^n(V)$ 中的元素被我们称为一个 **n-形式**。

我们可以在外代数中定义导数算子: $\partial: V \times \wedge(V) \rightarrow \wedge(V)$, 并且要求它满足以下的规律:

- $\partial_{\psi_i}\psi_j = \delta_{ij}$
- Leibnitz 律: $\partial_{\psi_i}(\psi_j \wedge \psi_k) = (\partial_{\psi_i}\psi_j) \wedge \psi_k - \psi_j \wedge (\partial_{\psi_i}\psi_k)$
- 作用在常数上为 0: $\partial_{\psi_i}(a) = 0$

通过这些运算法则, 我们可以知道任意函数对 Grassmann 变量求导的结果:

$$\frac{\partial}{\partial\psi_j}f(\psi) = a_j^{(1)} + a_{ji}^{(2)}\psi_i + \dots + \frac{1}{(n-1)!}a_{j_i_2\dots i_n}^{(n)}\psi_{i_2}\dots\psi_{i_n} \quad (3.59)$$

为了保证连续作用两个不同的导数算子后得到正确的结果, 导数算子也必须是反对易的:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial\psi_i}, \frac{\partial}{\partial\psi_j} \right\} = 0 \quad (3.60)$$

有了这些讨论之后, 可以重新审视一遍上一章中对旋量场的讨论。在那时, 我们涉及到对旋量场的导数的地方是 Euler-Lagrange 方程中的 $\partial\mathcal{L}/\partial\Psi, \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\Psi)$ 。在那时, 我们得到了 $\frac{\partial(i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi)}{\partial(\partial_0\Psi)} = i\bar{\Psi}\gamma^0$ 。而如果利用上面的导数算子的定义, 由于这里涉及到了两个费米场的交换, 从而结果应该是 $\frac{\partial(i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi)}{\partial(\partial_0\Psi)} = -i\bar{\Psi}\gamma^0$ 。这是为什么呢?

答案是，上面介绍的导数都是所谓的**左导数**，它作用在第一个 Grassmann 变量上是正的。这里的导数是**右导数**，也就是 $\bar{\partial}_\Psi$ 。它作用在最右边的 Grassmann 变量上是正的。事实上，不仅这个地方是右导数，在 Euler-Lagrange 方程、正则动量、Noether 定理中的导数都应该是右导数。

我们再考虑对 Grassmann 变量的函数对全空间的积分。定义对变量 ψ_i 的积分算子为 $\int d\psi_i$ ，那么我们希望积分算子满足以下的条件：

- 全微分对全空间积分为 0, $\int d\psi_i \circ \partial_{\psi_i} = 0$
- 定积分的导数是 0, $\partial_{\psi_i} \circ \int d\psi_i = 0$
- 常数可以被提出积分号之外: $\partial_{\psi_i}(f) = 0$ 蕴含 $\forall g \in \wedge(V), \int d\psi_i(fg) = f \int d\psi_i(g)$ 。

我们发现，如果取积分算子就是导数算子，那么上面的条件全都满足。于是定义：

$$\int d\psi_i := \frac{\partial}{\partial \psi_i} \quad (3.61)$$

也就是说，对 Grassmann 变量而言，导数就是积分，积分就是导数。从而就有以下的关系：

$$\int d\psi_i = 0, \quad \int d\psi_i \psi_j = \delta_{ij} \quad (3.62)$$

既然导数算子是反对称的，那么积分算子也是反对称的。如果我们统一将积分号写在一个多重积分的最前面，那么这形式上就看起来是微分 $d\psi_i$ 也是反对称的。

对于一个 n 个 Grassmann 变量的函数，如果我们求 $\int d^n\psi \equiv \int d\psi_n \dots \int d\psi_1$ ，那么就得到：

$$\int d^n\psi f(\psi) = a_{1\dots n}^{(n)} \quad (3.63)$$

由于我们知道，一个 n 维空间 V 生成的外代数 $\wedge(V)$ 中只有一个 n -形式，也就是 $\varepsilon_{i_1\dots i_n}$ 。于是 $a_{i_1\dots i_n}^{(n)} = a\varepsilon_{i_1\dots i_n}$ 。于是就有 $\int d^n\psi f(\psi) = a$ 。

如果考虑一个积分变量的代换，也就是 $\psi_i = J_{ij}\phi_j$ ，那么就有：

$$a_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} \psi_{i_1} \dots \psi_{i_n} = a \varepsilon_{i_1 \dots i_n} J_{i_1, j_1} \dots J_{i_n, j_n} \phi_{j_1} \dots \phi_{j_n} = a (\det J) \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \phi_{j_1} \dots \phi_{j_n} \quad (3.64)$$

于是，就有以下的变量代换关系：

$$\int d^n\psi f(\psi) = (\det J)^{-1} \int d^n\phi f(\phi) \quad (3.65)$$

这和复数的积分相比，Jacobi 行列式从 $\det J$ 变为了 $(\det J)^{-1}$ 。

在后面的计算中，需要考虑 Grassmann 变量的 Gaussian 积分：

$$\int d^n\psi \exp\left(\frac{1}{2}\psi^T M \psi\right) \quad (3.66)$$

利用线性代数的结论, 我们知道任何一个复线性空间的反对称线性算子都有如下的标准型:

$$M' = U^T M U = \begin{pmatrix} 0 & +m_1 & & \\ -m_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

于是, 利用一个变换 $\psi_i = U_{ij}\phi_j$, 上面的积分可以化简为 $(\det U)^{-1} \int d^n\phi \exp\left(\frac{1}{2}\phi^T M' \phi\right)$ 。它可以被拆为若干个积分 $\int d^2\phi \exp\left(\frac{1}{2}\phi^T M_i \phi\right)$ 的乘积。由于 $\phi^T M_i \phi = 2m_i \phi_1 \phi_2$, 于是 $\exp\left(\frac{1}{2}\phi^T M_i \phi\right) = 1 + m_i \phi_1 \phi_2, \int d^2\phi \exp\left(\frac{1}{2}\phi^T M_i \phi\right) = m_i$ 。就有:

$$\int d^n\psi \exp\left(\frac{1}{2}\psi^T M \psi\right) = (\det U)^{-1} \prod_{i=1}^{n/2} m_i \quad (3.68)$$

由于 $M' = U^T M U = \text{diag}(m_1, \dots)$, 就有 $(\det U)^2 (\det M) = \prod_{I=1}^{n/2} m_I^2$, 于是我们知道:

$$\int d^n\psi \exp\left(\frac{1}{2}\psi^T M \psi\right) = (\det M)^{1/2} \quad (3.69)$$

这就是实 Grassmann 变量的 Gaussian 积分。对于 n 个复的 Grassmann 变量, 我们也需要用到以下的复 Gaussian 积分:

$$\int d^n\psi d^n\bar{\psi} \exp(\psi^\dagger M \psi) \quad (3.70)$$

我们可以做变量替换 $\psi = U\phi, \psi^\dagger = \phi^\dagger V$ 来令 M 对角化为 $VMU = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$ (这就是对算子 M 做奇异值分解)。于是我们得到 $\int d^n\psi d^n\bar{\psi} \exp(\bar{\psi} M \psi) = (\det U)^{-1} (\det V)^{-1} \prod_i m_i$, 利用类似的方法就可以得到¹⁴:

$$\int d^n\psi d^n\bar{\psi} \exp(\psi^\dagger M \psi) = \det M \quad (3.72)$$

Path Integral for Free Dirac Field

接下来我们利用 Grassmann 变量的微积分来计算自由 Dirac 场的路径积分。根据路径积分原理, 就有:

$$\langle \Omega, \infty | T\{\mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n)\} | \Omega, -\infty \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \exp[i \int d^4x \mathcal{L}_\varepsilon]}{\int \mathcal{D}\phi \exp[i \int d^4x \mathcal{L}_\varepsilon]} \quad (3.73)$$

我们也可以定义自由旋量场的生成泛函:

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp\left(i \int d^4x (\bar{\Psi}(i\partial - m + i\varepsilon)\Psi + \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta)\right) \quad (3.74)$$

¹⁴顺便说一下, 对复数而言, 这个结果是:

$$\int d^n z d^n z^* \exp(z^* M z) = \frac{(2\pi)^n}{\det M} \quad (3.71)$$

于是, 自由场的关联函数就是:

$$\langle \Omega | T \Psi_{\alpha_1}(x'_1) \dots \Psi_{\alpha_n}(x'_n) \bar{\Psi}_{\beta_1}(x_1) \dots \bar{\Psi}_{\beta_m}(x_m) | \Omega \rangle = \frac{1}{Z[0]} \prod_{i=1}^n \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^{\alpha_i}(x'_i)} \prod_{i=1}^m i \frac{\delta}{\delta \eta_{\beta_i}(x_i)} Z[\eta, \bar{\eta}] \quad (3.75)$$

这里带 bar 的场的符号和不带 bar 的场不同, 是因为对 Grassmann 变量的导数算子的 Leibnitz 律和复数不同。对后面的场作用导数算子会带来额外的符号:

$$\frac{\delta}{\delta \eta(x)} \int d^4y [\bar{\eta}(y) \Psi(y) + \bar{\Psi}(y) \eta(y)] = -\bar{\Psi}(x), \quad \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \int d^4y [\bar{\eta}(y) \Psi(y) + \bar{\Psi}(y) \eta(y)] = +\Psi(x) \quad (3.76)$$

为了求出自由旋量场的关联函数, 我们想要计算出生成泛函具体的形式。为此需要借助 Grassmann 变量的微积分技巧。和本章最开始的讨论一样, 如果我们将时空取为分立的 N 个格点, 那么有:

$$\mathcal{D}\Psi = \lim_{N \rightarrow \infty} n(N) \prod_{i=1}^N \prod_{\alpha=1}^4 d\Psi_{\alpha}(x_i) \quad (3.77)$$

我们可以认为, 生成泛函有以下的形式:

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{i,j=1}^N \prod_{\alpha,\beta=1}^4 d\Psi_{\alpha}(x_i) d\bar{\Psi}^{\beta}(x_j) \times \exp \left(i \sum_{i,j,\alpha,\beta} (\bar{\Psi}^{\beta}(x_j) (i\partial - m + i\varepsilon)_{\beta}^{\alpha} \Psi_{\alpha}(x_i) + \bar{\eta}^{\alpha}(x_i) \Psi_{\alpha}(x_i) + \bar{\Psi}^{\beta}(x_j) \eta_{\beta}(x_j)) \right) \quad (3.78)$$

如果我们记 $M = -i\partial + m - i\varepsilon$, 将其作为一个具有指标 i, j, α, β 的算符 $M_{\beta}^{\alpha}(x_i, x_j)$ 。并且做一个变量代换: $\Psi \rightarrow \Psi - M^{-1}\eta$, $\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} - \bar{\eta}M^{-1}$, 那么利用和上一节类似的 Fourier 操作, 就有:

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \lim_{N \rightarrow \infty} (\det M) \exp \left(i \sum_{i,j,\alpha,\beta} \bar{\eta}^{\alpha}(x_j) (M^{-1}(x_j, x_i))_{\alpha}^{\beta} \eta_{\beta}(x_i) \right) \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{iS(J=0)} \quad (3.79)$$

因子 $\det M$ 和后面的泛函积分乘起来就是 $Z[0]$ 。于是我们最终得到:

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = Z[0] \exp \left(i \int d^4x d^4y \bar{\eta}^{\alpha}(x) S_{\alpha}^{\beta}(x, y) \eta_{\beta}(y) \right) \quad (3.80)$$

其中, $S(x, y)_{\beta}^{\alpha}$ 是算符 $i\partial - m$ 的逆, 它满足:

$$(-i\partial + m - i\varepsilon)_{\alpha}^{\beta} S_{\beta}^{\gamma}(x, y) = \delta^4(x - y) \delta_{\alpha}^{\gamma} \quad (3.81)$$

我们发现, S 是 Dirac 方程的 Green 函数。由于其他参数只和 $x - y$ 有关, $S = S(x - y)$ 。根据生成泛函的形式也可以知道, S 也是自由 Dirac 场的传播子, 也就是 $S(x - y)_{\alpha}^{\beta} = i\langle 0 | T \Psi_{\alpha}(x) \bar{\Psi}^{\beta}(x) | 0 \rangle$ 。

我们剩下的最后一步就是求出算符 $-i\partial + m - i\varepsilon$ 的逆。这也可以通过 Fourier 方法求出。将上面的式子做 Fourier 展开，就得到了：

$$(-i\partial + m - i\varepsilon)_{\alpha}^{\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{S}_{\beta}^{\gamma}(k) e^{ikx} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (\not{k} + m - i\varepsilon) \tilde{S}_{\beta}^{\gamma}(k) e^{ikx} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \delta_{\alpha}^{\gamma} \quad (3.82)$$

我们发现，以下的 S 刚好满足要求：

$$\tilde{S}(k) = \frac{-\not{k} + m}{k^2 + m^2 - i\varepsilon}, \quad S(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \frac{-\not{k} + m}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (3.83)$$

于是，自由 Dirac 场的两点关联函数就是：

$$\langle \Omega | T\{\Psi_{\alpha}(x) \bar{\Psi}^{\beta}(y)\} | \Omega \rangle = \frac{1}{i} S_{\alpha}^{\beta}(x - y) = \frac{1}{i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \frac{(-\not{k} + m)_{\alpha}^{\beta}}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (3.84)$$

3.5 Path Integral Quantization of Gauge Fields

Path Integral in Coulomb Gauge

我们先按照原来的程序计算自由电磁场的路径积分。生成泛函是：

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J_{\mu} A^{\mu} \right) \right] \quad (3.85)$$

将场 A 和外源 J 变换到频域，代入生成泛函，得到：

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[-\tilde{A}_{\mu}(k) (k^2 \eta^{\mu\nu} - k^{\mu} k^{\nu}) \tilde{A}_{\nu}(k) + \tilde{J}_{\mu}(k) \tilde{A}^{\mu}(-k) + \tilde{J}_{\mu}(-k) \tilde{A}^{\mu}(k) \right] \right\} \quad (3.86)$$

按照我们的程序，我们想要通过配方消去等同于无外源时的生成泛函的项。但是在配方的过程中需要对矩阵 $k^2 \eta^{\mu\nu} - k^{\mu} k^{\nu}$ 取逆。而由于 $(k^2 \eta^{\mu\nu} - k^{\mu} k^{\nu}) k_{\nu} = 0$ ，这个矩阵具有零本征值，于是它是不可逆的。

我们来思考这个不可逆性的来源。由于泛函积分测度 $\mathcal{D}A$ 是对所有可能的场的 configuration 积分，而当我们固定一个规范时，很多场的 configuration 是不满足规范条件的，从而是不物理的。在这一个情况下，由于我们取了 Coulomb 规范，于是有 $A^0 = 0, k_{\mu} \tilde{A}^{\mu} = 0$ 。我们发现，如果考虑矩阵 $(k^2 \eta^{\mu\nu} - k^{\mu} k^{\nu}) k_{\nu} = 0$ 的零本征值对应的本征矢量，就会发现这些本征矢量不满足 $k_{\mu} \tilde{A}^{\mu} = 0$ ，也就是说它们是不物理的。

我们可以将 $\mathcal{D}A$ 限制在仅对物理的场，也就是满足 Coulomb 规范的场进行泛函积分（为了区分两个泛函积分测度，我们将这个泛函积分测度记为 $\mathcal{D}A_C$ ）¹⁵。对于满足 Coulomb 规范的场， $P^{\mu\nu} A_{\nu} = k^2 \eta^{\mu\nu} A_{\nu}$ ，于是生成泛函是：

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A_C \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[-\tilde{A}_{\mu}(k) k^2 \eta^{\mu\nu} \tilde{A}_{\nu}(k) + \tilde{J}_{\mu}(k) \tilde{A}^{\mu}(-k) + \tilde{J}_{\mu}(-k) \tilde{A}^{\mu}(k) \right] \right\} \quad (3.87)$$

¹⁵事实上，当我们选定一个规范的时候，并不一定满足这个规范条件的场都是物理的。对于 Coulomb 规范，这个条件恰好成立，于是我们说 Coulomb 规范是一个物理规范。而与之相对的，Lorentz 规范就并不是一个物理规范。这也就是说，满足 Lorentz 规范条件的场不一定都是物理的场。

于是我们看到，在仅考虑物理的场的情况下，算符 $k^2 \eta^{\mu\nu}$ 就是可逆的。类似我们之前的讨论，为了扔掉所有的非真空态的贡献，我们做了替换 $k^2 \rightarrow k^2 - i\epsilon$ ，并且为了拿出无外源时的部分，将场换元为 $A' = A + J/(k^2 - i\epsilon)$ 。于是我们得到：

$$Z[J] = Z[0] \exp \left[\frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{J}_\mu(k) \frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2 - i\epsilon} \tilde{J}_\nu(-k) \right] = Z[0] \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J_\mu(x) \Delta^{\mu\nu}(x - y) J_\nu(y) \right] \quad (3.88)$$

其中：

$$\Delta^{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \frac{\eta^{\mu\nu}(k)}{k^2 - i\epsilon} \quad (3.89)$$

这就是自由电磁场的传播子 $\Delta^{\mu\nu}(x - y) := i\langle \Omega | T A^\mu(x) A^\nu(y) | \Omega \rangle$ 。

The Faddeev-Popov Method

我们已经在 Coulomb 规范下成功对自由电磁场做了路径积分量子化。我们用来消去不满足规范条件的场的手段就是将这些场从泛函积分测度中排除出去。对于 Coulomb 规范，这个排除是简单的，而对其他的规范或其他规范场（例如 QCD 中的非 Abel 规范场），就有一个普遍的方法——Faddeev-Popov 方法可以排除这些不满足规范条件的场。

考虑一个一般的规范条件 $G(A) = 0$ ，例如对于 Lorentz 规范就是 $G[A] = \partial^\mu A_\mu = 0$ 。对于一系列变量 g_i ，就有关系 $\int d^n g \delta^n(g) = 1$ ，做变量替换 $dg_i = \frac{\partial g_i}{\partial a_j} da_j$ ，就有：

$$1 = \left(\prod_i \int da_i \right) \delta^{(n)}(g(a)) \det \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right) \quad (3.90)$$

取指标趋于无穷的极限，并取这个指标为规范项 Γ ， g 为规范条件 $G[A + \partial\Gamma]$ ，就得到了（这里的 δ 可以被理解为在每个 site 上都有一个 delta 函数）：

$$1 = \int \mathcal{D}\Gamma \delta(G(A_\mu + \partial_\mu \Gamma)) \det \left(\frac{\partial G(A + \partial\Gamma)}{\partial \Gamma} \right) \quad (3.91)$$

考虑一个路径积分，在其中插入这个单位算符，就得到了：

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Gamma \exp(iS[A]) \delta(G(A + \partial\Gamma)) \det \left(\frac{\partial G(A + \partial\Gamma)}{\partial \Gamma} \right) \quad (3.92)$$

由于作用量 S 是规范不变的，于是 $S[A + \partial\Gamma] = S[A]$ 。由于确定了 Γ 之后，并且定义 $A_\Gamma := A + \partial\Gamma$ ：

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}A_\Gamma \mathcal{D}\Gamma \exp(iS[A_\Gamma]) \delta(G(A_\Gamma)) \det \left(\frac{\partial G(A_\Gamma)}{\partial \Gamma} \right) \quad (*) \quad (3.93)$$

在进行完这个操作之后，对这个积分有贡献的场就只有 $G(A) = 0$ 的场。

接下来考虑一个特殊的规范： $G(A) = \partial_\mu A^\mu - \omega(x)$ 。此时行列式 $\det \left(\frac{\partial G(A + \partial\Gamma)}{\partial \Gamma} \right) = \det(\partial^2)$ 。虽然现在我们还不会计算这个泛函行列式，但是由于这仅仅是一个和 A, Γ 无关

的算符在这个函数空间上的行列式，于是它显然和 A, Γ 无关，是一个常数因子，于是可以被提取出路径积分之外：

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \det(\partial^2) \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Gamma \exp(iS[A]) \delta(\partial_\mu A^\mu - \omega) = \int \mathcal{D}A \exp(S[A]) \quad (3.94)$$

这里我们重新命名了哑指标 $A_\Gamma \rightarrow A$ 。由于这个关系对于任何的 ω 都成立，于是可以在第二个等号两边同作用 $\int \mathcal{D}\omega \exp \left[-i \int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi} \right]$ ，由于等号右边和 ω 无关，于是这个积分只会贡献一个因子 $N(\xi)$ ：

$$N(\xi) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}A \mathcal{D}\Gamma \exp \left(iS[A] - i \int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi} \right) \delta(\partial_\mu A^\mu - \omega) \quad (3.95)$$

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \propto \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Gamma \exp \left(iS[A] - i \int d^4x \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\xi} \right) \quad (3.96)$$

由后面一项和 Γ 无关，对 Γ 的积分仅仅给出一个无穷大的因子。于是我们发现：可以在 Lagrangian 中加一项 $-\frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\xi}$ 而不改变物理本质。这就摆脱了算符 $k^2 \eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu$ 不可逆的问题。

我们通常选择一个 ξ 的值。这个值的选择并没有任何的物理含义，而确定这个值之后的 Lagrangian 不再是规范不变的。对于量子电动力学，我们所做的这个程序也就相当于在 Lagrangian 中增加一项不蕴含任何物理，但是破坏规范不变性的项来确定一个规范。这也就是我们在第二章中量子化电磁场时引入的规范固定项。

从上面的 Faddeev-Popov 方法中我们看到，规范固定项来自于纯规范，从而也就没有任何的物理含义。规范固定项取这样的一个二次项的原因是：选择规范固定项的操作不应该改变理论的非规范的对称性。而原理论有 $A \rightarrow -A$ 下的对称性，于是我们这个规范固定项应该是偶数次项。如果想要这一项的形式最简单并且可重整，那么就应该取二次项。

Faddeev-Popov 方法在对 U(1) 规范场之外的规范场，如 QCD 中的非 Abel 规范场做路径积分量子化时仍然会用到。对于非 Abel 规范场，我们引入的 Faddeev-Popov 行列式并不是一个常数因子，不能将它吸入泛函积分测度。在我们路径积分量子化非 Abel 规范场时，我们会引入 Faddeev-Popov 鬼场来解决这个问题。

量子场论中所关注的量通常都是关联函数。由于：

$$\langle \Omega | T\{\mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n)\} | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \exp[iS[A]]}{\int \mathcal{D}A \exp[iS[A]]} \quad (3.97)$$

对分子分母中的路径积分，都可以重复这样的操作。不过需要注意的是，对于分子上的路径积分，由于在 (*) 式中需要将所有被积函数的变量从 A 替换为 A_Γ ，于是只有在分子上的每个算符 \mathcal{O}_i 都是规范不变的算符的情形下，这个过程才会在不改变算符 \mathcal{O}_i 的基础上在 Lagrangian 中添加规范固定项。对于规范不变的算符 \mathcal{O}_i ，有：

$$\langle \Omega | T\{\mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n)\} | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \exp \left[iS[A] - i \int \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\xi} \right]}{\int \mathcal{D}A \exp \left[iS[A] - i \int \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\xi} \right]} \quad (3.98)$$

为了计算场的关联函数，就可以定义自由光子场的生成泛函：

$$Z[J] := \int \mathcal{D}A \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu) + J_\mu A^\mu \right) \right] \quad (3.99)$$

经过同样的 Fourier 操作, 就可以得到:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[-\tilde{A}_\mu(k) \left(k^2 \eta^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k^\mu k^\nu \right) \tilde{A}_\nu(k) + \tilde{J}_\mu(k) \tilde{A}^\mu(-k) + \tilde{J}_\mu(-k) \tilde{A}^\mu(k) \right] \right\} \quad (3.100)$$

得到的传播子就是:

$$\tilde{\Delta}^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \left(\eta^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \quad (3.101)$$

注意, 这里的传播子其实并不能写为 $i\langle \Omega | T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\} | \Omega \rangle$, 这是由于算符 A_μ 并不是规范不变的。不过从 R_ξ 规范的眼光看, “真正的” 关联函数只不过是取 $\xi = \infty$ 时的关联函数。在第六章中, 我们会通过 Ward 恒等式证明, S-矩阵和选取的 ξ 是无关的。于是将上面算出的 $\Delta^{\mu\nu}(x - y)$ 当作 $i\langle \Omega | T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\} | \Omega \rangle$ 所算出的 S-矩阵就是正确的 S-矩阵。从而在这个意义上, 就可以说 $\Delta^{\mu\nu}(x - y) = i\langle \Omega | T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\} | \Omega \rangle$ 。

3.6 From Path Integral to Feynman Diagrams

在上面的几节中, 我们从路径积分原理中得出了自由量子场的生成泛函。而我们知道, 为了解释这个世界, 我们还需要考虑量子场之间的相互作用。不幸的是, 对于相互作用的量子场论而言, 我们并不能解析的求解出场的生成泛函, 而是只能借助微扰论来求解。于是在这一节, 我们就来看看如何利用微扰论来求出相互作用场的生成泛函, 又如何从中得出相互作用场的关联函数。在求出关联函数之后, 根据 LSZ 约化公式, 就能得到 S-矩阵元, 从而就能对散射实验进行预言。

在路径积分的框架下, 在自由场论到相互作用场论的过渡时, 我们并不需要做任何额外的基本假设。我们只需要在 Lagrangian 中添加一个相互作用项, 并对这个场论做重整化即可。于是场论的 Lagrangian 可以写成:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{CT}} \quad (3.102)$$

其中 \mathcal{L}_0 就是自由场的 Lagrangian, \mathcal{L}_{int} 是我们添加的相互作用项, 而 \mathcal{L}_{CT} 是由于重整化而多出来的项。这些项被称为抵消项。作为例子, 考虑一个标量场的 ϕ^4 理论。我们所添加的相互作用项是 $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$ 。那么经过重整化之后, 我们理论的 Lagrangian 就是:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{Z_\lambda\lambda}{4!}\phi^4 - \frac{1}{2}(Z_\phi - 1)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(Z_m - 1)m^2\phi^2 \quad (3.103)$$

其中前两项就是自由场 Lagrangian, 第三项是重整化后的相互作用项, 后两项就是抵消项。在重整化的过程中, 我们引入了三个重整化常数 Z_ϕ, Z_m, Z_λ ¹⁶。这些重整化常数到现在为止还是待定的。在后面, 我们会通过一些重整化条件来确定它们。在后面几章的讨论中

¹⁶为什么我们仅仅是引入这三个重整化常数? 按理来说, 如果我们对场做了些平移 $\phi \rightarrow \phi + a$, 应该会出现 $a\phi^3, a^3\phi$ 这些项来。为什么这些项没有在 Lagrangian 中出现呢? 其原因是要求重整化不能改变理论的对称性。原来的理论具有 $\phi \rightarrow -\phi$ 下的对称性, 从而重整后的 Lagrangian 中就必须存在这样的对称性, 于是就不可能出现 ϕ 的奇数次幂的项。

会看到，这些重整化常数不仅让相互作用场具有正确的产生一个粒子的概率，使得相互作用场和渐进场可以拥有相同的真空态之外，它们还可以用来抵消我们理论中出现的紫外发散。由于我们仅仅在 Lagrangian 中加入了一个微扰，于是这些抵消项至少是 $O(\lambda)$ 的。于是我们在仅考虑最低阶的微扰时可以不用考虑抵消项。

根据路径积分原理，这个相互作用场论的生成泛函是：

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{CT}} + J\phi) \right) \quad (3.104)$$

我们希望微扰地求出这个生成泛函。既然路径积分里面的都是数，而不是算符，我们可以对后一部分做 Taylor 展开：

$$Z[J] = \sum_{V=0}^{\infty} \sum_{V_C=0}^{\infty} \frac{1}{V! V_C!} \int \mathcal{D}\phi \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi(x)) \right)^V \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{CT}}(\phi(x)) \right)^{V_C} \exp \left(i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi) \right) \quad (3.105)$$

既然中间的一个算符是一个场算符，于是我们总可以将其写为：

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_{V=0}^{\infty} \frac{1}{V!} \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right)^V \sum_{V_C=0}^{\infty} \frac{1}{V_C!} \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{CT}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right)^{V_C} \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi) \right) \end{aligned} \quad (3.106)$$

而后面一部分就是自由场的生成泛函 $Z_0[J] = \exp \left(\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right)$ 。在对其做 Taylor 展开后，我们就得到：

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_{V=0}^{\infty} \sum_{V_C=0}^{\infty} \sum_{P=0}^{\infty} \frac{1}{V! V_C! P!} \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right)^V \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{CT}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right)^{V_C} \\ &\quad \times \left(\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right)^P \end{aligned} \quad (3.107)$$

这就是生成泛函的微扰展开。对于理论中有多个场的情形，后面一项就是多个自由生成泛函各自展开。接下来，我们就以 ϕ^4 理论为例。对于 ϕ^4 理论而言，这个微扰展开就是：

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_{V=0}^{\infty} \sum_{V_C=0}^{\infty} \sum_{P=0}^{\infty} \frac{1}{V! V_C! P!} \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{Z_\lambda \lambda}{4!} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] \right\}^V \\ &\quad \times \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{2} (Z_\phi - 1) \partial_\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \partial^\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) - \frac{1}{2} (Z_m - 1) m^2 \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^2 \right] \right\}^{V_C} \\ &\quad \times \left[\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]^P \end{aligned} \quad (3.108)$$

为了讨论的简化，我们先仅考虑 $V_C = 0$ 的项。此时，前面的项作用在后面一项上，消去外源 J ，并最终留下传播子。每个传播子联系两个点 x 和 y ，可以用一条连接 x 和 y

的线来表示。对于第一项而言，它相当于将四个传播子的顶点“粘合”起来，留下一个因子 $Z_\lambda \lambda$ (先忽视那些复杂的系数)。这可以用一个四条线的共同顶点来表示¹⁷。而对于剩下的外源，它们一定和一个传播子相联系。于是它们在这个图形表示中就是没有粘合起来的线的终点。于是，上面微扰展开中的每一项都可以被一个图形来表示。这些图就被称为 **Feynman 图**。每一个具有固定 V, P 的项都含有被所有的具有 P 条线和 V 个四条线的共同顶点构成的 Feynman 图，例如下图。

$$\left(i \int d^4x \left(-\frac{\lambda}{4!} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right)^2 \left(i \int d^4y \int d^4z J(y) \Delta_F(y - z) J(z) \right)^5 =$$

安排一下虚数单位 i 的位置，我们就得到：在每个 Feynman 图中，一个四粒子顶点带有坐标 x ，并给出因子 $-iZ_\lambda \lambda$ 。一条线对应着因子 $\frac{1}{i} \Delta_F(x - y)$ ，其中 x 和 y 是其两个端点的坐标。一个线的自由端点（具有自由端点的线称为“外线”）也带有一个坐标，并给出 $iJ(x)$ 。最后，我们对所有坐标积分，就得到了一个 Feynman 图对生成泛函的贡献。

我们再考虑每个 Feynman 图的系数。在上面的讨论中，我们展开中应该还剩下一个因子 $1/(V!P!(4!)^V 2^P)$ 。而在上面的展开中，并不只有这一种收缩方式对应这个 Feynman 图。我们接下来考虑每个 Feynman 图对应的上述展开中的项数。为此我们从展开中的一项出发，对这个项做以下的操作，得到的 Feynman 图给出和原图相同的值：

- 由于我们最终要对所有坐标积分，于是任意置换 V 个顶点上的坐标，得到的 Feynman 图对应相同的值。这给出因子 $V!$
- 由于我们最终要将传播子粘起来，于是传播子的原端点上有什么值并不重要。从而任意置换 P 个传播子对应的项，得到的 Feynman 图对应相同的值。这给出因子 $P!$
- 对于每一个顶点，由于四个泛函导数是全同的，任意交换四个泛函导数的作用顺序不会改变结果。这给出因子 $(4!)^V$
- 由于 Feynman 传播子有性质 $\Delta_F(x - y) = \Delta_F(y - x)$ ，于是对于每一个传播子，交换其两个端点对应的泛函导数，得到的 Feynman 图也对应相同的值。这给出因子 $(2)^P$ 。

于是，考虑了这四种不同收缩对应同一个 Feynman 图的情况后，我们发现：重复计算一个 Feynman 图带来的因子刚好抵消每个 Feynman 图前面所带的因子 $1/(V!P!(4!)^V 2^P)$ 。但是这并不是我们讨论的结束：如果我们在上面进行某个操作后，得到的项和原来的项刚好相同，那么我们就重复计算了这一项。从而，我们再上面的基础上还需要除一个**对称因子**，它是在不考虑所有坐标的积分时仍然使得被积函数保持不变的操作的数量。这可以理解为在每个顶点上带有一个坐标的情况下还保持图不变的操作。而上面的一个一般的操作虽然保持 Feynman 图的值不变，但是改变了被积函数。具体而言，就是：

对称因子的计算规则

¹⁷这个顶点被称为“四粒子顶点”，我们会在考虑 Feynman 规则的时候知道为什么这么称呼。

- 如果一个传播子首尾连在一个顶点上，那么首尾交换后不变，贡献对称因子 2。
- 如果两个点之间连着 n 个全同传播子，那么交换一些传播子不改变被积函数。这贡献对称因子 $n!$ 。
- 如果 Feynman 图具有一个 n 阶旋转轴，那么我们可以将顶点置换为对称操作后的点，这保持图不变。这个轴就贡献对称因子 $n!$ 。类似的，如果 Feynman 图具有一个对称轴，那么这个轴也贡献对称因子 2。

从而，如果将一个 Feynman 图 I 的对称因子记为 S_I ，那么它对生成泛函的贡献就是：

$$Z_I = \frac{1}{S_I} \prod_{\text{Vertices}} \int d^4x (-iZ_\lambda \lambda) \prod_{\text{external}} \int d^4y (iJ(y)) \prod_{\text{propagators}} \frac{1}{i} \Delta_F(z - w) \quad (3.109)$$

相应的，我们只要求出所有 Feynman 图贡献的和，就得到了整个的生成泛函。不过事实上，我们还能更进一步：考虑具有若干个联通部分的 Feynman 图 I ，其中如果有 n 个全同的联通部分，那么这些联通部分之间的置换给出对称因子 $n!$ 。如果这个图有 m 种不同的联通部分 I_1, \dots, I_m ，联通部分 I_i 的重复次数是 n_i 。那么这个图的贡献可以写为：

$$Z_I = \prod_{i=1}^m \frac{1}{n_i!} Z_{I_i}^{n_i} \quad (3.110)$$

如果我们知道了所有的联通图 I_i ，那么每个非联通图都能用一系列 n_i 来标记。生成泛函可以写为：

$$Z[J] = \sum_{\{n_i\}} \prod_{I_i} \frac{1}{n_i!} Z_{I_i}^{n_i} = \prod_{I_i} \sum_{\{n_i\}} \frac{1}{n_i!} Z_{I_i}^{n_i} = \prod_{I_i} \exp(Z_{I_i}) = \exp \left(\sum_{I_i} Z_{I_i} \right) \quad (3.111)$$

如果定义联通的生成泛函：

$$iW[J] := \sum_{\text{connected diag.}} Z_I \quad (3.112)$$

那么就有 $Z[J] = \exp iW[J]$ 。从而我们可以利用这个式子来只考虑联通图的贡献。

我们在上面只考虑了相互作用项 \mathcal{L}_{int} 的贡献。事实上，剩下的抵消项也可以用类似的方法进行处理：一个抵消项在 Feynman 图中对应一个链接两条线的顶点，这个顶点额外给出值 $i \int d^4x (-(Z_\phi - 1)\partial_x^2 + (Z_m - 1)m^2)$ 。其中 ∂_x 对所连接的两个传播子之一作用。于是在重整化的 ϕ^4 理论中，生成泛函就可以通过考虑含有这些线、四粒子顶点、抵消项顶点的所有非真空的联通 Feynman 图来给出。

直到这里，我们就得出了一个利用微扰论来计算相互作用场的生成泛函的方法。接下来

我们就要从这个生成泛函中来求出关联函数。在前面的讨论中，我们得到了：

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle &= \frac{1}{Z[0]} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \right) Z[J] |_{J=0} = \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \right) \exp(iW[J] - W[0]) |_{J=0} \\ &= \sum_{\{i_{j,k}\}} \prod_{j=1}^m \left[\left(\prod_{k=1}^{k_j} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_{i_{j,k}})} \right) (iW[J] - W[0]) |_{J=0} \right] \end{aligned} \quad (3.113)$$

由于 $W[0]$ 就是所有没有外源的联通 Feynman 图，也就是 **真空图**的和，于是这里减去 $W[0]$ 的意义就是扔掉所有真空图的贡献。在最后一个等号处，我们将 $1, \dots, n$ 分成了 m 组 $\{i_{1,1}, \dots, i_{1,k_1}\}, \dots, \{i_{m,1}, \dots, i_{m,k_m}\}$ ，并对所有的可能分组求和。对于有 m 个分组的一项而言，它就是 m 个 Feynman 图的积。回忆我们之所以要求出关联函数，是因为我们希望对散射实验进行描述。而有 m 个分组的一项对应的是 m 个分别的散射过程。由于我们只关心这些粒子被一起散射的过程，这对应 $m=1$ ，也就是所有的泛函导数都作用于 $iW[J]$ 上的一项。为此定义一个 **n 点联通关联函数**：

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle_{\text{conn.}} = \frac{1}{Z[0]} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \right) (iW[J]) |_{J=0} \quad (3.114)$$

考虑单个 Feynman 图对 n 点联通关联函数的贡献。由于在上式中，我们对 J 求了 n 次泛函导数，并最终取了 $J=0$ ，从而只有含有 n 条外线的 Feynman 图对 n 点联通关联函数的贡献非零。对于一个含有 n 条外线的 Feynman 图，这 n 个泛函导数就相当于将每个外线上的因子 $i \int d^4x J(x)$ 变成了一个外线上的坐标 x_i 。也就是说，这一步就相当于对 Feynman 图中所有的外线标记一个坐标。

对于一个图而言，有很多种不同的标记方法。对于相同拓扑的标记方法，它们对 n 点联通关联函数的贡献相同，从而可以合并到一项中。为了求出这一项的系数，需要考虑相同拓扑的标记方式的数量。事实上，这个数量就是交换一系列外源而不改变图的操作数。在上面我们对对称因子的讨论中，我们已经得到：这个操作数就是旋转轴、对称轴所对应的对称因子。于是，对于一个 Feynman 图而言，它对 n 点联通关联函数的贡献就是¹⁸：

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle_{C,I} = \frac{1}{S_{\text{loop},I}} \prod_{\text{Vertices}} \int d^4x (-iZ_\lambda \lambda) \prod_{\text{propagators}} \frac{1}{i} \Delta_F(y - z) \quad (3.115)$$

其中 $S_{\text{loop},I}$ 就是上面讨论中 (1),(2) 两条给出的对称因子。由于这两种情况下，Feynman 图中一定会出现圈，从而称这个对称因子为**圈对称因子**。我们将不包含圈的图称为**树图**。对于树图而言，圈对称因子就是 1。

有了关联函数后，就可以利用 LSZ 约化公式来求出 S-矩阵。由于我们只考虑联通关联函数，这个 S-矩阵中就只有 n 粒子散射的贡献，而没有这 n 个粒子中的若干部分独立散射

¹⁸为了讨论方便，我们仍然没有加上抵消项顶点。

的贡献。对于一个 Feynman 图而言，它对 n 粒子散射的 S-矩阵的贡献就是：

$$\begin{aligned} \langle k'_1 \dots k'_n | S | k_1 \dots k_n \rangle_I = & \frac{1}{S_{\text{loop},I}} i^{n+n'} \left(\prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{ik_i x_i} (-\partial_i^2 + m_{\text{ph}}^2) \right) \\ & \times \left(\prod_{j=1}^{n'} \int d^4 x'_i e^{-ik'_i x'_i} (-\partial_i'^2 + m_{\text{ph}}^2) \right) \prod_{\text{Vertices}} \int d^4 x (-iZ_\lambda \lambda) \prod_{\text{propagators}} \frac{1}{i} \Delta_F(y - z) \end{aligned} \quad (3.116)$$

我们将所有内线上的传播子变换到频域：

$$\begin{aligned} \langle k'_1 \dots k'_n | S | k_1 \dots k_n \rangle_I = & \frac{1}{S_{\text{loop},I}} i^{n+n'} \left(\prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{ik_i x_i} (-\partial_i^2 + m_{\text{ph}}^2) \right) \\ & \times \left(\prod_{j=1}^{n'} \int d^4 x'_i e^{-ik'_i x'_i} (-\partial_i'^2 + m_{\text{ph}}^2) \right) \prod_{\text{Vertices}} \int d^4 x (-iZ_\lambda \lambda) \\ & \times \prod_{\text{external prop}} \frac{1}{i} \Delta_F(y - z) \prod_{\text{internal prop}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} e^{ik(y-z)} \tilde{\Delta}_F(k) \end{aligned} \quad (3.117)$$

对于外线上的传播子，如果外线上标记的坐标是 x_i ，另一端的顶点坐标是 y_α ，那么对这个传播子作用微分算符 $(-\partial^2 + m^2)$ 就得到一个 Delta 函数 $\delta(x_i - y_\alpha)$ ¹⁹。从而前面的每个对外线坐标的积分就剩下下一个因子 $e^{\pm iky_\alpha}$ 。其中入射粒子对应 +，出射粒子对应-。经过这一步后，就剩下：

$$\begin{aligned} \langle k'_1 \dots k'_n | S | k_1 \dots k_n \rangle_I = & \frac{1}{S_{\text{loop},I}} \prod_{\text{Vertices}} \int d^4 y (-iZ_\lambda \lambda) \prod_{\text{in particle}} e^{ik_i y_\alpha} \prod_{\text{out particle}} e^{-ik'_j y_\beta} \\ & \prod_{\text{internal prop}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} e^{ik(y-z)} \tilde{\Delta}_F(k) \end{aligned} \quad (3.118)$$

这相当于在每条线上加上了一个箭头，箭头标记了一个动量。外线上，入射粒子箭头向内，出射粒子箭头向外。箭头上的动量就是这条外线所对应的粒子的动量，每个这样的箭头给出因子 $e^{\pm iky_\alpha}$ 。对于一个内线，如果这个箭头在图中的方向是从顶点 z 到 y ，其上标记的动量是 k ，那么这就给出因子 $e^{ik(y-z)}$ 。于是我们说，对于一个顶点 y 而言，箭头射入这个顶点的动量提供因子 e^{iky} ，射出这个顶点的动量给出因子 e^{-iky} 。最后我们要对所有内线上的动量积分。

在这一步之后，我们对每个顶点积分。由于和每个顶点相关的因子就是 $\exp(i(\sum k_{\text{in}} - \sum k_{\text{out}})y)$ ，于是每个顶点在这一步贡献一个动量守恒因子 $(2\pi)^4 \delta^4(\sum k_{\text{in}} - \sum k_{\text{out}})$ 。

这些动量守恒因子可以通过对内线上的动量做积分来化简。先看树图。对这 $V-1$ 个内线上的积分应该消去了 $V-1$ 个因子 $(2\pi)^4$ ，留下了一个 $(2\pi)^4$ 和一个总体的动量守恒因子 $\delta^4(\sum k_{\text{in}} - \sum k_{\text{out}})$ 。

对于圈图，由于一个图中圈的个数就是图中的内线个数与相同顶点、相同外线数的树图所带的内线个数之差。对于树图，如果有 V 个顶点，那么就只能有 $V-1$ 条内线，否则

¹⁹LSZ 约化公式中的质量是物理质量，而传播子满足的方程中是 Lagrangian 中的参数 m ，是理论的自由质量，它们不一定相同。于是这个推导只在我们选择物理质量和 m 相等的重整化 scheme 下成立。我们在下一节中会给出更广泛适用的（同时也更简单）的公式。

一定形成圈或导致图不联通。并且在 $V-1$ 条线的基础上，每多连一条线，就出现一个圈。从而一个圈图中的圈数就是 $L = P - V + 1$ 。而由于 V 个动量守恒因子仅给出了 $V-1$ 个对内动量的约束，我们并不能完全由外线上的动量和每个顶点上的动量守恒定出圈中的动量。于是在对 $V-1$ 个动量积分，得到 $(2\pi)^4 \delta^4(\sum k_{\text{in}} - \sum k_{\text{out}})$ 后，我们仍然需要对圈上的 $L = P - V + 1$ 个动量做积分。

经过这一系列操作后，S-矩阵中就仅剩下面的项了：

$$\begin{aligned} \langle k'_1 \dots k'_n | S | k_1 \dots k_n \rangle_I &= (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum k_{\text{in}} - \sum k_{\text{out}} \right) \\ &\times \frac{1}{S_{\text{loop},I}} \prod_{\text{loop}} \int \frac{d^4 k_{\text{loop}}}{(2\pi)^4} \prod_{\text{vertex}} (-iZ_\lambda \lambda) \prod_{\text{internal prop}} \frac{1}{i \frac{1}{k^2 + m^2 - i\varepsilon}} \end{aligned} \quad (3.119)$$

在讨论 S-矩阵的时候，定义了一个 Feynman 振幅：

$$S = \mathbb{I} + (2\pi)^4 \delta^4(k_{\text{in}} - k_{\text{out}})(i\mathcal{M}) \quad (3.120)$$

从而，一个 Feynman 图对 Feynman 振幅的贡献就是：

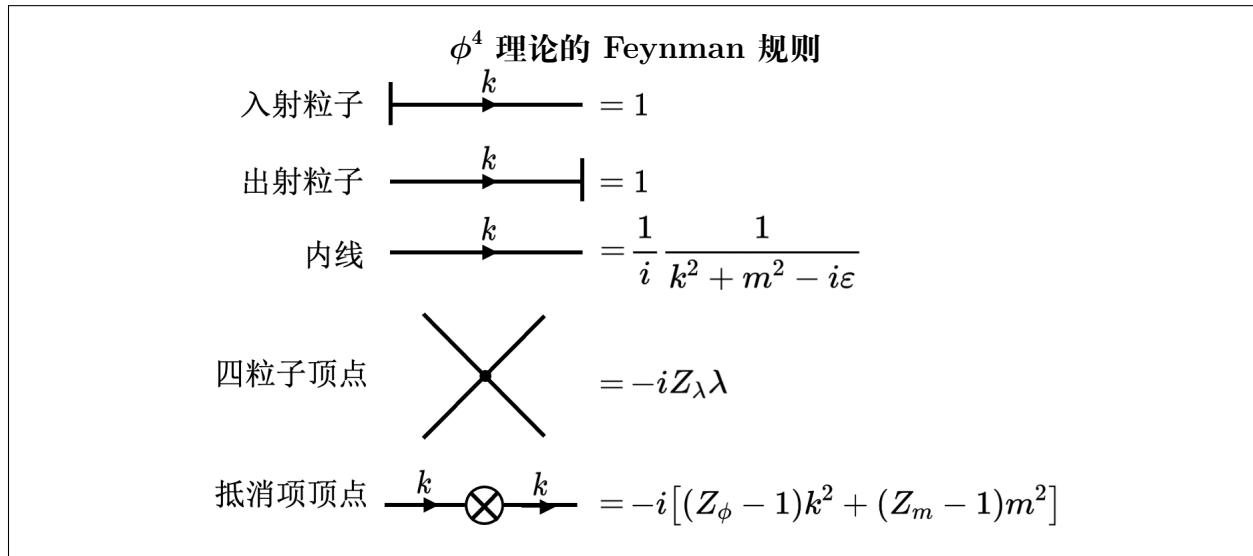
$$i\mathcal{M} = \frac{1}{S_{\text{loop},I}} \prod_{\text{loop}} \int \frac{d^4 k_{\text{loop}}}{(2\pi)^4} \prod_{\text{vertex}} (-iZ_\lambda \lambda) \prod_{\text{internal prop}} \frac{1}{i \frac{1}{k^2 + m^2 - i\varepsilon}} \quad (3.121)$$

如果再考虑上抵消项顶点，这个式子中就需要加上一个因子：

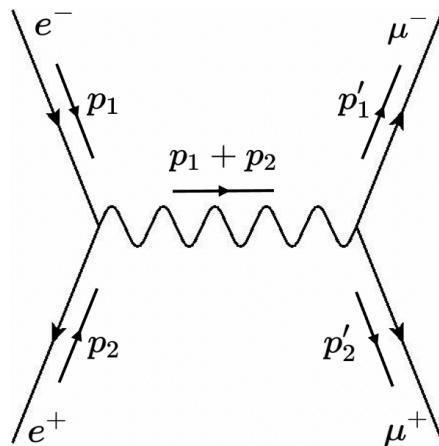
$$\prod_{\substack{\text{counterterm} \\ \text{vertex}}} -i [(Z_\phi - 1)k^2 + (Z_m - 1)m^2] \quad (3.122)$$

综合上面的讨论，如果需要求出 ϕ^4 理论中的一个散射过程的 Feynman 振幅，就有以下的步骤：

- 对于 n 粒子到 n' 粒子的散射过程，首先画出所有包含传播子、四粒子顶点、抵消项顶点的，联通的，含有 $n+n'$ 条外线的 Feynman 图。每一条外线上标记一个出射或入射的粒子，考虑所有拓扑不同的标记方式。
- 在每条入射粒子对应的外线上作一个向内的箭头，出射粒子对应的外线上作一个向外的箭头。并在外线上标记上他们对应的 4-动量。
- 设出每一个圈上的圈动量。通过每个顶点上的 4-动量守恒，得到每条内线上的动量 k 。
- 通过下面的 ϕ^4 理论的 Feynman 规则定出每个图的值，除上这个图对应的圈对称因子，并对所有圈动量积分。所有拓扑不同的 Feynman 图的贡献之和就是整个的 Feynman 振幅 $i\mathcal{M}$ 。



虽然 Feynman 图仅仅是一些计算方法，不蕴含物理实在，但是我们可以给这些计算方法赋予一个物理意义层面的诠释，从而能更加直观的理解这些计算方法。例如量子电动力学中的这样一个 Feynman 图，可以诠释为：一个电子和一个正电子相互湮灭，形成一个虚光子（由于这个光子 off shell，从而是虚的）。这个虚光子又产生一对实的正负 μ 子，被我们探测到。



在赋予 Feynman 图这样的物理诠释后，“对所有 Feynman 图求和”的意义也就清晰了。每个 Feynman 图对 S-矩阵元的贡献是相应过程发生的概率幅，而当我们考虑了所有可能的中间过程时，就能够得到这个过程的总概率幅，从而能计算这个过程发生的概率。

最后回顾一下：在这一节中，我们讨论了许多可以用 Feynman 图计算的量：生成泛函 $Z[J]$ ，联通生成泛函 $W[J]$ ，关联函数 $\langle \Omega | T\{ \dots \} | \Omega \rangle$ 和 Feynman 振幅 $\langle f | i\mathcal{M} | i \rangle$ 。上面的 Feynman 规则给出了如何通过 Feynman 图来求出 Feynman 振幅。对于其他量，它们的“Feynman 规则”有如下不同：

需计算的物理量	Feynman 规则
生成泛函 $Z[J]$	考虑所有图；对所有顶点和外线坐标积分；全部对称因子。
联通生成泛函 $iW[J]$	考虑所有联通图；对所有顶点和外线坐标积分；全部对称因子。
关联函数 $\langle \Omega T\{ \dots \} \Omega \rangle$	外线上标记对应坐标；考虑所有联通图；对顶点坐标积分；圈对称因子。
Feynman 振幅 $\langle f iM i \rangle$	外线上标记对应动量；考虑所有联通图；对圈动量积分；顶点动量守恒；截去外线传播子，用外线因子代替；圈对称因子。

3.7 The Quantum Action

Definition of The Quantum Action

在上面的讨论中，我们已经知道了如何从 Lagrangian 出发，得出这个理论中的散射截面，这已经足够让我们预言散射现象了。不过当需要算到比较高阶的微扰时，对于不同的过程，需要画出具有不同外线的大量圈图，并一个个计算这些圈图的值，这个过程是十分麻烦的。为了简化这个过程，我们希望找到这样的一个场的泛函：如果将这个泛函当作作用量输入我们的“理论生成器”，那么可以得到这个新理论的一系列 Feynman 图。我们只需要对这个新理论的所有树图求和，就可以得到原理论的直到所有阶的微扰结果。

接下来我们就构造出这样一个场的泛函。²⁰我们从联通的生成泛函 $W[J]$ 出发。对一个场 ϕ 而言²¹，定义 J_ϕ 为满足以下式子的外源 J ：

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J_\phi(x)} = \phi(x) \quad (3.123)$$

也就是说， J_ϕ 是当场的真空期待值 $\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle$ 为 $\phi(x)$ 时的外源。有了 J_ϕ ，就可以利用 Legendre 变换来定义一个被称为量子作用量的泛函：

$$\Gamma[\phi] := - \int d^4x \phi(x) J_\phi(x) + W[J_\phi] \quad (3.124)$$

这个量就是上面想要寻找的泛函。也就是说，生成泛函 $Z_\Gamma[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i(\Gamma[\phi] + \int J\phi)}$ 中所有树图贡献之和等于原理论的生成泛函 $Z[J]$ 。为了证明这一点，我们首先需要将从一个生成泛函中将树图的贡献分离出来。为此我们做一个小 trick，恢复指数上和 Planck 常数相关的因子 $1/\hbar$ ：

$$Z_{\Gamma,\hbar}[J] := \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\Gamma[\phi] + \int d^4x J(x) \phi(x) \right) \right] \quad (3.125)$$

恢复这个因子有什么用呢？考虑这个因子对 Feynman 规则的贡献。对于顶点，由于顶点因子就是相应的项的系数，于是因子 $1/\hbar$ 就相当于使顶点因子乘了一个 $1/\hbar$ 。而对于传播子，(动量空间) 它正比于二次项系数的逆，从而因子因子 $1/\hbar$ 就相当于使传播子乘了一个 \hbar 。于是，对于一个有 V 个顶点和 P 个传播子的 Feynman 图而言，这个操作带来了因子 \hbar^{P-V} 。而由于我们之前的讨论，有 $L = P - V + 1$ 。从而生成泛函 $Z_{\Gamma,\hbar}[J]$ 就是：

$$Z_{\Gamma,\hbar}[J] = \exp \left(\frac{i}{\hbar} W_{\Gamma,\hbar}[J] \right) = \exp \left(i \sum_{L=0}^{\infty} \hbar^{L-1} W_{\Gamma}^{(L)}[J] \right) \quad (3.126)$$

²⁰为了讨论的简便，我们仍然在标量场论中讨论问题，但并不局限于 ϕ^4 理论。

²¹这里的场是一个 c -数，而非一个算符。

其中 $W_{\Gamma}^{(L)}[J]$ 就是所有新理论中的联通的、有 n 个圈的 Feynman 图之和。有了这个表达式之后，提取出树图的贡献就很简单了——我们只需要对 $Z_{\Gamma,\hbar}[J]$ 取 $\hbar \rightarrow 0$ 的极限，就只有树图对这个生成泛函有贡献。

事实上，取 \hbar 趋于 0 的过程其实就是取“经典极限”的过程。在这个图像下，只有在 $\frac{\delta}{\delta\phi}(\Gamma[\phi] + \int d^4x J\phi) = 0$ 的解 ϕ_{cl} 附近的场才对路径积分有贡献²²。既然我们只需要考虑这个场附近的积分值，就可以对被积函数在 ϕ_{cl} 附近做展开。这个对路径积分的处理方式被我们称作**鞍点近似**：

$$\begin{aligned} Z_{\Gamma,\hbar}[J] = & \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\Gamma[\phi_{\text{cl}}] + \int d^4x \phi_{\text{cl}}(x) J(x) \right. \right. \\ & + \int d^4x \left(\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} \right)_{\phi_{\text{cl}}} \rho(x) + \int d^4x \rho(x) J(x) \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \left(\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right)_{\phi_{\text{cl}}} \rho(x)\rho(y) + O(\rho^3) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.127)$$

这个式子的第二行是线性项，它可以完全被 ϕ_{cl} 所满足的方程消除掉。而对于第三行中 ρ 的高阶项，我们将要说明它们对新理论的联通生成泛函 $W_{\Gamma,\hbar}$ 的贡献至少是 $O(\hbar^0)$ 的，从而在 $\hbar \rightarrow 0$ 的极限下和 $O(\hbar^{-1})$ 相比都可以忽略。首先由于第一项和 ρ 没有关系，于是这些项对 $W_{\Gamma,\hbar}$ 的贡献可以被写为：

$$\log \left\{ \int \mathcal{D}\rho \exp \left[\frac{1}{2\hbar} \int d^4x d^4y \left(\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right)_{\phi_{\text{cl}}} \rho(x)\rho(y) + O(\rho^3) \right] \right\} \quad (3.128)$$

我们可以做一个变量替换 $\rho = \rho/\hbar^{1/2}$ 来消除掉领头阶项对 \hbar 的依赖性，并且由于这整个式子最终要取一个 \log ，从而这个变量替换产生的额外因子只会给 W 带来一个常数的差别，这是可以忽略的。从而上面这个式子可以被改写为：

$$\log \left\{ \int \mathcal{D}\rho \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \left(\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right)_{\phi_{\text{cl}}} \rho(x)\rho(y) + O\left((\hbar^{1/2}\rho)^3/\hbar\right) \dots \right] \right\} \quad (3.129)$$

可以从这里轻易地看到，指数上的领头阶项是 $O(\hbar^0)$ 的，而后面的修正项至少是 $O(\hbar^{1/2})$ 的。从而在 $\hbar \rightarrow 0$ 的极限下这些项和 $O(\hbar^{-1})$ 相比都可以忽略。从而，在 $\hbar \rightarrow 0$ 的极限下，就有：

$$Z_{\Gamma,\hbar}[J] = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\Gamma[\phi_J] + \int d^4x \phi_J(x) J(x) \right) \right] \quad (\hbar \rightarrow 0) \quad (3.130)$$

通过比较这个式子和关系 $Z_{\Gamma,\hbar}[J] = \exp \left(i \sum_{L=0}^{\infty} \hbar^{L-1} W_{\Gamma}^{(L)}[J] \right)$ ，我们就得到了：

$$W_{\Gamma}^{(0)}[J] = \Gamma[\phi_J] + \int d^4x \phi_J(x) J(x) = W[J] \quad (3.131)$$

这也就证明了我们之前说的结论：如果我们将量子作用量作为一个新理论的作用量，那么新理论的所有树图对生成泛函的贡献之和就是原理论的生成泛函。这告诉我们，如果想

²² ϕ_{cl} 事实上就是给定外源 J 下的经典场。

考虑原理论中的一个过程，可以不考虑原理论中的所有 Feynman 图，而考虑新理论中的所有树图。用这两种方法计算出的关联函数、Feynman 振幅和散射截面都是相同的。这可以很大的方便我们的计算。

除了这个意义之外，量子作用量还有其他的物理意义。考虑量子作用量对场的泛函导数：

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} &= -J_\phi(x) - \int d^4y \phi(y) \frac{\delta J_\phi(y)}{\delta\phi(x)} + \frac{\delta W[J_\phi]}{\delta\phi(x)} \\ &= -J_\phi(x) - \int d^4y \phi(y) \frac{\delta J_\phi(y)}{\delta\phi(x)} + \int d^4y \frac{\delta W[J_\phi]}{\delta J_\phi(y)} \frac{\delta J_\phi(y)}{\delta\phi(x)} = -J_\phi(x)\end{aligned}\quad (3.132)$$

于是，对于 $J_\phi = 0$ 的场，也就是满足 $(\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)})_{J=0} = \phi(x)$ 的场 ϕ 而言，有方程 $\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} = 0$ 。而就有知道， $(\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)})_{J=0}$ 就是场的真空期望值 $\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle \equiv \phi_0(x)$ 。于是我们就得到，场的真空期望值满足方程：

$$\left(\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)}\right)_{\phi=\langle\Omega|\phi|\Omega\rangle} = 0 \quad (3.133)$$

这有什么用呢？注意到，在微扰论中，一个微扰场的真空期望值通常是 0。如果一个场的真空期望值非零，我们就认为理论中有一个经典的外场，我们在这个经典的外场附近做场的微扰展开。于是，上面的方程也就是外场需要满足的场方程。在最低阶下，量子作用量应该就是自由作用量²³，此时的方程就是自由场方程。于是量子作用量的高阶项就给出了外场所满足的场方程的量子修正。

Perturbative Calculations

当然，仅仅是知道量子作用量能做什么是不够的。最重要的还是去求出量子作用量。为此考虑量子作用量的以下展开²⁴：

$$\Gamma[\phi] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (3.134)$$

我们称 $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ 为**正规顶点**，在不久的后面就会看到这个名字的含义。如果我们求出了所有的正规顶点，就相当于求出了量子作用量。求出这些正规顶点的方式很直接，就是通过先通过微扰论求出这个新理论的 Feynman 规则，通过将新理论树图阶的结果和原理论的所有阶的结果相比较。这告诉了我们，有了量子作用量，并不能真正的不计算圈图。而是只需要计算一次这些正规顶点，而不需要遇到一个过程就去算一遍圈图。

由微扰论，我们可以将新理论的生成泛函展开为：

$$\begin{aligned}Z_\Gamma[J] &= \exp \left(i \sum_{n=3}^{\infty} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\phi(x_j)} \right) \right) \\ &\times \int \mathcal{D}\phi \exp \left(\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \phi(x_1) \phi(x_2) \Gamma^{(2)}(x_1, x_2) + i \int d^4x J(x) \phi(x) \right)\end{aligned}\quad (3.135)$$

²³最低阶近似下没有顶点，也就没有圈图，从而量子作用量和自由作用量是相同的。

²⁴关于这个展开的形式，有必要做两点说明：第一，我们的求和是从 $n=2$ 开始的，这意味着我们认为理论中没有经典外场，从而场的真空期望值也就是 0。第二，我们的这个展开中并没有场的导数项，这是因为所有的导数项在 Fourier 变换后都是 k ，这些 k 都可以通过 Fourier 方法吸入 $\Gamma^{(n)}$ 中。

我们先处理后面的“自由”部分。首先我们知道，有 $\Gamma^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2)}$ ，并且有关系 $\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} + J_\phi(x) = 0$ 。我们对后一式求泛函导数：

$$\frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x_1) \delta J_\phi(x_2)} = -\delta^4(x_1 - x_2) \quad (3.136)$$

如下变形：

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \int d^4y \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(y)} \frac{\delta \phi(y)}{\delta J_\phi(x_2)} = \int d^4y \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(y)} \frac{\delta^2 W[J_\phi]}{\delta J_\phi(y) \delta J_\phi(x_2)} \\ &= i \int d^4y \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(y)} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\phi(y)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\phi(y)} \right) i W[J_\phi] \\ &= i \int d^4y \Gamma^{(2)}(x_1, y) \langle \Omega | T\{\phi(y)\phi(x_2)\} | \Omega \rangle_{\text{conn.}} = -\delta^4(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (3.137)$$

如果定义一个正规传播子为²⁵：

$$\Delta(x - y) := i \langle \Omega | T\{\phi(x)\phi(y)\} | \Omega \rangle_{\text{conn.}} \quad (3.138)$$

那么从上面就可以看出，两点正规顶点 $\Gamma^{(2)}(x - y)$ 就是正规传播子的逆，并且只和 x-y 有关。于是新理论的作用量的自由部分就是 $\int \mathcal{D}\phi \exp(-\frac{i}{2} \int \phi(x)\phi(y)\Delta^{-1}(x - y) + i \int J\phi)$ 。经过和我们在 3.3 节中类似的处理，就可以将其变为：

$$\exp \left(\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2) \right) \quad (3.139)$$

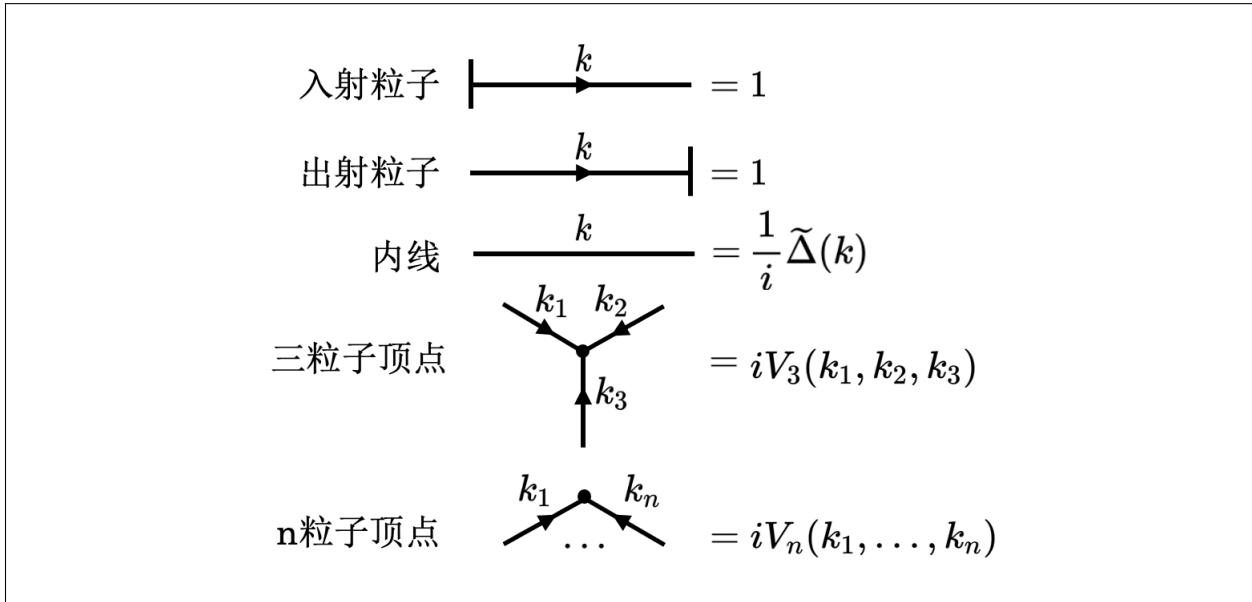
这也就是说，我们的新理论中的传播子就是正规传播子。再看顶点。由于理论的平移不变性，正规顶点一定有形式：

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4k_n}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{i=1}^n k_i \right) V_n(k_1, \dots, k_n) e^{-ik_1 x_1} \dots e^{-ik_n x_n} \quad (3.140)$$

V_n 就是动量空间中的正规顶点。由于我们一般使用动量空间中的 Feynman 规则，故之后我们再谈及“正规顶点”时，大部分时间在谈论 V_n 。按照类似上一节的操作，我们也可以得到：我们的新理论中有任意的 n 粒子顶点，它们的顶点函数就是 $iV_n(k_1, \dots, k_n)$ ，其中 k_1, \dots, k_n 就是流入这个顶点的动量。从而新理论的 Feynman 规则就是：

新理论的 Feynman 规则

²⁵ 角标 conn 代表我们只考虑联通图的贡献。这和 x-y 有关，是因为我们的理论具有时空平移不变性。这是某种“平移对称性导致动量守恒”。



这回答了上面所问的一个问题：为什么我们把这个东西叫做“正规传播子”和“正规顶点”。有了新理论的 Feynman 规则，就可以把这个和原理论的 Feynman 规则做对比了。在这个过程中须记住，当我们考虑新理论的时候，我们只需要考虑树图的贡献。

The Exact Propagator

首先来看具有两套外线的 Feynman 图。在新理论中，树图阶的这种图就是一个传播子，从而树图阶给出的 $i\mathcal{M}$ 就是 $\frac{1}{i}\tilde{\Delta}(k)$ 。而对原来的理论而言，需要考虑所有的具有两条外线的 Feynman 图。为此我们先考虑所有具有两条外线的 **单粒子不可约图/1PI 图**，它们被定义为切断任何一个内传播子仍然保持联通的图。为考虑所有的 1PI 图的贡献，定义一个**自能函数** $\Pi(k^2)$ ²⁶²⁷：

$$i\Pi(k^2) = \sum (\text{all 1PI diagrams containing 2 external lines with momentum } k) \quad (3.141)$$

那么我们可以将原理论中的两点函数做如下的展开：

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}\tilde{\Delta}(k) &= \text{---} \rightarrow + \text{---} \rightarrow \text{1PI} \text{---} \rightarrow \\ &+ \text{---} \rightarrow \text{1PI} \text{---} \rightarrow \text{1PI} \text{---} \rightarrow + \dots \end{aligned}$$

也就是说：

$$\frac{1}{i}\tilde{\Delta}(k^2) = \frac{1}{i}\tilde{\Delta}_F(k^2) + \frac{1}{i}\tilde{\Delta}_F(k^2)(i\Pi(k^2))\frac{1}{i}\tilde{\Delta}_F(k^2) + \frac{1}{i}\tilde{\Delta}_F(k^2)(i\Pi(k^2))\frac{1}{i}\tilde{\Delta}_F(k^2)(i\Pi(k^2))\frac{1}{i}\tilde{\Delta}_F(k^2) + \dots \quad (3.142)$$

²⁶由于理论具有 Lorentz 不变性，于是 $\tilde{\Delta}$ 和 Π 作为一个和 k 有关的标量，只能是 k^2 的函数。下面我们将其记做 $\tilde{\Delta}(k^2), \Pi(k^2)$ 。

²⁷在这一节中，当我们提及“对 1PI 图求和”时，我们都不考虑这些 1PI 图的外线。

这可以视为一个等比级数的求和。于是就有：

$$\tilde{\Delta}(k^2) = \frac{\widetilde{\Delta}_F(k^2)}{1 - \Pi(k^2)\widetilde{\Delta}_F(k^2)} = \frac{1}{\widetilde{\Delta}_F^{-1}(k^2) - \Pi(k^2)} = \frac{1}{k^2 + m^2 - i\varepsilon - \Pi(k^2)} \quad (3.143)$$

直到此处，我们就微扰地求出了量子作用量中的 $\Gamma^{(2)}$ 项：

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(k) = -(k^2 + m^2 - i\varepsilon - \Pi(k^2)) \quad (3.144)$$

有了正规传播子的概念之后，我们也能修好上一节中的一个问题：当 $m_{\text{ph}} \neq m$ 时候我们无法处理外传播子的问题。由 Lehmann-Kallen 谱表示，对于正规传播子有：

$$\tilde{\Delta}(k^2) = \frac{1}{k^2 + m_{\text{ph}}^2 - i\varepsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} ds \rho(s) \frac{1}{k^2 + s - i\varepsilon} \quad (3.145)$$

在前一章中给出了 LSZ 约化公式的另一种表述方式：

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{k_i^2 + m_{\text{ph}}^2} \right) \left(\prod_{j=1}^{n'} \frac{1}{k'^2 + m_{\text{ph}}^2} \right) \langle k'_1 \dots k'_n | S | k_1 \dots k_n \rangle \\ &= i^{n+n'} \left(\prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{ik_i x_i} \right) \left(\prod_{j=1}^{n'} \int d^4 x'_i e^{-ik'_i x'_i} \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x'_1) \dots \} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (3.146)$$

这个等式的右边就是具有外动量 k_i, k'_i 的所有 Feynman 图的和。根据上面的讨论，我们知道它可以被写为新理论中所有具有这些外动量的树图的和。对于这些树图，每一个外线上都应该有一个正规传播子。从而这个树图具有因子 $\tilde{\Delta}(k_i^2) \dots \tilde{\Delta}(k_n^2)$ 。根据 Lehmann-Kallen 谱表示，这些因子都可以写为一个在 $k_i^2 = -m_{\text{ph}}^2$ 存在奇异性的单粒子项和一个在此处非奇异的多粒子项的和。

LSZ 约化公式告诉我们，S-矩阵的性质完全由 $k_i^2 = -m_{\text{ph}}^2$ 处的多粒子极点的性质决定。从而不贡献这个奇点的多粒子项对 S-矩阵不会产生任何贡献。于是我们可以将这些多粒子项扔掉，不对 S-矩阵产生任何影响。扔掉多粒子项后，正规传播子就满足²⁸：

$$\begin{aligned} (-\partial^2 + m_{\text{ph}}^2) \tilde{\Delta}(x - y) & \approx (-\partial^2 + m_{\text{ph}}^2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m_{\text{ph}}^2 - i\varepsilon} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} = \delta^4(x - y) \end{aligned} \quad (3.147)$$

回忆上一节中我们推导 Feynman 规则的过程。我们将所有的外传播子作用算符 $(-\partial^2 + m^2)$ ，从而得到一个 delta 函数，就相当于“截掉”了所有的外线。而在新理论中，我们所有的外线都是正规传播子，根据上面的讨论，它们是可以被 $(-\partial^2 + m_{\text{ph}}^2)$ 所截去的。于是在新理论中，我们就无需特意选择一个使物理质量和 Lagrangian 中的参数质量相等的重整化方式。

这个截去正规传播子的操作反映在原理论中，就是当我们计算一个过程的 Feynman 振幅的时候，可以“截去”这个图的“外腿”。这个过程就是：对于一个 Feynman 图，沿着

²⁸这里的约等号意味着只考虑单粒子项。

其中的一个外线向图中走，我们总可以看到一个传播子，使得剪断这个传播子后，这个外线就和图中其他部分分离。那么按照上面的讨论，这个传播子和对应的外线之间的部分应该都包含在正规传播子之内，于是 LSZ 公式保证了我们可以将这部分截去。

对于一个 Feynman 图，我们对它的每一条外线都重复这个操作，直到不能再截去更多的“外腿”为止。这样得到的图就是原 Feynman 图的截肢图。从而当在原理论中考虑一个过程的 Feynman 振幅时，我们也可以只考虑这个图截肢后的贡献。

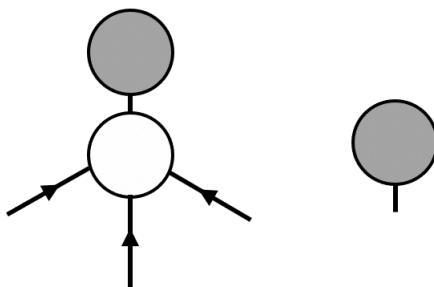
这个截肢操作也可以被赋予一个物理意义。正如 2.6 节所说，重整化的物理意义就在于用等效的场和等效的耦合常数来吸收掉复杂的自作用。对于一个粒子而言，我们观测到的实际上并不是“裸”的粒子本身，而是包含了所有自相互作用后的“真实的粒子”。于是当我们观察到我们入射一个“真实的粒子”的时候，其实入射的是一个包含了所有的自相互作用的粒子。这在我们的理论中就对应一个正规传播子。于是在一个 Feynman 图的外腿中的自相互作用都是“真实的粒子”的一部分。当我们观测散射过程的时候，我们观测到的是一些“真实的粒子”的散射，于是我们并不需要考虑外腿中的所有自相互作用。

这也可以解释我们为什么把上面定义的函数 $\Pi(k^2)$ 称为自能：一个“真实的粒子”的静止质量就是物理质量。回忆我们在上一章中对 Lehmann-Kallen 谱表示的讨论，正规传播子在物理质量 $k^2 = -m_{\text{ph}}^2$ 处有一个极点。于是物理质量可以通过方程 $-m_{\text{ph}}^2 + \Pi(-m_{\text{ph}}^2) = -m^2$ 解出，故 $\Pi(-m_{\text{ph}}^2)$ 就是物理的静止能量 m_{ph}^2 和 m^2 的差，也就是一个“真实的粒子”和一个“裸”的粒子的能量差。这个能量差的来源就是“真实的粒子”中包裹的自相互作用带来的能量。从而 $\Pi(-m_{\text{ph}}^2)$ 就有粒子自能的物理意义。我们求和所有 1PI 图的过程也就可以被诠释为对一个粒子所有可能的自相互作用求和，从而得到粒子的自能的过程。

Proper Vertices

再看正规顶点，为此考虑有 n 条外线的 Feynman 图。考虑到讨论的简便，我们先从 $n=3$ 看起。在新理论中，有三条外线的所有树图就只有包含一个三粒子顶点的图。故对于一个三粒子过程， $i\mathcal{M} = iV_3(k_1, k_2, k_3)$ 。对于原理论，需要考虑所有的具有三条外线的截肢图的贡献。事实上，所有具有三条外线的截肢图的贡献之和就正好是所有具有三条外线的 1PI 图的贡献之和：如果这个图中有一个剪掉后可以使图不联通的传播子，那么就有两种情况：

- (1): 截掉的两部分有 2 个和 1 个外线，那么只有一条外线的这个部分就是一个“外腿”，从而这个图不是截肢的。
- (2): 截掉的两部分有 3 个和 0 个外线，也就是会出现如下图的情形：



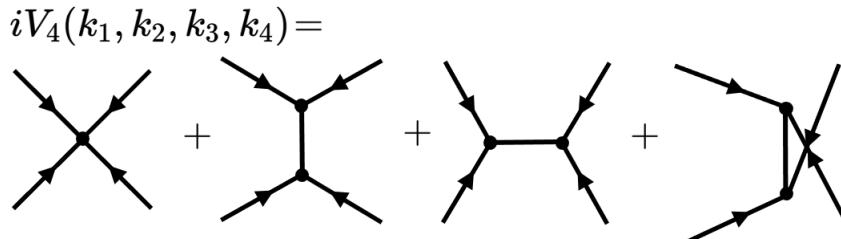
我们将要论证所有形如左上的图的贡献之和为 0。其方法就是：对于每个形如左上图的 Feynman 图，都可以做出一个右上图。而如果我们对所有的右上图求和，就得到了 $\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle$ ，这在我们的微扰论中应该是 0。于是所有形如左上的图的贡献之和中存在一个

因子 0, 从而为 0²⁹。从中我们知道, 所有的截肢图就是所有的 1PI 图加上情况 (2) 中的所有 Feynman 图。故所有的 1PI 图贡献之和就是所有截肢图的和。

于是, 三粒子正规顶点就是:

$$iV_3(k_1, k_2, k_3) = \sum (\text{all 1PI diagrams containing 3 external lines with correct momentum}) \quad (3.148)$$

对于四粒子顶点, 新理论中的树图有以下的四个:



对于原理论, 所有非 1PI 的 Feynman 图有三种情况:

- (1): 截掉的两部分有 4 个和 0 个外线: 和上面的情况 (2) 是类似的, 总贡献为 0。
- (2): 截掉的两部分有 3 个和 1 个外线: 这是非截肢、非 1PI 的图。
- (3): 截掉的两部分有 2 个和 2 个外线: 它们可以被分为两个三粒子正规顶点和一个正规传播子, 从而它们的贡献之和就是上面的后三个图。

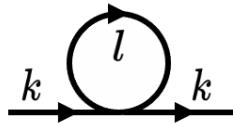
从而, 所有的截肢图的贡献就是所有的 1PI 图之和加上 (3) 中的所有图之和, 而后半部分恰好就是上图中后三个 Feynman 图的贡献。故所有具有四个顶点的 1PI 图的和就是四粒子正规顶点:

$$iV_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = \sum (\text{all 1PI diagrams containing 4 external lines with correct momentum}) \quad (3.149)$$

推广这个讨论, 就有: n 粒子正规顶点 $iV_n(k_1, \dots, k_n)$ 就是所有 n 条外线的 1PI 图之和。从而我们就求出了量子作用量中的所有展开项, 也就完全确定了新理论的 Feynman 规则。综合上面的讨论, 我们就得到了对一个量子场论做微扰论的步骤:

- 从相互作用的 Lagrangian 开始, 通过类似 3.6 节的讨论求出 Feynman 规则。
- 利用原理论的 Feynman 规则, 通过对所有的两粒子 1PI 图求和, 求出自能 $\Pi(k^2)$, 从而得到正规传播子 $\tilde{\Delta}(k^2)$ 。对所有的 n 粒子 1PI 图求和, 得到 n 粒子正规顶点 $iV_n(k_1, \dots, k_n)$ 。
- 对于需要考虑的散射过程, 做出所有含有正确的外线、包含正规传播子、 n 粒子顶点的截肢的树图。利用新理论的 Feynman 规则, 对所有的这些树图求和, 就得到了 Feynman 振幅 $i\mathcal{M}$ 。

²⁹这种含仅有一条单独的线与其他部分相连接的结构的 Feynman 图被我们称为**蝌蚪图**。在这里的讨论就相当于证明了: 在一个微扰量子场论中, 所有蝌蚪图的贡献之和为 0, 于是我们在画 Feynman 图时可以忽视所有的蝌蚪图。



这些操作又有什么物理意义呢？记得在这一节我们提到过，一个真实的粒子就是包含了所有自相互作用的粒子，在我们的理论中也就对应一个正规传播子。而正规顶点就可以诠释为这些真实粒子之间的相互作用。而上面的讨论就意味着，当我们考虑了真实的粒子之间的散射过程时，就可以只考虑真实粒子之间的直接的相互作用，而不考虑裸粒子之间的复杂的互相交叉的相互作用。

看起来我们已经明白微扰量子场论的一切了。其实还有一些隐藏的问题等着我们：例如在 ϕ^4 理论中，如果我们计算步骤（2）中的一个圈图，例如计算自能时要考虑的上图，我们会得到它对自能的贡献是：

$$\Pi_I(k^2) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (iZ_\lambda \lambda) \frac{1}{i} \frac{1}{l^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (3.150)$$

做一个简单的分析：在 l 远大于 m 时，这个积分正比于 $\int d^4 l / l^2 \propto \int l dl$ 。也就是说这个积分在大动量处，也就是紫外区域，是发散的。而到此为止，我们似乎对自能中出现的这个紫外发散束手无策。等到第五章中，我们会利用正规化和重整化技术来消去这个发散，在那时我们才能真正的明白如何计算一个微扰量子场论。

Functional Evaluation of the Quantum Action

上面这些讨论告诉了我们如何利用对 1PI 图求和的方式计算出量子作用量。事实上，如果我们仅仅希望将量子作用量计算到单圈阶，也可以利用鞍点近似的方法来计算量子作用量——这甚至不需要用到 Feynman 图。首先，根据有效作用量的定义，我们可以将其写为以下形式：

$$\begin{aligned} e^{\frac{i\Gamma[\phi]}{\hbar}} &= \exp \frac{i}{\hbar} \left[[J_\phi] - \int d^4 x J_\phi(x) \phi(x) \right] = \int \mathcal{D}\phi' \exp \frac{i}{\hbar} \left[S[\phi'] + \int d^4 x J_\phi(\phi' - \phi) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi' \exp \frac{i}{\hbar} \left[S[\phi + \phi'] + \int d^4 x J_\phi \phi' \right] \end{aligned} \quad (3.151)$$

其中为了数清这个结果对应的圈数，我们在路径积分中恢复了 Planck 常数。在第二行处，我们所做的无非就是一个对变量 ϕ' 的平移。有了这个表达式之后，我们就可以在 ϕ 附近对这个作用量做展开了：

$$\begin{aligned} e^{\frac{i\Gamma[\phi]}{\hbar}} &= \int \mathcal{D}\phi' \exp \frac{i}{\hbar} \left[S[\phi] + \int d^4 x \left(J_\phi + \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi} \right) \phi'(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \phi'(x) \phi'(y) + O(\phi'^3) \right] \\ &= e^{\frac{iS[\phi]}{\hbar}} \int \mathcal{D}\phi' \exp i \left[\int d^4 x \hbar^{-1/2} \left(J_\phi + \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi} \right) \phi'(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \phi'(x) \phi'(y) + O(\hbar^{1/2} \phi'^3) \right] \end{aligned} \quad (3.152)$$

其中在第二个等号处，我们对积分变量 ϕ' 做了一个缩放。由于缩放后仅仅会给出一个常数因子，反应在 $\Gamma[\phi]$ 中就仅仅是个常数项，于是可以将这个因子忽略。我们马上将要说明：不但后面 ϕ' 的高阶项是 \hbar 的高阶，前面这个 $J_\phi + \delta S/\delta\phi$ 也是 \hbar 的高阶。为了看到这一点，可以将其写为：

$$J_\phi + \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi} = -\frac{\delta(\Gamma[\phi] - S[\phi])}{\delta\phi} \quad (3.153)$$

而正如前面的讨论所说：树图阶的 $\Gamma[\phi]$ 就是 $S[\phi]$ ，于是它们的差异至少是一圈阶，从而是 $O(\hbar)$ 的。这也就告诉我们：这一项 $(J_\phi + \delta S/\delta\phi)\hbar^{-1/2}$ 至少是 $O(\hbar^{1/2})$ 的。由于单圈的结果对应 $\Gamma[\phi]$ 中 $O(\hbar^1)$ 项，而这个展开中这些 $O(\hbar^{1/2})$ 的项在 $\Gamma[\phi]$ 中至少是 $O(\hbar^{3/2})$ 的。从而如果我们仅仅想要将量子作用量计算到单圈阶，那么就没有必要考虑这些项。忽略这些项后，剩下的就是如下的 Gaussian 积分：

$$e^{\frac{i\Gamma[\phi]}{\hbar}} = e^{\frac{iS[\phi]}{\hbar}} \int \mathcal{D}\phi' \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \phi'(x)\phi'(y) \right] \quad (3.154)$$

为了计算这样一个 Gaussian 的泛函积分，我们可以用多重积分的如下积分公式：

$$\int d^n x \exp \left[-\frac{1}{2} x^T A x \right] = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} \quad (3.155)$$

利用这个积分公式将上面这个 Gaussian 积分积出， $\Gamma[\phi]$ 就可以写为：

$$\Gamma[\phi] = S[\phi] + \frac{i\hbar}{2} \log \det \left(\frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right) + O(\hbar^{3/2}) \quad (3.156)$$

其中，我们将 $\delta^2 S/\delta\phi_x\delta\phi_y$ 看做了一个指标为坐标 x,y 的矩阵，并且求了这个矩阵的行列式。在后面的讨论中，我们还会遇到这样的泛函行列式。直到此处，我们就将量子作用量计算到了一圈阶。不幸的是，如果你尝试计算这个泛函行列式，仍然会遇到和上面类似的发散问题。为此我们也仍然需要利用重整化来消去这些发散。我们会在第六章中讨论对称性自发破缺的时候回来计算这样的泛函行列式。

3.8 From Canonical Formalism to Path Integral Formalism

直到此处，我们已经基本完成了对路径积分量子化的讨论——从路径积分原理出发，解析地计算出了自由场论的生成泛函，微扰地计算了相互作用场论的生成泛函，并由此得到了 n 点关联函数和 S-矩阵。在这些讨论中，我们利用了一些正则理论中的结果，例如 LSZ 约化公式，来对散射过程进行处理。为此我们在本章开头中从路径积分理论中推导出了正则理论。事实上，路径积分理论和正则理论是等价的。要证明这一点，剩下需要做的一件事就是从正则理论中推导出路径积分理论。

路径积分理论的基本假设只有一个，就是路径积分原理。于是，我们只要从正则理论中推导出路径积分原理即可。为此我们就在正则体系中考虑传播振幅 $\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle$ 。

首先，根据 3.1 节中的讨论，无论是正则体系还是路径积分体系，都在给出体系的动力学。而我们研究的基本对象，也就是 Hilbert 空间及其“运动学”，是相同的。于是在正则

体系中, 每一个时刻的所有场构型也构成 Hilbert 空间中的一组基。这些基就是 Heisenberg 绘景算符 $\phi(x)$ 的本征基:

$$1 = \int (\mathcal{D}\phi)_t |\phi_\alpha, t\rangle \langle \phi_\alpha, t| \quad (3.157)$$

为考虑传播振幅 $\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle$, 我们将时间 $t_b - t_a$ 等间距的分成 $t_a < t_1 < \dots < t_n < t_b$ 的 $(n+1)$ 小段, 每一小段的时间间隔是 δt 。对于每个时刻 t_i , 都在上面的传播振幅中插入一组该时刻的本征基, 那么就有:

$$\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = \int (\mathcal{D}\phi_1)_{t_1} \dots (\mathcal{D}\phi_n)_{t_n} \langle \phi_b, t_b | \phi_n, t_n \rangle \dots \langle \phi_i, t_{i+1} | \phi_i, t_i \rangle \dots \langle \phi_1, t_1 | \phi_a, t_a \rangle \quad (3.158)$$

为了计算每一个小的传播振幅, 我们将所有的东西变化到 Schrodinger 绘景。由于 Schrodinger 绘景和 Heisenberg 绘景中的基矢量有关系:

$$|\phi_H, t\rangle = e^{iHt} |\phi_S\rangle \quad (3.159)$$

于是, 在 Schrodinger 绘景中, 就有:

$$\begin{aligned} \langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle &= \langle \phi_{b,S} | e^{-iH(t_b-t_a)} | \phi_{a,S} \rangle \\ &\int (\mathcal{D}\phi_1)_{t_1} \dots (\mathcal{D}\phi_n)_{t_n} \langle \phi_{b,S} | e^{-iH(t_b-t_n)} | \phi_{n,S} \rangle \dots \langle \phi_{i+1,S} | e^{-iH(t_{i+1}-t_i)} | \phi_{i,S} \rangle \dots \langle \phi_{1,S} | e^{-iH(t_1-t_a)} | \phi_{a,S} \rangle \end{aligned} \quad (3.160)$$

由于 $[H, H] = 0$, 从而 Schrodinger 绘景和 Heisenberg 绘景中的 Hamiltonian 是相同的。并且在体系的 Hamiltonian 的定义中, 我们采取所谓的 **Weyl 排序**, 也就是在 Hamiltonian 的每一项中, 场的广义动量算符都在场算符的前面。在这个情况下, 为了计算每一小段的 $\langle \phi_{i+1,S} | e^{-iH(t_{i+1}-t_i)} | \phi_{i,S} \rangle$, 就可以插入一组完备的 (Schrodinger 绘景的) 广义动量算符的本征态 $|\pi_{i,S}\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{i+1,S} | e^{-iH\delta t} | \phi_{i,S} \rangle &= \int (\mathcal{D}\pi_i) \langle \phi_{i+1,S} | \pi_{i,S} \rangle \left\langle \pi_{i,S} \left| \exp \left[-i\delta t \int d^3x \mathcal{H}(\hat{\pi}, \hat{\phi}) \right] \right| \phi_{i,S} \right\rangle \\ &= \int (\mathcal{D}\pi_i) \langle \phi_{i+1,S} | \pi_{i,S} \rangle \langle \pi_{i,S} | \phi_{i,S} \rangle \exp \left[-i\delta t \int d^3x \mathcal{H}(\pi_i, \phi_i) \right] \end{aligned} \quad (3.161)$$

那么 $\langle \phi_{i+1,S} | \pi_{i,S} \rangle$ 究竟是什么呢? 为了说明这个东西到底是什么, 考虑一个任意的, 在一个特定时刻的量子态 $|\Psi\rangle$ 。由于在一个等时面上, ϕ 本征态是完备的, 于是它可以用 ϕ 本征态来展开:

$$|\Psi\rangle = \int (\mathcal{D}\phi) \langle \phi_S | \Psi \rangle |\phi_S\rangle \quad (3.162)$$

展开系数 $\langle \phi_S | \Psi \rangle$ 完全刻画了这个量子态的性质。这就类似于量子力学中的坐标表象, 故称为 ϕ 表象。在 ϕ 表象中, 展开系数 $\langle \phi_S | \Psi \rangle$ 就类似于量子力学中的波函数。在量子力学中, 波函数是一个坐标的函数。而在量子场论中, 展开系数 $\langle \phi_S | \Psi \rangle$ 是一个场构型的泛函, 于是我们将其称为 **波泛函**。我们也可以认为各个算符都是作用于波泛函上的。对于场算符 $\phi_S(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, 0)$, 由于 $\phi_S(\mathbf{x}) |\phi_{a,S}\rangle = \phi_a(\mathbf{x}, 0) |\phi_{a,S}\rangle$, 于是场算符在 ϕ 表象下的表示就是 $\phi_a(\mathbf{x}, 0)$ 。

再考虑广义动量算符 $\pi_S(x) = \pi(x, 0)$, 由于就有等时对易关系 $[\phi_S(x), \pi_S(x')] = i\hbar\delta^3(x - x')$, 从而就可以得到, ϕ 表象下的广义动量算符就是:

$$\pi_S(\mathbf{x}) = -i \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} \quad (3.163)$$

注意: 这里的泛函导数是一个三维的泛函导数, 也就是 $\frac{\delta\phi(\mathbf{y})}{\delta\phi(\mathbf{x})} = \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, 这和我们之前用的四维泛函导数是不同的。

有了这些准备, 就可以考虑 Schrodinger 绘景中正则动量 $\pi_S(\mathbf{x})$ 的本征态 $|\pi_S\rangle$ 了。设其波泛函为 $\Psi[\phi_S]$, 那么本征方程就告诉我们:

$$-i \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} \Psi[\phi_S] = \pi(\mathbf{x}) \Psi[\phi_S] \quad (3.164)$$

我们可以从中得出:

$$\Psi[\phi_S] = \langle \phi_S | \pi_S \rangle = \exp \left(i \int d^3\mathbf{x} \pi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \right) \quad (3.165)$$

从而, 我们就得到了想要求出的 $\langle \phi_{i+1,S} | \pi_{i,S} \rangle$ 。将其代入无穷小传播振幅的表达式, 就能得到:

$$\langle \phi_{i+1,S} | e^{-iH\delta t} | \phi_{i,S} \rangle = \int (\mathcal{D}\pi_i) \exp \left[-i\delta t \int d^3x \mathcal{H}(\pi_i, \phi_i) \right] \exp \left(i \int d^3x \pi_i(x) (\phi_{i+1}(x) - \phi_i(x)) \right) \quad (3.166)$$

代入传播振幅的表达式:

$$\begin{aligned} \langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = \\ \int (\mathcal{D}\phi_1) \dots (\mathcal{D}\phi_n) (\mathcal{D}\pi_1) \dots (\mathcal{D}\pi_n) \exp \left\{ i \sum_{i=1}^n \delta t \int d^3x \left[\pi_i(\mathbf{x}) \frac{\phi_{i+1}(\mathbf{x}) - \phi_i(\mathbf{x})}{\delta t} - \mathcal{H}(\pi_i, \phi_i) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.167)$$

取 $n \rightarrow \infty$ 的极限, 我们就得到:

$$\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \exp \left(i \int d^4x (\pi \dot{\phi} - \mathcal{H}) \right) \quad (3.168)$$

注意, 由于我们没有要求这些正则变量满足正则方程, 于是 π, ϕ 是独立的。从而这个指数上的量并不是 Lagrangian。对于一个任意的 Hamiltonian 而言, 我们就只能做到这么多了。于是这就是为什么我们要在 3.1 节的脚注中说, 路径积分的严格定义需要依靠 Hamiltonian 和正则变量取定义。

不过, 我们也说过, 对于一个 Hamiltonian 是广义动量二次型的理论, Lagrangian 形式的路径积分和上式是等价的。为了讨论简单, 我们就考虑一个 $\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2}\pi^2(x) + \mathcal{V}(\phi(x))$ 的情形, 此时:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{i+1,S} | e^{-iH\delta t} | \phi_{i,S} \rangle = \\ \int (\mathcal{D}\pi_i) \exp \left[-i\delta t \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi_i^2(x) + \mathcal{V}(\phi_i(x)) \right) \right] \exp \left(i \int d^3x \pi_i(x) (\phi_{i+1}(x) - \phi_i(x)) \right) \end{aligned} \quad (3.169)$$

我们可以对 π 进行这个 Gaussian 积分³⁰, 得到:

$$\langle \phi_{i+1,s}(x) | e^{-iH\delta t} | \phi_{i,S}(x) \rangle = N \exp \left\{ -i\delta t \int d^3x \left[\mathcal{V}(\phi_i) - \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_{i+1}(x) - \phi_i(x)}{\delta t} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.170)$$

其中 N 是一个归一化因子。我们可以将其吸收到泛函积分测度中去。将这个无穷小传播振幅代入总传播振幅的表达式, 就有:

$$\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = N \int (\mathcal{D}\phi_1) \dots (\mathcal{D}\phi_n) \exp \left\{ -i \sum_{i=1}^n \delta t \int d^3x \left[\mathcal{V}(\phi_i) - \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_{i+1}(x) - \phi_i(x)}{\delta t} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.171)$$

取 $n \rightarrow \infty$ 的极限后, 就有:

$$\langle \phi_b, t_b | \phi_a, t_a \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_0 \phi) \right] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \quad (3.172)$$

这也就是我们最初叙述的路径积分原理。于是我们说, 对于一个 Hamiltonian 是广义动量二次型的理论而言, 正则理论蕴含上面叙述的路径积分理论。对于一个其他形式 Hamiltonian 的体系而言, 用上面的 Hamiltonian 形式路径积分定义的路径积分理论也被正则理论蕴含。综合 3.2 节的讨论, 就可以说, 路径积分理论和正则理论是等价的。

顺便说一下, 由于凝聚态物理学家并不关心 Lagrangian 的 Lorentz 协变性, 于是在凝聚态物理中, 场的 Hamiltonian 通常是用渐进时刻的产生湮灭算符写出的 $H = H(a^\dagger, a)$ 。在那时, 我们插入场和正则动量本征态的操作就变得不那么有效, 取而代之的是所谓的**相干态路径积分**, 也就是用湮灭算符的本征态——**相干态**来代替这里的场和正则动量本征态。这实际上就仅仅是对我们的 Hilbert 空间换了一组基而已。

3.9 Summary: What is Quantum Field Theory?

在这一章的最后, 我们总结一下前面几章讨论的内容, 来看一看量子场论究竟讲了怎么样的一个故事。

Quantum Field Theory

现代物理学的三大基本要素是:

- 体系的演化可以通过构型空间中的一个路径给出。
- 物理体系的动力学可以通过路径的泛函——作用量来描述。
- 作用量可以通过少数一般性原理来给出。

³⁰具体的计算方式就是, 将时空划分为格点, 这个积分测度就是对 $t=0$ 上的所有格点上的 π 积分。后面的被积函数也可以分为不同格点上的项, 对每个格点分别积分即可。

第一条要素告诉我们：要有一个构型空间，首先要我们输入一系列**广义坐标**。对于一个有限自由度的理论，我们称之为“力学”，而无限自由度的理论就称为“场论”。第二条要素就是一个“理论生成器”，输入一个作用量，得出一个动力学理论。而这个生成器一共就只有两个型号——“经典”和“量子”。它们的“运作方式”分别是**最小作用量原理**和**路径积分原理**。对于“力学”和“场论”而言，“理论生成器”的作用被列在下表中。

Theory Generator	Mechanics	(Relativistic) Field Theory
Classical	$\delta S = 0$ $S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q})$	$\delta S = 0$ $S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi)$
Quantum	$\langle q', t_f q, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q \exp iS[q(t)]$ $S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q})$	$\langle \phi', \sigma' \phi, \sigma \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp iS[\phi(x)]$ $S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi)$

我们展开讲讲这个表格中右下角的那个格子。量子场论是一个场论，于是我们的体系的广义坐标就是场 $\phi_{\alpha}(x)$ 。量子场论还是一个量子的理论，体系的状态就可以用一个 **Hilbert 空间**中的射线描述。这个 Hilbert 空间是什么呢？考虑 Minkowski 空间中的任何一个类空超曲面 σ ，对于这个超曲面上的任何一个场构型 $\phi_{\alpha,i}$ ，我们都可以定义一个向量 $|\phi_{\alpha,i}, \sigma\rangle$ 。那么这个超曲面上的所有场构型 $\{|\phi_{\alpha,i}, \sigma\rangle\}$ 就构成这个 Hilbert 空间的一组基。这就相当于定义了这个 Hilbert 空间。

这个 Hilbert 空间上的动力学被路径积分原理所确定。它给出任意两个超曲面上的两个场构型间的传播振幅：

$$\langle \phi', \sigma' | \phi, \sigma \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp iS[\phi(x)] \quad (3.173)$$

直到此处，我们就明白了什么是一个量子场论。而接下来我们要总结一下如何通过量子场论来预言实验现象。在一个量子理论中，可观测量都是算符，于是需要明白什么是算符。一个（和场有关的）算符的矩阵元被定义为：

$$\langle \phi_a, \sigma_a | \mathcal{O}(x) | \phi_b, \sigma_b \rangle := \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}(x) \exp \left(i \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi) \right) \quad (3.174)$$

这就完全确定了一个算符。根据路径积分原理，我们可以推导出以下的命题（3.2 节）：

- **CF1** 场算符满足作为算符方程的经典运动方程。
- **CF2** 场算符和正则动量算符满足等时对易关系。
- **CF3** 经典 Noether 定理给出的守恒荷是 Poincare 群在这个 Hilbert 空间上的生成元。

Interacting Quantum Fields

量子场论按照作用量的形式可以分为两类——自由的量子场论和相互作用的量子场论。前者被定义为 Lagrangian 是纯 Gaussian 的量子场论，而后者就是 Lagrangian 非纯 Gaussian 的量子场论。

对于一个自由的量子场论，上面的三个命题就允许我们描述一个**多粒子态**：CF1 告诉我们，可以通过求解场方程来对场算符做模式展开，通过 CF2 和 CF3，我们发现这些展开系数算符携带一个粒子的能动量，从而可以被诠释为**产生湮灭算符**。如果我们再定义作用

所有湮灭算符后均为 0 的态为**真空态**，那么多粒子态就是真空态作用上相应粒子的产生算符（2.1 ~ 2.3 节）。

而对于一个相互作用的量子场论，我们只能通过假设的方式来描述多粒子态：

- **INT1** 在相互作用场论中也有一个真空态 $|\Omega\rangle$ ，它被定义为相互作用 Hamiltonian 的基态，不携带任何动量和能量。
- **INT2** 在真空之外，相互作用的 Hamiltonian 也有一系列能量和动量的共同本征态 $|\lambda_p\rangle$ 。它携带能量 E_λ 和动量 \mathbf{p} 。这些 $|\lambda_p\rangle$ 可以用 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 互相联系。这些本征态在 Hilbert 空间上是完备的。这也就是说：

$$1 = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_\lambda \int dp |\lambda_p\rangle\langle\lambda_p| \quad (3.175)$$

- **INT3** 有一系列上述的本征态，称为**单粒子态**。它们的能量和动量满足 $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ 。其中静止质量 m 就是这个粒子的**物理质量**³¹。这些单粒子态处于 E-p 图的一条孤立的线上。
- **INT4** 要求真空 $|\Omega\rangle$ 和单粒子态 $|k\rangle$ 满足以下条件。为此需要对场做**重整化**：

$$\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle = 0, \quad \langle k|\phi(x)|\Omega\rangle = e^{-ikx} \quad (3.176)$$

Scattering Experiments

利用量子场论能够解释的最成功的一类现象就是散射现象。在散射现象中，在 $t = -\infty$ 时刻的态是一个自由的多粒子态。这个多粒子态在相互作用的 Hamiltonian 下演化到 $t = \infty$ 。这个态又“渐进于”某些自由多粒子态的线性组合。于是需要描述一个按照相互作用的 Hamiltonian 演化，并且在正或负无穷时刻渐进于一个自由多粒子态的态。为了描述这些**渐进态**，需要引入一些假设。这些假设被称为**LSZ 假设**：

- **LSZ1** 就有两个自由场论。它们和相互作用场论共用一个 Hilbert 空间，且有相同的真空态 $|\Omega\rangle$ 。
- **LSZ2** 联系相互作用场论和自由场论的是以下的两个**弱渐进条件**，它们仅仅在波包的意义下成立：

$$\forall |\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \alpha | \phi(x) | \beta \rangle = \langle \alpha | \phi_{\text{in}}(x) | \beta \rangle, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \alpha | \phi(x) | \beta \rangle = \langle \alpha | \phi_{\text{out}}(x) | \beta \rangle \quad (3.177)$$

如果知道了散射过程中一个初态有多少概率幅散射为一个末态的信息，就完全知道了这个散射过程中的所有信息。上面对渐进态的定义就允许我们在描述这个概率幅。它就是**S-矩阵**：

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta_{\text{out}} | \alpha_{\text{in}} \rangle = \langle \beta_{\text{in}} | S | \alpha_{\text{in}} \rangle \quad (3.178)$$

³¹ 后面我们会看到，物理质量不一定等于 Lagrangian 中的参数 m 。这是依赖于我们做重整化的方式的。

既然 S-矩阵编码了散射中的所有信息，就可以从 S-矩阵中得到散射中的可观测量——**散射截面**和**衰变率**（2.6 节）：

$$d\sigma(k) = \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{s}|\mathbf{k}_1|_{\text{CM}}} d\text{LIPS}_n, \quad \Gamma_{i \rightarrow f} = \int \frac{|\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2}{2m} d\text{LIPS}_n \quad (3.179)$$

其中 \mathcal{M} 是 **Feynman 振幅**，其定义是：

$$S = 1 + (2\pi)^4 \delta^4(k_{\text{in}} - k_{\text{out}})(i\mathcal{M}) \quad (3.180)$$

为了描述散射，我们的目标就是求出 S 矩阵。从 LSZ 场论中，我们可以得到以下的 **LSZ 约化公式**（2.7 节）：

$$\begin{aligned} \langle k'_1 \dots k'_n | S | k_1 \dots k_n \rangle &= i^{n+n'} \left(\prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{ik_i x_i} (-\partial_i^2 + m^2) \right) \\ &\times \left(\prod_{j=1}^{n'} \int d^4 x'_j e^{-ik'_j x'_j} (-\partial_j'^2 + m^2) \right) \langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x'_1) \dots\} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (3.181)$$

可以看到，这将 S-矩阵和关联函数 $\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle$ 联系了起来。于是我们只需要计算出关联函数，就能预言散射中的可观测量。

Perturbation Theory

为了计算关联函数，我们可以定义一个场的**生成泛函**：

$$Z[J] = \langle \Omega, \infty | \Omega, -\infty \rangle_J = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^4 x (\mathcal{L}(x) + J(x)\phi(x)) \right) \quad (3.182)$$

从生成泛函中，就可以如下的计算关联函数（3.3 节）：

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \right) Z[J] \right]_{J=0} \quad (3.183)$$

对于一个自由场论而言，可以直接利用 Fourier 方法计算出自由场论的关联函数（3.3 ~ 3.5 节）。但是如果需要预言散射现象，就需要考虑相互作用场论中的关联函数。但是我们并不能严格的求解出相互作用场的关联函数，为此我们只能对生成泛函做微扰展开（3.6 节）：

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_{V=0}^{\infty} \frac{1}{V!} \left(i \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right)^V \sum_{V_C=0}^{\infty} \frac{1}{V_C!} \left(i \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{CT}} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right)^{V_C} \\ &\times \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^4 x (\mathcal{L}_0 + J\phi) \right) \end{aligned} \quad (3.184)$$

这个展开中的每一项对应一个 **Feynman 图**。我们可以通过 **Feynman 规则**来计算出 Feynman 图对关联函数、Feynman 振幅的贡献，并对所有 Feynman 图求和来求得总的关联函数、Feynman 振幅。这就是**微扰量子场论**的基本思路（3.6 节）。

对大量 Feynman 图求和是很复杂的一个工作。我们可以引入一个量子作用量来简化这个工作：

$$\Gamma[\phi] := - \int d^4x \phi(x) J_\phi(x) + W[J_\phi] \quad (3.185)$$

将量子作用量输入量子的“理论生成器”，就可以得到一个新理论。对这个新理论中的所有树图的贡献求和，就可以得到原理论中的关联函数、Feynman 振幅。新理论的 Feynman 规则可以用如下的方法确定：

利用原理论的 Feynman 规则，通过对所有的两粒子 **1PI 图** 求和，求出自能 $\Pi(k^2)$ ，从而得到正规传播子 $\tilde{\Delta}(k^2)$ 。对所有的 n 粒子 1PI 图求和，得到 n 粒子正规顶点 $iV_n(k_1, \dots, k_n)$ 。新理论中出现的传播子和顶点就是这些正规传播子和正规顶点（3.7 节）。

于是，对于需要考虑的散射过程，做出所有含有正确的外线、包含正规传播子、 n 粒子顶点的树图。利用新理论的 Feynman 规则，对所有的这些树图求和，就得到了 Feynman 振幅 $i\mathcal{M}$ 。

从而，我们就明白了如何利用量子场论和微扰论来给出散射实验的预言。这就基本上讲完了我们故事的主线。

Chapter 4

Quantum Electrodynamics

4.1 Spinor QED and Scalar QED

Lagrangian of Quantum Electrodynamics

在上一章中，我们已经勾勒好了量子场论的主线，可以用这一套理论来讨论一些具体的问题了。我们在这一章中讨论的是**量子电动力学**。正如经典电动力学是在经典场论的框架下研究电磁场自身以及电磁场与物质间的相互作用的理论，量子电动力学的目标也是在量子场论的框架下研究这些事物。

量子电动力学是一个量子场论。我们在上一章中也看到，一个量子场论就是将一个无穷自由度的系统及其作用量输入量子的“理论生成器”所得到的结果。于是讨论的第一步就应该明确我们处理的系统是什么，这个系统的作用量是什么。

为了写出量子电动力学的作用量，需要重新审视电磁场的本质。现代的观点认为，电磁场是 U(1) 规范场，是我们要求物质场满足定域规范不变性而引入的。为了说明这一点，我们先来考虑物质场是旋量场的情形。对于一个自由旋量场，其 Lagrangian 是：

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)(i\partial - m)\Psi(x) \quad (4.1)$$

我们已经在第二章中看到了，这个 Lagrangian 具有整体的 U(1) 变换，也就是 $\Psi \rightarrow \Psi e^{i\alpha}$ 下的不变性。如果要求这个 Lagrangian 具有定域的 U(1) 规范不变性，也就是在以下变换下不变：

$$\Psi(x) \rightarrow \exp[-iq\Gamma(x)]\Psi(x), \quad \bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x)\exp[iq\Gamma(x)] \quad (4.2)$$

那么由于 $\Gamma(x)$ 是 x 的函数，对 $\exp[-iq\Gamma(x)]\Psi$ 求偏导时会多出来一项 $-iq(\partial\Gamma(x))\exp[-iq\Gamma(x)]\Psi$ 。如果我们想要令这个 Lagrangian 在定域 U(1) 规范变换下不变，那么我们可以引入一个额外的项，它在规范变换下的变化正好抵消这个额外项。这相当于引入一个协变导数算子：

$$D_\mu(x) := \partial_\mu - iqA_\mu(x) \quad (4.3)$$

这个 $A_\mu(x)$ 就是我们引入的 **U(1) 规范场**。引入这个协变导数算子后的 Lagrangian 是：

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)(iD - m)\Psi(x) \quad (4.4)$$

如果我们令 $A_\mu(x)$ 的规范变换是：

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) - \partial^\mu\Gamma(x) \quad (4.5)$$

那么我们发现, D_μ 的后一项在定域 $U(1)$ 规范变换下的变换刚好和求偏导数得出的项 $-iq(\partial\Gamma(x))\exp[-iq\Gamma(x)]\Psi$ 抵消。

在添加了规范场以后, 我们的理论中就有了两组广义坐标: 物质场 Ψ 和规范场 A_μ 。既然我们多了一个场, 当然就要在我们的 Lagrangian 中加入自由规范场的 Lagrangian。于是至此, 我们就从要求旋量场满足定域 $U(1)$ 规范不变出发, 得到了以下的 Lagrangian:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\cancel{D} - m)\Psi \quad (4.6)$$

这个 Lagrangian 生成的量子场论就被称为**旋量量子电动力学**, 或者**旋量 QED**。

旋量 QED 的 Lagrangian 比起自由电磁场和旋量场的 Lagrangian 多出了一项:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = qA_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = q\bar{\Psi}\cancel{A}\Psi \quad (4.7)$$

这一项就是旋量场和电磁场的相互作用项。回忆我们在上一章对整体 $U(1)$ 规范对称性的讨论, 我们发现 $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ 就是整体 $U(1)$ 规范对称性的守恒流。如果定义电流密度 $J^\mu := q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$, 于是我们从局域规范不变性中得到的 Lagrangian 就回到了经典的相互作用电磁场的 Lagrangian:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = J_\mu A^\mu \quad (4.8)$$

根据 Noether 定理, 一个守恒流就对应一个守恒荷。既然定义了电流密度, 当然就可以写出它对应的守恒荷——电荷。并且我们知道, 在自由的旋量场论中, 有:

$$Q = q \sum_{s=\pm} \int \widetilde{dk} (b_s^\dagger(k)b_s(k) - d_s^\dagger(k)d_s(k)) \quad (4.9)$$

于是, 我们说, 一个 b 粒子带电荷 q, 一个 d 粒子带电荷-q。于是如果考虑电子场和电磁场的相互作用时, q 就应该取为电子的电荷量, 也就是 $q = -|e|^1$ 。

对于标量场而言, 我们也可以进行类似的讨论: 只需要将自由标量场中的 ∂_μ 替换为 D_μ , 再添加上自由规范场的 Lagrangian, 就得到了:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}D_\mu\phi D^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (4.10)$$

这个 Lagrangian 生成的量子场论被称为**标量量子电动力学**, 或者**标量 QED**。

4.2 Feynman Rules of Spinor QED

我们现在就要将旋量 QED 的 Lagrangian 扔进量子的“理论生成器”, 看看能够收获什么样的 Feynman 规则。在有了 Feynman 规则之后, 就可以通过 Feynman 图来计算 Feynman 振幅, 散射截面和衰变率了。

¹当然, 这只在树图阶适用, 更高阶的修正需要做重整化, 这导致裸电荷和物理电荷不同。事实上, 这里仅仅相当于写下了个 Lagrangian 中的一个系数, 这个系数究竟是多少还需要实验去测量。

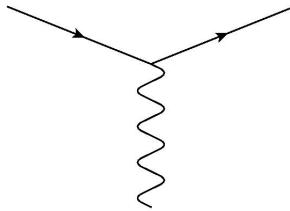
首先，就有旋量 QED 的生成泛函²:

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\mathcal{D} - m)\Psi + J_\mu A^\mu + \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta \right) \right] \quad (4.11)$$

根据微扰论的一贯操作，我们可以将相互作用项提出生成泛函:

$$\begin{aligned} Z[J, \eta, \bar{\eta}] &= \exp \left[ie \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta \eta_\alpha(x)} \right) (\gamma^\mu)_\alpha^\beta \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^\beta(x)} \right) \right] \\ &\times \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J_\mu(x) \Delta^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y) \right] \exp \left[i \int d^4x d^4y \bar{\eta}^\alpha(x) S_\alpha^\beta(x-y) \eta_\beta(y) \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

展开每一个指数，就得到了 Feynman 图。由于 Fermion 传播子两端是不一样的 Fermion 外源，我们可以在 Fermion 传播子上画一条箭头。对于一个 Fermion 传播子而言，箭头射入的端点意味着 $\bar{\eta}$ ，箭头射出的端点意味着 η 。可以看到微扰项提供了一个顶点，它“粘合”了 Fermion 线的一个箭头射入的端点、一个箭头射出的端点和光子线的一个端点。如下图所示。



对于生成泛函而言，一个 Feynman 图中的每一个上述顶点贡献因子 $ie\gamma^\mu \int d^4x$ ，每一个箭头射入的 Fermion 外源给出因子 $i \int d^4x \bar{\eta}(x)$ ，每一个箭头射出的 Fermion 外源给出因子 $i \int d^4x \eta(x)$ ，每一个光子外源给出因子 $i \int d^4x J_\mu(x)$ 。每一个 Fermion 传播子贡献因子 $-iS(x-y)$ ，每一个光子外源给出因子 $-i\Delta^{\mu\nu}(x-y)$ 。

由于 QED 顶点链接了两个 Fermion 传播子，吃掉了一个 $\bar{\eta}^\beta$ 和一个 η_α ，留下因子 $S_\delta^\alpha (\gamma^\mu)_\alpha^\beta S_\beta^\gamma$ 。于是我们说，旋量指标是逆着 Fermion 线收缩的。

和之前相同，由于交换任意的顶点坐标、传播子的端点坐标和光子传播子的两个顶点的操作都使 Feynman 图的值不变，于是我们可以对这些操作后的图求和，这抵消了 Taylor 展开和自由光子生成泛函带来的因子 $1/(V!P_\gamma!P_f!2^{P_\gamma})$ 。如果这些操作不但使得积分后的值不变，且使得被积函数不变，我们便在求和中重复计算了这个图。于是为了得到正确的展开结果，还需要对 Feynman 图除一个对称因子 $1/S$ 。

对于旋量 QED 而言，由于 Fermion 线首尾交换后并非不变，并且两点之间不可能连多个全同传播子，光子传播子也不可能首尾相连，于是对于一个联通图而言，对称因子的来源就只有 Feynman 图的旋转轴、反射轴。

最后，Fermion 圈还会带来额外的负号。例如，对于一个具有两条光子外线的 Fermion 圈，它对应生成泛函的以下部分:

$$\left(ie \int d^4x_1 \bar{\delta}_1 \delta_1 \right) \left(ie \int d^4x_2 \bar{\delta}_2 \delta_2 \right) \left(i \int d^4x d^4y \bar{\eta} S \eta \right) \left(i \int d^4x d^4y \bar{\eta} S \eta \right) \quad (4.13)$$

²我们在第二章中已经看到了，在定义这个理论的过程中，是一定需要做重整化的。我们在这里没有考虑这个操作引入的重整化因子，是因为我们在这一阶只会将 Feynman 振幅等量计算树图阶。由于我们仅仅对自由场论了一个微扰，于是所有的重整化因子都是 $O(e)$ 以上的。于是忽略这些重整化因子是不影响树图阶的结果的。

由于形成圈，中间的 $\eta, \bar{\eta}$ 和外侧的 $\eta, \bar{\eta}$ 有相同的坐标。当我们按照这个顺序作用泛函导数算子时，我们就一定会由于交换引入一个负号。这个过程可以推广到任意的 Fermion 圈，从而对于每一个 Fermion 圈，我们还需要乘上一个额外的因子 (-1)。

有了这些规则之后，我们只需要画出所有 Feynman 图，按照上述规则求出它们的值，然后对它们求和，就能得到 QED 的生成泛函。按照和上一章中类似的讨论，也可以写出 $Z = e^{iW}$ ，其中 iW 就是对所有联通的、非真空的 Feynman 图的贡献求和。

根据旋量场和矢量场的 LSZ 约化公式，如果要求出 S-矩阵，就需要考虑有以下形式的关联函数：

$$\langle \Omega | T\{A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_l) \Psi_{\alpha_1}(y_1) \dots \Psi_{\alpha_m}(y_m) \bar{\Psi}^{\beta_1}(z_1) \dots \bar{\Psi}^{\beta_n}(z_n)\} | \Omega \rangle \quad (4.14)$$

之前的讨论告诉我们，这个关联函数的联通部分就等于：

$$\prod_{i=1}^l \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x_i)} \right) \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^{\alpha_j}(y_j)} \right) \prod_{k=1}^n \left(i \frac{\delta}{\delta \eta_{\beta_k}(z_k)} \right) Z[\eta, \bar{\eta}, J] |_{\eta, \bar{\eta}, J=0} \quad (4.15)$$

这相当于给 Feynman 图中的每一个外线标记一个坐标，并且考虑所有拓扑不同的标记方式。由于 Grassmann 变量的导数算子总是对第一个 Grassmann 变量作用，这也相当于更换不同泛函导数算子的位置。由于不同泛函导数算子是反对易的，在这个过程中就可能产生额外的符号。

由于大部分情况下，我们感兴趣的并不是 $i\mathcal{M}$ ，而是其模方 $|\mathcal{M}|^2$ 。于是我们可以仅考虑不同拓扑的 Feynman 图之间相对的符号。一个判断两个图之间相对符号的方法如下：如果我们将所有入射的外源画在最左边，并固定所有它们标记的坐标；将所有的 Dirac 场传播子画为水平的，箭头从左向右；将所有出射外源画在最右边，记录这些出射的外源标记的 4-坐标。那么对于两个图，如果向内的外源上标记的 4-坐标之间相差一个奇置换，那么这两个图间就相差一个负号。如果相差一个偶置换，那么符号就相同³。

由于旋量 QED 中对称因子的来源就只有 Feynman 图的旋转轴、反射轴。于是圈对称因子总是 1。我们只要画出所有具有正确外线的、拓扑不同的联通图，将所有外源的贡献替换为 1，再对这些图的贡献求和，就得到了联通关联函数。为了求出 Feynman 振幅，需要将这个联通关联函数代入 LSZ 约化公式。回忆我们在第二章给出的替换规则：

$$b_s^\dagger(p)_{\text{in}} \rightarrow +i \int d^4x \bar{\Psi}(x) \left(i \overleftarrow{\partial} + m_{\text{ph}} \right) u_s(p) e^{+ipx}, \quad b_s(p)_{\text{out}} \rightarrow +i \int d^4x e^{-ipx} \bar{u}_s(p) \left(-i \overrightarrow{\partial} + m_{\text{ph}} \right) \Psi(x) \quad (4.16)$$

$$d_s^\dagger(p)_{\text{in}} \rightarrow -i \int d^4x e^{+ipx} \bar{v}_s(p) \left(-i \overrightarrow{\partial} + m_{\text{ph}} \right) \Psi(x), \quad d_s(p)_{\text{out}} \rightarrow -i \int d^4x \bar{\Psi}(x) \left(i \overleftarrow{\partial} + m_{\text{ph}} \right) v_s(p) e^{-ipx} \quad (4.17)$$

$$a_\lambda^\dagger(k)_{\text{in}} \rightarrow i \varepsilon_\lambda^{*\mu}(k) \int d^4x e^{+ikx} (-\partial^2) A_\mu(x), \quad a_\lambda(k)_{\text{out}} \rightarrow i \varepsilon_\lambda^\mu(k) \int d^4x e^{-ikx} (-\partial^2) A_\mu(x) \quad (4.18)$$

利用和 3.7 节中类似的方法，我们也可以将外腿上的所有结构归结进一个正规传播子中。对 Fermion 和光子而言，我们也可以仿效 2.8 节中的处理，得到它们的 Lehmann-Kallen

³这就相当于，先作用所有对 η 和 J 的泛函导数。对于两个拓扑不同的图，我们可以将一个图中所有剩下的待标记的外源做一个置换，将其置换为另一个图的外源的顺序。那么这个过程中引入的符号就是两个图的相对符号，也就是这个置换的奇偶性。

谱分解。这些谱分解告诉我们，光子的正规传播子在 $k^2 = 0$ 处有一个奇点，Fermion 正规传播子在 $p = -m_{\text{ph}}$ 处有一个奇点，且其留数均为 1。这告诉我们，相应的波算符可以消去外腿上的正规传播子，留下一个截肢图和一系列相因子 $e^{\pm ipx}$ ，和一系列旋量 $u_s(p), v_s(p)$ 。从上面的替换规则中可以看出：一个入射的 Fermion 对应一条入射 Fermion 线，给出因子 $u_s(p)e^{ipx}$ ；入射的反 Fermion 对应出射 Fermion 线，给出 $\bar{v}_s(p)e^{ipx}$ ；出射 Fermion 对应出射 Fermion 线，给出 $\bar{u}_s(p)e^{-ipx}$ ，出射反 Fermion 对应入射 Fermion 线，给出 $v_s(p)e^{-ipx}$ 。

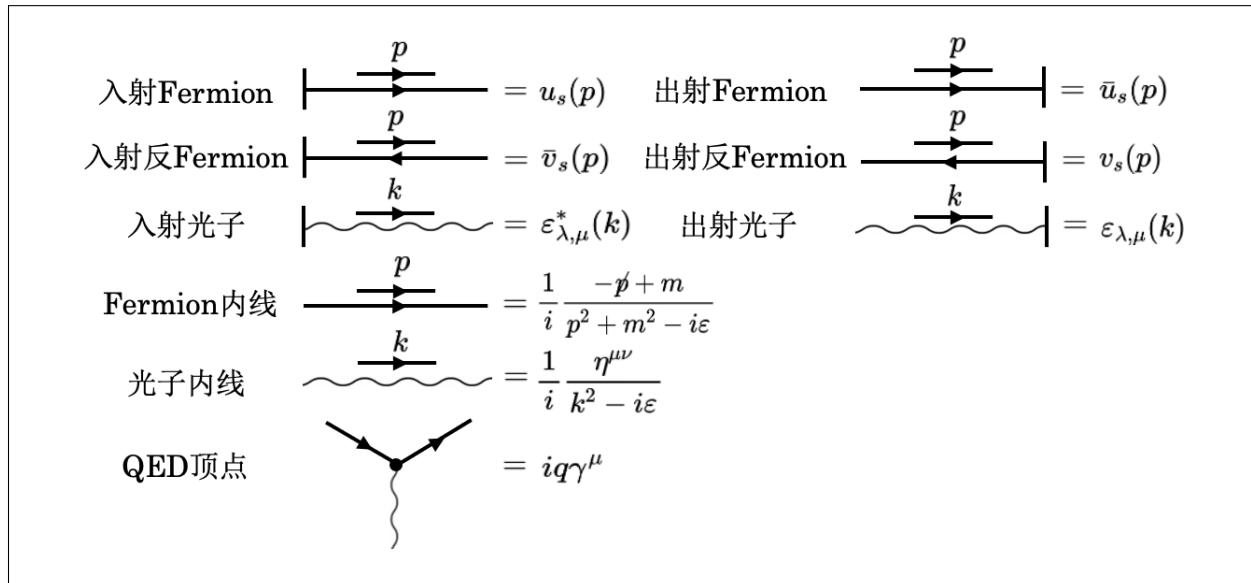
再对每个顶点上的坐标积分，得到每个顶点上的动量守恒条件和一个全局的因子 $(2\pi)^4 \delta^4(k_{\text{in}} - k_{\text{out}})$ ，它被我们吸收进了 Feynman 振幅的定义中。于是就得到了下面的 Feynman 规则。

综上所述，如果我们想求出 QED 中的一个散射过程的 Feynman 振幅，就有以下的步骤：

如何求一个 QED 散射过程的 Feynman 振幅

- 对每一个入射 Fermion 和出射反 Fermion，画出一条 Fermion 线向内的外线。对每一个入射反 Fermion 和出射 Fermion，画出一条 Fermion 线向外的外线。在每条外线上标记相应的人/出射动量。
- 画出所有包含这些外线和 QED 顶点的，联通的，截肢的，拓扑不同的 Feynman 图。
- 设出每一个圈上的圈动量。通过顶点上的动量守恒，得到每条内线上的动量。
- 按照下面给出的 QED 的 Feynman 规则定出每个图的值。除此之外，图中每有一个 Fermion 圈，就额外具有因子 (-1) 。对所有圈动量积分，就得到一个图对 Feynman 振幅 $i\mathcal{M}$ 的贡献。
- 判断两个图相对符号的规则：将所有入射 Fermion 线画在最左边，将所有的 Dirac 场传播子画为水平的，箭头从左向右，将所有出射 Fermion 线画在最右边，记录这些出射的外源对应的粒子。那么对于两个图，如出射 Fermion 线对应的粒子间相差一个奇置换，那么这两个图间就相差一个负号。如果相差一个偶置换，那么符号就相同。选定一个图为参考，根据这个规则定出每一个图的符号。对所有这些图的贡献加起来，就得到 Feynman 振幅 $i\mathcal{M}$ 。

旋量 QED 的 Feynman 规则



到此为止，我们就明白了如何求出旋量 QED 中的 Feynman 振幅，从而也就知道了如何对散射截面、衰变率做出预言。不幸的是，我们现在手中的工具只能允许我们将这些散射截面计算到树图阶。如果要考虑圈图的话，就将不可避免的遭遇紫外发散。这些紫外发散的处理方式将会在下一章讨论。

4.3 Discrete Symmetries of Spinor QED

在实际计算这些截面和衰变率之前，先考虑一下旋量 QED 的分立对称性是有益的。在上面的两节中，我们通过要求体系具有局域的 U(1) 规范对称性，从而写出了理论的 Lagrangian。这是一种“从上至下”的利用对称性的方式——在构建理论的时候先假设我们的理论具有特定的对称性，再从这个对称性中得到这个理论中的性质。对于上面的讨论而言，由于局域规范对称性是一个很强大的对称性，我们可以直接从中得到作用量的形式。

这里对分立对称性的讨论也是“从上至下”的：在构建理论的时候，就假设旋量 QED 具有宇称、时间反演和电荷共轭分立对称性。在下面可以看到，我们可以从这个假设中得到规范场的内禀 C, P, T 宇称所满足的关系。

首先对 Lagrangian 作用宇称变换：

$$P^{-1}\bar{\Psi}\mathcal{A}\Psi P = (P^{-1}\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi P)(P^{-1}A_\mu P) = -\eta\mathcal{P}_\nu^\mu\mathcal{P}_\mu^\sigma\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi A_\sigma = -\eta\bar{\Psi}\mathcal{A}\Psi \quad (4.19)$$

由于要求旋量 QED 具有宇称下的分立对称性，也就是说其 Lagrangian 在宇称下不变。从而：

$$P^{-1}\bar{\Psi}\mathcal{A}\Psi P = \bar{\Psi}\mathcal{A}\Psi \quad (4.20)$$

于是我们得到，电磁场的 P 宇称就是 $\eta = -1$ 。于是电磁场的变换关系就是：

$$\begin{aligned} PA_\mu(x)P^{-1} &= \mathcal{P}_\mu^v A_v(\mathcal{P}x) \\ Pa_\lambda^\dagger(k)P^{-1} &= -\eta a_\lambda^\dagger(-k) \end{aligned} \quad (4.21)$$

接下来考虑时间反演：

$$T^{-1}\bar{\Psi}\mathcal{A}\Psi T = (T^{-1}\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi T)(T^{-1}A_\mu T) = \zeta\mathcal{P}_\nu^\mu\mathcal{P}_\mu^\sigma\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi A_\sigma = \zeta\bar{\Psi}\mathcal{A}\Psi \quad (4.22)$$

要求旋量 QED 具有时间反演下的对称性，从而 $\zeta = 1$ ，也就是：

$$\begin{aligned} TA_v(x)T^{-1} &= \mathcal{P}_v^\mu A_\mu(\mathcal{T}x) \\ Ta_\lambda^\dagger(k)T^{-1} &= a_{-\lambda}^\dagger(-k) \end{aligned} \quad (4.23)$$

最后是电荷共轭。由于光子的反粒子就是自身，从而有 $Ca_\lambda^\dagger(k)C^{-1} = \xi a_\lambda^\dagger(k)$ ，也就有 $CA_\mu(x)C^{-1} = \xi A_\mu(x)$ 。由于费米子流满足 $C^{-1}\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi C = -\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ ，从而光子的 C 宇称也就是 $\xi = -1$ 。于是：

$$\begin{aligned} CA_\mu(x)C^{-1} &= -A_\mu(x) \\ Ca_\lambda^\dagger(k)C^{-1} &= -a_\lambda^\dagger(k) \end{aligned} \quad (4.24)$$

我们为什么要在这个地方讨论旋量 QED 的分立对称性呢？其原因就是，通过分立对称性，可以直接看出某些 Feynman 图对散射振幅的贡献为 0，也就是这些图被分立对称性所禁戒。从而在考虑一个散射过程时，就不用画出这些被禁戒的 Feynman 图。这具体就表述为下面的定理：

Furry's Theorem. 任何具有奇数条光子外线，且没有 Fermion 外线的散射振幅均为 0。

Proof. 由 LSZ 约化公式，这个散射振幅来自于关联函数 $\langle\Omega|T\{A_{\mu_1}(x_1)\dots A_{\mu_n}(x_n)\}|\Omega\rangle$ ，其中 n 是奇数。于是考虑 $\langle\Omega|A_{\mu_1}(x_1)\dots A_{\mu_n}(x_n)|\Omega\rangle$ 。由于在微扰量子场论中，真空态是唯一的，于是对真空态作用任何的分立对称变换都只能得到真空。对于电荷共轭，这就是：

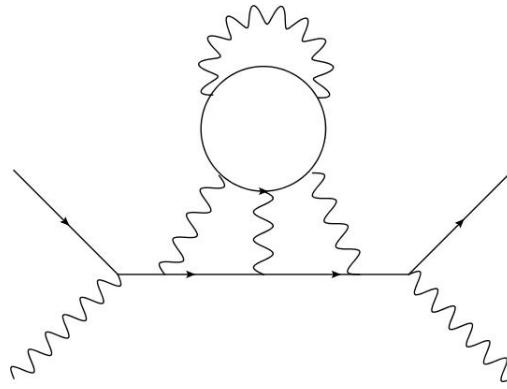
$$C|\Omega\rangle = |\Omega\rangle \quad (4.25)$$

于是，我们可以在关联函数中插入两个 C 变换：

$$\begin{aligned} \langle\Omega|A_{\mu_1}(x_1)\dots A_{\mu_n}(x_n)|\Omega\rangle &= \langle\Omega|C^{-1}A_{\mu_1}(x_1)\dots A_{\mu_n}(x_n)C|\Omega\rangle \\ &= \langle\Omega|C^{-1}A_{\mu_1}(x_1)CC^{-1}\dots CC^{-1}A_{\mu_n}(x_n)C|\Omega\rangle \\ &= (-1)^n\langle\Omega|A_{\mu_1}(x_1)\dots A_{\mu_n}(x_n)|\Omega\rangle \end{aligned} \quad (4.26)$$

从中看出，当 n 为奇数时，任何的 $\langle\Omega|A_{\mu_1}(x_1)\dots A_{\mu_n}(x_n)|\Omega\rangle$ 均为 0，于是其编时乘积也是 0。通过 LSZ 约化公式就可以看出，这个过程的散射振幅就是 0。□

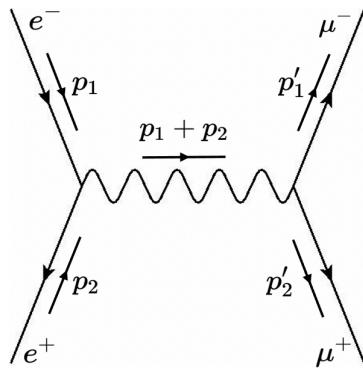
Furry 定理不但说明了形如 $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ 的过程被电荷共轭对称性禁戒，还说明了我们可以不用考虑具有仅含奇数条光子外线的子图的 Feynman 图。这是由于，如果一个 Feynman 图具有一个子图，这个子图去掉外线的值一定是该 Feynman 图的因子。由于所有这样的子图之和为 0，从而具有这些子图对散射振幅的总贡献也为 0。故我们可以不用考虑具有这类子图的 Feynman 图，例如下图。



4.4 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ and Crossing Symmetry

Feynman Amplitudes and Crosssections

在下面的几节中，我们就计算几个典型的旋量 QED 过程，计算出它们的散射截面。考慮的第一个过程是是 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 。对于树图阶的这个过程，只有一个 Feynman 图：



根据上面给出的旋量 QED 的 Feynman 规则，就有：

$$i\mathcal{M} = \bar{v}_{s_2}(p_2)(ie\gamma^\mu)u_{s_1}(p_1) \left(\frac{1}{i} \frac{\eta^{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \right) \bar{u}_{s'_1}(p'_1)(ie\gamma^\nu)v_{s'_1}(s_1) \quad (4.27)$$

由于 \mathcal{M} 是一个标量，于是对其做旋量共轭得到的就是其自身。从而：

$$|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\bar{\mathcal{M}} = \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4} [\bar{v}_{s_2}(p_2)\gamma^\mu u_{s_1}(p_1)\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma^\nu v_{s_2}(p_2)] [\bar{u}_{s'_1}(p'_1)\gamma_\mu v_{s'_2}(p'_2)\bar{v}_{s'_2}(p'_2)\gamma_\nu u_{s'_1}(p'_1)] \quad (4.28)$$

并且由于：

$$\begin{aligned} \bar{v}_{s_2}(p_2)\gamma^\mu u_{s_1}(p_1)\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma^\nu v_{s_2}(p_2) &= \bar{v}_{s_2}^\alpha(p_2)(\gamma^\mu)_\alpha^\beta u_{s_1,\beta}(p_1)\bar{u}_{s_1}^\gamma(p_1)(\gamma^\nu)_\gamma^\delta v_{s_2,\delta}(p_2) \\ &= \text{Tr}[(v_{s_2}(p_2)\bar{v}_{s_2}(p_2))\gamma^\mu (u_{s_1}(p_1)\bar{u}_{s_1}(p_1))\gamma^\nu] \end{aligned} \quad (4.29)$$

从而：

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4} \text{Tr}[v_{s_2}(p_2)\bar{v}_{s_2}(p_2)\gamma^\mu u_{s_1}(p_1)\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma^\nu] \text{Tr}[u_{s'_1}(p'_1)\bar{u}_{s'_1}(p'_1)\gamma_\mu v_{s'_2}(p'_2)\bar{v}_{s'_2}(p'_2)\gamma_\nu] \quad (4.30)$$

由于在大部分的散射实验中，我们只是将两束电子对撞，然后通过数不同角度的探测器中检测到多少个 μ 子来得到散射截面。在这个过程中，我们并不检测初末态粒子的自旋。于是在实验中能够探测到的是对初态粒子的自旋取平均、对末态粒子的自旋求和的结果，也就是：

$$\overline{\sum}|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s'_1, s'_2} |\mathcal{M}_{s_1, s_2, s'_1, s'_2}|^2 \quad (4.31)$$

我们还知道以下的 spin sum 关系：

$$\sum_s u_s(p) \bar{u}_s(p) = -\not{p} + m, \quad \sum_s v_s(p) \bar{v}_s(p) = -\not{p} - m \quad (4.32)$$

于是：

$$\overline{\sum}|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4} \text{Tr} [(-\not{p}_2 - m_e) \gamma^\mu (-\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{Tr} [(-\not{p}'_1 + m_\mu) \gamma_\mu (-\not{p}'_2 - m_\mu) \gamma_\nu] \quad (4.33)$$

为了计算这个，就需要知道形如 $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu]$, $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma]$ 的 Gamma 矩阵迹如何运算。可以证明⁴:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = -4\eta^{\mu\nu}, \quad \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4[\eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}] \quad (4.34)$$

代入 $\overline{\sum}|\mathcal{M}|^2$ 的表达式，经过复杂而冗长的计算，最终就得到了：

$$\overline{\sum}|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{(p_1 + p_2)^4} [(p_1 \cdot p'_1)(p_2 \cdot p'_2) + (p_1 \cdot p'_2)(p_2 \cdot p'_1) - m_\mu^2(p_1 \cdot p_2) - m_e^2(p'_1 \cdot p'_2) + 2m_e^2 m_\mu^2] \quad (4.35)$$

由于 $\overline{\sum}|\mathcal{M}|^2$ 是一个 Lorentz 标量，而可以用动量构造出的 Lorentz 标量也只有以下的三个 Mandelstam 变量：

$$s = -(p_1 + p_2)^2, \quad t = -(p_1 - p'_1)^2, \quad u = -(p_1 - p'_2)^2 \quad (4.36)$$

于是我们一定可以将振幅写为 s , t , u 和初末态粒子质量的函数。并且由于三个 Mandelstam 变量中只有两个是独立的，它们之间存在关系 $s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m'_1^2 + m'_2^2 = 2m_e^2 + 2m_\mu^2$ 。也就是说我们原则上可以将振幅写为质量和两个 Mandelstam 变量的函数。Mandelstam 变量的这两个自由度也就相当于质心系中动量 \mathbf{k} 和散射角 θ 的两个自由度。

对于上面的这个 Feynman 振幅，就可以将其用 Mandelstam 变量改写为：

$$\overline{\sum}|\mathcal{M}|^2 = \frac{2e^4}{s^2} [(t^2 + u^2) + (s - t - u)(m_\mu^2 + m_e^2) + (m_\mu^4 + m_e^4)] \quad (4.37)$$

为了讨论的简便起见，我们仅仅考虑这个式子的极端相对论极限，也就是 $p \gg m_\mu, m_e$ 的情形。此时后面三个含质量的项就全部为 0，于是：

$$\overline{\sum}|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{(p_1 + p_2)^4} [(p_1 \cdot p'_1)(p_2 \cdot p'_2) + (p_1 \cdot p'_2)(p_2 \cdot p'_1)] \quad (4.38)$$

⁴具体的证明和更多类似的结果见本章附录。

在质心系中, 令动量为 k , 散射角为 θ 。那么就有:

$$p_1 = (k, 0, 0, k), p_2 = (k, 0, 0, -k), p'_1 = (k, k \sin \theta, 0, k \cos \theta), p'_2 = (k, -k \sin \theta, 0, -k \cos \theta) \quad (4.39)$$

代入 $\sum |\mathcal{M}|^2$ 的表达式, 就可以得到:

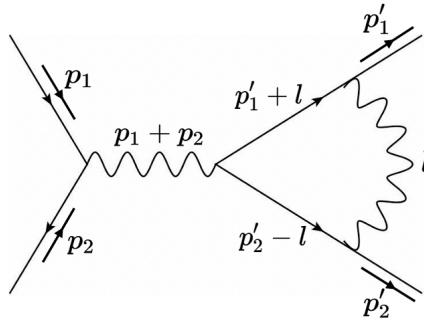
$$\sum |\mathcal{M}|^2 = e^4(1 + \cos^2 \theta) \quad (4.40)$$

在前面的讨论中, 我们已经知道了一个 $2 \rightarrow 2$ 的散射的散射截面为:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 s} \frac{|\mathbf{k}'_1|_{CM}}{|\mathbf{k}_1|_{CM}} = \frac{e^4(1 + \cos^2 \theta)}{256\pi^2 k^2} = \frac{\alpha^2}{16k^2}(1 + \cos^2 \theta) \quad (4.41)$$

这就是极端相对论情形下, 过程 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 的散射截面。

值得一提的是, 在实验中, 实际测出的 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 散射截面并不完全和上面的计算中一致。当我们考虑截面和质心系能量 s 之间的关系时, 会发现在 $s = 4m_\mu^2$ 附近存在一个峰。这个峰的出现原因是什么呢? 考虑以下的 Feynman 图:



这是 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 的 Feynman 振幅的高阶修正中的一个图。虽然我们还不会计算这个圈图, 但是我们可以看看这个图在 $s \approx 4m_\mu^2$ 附近的行为。我们在质心系中考虑这个图对 $i\mathcal{M}$ 的贡献, 此时就有 $p_1 = q, p_2 = -q$:

$$i\mathcal{M} = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \bar{v}_{s_2}(-p) (ie\gamma^\mu) u_{s_1}(p) \left(\frac{1}{i} \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{1}{l^2} \right) \times \bar{v}_{s'_2}(-q) (ie\gamma^\nu) \left(\frac{1}{i} \frac{(-q - l) + m}{(q + l)^2 + m_\mu^2} \right) (ie\gamma_\mu) \left(\frac{1}{i} \frac{(q + l) + m_\mu}{(q + l)^2 + m_\mu^2} \right) (ie\gamma_\nu) u_{s'_1}(q) \quad (4.42)$$

如果有 $s - 4m_\mu^2 \ll m_\mu^2$, 那么可以定义一个 $v = \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} \ll 1$ 。考虑光子动量在 $(m_\mu v^2, m_\mu v, m_\mu v, m_\mu v)$ 附近时的积分。此时 $(q + l)^2 + m_\mu^2 \approx m_\mu^2 v^2$, $q + l \approx -m\gamma^0$, $u(q) \approx \sqrt{m}$, 而这个区间的积分测度 $d^4 l \approx v^5$ 。于是在这个区间对这个积分值的贡献就有如下的随 v 的依赖关系:

$$i\mathcal{M} = \alpha \times O\left(\frac{\alpha}{v}\right) = (i\mathcal{M})_{\text{tree}} \times O\left(\frac{\alpha}{v}\right) \quad (4.43)$$

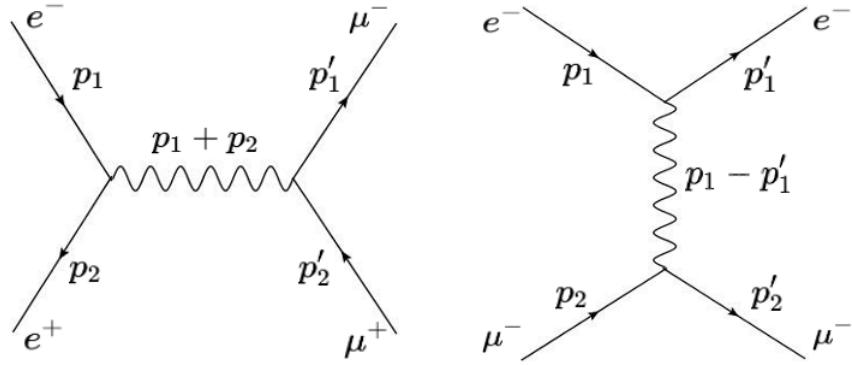
我们可以看到, 当 $v < \alpha \approx 1/137$ 时, 圈图的贡献是高于树图阶的贡献的。从而在 $s = 4m_\mu^2$ 附近, 我们的微扰论就会坏掉, 对截面的贡献占主导的是非微扰效应。这个非微扰效应是什么呢? 答案是束缚态。当我们的质心系能量接近 μ 子的产生阈 $4m_\mu^2$ 时, 末态的 μ 子速度将很小。它们可能会形成一个二体束缚态。如果想要计算正负电子到这个二体束缚态的散射截面, 我们就需要用有效场论、NR 因子化等方法去处理。

$e\text{-}\mu$ Scattering and Crossing Symmetry

我们也可以用同样的方法计算过程 $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ 的 Feynman 振幅。最终的结果是：

$$\sum |M|^2 = \frac{2e^4}{t^2} [(s^2 + u^2) + (t - s - u)(m_\mu^2 + m_e^2) + (m_\mu^4 + m_e^4)] \quad (4.44)$$

可以发现，这和我们计算出的 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 的 Feynman 振幅仅仅相差一个交换 $s \leftrightarrow t$ 。这也可以通过 Feynman 图来看出：



将这个图旋转 90 度，就看出，这两个图之间可以通过做替换 $p_2 \leftrightarrow -p'_1$ 来互相转换。而这个替换对 Mandelstam 变量的作用就是 $s \leftrightarrow t$ 。这就解释了这两个过程的平均 Feynman 振幅间的对称性。

我们还可以将这推广到一个普遍的结论，也就是**交叉对称性**：当我们一个初态的粒子变为末态动量相反的反粒子，再将一个末态粒子变为初态动量相反的反粒子时， $|M|^2$ 不变。也就是说 $|\mathcal{M}(\phi(p) + \dots \rightarrow \psi(k) + \dots)|^2 = |\mathcal{M}(\bar{\psi}(-k) \dots \rightarrow \bar{\phi}(-p) + \dots)|^2$ 。

其证明十分简单：对于每个前一过程的 Feynman 图，我们都可以通过将考虑的初态粒子对应的外线移到末态，考虑的末态粒子外线移到初态来画出一个后一过程的 Feynman 图。由于入射粒子“注入” Feynman 图的动量是 p ，末态粒子“注入” Feynman 图的动量是 $-p$ 。于是在这个转移过程中，需要将相应粒子的动量反号。这样以来，这两个图除去这根外线之外的所有因子都相等。

对于这个外线因子：首先标量粒子的外线因子为 0，于是初末外线因子自然相等。对于 Fermion 外线而言，可以证明关系：

$$u_s(p)\bar{u}_s(p) = \frac{1}{2} (1 - s\gamma_5 \not{z}) (-\not{p} + m), \quad v_s(p)\bar{v}_s(p) = \frac{1}{2} (1 - s\gamma_5 \not{z}) (-\not{p} - m) \quad (4.45)$$

其中矢量 z 在 p 静止系中是 $(0, \hat{z})$ 。从中可以知道，如果将初态的 p 替换为末态的 $-p$ ，那么相应的， $|M|^2$ 中对应这个外线的因子就相差一个负号。于是交叉对称性对 Fermion 成立，只不过当我们每移动一个费米子时，需要加上一个额外的负号。

对于光子而言，由于：

$$\varepsilon_\lambda^*(p) = \exp(i\eta K) \varepsilon_\lambda^*(0) = (\exp(-i\eta K) \varepsilon_\lambda^*(0))^* = (\varepsilon_\lambda(-p))^* \quad (4.46)$$

也就是说，交叉前后的外线因子只差一个复共轭。从而交叉前后的 $|M|^2$ 就相同。这就完成了我们对交叉对称性的证明。

4.5 Helicity Amplitudes

上面考虑了对初态自旋平均、末态自旋后的 Feynman 振幅。而有时候我们也不对这些自旋做平均，而考虑初末态具有特定螺旋度的过程的振幅，也就是螺旋度振幅。在下面的讨论中我们会看到，这些螺旋度振幅的角度依赖性可以不用进行复杂的旋量计算，而用十分简单的方式得出。

首先我们看看 QED Lagrangian 的螺旋度结构。通过将 Dirac 旋量场分为左手和右手分量 Ψ_L, Ψ_R ，就有：

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = A_\mu \begin{pmatrix} \Psi_R^\dagger & \Psi_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} = A_\mu (\Psi_R^\dagger \sigma^\mu \Psi_R + \Psi_L \bar{\sigma}^\mu \Psi_L) \quad (4.47)$$

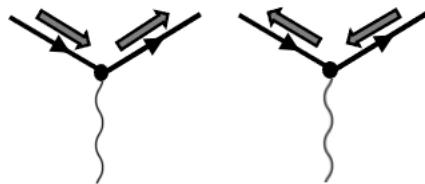
也就是说，对于 $\Psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi, \Psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi$ 而言，就有⁵：

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = A_\mu (\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \Psi_L + \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R) \quad (4.48)$$

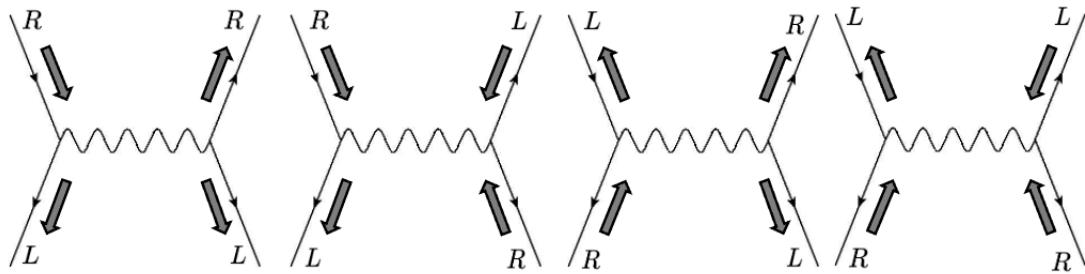
为了标记不同手征的场，我们可以引入下面的记号：

$$\overrightarrow{\text{---}} = \Psi_R \quad \overleftarrow{\text{---}} = \Psi_L$$

从 Lagrangian 的形式中就能读出，只存在以下两种螺旋度的 QED 顶点：



按照类似的讨论，我们发现质量项会改变螺旋度。在极端相对论情况下，可以将质量项取为 0。于是这个顶点会对初末态粒子的螺旋度有一定的限制。例如对于过程 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 而言，初末态粒子的螺旋度就只能有以下四种：

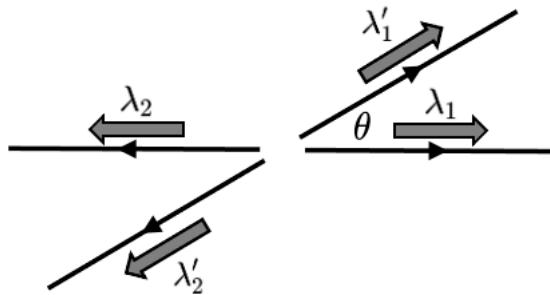


其中外线上的标注对应入射和出射费米子的手征性。我们在之前讨论过，一个右手旋量场对应右手正粒子，左手反粒子；左手旋量场对应左手正粒子，右手反粒子。上面的这些讨

⁵这里的 Ψ_L 和上一行中的 Ψ_L 是不同的。那里的 Ψ_L 是一个 Weyl 旋量，而这一行以及我们以后的讨论中， Ψ_L 都是一个 Dirac 旋量。

论就说明, 对于 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 而言, 初末态粒子的手征性就只有 $e_R^+e_L^- \rightarrow \mu_R^+\mu_L^-$, $e_R^+e_L^- \rightarrow \mu_L^+\mu_R^-$, $e_L^+e_R^- \rightarrow \mu_R^+\mu_L^-$, $e_L^+e_R^- \rightarrow \mu_L^+\mu_R^-$ 四种。这四种手征性就对应四种极化过程。

对于一个极化过程, 例如 $e_L^+e_R^- \rightarrow \mu_L^+\mu_R^-$, 其振幅的角度依赖性可以简单地从角动量理论得出。首先, 由于 Feynman 振幅 \mathcal{M} 是 Lorentz 不变的, 我们可以在质心系中考虑问题。在这个参考系中, 初态和末态的角动量如图所示:



于是, 令初态动量 p_1 的方向是 z 方向, 那么初态的角动量就是 $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, 方向向 z 。末态的角动量就是 $\lambda' = \lambda'_1 - \lambda'_2$, 方向沿 θ 方向。如果我们将所有除角动量外的量子数 (包括螺旋度, 粒子静止质量等等) 记为 α , 那么初态就可以写为 $|J, \alpha\rangle$, 末态就是 $|J', \alpha'\rangle$ 。我们要考虑的 Feynman 振幅实际上就是矩阵元 $\langle J', \alpha' | i\mathcal{M} | J, \alpha \rangle$ 。我们可以对它进行分波展开:

$$\langle J', \alpha' | i\mathcal{M} | J, \alpha \rangle = \sum_{j, j', m, m'} \langle J', \alpha' | j', m', \alpha' \rangle \langle j', m', \alpha' | i\mathcal{M} | j, m, \alpha \rangle \langle j, m, \alpha | J, \alpha \rangle \quad (4.49)$$

首先考虑中间的矩阵元。由于 $i\mathcal{M}$ 的 Lorentz 不变性, 它在旋转下按照平凡表示变化。那么根据 Wigner-Eckart 定理, 就有:

$$\langle j', m', \alpha' | i\mathcal{M} | j, m, \alpha \rangle = \langle j', m' | j, m \rangle \langle j', \alpha' | i\mathcal{M} | j, \alpha \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \langle j, \alpha' | i\mathcal{M} | j, \alpha \rangle \quad (4.50)$$

态 $|l, m, \alpha\rangle$ 是角动量 J_z 的, 具有本征值 m 的本征态, 而态 $|J, \alpha\rangle$ 是角动量 J_θ 的本征态。在 J_θ 表象下, 它可以被写为各 $|j, \lambda, \alpha\rangle$ 的叠加。根据 J_θ, J_z 表象间的变换关系, 它可以被写为:

$$|J', \alpha'\rangle = \sum_j a_j D(\theta) |j, \lambda', \alpha\rangle = \sum_{j, m} a_j D_{m, \lambda'}^{(j)}(0, \theta, 0) |j, m, \alpha\rangle \quad (4.51)$$

其中 $D_{mm'}^{(j)}(\psi, \theta, \phi)$ 是 Wigner 函数, 其宗量为 Euler 角。对于初态而言, 它也可以被展开为:

$$|J, \alpha\rangle = \sum_j b_j |j, \lambda, \alpha\rangle \quad (4.52)$$

从而, Feynman 振幅就可以被写为:

$$\begin{aligned} \langle J', \alpha' | i\mathcal{M} | J, \alpha \rangle &= \sum_{j, m} a_j b_j D_{m, \lambda'}^{(j)*}(0, \theta, 0) \delta_{m, \lambda} \langle j, \alpha' | i\mathcal{M} | j, \alpha \rangle \\ &= \sum_j (2j + 1) \langle j, \alpha' | i\mathcal{M} | j, \alpha \rangle D_{\lambda, \lambda'}^{(j)*}(0, \theta, 0) \end{aligned} \quad (4.53)$$

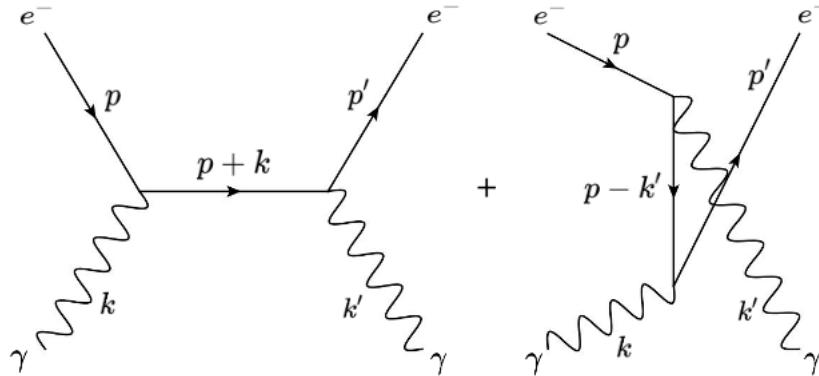
其中，我们将态 $|J, \alpha\rangle$ 对不同 j 的叠加系数 a_j, b_j 吸收进了约化矩阵元中。这个公式有时候也被称为 **Jacobi-Wick 公式**。

于是，如果我们有一个极化过程，已知其初末态的螺旋度为 λ, λ' ，总自旋为 j ，那么这个极化过程 $|\mathcal{M}|^2$ 的角分布就一定正比于 Wigner 函数 $|D_{\lambda\lambda'}^{(j)}(0, \theta, 0)|^2$ 。

就以 $e_L^+ e_R^- \rightarrow \mu_L^+ \mu_R^-$ 为例，初态两个粒子的螺旋度分别为 $+1/2$ 和 $-1/2$ ，于是总螺旋度就是 1。同理，末态粒子的总螺旋度也为 1。并且由于初态是两个自旋为 $1/2$ 的费米子，可能的自旋也只有 0 和 1。并且由于 $\lambda = 1$ ，一定有 $j = 1$ 。从而这个螺旋度振幅就应该正比于 $|D_{1,1}^{(1)}(0, \theta, 0)|^2 = \frac{1}{4}(1 + \cos \theta)^2$ 。按照同样的方法分析过程 $e_L^+ e_R^- \rightarrow \mu_R^+ \mu_L^-$ ，发现其 $|\mathcal{M}|^2$ 应该正比于 $\frac{1}{4}(1 - \cos \theta)^2$ 。

4.6 Compton Scattering

考虑的最后一个过程是 Compton 散射，也就是 $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ 。其树图阶的 Feynman 图是：



通过 QED 的 Feynman 规则，我们可以写出这个过程的 Feynman 振幅：

$$i\mathcal{M} = (ie)^2 \left(\frac{1}{i} \right) \varepsilon_{\lambda}^{*\mu}(k) \varepsilon_{\lambda'}^{\nu}(k') \left(\bar{u}_s(p) \gamma_{\mu} \frac{-\not{p} - \not{k} + m}{(p+k)^2 + m^2 - i\epsilon} \gamma_{\nu} u_{s'}(p') \right) + (ie)^2 \left(\frac{1}{i} \right) \varepsilon_{\lambda}^{*\mu}(k) \varepsilon_{\lambda'}^{\nu}(k') \left(\bar{u}_s(p) \gamma_{\nu} \frac{-\not{p} + \not{k'} + m}{(p-k')^2 + m^2 - i\epsilon} \gamma_{\mu} u_{s'}(p') \right) \quad (4.54)$$

和上面一样，考虑对初态自旋和极化求平均，对末态自旋和极化求和后的结果。在这个求平均的过程中就需要用到光子的极化求和，也就是 $\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_{\lambda}^{\mu}(k) \varepsilon_{\lambda}^{\nu}(k)$ 。于是我们就先来求出这个量。首先在 k 沿 z 方向的参考系中，有 $\varepsilon_{\pm} = (0, 1, \mp i, 0)/\sqrt{2}$ 。于是在这个参考系中，就有：

$$\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_{\lambda}^{\mu}(k) \varepsilon_{\lambda}^{\nu}(k) = \eta^{\mu\nu} + \hat{t}^{\mu} \hat{t}^{\nu} - \hat{z}^{\mu} \hat{z}^{\nu} \quad (4.55)$$

其中 \hat{t} 是 t 方向的单位向量，而 \hat{z} 是 z 方向的单位向量。我们接下来要将这个关系变换到任意的参考系中去。我们仍然将变换之后的 \hat{t} 称为 \hat{t} ，由于在 z 参考系中有关系 $\hat{t} \cdot \hat{z} = 0$, $\hat{z} \cdot \hat{z} = 1$ ，并且 $\varepsilon \cdot \hat{z} = 0$ 。从这些关系中就可以得到 \hat{z} 在这个参考系中的表达式：

$$\hat{z}^{\mu} = \frac{k^{\mu} + (\hat{t} \cdot k) \hat{t}^{\mu}}{[k^2 + (\hat{t} \cdot k)^2]^{1/2}} \quad (4.56)$$

代入极化求和的表达式，就有：

$$\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_{\lambda}^{\mu}(k) \varepsilon_{\lambda}^{\nu*}(k) = \eta^{\mu\nu} + \hat{t}^{\mu} \hat{t}^{\nu} - \frac{k^{\mu} + (\hat{t} \cdot k) \hat{t}^{\mu}}{\left[k^2 + (\hat{t} \cdot k)^2\right]^{1/2}} \frac{k^{\nu} + (\hat{t} \cdot k) \hat{t}^{\nu}}{\left[k^2 + (\hat{t} \cdot k)^2\right]^{1/2}} \quad (4.57)$$

接下来需要利用一个在后面才会被证明的结论——Ward 恒等式。我们知道，如果外线上有一个动量为 k 的光子，那么 Feynman 振幅总可以写为 $\mathcal{M} = \varepsilon^{\mu}(k) \mathcal{M}_{\mu}$ 。Ward 恒等式告诉我们：

$$k^{\mu} \mathcal{M}_{\mu} = 0 \quad (4.58)$$

从而，Feynman 振幅的模方可以写为 $|\mathcal{M}|^2 = \varepsilon^{\mu}(k) \varepsilon^{\nu*}(k) \mathcal{M}_{\mu} \mathcal{M}_{\nu}$ 。从而 $\varepsilon^{\mu}(k) \varepsilon^{\nu*}(k)$ 中含 k^{μ} 的项总要和一个 \mathcal{M}_{μ} 进行缩并，而这个缩并据 Ward 恒等式为 0。从而我们在考虑极化求和的时候可以扔掉所有 k^{μ} 项。也就是说，有：

$$\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_{\lambda}^{\mu}(k) \varepsilon_{\lambda}^{*\nu}(k) = \eta^{\mu\nu} + \hat{t}^{\mu} \hat{t}^{\nu} - \frac{(\hat{t} \cdot k)^2}{k^2 + (\hat{t} \cdot k)^2} \hat{t}^{\mu} \hat{t}^{\nu} \quad (4.59)$$

外线上的光子 on shell，于是 $k^2 = 0$ ，故后两项相抵消。于是我们最终得到，在考虑 Feynman 振幅的模方时，可以做替换：

$$\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_{\lambda}^{\mu}(k) \varepsilon_{\lambda}^{*\nu}(k) \rightarrow \eta^{\mu\nu} \quad (4.60)$$

有了这个关系，就可以分析 $|\mathcal{M}|^2$ 了：

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= e^4 \varepsilon_{\lambda}^{*\mu}(k) \varepsilon_{\lambda'}^{\nu}(k') \varepsilon_{\lambda}^{\sigma}(k) \varepsilon_{\lambda'}^{*\rho}(k') \\ &\times \left[\bar{u}_s(p) \left(\gamma_{\mu} \frac{-\not{p} - \not{k} + m}{(p+k)^2 + m^2} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \frac{-\not{p} + \not{k}' + m}{(p-k')^2 + m^2} \gamma_{\mu} \right) u_{s'}(p') \right] \\ &\times \left[\bar{u}_{s'}(p') \left(\gamma_{\rho} \frac{-\not{p} - \not{k} + m}{(p+k)^2 + m^2} \gamma_{\sigma} + \gamma_{\sigma} \frac{-\not{p} + \not{k}' + m}{(p-k')^2 + m^2} \gamma_{\rho} \right) u_s(p) \right] \end{aligned} \quad (4.61)$$

对末态自旋和极化求和，初态自旋和极化求平均，有：

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^4}{4} \text{Tr} \left[\left(\gamma_{\mu} \frac{-\not{p} - \not{k} + m}{-s + m^2} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \frac{-\not{p} + \not{k}' + m}{-u + m^2} \gamma_{\mu} \right) (-\not{p}' + m) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\gamma^{\nu} \frac{-\not{p} - \not{k} + m}{-s + m^2} \gamma^{\mu} + \gamma^{\mu} \frac{-\not{p} + \not{k}' + m}{-u + m^2} \gamma^{\nu} \right) (-\not{p} + m) \right] \\ &= e^4 \left[\frac{\langle \Phi_{ss} \rangle}{(m^2 - s)^2} + \frac{\langle \Phi_{us} \rangle + \langle \Phi_{su} \rangle}{(m^2 - u)(m^2 - s)} + \frac{\langle \Phi_{uu} \rangle}{(m^2 - u)^2} \right] \end{aligned} \quad (4.62)$$

其中：

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{ss} \rangle &= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_{\nu} (-\not{p} - \not{k} + m) \gamma_{\mu} (-\not{p} + m) \gamma^{\mu} (-\not{p} - \not{k} + m) \gamma^{\nu} (-\not{p}' + m)] \\ \langle \Phi_{uu} \rangle &= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_{\nu} (-\not{p} + \not{k}' + m) \gamma_{\mu} (-\not{p} + m) \gamma^{\mu} (-\not{p} + \not{k}' + m) \gamma^{\nu} (-\not{p}' + m)] \\ \langle \Phi_{su} \rangle &= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_{\mu} (-\not{p} - \not{k} + m) \gamma_{\nu} (-\not{p} + m) \gamma^{\mu} (-\not{p} + \not{k}' + m) \gamma^{\nu} (-\not{p}' + m)] \\ \langle \Phi_{us} \rangle &= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_{\mu} (-\not{p} + \not{k}' + m) \gamma_{\nu} (-\not{p} + m) \gamma^{\mu} (-\not{p} - \not{k} + m) \gamma^{\nu} (-\not{p}' + m)] \end{aligned} \quad (4.63)$$

为了化简这些 Gamma 矩阵的迹，需要下面的 Gamma 矩阵缩并公式，其证明可以在本章附录中找到：

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = -4, \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\gamma^\nu \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = -4\eta^{\nu\rho}, \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = 2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \quad (4.64)$$

经过复杂的计算之后，我们就能得到：

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 = e^4 \left[\frac{-2[su - m^2(3s+u) - m^4]}{(m^2-s)^2} + \frac{-4m^2(t-4m^2)}{(m^2-u)(m^2-s)} + \frac{-2[su - m^2(3u+s) - m^4]}{(m^2-u)^2} \right] \quad (4.65)$$

为了得到截面，需要分析一下这个体系的运动学。在实验室参考系，也就是电子静止的参考系考虑问题，那么有：

$$p = (m, 0, 0, 0), \quad k = (\omega, 0, 0, \omega), \quad k' = (\omega', \omega' \sin \theta, 0, \omega' \cos \theta), \quad p' = (E', -\omega' \sin \theta, 0, \omega - \omega' \cos \theta) \quad (4.66)$$

对于截面，就有：

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{4\omega m} \int (2\pi)^4 \delta^4(p + k - p' - k') \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega'} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} \overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{4\omega m} \int (2\pi)^4 \delta \left(\omega + m - \sqrt{m^2 + \omega^2 + (\omega')^2 - 2\omega\omega' \cos \theta} - \omega' \right) \frac{\omega'^2 d\omega'}{(2\pi)^3 2\omega' E'} \overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{4\omega m} \int \frac{d\Omega}{4\pi^2} \frac{\omega'}{4E'} \frac{1}{1 + \frac{\omega' - \omega \cos \theta}{E'}} \overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4(4\pi)^2 \omega m} \int d\Omega \frac{(\omega')^2}{\omega m} \overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (4.67)$$

根据 $E = m + \omega - \omega'$ ，并且 p' on shell，可以得到 $\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1 - \cos \theta)$ 。这可以将 $\overline{\sum} |\mathcal{M}|^2$ 化简。经过复杂的计算，最终的结果就是：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right] \quad (4.68)$$

这就是 Compton 散射截面的 Klein-Nishina 公式。

4.7 Unstable Particles and Resonances

在这一章的最后，我们回答第二章中留下的一个问题：什么是一个不稳定粒子？在当时我们说过，由于要求渐进场的多粒子态是完备的，于是渐进场中不能包含不稳定粒子的场。从而并不能在 S-矩阵两侧写出不稳定粒子，而只能在中间态中研究这些不稳定粒子。

那么该如何从中间态出发研究这些粒子呢？作为一个例子，考虑一个过程 $e^+e^- \rightarrow Z^* \rightarrow e^+e^-$ ，也就是两个电子经一个虚的 Z Boson 散射到两个电子。我们不加证明地给出电子和 Z Boson 相互作用的 Lagrangian 以及 Z Boson 的传播子⁶：

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{e}{4s_W c_W} \bar{\Psi} \gamma^\mu [-1 + (1 + 4s_W^2) \gamma_5] \Psi Z_\mu, \quad \Delta_Z^{\mu\nu} = \frac{1}{i} \frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2 + m_Z^2 - i\varepsilon} \quad (4.69)$$

⁶这个相互作用 Lagrangian 是电弱理论 Lagrangian 的一部分。这个 Lagrangian 和传播子的完整推导可见第八章。

这蕴涵着以下的 Feynman 规则⁷:

$$\begin{aligned}
 Z \sim \overbrace{\text{---}}^k &= \frac{1}{i} \frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2 + m_Z^2 - i\varepsilon} \\
 Z \sim \overbrace{\text{---}}^k &= \frac{ie}{4s_W c_W} \gamma^\mu [-1 + (1 + 4s_W^2)\gamma_5]
 \end{aligned}$$

这个过程有一个 s 道的 Feynman 图。从而树图阶的 Feynman 振幅 $i\mathcal{M}$ 中有一个因子 $\frac{1}{-s + m_Z^2 + i\varepsilon}$ 。可以看到，如果我们仅仅计算到树图阶的话，那么在 $s = m_Z^2$ 时，Feynman 振幅将会发散，从而散射截面发散。而在实验上，我们虽然在 $s = m_Z^2$ 时测到了一个很高的共振峰，但是并没有观察到任何的无穷大。于是为了研究这个共振峰，需要考虑微扰展开中的更高阶项。

类似我们在第三章中的讨论，如果需要考虑任意阶的微扰，我们可以将这个图中的两个顶点替换为电子-Z Boson 的正规顶点，将 Z Boson 的传播子替换为正规传播子。而这个正规传播子有形式：

$$\Delta_Z^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{i} \frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2 + m_Z^2 - i\varepsilon - \Pi_Z(k^2)} \quad (4.70)$$

其中 $\Pi_Z(k)$ 就是 Z Boson 的自能函数。由于高阶修正带来的 Z Boson 自能的虚部是非零的，从而 $|\mathcal{M}|^2$ 就正比于：

$$|\mathcal{M}|^2 \propto \frac{1}{(-s + m_Z^2 - \text{Re } \Pi_Z(k^2))^2 + (\text{Im } \Pi_Z(k^2))^2} \quad (4.71)$$

从中可以看到，满足 $s - m_Z^2 + \text{Re } \Pi_Z(-s) = 0$ 的点 s_0 附近会出现一个峰。我们将这个峰的中心定义为 Z Boson 的物理质量。也就是：

$$m_{Z,\text{ph}}^2 := m_Z^2 - \text{Re } \Pi_Z(-s_0) \quad (4.72)$$

在非相对论量子力学中，如果在散射能量附近存在一个不稳定的分立能级 E_0 ，其衰变率如果是 Γ ，那么散射截面会有行为：

$$\sigma \propto \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4} \quad (4.73)$$

这个现象被称为**共振散射**。我们也可以将这个公式推广到相对论情形：

$$\sigma \propto \frac{1}{p^2 + m^2 - im\Gamma} \quad (4.74)$$

这被称为 **Breit-Wigner 公式**，其中 m 是这个共振的中间态的静止质量。在考虑的这个过程中就是 Z Boson 的物理质量 $m_{Z,\text{ph}}$ 。于是我们就将 Z Boson 的衰变率**定义为**：

$$\Gamma = \frac{1}{m_{Z,\text{ph}}} \text{Im } \Pi_Z(-m_{Z,\text{ph}}^2) \quad (4.75)$$

⁷我们说 S 矩阵中不能有不稳定粒子，实际上是在说这些不稳定粒子不能出现在外线上，我们仍然可以考虑有关这个不稳定粒子场的顶点和传播子。

总结一下：由于我们不能将一个不稳定粒子放到出态和入态中，于是我们只能从中间态出发研究这些粒子的性质。对于一个散射过程，如果存在中间态为这个粒子的 Feynman 图，那么在我们加大质心系能量的时候，会出现一个对应这个粒子的共振峰。我们将这个共振峰的中心定义为这个粒子的质量，将共振峰的半高全宽定义为这个粒子的衰变率，或者衰变宽度。

这个式子告诉我们，为了计算出一个粒子的衰变率，就要计算出其自能在这个粒子 on shell 时的虚部。事实上，对于任何外线 on shell 的 Feynman 图，我们都可以利用下面讨论的光学定理来求出其虚部。为了看到光学定理，我们先从 S-矩阵的么正性开始：

$$S^\dagger S = 1 \quad (4.76)$$

由于我们在计算 Feynman 振幅时将 S-矩阵分成了 $S = 1 + iT$ ，于是上面的式子也可以写为：

$$i(T^\dagger - T) = T^\dagger T \quad (4.77)$$

如果我们考虑这一算符在态 $|i_{\text{in}}\rangle, |f_{\text{in}}\rangle$ 之间的矩阵元，就得到⁸：

$$i(\langle f_{\text{in}} | T^\dagger | i_{\text{in}} \rangle - \langle f_{\text{in}} | T | i_{\text{in}} \rangle) = \langle f_{\text{in}} | T^\dagger T | i_{\text{in}} \rangle \quad (4.78)$$

我们在 2.5 节中给出了一个基本假设：多粒子态在 Hilbert 空间上是完备的。在 2.8 节中，我们将多粒子态按照不同的不变质量分类，导出了传播子的 Lehmann-Kallen 谱表示。对多粒子态而言，除去这种分类方法之外，我们还可以按照其粒子组分进行分类。如果我们遍历了所有的粒子组分 X，并且遍历 X 对应的相空间中所有的态，那么就可以遍历所有的多粒子态。于是：

$$\sum_X \frac{1}{S_X} \int \prod_i \widetilde{dk}_i |X_{\text{in}}; k_1, \dots, k_{n_X} \rangle \langle X_{\text{in}}; k_1, \dots, k_{n_X}| = 1 \quad (4.79)$$

其中 X 是这些多粒子态的粒子组分，而 $i = 1, \dots, n_X$ 是这个多粒子态中每个粒子的标号。 S_X 是由于防止重复计数一个相同的多粒子态而引入的一个全同性因子，如果 X 中有 n_1 个粒子 X_1 , n_2 个粒子 X_2 , ..., 那么全同因子就是 $S_X = n_1! n_2! \dots$ 。有了这个关系之后，我们就可以将其插入 $\langle f | T^\dagger T | i \rangle$ 的右侧，得到：

$$\begin{aligned} & \langle f_{\text{in}} | T | i_{\text{in}} \rangle - \langle f_{\text{in}} | T^\dagger | i_{\text{in}} \rangle \\ &= i \sum_X \frac{1}{S_X} \int \prod_i \widetilde{dk}_i \langle f_{\text{in}} | T^\dagger | X_{\text{in}}; k_1, \dots, k_{n_X} \rangle \langle X_{\text{in}}; k_1, \dots, k_{n_X} | T | i_{\text{in}} \rangle \end{aligned} \quad (4.80)$$

而我们知道 T 矩阵元和 Feynman 振幅有以下的关系：

$$\langle f_{\text{in}} | T | i_{\text{in}} \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k_f - k_i) \mathcal{M}(i \rightarrow f) \quad (4.81)$$

从而：

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^4(k_f - k_i) [\mathcal{M}(i \rightarrow f) - \mathcal{M}^*(f \rightarrow i)] \\ &= i(2\pi)^4 \delta^4(k_f - k_i) \sum_X \frac{1}{S_X} \int \prod_j \widetilde{dk}_j (2\pi)^4 \delta^4(\sum_j k_j - k_i) \mathcal{M}(i \rightarrow X(k_1 \dots k_{n_X})) \mathcal{M}^*(f \rightarrow X(k_1 \dots k_{n_X})) \end{aligned} \quad (4.82)$$

⁸希望读到这里还没有忘记，S 算符是将“入”态和“出”态互相转换的算符， $\langle f_{\text{in}} | S | i_{\text{in}} \rangle = \langle f_{\text{out}} | i_{\text{in}} \rangle$ 。

回忆 dLIPS 定义为 $\prod_j \widetilde{dk}_j (2\pi)^4 \delta^4(\sum_j k_j - k_i)$ 。于是除了可以消去等式两边关于初、末动量的 delta 函数之外，还可以将内部关于 X 动量的 delta 函数吸入 dLIPS 中。从而就有：

$$\mathcal{M}(i \rightarrow f) - \mathcal{M}^*(f \rightarrow i) = i \sum_X \frac{1}{S_X} \int dLIPS_X \mathcal{M}(i \rightarrow X) \mathcal{M}^*(f \rightarrow X) \quad (4.83)$$

这个式子被称为推广的光学定理。如果我们取初末态相同，均为 $|A\rangle$ ，那么就有：

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{M}(A \rightarrow A) = \sum_X \frac{1}{S_X} \int dLIPS_X |\mathcal{M}(A \rightarrow X)|^2 \quad (4.84)$$

这就是光学定理。它完全是 S-矩阵幺正性的推论。我们通常将一个多粒子态到自身的散射称为向前散射，于是光学定理就将向前散射振幅的虚部和总散射振幅模方联系了起来。这给了我们一个计算自能虚部的方式：如果将初、末态的 A 取为一个 on shell 的单粒子态，那么根据 LSZ 约化，从 A 到 A 的向前散射振幅就是：

$$\mathcal{M}(A \rightarrow A) = (k^2 + m_{\text{ph}}^2)^2 \Delta(k^2) = (k^2 + m_{\text{ph}}^2)^2 \frac{1}{k^2 + m^2 - \operatorname{Re} \Pi(k^2) - i \operatorname{Im} \Pi(k^2)} \quad (4.85)$$

求其虚部，就可以看到：

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} \left(\frac{1}{k^2 + m^2 - \operatorname{Re} \Pi(k^2) - i \operatorname{Im} \Pi(k^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{k^2 + m^2 - \operatorname{Re} \Pi(k^2) - i \operatorname{Im} \Pi(k^2)} - \frac{1}{k^2 + m^2 - \operatorname{Re} \Pi(k^2) + i \operatorname{Im} \Pi(k^2)} \right) \\ &= \frac{\operatorname{Im} \Pi(k^2)}{(k^2 + m^2 - \operatorname{Re} \Pi(k^2))^2 + (\operatorname{Im} \Pi(k^2))^2} \sim \frac{\operatorname{Im} \Pi(k^2)}{(k^2 + m^2 - \operatorname{Re} \Pi(k^2))^2} \sim \frac{\operatorname{Im} \Pi(-m_{\text{ph}}^2)}{(k^2 + m_{\text{ph}}^2)^2} \end{aligned} \quad (4.86)$$

其中，倒数第二个约等号处利用了所谓的窄宽度近似，也就是 $\operatorname{Im} \Pi \ll \operatorname{Re} \Pi$ ，而最后一个约等号意味着在 k^2 on shell 附近取值。将这个结果代入前面的向前散射振幅，就可以得到：

$$\operatorname{Im} \mathcal{M}(A \rightarrow A) \sim \operatorname{Im} \Pi(-m_{\text{ph}}^2) \quad (4.87)$$

这也就是说，一个单粒子态的向前散射振幅和自能在 on shell 时具有相同的虚部。这就将求自能虚部的任务转换为求出向前散射振幅虚部的任务，而后者就能利用光学定理计算，得到：

$$\Gamma_A = \frac{1}{m_{\text{ph}}} \operatorname{Im} \Pi(-m_{\text{ph}}^2) \sim \frac{1}{2m_{\text{ph}}} \sum_X \frac{1}{S_X} \int dLIPS_X |\mathcal{M}(A \rightarrow X)|^2 \quad (4.88)$$

可以看到，这个结果和我们在第二章中通过假设不稳定粒子可以放进 S-矩阵中所得到的结果是一样的。不过需要注意：这个结果只在窄宽度近似下成立。如果窄宽度近似失效，我们就需要通过微扰展开求出自能的虚部，才能得到粒子的衰变宽度。

对于一个过程（或者称为一个衰变道）而言，它贡献的衰变率就是求和中的一项，我们将其称为分宽度 $\Gamma_{A \rightarrow X}$ 。分宽度和总宽度的比 $\Gamma_{A \rightarrow X} / \Gamma_A$ 被称为衰变道 $A \rightarrow X$ 的分支比。

Appendix: Trace of Gamma Matrices

在这个附录中，我们证明一些在前文中用到的公式：对 n 个 Gamma 矩阵求迹的公式和 Gamma 矩阵收缩的公式。

首先考虑奇数个 Gamma 矩阵的迹。通过在每个 Gamma 矩阵之前插入一个 $\gamma_5^2 = 1$ ，并且利用 $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ 以及 $\text{Tr}[A_1 A_2 \dots A_n] = \text{Tr}[A_n A_1 \dots A_{n-1}]$ ，我们可以得到 $\text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}] = (-1)^n \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}]$ ，也就是说：

$$\text{Tr}[\text{odd number of } \gamma^\mu] = 0, \quad \text{Tr}[\text{odd number of } \not{a}] = 0 \quad (4.89)$$

对于 $\text{Tr}[\gamma_5(\text{odd number of } \gamma^\mu)]$ ，我们也可以进行类似的计算，也有：

$$\text{Tr}[\gamma_5(\text{odd number of } \gamma^\mu)] = 0, \quad \text{Tr}[\gamma_5(\text{odd number of } \not{a})] = 0 \quad (4.90)$$

接下来考虑偶数个 Gamma 矩阵的迹。对于 2 个 Gamma 矩阵的情形，有：

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = \frac{1}{2} \text{Tr}[\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]] = \frac{1}{2} \text{Tr}[-2\eta^{\mu\nu}] = -4\eta^{\mu\nu} \quad (4.91)$$

然后是 4 个 Gamma 矩阵的情形：

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho] &= -\text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\rho] - 2\eta^{\mu\nu} \text{Tr}[\gamma^\sigma \gamma^\rho] \\ &= +\text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\rho] + 2\eta^{\mu\sigma} \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho] - 2\eta^{\mu\nu} \text{Tr}[\gamma^\sigma \gamma^\rho] \\ &= -\text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\mu] - 2\eta^{\mu\rho} \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\sigma] + 2\eta^{\mu\sigma} \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho] - 2\eta^{\mu\nu} \text{Tr}[\gamma^\sigma \gamma^\rho] \end{aligned} \quad (4.92)$$

于是，就有：

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho] = 4(\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho}) \quad (4.93)$$

更多偶数个 Gamma 矩阵的 trace 也可以用这个方法求得：对于 $2n$ 个 Gamma 矩阵的 trace，可以先将第一个 Gamma 矩阵利用反对易关系移动到最后一个，然后就能得到缩并了一对指标的一系列 $(2n-2)$ 个 Gamma 矩阵的 trace。从而就能得到 $2n$ 个 Gamma 矩阵的 trace 和 $(2n-2)$ 个 Gamma 矩阵的 trace 之间的递推关系。用这个递推关系一直递推到 2 个 Gamma 矩阵的 trace，就能求出 $2n$ 个 Gamma 矩阵的 trace。

我们接下来考虑的是含 γ_5 的多个 Gamma 矩阵的 trace。需要用到关系 $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 。将这个关系代入上面的表达式，我们就得到：

$$\text{Tr}[\gamma_5] = 0, \quad \text{Tr}[\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu] = 0, \quad \text{Tr}[\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho] = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4.94)$$

接下来考虑 Gamma 矩阵的缩并，特别是 $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu$ 这类的量。由于在下一章中，当我们对 QED 做重整化的时候我们会在 d 维时空中遇到这些量，于是接下来的所有推导都是基于任意偶数维下的 Gamma 矩阵的。在 d 维中，就有 d 个 Gamma 矩阵 γ^μ ，满足关系 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = d$ 。在 d 维下，首先就有：

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -d \quad (4.95)$$

对于中间夹一个 Gamma 矩阵的情形：

$$\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\mu = \eta_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu = \eta_{\mu\nu} \gamma^\mu (-\gamma^\nu \gamma^\rho - 2\eta^{\rho\nu}) = (d-2)\gamma^\rho \quad (4.96)$$

中间夹 2 个 Gamma 矩阵的情形：

$$\begin{aligned}
 \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= \eta_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu = \eta_{\mu\nu} (-\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma - 2\gamma^\mu \gamma^\rho \eta^{\nu\rho}) \\
 &= \eta_{\mu\nu} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma + 2\gamma^\mu \gamma^\sigma \eta^{\nu\rho} - 2\gamma^\mu \gamma^\rho \eta^{\nu\rho}) \\
 &= 4\eta^{\rho\sigma} - (d-4)\gamma^\rho \gamma^\sigma
 \end{aligned} \tag{4.97}$$

中间夹 3 个 Gamma 矩阵的情形：

$$\begin{aligned}
 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu - 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu \\
 &= -\gamma^\nu (4\eta^{\rho\sigma} - (d-4)\gamma^\rho \gamma^\sigma) - 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu \\
 &= (d-4)\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma + 2(\gamma^\rho \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\rho) \gamma^\nu - 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu \\
 &= 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu + (d-4)\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

对于中间夹更多 Gamma 矩阵的情形，我们只需要用反对易关系交换 γ^μ 和第一个 Gamma 矩阵，就可以得到夹有 n 个 Gamma 矩阵和夹有 $(n-1)$ 个 Gamma 矩阵的量之间的递推关系。推到 0 个后就能求出夹有 n 个 Gamma 矩阵的量 $\gamma^\mu \gamma^{\nu_1} \dots \gamma^{\nu_n} \gamma_\mu$ 。

Chapter 5

Renormalization

5.1 Regularization and Renormalization

Renormalization and Ultraviolet Divergences

在前面的几章中，我们知道了究竟什么是一个量子场论、如何用微扰论来给出对散射实验的预言，并且在树图阶计算了几个过程的散射截面。在这一章中，我们的目标就是将散射振幅和衰变率计算到微扰论的更高阶。

正如我们在 3.7 节末尾看到的，当我们计算高阶的微扰时，就无法避免的会遇到紫外发散。于是如果想要计算出高阶的微扰，就要首先消除掉这个紫外发散。在量子场论中，我们用以消除这个紫外发散的技术就是重整合化。

在第二章中，我们也讨论过重整合化。在那时对它的理解是：为了让相互作用场论能在渐进时刻趋于自由场论，需要对场量、质量等物理量进行重新定义，从而使得相互作用场论中也有关系 $\langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0, \langle k|\phi(x)|0\rangle = e^{-ikx}$ 。这也就相当于引入了一系列重整合化常数 Z_m, Z_ϕ, Z_λ 。这个操作和消除紫外发散有什么关系呢？答案就是，可以调整这些重整合化常数，从而将紫外发散带来的无穷大藏在这些重整合化参数中。用 Feynman 的话说，就是“将发散藏在地毯下面”。

我们不希望引入重整合化常数的过程破坏我们定义理论时引入的对称性，例如对于一个规范场论而言，我们就不希望重整合化破坏 Poincare 对称性和规范对称性；对于有 $\phi \rightarrow -\phi$ 对称性的 ϕ^4 理论，也不希望重整合化后出现 ϕ^3 这种破坏 $\phi \rightarrow -\phi$ 对称性的项。不过在后面会看到，除去定义理论时引入的对称性之外，在计算高阶量子修正的过程中，可能会有一些经典理论中存在的对称性在量子修正下被破坏。这个现象被我们称为量子反常。

现在已经有了重整合化常数作为“地毯”。那么该如何将发散藏在地毯下面呢？首先我们就需要计算出导致紫外发散的这些积分。更加准确的说，是通过做大动量截断、改变时空维数等方法，使得我们可以将发散积分转化为收敛的积分，并通过这些收敛积分的值，通过解析延拓等方式去定义发散积分的值。这些为计算发散积分而引入的操作就被我们称为正规化。

就以截断正规化为例，如果我们为计算一个发散的圈图，取了一个大动量截断 $k < \Lambda$ ，那么计算出的 Feynman 振幅就是这个截断的函数 $\mathcal{M}(\Lambda)$ ，并且在 $\Lambda \rightarrow \infty$ 时应该有 $\mathcal{M}(\Lambda) \rightarrow \infty$ 。并且对于 Feynman 振幅，除去这个圈图，还有含有抵消项顶点的其他 Feynman 图。这些含有抵消项顶点的图的贡献应该就是 $\mathcal{M}_{\text{CT}}(Z)$ 。消去紫外发散的思路就是，我们调整重整合化常数的值，使得 $Z = Z(\Lambda)$ ，从而使得 $\mathcal{M}(\Lambda) + \mathcal{M}_{\text{CT}}(Z(\Lambda))$ 是一个有

限大的值。这样我们就从可观测量中消去了紫外发散，留下一些 $\Lambda \rightarrow \infty$ 时候趋向无穷大的重整化常数。

上面我们利用截断正规化做了一个例子。不过事实上，由于截断正规化是破坏 Lorentz 对称性的，于是它并不是一个好的正规化。在微扰量子场论中，除去截断正规化以外，常用的正规化方式还有 **Pauli-Villars 正规化**，其思路是引入一个满足 Lorentz 不变性的软截断。这是通过做替换 $\tilde{\Delta}_F(k^2) \rightarrow \frac{1}{k^2+m^2-i\varepsilon} \frac{\Lambda^2}{k^2+\Lambda^2-i\varepsilon}$ 来实现的。但是 Pauli-Villars 正规化有一个问题：它引入了一个有量纲的正规化参量 Λ 。可以证明，这样的正规化过程是破坏规范对称性的。我们希望正规化过程不破坏理论赖以定义的对称性，并尽可能少破坏“不重要的”对称性。对于截断正规化、Pauli-Villars 正规化这种破坏“重要”对称性的正规化，还需要做一个称为**有限重整化**的过程来恢复理论的对称性。

在我们下面的计算中，最常用的是**维数正规化**。其基本思路就是，对于一个在 4 维发散的积分，我们可以先考虑一个 $d > 4$ 维下的、相同被积函数的收敛积分，然后再将积分分解延拓到维数为 4 的情形¹。维数正规化保持了理论中几乎所有的对称性，并且计算起来相对方便，是我们在微扰量子场论中最常用的正规化方式。

不仅在微扰论中需要正规化来定义积分的值，在非微扰场论中，我们也需要正规化去严格地定义路径积分。非微扰场论中最常用的正规化方式是**格点正规化**，也就是将时空放在格点上去定义量子场论。我们在第三章中看到，如果时空的格子是有限的，那么路径积分就是良定义的。

上面粗略的说明了一下通过重整化消除紫外发散的基本思路。那么自然就会问：重整化能不能完全消除掉理论中的紫外发散呢？这就涉及到理论的**可重整性**。如果在一个理论中，通过对物理量进行重新定义引入的抵消项可以完全消除理论中的发散，那么这个理论就被称为是**可重整的理论**。反之这个理论就是**不可重整的理论**。

我们为什么能够信任这样一个抵消发散的方式呢？这需要重整化的理论具有预言能力。能够抵消这些紫外发散的重整化常数有很多选择，为了让理论具有预言能力，还要求不论这些重整化参数的选择是哪一种，理论预言的可观测量之间的关系是相同的。这样一来，理论预言的可观测量之间的关系就是唯一的，这样的理论才具有预言能力，才是可以被信赖的。这个要求仅仅对于可重整理论才是可能成立的。对于一个可重整理论而言，这反映到理论中就体现为**重整化群方程**。而对于一个不可重整理论，它虽然可以给出预言，但是其预言总是依赖于理论的正规化方式的，从而其预言能力就要大打折扣。

当然，作为一个自然科学，检验一个理论的唯一方式是将这个理论的预言和实际的实验结果做对比。非常幸运的是，通过重整化计算出的结果和实验是符合良好的。这也就是说，的确可以通过这样一个抵消发散的方式来计算高阶的微扰修正。但是另一方面，通过重整化消去发散的操作是十分不自然、十分“手工”的。于是我们大胆猜测，在重整化背后应该存在更深刻的物理，使得这些计算方法是可以被更深入的理解的。事实上，重整化背后的物理就是**有效场论**。我们会在这一章的后面讨论有效场论，从而对重整化有一个更深刻、更现代的认识。

¹由于偶数维的 Gamma 矩阵更加“美观”，我们比较喜欢在偶数维考虑这个积分。在复变函数中，解析函数的唯一性定理告诉我们，只需要解析函数在可数无穷个点上的值，就能完全确定这个解析函数。于是我们可以先将整个场论定义在 $2n$ 维，求出 $2n$ 维中圈积分的表达式后，在 $d < 4$ 的区域中计算这一表达式。最后在将其延拓到整个复平面上

Dimensional Analysis and Renormalizability

既然我们希望考虑一个可重整的理论，那么拿到一个理论的 Lagrangian 后，我们就首先希望判断这个理论的可重整性。不幸的是，这并不是一件容易的事情。不过退而求其次的，可以找到一个很简单的可重整性的必要条件。利用这个必要条件就可以排除掉很多不可重整的理论。它就是：

如果一个理论是可重整的，那么其中所有耦合常数的量纲都是非负的。

我们以标量场为例来给出这个条件。考虑一个具有以下 Lagrangian 的理论：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z_\phi\phi^2 - \frac{1}{2}Z_mm^2\phi^2 + \frac{1}{n!}Z_gg\phi^n \quad (5.1)$$

这个耦合给出一个 n 粒子顶点，带有顶点因子 iZ_gg 。由于我们在后面会进行维数正规化，在任意的维度下讨论这个理论是有益的。不妨令时空维数是 d ，那么对于一个有 P 个内传播子， V 个 n 粒子顶点和 L 个圈的图，就有：

$$i\mathcal{M} = (iZ_gg)^V \int \frac{d^d l_1}{(2\pi)^4} \cdots \int \frac{d^d l_L}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_1^2 + m^2 - i\varepsilon} \cdots \frac{1}{k_P^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (5.2)$$

其中， k_i 可以写为外动量 p_i 和圈动量 l_i 的线性叠加。并且这三个量之间存在关系 $L = P - V + 1$ 。对于一个固定 P 和 L 的圈图而言，我们总可以构造出一个图，使得其中所有的内动量都含有圈动量的成分。从而这个图在高能极限下的行为就是 $l^{dL}/l^{2P} = l^{dL-2P}$ 。我们可以定义一个表观发散度来描述这个图在紫外区间的 behavior：

$$D = dL - 2P \quad (5.3)$$

当表观发散度大于等于 0 时，这个 Feynman 振幅就是紫外发散的。其中 $D = 0$ 对应对数发散， $D > 0$ 对应 Λ^D 的发散。如果一个图及其所有子图的表观发散度都是负的，那么这个图才是收敛的。接下来在考虑一个图的量纲：

$$[\mathcal{M}] = V[g] + (dL - 2P)[k] = V[g] + D \quad (5.4)$$

对于一个具有固定外线数量的图， \mathcal{M} 的量纲是恒定的。从而 $D = [\mathcal{M}] - V[g]$ 。如果耦合常数 g 的量纲 $[g] < 0$ ，那么对于任意外线的图，我们总可以通过累加圈数来构造相应的发散图。反映在正规顶点上，就意味着所有的正规顶点全部发散。但我们在抵消发散时只能定义有限多个抵消项，从而就无法完全消除这些紫外发散，这个理论就是不可重整的。

对于一个耦合常数的量纲为 0 的理论，其中 Feynman 图的表观发散度就是相应 Feynman 振幅的量纲。对于一个具有 E 个外线的 Feynman 振幅，由于就有衰变率公式 $\Gamma = \frac{1}{2m} \int dLIPS_{E-1} |\mathcal{M}_E|^2$ ，从而 $[\Gamma] = 1 = [m^{-1}] + [\delta^4(k)] + (E-1)[d^3k/\omega] + [\mathcal{M}_E^2] = 2[\mathcal{M}_E] + 2E - 7$ 。从而 $[\mathcal{M}_E] = 4 - E$ 。这是随着外线数的增多而减小的。于是对于耦合常数的量纲为 0 的理论，发散的正规顶点数是有限的。从而就有可能可以对每个正规顶点都定义一个抵消项来消除发散。而对于耦合常数的量纲大于 0 的理论，增加圈数只会减小表观发散度，从而表观发散的正规顶点数也是有限的。在这两种情形下，理论都有可能是可重整的。

如果我们的理论中有多个耦合，并且有一个耦合常数的量纲为负，那么我们可以通过增加相应的顶点的方式构造发散图。对于一个含有标量场、无质量矢量场和旋量场的场论而言，也可以重复上面的讨论，并且得到类似的结果。一个图的表观发散度就是：

$$D = dL - 2P_B - P_F + n_k \quad (5.5)$$

其中 P_B, P_F 分别是 Boson 和 Fermion 的内线数， n_k 是顶点中存在的动量因子的个数。对于有质量的矢量场，其传播子会变成：

$$\Delta_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + M^2 - i\varepsilon} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right) \quad (5.6)$$

从而这个传播子在高能极限下的行为是 k^0 ，而不是 $1/k^2$ 。这会破坏我们在上面关于数幂次的讨论，将一个图的表观发散度变成：

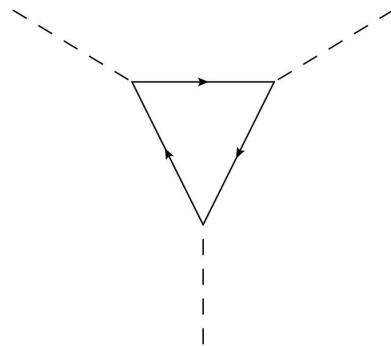
$$D = [\mathcal{M}] - V[g] + 2n_V \quad (5.7)$$

其中 n_V 为重矢量 Boson 的传播子个数。可以看到，只要在圈中叠加重矢量 Boson，所有正规顶点都会变得表观发散。这告诉我们：一个具有重矢量 Boson 的理论是不可重整的。不过如果这个矢量 Boson 和一个规范对称性相关，那么可以通过 Faddeev-Popov 过程给 Lagrangian 添加一个规范固定项，这使得传播子中的 $k_\mu k_\nu / M^2$ 变为 $k_\mu k_\nu / (k^2 + M^2)$ ，从而解除这个不可重整的问题。并且对于一个一般的重矢量场，这是做不到的。从而我们就得到了一个结论：如果一个理论中存在重矢量场，那么只有这个矢量 Boson 和一个规范对称性相关的时候²，理论才是可重整的。

当然，上面讨论的这个可重整性条件只是一个必要条件，一个耦合常数量纲非负的理论也有可能是不可重整的。考虑下面的 **Yukawa 理论**：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z_\phi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}Z_m m^2 \phi^2 + \bar{\Psi}(iZ_\Psi \not{\partial} - Z_M M)\Psi - Z_g g \phi \bar{\Psi} \Psi \quad (5.8)$$

由于 $[\phi] = 1, [\Psi] = 3/2$ ，于是这个理论中的耦合常数量纲为 0。Yukawa 理论中存在三标量粒子正规顶点，其最低阶 Feynman 图是：



²更精确的说，只有这个重矢量场是一个规范场，并且通过 Higgs 机制被赋予质量时，理论才是可重整的。有关 Higgs 机制的讨论详见第六章；有关 Faddeev-Popov 过程和规范固定项如何解除这个不可重整性的讨论详见第七章和第八章。

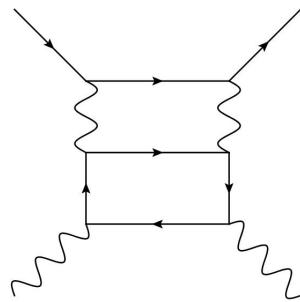
计算这个图的表观发散度，可以得到 $D = d - 3$ 。于是在 4 维时空中这个图是发散的，并且由于我们没有和这个正规顶点相应的抵消项，从而我们就不能利用重整化去抵消这个图的发散。于是 Yukawa 理论是不可重整的。

如果我们希望“修好”这个不可重整性，可以在 Lagrangian 中添加一个标量场的自耦合 $Z_\lambda \lambda \phi^3$ 。这样一来理论中就有相应于三粒子顶点的抵消项，从而可以抵消这个正规顶点的发散。除去通过添加耦合的方式去“修好”发散之外，对称性也可以“修好”这个发散。例如在旋量 QED 中，三光子顶点也有类似的 Feynman 图，其表观发散度仍然是 1。但是由于 Furry 定理，这个三光子顶点被 C 宇称所禁戒，从而发散也就不复存在了。我们在后面证明 QED 可重整性时，还会回来考虑这一点。

BPHZ Theorem and Full Renormalizability

在上面的讨论中，我们仅仅考虑了表观发散度大于 0 的图。但是这样的讨论存在一个致命的疏漏：一个表观发散度小于 0 的图也有可能是发散的。这使得上面的讨论只能给出一个理论可重整的必要条件，而不能给出充分条件。如果我们需要证明一个理论的可重整性，除了证明所有表观发散度大于 0 的图的紫外发散可以被抵消项消除之外，还需要证明表观发散度小于 0 的图的发散也可以被抵消。

先看一个表观收敛的图中存在发散的例子。考虑旋量 QED 中的以下的 Feynman 图：



根据本节前面的讨论，这个图的表观发散度是 -1，理应不发散。利用旋量 QED 计算这个图的发散，在紫外区域，可以忽略所有的外动量，只考虑圈动量。如果令上面一个圈的动量为 k_1 ，下面一个圈中动量为 k_2 ，那么这个图在紫外区域给出：

$$\int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_1} \frac{1}{k_1^2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{k_2^2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{k_2 - k_1} \quad (5.9)$$

可以看到，分母上 k_1 的幂次是 6，而 k_2 的幂次是 4，从而对 k_2 的积分是发散的。稍微观察就发现，这个图中含有一个四光子顶点的子图，它的表观发散度是 0，应该对数发散³。从这个例子中就可以看出，对于一个表观收敛的图，如果它有一个表观发散度大于等于 0 的子图，那么它也会包含紫外发散。

看起来对于一个所有表观发散度大于等于 0 的图中发散全部被抵消的理论，似乎只要证明所有表观发散度小于 0 的图的发散全部来源于表观发散度大于 0 的子图的发散，就可以说明所有正规顶点都不发散。但不幸的是，还有一些被称为交缠发散的特殊情况：当一

³其实这个子图的发散不需要重整化就可以抵消：除去这个图之外，将费米子的方向扭一扭会得到一些新图。这些图的发散相互抵消。这个发散的抵消也是由规范对称性所保证的，我们会在 5.4 节详细讨论这件事情。

个图中含有公用一个内线的两个发散子图时，就无法利用原来处理这些子图的处理方法抵消这个图中的发散。

对这些情况的处理需要一些额外的讨论。我们在这里仅仅不加证明地给出一个最后的结论：

如果一个理论中的抵消项能够抵消所有表观发散的正规顶点中的紫外发散，那么这个理论中全部的紫外发散都可以被这些抵消项全部抵消。

这个结论被称为 **BPHZ 定理**。有了 BPHZ 定理，对一个理论可重整性的证明就变得简单一些了：只需要证明一个理论中所有表观发散的正规顶点中的发散全部被抵消，BPHZ 定理就保证了所有表观收敛的正规顶点中也不包含发散。所以在后面证明旋量 QED 可重整性时，就可以只考虑表观发散的正规顶点。

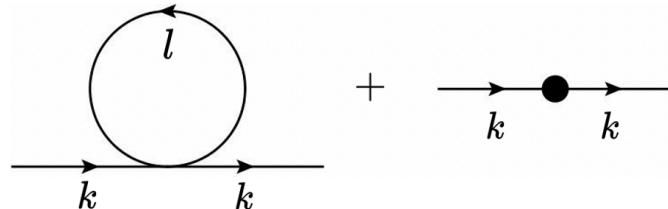
5.2 One-Loop Corrections of ϕ^4 Theory

The Exact Propagator

在明白了重整化的基本思路之后，就可以来计算微扰高阶修正了。在这一节中，我们将 ϕ^4 理论的正规传播子、正规顶点计算到次领头阶。首先， ϕ^4 理论重整化后的 Lagrangian 就是：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z_\phi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}Z_m m^2 \phi^2 - \frac{Z_\lambda \lambda}{4} \phi^4 \quad (5.10)$$

其 Feynman 规则中有四粒子顶点 $-iZ_\lambda \lambda$ 和抵消项顶点 $-i[(Z_\phi - 1)k^2 + (Z_m - 1)m^2]$ 。对于正规传播子而言，所有对自能的 $O(\lambda)$ 阶项有贡献的 1PI 图是：



利用 ϕ^4 理论的 Feynman 规则，可以写出自能在这一阶的表达式：

$$i\Pi^{(1)}(k^2) = \frac{-iZ_\lambda \lambda}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{i l^2 + m^2 - i\varepsilon} \right) - i[(Z_\phi - 1)k^2 + (Z_m - 1)m^2] \quad (5.11)$$

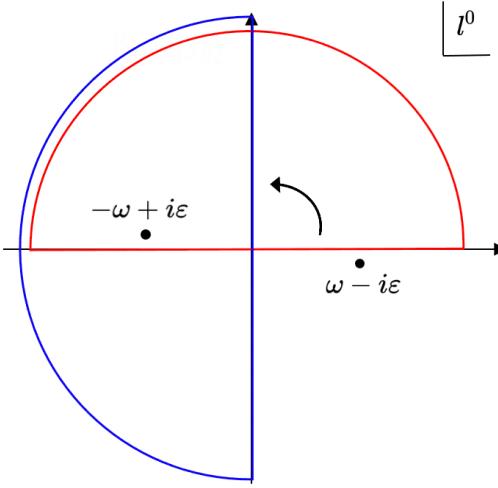
这个表达式中的第一项是一个发散的积分，其值需要利用正规化去定义。我们采取的正规化是维数正规化，也就是首先考虑 $d < 4$ 维中的这个积分，而后再利用解析延拓将这个积分延拓到 $d = 4$ 。为此考虑：

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (5.12)$$

这是一个 d 维 Minkowski 空间上的积分，而我们熟悉的是 Euclidean 空间上的积分。下面就利用一个 trick 将 Minkowski 空间上的积分转化为 Euclidean 空间上的积分：单独考虑 l^0 的积分，可以将这个积分分解为：

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + m^2 - i\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl^0}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} l}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{-(l^0)^2 + |\mathbf{l}|^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (5.13)$$

对于 l^0 ，由于被积函数的极点为 $l^0 = \omega - i\varepsilon, l = -\omega + i\varepsilon$ ，且满足大圆弧引理，于是将积分回路如下图关于原点旋转 90 度的过程不改变积分的值。



如果定义一个 $\bar{l}_i = l^i, \bar{l}_0 = i l^0$ ，那么就有：

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + m^2 - i\varepsilon} &= \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dl^0}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} l}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{-(l^0)^2 + |\mathbf{l}|^2 + m^2 - i\varepsilon} \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{l}_0}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} l}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{(\bar{l}_0)^2 + |\mathbf{l}|^2 + m^2 - i\varepsilon} \\ &= i \int \frac{d^d \bar{l}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\bar{l}^2 + m^2 - i\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.14)$$

从而我们就将 Minkowski 空间中的积分转化为 Euclidean 空间中的积分。这个 trick 被我们称为 **Wick 转动**。

对于这种形式的积分，有积分公式（证明见本章附录）：

$$\int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{(\bar{q}^2)^a}{(\bar{q}^2 + D)^b} = \frac{\Gamma(b - a - \frac{d}{2}) \Gamma(a + \frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(b) \Gamma(\frac{d}{2})} D^{-(b-a-\frac{d}{2})} \quad (5.15)$$

于是，就可以积出：

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + m^2 - i\varepsilon} = i \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} m^{-2+d} \quad (5.16)$$

这就完成了对这个 d 维积分的计算。下面就要将这个 d 维的结果延拓到 4 维中。为此我们先定义 $d \equiv 4 - \varepsilon^4$, 就有 $\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + m^2 - i\varepsilon} = i \frac{\Gamma(-1 + \frac{\varepsilon}{2})}{(4\pi)^{2 - \frac{\varepsilon}{2}}} m^{2 - \varepsilon}$ 。

对这个积分做解析延拓也就相当于将 Gamma 函数延拓到整个复平面上, 延拓后的积分仍然具有上述的形式。由于 $\varepsilon = 0$ 是这个复变函数的奇点, 于是考虑这个函数在 $\varepsilon = 0$ 邻域内的性质, 如果这个函数在复平面上除去极点 $-n, n \in \mathbb{Z}$ 以外处处是 ε 的解析函数, 那么我们应该可以在其极点 -1 附近做 Laurent 展开。对于 Gamma 函数而言, 在极点 $-n$ 附近的 Laurent 展开是:

$$\Gamma(-n + x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^n k^{-1} + O(x) \right], \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.17)$$

其中 γ 是 Euler 常数。于是就可以写出:

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + m^2 - i\varepsilon} = -\frac{im^2}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 1 \right) \left(\frac{4\pi}{m^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} + O(\varepsilon) \quad (5.18)$$

代入自能, 就有:

$$i\Pi^{(1)}(k^2) = \frac{i\tilde{\lambda}m^2}{32\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 1 \right) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} - i \left[(Z_\phi - 1)k^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] \quad (5.19)$$

在 d 维时空中, 由于 $[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi] = d$, 于是 $[\phi] = d/2 - 1$ 。又由于 $[\lambda \phi^4] = d$, 就有 $[\lambda] = \varepsilon$ 。为了让 λ 在 d 维时空中仍然保持无量纲, 在上式中, 定义了 $\lambda = \tilde{\lambda}\tilde{\mu}^\varepsilon$, 其中 μ 是一个具有量纲 $[\mu] = 1$ 的假参量。

我们还知道, 有 Taylor 展开 $A^x = 1 + x \log A + O(x^2)$, 可以利用这个关系将自能写为:

$$\begin{aligned} i\Pi^{(1)}(k^2) &= \frac{i\tilde{\lambda}m^2}{32\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 1 \right) \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{m^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} - i \left[(Z_\phi - 1)k^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] \\ &= \frac{i\tilde{\lambda}m^2}{32\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + 1 + \log \frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{e^\gamma m^2} \right) - i \left[(Z_\phi - 1)k^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] \end{aligned} \quad (5.20)$$

为了简化表达, 定义 $\mu := \sqrt{4\pi}\tilde{\mu}e^{-\gamma/2}$ 。于是最终在 $d = 4$ 的邻域中就有:

$$\Pi(k^2) = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + 1 + 2 \log \frac{\mu}{m} \right) - \left[(Z_\phi - 1)k^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] + O(\lambda^2) \quad (5.21)$$

接下来我们确定重整化常数 Z_ϕ, Z_m 。由于重整化的目的之一就是令相互作用的场论中有 $\langle \Omega | \phi(x) | k \rangle = e^{ikx}$, 而如果我们有这个关系, 就有 Lehmann-Kallen 谱表示, 从而正规传播子 $\Delta(k^2)$ 在物理质量 $k^2 = -m_{\text{ph}}^2$ 处就有一个留数为 1 的极点。我们又知道, 通过对所有 1PI 图求和, 正规传播子又可以写为 $\tilde{\Delta}(k^2) = \frac{1}{k^2 + m^2 - i\varepsilon - \Pi(k^2)}$ 。于是这个关系就给出了对自能的限制。

⁴这里的 ε 是我们用来指示维度和 4 的差别的一个变量, 和上面的无穷小正数 ε 是不同的。这两个量出现的位置十分不同, 大概不会造成混淆。

不过由于我们还不知道粒子的物理质量是什么, 这个限制还不足以完全确定这些重整化常数, 从而我们可以有许多不同的重整化方案来确定这些重整化常数。在这里, 我们使用一个被称为 **OS Scheme**, 或者在壳方案的重整化方案, 也就是要求 Lagrangian 中的参数 m 等于粒子的物理质量 m_{ph} 。这就要求 $\Delta(k^2)$ 在 $-m^2$ 有一个留数为 1 的极点, 从而对自能有以下的要求:

$$\Pi(-m^2) = 0, \quad \Pi'(-m^2) \equiv \frac{d\Pi}{dk^2} \Big|_{k^2=-m^2} = 0 \quad (5.22)$$

代入我们上面得到的自能表达式, 就可以将重整化常数确定下来:

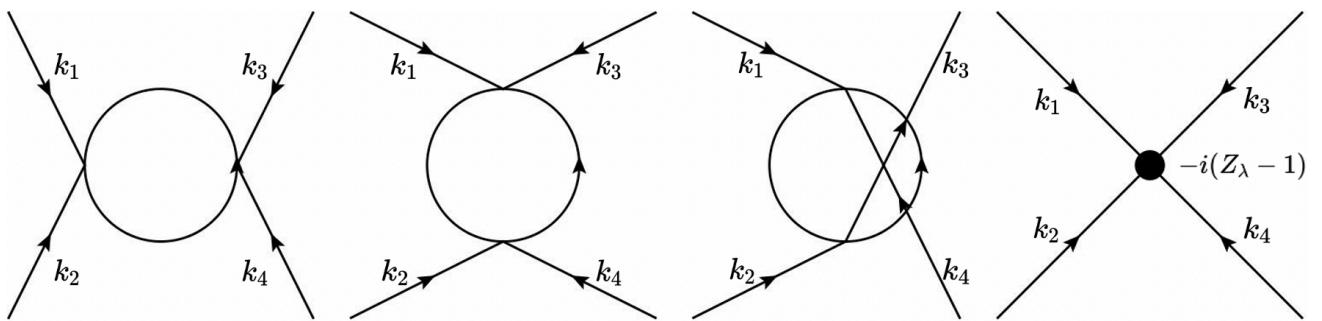
$$Z_\phi = 1 + O(\lambda^2), \quad Z_m = 1 + \frac{\lambda}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \log \frac{\mu}{m} - \frac{1}{2} \right) + O(\lambda^2) \quad (5.23)$$

于是, 我们就得到了自能的单圈修正, 它是 $\Pi(k^2) = O(\lambda^2)$ 。也就是说, 对于 $\lambda\phi^4$ 理论而言, 如果我们使用 OS scheme 来进行重整化, 那么正规传播子和自由传播子在单圈修正的意义下是相同的。

在上面的讨论中, 为什么能够人为的规定 Lagrangian 中的参数质量和物理质量之间的关系呢? 为什么选择不同的重整化方案, 得到的物理质量和 m 的关系是不同的呢? 事实上这个问题对我们的理论并不是很重要。因为真正可以被物理观测的量才有意义, 裸的理论并不重要。我们通过 QFT 给出的预言全都是以观测到的量为基础的。正如上一节讨论过的, 对于一个可重整化的理论, 选择不同的重整化方案/选择不同的假参数 μ 所得到的可观测量之间的关系是相同的。这就允许我们先测量出物理质量, 然后依靠选择的重整化方案得出裸质量和物理质量的关系来确定裸质量, 再确定出其他可观测量和物理质量的关系, 从而给出预言。可重整性告诉我们, 这个理论给出的预言是唯一的。

The Vertex Function

接下来考虑四粒子正规顶点。对这个正规顶点的次领头阶, 也就是 $O(\lambda^2)$ 阶有贡献的所有 1PI 图是:



其中最后一个图是四粒子抵消项顶点, 其顶点因子是 $-i(Z_\lambda - 1)$ 。利用 Feynman 规则, 可以写出这个正规顶点在 $O(\lambda^2)$ 阶的值:

$$\begin{aligned} iV_4(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{i} \frac{1}{(k_1 + k_2 + l)^2 + m^2 - i\varepsilon} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{1}{l^2 + m^2 - i\varepsilon} \right) \\ &+ (k_2 \leftrightarrow -k_3) + (k_2 \leftrightarrow -k_4) - i(Z_\lambda - 1)\lambda \end{aligned} \quad (5.24)$$

第一个积分是发散的, 为了定义其值, 做维数正规化:

$$iV_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = \lambda \left[\frac{1}{2} \tilde{\lambda}(\tilde{\mu})^\varepsilon \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_1 + k_2 + l)^2 + m^2 - i\varepsilon} \frac{1}{l^2 + m^2 - i\varepsilon} + (k_2 \leftrightarrow k_3) + (k_2 \leftrightarrow k_4) - i(Z_\lambda - 1) \right] \quad (5.25)$$

为了记号的方便, 定义:

$$F(k^2) := (\tilde{\mu})^\varepsilon \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k + l)^2 + m^2 - i\varepsilon} \frac{1}{l^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (5.26)$$

为了将这个积分用 Gamma 函数积出, 可以利用如下的 **Feynman 参数化** (证明见附录):

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = \int dF_n \frac{1}{[x_1 A_1 + \dots + x_n A_n]^n}, \quad \int dF_n := (n-1)! \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(x_1 + \dots + x_n - 1) \quad (5.27)$$

它的一个特殊情况就是:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} \quad (5.28)$$

于是, 我们上面定义的函数 $F(k^2)$ 就可以利用 Feynman 参数化化为:

$$\begin{aligned} F(k^2) &= (\tilde{\mu})^\varepsilon \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{1}{[x(k + l)^2 + (1-x)l^2 + m^2 - i\varepsilon]^2} \\ &= (\tilde{\mu})^\varepsilon \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{1}{[(l + xk)^2 + x(1-x)k^2 + m^2 - i\varepsilon]^2} \end{aligned} \quad (5.29)$$

如果我们做换元 $q := l + xk, D(k^2) := x(1-x)k^2 + m^2$, 那么就有:

$$F(k^2) = (\tilde{\mu})^\varepsilon \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{1}{(q^2 + D(k^2) - i\varepsilon)^2} \quad (5.30)$$

这个积分的被积函数的极点为止仍然是 $\pm(\omega - i\varepsilon)$, 于是也可以通过 Wick 转动化为 Euclidean 空间上的积分, 再通过上面给出的积分公式求出:

$$\begin{aligned} F(k^2) &= i(\tilde{\mu})^\varepsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\bar{q}^2 + D(k^2) - i\varepsilon)^2} \\ &= i(\tilde{\mu})^\varepsilon \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} D^{-2+\frac{d}{2}}(k^2) = i \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D(k^2)} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \end{aligned} \quad (5.31)$$

在 $\varepsilon = 0$ 附近做 Laurent 展开, 也就有:

$$F(k^2) = i \int_0^1 dx \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \log \frac{\mu^2}{D(k^2)} \right) = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \int_0^1 dx \log \frac{\mu^2}{D(k^2)} \right) \quad (5.32)$$

代入正规顶点的表达式，就得到了：

$$\begin{aligned} iV_4^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ = \lambda \left[\frac{i}{32\pi^2} \tilde{\lambda} \left[\frac{6}{\varepsilon} + \int_0^1 dx \log \frac{\mu^2}{D((k_1 + k_2)^2)} + (k_2 \leftrightarrow k_3) + (k_2 \leftrightarrow k_4) \right] - i(Z_\lambda - 1) \right] \end{aligned} \quad (5.33)$$

接下来我们要利用一个重整化条件去定出重整化常数。对于正规顶点而言，我们可以选择：

$$iV_4(0, 0, 0, 0) = -i\lambda \quad (5.34)$$

这也就意味着：

$$iV_4^{(1)}(0, 0, 0, 0) = \lambda \left[\frac{3i}{16\pi^2} \lambda \left(\frac{1}{\varepsilon} + \int_0^1 dx \log \frac{\mu}{m} \right) - i(Z_\lambda - 1) \right] = 0 \quad (5.35)$$

于是，我们最终可以得到：

$$Z_\lambda = 1 + \frac{3\lambda}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \int_0^1 dx \log \frac{\mu}{m} \right) + O(\lambda^2) \quad (5.36)$$

单圈修正的正规顶点就是：

$$iV_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\int_0^1 dx \log \left(\frac{m^2}{x(1-x)(k_1 + k_2)^2 + m^2} \right) + (k_2 \leftrightarrow k_3) + (k_2 \leftrightarrow k_4) \right] + O(\lambda^3) \quad (5.37)$$

对于 ϕ^4 理论，我们只能引入 Z_ϕ, Z_m, Z_λ 三个抵消项，能够抵消的发散也就只有正规传播子和四粒子顶点的发散。如果这个理论是可重整的，那么这个理论中的其他正规顶点就应该是不发散的。为看到这点，我们计算 n 粒子正规顶点的表观发散度。首先， $\lambda\phi^4$ 理论的耦合常数量纲是 $[\lambda] = 0$ ，从而一个 n 粒子顶点的表观发散度应该是 $D = [\mathcal{M}_n] = 4 - n$ 。从而我们发现，对于 $n > 4$ 的正规顶点，其表观发散度都是负的。这也就是说，对于 ϕ^4 理论而言，发散的正规顶点、正规传播子只有上面的两种。从而我们可以利用这三个抵消项消除理论中的所有发散。于是至少在第一个层次上， ϕ^4 理论是可重整的。

正如我们在第三章中所看到的，对于一个散射过程，我们只需要考虑具有相应外线的、含有任意 n 粒子正规顶点和正规传播子的树图，就可以求出这个过程的 Feynman 振幅、散射截面和衰变率。由于我们已经知道了单圈阶的正规顶点和正规传播子，于是就能得到精确到单圈阶的 Feynman 振幅、散射截面和衰变率的值。于是我们就已经做完了对 ϕ^4 理论的单圈修正的计算。

作为例子，考虑一个最简单的过程，弹性散射 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 。由于我们的理论中没有三粒子正规顶点，于是对这个过程有贡献的树图只有一个，也就是四粒子正规顶点。在 OS 方案下的 Feynman 振幅就是：

$$i\mathcal{M}_{\text{OS}} = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\int_0^1 dx \log \left(\frac{m_{\text{ph}}^2}{-x(1-x)s + m_{\text{ph}}^2} \right) + (s \leftrightarrow t) + (s \rightarrow u) \right] + O(\lambda^3) \quad (5.38)$$

The $\overline{\text{MS}}$ Renormalization Scheme

在上面我们提到了，可以有许多不同的重整化方案来确定重整化常数。上面利用的方案被称为 OS 方案，它要求 Lagrangian 中的参数质量等于粒子质量。我们也可以使用另外另一个被称为 **修正的最小减除方案**，或者 $\overline{\text{MS}}$ 方案的重整化方案来确定这些重整化常数⁵。“最小减除”意味着，令重整化常数仅仅包含能够抵消发散的项。在 ϕ^4 理论中，就是令：

$$Z_\phi = 1 + O(\lambda^2), \quad Z_m = 1 + \frac{\lambda}{16\pi^2\varepsilon} + O(\lambda^2), \quad Z_\lambda = 1 + \frac{3\lambda}{16\pi^2\varepsilon} + O(\lambda^2) \quad (5.39)$$

不过不像 OS 方案能够兼顾重整化使 $\langle \Omega|\phi|k \rangle = e^{ikx}$ 和抵消紫外发散的两个功能，在 $\overline{\text{MS}}$ 方案下，由于我们仅仅关注了令重整化常数抵消紫外发散，于是 $\langle \Omega|\phi|k \rangle = e^{ikx}$ 就不一定满足。从而我们的 Lehmann-Kallen 谱表示和 LSZ 约化公式，甚至是 Feynman 规则就要做出一些调整。

首先，由于 Lorentz 不变性，我们依然会有 $\langle \Omega|\phi(x)|k \rangle = \sqrt{Z}e^{ikx}$ 。有了这个关系后，重复我们对 Lehmann-Kallen 谱表示的推导，可以得到：

$$\tilde{\Delta}(k^2) = \frac{Z}{k^2 + m_{\text{ph}}^2 - i\varepsilon} + \int_0^\infty ds \rho(s) \frac{1}{k^2 + s - i\varepsilon} \quad (5.40)$$

可以看到，正规传播子在物理质量处的留数就变成了 Z ，而不是 1。 $\langle \Omega|\phi(x)|k \rangle = \sqrt{Z}e^{ikx}$ 还意味着需要改变自由场和相互作用场之间的渐进关系。由于自由场满足 $\langle \Omega|\phi(x)|k \rangle = e^{ikx}$ ，于是渐进关系就要改为：

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \alpha|\phi(x)|\beta \rangle = \sqrt{Z} \langle \alpha|\phi_{\text{in}}(x)|\beta \rangle, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \alpha|\phi(x)|\beta \rangle = \sqrt{Z} \langle \alpha|\phi_{\text{out}}(x)|\beta \rangle \quad (5.41)$$

事实上，由于不同的重整化方案就是对同一个裸场的不同归一化，于是对于裸场而言，由于 $\phi_0 = \sqrt{Z_\phi}\phi$ ，在 OS 和 $\overline{\text{MS}}$ 方案下，就分别有：

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle \alpha|\phi_0(x)|\beta \rangle = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \sqrt{Z_\phi^{\text{OS}}} \langle \alpha|\phi^{\text{OS}}(x)|\beta \rangle = \sqrt{Z_\phi^{\text{OS}}} \langle \alpha|\phi_{\text{in/out}}(x)|\beta \rangle \quad (5.42)$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle \alpha|\phi_0(x)|\beta \rangle = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \sqrt{Z_\phi^{\overline{\text{MS}}}} \langle \alpha|\phi^{\overline{\text{MS}}}(x)|\beta \rangle \quad (5.43)$$

对比上两个式子，就可以发现：

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle \alpha|\phi^{\overline{\text{MS}}}(x)|\beta \rangle = \sqrt{\frac{Z_\phi^{\text{OS}}}{Z_\phi^{\overline{\text{MS}}}}} \langle \alpha|\phi_{\text{in/out}}(x)|\beta \rangle \quad (5.44)$$

从而，这里的因子 Z 就是：

$$Z = \frac{Z_\phi^{\text{OS}}}{Z_\phi^{\overline{\text{MS}}}} \quad (5.45)$$

⁵除去 OS 方案和 $\overline{\text{MS}}$ 方案之外，还有 MS 方案（不减除 $(4\pi)^\varepsilon e^{-\varepsilon\gamma}$ 的 $\overline{\text{MS}}$ 方案），固定动量减除方案（Peskin 花很大篇幅讨论了这个重整化方案，其重整化条件就是选择一个减除点 M^2 ，在 $p^2 = -M^2$ 时规定物理量的值）等很多重整化方案。不过在这些方案中，OS 方案由于 LSZ 约化中不用引入新的因子、 $\overline{\text{MS}}$ 方案最简洁而成为使用最多的两个方案。

这个因子沟通了两个不同的重整化方案，有时候我们也将其称为一个**有限重整化**。这些渐进关系上的差异会反映在在 LSZ 约化公式中：在每约化一个粒子时，都需要乘一个因子 $1/\sqrt{Z}$ 。并且由于正规传播子满足的方程变成了 $(-\partial^2 + m^2)\tilde{\Delta}(x) = Z\delta^4(x)$ ，于是当我们截去一个外线时，需要乘上因子 Z 。这些因子的总效果就是，在 Feynman 规则中，每一个外线需要乘一个因子 \sqrt{Z} 。

有了这些讨论之后，就可以来考虑 ϕ^4 理论在 $\overline{\text{MS}}$ 方案下的的单圈重整化了。我们在上面已经给出了 $\overline{\text{MS}}$ 方案下的重整化常数，从而自能、正规顶点就是：

$$\Pi(k^2) = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(1 + 2 \log \frac{\mu}{m} \right) + O(\lambda^2) \quad (5.46)$$

$$iV_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\int_0^1 dx \log \frac{\mu^2}{x(1-x)(k_1+k_2)^2 + m^2} + (k_2 \leftrightarrow k_3) + (k_2 \leftrightarrow k_4) \right] \quad (5.47)$$

那么，物理质量和参数 m 的关系是：

$$m_{\text{ph}} = m - \frac{\lambda m}{32\pi^2} \left(\frac{1}{2} + \log \frac{\mu}{m} \right) + O(\lambda^2) \quad (5.48)$$

并且幸运的是，在单圈阶有 $Z = \text{Res}(\tilde{\Delta}(-m_{\text{ph}}^2)) = 1$ ，于是我们可以不用考虑那些因子 Z 。

仍然考虑弹性散射 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ 。在 $\overline{\text{MS}}$ 方案下的 Feynman 振幅就是：

$$i\mathcal{M}_{\overline{\text{MS}}} = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\int_0^1 dx \log \frac{\mu^2}{-x(1-x)s + m^2} + (s \leftrightarrow t) + (s \rightarrow u) \right] + O(\lambda^3) \quad (5.49)$$

由于 $|\mathcal{M}|^2$ 是一个可观测量，从而在两个重整化方案下它们应该相等。而这就告诉我们，在 $\overline{\text{MS}}$ 方案下，不仅仅是 m 和假参数 μ 有关，而且耦合常数 λ 也会和假参数 μ 有关。由于我们通常取 $\mu^2 \approx s$ ，其能标也就是这个散射过程的能标，于是 λ 和假参数 μ 有关就意味着耦合常数 λ 是随着能标而变化的。这就称为**跑动耦合常数**。我们会在下一节详细讨论这个现象。

在讨论的最后，就有必要做一个说明：并不是所有的将发散“藏在”重整化常数中的方式都是正确的。由于我们要求重整化不改变理论的重要对称性，于是在发散“藏在”重整化常数中的过程里也需要保持理论的重要对称性。例如在下文中的旋量 QED，规范对称性要求它的两个重整化常数 Z_1, Z_2 相等，从而所有破坏这个条件的发散消除方式都会给出错误的结果。

5.3 The Renormalization Group

这一节讨论**重整化群**。在前面我们说过，为了抵消理论中的发散，可以对场量，质量和耦合常数进行重新定义，这也就相当于引入重整化常数 Z_ϕ, Z_m, Z_λ ⁶。并且这些重整化常数

⁶在这里没有说重整化最初的意义——使相互作用场满足自由场的渐进关系。在上面也看到了，有些时候为了重整化常数形式的简单，可以抛弃这个条件，而在渐进条件、Lehmann-Kallen 谱表示、LSZ 约化公式和 Feynman 规则中添加一个因子 Z 。从而“使相互作用场满足自由场的渐进关系”反而成为了不必要的。

的选择并不是唯一的。如果我们选择的重整化方案和假参数 μ 不同，那么就会得到不同的重整化常数，这相当于有一系列可以消去发散的重定义方式。同时，理论的可重整性告诉我们，无论我们选择什么样的重定义方式，理论预言的可观测量之间的关系是相同的，这就给出了一个对这一系列重整化常数的限制。利用这个限制，我们就能得到选择不同的重整化方案和假参数 μ 时重整化常数 Z_ϕ, Z_m, Z_λ 的关系，从而得出不同选取下正规顶点、正规传播子的关系。这就是这一节想要讨论的内容。

为了想明白这件事情，需要回到重整化的原点——重新定义场量和参量。我们将尚未重新定义的场量和参量称为**裸量**，而已重新定义的场量和参量称为**重整化的量**。我们用加了下标 0 的量表示裸量，用不加下标的量表示重整的量。由于重整化仅仅是一个变量替换，在重整化前后我们的 Lagrangian 始终是一个东西。于是有：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0 - \frac{1}{2}m_0^2\phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4 = -\frac{1}{2}Z_\phi\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}Z_m m^2\phi^2 - \frac{Z_\lambda\lambda\tilde{\mu}^\varepsilon}{4!}\phi^4 \quad (5.50)$$

在这一步所做的重新定义就是：

$$\phi_0 = Z_\phi^{1/2}\phi, \quad m_0 = Z_m^{1/2}Z_\phi^{-1/2}m, \quad \lambda_0 = Z_\phi^{-2}Z_\lambda\lambda\tilde{\mu}^\varepsilon \quad (5.51)$$

首先，由于重整化仅仅是一个变量替换，于是等式左边是不随重整化方案和假参数的选择而变化的。在重整化下，由于裸量不随着这些选择变化，那么 Lagrangian 也和这些选择无关。回忆我们之前说过的，一个量子场论就是一个“理论生成器”，输入一个 Lagrangian 并输出一个理论。于是很自然的，当我们输入同一个 Lagrangian 时，输出的理论是相同的，这个理论的预言也应该是相同的。从而裸量不随着这些选择变化就蕴含了理论预言的可观测量也不随着这些选择变化。从而上面我们所说的对重整化常数的限制也就可以简化为上面这些量和重整化方案、假参数无关的限制。

这个限制能够告诉我们什么呢？考虑在 $\overline{\text{MS}}$ 方案下，假参数 μ 变化下重整化常数的变化。在上面我们已经计算出了：

$$Z_\phi = 1 + O(\lambda^2), \quad Z_m = 1 + \frac{\lambda}{16\pi^2\varepsilon} + O(\lambda^2), \quad Z_\lambda = 1 + \frac{3\lambda}{16\pi^2\varepsilon} + O(\lambda^2) \quad (5.52)$$

首先对于耦合常数，如果定义耦合常数的重整化常数为 $\tilde{Z}_\lambda = Z_\lambda Z_\phi^{-2}$ ，那么就有：

$$\lambda_0 = \tilde{Z}_\lambda\lambda\tilde{\mu}^\varepsilon \quad (5.53)$$

由于裸量在重整化方案的变换下不变，于是自然不是 μ 的函数。将上面这个式子求一个对数，再对 $\log\mu$ 求导数，就得到：

$$\frac{1}{\tilde{Z}_\lambda} \frac{d\tilde{Z}_\lambda}{d\log\mu} + \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{d\log\mu} + \varepsilon = 0 \quad (5.54)$$

在 $\overline{\text{MS}}$ 方案下， Z 的所有 μ 依赖都应该来自 λ 。于是⁷：

$$\left(\lambda \frac{\partial \tilde{Z}_\lambda(\lambda, \varepsilon)}{\partial \lambda} + \tilde{Z}_\lambda \right) \frac{d \log \lambda(\mu, \varepsilon)}{d \log \mu} + \varepsilon \tilde{Z}_\lambda = 0 \quad (5.55)$$

⁷在具有多个耦合常数的理论中，这是 $Z_{\lambda_j} = Z_{\lambda_j}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 。在这个情况下的讨论和这里的讨论其实是类似的：我们需要对所有的耦合常数求出重整化群方程，然后作为一个微分方程组求解。这个求解方式也和下面类似：可以使用级数解法求解。

这就是重整化群方程。其中就蕴含了耦合常数随重整化方案变化的信息。为了从重整化群方程中抽取出这些信息，我们需要要求解重整化群方程。为此可以利用级数解法求解。

先将重整化常数展开成级数。由于在 $\overline{\text{MS}}$ 方案下，重整化常数一定仅是耦合常数以及 ε 的复变函数，我们可以对它做 Laurant 展开⁸。并且如果将 λ, ε 看成独立变量，那么 $\overline{\text{MS}}$ 方案中对 ε 的所有显式的依赖只可能在分母中，从而 Laurant 展开中一定只有负幂次项。于是：

$$\tilde{Z}_\lambda(\lambda, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{Z}_\lambda^{(n)}(\lambda)}{\varepsilon^n} \quad (5.56)$$

对于 $d\lambda/d\log\mu$ 而言，它也应该也可以对 ε 做如下的级数展开。并且对任何一个可重整理论， λ 中的发散都应完全被吸收进了重整化常数中。此时其中不含发散。于是 $d\log\lambda/d\log\mu$ 的展开就不应该含有负幂次项。也就是：

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda(\mu, \varepsilon)}{d\log\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu) \varepsilon^n \quad (5.57)$$

下面一步就是将这些东西都带入重整化群方程并逐个比较系数。对于 ε^1 以上的幂次，会得到方程：

$$a_2 + a_3 \left(\tilde{Z}_\lambda^{(1)}(\lambda) + \lambda \frac{d\tilde{Z}_\lambda^{(1)}(\lambda)}{d\lambda} \right) + a_4 \left(\tilde{Z}_\lambda^{(2)}(\lambda) + \lambda \frac{d\tilde{Z}_\lambda^{(2)}(\lambda)}{d\lambda} \right) + \dots = 0 \quad (5.58)$$

对于不同的 ε 幂次，会得到不同的方程。注意到这是一个关于 a_n 的代数方程，并且其系数行列式不是 0⁹。于是其唯一解就是 $a_2 = a_3 = \dots = 0$ 。

对于 ε 的一次项，得到：

$$a_1 = -1 \quad (5.59)$$

而对于 ε 的零次项，有：

$$a_0 + a_1 \left(\tilde{Z}_\lambda^{(1)} + \lambda \frac{d\tilde{Z}_\lambda^{(1)}}{d\lambda} \right) + \tilde{Z}_\lambda^{(1)} = 0 \quad (5.60)$$

ε 的负幂次项也应该等于 0。对于-1 次的方程，有：

$$\frac{d\tilde{Z}_\lambda^{(2)}}{d\lambda} = \left(\tilde{Z}_\lambda^{(1)} + \lambda \frac{d\tilde{Z}_\lambda^{(1)}}{d\lambda} \right) \frac{d\tilde{Z}_\lambda^{(1)}}{d\lambda} \quad (5.61)$$

我们发现，负幂次的方程联系了 ε 不同幂次的重整化常数。如果考虑 ε 的更低幂次，那么就会得到一个结论：如果知道了 $\tilde{Z}_\lambda^{(1)}$ ，那么所有的 $\tilde{Z}_\lambda^{(n)}$ 都可以通过重整化群方程求出¹⁰。

⁸非 $\overline{\text{MS}}$ 方案中，由于 $Z_\lambda^{(n)}$ 不仅仅是 λ, ε 的函数，这一步展开并不具有这个形式。在这些重整化方案下的重整化群讨论可以参见 Peskin 的第 12 章，其中从 Callan-Symanzik 方程出发详细讨论了固定动量减除方案下的重整化群。

⁹如果我们只考虑有限阶，也就是在一个很大的 n 处做一个截断的话，那么这个系数行列式是上三角的，并且对角元不是 0。由于有限阶微扰论中只能算出有限个 $1/\varepsilon^n$ 的系数，从而在只考虑有限阶微扰论的情形下这个结论是严格的。

¹⁰需要辨析一下：这并不意味着“计算微扰论第一阶就能算出微扰论任意阶”。在 $\tilde{Z}_\lambda^{(1)}$ 中，也是有微扰论任意高阶的贡献的。

回到讨论的主题——求耦合常数随重整化方案的变化上面来。到此为止，我们已经可以解出 $d\lambda/d\log\mu$ 的所有系数了。它们是¹¹：

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda(\mu, \varepsilon)}{d\log\mu} = \lambda^2 \frac{d\tilde{Z}_\lambda^{(1)}}{d\lambda} - \varepsilon\lambda \quad (5.62)$$

我们将 $\beta(\lambda) := \lambda^2 \tilde{Z}_\lambda^{(1)'}(\lambda)$ 称为 ϕ^4 理论的 **Beta 函数**¹²。它刻画了在能标变化下耦合常数的跑动行为。利用之前得到的单圈重整化结果，有：

$$\tilde{Z}_\lambda(\lambda, \varepsilon) = \left(1 + \frac{3\lambda}{16\pi^2\varepsilon} + O(\lambda^2)\right), \quad \beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \quad (5.63)$$

这告诉我们， ϕ^4 理论的耦合是随着 μ 的增大而增大的。这有什么物理意义呢？答案是 μ 的选取指示了我们所计算的过程的能标。为了看到这一点，考虑一个圈图修正后的散射截面。如果初态能量是 Q^2 ，那么这个截面应该有行为¹³：

$$\sigma = \sigma_{\text{Tree}} \left(1 + c_1\lambda(\mu) + c_2\lambda(\mu) \log \frac{\mu^2}{Q^2} + d_1\lambda^2(\mu) + d_2\lambda^2(\mu) \log^2 \frac{\mu^2}{Q^2} \dots \right) \quad (5.64)$$

如果选择的 μ^2 远大于或远小于 Q^2 ，那么对数 $\log \frac{\mu^2}{Q^2}$ 将会变得过大，使得 $\lambda \log \frac{\mu^2}{Q^2}$ 达到领头阶的量级。这会给我们的微扰计算带来极大的麻烦：截面中不仅仅存在 $\lambda \log \frac{\mu^2}{Q^2}$ 项，应该还有 $(\lambda \log \frac{\mu^2}{Q^2})^n$ 项。如果 $\lambda \log \frac{\mu^2}{Q^2}$ 达到领头阶的量级，那么我们计算低阶圈图修正时就需要考虑很高圈的效应，这是不好的。于是在计算中，我们通常将假参量 μ 选做所计算的过程的能标。从而上面计算出的不仅仅是 λ 和 μ 的依赖关系，更是耦合常数随着能标的变化的依赖关系。这就被称为**跑动耦合常数**。

根据 λ 和 μ 的依赖关系，可以计算出耦合常数的跑动行为是：

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} - \frac{3}{16\pi^2} \log \frac{\mu}{\mu_0} \quad (5.65)$$

一个值得注意的行为是， $\frac{1}{\lambda_0} - \frac{3}{16\pi^2} \log \frac{\mu}{\mu_0}$ 时 λ 发散。这被称为 **Landau 奇点**。Landau 奇点的出现并不意味着理论真的在这里坏掉了，而是在说：在这个能标左右，耦合常数的增长导致这个理论已经不适合用微扰论求解，必须用非微扰量子场论进行研究。这给了我们一个很好的对微扰论适用边界的估算。

你可能会问：这些东西在计算中有什么作用呢？我们可不可以仅仅将眼光放在耦合常数不跑动的 OS 方案下，不考虑这些跑动关系呢？事实上，这样的计算过程中仍然会出现大对数问题：在 OS 方案中，由于我们的重整化条件是在 m_{ph} 确定的，于是如果我们利用 OS 方案计算出这样一个截面，那么这个截面的行为应该是：

$$\sigma = \sigma_{\text{Tree}} \left(1 + c_1\lambda_{\text{ph}} + c_2\lambda_{\text{ph}} \log \frac{m_{\text{ph}}^2}{Q^2} + d_1\lambda_{\text{ph}}^2 + d_2\lambda_{\text{ph}}^2 \log^2 \frac{m_{\text{ph}}^2}{Q^2} \right) \quad (5.66)$$

¹¹注意这里的第二项，它来自于维数正规化中为保证 λ 无量纲而引入的 μ^ε 。倘若我们有一个量纲为 D 的算符，并且也通过类似的方式定义其无量纲耦合常数，那么其耦合常数的重整化群跑动中就会出现一项 $(D-4)\lambda$ 。所以和下面会看到的反常量纲相对应的，我们有些时候会将这一项称为耦合常数的**正常量纲**。

¹²提醒一下：Beta 函数是依赖于重整化方案的。我们这里计算的全部是 $\overline{\text{MS}}$ 下的 Beta 函数。

¹³顺便说一下， $\log^2(x)$ 的意思是 $\log(x)$ 的平方，不是对 x 作用两次对数。

如果物理过程的能标 Q 和质量能标 m_{ph} 相差过大, 那么同样的高阶大对数项 $(\lambda \log \frac{m_{\text{ph}}^2}{Q^2})^n$ 也会在截面中出现。这也会产生同样的问题。而由于截面是一个物理可观测量, 不依赖于重整化常数, 于是我们可以将所有的物理耦合常数 λ_{ph} 都换成跑动耦合常数 $\lambda(Q)$, 并且扔掉所有的大对数项, 如此得到的结果就包含所有阶中的大对数, 从而更加精确。换句话说, 我们相当于将大对数项利用重整化群重求和到了跑动耦合常数中。这就是重整化群在计算中的应用——当我们只知道一个低能标下的耦合常数 (例如电子质量能标的 QED 精细结构常数), 希望计算一些高能标的过程时, 就可以用重整化群来重求和大对数, 使得结果更加精确¹⁴。

讨论完了耦合常数, 再考虑参数质量 m 随着能标的变化。根据类似的讨论, 也可以得到:

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{d \log \mu} = \lambda \frac{d \tilde{Z}_m^{(1)}}{d \lambda} \quad (5.67)$$

其中 \tilde{Z}_m 定义为 $\tilde{Z}_m = Z_m^{1/2} Z_{\phi}^{-1/2}$, $\tilde{Z}_m^{(1)}$ 仍然定义为其 Laurant 展开中 $1/\varepsilon$ 项的系数。根据上一节算出的单圈结果, 可以计算出:

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{d \log \mu} = \frac{\lambda}{32\pi^2} \quad (5.68)$$

这给出了参数质量 m 随着能标的变化。我们有时候也将上式右边的量称为 m 的反常量纲。有了这些耦合常数的变化后, 还可以考虑关联函数在能标变化下的行为。考虑坐标空间的关联函数 $iG_n(x_1, \dots, x_n) = i\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle$ 。类似的, 我们也可以用裸场定义一个裸关联函数 $iG_{n,0}(x_1, \dots, x_n) = i\langle \Omega | T\{\phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n)\} | \Omega \rangle$ 。由于真空态是 Hamiltonian 能量最低本征态, 其定义是不随重整化而变化的。于是就有:

$$G_{n,0}(x_1, \dots, x_n) = Z_{\phi}^{n/2} G_n(x_1, \dots, x_n) \quad (5.69)$$

并且我们知道, 重整的关联函数是 λ, m, μ 的函数。对上式求导, 就有:

$$\frac{n}{2} \frac{d \log Z_{\phi}}{d \log \mu} + \frac{1}{G_n} \frac{d G_n(\lambda, m, \mu)}{d \log \mu} = 0 \quad (5.70)$$

$$\left(\frac{d \lambda}{d \log \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{dm}{d \log \mu} \frac{\partial}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial \log \mu} + \frac{n}{2} \frac{d \log Z_{\phi}}{d \log \mu} \right) G_n(\lambda, m, \mu) = 0 \quad (5.71)$$

如果定义 $\gamma_{\phi} = \frac{1}{2} \frac{d \log Z_{\phi}}{d \log \mu}$ 为 ϕ 的反常量纲, 那么就有:

$$\left(\beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + m \gamma_m \frac{\partial}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial \log \mu} + n \gamma_{\phi} \right) G_n(\lambda, m, \mu) = 0 \quad (5.72)$$

这就是关联函数的 **Callan-Symanzik 方程**。它告诉了我们正规顶点随着标度的变化¹⁵。

¹⁴在具有多个标度的理论中, 上面讨论的 $\overline{\text{MS}}$ 方案 beta 函数可能无法完全重求和所有的大对数。我们会在下一节的末尾仔细讨论这一问题。

¹⁵这里仅仅考虑了场算符的关联函数的 Callan-Symanzik 方程。按照类似的方式, 我们也可以讨论任意算符的关联函数的 Callan-Symanzik 方程。不过我们将在本章后面看到, 对于一些局域算符而言, 要算出有限的算符关联函数的话, 还需要对算符做额外的重整化。这个额外的重整化应该在推导这个方程的时候也被考虑进来。

5.4 One-Loop Corrections of Spinor QED

Photon Exact Propagator

经过本章前三节的讨论，我们已经基本明白了如何用重整化消去量子场论中的紫外发散。有了这些准备之后，就可以来计算旋量 QED 中各个过程的圈图修正了。由于重整化的本质是对场量进行平移和缩放、对参数进行重定义。于是我们的第一步就是从旋量 QED 的裸 Lagrangian $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\partial - m)\Psi + e\bar{\Psi}A\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 出发，得到¹⁶：

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(iZ_2\partial - Z_m m) - \frac{1}{4}Z_3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + Z_1 e A_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (5.73)$$

从而，微扰的 Lagrangian 就是：

$$\mathcal{L}_1 = Z_1 e A_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi + \mathcal{L}_{\text{CT}}, \quad \mathcal{L}_{\text{CT}} = \bar{\Psi}(i(Z_2 - 1)\partial - (Z_m - 1)m) - \frac{1}{4}(Z_3 - 1)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (5.74)$$

由于重整化不改变理论赖以建立的对称性，于是要求重整后的理论仍然具有 U(1) 规范对称性，于是就有 $Z_1 = Z_2$ ¹⁷。不过在接下来的计算中，我们仍然保留这两个重整化常数的名字。

在 Feynman 规则中，前两个抵消项会给出 Fermion 抵消项顶点，顶点因子是 $-i(Z_2 - 1)/p - i(Z_m - 1)m$ ，第三个抵消项给出光子抵消项顶点。由于 $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 可以通过分部积分化为 $\frac{1}{2}A_\nu(\eta^{\nu\sigma}\partial_\mu\partial^\mu A_\sigma - \partial^\mu\partial^\nu A_\mu)$ ，并且由于这一项中的两个光子场是全同的，所以在顶点因子中需要乘一个因子 2。综合上面的讨论，就得到了光子抵消项顶点因子，为 $-i(Z_3 - 1)(k^2\eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)$ 。

上面的讨论有一个隐藏的问题，那就是规范固定项。由于光子自能和规范固定项仅含有 $(\partial A)^2$ ，不含其他的场量和耦合常数，于是这两项的重整化因子应该相等。所以在 R_ξ 规范下，旋量 QED 重整的 Lagrangian 应该是：

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(iZ_2\partial - Z_m m) - \frac{1}{4}Z_3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + Z_1 e A_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi - \frac{Z_3}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (5.75)$$

这么看来，规范固定项也应该给出一个光子-光子抵消项顶点。不过由于规范不变性，只要在讨论前后使用的规范相同，利用不同规范得出的结果间是没有差异的。那我们不妨做一个这样的规范变换，从 Feynman 规范变换到 $\xi = Z_3$ 的 R_{Z_3} 规范。在这个规范下的 Lagrangian 就变成 $\bar{\Psi}(iZ_2\partial - Z_m m) - \frac{1}{4}Z_3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + Z_1 e A_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$ 。由于我们可以随意选择 Lagrangian 的“自由”部分和“相互作用”部分，于是就能利用自由 Feynman 规范的结果去计算 R_{Z_3} 规范下的重整化。此时就可以不考虑规范固定项带来的抵消项顶点。

有了抵消项顶点之后，就可以用它们抵消紫外发散了。先考虑光子的正规传播子，其定义为：

$$\Delta_{\mu\nu}(x - y) := i\langle \Omega | A_\mu(x) A_\nu(y) | \Omega \rangle \quad (5.76)$$

正如前面给出的标量正规传播子的“标准形” $1/(k^2 + m^2 - i\varepsilon - \Pi(k^2))$ 一样，下面也来考虑光子正规传播子的标准形。如果仍然将所有截肢的 1PI 图之和称做**自能** $i\Pi^{\rho\sigma}(k)$ ，那

¹⁶为了不和后面用以代表动量转移的 q 发生混淆，这里将场的电荷量写成了 e 。

¹⁷在第六章中我们会看到，由于经典 Lagrangian 的对称性和量子理论的对称性是不同的，于是这里对 $Z_1 = Z_2$ 的说明是不严格的。在 6.3 节中会对这件事做一个严格的、非微扰的证明。

么光子正规传播子可以写为：

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(k) = \tilde{\Delta}_{\mu\nu,F}(k) + \tilde{\Delta}_{\mu\rho,F}(k)\Pi^{\rho\sigma}(k)\tilde{\Delta}_{\sigma\nu,F}(k) + \dots \quad (5.77)$$

其中 $\tilde{\Delta}_F$ 是光子的自由传播子。在下一章中，我们会看到，局域规范不变性对于自能有下面的限制：

$$k_\mu\Pi^{\mu\nu}(k) = k_\nu\Pi^{\mu\nu}(k) = 0 \quad (5.78)$$

根据这个等式，并且考虑到 Lorentz 不变性， $\Pi^{\mu\nu}(k)$ 就一定可以写为：

$$\Pi(k^2)(k^2\eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \equiv \Pi(k^2)k^2P^{\mu\nu} \quad (5.79)$$

其中定义了一个投影算符 $P_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2$ ，它满足 $P_{\mu\nu}P_\sigma^\nu = P_{\mu\sigma}$ 。利用投影算符，可以将 Feynman 规范下的自由传播子改写为 $\tilde{\Delta}_{\mu\nu,F} = \frac{P_{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon} + \frac{k_\mu k_\nu/k^2}{k^2 - i\varepsilon}$ 。于是有：

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{\mu\nu}(k) &= \frac{P_{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon} + \frac{\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2 - i\varepsilon} + \left(\frac{P_{\mu\sigma}}{k^2 - i\varepsilon} + \frac{\frac{k_\mu k_\sigma}{k^2}}{k^2 - i\varepsilon} \right) \Pi(k^2) k^2 P^{\sigma\rho} \left(\frac{P_{\rho\nu}}{k^2 - i\varepsilon} + \frac{\frac{k_\rho k_\nu}{k^2}}{k^2 - i\varepsilon} \right) + \dots \\ &= \frac{P_{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon} + \frac{\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2 - i\varepsilon} + P_{\mu\nu} \left(\frac{1}{k^2 - i\varepsilon} k^2 \Pi(k^2) \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} \right) + \dots \\ &= \frac{P_{\mu\nu}}{k^2(1 - \Pi(k^2)) - i\varepsilon} + \frac{\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2 - i\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.80)$$

这就是光子正规传播子的标准形，从中可以看到，光子正规传播子在 $k^2 = 0$ 处有一个极点，留数是 $P_{\mu\nu}/(1 - \Pi(0)) + k_\mu k_\nu/k^2$ 。

同时，利用和上面类似的方法，也可以得到光子正规传播子的 Lehmann-Kallen 谱分解：

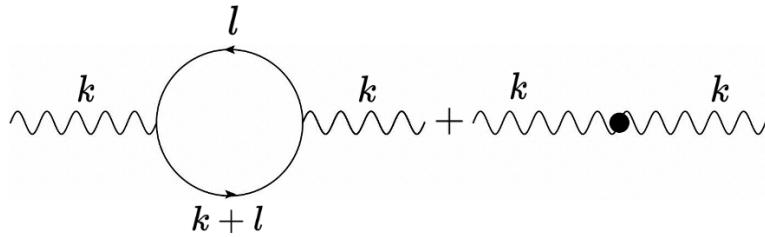
$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(k) = \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 + m_{\text{ph}}^2 - i\epsilon} + \int_{m_{\text{threshold}}}^{\infty} \text{(multi-particle terms)} \quad (5.81)$$

在 Lehmann-Kallen 谱分解的推导中，需要插入一个完备性关系。由于电磁场量子化的理论是建立在非正定 Hilbert 空间上的，这个完备性关系也应该是整个非正定 Hilbert 空间中的完备性关系。也就是说其中不但要包含两个物理极化，还需要包含两个非物理的极化。

讨论一下多粒子态的临界质量 $m_{\text{threshold}}$ 。从 Lehmann-Kallen 谱分解的推导过程中可以看到，这个临界质量就是静止质量最小的 $\langle \Omega | A_\mu | \lambda \rangle \neq 0$ 的态的静止质量。由于 $\langle \Omega | A_\mu$ 是一系列多粒子态的叠加，所以需要一个能够衰变为单光子的多粒子态。由于电荷守恒，于是所有单电子态到光子的过程都被禁戒。由于 C 宇称和下一章会看到的规范不变性，所有初态全部为光子的态都被禁戒。从而，临界质量对应的多粒子态就是 e^+e^- ，从而 $m_{\text{threshold}} = 2m$ 。

由于正规传播子在 $k^2 = 0$ 有一个极点，于是在圈图修正后光子也没有静止质量。并且可以看出：如果我们利用 OS 方案进行重整化，那么传播子在物理质量处的留数是 $\eta_{\mu\nu}$ ，从而 $\Pi(0) = 0$ 。

有了这些讨论，就可以开始进行自能的计算了。对光子自能有贡献的最低阶圈图是以下的两个：



利用上面给出的 Feynman 规则，可以写出自能的表达式：

$$i\Pi^{\mu\nu}(k) = (-1) \left(\frac{1}{i}\right)^2 (iZ_1 e)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{-k - l + m}{(k + l)^2 + m^2} \gamma^\nu \frac{-l + m}{l^2 + m^2} \right] - i(Z_3 - 1)(k^2 \eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \quad (5.82)$$

用维数正规化定义上面的发散积分：

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{-k - l + m}{(k + l)^2 + m^2} \gamma^\nu \frac{-l + m}{l^2 + m^2} \right] \\ &= 4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu (k + l)^\nu + l^\nu (k + l)^\mu - \eta^{\mu\nu} (l(k + l) + m^2)}{((k + l)^2 + m^2)(l^2 + m^2)} \\ &= 4 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{l^\mu (k + l)^\nu + l^\nu (k + l)^\mu - \eta^{\mu\nu} (l(k + l) + m^2)}{(k^2 x + 2k l x + l^2 + m^2)^2} \end{aligned} \quad (5.83)$$

为了将分母配方，做换元 $q = l + xk$, $D = x(1 - x)k^2 + m^2$ 。并且我们还可以舍去所有被积函数为奇函数的项，得到：

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \text{Tr} [\dots] = 4 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{2q^\mu q^\nu - 2x(1 - x)k^\mu k^\nu - [q^2 - x(1 - x)k^2 + m^2] \eta^{\mu\nu}}{(q^2 + D)^2} \quad (5.84)$$

为了处理这样的积分，就有以下的两个积分公式，其证明见本章附录：

$$\int d^d q q^\mu q^\nu f(q^2) = \frac{1}{d} \eta^{\mu\nu} \int d^d q q^2 f(q^2) \quad (5.85)$$

从而可以积分出¹⁸：

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \text{Tr} [\dots] &= 4 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{\eta^{\mu\nu} \left[\left(\frac{2}{d} - 1 \right) q^2 + x(1 - x)k^2 - m^2 \right] - 2x(1 - x)k^\mu k^\nu}{(q^2 + D)^2} \\ &= 8ik^2 P^{\mu\nu} \int_0^1 dx x(1 - x) \frac{\Gamma(2 - d/2) D^{-2+d/2}}{(4\pi)^{d/2}} \\ &= \frac{ik^2 P^{\mu\nu}}{2\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma \right) \int_0^1 dx x(1 - x) \left(\frac{4\pi}{D} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \end{aligned} \quad (5.86)$$

¹⁸我们这里用的是 $d=4$ 时的 Gamma 矩阵求 trace 的公式。如果考虑 d 维的话，就需要将前面的 4 换成 d 。这会引入一个 $(1 - \varepsilon/4)$ 的因子，使发散积分中的常数项出现不一致。但是这个选择的差异仅仅体现在 Z 中，不体现在可观测量中。由于这个操作保持了所有对称性，于是这是等价于选取不同的重整化方案的。当然，并不是所有的这种操作都能保持所有对称性：在 d 维中，不涉及到 γ_5 的 trace 是可以用类似上一章附录中的方法求出的，它们通常是安全的。而在 d 维下， γ_5 是不良定义的，这会导致一些对称性的破坏。如果担心这个操作可能会造成对称性破坏，那么还是将所有量在 d 维中求出比较保险。

关于这个 $\Gamma(2-d/2)$, 有一些值得讨论的东西。对于积分 $\int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{(\bar{q}^2)^a}{(\bar{q}^2 + D)^b}$, 令这个积分的发散度是 $D = 4 + 2a - 2b$, 那么贡献奇点的 Gamma 函数 $\Gamma(b-a-d/2)$ 就是 $\Gamma(2-d/2-D/2)$ 。从而我们就能从积分结果里贡献奇点的 Gamma 函数中得到这个积分的发散行为¹⁹。

这里的积分本来应该是二次发散的, 但是由于二次发散项前面有一个因子 $2/d - 1$, 由于 Gamma 函数的递推关系, 这使得 $\Gamma(1-d/2)$ 变成了 $\Gamma(2-d/2)$ 。也就相当于将二次发散转化为对数发散。另外一个看到这一点的方法是, 考虑 $d=2$, 那么因子 $2/d - 1$ 给了 $\Gamma(1-d/2)$ 一个压低, 使得它在 $d=2$ 时不再发散, 这也就相当于消去了 $d=4$ 中的二次发散。在本节后面一些会看到, 这个二次发散的消去和 QED 的规范对称性是息息相关的。

继续计算。利用前几节中用到的技巧, 得到近似到 $O(e^2)$ 阶的自能是 (为了保持量纲, 做了替换 $e = e\tilde{\mu}^{\varepsilon/2}$):

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(k) &= k^2 P^{\mu\nu} \left(-\frac{e^2}{2\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma \right) \int_0^1 dx \ x(1-x) \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} - Z_3 + 1 \right) \\ &= k^2 P^{\mu\nu} \left(-\frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx \ x(1-x) \log \left(\frac{\mu^2}{D} \right) - Z_3 + 1 \right) \end{aligned} \quad (5.87)$$

在 OS 方案下, 可以定下重整化常数:

$$\Pi(0) = \left(-\frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{e^2}{6\pi^2} \log \left(\frac{\mu}{m} \right) - Z_3 + 1 \right) = 0, \quad Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \log \left(\frac{\mu}{m} \right) \right] \quad (5.88)$$

光子的自能就是:

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = k^2 P^{\mu\nu} \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 x(1-x) \log \left(1 + \frac{x(1-x)k^2}{m^2} \right) dx \quad (5.89)$$

Electron Exact Propagator

接下来考虑电子正规传播子。其定义为 $S(x-y) = i\langle \Omega | T\Psi(x)\bar{\Psi}(y) | \Omega \rangle$ 。利用前述步骤可以得出其 Lehmann-Kallen 谱分解:

$$\tilde{S}(p) = \frac{-\not{p} + m}{p^2 + m_{\text{ph}}^2 - i\epsilon} + \int_{m_{\text{threshold}}}^{\infty} \text{(multi-particle terms)} = \frac{1}{\not{p} + m_{\text{ph}} - i\epsilon} + \int_{m_{\text{threshold}}}^{\infty} \dots \quad (5.90)$$

如果将这个传播子看作宗量为 \not{p} 的复变函数, 那么它在 $\not{p} = -m_{\text{ph}}$ 处存在一个奇点。再考虑临界质量, 因为存在过程 $e^- \rightarrow e^-\gamma$, 从而临界质量就是多粒子态 $e^-\gamma$ 的最小静止质量, 也就是 $m_{\text{threshold}} = m$ 。此时, $\not{p} = -m_{\text{ph}}$ 不再是一个孤立奇点, 故不能定义这一点处的留数, 也就不能通过 OS 方案定出重整化常数。为了“修好”这一点, 我们假设光子具有一个静止质量 m_γ , 在计算的最后取 $m_\gamma = 0$ 的极限。

照例将电子自能定义为:

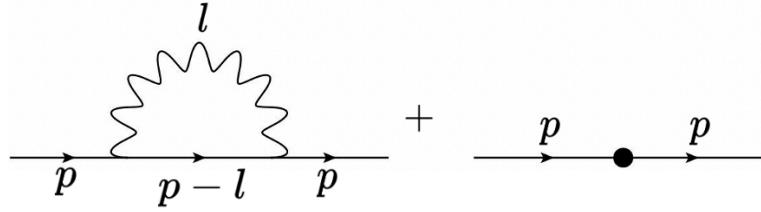
$$i\Sigma(\not{p}) = \sum \text{(all amputated 1PI diagrams with 2 fermion external lines)} \quad (5.91)$$

¹⁹因子 $\Gamma(2-d/2-D/2)$ 还有一个理解方式: 对于一个发散度为 D 的积分, 它在 $d=4-D$ 处应该刚好是对数发散的。从而在 4-D 维中这个 Gamma 函数应该刚好是 $\Gamma(0)$ 。

自能是一个只和 p, m, e 有关的 Lorentz 标量, 于是其中所有对 p 的依赖应该都是由 Lorentz 标量 \not{p}, p^2 提供的。并且由于 $p^2 = -\not{p}\not{p}$, 于是自能总可以写为宗量为 \not{p} 的普通函数。从而电子正规传播子可以写为:

$$\tilde{S}(\not{p}) = \tilde{S}_F(\not{p}) + \tilde{S}_F(\not{p})(i\Sigma) \frac{1}{i} \tilde{S}_F(\not{p}) + \dots = \frac{1}{\not{p} + m - i\epsilon + \Sigma(\not{p})} \quad (5.92)$$

这里等式的右边需要理解为矩阵的逆。这里的求和之所以成立, 也是因为矩阵的逆是唯一的。这就是电子正规传播子的标准形。有了这个标准形之后, 就可以开始进行对其进行的计算。对电子自能的次领头阶有贡献的 Feynman 图是以下的两个:



通过旋量 QED 的 Feynman 规则, 我们写出:

$$i\Sigma(\not{p}) = \frac{1}{i}(ie)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{-\not{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \frac{\eta_{\mu\nu}}{(p + l)^2 + m_\gamma^2 - i\epsilon} - i[(Z_2 - 1)\not{p} + (Z_m - 1)m] \quad (5.93)$$

利用类似的技巧, 得到:

$$\Sigma(\not{p}) = -\frac{e^2}{8\pi^2} \left[(\not{p} + 4m) \frac{1}{\varepsilon} - \left(\frac{\not{p}}{2} + m \right) - \int_0^1 dx [(1-x)\not{p} + 2m] \log \left(\frac{D}{\mu^2} \right) \right] - (Z_2 - 1)\not{p} - (Z_m - 1)m \quad (5.94)$$

其中 $D = x(1-x)p^2 + xm^2 + (1-x)m_\gamma^2$ 。由于我们要求抵消项消除发散, 于是有:

$$Z_2 = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \text{finite} \right), \quad Z_m = 1 - \frac{e^2}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \text{finite} \right) \quad (5.95)$$

OS 方案的重整化条件是 $m_{\text{ph}} = m$, 这要求传播子在 $\not{p} = -m$ 处有一个留数为 1 的极点, 也就是要求 $\Sigma(-m) = 0, \Sigma'(-m) = 0$ 。第一个条件告诉我们可以把自能写为:

$$\Sigma(\not{p}) = \frac{e^2}{8\pi^2} \left[\int_0^1 dx ((1-x)\not{p} + 2m) \log(D/D_0) + \kappa_2(\not{p} + m) \right] \quad (5.96)$$

式中 $D_0 = x^2 m^2 + (1-x)m_\gamma^2$ 。再利用第二个条件定出 κ_2 :

$$\Sigma'(\not{p}) = \frac{e^2}{8\pi^2} \left[-2 \int_0^1 dx x(1-x^2)m \frac{D_0}{D} + \kappa_2 \right] = 0, \quad \kappa_2 = -2 \int_0^1 dx x(1-x^2)m \frac{1}{D_0} \quad (5.97)$$

最终得到电子自能:

$$\Sigma(\not{p}) = \frac{e^2}{8\pi^2} \left[\int_0^1 dx ((1-x)\not{p} + 2m) \log(D/D_0) - 2 \int_0^1 dx x(1-x^2)m \frac{1}{D_0} (\not{p} + m) \right] \quad (5.98)$$

不幸的是，虽然消除了紫外发散，但是这个电子自能仍然是发散的。前面我们说过， m_γ 只是一个我们引入的虚构的光子质量，在计算的最后应该取 $m_\gamma \rightarrow 0$ 的极限来回到正确的结果。而我们将要看到的情况是，当我们取 $m_\gamma \rightarrow 0$ 时候，电子自能将会发散。为了看到这一点，考虑自能的最后一项，其中的积分是：

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x^2)}{x + (1-x)(m_\gamma/m)^2} = -1 + 2 \log \frac{m}{m_\gamma} + O\left(\frac{m_\gamma}{m}\right) \quad (5.99)$$

当我们取 $m_\gamma \rightarrow 0$ 时，这个积分将会发散！这是一个**红外发散**的例子，我们将会在本章的最后处理这些红外发散，而在这之前，就先在式子中保留光子质量 m_γ ，来假装我们获得了一个有限的结果吧。

The QED Vertex

下一个考虑的发散正规顶点是 QED 顶点，也就是连接一根入射电子线、一根出射电子线和一根光子线的顶点。其顶点函数 iV^μ 就是对所有具有如下外线结构的 1PI 截肢图求和：

$$iV^\mu(p_1, p_2) = \sum_{\text{1PI}} \left(\text{Diagram: a shaded circle with a wavy line on the left, an incoming line } p_1 \text{ on the top right, and an outgoing line } p_2 \text{ on the bottom right} \right) \quad (5.100)$$

我们也希望得到 QED 正规顶点的标准形。 V^μ 是一个 4×4 的矩阵，并且携带一个矢量指标。我们可以先抽取出矢量指标的部分，将其写为：

$$V^\mu = A\gamma^\mu + B(p_1 + p_2)^\mu + C(p_1 - p_2)^\mu \quad (5.101)$$

其中 A, B 和 C 是 Lorentz 标量的 4×4 矩阵。由于 4×4 矩阵可以被分为 $1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma_5 \gamma^\mu$ 和 γ_5 的线性组合，从而一个 Lorentz 标量的 4×4 矩阵就可以写为 $1, \not{p}, \sigma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = [\not{p}, \not{p}], \gamma_5 / p, \gamma_5$ 的线性组合。不过由于在旋量 QED 中，树图阶的任何量中都没有出现 γ_5 ，于是在任何 Feynman 中都不会出现这些项，从而我们可以忽略掉 $\gamma_5 \not{p}, \gamma_5$ 这两种可能²⁰。

我们还可以更进一步，考虑 $\bar{u}_{s_2}(p_2)V(p_1, p_2)u_{s_1}(p_1)$ ，其中 p_1, p_2 是 on shell 的。由于 $u_s(p), \bar{u}_s(p)$ 满足 Dirac 方程：

$$(\not{p} + m)u_s(p) = 0, \quad \bar{u}_s(p)(\not{p} + m) = 0 \quad (5.102)$$

此时，矩阵 A, B, C 中的 \not{p} 都可以用 Dirac 方程替换为 m，于是这些矩阵就成为了动量平方和 m 的正常函数。并且由于正规顶点只和变量 p_1, p_2 有关，能够从这两个动量中构造出的独立标量只有 p_1^2, p_2^2 和 $p_1 p_2$ 。由于两个动量 on shell，从而 $p_1^2 = -m^2, p_2^2 = -m^2$ 。于是这三个矩阵就只和 $p_1 p_2$ 有关。由于 $q^2 \equiv (p_1 - p_2)^2 = -2m^2 - 2p_1 p_2$ ，从而 $\bar{u}_2 V(p_1, p_2)u_1$ 可以化为：

$$\bar{u}_2 V^\mu(p_1, p_2)u_1 = \bar{u}_2 [A(q^2)\gamma^\mu + B(q^2)(p_1 + p_2)^\mu + C(q^2)q^\mu]u_1 \quad (5.103)$$

²⁰由于我们要求 QED 的 Lagrangian 有在宇称下的对称性，于是 QED 的 Lagrangian 中不含 γ_5 项。从而在正规顶点中不出现 γ_5 。这可以被看作 QED 宇称守恒的一种体现。

这个表达式还能再化简：对任何一个有光子外线的 Feynman 振幅 $i\mathcal{M}$ ，它都可以分为 $\mathcal{M} = \varepsilon_\mu(q)\mathcal{M}^\mu$ 。下一章将要讨论的规范不变性告诉我们，有 Ward 恒等式 $q_\mu\mathcal{M}^\mu = 0$ 。对于过程 $e^+e^- \rightarrow \gamma$ ，其 Feynman 振幅就是：

$$i\mathcal{M} = i\bar{u}_2 V^\mu(p_1, p_2) u_1 \varepsilon_\mu(q) \quad (5.104)$$

于是规范不变性就要求：

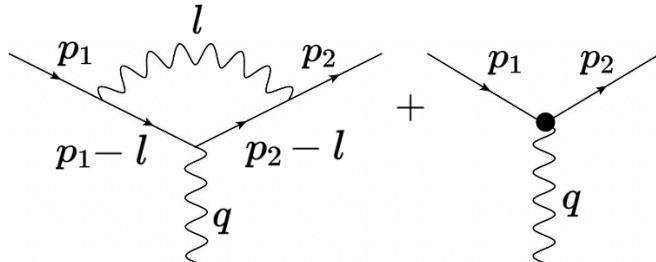
$$(p_1 - p_2)_\mu \bar{u}_2 V^\mu(p_1, p_2) u_1 = \bar{u}_2 [A(q^2)(p_1 - p_2) + C(q^2)q^2] u_1 = 0 \quad (5.105)$$

关于 A 的项可以被 Dirac 方程消去，从而规范不变性就告诉我们 $C(q^2) = 0$ 。在最后，我们可以用 Gordon 恒等式将 $\bar{u}_2 V^\mu(p_1, p_2) u_1$ 改写为：

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 V^\mu(p_1, p_2) u_1 &= \bar{u}_2 [A(q^2)\gamma^\mu + B(q^2)(p_1 + p_2)^\mu] u_1 \\ &= \bar{u}_2 \left[(A(q^2) + 2mB(q^2))\gamma^\mu - \frac{i}{m} (-2mB(q^2)) S^{\mu\nu} q_\nu \right] u_1 \\ &\equiv e\bar{u}_2 \left[F_1(q^2)\gamma^\mu - \frac{i}{m} F_2(q^2) S^{\mu\nu} q_\nu \right] u_1 \end{aligned} \quad (5.106)$$

这就是我们最终得到的 QED 正规顶点的标准型。在这里定义的因子 $F_1(q^2) := (A + 2mB)/e$, $F_2(q^2) := -2mB/e$ 被称为**正规顶点的形状因子**。在后面一节我们会看到，电磁形状因子和电子的磁矩有密切的联系。

接下来的任务就是在次领头阶求出这两个形状因子。我们采用的重整化方案仍然是 OS 方案，重整化条件就是 $e_{\text{ph}} = e$ 。在下一节中，我们会利用和非相对论量子力学的类比求出电子物理电荷的值，它是 $e_{\text{ph}} = eF_1(0)$ 。于是 OS 方案就要求有 $F_1(0) = 1$ 。对顶点的一阶修正来自于以下的 Feynman 图：



根据 Feynman 图，可以写出：

$$\begin{aligned} iV^{(1),\mu}(p_1, p_2) &= i(Z_1 - 1)e\gamma^\mu \\ &+ \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (ie\gamma^\sigma) \left(\frac{1}{i} \frac{-p_2 + l + m}{(p_2 - l)^2 + m^2 - i\varepsilon} \right) (ie\gamma^\mu) \left(\frac{1}{i} \frac{-p_1 + l + m}{(p_1 - l)^2 + m^2 - i\varepsilon} \right) (ie\gamma^\nu) \left(\frac{1}{i} \frac{\eta_{\nu\sigma}}{l^2 + m_\gamma^2 - i\varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (5.107)$$

和之前一样，对这个发散积分做维数正规化，Feynman 参数化，将分母配方，就得到：

$$iV^{(1),\mu}(p_1, p_2) = e \left[e^2 \tilde{\mu}^\varepsilon \int dF_3 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{N^\mu + \gamma_\nu \not{q} \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu}{(q^2 + D)^3} + i(Z_1 - 1)\gamma^\mu \right] \quad (5.108)$$

其中：

$$q = l + x_2 p_2 + x_1 p_1, \quad D = x_1(1-x_1)p_1^2 + x_2(1-x_2)p_2^2 - 2x_1x_2 p_1 p_2 + (x_1+x_2)m^2 + x_3 m_\gamma^2 \quad (5.109)$$

$$N^\mu = \gamma_\nu [x_2 \not{p}_2 - (1-x_1) \not{p}_1 + m] \gamma^\mu [-(1-x_2) \not{p}_2 + x_1 \not{p}_1 + m] \gamma^\nu \quad (5.110)$$

对于这个积分的后一部分，由于分子上的 $q^\mu q^\nu$ 可以被替换为 $q^2 \eta^{\mu\nu}/d$ ，于是 $\gamma_\nu \not{q} \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu$ 就可以被替换为 $q^2 \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu/d = q^2 (d-2)^2 \gamma^\mu/d$ 。经过这个处理之后，我们就将和 q 有关的被积函数化为了 $q^2/(q^2 + D)^3$ 和 $1/(q^2 + D)^3$ ，从而就能利用和之前相同的 Wick 转动技巧积出这个积分：

$$iV^{(1),\mu}(p_1, p_2) = i \frac{e^3}{8\pi^2} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \frac{1}{2} \int dF_3 \log \left(\frac{\mu^2}{D} \right) \right) \gamma^\mu + \frac{1}{4} \int dF_3 \frac{N^\mu}{D} \right] + ie(Z_1 - 1) \gamma^\mu \quad (5.111)$$

为了抵消发散，就需要有：

$$Z_1 = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \text{finite} \right) \quad (5.112)$$

接下来就需要用重整化条件 $F_1(0) = 0$ 来固定重整化常数。消去发散后的正规顶点可以写为：

$$V^\mu(p_1, p_2) = e \gamma^\mu - \frac{e^3}{16\pi^2} \int dF_3 \left[\left(\log \left(\frac{D}{D_0} \right) + 2\kappa_1 \right) \gamma^\mu - \frac{N^\mu}{2D} \right] + O(e^5) \quad (5.113)$$

其中我们将 D_0 取做 $D(p_1 = p_2, p^2 = -m) = (1-x_3)^2 m^2 + x_3 m_\gamma^2$ 。由于我们仅仅需要求出 κ_1 ，可以取一个特殊情况 $p_1 = p_2$ 来简化讨论。在这个特殊情况下，正规顶点是：

$$\bar{u} V^\mu(p_1, p_2) u = e \bar{u} \left[\gamma^\mu - \frac{e^3}{16\pi^2} \int dF_3 \left(2\kappa_1 \gamma^\mu - \frac{N_0^\mu}{2D_0} \right) \right] u + O(e^5) \quad (5.114)$$

由 Dirac 方程，可以将此时的 N_0^μ 化为：

$$\begin{aligned} \bar{u} N_0^\mu u &= \bar{u} \gamma_\nu [(x_3 - 1) \not{p} + m] \gamma^\mu [(x_3 - 1) \not{p} + m] \gamma^\nu u \\ &= 2\bar{u} [(1 - 4x_3 + x_3^2) m^2 \gamma^\mu] u \end{aligned} \quad (5.115)$$

从而根据 $F_1(0) = 0$ ，可以得到：

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} \int dF_3 \frac{1 - 4x_3 + x_3^2}{(1-x_3)^2 + x_3 \frac{m_\gamma^2}{m^2}} = -2 \log \left(\frac{m}{m_\gamma} \right) + \frac{5}{2} \quad (5.116)$$

$$V^\mu(p_1, p_2) = e \gamma^\mu - \frac{e^3}{16\pi^2} \int dF_3 \left[\left(\log \left(\frac{D}{D_0} \right) - 4 \log \left(\frac{m}{m_\gamma} \right) + 5 \right) \gamma^\mu - \frac{N^\mu}{2D} \right] \quad (5.117)$$

可以发现，正规顶点中也存在红外发散的 $\log m/m_\gamma$ 项。不过我们仍然假装没看到它，接着化简。经过复杂的计算，可以将这个结果化为上面所讨论过的标准形。其中电磁形状

因子是：

$$F_1(q^2) = 1 - \frac{e^2}{16\pi^2} \int dF_3 \left[\log \left(1 + \frac{x_1 x_2 q^2 / m^2}{(1 - x_3)^2} \right) + \frac{1 - 4x_3 + x_3^2}{(1 - x_3)^2 + x_3 m_\gamma^2 / m^2} \right. \\ \left. + \frac{(x_3 + x_1 x_2) q^2 / m^2 - (1 - 4x_3 + x_3^2)}{x_1 x_2 q^2 / m^2 + (1 - x_3)^2 + x_3 m_\gamma^2 / m^2} \right] + O(e^4) \quad (5.118)$$

$$F_2(q^2) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 \frac{dy}{1 - y(1 - y)q^2 / m^2} + O(e^4) \quad (5.119)$$

当光子 on shell 时， $q^2 = 0$ 。可以从上式中得到 $F_1(0) = 1, F_2(0) = \frac{e^2}{8\pi^2} = \alpha/2$ 。在下一节中可以看到，它们意味着电子的物理电荷是 e ，反常 Lande g-因子是 $\alpha/2$ 。

Other Proper Vertices

直到这里，我们已经计算出了电子传播子、光子传播子和 QED 顶点的单圈修正，并且利用我们引入的四个重整化常数 Z_1, Z_2, Z_3, Z_m 抵消了这些正规顶点、正规传播子中的发散。那么在这三个正规顶点之外，还有没有其他的正规顶点中存在发散呢？为此需要考虑正规顶点的表观发散度。

在本章开头得出了一个 Feynman 图的表观发散度是：

$$D = dL - 2P_B - P_F \quad (5.120)$$

其中 L 是圈数， P_B 是玻色子内线数， P_F 是费米子内线数。并且由于 QED 顶点的量纲是 0，对于一个固定外线数量的截肢图而言，其量纲就是 $[V_n] = dL - 2P_B - P_F$ ，也就是它的表观发散度。

对于 n 光子 m 电子顶点而言，它对应量子作用量中的项：

$$\int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \int d^4y_1 \dots \int d^4y_m \Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) A(y_1) \dots A(y_m) V(x_1, \dots, y_m) \quad (5.121)$$

于是有 $[V(x_1, \dots, y_m)] = 4n + 4m - \frac{3}{2}n - m$ 。将其变换到频域，就得到顶点因子：

$$V(x_1, \dots, x_n) = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4k_{n+m}}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{i=1}^{n+m} k_i \right) V(k_1, \dots, k_{n+m}) e^{-ik_1 x_1} \dots e^{-ik_{n+m} y_m} \quad (5.122)$$

于是， $[V(k_1, \dots, k_{n+m})] = [V(x_1, \dots, y_m)] - 4(n + m - 1) = 4 - \frac{3}{2}n - m$ 。并且考虑到 QED 顶点保费米子数，正规顶点中的费米子数一定是偶数。可以列出：

正规顶点	Fermion 外线数	光子外线数	表观发散度	紫外发散情况
光子传播子	0	2	2	发散被 Z_3 抵消
Fermion 传播子	2	0	1	发散被 Z_2, Z_m 抵消
三光子顶点	0	3	1	被 C 宇称禁戒
QED 顶点	2	1	0	发散被 Z_1 抵消
四光子顶点	0	4	0	规范不变性保证不发散
双 Fermion-双光子顶点	2	2	-1	不发散
四 Fermion 顶点	4	0	-2	不发散

更多外线数的正规顶点全部是表现收敛的。

特别考虑一下四光子顶点。令这个顶点的顶点函数是 $V^{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ 。其最低阶贡献来自一个 Fermion 圈上连四个光子的 Feynman 图。规范对称性给了我们 Ward 恒等式，从中知道 $k_{1,\mu}V^{\mu\nu\rho\sigma} = 0, k_{2,\nu}V^{\mu\nu\rho\sigma} = 0, k_{3,\rho}V^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ 。并且 Lorentz 对称性告诉我们， $V^{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ 应该有形式：

$$V^{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) = A\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} + B\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + C\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} + (\text{terms with } k_i) \quad (5.123)$$

对于后面和 k_i 有关项的系数，由于其中至少有两个 k_i ，其量纲最高是 $[M] - 2 = -2$ 。并且这个系数一定可以写为一个圈积分 $\int d^4l f(l)$ ，并且其分母上只会有传播子的贡献。从而这个系数中发散最严重的项在紫外区域应该有行为 $\int d^4l/l^6$ ，于是任何和 k_i 有关的项是有限的。

对于系数 A, B, C，由关系 $k_{1,\mu}V^{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) = 0$ ，可以得到：

$$Ak_1^\nu\eta^{\rho\sigma} + Bk_1^\rho\eta^{\nu\sigma} + Ck_1^\sigma\eta^{\nu\rho} = (\text{finite}) \quad (5.124)$$

由于我们可以任意选择 k_1 的值，这个方程都成立。于是可以挑选 $k_1 = (k, 0, 0, 0)$ ，并依次令 $\nu = 0, \nu = \sigma \neq 0$ 。于是有 $Ak = (\text{finite})$ 。对每个系数重复这样的操作，就能得知 A, B, C 分别都是有限的。故规范对称性告诉我们，四光子顶点中不存在发散。

除了消去四光子顶点的发散之外，规范对称性还将光子传播子的发散从二次发散降低到了对数发散。根据之前的讨论，在规范对称性和 Lorentz 对称性下，自能一定可以写为 $\Pi^{\mu\nu} = k^2 P^{\mu\nu} \Pi(k^2)$ 。利用类似的分析，就能知道 $\Pi(k^2)$ 中仅含有对数发散。

也可以从另外一个角度考虑这个二次发散被规范对称性禁戒的原因。考虑一个类似 $i((Z_M - 1) + k^2(Z_3 - 1))$ 的抵消项²¹。另一方面，我们可以将传播子写成 $\Pi = A + Bk^2$ 。由于我们要求为了发散被抵消，于是就有：

$$A + Bk^2 + i((Z_M - 1) + k^2(Z_3 - 1)) = (\text{finite}) \quad (5.125)$$

对于 B 而言，由于传播子量纲为 $[\Pi] = 2$ ，那么 $[A] = 2, [B] = 0$ 。根据上面的讨论，B 中最多含有对数发散。从而所有的二次发散都在 A 中。这也就是说，如果光子传播子中存在二次发散，就需要引入类似 $Z_M A_\mu A^\mu$ 的抵消项。而这一项的存在是破坏规范不变性的。于是为了保持规范不变性，传播子中只能存在对数发散。

于是在旋量 QED 中，表现发散的正规顶点只有光子传播子、Fermion 传播子和 QED 顶点，并且这些正规顶点中只含有对数发散。这些发散都可以用抵消项抵消，从而 BPHZ 定理就告诉我们旋量 QED 是可重整的。

Renormalization Group in Spinor QED

最后，考虑在能量标度的变化下旋量 QED 耦合常数的变化。为了讨论的方便，在这里我们改用 $\overline{\text{MS}}$ 方案。根据裸场和重整场的 Lagrangian 相同，我们可以写出这样的关系：

$$\Psi_0 = Z_2^{1/2}\Psi, \quad m_0 = Z_m Z_2^{-1}m, \quad A_0 = Z_3^{1/2}A, \quad e_0 = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} \tilde{\mu}^{\varepsilon/2} e \quad (5.126)$$

²¹这里忽略了所有 Lorentz 指标。

最后一式也可以用精细结构常数写为 $\alpha_0 = Z_1^2 Z_2^{-2} Z_3^{-1} \tilde{\mu}^\varepsilon \alpha$ 。如果定义一个 $Z_\alpha = Z_1^2 Z_2^{-2} Z_3^{-1}$ 。那么在 $\overline{\text{MS}}$ 方案下，它可以展开为：

$$Z_\alpha(\alpha, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_\alpha^{(n)}(\alpha)}{\varepsilon^n} \quad (5.127)$$

对 $\alpha_0 = Z_\alpha \tilde{\mu}^\varepsilon \alpha$ 求导数，利用和上节类似的方法，可以得出：

$$\frac{d\alpha}{d \log \mu} = -\varepsilon \alpha + \alpha^2 Z_\alpha^{(1)'}(\alpha) \quad (5.128)$$

在 $\overline{\text{MS}}$ 方案下，上面求出了：

$$Z_1 = Z_2 = 1 - \frac{\alpha}{2\varepsilon} + O(\alpha^2), \quad Z_3 = 1 - \frac{2\alpha}{3\varepsilon} + O(\alpha^2) \quad (5.129)$$

代入即可得到 QED 的 beta 函数，并解出耦合常数随着能标的变化：

$$\beta(\alpha) = \frac{2}{3} \alpha^2, \quad \frac{d\alpha}{d \log \mu} = -\varepsilon \alpha + \frac{2}{3} \alpha^2 \quad (5.130)$$

这个方程在 $d=4$ 的解是 $\frac{1}{\alpha(\mu)} = \frac{1}{\alpha_0} - \frac{2}{3} \log \frac{\mu}{\mu_0}$ 。由于 $\alpha(m_e \approx 0.5 \text{ MeV}) \approx \frac{1}{137}$ ，似乎 QED 的 Landau 奇点在远远大于量子场论“坏掉”的 Planck 能标的地方。不过实际并非如此：这个结果仅仅是在一圈阶给出的。如果我们将这个 beta 函数计算到更高圈，那么这个 Landau 极点的位置会下降到 Planck 能标之下，从而 QED 在量子场论坏掉之前就会坏掉。这也就告诉我们：QED 不能作为一个“终极理论”而存在，在更高能标之上一定有一些比 QED 更加基本的理论。我们在第八章就会看到：QED 仅仅是电弱理论在 $\mu \ll 80 \text{ GeV}$ 时的低能近似。而电弱理论的 beta 函数是负的，它的耦合随着能标增大而减小，于是如果我们暂且忘记和引力相关的事情，电弱理论是可以作为一个“终极理论”而存在的。

Problems of the $\overline{\text{MS}}$ Scheme

上面的所有关于重整化群的讨论都是在 $\overline{\text{MS}}$ 重整化方案下进行的，这在理论中只有一个质量标度 m 时运作良好——我们可以完美地将所有形如 $\log(Q/m)$ 的大对数重求和进跑动耦合常数中，于是可以在振幅中消除掉所有的大对数。但是倘若我们考虑的理论中具有两个质量标度 m, M ，那么 $\overline{\text{MS}}$ 方案中的振幅可能会同时依赖于两种大对数：

$$\log\left(\frac{\mu}{m}\right), \quad \log\left(\frac{\mu}{M}\right) \quad (5.131)$$

例如对于旋量 QED 而言，其中如果有一重一轻的两种粒子，那么轻粒子的 QED 正规顶点就将含有 $\log(\mu/m)$ 的依赖性，而重粒子的 QED 正规顶点会具有 $\log(\mu/M)$ 的依赖性。而对于正反轻粒子经一个虚光子散射到正反重粒子的过程，由于这个过程中同时包含以上两个正规顶点，那么其中就会同时具有这两种大对数的依赖性。此时无论将 μ 取为哪个标度，都会有一些无法消除的形如 $\log(M/m)$ 的大对数出现在振幅中，这同样会降低微扰论的精度。也就是说，在这种情况下， $\overline{\text{MS}}$ 方案就不再是重求和大对数的最好选择。

这个问题也可以从 beta 函数中看出。如果旋量 QED 中含有两个不同质量 m, M 的旋量场, 其电荷分别为 $Q_m e$ 和 $Q_M e$, 那么在 $\overline{\text{MS}}$ 方案中耦合常数 α 的跑动就将是:

$$\beta(\alpha) = \frac{2}{3} \alpha^2 [Q_m^2 + Q_M^2] \quad (5.132)$$

这也就是说: 无论在哪个能标 μ 上, 轻、重粒子对耦合常数跑动的贡献都是同等重要的。但是从物理上看, 正如我们考虑 QED 时不需要考虑电弱理论的修正、计算氢原子能级时不需要考虑质子的结构一样, 低能 (大尺度) 下的物理不应该依赖于高能 (小尺度) 物理的细节, 于是重粒子的效应在远低于重粒子质量的能标下应该变得不重要。事实上, beta 函数中重粒子的这些效应就标志着 $\overline{\text{MS}}$ 方案无法处理两个标度之间的差异, 反映在振幅上, 这也就会带来形如 $\log(M/m)$ 的大对数。

如何修好这个问题呢? 解决方法之一是再切换一种重整化方案, 在 **固定能标减除方案** 下考虑问题。在这个重整化方案中, 我们选择一个固定的减除点能标 M_0 , 并在这个能标下确定所有的重整化条件。例如在旋量 QED 中, 这些重整化条件就是:

$$\Pi(-M_0^2) = 0, \quad \Sigma(-M_0^2) = 0, \quad \left. \frac{d\Sigma(k^2)}{dk^2} \right|_{k^2=-M_0^2} = 0, \quad F_1(-M_0^2) = 1 \quad (5.133)$$

由于这里的减除点和 $\overline{\text{MS}}$ 方案中的 μ 类似, 它是一个假参量而不是一个物理的能标, 从而一切的可观测量都不应该依赖于这个减除点。这意味着固定动量减除方案下的耦合常数 $e(M_0)$ 也会随着减除点的变化而跑动。为了看到这个重整化方案如何修好上面的问题, 可以考虑一下这个方案下的光子自能。如果理论中含有两个不同质量 m, M 的旋量场, 其电荷分别为 $Q_m e$ 和 $Q_M e$, 那么计算出的光子自能就是:

$$\begin{aligned} i\Pi(k^2) = & -\frac{e^2(Q_m^2 + Q_M^2)}{6\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} - (Z_3 - 1) \\ & - \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[Q_m^2 \log \left(\frac{\mu^2}{x(1-x)k^2 + m^2} \right) + Q_M^2 \log \left(\frac{\mu^2}{x(1-x)k^2 + M^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.134)$$

利用重整化条件 $\Pi(-M_0^2) = 0$, 可以定下重整化常数, 并且得到:

$$i\Pi(k^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[Q_m^2 \log \left(\frac{-x(1-x)M_0^2 + m^2}{x(1-x)k^2 + m^2} \right) + Q_M^2 \log \left(\frac{-x(1-x)M_0^2 + M^2}{x(1-x)k^2 + M^2} \right) \right] \quad (5.135)$$

仔细分析这个结果中的两个对数: 倘若 $m^2 \ll M^2$, 那么当 $|k^2|$ 接近 m^2 时, 我们可以选择 M_0^2 在 m^2 附近, 此时第一个对数的宗量显然在 1 附近, 而在第二个对数中, 由于分子分母都接近 M^2 , 于是宗量也在 1 附近。这就避免了截面中出现两个不同的大对数的问题。事实上, 这些结果从固定能标减除方案的重整化条件中就能看出——它们实际上要求了所有大对数在 M_0^2 处都被消除, 从而如果将 M_0^2 取做物理过程的能标, 那么所有对数都不会有太大的贡献。也就是说, 如果我们计算出了固定能标减除方案下的跑动耦合常数, 那么这个跑动耦合常数就能重求和掉所有的大对数。

那么如何计算出固定能标减除方案下的跑动耦合常数呢? 最直接的方法当然是直接计算出 OS 方案和固定能标减除方案下的耦合常数, 然后对其求 $\log M_0$ 的导数。根据一些复杂的计算, 可以算出: 在固定能标减除方案下, 上面所讨论的具有 m, M 两个费米场的旋量 QED 中的 beta 函数是:

$$\beta(\alpha) = 4\alpha^2 \int_0^1 dx \left[Q_m^2 \frac{M_0^2 x^2 (1-x)^2}{m^2 + M_0^2 x(1-x)} + Q_M^2 \frac{M_0^2 x^2 (1-x)^2}{M^2 + M_0^2 x(1-x)} \right] \quad (5.136)$$

从而，在 $m \ll M_0 \ll M$ 时，beta 函数就是：

$$\beta(\alpha) = \alpha^2 \left[\frac{2}{3} Q_m^2 + \frac{2}{15} Q_M^2 \frac{M_0^2}{M^2} \right] \quad (5.137)$$

可以看到，beta 函数中重粒子的效应在远低于重粒子质量的能标下被 $(M_0/M)^2$ 的因子压低，而这也正是我们想要的行为。综合上面的讨论，就可以说：在一个具有多个能标的理论中，我们可以利用这个 beta 函数对应的重整化群方程求解出固定能标减除方案下的跑动耦合常数。然后只要用这些跑动耦合常数替换树图/单圈阶的结果中的耦合常数，就可以将所有的大对数重求和进跑动耦合常数中。

相信你也看到了：在固定能标减除方案下的这些计算太过复杂，而 $\overline{\text{MS}}$ 方案中的计算是如此简单。那么能不能用 $\overline{\text{MS}}$ 方案近似地得到和固定能标减除方案类似的结果呢？答案是肯定的：由于 $M_0 \gg M$ 时两个重整化方案的结果一致，而在 $M_0 \ll M$ 时重粒子对固定能标减除方案下的 beta 函数几乎没有贡献。于是一个简单的近似就是取如下的 beta 函数：

$$\beta(\alpha) = \begin{cases} \beta_{\text{light}}^{\overline{\text{MS}}}(\alpha) + \beta_{\text{heavy}}^{\overline{\text{MS}}}(\alpha), & M_0 \geq M \\ \beta_{\text{light}}^{\overline{\text{MS}}}(\alpha), & M_0 < M \end{cases} \quad (5.138)$$

也就是说，在重粒子质量之下，我们完全忽略掉重粒子对 $\overline{\text{MS}}$ 跑动的贡献，而在重粒子质量之上将这些贡献加回来。事实上，这个近似虽然简单，但是工作良好！于是当我们需要计算一个多标度理论中耦合常数的跑动时，大多数用的都是这个近似。

5.5 Electric Charge and Magnetic Moment

在这一节中，我们从正规顶点中求出电子的物理电荷和磁矩。为了这个目标，我们首先需要思考：在实验上如何求出一个粒子的电荷、磁矩呢？答案是将这个粒子放入一个电磁场中，测量它的偏转。于是如果想要从场论中预言一个粒子的物理电荷、磁矩，就应该考虑在经典外场下这个粒子的行为。

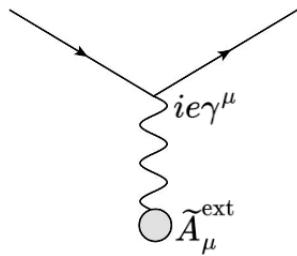
加入经典外场后，Lagrangian 就变成：

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\partial - m)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi(A_{\text{ext}} + A)_\mu \quad (5.139)$$

其中， A_{ext} 就是经典外场，我们所量子化的 A_μ 是在这个经典外场上带来的量子激发。经过重整化后，这就是：

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(iZ_2\partial - Z_m m)\Psi - \frac{1}{4}Z_3 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + Z_1 e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi(A_{\text{ext}} + A)_\mu \quad (5.140)$$

注意：背景场和“量子激发”场的重整化常数是相同的。这是由于背景场是“物理”的、可观测的场，而重整化后的场才是“物理”的。从这个 Lagrangian 中看出，外场的加入会带来一个新的双 Fermion 顶点，如下图所示。

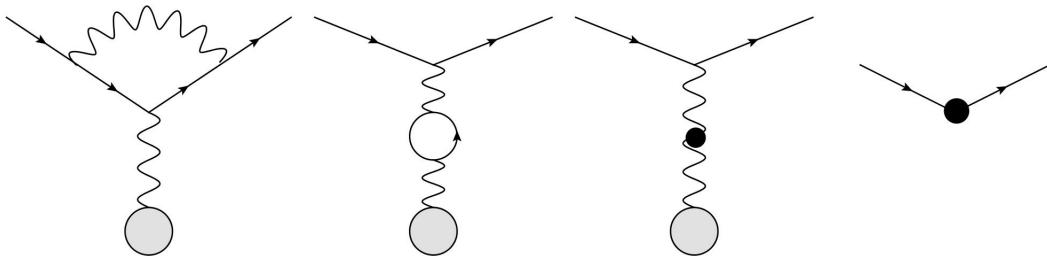


这个顶点带来的顶点因子是 $iZ_1e\gamma^\mu\tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(p_2 - p_1)$ 。从图中也可以看出，这等效于一个贡献 $\tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(p_2 - p_1)$ 的光子外源及相应的双费米子抵消项顶点 $ie\gamma^\mu(Z_1 - 1)\tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(p_2 - p_1)$ 。特别地，对于一个稳定外场而言，其 Fourier 变换是：

$$\tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(k) = \int d^4x A^\mu(\mathbf{x}) e^{ikx} = \int dt e^{-i\omega_k t} \int d^3\mathbf{x} A_\mu^{\text{ext}}(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)\delta(\omega_k)\tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(\mathbf{k}) \quad (5.141)$$

其中， $\tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(\mathbf{k})$ 意味着场 $A_\mu^{\text{ext}}(\mathbf{x})$ 的空间 Fourier 变换。这也就是说，在稳定外场中发生的过程能量守恒。

为了考虑在经典外场下粒子的行为，就应该考虑在外场下的过程 $e^- \rightarrow e^-$ 。根据 LSZ 约化公式的精神，为了求出 $e^- \rightarrow e^-$ 的散射截面，应该计算编时关联函数 $\langle \Omega | T\{\Psi(x)\bar{\Psi}(y)\} | \Omega \rangle$ 。这用正规顶点展开，其实就是正规双费米子顶点。在单圈阶，贡献这个过程顶点的 Feynman 图就是²²：



中间两个图对发散的贡献相互抵消，留下一个光子自能的有限部分。为了抵消第一个图的发散，双费米子顶点的重整化因子就要取做和 QED 正规顶点的重整化因子相同²³，也就是 Z_1 。这样的话，第一个图和第四个图的和就是 QED 正规顶点接上一个外源。如果考虑更高阶的话，这其实就是一个 QED 正规顶点接上一个截去最外面的光子自由传播子的光子正规传播子。从而这个双粒子正规顶点 $\Gamma(p, q)$ 就是：

$$\Gamma(p, p') = k^2 \Delta^{\mu\nu}(p' - p) V_\nu(p, p') \tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(p - p') \quad (5.142)$$

扔掉外场部分，可以定义一个电磁顶点：

$$\Gamma^\mu(p, p') = k^2 \Delta^{\mu\nu}(p' - p) V_\nu(p, p') \quad (5.143)$$

利用电磁顶点，这个关联函数就是：

$$\langle \Omega | \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | \Omega \rangle = \int d^4z \frac{1}{i} S(y - z) i\Gamma^\mu(z) \frac{1}{i} S(z - x) A_\mu^{\text{ext}}(z) \quad (5.144)$$

²²第三个图来自于光子的动力学项。加上背景场后，动力学项中会有一个光子-背景场的混合顶点，其顶点因子和正常的光子抵消项顶点相同。这保证了底下的光子-背景场正规传播子和光子正规传播子完全相同。

²³这也就意味着，背景场和“量子激发”场的重整化因子是相同的。这非常符合我们的物理直观。

在我们求出相应的关联函数之后, 由于这是一个 1 对 1 的散射问题, 需要重新考虑 S-矩阵和散射截面的公式。对于 S 矩阵, 就有 LSZ 约化公式:

$$\langle p' | S | p \rangle = - \int d^4x \int d^4y e^{-ip'y+ipx} \bar{u}(p') (-i\vec{\partial} + m) \langle \Omega | \Psi(y) \bar{\Psi}(x) | \Omega \rangle (i\vec{\partial} + m) u(p) \quad (5.145)$$

积分内的两个 Dirac 算符消去了 $\langle \Omega | \Psi(y) \bar{\Psi}(x) | \Omega \rangle$ 外腿上的正规传播子, 留下一个费米子正规顶点、一个外源和连在其上的光子正规传播子。于是这个过程的 S 矩阵可以写为:

$$\begin{aligned} \langle p' | S | p \rangle &= - \int d^4x \int d^4y \int d^4z e^{-ip'y+ipx} \bar{u}(p') \Gamma_\mu(x, y) u(p) A_\mu^{\text{ext}}(z) \\ &= - \int d^4z \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p, p') u(p) A_\mu^{\text{ext}}(z) e^{-i(p'-p)z} \\ &= (2\pi) \delta(E'_p - E_p) \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p, p') u(p) \tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (5.146)$$

可以看到, 对于一个时间无关的外场, 在这个过程中并没有产生任何的因子 $\delta^4(k_{\text{in}} - k_{\text{out}})$, 而是出现了因子 $\delta(E'_p - E_p)$ 。接下来考虑这个 1 到 1 散射的散射截面。根据 S 矩阵的定义, 从态 $|p\rangle$ 散射到态 $|p'\rangle$ 的概率密度就是:

$$P(p \rightarrow p') = \frac{|\langle p' | S | p \rangle|^2}{\sqrt{\langle p' | p' \rangle \langle p | p' \rangle}} = (2\pi) \delta(\omega_q) \frac{T}{2mV} \left| \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p, p') u(p) \tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(\mathbf{q}) \right|^2 \quad (5.147)$$

从而, 总截面就是:

$$\sigma = \frac{1}{I} \frac{dP}{dt} = \frac{V}{v} \int dp' (2\pi) \delta(E'_p - E_p) \frac{1}{2mV} \left| \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p, p') u(p) \tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(\mathbf{q}) \right|^2 \quad (5.148)$$

将动量积分拆成径向和角向的部分, 并利用径向积分积掉 delta 函数。得到微分散射截面:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \left| \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p, p') u(p) \tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(\mathbf{q}) \right|^2 \quad (5.149)$$

对于电磁顶点, 我们也可以定义其形状因子为:

$$\bar{u}(p') \Gamma^\mu(p, p') u(p) = e \bar{u}(p) \left[\tilde{F}_1(q^2) \gamma^\mu - \frac{i}{m} \tilde{F}_2(q^2) S^{\mu\nu} q_\nu \right] u(p) \quad (5.150)$$

现在已经知道了微分散射截面, 那么该如何从其中得到物理电荷和磁矩呢? 答案是将这个截面和非相对论量子力学中利用 Born 近似求出的散射截面进行对比, 从而得到这个过程中的势函数。有了势函数之后, 就能从势函数中读出电荷和磁矩。为了和一个非相对论的结果进行对比, 那么在上式中我们也应该取非相对论极限。此时有:

$$u_s(p) = \exp(i\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{K}) u_s(0) = \left(1 - \frac{\mathbf{p}}{2m} \cdot \boldsymbol{\Sigma}\right) u_s(0), \quad \bar{u}_s(p') = \bar{u}_s(0) \exp(i\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{K}) = \bar{u}_s(0) \left(1 + \frac{\mathbf{p}'}{2m} \cdot \boldsymbol{\Sigma}\right) \quad (5.151)$$

其中, 矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 被定义为 $\boldsymbol{\Sigma} := \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}$ 。利用这个关系, 我们能求出:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{s'}(p') \gamma^\mu u_{s'}(p) &= m \left(\xi_{s'}^\dagger \left(1 + \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \quad \xi_{s'}^\dagger \left(1 - \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \right) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) \xi_s \\ \left(1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) \xi_s \end{pmatrix} \right) \\ &= m \left[\xi_{s'}^\dagger \left(1 + \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \sigma^\mu \left(1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \xi_s + \xi_{s'}^\dagger \left(1 - \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \bar{\sigma}^\mu \left(1 - \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \xi_s \right] \end{aligned} \quad (5.152)$$

其中定义了：

$$\xi_+ := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_- := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.153)$$

对于 $\mu = 0$ 的情形，就有：

$$\bar{u}_{s'}(p')\gamma^0 u_{s'}(p) \approx 2m\xi_{s'}^\dagger \xi_s = 2m\delta_{ss'} \quad (5.154)$$

而对于 $\mu = i$ 的情形：

$$\begin{aligned} \bar{u}_{s'}(p')\gamma^i u_s'(p) &= m \left[\xi_{s'}^\dagger \left(1 + \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \sigma^i \left(1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \xi_s - \xi_{s'}^\dagger \left(1 - \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \sigma^i \left(1 - \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \xi_s \right] \\ &= m\xi_{s'}^\dagger \left(\frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{m} \sigma^i + \sigma^i \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{m} \right) \xi_s \\ &= \frac{1}{2} \xi_{s'}^\dagger \left[(p'_j - p_j) [\sigma^j, \sigma^i] + (p'_j + p_j) \{\sigma^i, \sigma^j\} \right] \xi_s \\ &= \xi_{s'}^\dagger [i\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{p}' + \mathbf{p})]^i \xi_s \end{aligned} \quad (5.155)$$

再看正规顶点中的 \tilde{F}_2 项，也就是 $i\bar{u}_{s'}(p')S^{\mu\nu}q_\nu u_s(p)$ 。根据 Gordon 恒等式，可以将其化为：

$$\begin{aligned} -2i\bar{u}_{s'}(p')S^{\mu\nu}q_\nu u_s(p) &= \bar{u}_{s'}(p')(p + p')^\mu u_s(p) + 2m\bar{u}_{s'}(p')\gamma^\mu u_s(p) \\ &= 2m\bar{u}_{s'}(p')\gamma^\mu u_s(p) - 2m(p + p')^\mu \delta_{ss'} \end{aligned} \quad (5.156)$$

将这些结果代入电磁顶点中，得到：

$$\begin{aligned} \bar{u}_{s'}(p')\Gamma^\mu(p, p')u_s(p) &= e\bar{u}_{s'}(p') \left[\tilde{F}_1(q^2)\gamma^\mu - \frac{i}{m}\tilde{F}_2(q^2)S^{\mu\nu}q_\nu \right] u_s(p) \\ &\approx e(\tilde{F}_1(0) + \tilde{F}_2(0))\bar{u}_{s'}(p')\gamma^\mu u_s(p) - 2m\tilde{F}_2(0)(p + p')^\mu \delta_{ss'} \end{aligned} \quad (5.157)$$

对于 $\mu = 0$ ：

$$\bar{u}_{s'}(p')\Gamma^0(p, p')u_s(p) = 2me\tilde{F}_1(0)\delta_{ss'} \quad (5.158)$$

对于 $\mu = i$ ：

$$\bar{u}_{s'}(p')V^i(p, p')u_s(p) = e(\tilde{F}_1(0) + \tilde{F}_2(0))\xi_{s'}^\dagger(\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma})^i \xi_s + 2e\tilde{F}_1(0)(\mathbf{p}' + \mathbf{p})\delta_{ss'} \quad (5.159)$$

于是，一个 Fermion 在外场中的微分散射截面就是：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^2 m^2}{4\pi^2} \left| \tilde{F}_1(0)\delta_{ss'}\tilde{A}_0^{\text{ext}}(\mathbf{q}) + \left[\frac{i}{2m}(\tilde{F}_1(0) + \tilde{F}_2(0))\xi_{s'}^\dagger(\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma})\xi_s + \frac{1}{m}\tilde{F}_1(0)(\mathbf{p}' + \mathbf{p})\delta_{ss'} \right] \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{\text{ext}}(\mathbf{q}) \right|^2 \quad (5.160)$$

需要将这个结果和非相对论量子力学中的结果做比对。对于一个有自旋的粒子，它在电磁场中的相互作用势如果是 \hat{V} ，那么 Born 近似给出的，从自旋 s 到自旋 s' 的截面就是：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{QM}} = \frac{m^2}{4\pi^2} |\tilde{V}(\mathbf{q})_{s's}|^2 = \frac{m^2}{4\pi^2} |\xi_{s'}^\dagger \tilde{V}(\mathbf{q}) \xi_s|^2 \quad (5.161)$$

这告诉我们：

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = e\tilde{F}_1(0)\tilde{A}_0^{\text{ext}}(\mathbf{q}) + e \left[\frac{i}{2m}(\tilde{F}_1(0) + \tilde{F}_2(0))\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{m}\tilde{F}_1(0)(\mathbf{p}' + \mathbf{p}) \right] \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{\text{ext}}(\mathbf{q}) \quad (5.162)$$

做 Fourier 变换，并且利用 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\phi = A^0$ ：

$$V(\mathbf{x}) = e\tilde{F}_1(0)\phi - \frac{e}{m}(\tilde{F}_1(0) + \tilde{F}_2(0))\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \cdot \mathbf{B} + \frac{e}{m}F_1(0)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) \quad (5.163)$$

从中就能看出：第一项是 Fermion 的物理电荷就是 $e\tilde{F}_1(0)$ 。第二项是 Fermion 磁矩和磁场的耦合。势中的第三项就是磁矢势和动量的耦合。在非相对论的 QM 中，它来自正则动量项 $(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2/2m$ 。由于 $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}/2$ ，于是磁矩就是：

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m}(2\tilde{F}_1(0) + 2\tilde{F}_2(0))\mathbf{S} \quad (5.164)$$

从而，Lande g 因子就是 $2(\tilde{F}_1(0) + \tilde{F}_2(0))$ 。从而为了求出一个粒子的物理电荷和磁矩，就只需要求出电磁顶点的两个形状因子 $\tilde{F}_1(0)$ 和 $\tilde{F}_2(0)$ 即可。事实上，这两个顶点我们已经见识过了：当 $q^2 = 0$ 时，Lehmann-Kallen 谱表示告诉我们 $\Delta_{\mu\nu}(k)$ 的行为就类似 $\eta_{\mu\nu}/k^2$ 。于是根据电磁顶点和 QED 正规顶点的关系 $\Gamma^\mu(p, p') = k^2 \Delta^{\mu\nu}(p' - p)V_\nu(p, p')$ ，就有：

$$\Gamma^\mu(p, p')|_{(p-p')^2=0} = V^\mu(p, p')|_{(p-p')^2=0} \quad (5.165)$$

从而，在 $q^2 = 0$ 的情形下，电磁顶点的形状因子 \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 就是 QED 正规顶点的形状因子 F_1, F_2 。这就解释了为什么在上一节中，我们要求 QED 正规顶点的重整化方案是 $F_1(0) = 0$ ——这意味着 Lagrangian 中的参数电荷 e 就是物理电荷。另一方面，由于上一节已经计算出了 $F_2(0) = \tilde{F}_2(0) = \alpha/2\pi$ ，于是电子的 Lande g 因子就是：

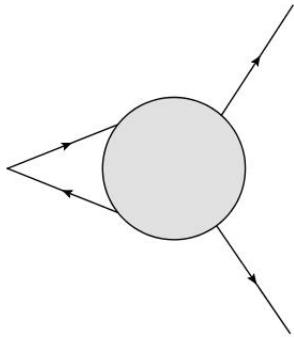
$$g = 2 \left(1 + \frac{\alpha}{2m} \right) \quad (5.166)$$

这是一个著名的结果。我们知道，Dirac 理论预言电子的 Lande g 因子为 2，而在量子场论中，由 QED 的辐射修正，电子磁矩会偏移 Dirac 理论所预言的值。相对偏移 $(g - 2)/2$ 就称为反常磁矩。上面的计算告诉我们，电子的反常磁矩在 $O(\alpha)$ 阶是 $\alpha/2\pi$ 。

5.6 Renormalization of Local Operators

在上面的所有讨论中，我们做重整化所消去的发散都是正规顶点中的发散，从而也消去了任意场算符的关联函数 $\langle \Omega | T\{\phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n)\} | \Omega \rangle$ 中的发散。并且事实上，所有正规顶点有限只能保证在 $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_n$ 时这个关联函数有限。当存在 $x_i = x_j$ 时，这两点处的场会结合成一个局域算符 $\mathcal{O}(x_i)$ 。下面会看到，对于这种含有局域算符的关联函数 $\langle \Omega | T\{\mathcal{O}(x)\phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n)\} | \Omega \rangle$ ，就算我们做完了重整化，使得所有正规顶点都是有限的，这个关联函数仍然存在发散。

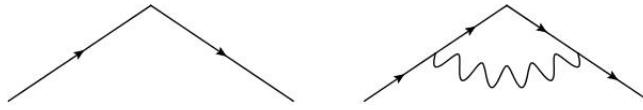
举一个例子就能清楚的看到这一点：考虑 QED 中局域算符 $J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ 的关联函数。为了简单起见，不妨看一下关联函数 $\langle \Omega | T\{\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)\} | \Omega \rangle$ 。将这个关联函数用 Feynman 图展开后，就是有如下外线结构的 Feynman 图之和：



在坐标空间中，左边这个流仅仅给出一个顶点因子 γ^μ 。不过由于我们最熟悉的还是动量空间中的 Feynman 图计算，于是先对这个关联函数做一个 Fourier 变换，定义：

$$\langle \Omega | T\{\tilde{J}^\mu(k)\tilde{\Psi}(p_1)\tilde{\bar{\Psi}}(p_2)\} | \Omega \rangle = \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 \langle \Omega | T\{\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)\} | \Omega \rangle e^{ikx} e^{ip_1 x_1} e^{-ip_2 x_2} \quad (5.167)$$

这就相当于把费米子流入、出图的外线分别标记上了动量 p_1, p_2 。此时顶点除去给出顶点因子 γ^μ 之外，还向图中注入动量 k 。这个关联函数有贡献的树图和一圈图是：



树图肯定是不发散的。为了看到发散，只需要考虑圈图对 $\langle \Omega | T\{\tilde{J}^\mu(x)\tilde{\Psi}(x_1)\tilde{\bar{\Psi}}(x_2)\} | \Omega \rangle$ 的贡献²⁴：

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \frac{-p_2 + m}{p_2^2 + m^2} (iq\gamma^\mu) \frac{1}{i} \frac{-p_2 + l + m}{(p_2 - l)^2 + m^2} \gamma^\mu \frac{1}{i} \frac{-p_1 + l + m}{(p_1 - l)^2 + m^2} (iq\gamma_\mu) \frac{1}{i} \frac{-p_1 + m}{p_1^2 + m^2} \frac{1}{i} \frac{1}{l^2} \quad (5.168)$$

经过和上面类似的计算，就算出：

$$\langle \tilde{J}^\mu(k)\tilde{\Psi}(p_1)\tilde{\bar{\Psi}}(p_2) \rangle_{1\text{-Loop}} = \frac{1}{i} \frac{-p_2 + m}{p_2^2 + m^2} \gamma^\mu \frac{1}{i} \frac{-p_1 + m}{p_1^2 + m^2} \left(\frac{e^2}{8\pi^2\varepsilon} + (\text{finite}) \right) \quad (5.169)$$

于是就发现，即便我们已经引入重整化常数使得所有正规顶点中的发散全部被抵消，局域算符 J 的关联函数 $\langle \Omega | T\{\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)\} | \Omega \rangle$ 中仍然存在发散。从上面这个计算中可以看到，这个发散的来源是 J 带来了一个新的顶点，这个顶点的圈图修正并没有被抵消。进一步地，并且对于与 J 有关的所有关联函数，由于对 J 顶点的修正和上面这个情形相同，于是所有和 J 有关的关联函数中也一定存在发散²⁵。

从可观测量角度来看，这个发散是“安全”的：由于 LSZ 约化公式和局域算符的关联函数无关，于是这个发散不会进入任何散射截面和衰变率中，所以修好这个发散似乎是不必要的。不过从理论的角度来看，我们不希望重整化后的任意关联函数中存在发散，于是最好还是想个办法把这个发散消除掉。这个想出来的办法就是**局域算符的重整化**——认为

²⁴还有几个图给出外面传播子的修正，它们的发散已经在上面抵消完毕了。

²⁵顺便说一下，在第六章中，我们可以利用 Schwinger-Dyson 方程来方便地得出和上面这些分析相同的结果。

在重整化下，我们除了要重新定义场、质量、电荷等参数，对 Lagrangian 之外的局域算符也要做一个重新定义²⁶。对于一个算符 \mathcal{O} ，有：

$$\mathcal{O}_0(x) = Z_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(x) \quad (5.170)$$

此时，算符 \mathcal{O} 的重整化常数 $Z_{\mathcal{O}}$ 和组成它的场的重整化常数完全没有关系。在重整化群的意义下，这就意味着算符在重标度下的跑动完全取决于算符本身——不是组成算符的成分在跑动，而是算符的定义自身在跑动²⁷。

对于上面这个例子而言，这就是：

$$J_0^\mu = \bar{\Psi}_0 \gamma^\mu \Psi_0, \quad J^\mu = Z_J \bar{\Psi}_0 \gamma^\mu \Psi_0 = Z_J Z_2 \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (5.172)$$

重新定义算符后，相当于在原来 J 顶点的位置上加了一个抵消项顶点 $[(Z_2 - 1) + (Z_J - 1)]\gamma^\mu$ 。从而关联函数就变成了：

$$\langle \tilde{J}^\mu(k) \tilde{\Psi}(p_1) \tilde{\Psi}(p_2) \rangle_{1\text{-Loop}} = \frac{1}{i} \frac{-\not{p}_2 + m}{p_2^2 + m^2} \gamma^\mu \frac{1}{i} \frac{-\not{p}_1 + m}{p_1^2 + m^2} \left(\frac{e^2}{8\pi^2 \varepsilon} + (\text{finite}) + (Z_2 - 1) + (Z_J - 1) \right) \quad (5.173)$$

这样一来通过调整 Z_J ，发散就的确被抵消掉了。如果详细计算一下重整化常数 Z_J ，就会发现： Z_2 其实就已经足以抵消算符的发散了，在这个情形下， Z_J 是 1。也就是说，裸的算符 J_0^μ 的定义不会随着重整化群的流动改变。这并不是对所有算符都通用的，而是这个算符背后的对称性保证的：这里的算符 J_0^μ 实际上是 $U(1)$ 对称性的守恒流。对于这样一个守恒流，一定有一个与之对应的守恒荷：

$$Q = \int d^3x J_0^0(x) \quad (5.174)$$

首先，这个守恒荷和 Hamiltonian 对易，从而其本征态的本征值是不随着演化而变化的。将这个算符作用在渐进时刻的多粒子态上，就会发现其本征值是 $(n_+ - n_-)$ ，其中 n_+, n_- 分别是正反粒子的数目，从而这个算符的本征值是离散的。由于重整化群流是连续的，于是如果这个算符的定义在重整化群流下有了一个微小变化，其本征值也会有一个微小变化，从 $(n_+ - n_-)$ 变为 $Z_J(n_+ - n_-)$ 。而这和算符的本征值是离散矛盾。于是对于任何一个守恒流 J_0 ，如果其对应的守恒荷具有离散本征值，那么算符 J_0 的定义就不会被重整化，其重整化因子 Z_J 就是 1。不过虽然算符的定义不会被重整，组成算符的场是会被重整的。对于任何这样的守恒流而言，其关联函数的发散都可以被它构成的场的重整化所消除²⁸。

²⁶对于 Lagrangian 中的算符，它们对应的顶点就是 Feynman 规则中的顶点。从而重新定义场、质量、电荷等参数就足以消除其关联函数的发散。

²⁷这里可能有些难理解的是，对于关联函数 $\langle \Omega | T\{\bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(y) \bar{\Psi}(x_1) \Psi(x_2)\} | \Omega \rangle$ ，为什么 x 不等于 y 的时候不会出现发散，到 $x=y$ 这一点上就突然出现了发散？这可以通过算符乘积展开来理解。在算符乘积展开中，两个不同点的算符 $\mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(0)$ 可以被分解为：

$$\mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(0) = \sum_i C_{12}^i(x) \mathcal{O}_i(x) \quad (5.171)$$

而系数 $C_{12}^i(x)$ 中可能有对 x 的对数或者负幂次依赖性。这在 $x=0$ 的时候会造成奇异性。

²⁸这里还要求这个对称性不反常。在第六章末尾会看到，对于反常的对称性而言，其守恒流会有一个反常的散度。这使得流守恒方程不成立，于是就算渐进时刻的算符具有离散本征值，但在中间时刻的算符的本征值仍然可以是连续的。这使得重整这个算符没什么问题。

对于一个任意的局域算符，事情还没有这么简单。在抵消一个算符的关联函数的发散的过程中，我们可能需要引入其他算符的抵消项才能抵消这个发散。这就意味着随着重整化群流，一个算符的定义可能不仅仅是经过了一个缩放，而是存在**算符混合**。此时，算符的重整化关系就是：

$$\mathcal{O}_{i,0}(x) = Z_{\mathcal{O},ij} \mathcal{O}_j(x) \quad (5.175)$$

当然，混合的算符之间一定要具有相应的量子数，也就是说这些相互混合的算符一定在对称群的同一个表示中。就像上面这个例子一样，这些重整化常数 Z_{ij} 也可以通过微扰展开计算出来。限于篇幅，这里就不给出一个算符混合的例子了。

更进一步的，我们就要问：对于一个非局域算符，例如我们在第七章中会看到的 Wilson 圈，其关联函数会不会出现发散？需不需要重整化？不幸的是，现在的量子场论还没有发展出能够处理这个问题的形式理论，对于非局域算符的重整化，只能 case by case 地具体分析了。

5.7 Effective Field Theory

Wilsonian Effective Field Theory

在前面的讨论中，我们已经基本了解了如何利用重整化来消除紫外发散，其中心思路就是：为了消除理论中的发散，对场量，质量和耦合常数进行了重新定义，这相当于引入了几个重整化常数。通过调整这些重整化常数，可以抵消掉理论中的发散。这些重整化常数的选择有很多种，为了保证理论的自洽性，需要这个理论是可重整化的，这蕴含不论这些重整化常数的选择是哪一种，理论预言的可观测量之间的关系是相同的。描述这些重整化常数之间的相对关系的方程就是重整化群方程。

但是通过重整化消去发散的操作是十分不自然、十分“手工”的。重整化常数并没有真正的消去发散，而只是将发散“藏在了地毯底下”。我们希望对重整化有一个更物理的认识，而不仅仅将它当作一个抵消发散的技巧。在对场论的现代认识中，理解重整化的方式是**有效场论**。在这一节中，我们的目标就是利用有效场论来重新认识重整化和重整化群。

在重新认识这些东西之前，我们需要对有效场论进行一个简单的介绍。首先，有效场论是一种工具，用于从含有高能标自由度的理论中计算低能标上的可观测量。其思路是：对于一个完整理论，我们可以试图在算符层面将低能和高能的场分开，并且纯粹利用低能的场算符构建出一个新的有效理论，使得这个有效理论和原本的完整理论能给出完全相同的低能可观测量。这样利用这个有效理论，我们只需要计算仅含低能自由度的 Feynman 图就可以计算出完整理论中的低能可观测量。为了看到这一点，考虑一个 Lagrangian 为 \mathcal{L} 的理论，其生成泛函是：

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi) \right] \quad (5.176)$$

我们希望在算符层面上就分离开低能和高能的场，为此可以尝试对场算符的 Fourier 变换施加一个动量截断。不过，由于 Minkowski 空间中， $|k|$ 小不意味着 $k^0, |\mathbf{k}|$ 不大，于是在 Minkowski 空间中作用动量截断并不能有效地分离开低能和高能的物理。从而为了“修好”这一点，需要做一个 Wick 转动 $x^0 = i\tau$ ，将 Minkowski 空间变化到 Euclidean 空间中。这样一来， $|k|$ 小就意味着 $k^0, |\mathbf{k}|$ 小。在 Wick 转动后，场的 Fourier 变换就是：

$$\phi = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{i(k \cdot x)_E} \tilde{\phi}(k) \quad (5.177)$$

引入一个动量截断 Λ 来将场分为低能和高能的部分：

$$\phi_L(x) = \int_{k_E^2 < \Lambda^2} \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{i(k \cdot x)_E} \tilde{\phi}(k), \quad \phi_H(x) = \phi(x) - \phi_L(x) = \int_{k_E^2 > \Lambda^2} \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{i(k \cdot x)_E} \tilde{\phi}(k) \quad (5.178)$$

有了这个定义，我们就能从场算符的层面区分低能和高能的场了。我们要做的下一步就应该是纯粹利用低能的场算符构建出一个新理论，使得这个新理论和原本的完整理论能给出完全相同的低能可观测量。而我们知道，可观测量又完全由关联函数决定。为了求出低能极限下的关联函数，可以定义一个低能场的生成泛函²⁹：

$$Z_L[J] = \int \mathcal{D}\phi_L \mathcal{D}\phi_H \exp \left[iS[\phi_L, \phi_H] + i \int d^4 x J(x) \phi_L(x) \right] \quad (5.179)$$

对这个生成泛函求泛函导数，就能得到全低能场的关联函数。于是这个生成泛函就应该是低能有效理论的生成泛函。类似的，我们还可以定义低能有效理论的联通生成泛函 $W_L[J] = -i \log Z_L[J]$ 。既然我们希望纯粹利用低能的场构建这个低能有效理论，那么低能有效理论的作用量一定只是 ϕ_L 的泛函。根据前面的讨论，它应该满足：

$$\int \mathcal{D}\phi_L \mathcal{D}\phi_H \exp \left[iS + i \int d^4 x J(x) \phi_L(x) \right] \equiv \int \mathcal{D}\phi_L \exp \left[iS_{\text{eff}}[l] + i \int d^4 x J(x) \phi_L(x) \right] \quad (5.180)$$

从而，低能有效理论的作用量就应该是如下的 **Wilson 有效作用量**：

$$\exp(iS_{\text{eff}}[\phi_L]) := \int \mathcal{D}\phi_H \exp(iS[\phi_L, \phi_H]) \quad (5.181)$$

这意味着，我们可以积掉生成泛函中高能的部分，利用这个有效作用量分析低能的物理。你可能会问：这个有效作用量是不是局域的？它能不能写成一个有效 Lagrangian 的形式？答案是肯定的：由于低能极限下，我们总将关联函数计算到 $1/\Lambda^n$ 的对应阶，于是我们希望将 Wilson 有效作用量展开到 $1/\Lambda^n$ 的某一阶。可以证明，直到 $1/\Lambda^n$ 的任意固定阶，Wilson 有效作用量都是局域的，也就是：

$$S_{\text{eff}} = \int d^4 x_E \mathcal{L}_{\text{eff}} (\phi_L, \partial_\mu \phi_L, \partial_\mu \partial_\nu \phi_L, \dots) + O\left(\frac{1}{\Lambda^{n+1}}\right) \quad (5.182)$$

从而， \mathcal{L}_{eff} 可以写成一系列算符的和。这些算符原则上应该是所有满足量子理论的对称性³⁰的算符：

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(x) = \sum_n C_n \mathcal{O}_n(x) \quad (5.183)$$

²⁹在定义完这些东西之后，我们也可以把理论再 Wick 转动回 Minkowski 时空。从而这里写出的作用量是 Minkowski 时空中的作用量，而不必将其也转动到 Euclidean 时空。在转动回 Minkowski 时空后，还需要时刻注意 ϕ_L, ϕ_H 是根据 Euclidean 的 Fourier 变换定义的。出于作者的个人喜好，在这个 notes 中，我们将一直会使用 Minkowski 时空中的有效场论。

³⁰这并不是 Lagrangian 的对称性！在下一章中，我们会看到经典对称性和量子对称性的区别。

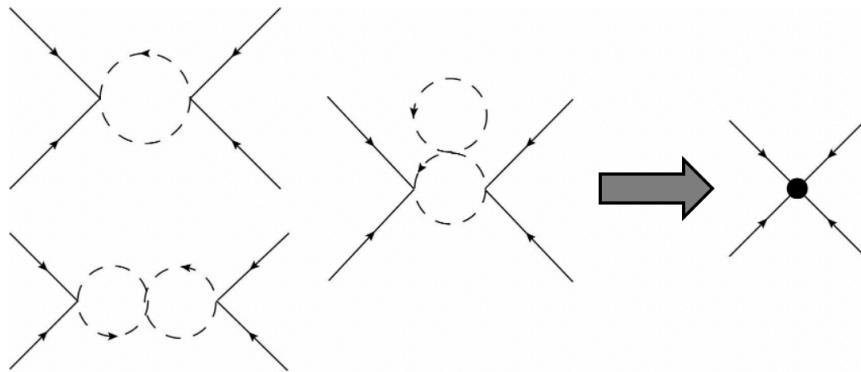
由于低能场的 Fourier 变换自然有个频率截断 Λ ，于是任何圈积分在紫外都是有限的。从而在有效理论中可以完全不考虑可重整性的问题。于是，这些算符可以是任意量纲的。算符前面的系数 C_n 就被我们称为这个算符的 **Wilson 系数**。由于 Lagrange 密度的量纲是 4，于是如果 $[\mathcal{O}_n] = d_n$ ，那么 $[C_n] = 4 - d_n$ 。如果理论中只有 Λ 这一个重要的能标，我们可以利用能标 Λ 将 Wilson 系数做无量纲化：

$$C_n = \frac{c_n}{\Lambda^{d_n-4}}, \quad \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) = \sum_n \frac{1}{\Lambda^{d_n-4}} c_n \mathcal{O}_n(x) \quad (5.184)$$

其中， c_n 就是一个无量纲的 Wilson 系数。通常在一个自然的理论中， c_n 都在 1 的量级。从而算符 \mathcal{O}_n 对一个振幅的领头阶贡献应该是 $(q/\Lambda)^{d_n-4}$ 的量级的。从而这样一个 naive 的 power-counting 告诉我们，当我们考虑的物理能标 q 越低，那么量纲小于 4 的算符对振幅的贡献就越大。于是这些算符被称为**有关算符**；而相反地，当能标 q 越低，量纲大于 4 的算符对振幅的贡献将会越小。这些算符被称为**无关算符**。而量纲为 4 的算符对振幅的贡献几乎不随着过程的能标而变化，最多有一个对数的改变。从而这些算符被称为**临界算符**。到此为止，我们就已经明白了这个 Wilson 有效作用量的结构³¹。

那么，这个有效作用量该如何计算呢？根据 Wilson 有效作用量的定义， $\exp(iS_{\text{eff}}[\phi_L])$ 就是有背景场 ϕ_L 时，仅仅由 ϕ_H 构成的理论中所有真空图之和，于是 $iS_{\text{eff}}[\phi_L]$ 就是原理论中有背景场 ϕ_L 时所有联通真空图之和。这其实也就是所有仅有 ϕ_L 外线， ϕ_H 内线的图之和。从而为了计算一个算符的 Wilson 系数，我们应该画出所有联通的、有和这个算符相对应的 ϕ_L 外线、 ϕ_H 内线的图，并且对这些图求和。

这个方案从 Feynman 图的角度看也很好理解：对于低能有效理论，我们相当于将高能场组成的结构收缩为一个点。这个过程可以用下面的图来表达：



我们也可以赋予这个“收缩”一个物理意义：高能标就相当于小的空间尺度，于是用高能标自由度联系在一起的两个点就具有很近的时空距离，从而在低能标、大尺度上来看，这两个点就看似是同一个点。如果我们想要计算低能有效理论中的一个 Feynman 规则，那么就要求和所有可能的“收缩”。这也就是对所有具有对应的 ϕ_L 外线、 ϕ_H 内线的图求和。

Example: EFT in ϕ^4 Theory

为了更好的理解上面这个形式理论，可以考虑一个例子。现代的观点认为，我们在之前看到的量子场论都只是一个低能下的有效理论，我们看到的作用量只是些 Wilson 有效作用

³¹当然，这里的讨论并不是严格的。更加严格的讨论会在本节后面给出。

量。也就是说，在定义这个理论时，就已经存在了一个截断 Λ_0 。如果我们仅仅关心能标 Λ 之下的物理量，就可以将能标 Λ 到 Λ_0 之间的自由度再积分掉。下面就来计算一下这样一个“有效理论的有效理论”的 Wilson 有效作用量。

在这个例子中，我们的完整理论是 ϕ^4 理论，也就是：

$$S[\phi] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right] \quad (5.185)$$

从而在 Wick 转动后，完整理论的作用量就是：

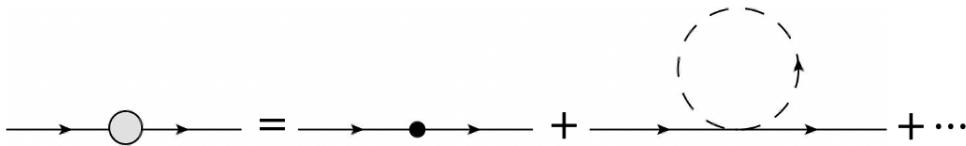
$$S[\phi_L, \phi_H] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_L\partial^\mu\phi_L - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_H\partial^\mu\phi_H - \frac{1}{2}m^2(\phi_L^2 + \phi_H^2) - \frac{\lambda}{4!}(\phi_L + \phi_H)^4 \right] \quad (5.186)$$

注意到，这里并没有类似 $\phi_L\phi_H$ 的项。这是由于：

$$\begin{aligned} \int d^4x\phi_L\phi_H &= i \int d^4x_E \int_{k^2 < \Lambda^2} \frac{d^4k_E}{(2\pi^4)} e^{i(k\cdot x)_E} \tilde{\phi}(k) \int_{k'^2 > \Lambda^2} \frac{d^4k_E}{(2\pi^4)} e^{i(k'\cdot x)_E} \tilde{\phi}(k') \\ &= \int_{k^2 < \Lambda^2} \frac{d^4k_E}{(2\pi^4)} \int_{k'^2 > \Lambda^2} \frac{d^4k_E}{(2\pi^4)} (2\pi)^4 \delta_E^4(k + k') \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}(k') \end{aligned} \quad (5.187)$$

由于 k 和 k' 的积分区域使得这个 delta 函数的宗量永远不可能为 0，于是上面这一项就一定是 0。从而， ϕ^2 中也就只有 ϕ_L^2, ϕ_H^2 这两项不为 0。有了这个作用量之后，我们就能从中读出完整理论的 Feynman 规则：低能和高能场的传播子依然是 $\frac{1}{i k^2 + m^2 - i\varepsilon}$ ，理论中存在 4 高能、3 高能 1 低能、2 高能 2 低能、1 高能 3 低能和 4 低能这五种顶点，每一种的顶点因子都是 $-i\lambda$ 。对于一个高能圈而言，其圈积分的 Euclidean 动量从 Λ 积分到 Λ_0 ，而低能圈从 0 积分到 Λ 。

有了这个 Feynman 规则，我们就可以将 Wilson 系数计算到单圈阶。首先，有效场论中质量项的 Wilson 系数由以下图给出：



其中第一个图是原本的质量项。这些图就给出：

$$im_{\text{eff}}^2 = im^2 + \frac{1}{2} \int_{\Lambda}^{\Lambda_0} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} (-i\lambda) \frac{1}{i} \frac{1}{l^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (5.188)$$

于是：

$$m_{\text{eff}}^2 = m^2 - \frac{\lambda}{16\pi^2} \left[\Lambda_0^2 - \Lambda^2 - m^2 \log \left(\frac{m^2 + \Lambda_0^2}{m^2 + \Lambda^2} \right) \right] \approx m^2 - \frac{\lambda}{16\pi^2} (\Lambda_0^2 - \Lambda^2) \quad (5.189)$$

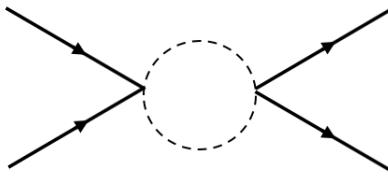
从而，Wilson 有效 Lagrangian 中就存在一项 $\frac{1}{2}(m^2 - \frac{\lambda}{16\pi^2}(\Lambda_0^2 - \Lambda^2))\phi_L^2$ 。顺便强调一下，这里的约等号实际上是在 $\Lambda \gg m^2$ 的意义上的近似，否则我们的低能有效理论甚至无法

涵盖低能粒子质量这一能标，从而当然也无法涵盖我们感兴趣的能标。并且由于这里仅仅考虑了单圈的结果，于是这个近似的误差应该是 $O(\lambda^2, (m/\Lambda)^2)$ 量级的。

另外，由于算符 $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ 也对应这些具有两个外线的图，故这些图还可以告诉我们算符 $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ 的 Wilson 系数的信息。由于这里的圈积分是和外动量无关的，于是这两个图中并没有对 k 的依赖。从而至少在一阶，这个算符的 Wilson 系数和之前一样，仍然是 $1/2$ 。后面就会看到，这个算符的 Wilson 系数实际上和场强重整化系数有着十分密切的关联，从而我们通常将动力学项前面出现的额外系数称为 Z_{eff} 。这个结果就告诉我们：

$$Z_{\text{eff}} = 1 + O(\lambda^2) \quad (5.190)$$

我们下一个考虑的是有效理论中的四粒子顶点，它的 Wilson 系数由原顶点、下图以及这个图的两个交叉之和给出：



这也就意味着：

$$-i\lambda_{\text{eff}} = -i\lambda + \frac{3}{2} \int_{\Lambda}^{\Lambda_0} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (-i\lambda)^2 \left(\frac{1}{i} \frac{1}{l^2 + m^2 - i\varepsilon} \right)^2 \quad (5.191)$$

其中，由于我们考虑的是 ϕ^4 这一个算符的 Wilson 系数，而所有的外动量依赖都会被纳入含有 $\partial\phi$ 的有效算符中，于是我们可以仅考虑外动量均为 0 的情形。这也就蕴含：

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{eff}} &= \lambda - \frac{3}{32\pi^2} \lambda^2 \left[\frac{m^2}{m^2 + \Lambda_0^2} - \frac{m^2}{m^2 + \Lambda^2} + \log \left(\frac{m^2 + \Lambda_0^2}{m^2 + \Lambda^2} \right) \right] \\ &\approx \lambda - \frac{3}{16\pi^2} \lambda^2 \log \left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right) \end{aligned} \quad (5.192)$$

其他算符的 Wilson 系数也可以被类似的计算。对于算符 ϕ_L^{2n} 而言，其 Wilson 系数就是：

$$C_{2n} \approx -\frac{(-1)^n}{32\pi^2 2^n n(n-2)} \lambda^n \left(\frac{1}{\Lambda^{2n-4}} - \frac{1}{\Lambda_0^{2n-4}} \right) \quad (5.193)$$

利用这样计算出的低能的、截断为 Λ 的有效理论，我们就可以计算出完整理论中的 $\langle \Omega | T\{\phi_L(x_1) \dots \phi_L(x_n)\} | \Omega \rangle$ ，从而计算出相应的低能可观测量。虽然看起来我们有无穷多的 Wilson 系数要计算，但是由于我们的计算总是有一个精度，于是我们总是希望将这些东西计算到 (q/Λ) 的特定阶，其中 q 是外动量。根据前面的讨论，由于量纲为 d_n 的算符的 Wilson 系数和能标大约有关系 $C_n \approx 1/\Lambda^{d_n-4}$ ，于是它对振幅给出的贡献约为 $(q/\Lambda)^{d_n-4}$ 。于是如果我们只需要计算到 (q/Λ) 的二阶，只计算所有量纲小于 6 的算符的 Wilson 系数即可满足我们的精度要求。从而我们并不需要计算无穷多的 Wilson 系数。

到此为止，我们就基本上明白了有效场论这个工具该如何利用了。引用一下 C. P. Burgess 在他的有效场论教材中给出的总结：如果希望用有效场论这一套工具计算一个低能可观测量，那么可以遵循以下的步骤：

- 确定有效理论的截断并选择计算精度，由此确定需要计算到 (q/Λ) 的哪一阶。
- 利用 power-counting 来确定需要计算 Wilson 有效作用量中的哪些 Wilson 系数。
- 如果我们知道高能理论具体是什么，那么就直接计算出这些 Wilson 系数，并从中得到可观测量；如果我们不知道高能理论究竟是什么，仅仅知道我们理论适用的最高能标在哪里，那么可以将这些 Wilson 系数视为自由参数，通过实验确定出这些 Wilson 系数后，我们也可以达到相应的精度。

The Wilsonian Renormalization Group

上面这个例子不但展示了如何计算 Wilson 有效作用量，事实上还告诉了我们一个非常重要的事情：切换不同的截断，Wilson 系数会发生变化。如果我们将积分掉的能标 $\Lambda \sim \Lambda_0$ 取做无穷小的，那么我们就可以定量地分析出这些 Wilson 系数随着截断的变化率。上面的例子中已经计算出，对于 ϕ^4 理论，如果我们将能标从 Λ 更改到 $b\Lambda$ ，其中 b 是一个 0 到 1 的正数，那么³²：

$$Z(b\Lambda) = Z(\Lambda) + O(\lambda^2) \quad (5.194)$$

$$m^2(b\Lambda) = m^2(\Lambda) - \frac{\lambda(\Lambda)}{16\pi^2}(\Lambda^2 - b^2\Lambda^2) + O(\lambda^2, (m/\Lambda)^2) \quad (5.195)$$

$$\lambda(b\lambda) = \lambda(\Lambda) - \frac{3}{16\pi^2}\lambda^2(\Lambda)\log\left(\frac{1}{b}\right) + O(\lambda^3, (m/\Lambda)^2) \quad (5.196)$$

$$C_{2n}(b\Lambda) = C_{2n}(\Lambda) - \frac{(-1)^n}{32\pi^2 2^n n(n-2)}\lambda^n(\Lambda)\left(\frac{1}{(b\Lambda)^{2n-4}} - \frac{1}{\Lambda^{2n-4}}\right) + O(\lambda^{n+1}, (m/\Lambda)^2) \quad (5.197)$$

从而可以看到，截断能标的降低导致了 Lagrangian 在参数空间中的“流动”。这些变换构成一个半群，称为 **Wilson 重整化群**³³。而 Lagrangian 在参数空间中的这个“流动”就被称为 **重整化群流**。由于不同的截断对应所考虑的不同能标，于是我们说重整化群联系了不同能标的物理。

当然，上面所描述的这个参数空间中的“流动”给出了不同的截断能标下的理论之间的关系。这件事情也可以用另外一个方式理解：如果我们将理论做一个重标度 $x' = xb, k' = k/b$ ，那么 Wilson 有效作用量就可以写为：

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x' b^{-4} \left[-\frac{1}{2}Z(b\Lambda)b^2(\partial'_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2(b\Lambda)\phi'^2 - \frac{\lambda(b\Lambda)}{4!}\phi'^4 + \sum_n C_n(b\Lambda)b^{D_n}\mathcal{O}_n(\partial'_\mu, \phi') \right] \quad (5.198)$$

其中 D_n 代表算符 \mathcal{O}_n 中的导数算子个数。我们可以对场做一个重定义，使得场的动力学项变为通常的 $-(\partial_\mu\phi)^2/2$ ，那么就会得到以下的 Lagrangian：

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x' \left[-\frac{1}{2}(\partial'_\mu\phi')^2 - \frac{1}{2}m^2(b\Lambda)Z^{-1}(b\Lambda)b^2\phi^2 - \frac{\lambda(b\Lambda)}{4!}Z^{-2}(b\Lambda)\phi^4 + \sum_n C_n(b\Lambda)Z^{-F_n/2}(b\Lambda)b^{4-d_n}\mathcal{O}_n(\partial'_\mu, \phi) \right] \quad (5.199)$$

³²在我们上面的例子中，截断 Λ_0 的理论就是一个 ϕ^4 理论，其中是不存在高量纲算符的。而在这个情况下，截断 Λ 的理论仍然可以具有高量纲算符。不过事实上，高量纲算符的贡献总是很小的：首先在完整理论中，其初值应该是 0。而根据上面的讨论，无论我们将截断取做什么样的值，它都应该是 $\lambda^n(q/\Lambda)^{2n-4}$ 量级的。而由于高量纲算符最少也有 $d=6$ ，于是它们的贡献至少是 $O(\lambda^2, (m/\Lambda)^2)$ 的。这比起领头阶而言可以忽略。

³³由于不存在逆变换，于是重整化群不是群，而是半群。

其中 F_n 是 \mathcal{O}_n 中包含的场算符个数，而 d_n 和以前一样，是算符 \mathcal{O}_n 的量纲。这些操作的重点是：经过重标度后，我们得到的有效理论和原本的理论具有相同的截断，于是 Wilson 重整化群也可以被理解为联系了一些相同截断能标的理论，重整化群流刻画的是相同截断能标的 Lagrangian 在参数空间中的“流动”。事实上，比起前面讨论的不同截断理论之间的流动，由于我们在微扰计算时通常选择的截断都是相同的，于是这里给出的重整化群流更加接近前面几节中看到的跑动耦合常数。在下面的讨论中，当我们谈到“跑动耦合常数”时，我们讨论的都是这些重标度过的耦合常数。

如果我们将 b 取得无限接近于 1，前面几个关系也就定量地描述了这些 Wilson 系数的重整化群流。在这个例子中，耦合常数的跑动就由以下的重整化群方程所描述：

$$\frac{dm^2(\Lambda)}{d \log \Lambda} = 2m^2(\Lambda) + \frac{\Lambda^2}{8\pi^2} \lambda(\Lambda) + O(\lambda^2, (m/\Lambda)^2) \quad (5.200)$$

$$\frac{d\lambda(\Lambda)}{d \log \Lambda} = \frac{3}{16\pi^2} \lambda^2(\Lambda) + O(\lambda^3, (m/\Lambda)^2) \quad (5.201)$$

$$\frac{dC_{2n}(\Lambda)}{d \log \Lambda} = (d_n - 4)C_{2n}(\Lambda) + \frac{(-1)^n}{32\pi^2 2^{n-1} n} \lambda^n(\Lambda) \frac{1}{\Lambda^{2n-4}} + O(\lambda^{n+1}, (m/\Lambda)^2) \quad (5.202)$$

如果试图在边界条件 $\lambda(\Lambda_0) = \lambda_0$ 解出重整化群方程，那么将会得到：

$$\lambda(\Lambda) = \frac{\lambda_0}{1 + \frac{3\lambda_0}{16\pi^2} \log\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right)} \quad (5.203)$$

这和我们前面看到的结果 $\lambda(\Lambda) = \lambda_0 + \frac{3}{16\pi^2} \lambda_0^2 \log\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right)$ 看起来不太一样。这是因为，前面看到的这个结果中除去这个对数项，在高圈修正中还有 $\log^2(\Lambda/\Lambda_0)$ 等项。在 Λ, Λ_0 差距较大的时候，可能会出现 $\lambda, \log(\Lambda/\Lambda_0)$ 量级相似的情形。此时，这些对数的贡献将无法忽视。而重整化群方程的这个解相当于重新求和了这些对数项，将他们“收在”分母上。从这个角度上来看，重整化群方程的这个结果是在各个能标都更加适用的。

对于量纲不为 0 的耦合常数，我们也可以看到：重整化群方程的最高阶是由“正常量纲”所给出的，于是在微扰论中这些耦合常数的跑动应该也由这一项主导。如果忽略后面的东西，我们就能看到以下的跑动行为：

$$C_n(\Lambda) = \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right)^{4-d_n} C_n(\Lambda_0) + O(\lambda) \quad (5.204)$$

这首先 justify 了前面我们给出的 power-counting：这个关系正意味着无量纲的 Wilson 系数 c_n 在重整化群下基本不变，从而我们前面给出的结论——算符 \mathcal{O}_n 对一个振幅的领头阶贡献是 $(q/\Lambda)^{d_n-4}$ 量级的——是严格成立的。另外，在我们持续减小理论能标的过程中，量纲大于 4 的算符的 Wilson 系数会逐渐减小，而量纲小于 4 的算符的 Wilson 系数将逐渐增大。从这个角度看，我们也能得知在低能的物理中，量纲大于 4 的无关算符对振幅的贡献越来越小，量纲小于 4 的有关算符对振幅的贡献越来越大，而量纲等于 4 的临界算符对振幅的贡献基本不变的这个事实。

Why Renormalization Works?

明白了有效理论这套形式理论之后，我们就可以回到本节最开始的问题：如何用这套理论来理解重整化？在现代的观点中，我们在之前看到的量子场论都只是一个低能下的有效理

论, 我们看到的作用量只是些 Wilson 有效作用量。它们来自于将某个紫外理论的自由度积分掉。而经过积分高能自由度的过程后, 我们可以得到一个有效理论, 其作用量有形式:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z(\Lambda)(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}\hat{m}^2(\Lambda)\phi^2 - \frac{\hat{\lambda}(\Lambda)}{4!}\phi^4 + \sum_n \frac{\hat{c}_n(\Lambda)}{\Lambda^{d_n-4}}\mathcal{O}_n \quad (5.205)$$

根据前面的 power-counting, $\hat{m}^2(\Lambda)$ 中应该含有截断 Λ 的二次项 Λ^2 , $Z(\Lambda), \hat{\lambda}(\Lambda)$ 中应该有一个截断的对数依赖 $\log \Lambda$, 而 $\hat{c}_n(\Lambda)$ 中应该含有 Λ 的 $-(d_n - 4)$ 次项。从而, 如果我们希望计算的过程满足 $q \ll \Lambda$, 那么前面这几个 Wilson 系数中应该包含“二次发散”或“对数发散”, 而 $C_n(\Lambda)\mathcal{O}_n$ 这些无关算符的贡献应该至少是 $O(q/\Lambda)$ 的, 这在我们仅仅希望考虑低能的物理, 不需要探索更高的能标时可以被忽略。

我们可以将这些“二次发散”或“对数发散”从 Wilson 系数中提取出来。为此可以定义:

$$\hat{m}^2(\Lambda) = Z_m(\Lambda)m^2, \quad \hat{\lambda}(\Lambda) = Z_\lambda\lambda \quad (5.206)$$

其中, Z_m, Z_λ 包含一切具有 Λ 的对数或是正幂次依赖的因子, 而 m^2, λ 不含有这些对截断的依赖性。这样一来, 有效理论的 Lagrangian 就变为:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z(\Lambda)(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}Z_m(\Lambda)m^2\phi^2 - \frac{Z_\lambda(\Lambda)\lambda}{4!}\phi^4 + O(1/\Lambda^2) \quad (5.207)$$

这正是我们熟悉的重整场的 Lagrangian! 上面定义的 Z, Z_m, Z_λ 实际上就是重整化常数, 这里选取这个截断的过程实际上就是正规化。而由于我们仅仅要求 m^2 中没有发散, 在分割开 $\hat{m}^2(\Lambda) = Z_m\hat{m}^2$ 时, 可以选择不同的分割方式——这就是不同的重整化方案。另外, 根据上面的讨论, 考虑低能的可观测量时, 由于物理能标 $q \ll \Lambda$, 于是无关算符对可观测量的贡献至少是 $O(q/\Lambda)$ 的, 这在大部分情况下可以被忽略, 这其实是我们看到的场论总是可重整的理由。并且由于低能-高能的区分是人为的, 于是可观测量一定是和 Λ 无关的, 从而正规化、重整化方案的不同不会影响可观测量。

而本章前面做的事情就很明确了: 由于我们预先知道了这个 Wilson 有效作用量的形式, 于是在计算可观测量时, 我们可以在将圈积分的积分上限取做这个有效理论的截断 Λ , 并且通过可观测量和截断无关这一事实以及几个重整化条件定下这些待定系数 Z, Z_m, Z_λ 。这就是重整化的本质。

Effective Field Theory in Dimensional Regularization

利用上面这些讨论, 我们仅仅可以理解用一个硬截断来正规化的过程 (这被称为 **Wilson scheme**)。事实上, 除了可以用一个硬截断来定义有效理论之外, 也可以用一个软截断来定义有效理论。例如可以将低能场定义为:

$$\phi_L = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(k) e^{ikx} e^{-k^2/\Lambda^2} \quad (5.208)$$

但是, 我们最熟悉的是维数正规化, 它做的事情和前面这些讨论看起来非常不同, 它并没有任何的“截断”, 而仅仅是将维数延拓到复平面上而已。从而在维数正规化下, 似乎是无法积分掉高能自由度的。不过在实际操作上, 一般做的也不是积分掉一个场的高能部分, 而是积分掉整个重粒子场。例如对于以下的理论:

$$S[\phi, \Phi] = \int d^4 x \left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{2}M^2\Phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^2\Phi^2 \right] \quad (5.209)$$

其中粒子 Φ 的质量 M 远大于粒子 ϕ 的质量 m 。此时如果只想考虑低能 $E < M$ 的散射振幅，那么这些高能粒子将不会出现在外线上，只会出现在圈中。从而需要的关联函数也是仅含有 ϕ 的关联函数。于是我们可以积分掉整个 Φ 场来得到一个有效场论：

$$\exp(iS_{\text{eff}}[\phi]) = \int \mathcal{D}\Phi \exp(iS[\phi, \Phi]) \quad (5.210)$$

而这些操作在维数正规化下是良定义的，于是维数正规化下，我们也可以定义有效场论。那么前面这些对重整化群、重整化的理解该如何在维数正规化下讨论呢？对于重整化而言，事情十分简单：我们仍然可以将理论理解为一个有效理论，这样上面的一切讨论都仍然适用，只不过 Λ 的正幂次换成了 $d = 4$ 的奇异性。但是对于重整化群而言，由于我们没有了“连续积分掉自由度”的过程，于是 Wilson 重整化群这一套理论都无法适用。

不过正如 5.3 节所示，除去 Wilson 重整化群之外，我们也能得到耦合常数随着维数正规化的假参数 μ 变化的跑动行为，这被称为**连续重整化群**，它的本质其实是一种对微扰论的重求和。连续重整化群和 Wilson 重整化群虽然都在描写耦合常数随着能标的关系，但是它们之间还有很大的不同。例如对于有关算符，连续重整化群和 Wilson 重整化群的重整化群方程具有不同的形式。例如在 ϕ^4 理论中质量 m^2 的重整化群方程分别为：

$$\frac{dm^2(\Lambda)}{d \log \Lambda} = 2m^2 + \frac{\Lambda^2}{8\pi^2} \lambda(\Lambda), \quad \frac{dm^2}{d \log \mu} = \frac{\lambda}{16\pi^2} m^2 \quad (5.211)$$

不过对于临界算符而言，由于 Wilson 重整化群和连续重整化群都关心相应重整化常数中的发散项。于是它们给出的 beta 函数是相同的。这也就是上面利用 Wilson 重整化群计算出的 λ 的重整化群方程和 5.3 节中利用连续重整化群方程计算出的 λ 的重整化群方程几乎完全相同的原因。

另外一个在维数正规化下的有效场论中会遇到的问题是，既然在维数正规化下圈积分不存在截断，那么计算出的无穷大将会重新出现在可观测量中。更加不好的是，由于有效 Lagrangian 中可能会出现不可重整的耦合，在这样的 EFT 下所有的可观测量似乎都会发散。如何解决这些发散问题呢？答案是，我们仍然可以引入一个重整化。这个重整化也可以用上面这一套形式理论去理解：在前面的讨论中，我们直接扔掉了 $C_n(\Lambda)$ 。而当我们关心 $O(q/\Lambda)$ 的高阶贡献时，这些 Wilson 系数也是有用的，需要被加回来。对于 Wilson 系数 $C_n(\Lambda)$ ，我们也可以利用和上面类似的手段引入 $C_n(\Lambda) = Z_n(\Lambda)\hat{C}_n$ ，而后面的一切过程都和平常所考虑的过程是类似的。

你可能会想：这个理论中包含高量纲算符，用 power-counting 的眼光来看是不可重整的才对。事实上，这是因为对不可重整的算符而言，我们需要更高量纲的算符对应的抵消项来抵消这个算符中的发散。从而在这些不可重整的理论中，需要引入无穷多个抵消项来消除理论中所有的发散。不过这件事情对于计算而言并不重要：由于我们仅仅希望将振幅计算到 λ 和 q/Λ 的某个确定阶，于是要考虑的圈数、有效算符的个数都是有限的。从而引入有限个高量纲算符的重整化就能在要求的精度下完成计算。在这个意义上说，“不可重整的”有效场论也是可重整的。

EFT and Non-Renormalizable Theories

利用有效场论，我们对不可重整理论也有了一个全新的认识：在之前的理解中，我们认为不可重整的理论是没有预言能力，从而使不自洽的。但是对于一个截断有限的理论，也就

是一个有效理论而言，既然不存在紫外发散，那么 Lagrangian 中的不可重整耦合就是无关紧要的。

一个不可重整的有效理论的例子就是 **4-Fermi 理论**。Fermi 提出这个理论的动机是描述弱相互作用。在弱相互作用下可以发生衰变 $n \rightarrow pe^-\bar{\nu}_e$ 。由于中子由一个上夸克和两个下夸克组成，质子由两个上夸克和一个下夸克组成，于是这个衰变也就相当于 $d \rightarrow ue^-\bar{\nu}_e$ 。考虑到弱作用下宇称不守恒，我们可以唯象地写出以下的耦合：

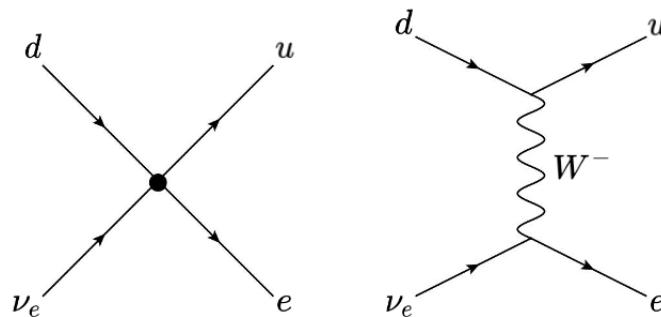
$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d) (\bar{e}_L \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_{e,L}) + \text{h.c.} \quad (5.212)$$

其中 d 是下夸克场， u 是上夸克场， e, ν_e 分别是电子场和电子型中微子场，它们都是 Dirac 费米场。由于每一个 Fermion 场都具有量纲 $[\Psi] = 3/2$ ，于是这个耦合的耦合常数的量纲是 $[G_F] = -2$ 。根据本章开头的讨论，这个理论是不可重整的。

当我们写出一个不可重整的理论时，为了使这个理论有预言能力，就意味着这个理论是一个有效理论，存在一个有限的截断。既然这个理论是一个低能有效理论，也就意味着在高能下存在未知的新物理。上面的讨论告诉我们，如果我们有一个截断无穷大的（**紫外完备的**）理论，它的所有耦合都应该是可重整的。从而如果想要知道这个新物理是什么，我们就需要猜一个具有可重整的耦合的新理论，使得这个新理论在低能区过渡为 4-Fermi 理论。我们可以尝试猜出相应的 Lagrangian 是：

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{g_W}{\sqrt{2}} \bar{u}_L \gamma^\mu d_L W_\mu^- + \frac{g_W}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{e,L} W_\mu^- + \text{h.c.} \quad (5.213)$$

其中 L 意味着左手分量。在这个理论中，耦合的量纲就变成了 $[g_W] = 0$ ，从而这两个耦合都是可重整的。这个 Lagrangian 相当于拆开了四 Fermion 理论中的四 Fermion 顶点，将其分为了 u, d 夸克和电子、中微子分别和一个带电 Boson W^- 的相互作用。在 Feynman 图中，就体现为左图被拆分为了右图。



“有效理论”有两种用法：第一种是前面所讨论的我们已知一个高能理论，通过积分掉高能粒子的自由度来得到一个低能有效理论的过程，这被称为 **Top-Down**；第二种是已知一个低能的不可重整的理论，试图去寻找其紫外完备的理论的过程，这被称为 **Bottom-Up**。上面考虑的从四 Fermion 理论中猜出弱作用理论的 Lagrangian 的过程就是有效理论的一个 bottom-up 的用法。而接下来，我们从弱作用理论的 Lagrangian 出发，在低能极限下导出 4-Fermi 理论，这是有效理论的一个 top-down 的用法。

W Boson 的质量是 $m_W \approx 80\text{GeV}$ 。在 Feynman 规则中，它的传播子是 $\frac{1}{i} \frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2 + m_W^2 - i\varepsilon}$ ，这

两个顶点的顶点因子是 $ig_W\gamma^\mu$ 。计算 $d \rightarrow ue^-\bar{\nu}_e$ 的 Feynman 振幅，有：

$$\mathcal{M}_{\text{4-Fermi}} = 2\sqrt{2}G_F(\bar{u}_3\gamma^\mu P_L u_1)(\bar{u}_4\gamma_\mu P_L v_2), \quad \mathcal{M}_W = \frac{g_q g_l}{2(q^2 + m_W^2 - i\varepsilon)}(\bar{u}_3\gamma^\mu P_L u_1)(\bar{u}_4\gamma_\mu P_L v_2) \quad (5.214)$$

在远小于 80GeV 的物理过程中，第二个式子的分母就变成了 m_W^2 。从而：

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_W^2}{8m_W^2} \quad (5.215)$$

这就告诉我们高能的完整理论的耦合常数和原有效理论的耦合常数之间的关系。这个利用完整理论和有效理论中的可观测量相同这一性质来计算出有效理论中的 Wilson 系数的过程称为 **matching**。由于计算相同的可观测量的本质是计算相同的关联函数，而相同的关联函数又可以通过相同的 1PI 顶点得到，于是 matching 实际上就是令低能有效理论的 1PI 作用量 $\Gamma[\phi_L]$ 和高能理论中的 1LPI 作用量³⁴相等的过程。

matching 和上面我们讨论的积分掉高能粒子场的过程是完全等效的——如果我们想计算一个有效理论中的 Wilson 系数，通过 matching 或者直接积分掉高能粒子场这两种方法都能得到正确的结果。在实际应用中，如果我们仅仅想要几个特定的 Wilson 系数，通常会使用 matching 来进行这一计算，其原因很简单——在大多数情形下³⁵，matching 的计算量要远小于直接积分。

matching 和直接积分的等价性也可以在这个 4-Fermi 理论中看到。为此，我们就利用直接积分掉 W 粒子场的方式来计算出这个理论中的 Wilson 系数。为了详细考虑这个过程，让我们写出“完整理论”中的路径积分³⁶：

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}W^+ \mathcal{D}W^- e^{iS[\phi]} \exp \left[i \int d^4x W_\mu^+ (-\partial^2 + m_W^2) W^{-\mu} + J_\mu^+ W^{-\mu} + J_\mu^- W^{+\mu} \right] \quad (5.216)$$

其中 $\mathcal{D}\phi$ 是 W Boson 之外其他的夸克、轻子场，带电流 J^+ 就是前面 Lagrangian 中的 $\frac{g_W}{\sqrt{2}}\bar{u}_L\gamma^\mu d_L + \frac{g_W}{\sqrt{2}}\bar{e}_L\gamma^\mu \nu_{e,L}$ ，而 J^- 就是其 Hermitian 共轭。对于这个路径积分，我们可以将 $\mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}$ 的部分先提出去，仅仅考虑和 W 有关的这些部分。利用和第三章中计算自由场生成泛函的方法，可以将 W Boson 的自由度直接积分掉，得到：

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[iS[\phi] + i \int d^4x \int d^4y J_\mu^+(x) \Delta(x-y) J^{-\mu}(y) \right] \quad (5.217)$$

其中 $\Delta(x-y)$ 就是传播子 $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m_W^2}$ 。如果我们再积分去 $\mathcal{D}\phi$ 中的高能自由度，那么在 $k^2 \ll m_W^2$ 的情形下，这个传播子分母上的动量就可以被忽略掉，从而 $\Delta(x-y) \approx \frac{1}{m_W^2} \delta^4(x-y)$ 。将这个结果代入上面路径积分中的 Lagrangian，就会看到，在低能有效理论

³⁴正如 1PI 作用量是无法通过切断一根内线使其不联通的 Feynman 图之和。1LPI 作用量也就是无法通过切断一根轻粒子内线使其不联通的 Feynman 图之和。之所以不是对比 1PI 作用量而是对比低能理论的 1PI 作用量和高能理论的 1LPI 作用量，是因为在 EFT 中重粒子内线会被“收缩”为一点，于是 EFT 的 1PI 图中可以包含任意的切断一根重粒子内线使其不联通的 Feynman 图。

³⁵特别是涉及到标准模型的有效理论。由于标准模型的复杂性，直接积分的过程通常极其复杂。

³⁶其实真正的电弱理论没这么简单。这里写出的仅仅是带电流相互作用的一部分，而完整的电弱理论中除去带电流相互作用，还有中性流相互作用、W,Z 玻色子-光子相互作用等复杂的相互作用。具体的细节可以参见第八章的讨论。

中，描述这一相互作用的有效 Lagrangian 就是：

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{m_W^2} J_\mu^+ J^{\mu-} \supset \frac{g_W^2}{8m_W^2} (\bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d) (\bar{e}_L \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_{e,L}) + \text{h.c.} \quad (5.218)$$

可以看到，这个 Lagrangian 就包含前面写出的 4-Fermi 理论的 Lagrangian。这两个方法的确给出了相同的 Wilson 系数。

当我们说一个理论“不可重整”时，也有两种可能的意义。上面我们所讨论的是一个低能的有效理论，其中存在着耦合常数量纲小于 0 的耦合。此时这个理论的不可重整性意味着这个理论存在一个 **UV completion**，预示着高能标下存在新物理，上面所讨论的 4-Fermi 理论就是这类理论的一个例子。“不可重整理论”的另外一种可能的意义是，这个理论是一个截断无穷大的理论，并且我们通过某种第一性原理写出的 Lagrangian 中存在不可重整的耦合。对于这种理论，在前面已经看到，在重整化的过程中这些不可重整耦合会被压低，从而使得用量子场论求解这个理论时，这些不可重整的耦合所携带的信息将会消失。一个这种理论的典型例子就是**广义相对论**，其作用量是 **Einstein-Hilbert 作用量**：

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (5.219)$$

为了得到一个量子引力理论，那么就要对这个 Lagrangian 做量子化。倘若我们仅仅考虑一个弱引力场，量子化一个平直度规附近引力场的量子激发，那么则可以考虑这个作用量的弱场近似。为此我们将度规写为 $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$ ，然后对标量曲率对 h 做展开：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{32\pi G} [(\partial h)^2 + (\partial h)^2 h + \dots] \quad (5.220)$$

这个理论的第一项是引力子的运动学项。我们通常希望它是没有耦合常数的。为此可以做变量替换 $h = \sqrt{16\pi G} \tilde{h}$ ，得到：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial \tilde{h})^2 + \sqrt{16\pi G} (\partial \tilde{h})^2 \tilde{h} + \dots \quad (5.221)$$

第二项就是引力场的自耦合。在 d 维中，由于度规是无量纲的，于是 $[G] = 2 - d$ 。在 4 维时空中，引力常数的量纲是 -2。于是引力场自耦合的耦合常数 \sqrt{G} 具有量纲 -1。于是我们说，由于引力子存在自相互作用，从而引力理论是不可重整的。这就会导致我们试图用量子场论求解这个量子引力理论时，由于引力对可观测量的贡献至少是 $O(q/\Lambda)$ 的。于是如果我们希望将这个幼稚的量子引力理论作为一个终极理论，将其截断上升到无穷大，那么所有引力的信息将会在任何能标的可观测量中消失——我们构建出了一个没有引力效应的“量子引力”！不难看出，这种幼稚的量子引力的构建方式是注定失败的。

当然，如果我们放下“这个理论就是终极理论”的傲慢，转而认为这是一个截断在 Planck 能标下的有效理论，那么这个理论也就是一个第一种意义上的不可重整理论，从而可以在这个“有效量子引力”中得到对引力的某些量子修正的预言。当然，作为一个不可重整理论，其预言是依赖于我们选择的截断的。

5.8 Infrared Divergences in Spinor QED

经过这一章前面的讨论，我们明白了如何利用重整化来在量子场论中抵消紫外发散，并且利用有效场论的框架明白了这样一个抵消方式背后所蕴含的物理本质。但是紫外发散的消

除并不意味着我们算出的一切截面都是有限的。根据圈动量的大小，我们可以将圈积分分为诸多区域。例如对一个积分 $\int_0^\infty dx f(x)$ 而言，可以将其分为：

$$\int_{-\infty}^\infty dx f(x) = \int_0^\lambda dx f(x) + \int_\lambda^\Lambda dx f(x) + \int_\Lambda^\infty dx f(x) \quad (5.222)$$

其中 $\Lambda \gg 1$ 是一个很大的数， $\lambda \ll 1$ 是一个很小的数。有了这个积分区域的划分，我们就可以将发散分为不同区域中的发散。对于量子场论中遇到的圈积分而言，前面讨论的紫外发散都是在 $l \sim (\Lambda, \Lambda, \Lambda, \Lambda)$ 区域中出现的。在此之外，圈积分也可能在 $l \sim (\lambda, \lambda, \lambda, \lambda)$ 等区域中出现**红外发散**。

我们在上面的讨论中已经见过红外发散的例子了。在 5.4 节中，我们发现 OS 方案下的电子自能和 QED 正规顶点都存在含有 $\ln m/m_\gamma$ 的项。例如在 OS 方案下的是：

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{8\pi^2} \left[\int_0^1 dx ((1-x)p + 2m) \log(D/D_0) - 2 \left(-1 + \log \frac{m}{m_\gamma} \right) \left(\frac{p}{m} + 1 \right) \right] + O(m_\gamma^2) \quad (5.223)$$

其中 m_γ 是当时为了保证积分收敛而假想的一个光子质量。当我们取正确的光子质量时，这个正规顶点就将会发散。如果我们深挖这个发散的来源，就会发现这来自于圈积分的**红外区域** $l \sim (\lambda, \lambda, \lambda, \lambda)$ 。就以 QED 顶点为例，其圈积分中存在这样的因子：

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_2 - l)^2 + m^2} \frac{1}{(p_1 - l)^2 + m^2} \frac{1}{l^2} \quad (5.224)$$

当 p_2, p_1 都 on shell 时，在红外区域中，被积函数的行为是 $1/[(p-l)^2 + m^2] \sim 1/[l^2 - 2lp] \sim 1/\lambda^2$ ， $1/l^2 \sim 1/\lambda^2$ 。从而这个积分在红外区域就是 $\int d^4 l \lambda^{-6}$ 。这就是发散的来源。而我们取的光子质量 m_γ 相当于将 $1/l^2 \sim 1/\lambda^2$ 的行为变为了 $1/m_\gamma^2$ ，使得红外区域的积分得到有限的结果。从这个意义上讲，我们之前所取的 m_γ 实际上相当于一个**红外正规化子**。

5.8.1 Dimensional Regularization of Infrared Divergences

除去用光子质量这种红外正规化子来正规化红外发散之外，我们也可以用维数正规化来正规化红外发散。让我们仍然考虑一个外动量 on shell 的 QED 正规顶点。由于我们通常考虑高能过程，于是为了讨论的简便，这里我们将电子质量取成 0³⁷。此时正规顶点就是：

$$\begin{aligned} iV^{(1),\mu}(p_1, p_2) &= i(Z_1 - 1)e\gamma^\mu \\ &+ e^3 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \gamma_\nu \left(\frac{-p_2 + l}{(p_2 - l)^2 - i\varepsilon} \right) \gamma^\mu \left(\frac{-p_1 + l}{(p_1 - l)^2 - i\varepsilon} \right) \gamma^\nu \left(\frac{1}{l^2 - i\varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (5.225)$$

³⁷ 你可能在想：将电子质量取为 0 可能会改变红外发散行为。不过如果一直带着电子质量进行计算，计算出的截面会含有 $\log m_e^2/s, \log^2 m_e^2/s$ 等项，这会导致微扰论的下一阶中的大对数对截面的贡献大于上一阶的其他项，从而微扰论也会失效。这也就类似一个红外发散，而 m_e 在这里的作用也就是另一个红外正规化子。既然这是一个红外正规化子，那么我们也可切换一个正规化方案，利用维数正规化去正规化这个红外发散。这就是我们为什么能将 m_e 取为 0 的原因。

利用前面一贯的手法，可以将非抵消项的贡献计算出（其中 $D = -2x_1x_2p_1p_2$ ）：

$$\begin{aligned} iV^{(1),\mu}(p_1, p_2) &= ie^3 \int dF_3 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{q^2}{(q^2 + D)^3} \gamma^\mu + \frac{1}{(q^2 + D)^3} \right. \\ &\quad \times [-\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_1 (d-2)x_1(1-x_1) + \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 (2(1-x_1)(1-x_2) + (d-4)x_1x_2) \\ &\quad \left. + \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 ((d-4)(1-x_1)(1-x_2) + 2x_1x_2) - \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_2 (d-2)x_2(1-x_2)] \right\} \end{aligned} \quad (5.226)$$

在积分掉圈动量之后，我们已经可以看到紫外发散了：

$$\begin{aligned} iV^{(1),\mu}(p_1, p_2) &= ie^3 \int dF_3 \left\{ \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(3)\Gamma(\frac{d}{2})(4\pi)^{d/2}} \frac{(d-2)^2}{d} D^{d/2-2} \gamma^\mu + \frac{\Gamma(3 - \frac{d}{2})}{\Gamma(3)(4\pi)^{d/2}} D^{d/2-3} \right. \\ &\quad \times [-\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_1 (d-2)x_1(1-x_1) + \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 (2(1-x_1)(1-x_2) + (d-4)x_1x_2) \\ &\quad \left. + \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 ((d-4)(1-x_1)(1-x_2) + 2x_1x_2) - \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_2 (d-2)x_2(1-x_2)] \right\} \end{aligned} \quad (5.227)$$

前面一项的积分在紫外区域对数发散，后一项不发散。而这个积分在红外区域的行为体现在 Feynman 参数的积分中。对于第一项而言，它仅仅是 $\int dF_3$ ，不发散。于是前面一项中只包含紫外发散，不含红外发散。而后面一项虽然紫外有限，但是 Feynman 参数的积分中存在 $\int dF_3 \frac{x_1(1-x_1)}{x_1x_2}$ 等项，从而这是红外发散的。于是这就将这整个积分划分为了红外发散和紫外发散部分。

紫外部分的处理是我们熟悉的。对其做完 Feynman 积分后，得到（其中 $s = -2p_1p_2$ ）：

$$iV_{\text{UV}}^{(1),\mu}(p_1, p_2) = ie^3 \int dF_3 \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(3)\Gamma(\frac{d}{2})(4\pi)^{d/2}} \frac{(d-2)^2}{d} D^{d/2-2} \gamma^\mu = \frac{ie^3 \gamma^\mu}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon_{\text{UV}}} + 1 + \log \frac{\mu^2}{s} \right) + O(\varepsilon_{\text{UV}}^2) \quad (5.228)$$

而红外发散部分的处理也比较直接。例如括号中的第一项，对其做 Feynman 积分会得到：

$$\begin{aligned} iV_{\text{IR},1}^{(1),\mu}(p_1, p_2) &= -ie^3 \frac{(d-2)\Gamma(3 - \frac{d}{2})}{\Gamma(3)(4\pi)^{d/2}} (\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_1) \int dF_3 D^{d/2-3} x_1(1-x_1) \\ &= -ie^3 \frac{(d-2)\Gamma(3 - \frac{d}{2})}{\Gamma(3)(4\pi)^{d/2}} (\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_1) \frac{4\Gamma(\frac{d}{2} - 1)\Gamma(\frac{d}{2})}{(d-4)\Gamma(d-1)} \\ &= \frac{ie^3}{16\pi^2 s} (\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_1) \left(\frac{2}{\varepsilon_{\text{IR}}} + 1 + \gamma + \log \frac{\mu^2}{s} \right) + O(\varepsilon_{\text{IR}}^2) \end{aligned} \quad (5.229)$$

可以看到，在维数正规化下，红外发散也对应一个 $d=4$ 处的极点。

这里，我们将平常指示维数和 4 差异的 $\varepsilon = 4 - d$ 写做了 ε_{UV} ，而把红外发散带来的极点写为 ε_{IR} ，这仅仅是一个用来提醒我们极点来源的标记。虽然在 d 为整数时，只有 $\varepsilon > 0$ 时紫外部分才收敛，而只有 $\varepsilon < 0$ 时红外部分收敛，但当我们将其解析延拓到整个复平面上之后，紫外发散、红外发散的两部分就分别成为了一个亚纯函数，除去整数维的极点外在复平面上解析。这样一来，在所有非整数维处解析延拓后的函数值就是两部分 $V_{\text{UV}}(\varepsilon)$ 和 $V_{\text{IR}}(\varepsilon)$ 的直接相加，在 $d = 4$ 附近做 Laurent 展开时也当然如此。于是此时 $\varepsilon_{\text{UV}} = \varepsilon_{\text{IR}} = \varepsilon$ ， ε_{UV} 和 ε_{IR} 就不存在任何不同之处。

按照类似的步骤，我们可以计算出整个的正规顶点：

$$iV^{(1),\mu}(p_1, p_2) = \frac{ie^3}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{s} \right)^{\varepsilon/2} \left[\left(\frac{2}{\varepsilon_{\text{UV}}} - \gamma + 1 \right) \gamma^\mu + \frac{\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_1 + \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_2}{s} \left(\frac{2}{\varepsilon_{\text{IR}}} - \gamma + 1 \right) \right. \\ \left. + \frac{\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2}{s} \left(\frac{8}{\varepsilon_{\text{IR}}^2} + \frac{-8 + 4\gamma}{\varepsilon_{\text{IR}}} - \frac{-54 + 24\gamma - 6\gamma^2 + \pi^2}{6} \right) - \frac{\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1}{s} \left(\frac{4}{\varepsilon_{\text{IR}}} - 2\gamma + 3 \right) \right] \quad (5.230)$$

虽然在这么复杂的计算中你可能会想用 $\overline{\text{MS}}$ 方案进行重整化，但是这里在 OS 方案下的重整化格外简单：在 OS 方案下，我们给正规顶点附加的重整化条件是 $F_1(0) = 1$ 。当我们考虑 $\bar{u}(p)V^\mu(p, p)u(p)$ 时，将会有 $s = -2p^2 = 0$ 。这导致 $\left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{s} \right)^{\varepsilon/2}$ 项变得没有意义，故我们需要重新讨论 $p_1 = p_2$ 时的正规顶点，它是：

$$\bar{u}iV^{(1),\mu}(p, p)u(p) = ie^3 \int dF_3 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \bar{u} \left[\frac{1}{q^4} \gamma^\mu + \frac{\not{p} \gamma^\mu \not{p}}{q^6} (\dots) \right] u(p) \quad (5.231)$$

由于在两边加上 $\bar{u}(p), u(p)$ 后，所有的 $\not{p} \gamma^\mu \not{p}$ 都变为 0，于是我们其实只需要考虑第一项。其中积分 $\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^4}$ 既是红外发散，也是紫外发散的。为了更好的看到其红外和紫外发散部分的贡献，我们将其 Wick 转动到 Euclidean 空间中，并将其拆成红外和紫外的两部分：

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^4} = i \int_{|\bar{q}| < \Lambda} \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\bar{q}^4} + i \int_{|\bar{q}| > \Lambda} \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\bar{q}^4} = i \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})(2\pi)^d} \left(\int_0^\Lambda \frac{|\bar{q}|^{d-1} d|\bar{q}|}{|\bar{q}|^4} + \int_\Lambda^\infty \frac{|\bar{q}|^{d-1} d|\bar{q}|}{|\bar{q}|^4} \right) \quad (5.232)$$

在维数正规化下，这就是：

$$i \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})(2\pi)^d} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} - \log \Lambda \right) - \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}} - \log \Lambda \right) \right] = \frac{2}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{UV}}} - \frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}} \right) = 0 \quad (5.233)$$

从而这个积分中的红外发散和紫外发散互相抵消，从而是 0。这种积分被称做**无标度的积分**，它们在维数正规化下总是 0。这其实是一个很怪异的事情：如果我们换一个正规化方案，例如用一个红外截断和紫外截断来正规化这个积分，那么其积分值应该是一个 $\log \Lambda/\lambda$ 的形式。从而维数正规化的这个结果似乎就是在说：

$$\log \left(\frac{\text{理论适用的最大的尺度}}{\text{理论适用的最小的尺度}} \right) = 0 \quad (5.234)$$

这看起来是十分荒谬的。不过，如果将这个积分取成 0，那么维数正规化得到的结果将会和实验符合良好。这是为什么呢？答案就是：在我们的理论中，任何物理可观测量中紫外发散和红外发散应该是各自抵消的，而这个积分中不存在有限项，从而其全部贡献就都应该被抵消掉。于是这个积分对任何物理可观测量的贡献都是 0，将其取为 0 不影响物理预言。

有了这个结果之后，我们就能得到 OS 方案下的正规顶点：

$$iV^{(1),\mu}(p_1, p_2) = \frac{ie^3}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{s} \right)^{\varepsilon/2} \left[\left(\frac{2}{\varepsilon_{\text{IR}}} - \gamma + 1 \right) \gamma^\mu + \frac{\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_1 + \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_2}{s} \left(\frac{2}{\varepsilon_{\text{IR}}} - \gamma + 1 \right) \right. \\ \left. + \frac{\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2}{s} \left(\frac{8}{\varepsilon_{\text{IR}}^2} + \frac{-8 + 4\gamma}{\varepsilon_{\text{IR}}} - \frac{-54 + 24\gamma - 6\gamma^2 + \pi^2}{6} \right) - \frac{\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1}{s} \left(\frac{4}{\varepsilon_{\text{IR}}} - 2\gamma + 3 \right) \right] \quad (5.235)$$

可以发现，重整化常数的作用去除了所有的紫外发散，而留下了红外发散。这也就是说，红外发散是无法通过重整化消去的。

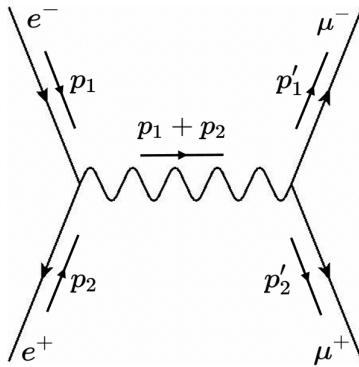
5.8.2 Cancel of Infrared Divergences

QED 正规顶点在外动量 on shell 时出现的红外发散意味着散射振幅中也存在红外发散。让我们考虑过程 $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$ ，这个过程的 Feynman 振幅就应该是两个 QED 正规顶点中间传递一个光子正规传播子。由于光子正规传播子不存在红外发散，而两个正规顶点中的红外发散相同，无法相消。在 OS 方案中，LSZ 公式外面也没有留数 Z 可以帮助我们消去红外发散，于是红外发散将会赤裸地出现在振幅中。而由于我们观测到的振幅应该是有限的，而非无穷大的，从而如果我们的理论正确的话，红外发散应该是可以相互抵消的。

但是对于一个过程 $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$ 而言，其截面中如果存在红外发散的话，能用什么东西抵消掉这些发散呢？答案就是，我们实际上无法真正的测量到一个特定的过程的截面。在末态中，一个 μ 子总可能辐射出一些能量十分小的软光子或动量和电子完全平行的共线光子。我们的仪器完全无法将这两种情形和过程 $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$ 区分出来。于是真正可以观测的是 $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$ 和 $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$, $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma\gamma$ 等等过程的总截面。于是这些过程有可能能够帮助我们消去红外发散。

IR Divergence of $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

为了看看红外发散的抵消究竟是如何发生的，让我们先计算 $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$ 的总截面。如果红外发散被完全抵消，那么初态正反粒子和末态正反粒子具有不同的电荷，那么截面中 $Q_e^4 Q_\mu^2$, $Q_\mu^3 Q_e^3$ 和 $Q_e^2 Q_\mu^4$ 系数中的红外发散将会分别抵消。限于篇幅原因，我们将仅展示截面中 $Q_e Q_\mu^3$ 的系数如何抵消。



这一过程的 Feynman 图如上图所示。对于 $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$ 而言，Feynman 振幅是：

$$i\mathcal{M} = \bar{v}_2(iV^\mu(p_1, -p_2))u_1\Delta_{\mu\nu}(p_1 + p_2)\bar{u}'_1(iV^\nu(-p'_2, p'_1))v'_2 \quad (5.236)$$

在次领头阶，贡献 $Q_e^2 Q_\mu^4$ 系数，且存在红外发散的项只有右边正规顶点中的修正。考虑外动量远大于电子、 μ 子的情形，从而可以代入上面得到的正规顶点的结果。通过 Dirac

方程化简之后，就有：

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}^{(1)} &= \bar{v}_2(-iQ_e e \gamma_\mu) u_1 \frac{1}{i} \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \bar{u}'_1(iV^{(1),\mu}(-p'_2, p'_1)) v'_2 \\
 &= i\mathcal{M}^{(0)} \left(-\frac{Q_\mu^2 e^2}{2\pi^2} \right) \left(\frac{\mu^2}{-s} \right)^{\frac{4-d}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}^2} + \frac{3}{4\varepsilon_{\text{IR}}} + 1 - \frac{\pi^2}{48} + \mathcal{O}(\varepsilon_{\text{IR}}) \right) \\
 &= i\mathcal{M}^{(0)} \left(-\frac{Q_\mu^2 e^2}{2\pi^2} \right) \left(\frac{\mu^2}{s} \right)^{\frac{4-d}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}^2} + \frac{\frac{3}{4} + \frac{i\pi}{2}}{\varepsilon_{\text{IR}}} - \frac{7\pi^2}{48} + 1 + \frac{3\pi i}{8} + O(\varepsilon_{\text{IR}}) \right) \\
 &= i\mathcal{M}^{(0)} f^{(1)}(s)
 \end{aligned} \tag{5.237}$$

其中 s 是 Mandelstam 变量³⁸ $s = -(p_1 + p_2)^2 = -2p_1 p_2$ 。于是次领头阶的振幅就是领头阶振幅乘一个因子 $f^{(1)}(s)$ 。总截面正比于振幅的模方，从而：

$$\sigma_d \sim |\mathcal{M}^{(0)}(1 + f^{(1)}(s))|^2 \sim |\mathcal{M}^{(0)}|^2(1 + 2 \operatorname{Re} f^{(1)}(s)) \sim \sigma_d^{(0)}(1 + 2 \operatorname{Re} f^{(1)}(s)) \tag{5.238}$$

也就是说，过程 $e^- e^+ \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 在次领头阶的总截面就是：

$$\sigma = \sigma_d^{(0)} \left[1 - Q_\mu^2 \frac{e^2}{\pi^2} \left(\frac{\mu^2}{s} \right)^{\frac{4-d}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}^2} + \frac{3}{4\varepsilon_{\text{IR}}} - \frac{7\pi^2}{48} + O(\varepsilon_{\text{IR}}) \right) + (\text{other terms}) \right] \tag{5.239}$$

注意，我们在里面的 $\sigma^{(0)}$ 中加了一个角标 d ，这是因为在 d 维的场论中，相空间积分是和 4 维不同的。这会导致 Feynman 振幅相同的条件下，散射截面带有一个 $O(\varepsilon)$ 的差别。由于后面存在 $1/\varepsilon_{\text{IR}}^2$ 的发散项，这个差别会进入 $1/\varepsilon_{\text{IR}}$ 项中。于是为了得出正确的红外发散，我们仍需将这一项的影响考虑进去。

为此还需要在 d 维下计算领头阶的散射截面。在 d 维下，领头阶的 Feynman 振幅是：

$$\begin{aligned}
 \overline{\sum} |\mathcal{M}^{(0)}|^2 &= Q_\mu^2 Q_e^2 \frac{e^4 \tilde{\mu}^{2\varepsilon}}{4s^2} \operatorname{Tr}[\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] \operatorname{Tr}[\not{p}'_1 \gamma_\mu \not{p}'_2 \gamma_\nu] \\
 &= \frac{d^2}{2} [2(p_2 p'_1)(p_1 p'_2) + 2(p_1 p'_1)(p_2 p'_2) + (d-4)(p_1 p_2)(p_1 p'_2)]
 \end{aligned} \tag{5.240}$$

在质心系中，这就是：

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}^{(0)}|^2 = Q_\mu^2 Q_e^2 \frac{e^4 \tilde{\mu}^{2\varepsilon}}{16} d^2 (d-3 + \cos^2 \theta) \tag{5.241}$$

³⁸这里的 s 和上面式子中的 s 定义稍有不同。这里的 s 是 Mandelstam 变量，定义是 $s = -2p'_1 p'_2$ ，而将动量代入上面定义的 s 会得到 $s = 2p'_1 p'_2$ 。这也是为什么第二行中 s 存在负号的原因。

于是, 质心系中的散射截面就是:

$$\begin{aligned}
 \sigma_d^{(0)} &= \frac{1}{2s} \int d\text{LIPS}_2 \sum |\mathcal{M}^{(0)}|^2 = \frac{Q_\mu^2 Q_e^2 e^4 \tilde{\mu}^{2\varepsilon}}{32s} d^2 \int d\text{LIPS}_2 (d-3 + \cos^2 \theta) \\
 &= \frac{Q_\mu^2 Q_e^2 e^4 \tilde{\mu}^{2\varepsilon}}{32s} d^2 \int \frac{d^{d-1} p'_1}{(2\pi)^{d-1} 2p_1^0} \int \frac{d^{d-1} p'_2}{(2\pi)^{d-1} 2p_2^0} (2\pi)^d \delta^d (p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) (d-3 + \cos^2 \theta) \\
 &= \frac{Q_\mu^2 Q_e^2 e^4 \tilde{\mu}^{2\varepsilon}}{128s} \frac{d^2}{(2\pi)^{d-2}} \int \frac{d^{d-1} p'_1}{(p_1'^0)^2} \delta (2p_1'^0 - s) (d-3 + \cos^2 \theta) \\
 &= \frac{Q_\mu^2 Q_e^2 e^4 \tilde{\mu}^{2\varepsilon}}{128s} \frac{d^2}{(2\pi)^{d-2}} \int \frac{d\Omega_{d-1} |\mathbf{p}'_1|^{d-2} d|\mathbf{p}'_1|}{|\mathbf{p}'_1|^2} \delta (2|\mathbf{p}'_1| - s) (d-3 + \cos^2 \theta)
 \end{aligned} \tag{5.242}$$

其中 $d\Omega_{d-1}$ 是 $d-1$ 维的立体角积分。由于后面被积函数中存在角度的依赖性, 我们需要从中分解出对 θ 的积分:

$$d\Omega_{d-1} = d\Omega_{d-2} \sin^{d-3} \theta d\theta = d\Omega_{d-2} (1 - z^2)^{\frac{d-4}{2}} dz \tag{5.243}$$

于是, 散射截面可以被如此积分出来:

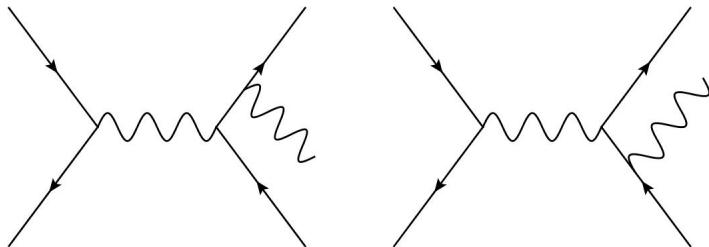
$$\begin{aligned}
 \sigma_d^{(0)} &= \frac{Q_\mu^2 Q_e^2 e^4 \tilde{\mu}^{2\varepsilon}}{256s} \frac{d^2}{(2\pi)^{d-2}} \left(\frac{\sqrt{s}}{2}\right)^{d-4} \int d\Omega_{d-2} \sin^{d-3} \theta d\theta (d-3 + \cos^2 \theta) \\
 &= \frac{Q_\mu^2 Q_e^2 e^4 \tilde{\mu}^{2\varepsilon}}{128s} \frac{d^2}{(2\pi)^{d-2}} \left(\frac{\sqrt{s}}{2}\right)^{d-4} \frac{\pi^{\frac{d-2}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} - 1)} \frac{(d-2)\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \\
 &= \sigma^{(0)} \frac{3\tilde{\mu}^{2\varepsilon}}{16} \left(\frac{4\pi}{s}\right)^{\frac{4-d}{2}} \frac{d^2}{2^d} \frac{(d-2)^2 \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}
 \end{aligned} \tag{5.244}$$

其中我们利用了 d 维下的立体角 $\int d\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$, 这将在本章附录中被证明。在最后一行中, 我们还利用了 4 维的树图阶总散射截面是 $\sigma^{(0)} = \frac{Q_e^2 Q_\mu^2 e^4}{12\pi s}$ 。将这些东西代入前面算出的次领头阶散射截面中, 就最终得到了:

$$\sigma = \sigma^{(0)} \left[1 - Q_\mu^2 \frac{e^2}{\pi^2} \left(\frac{\mu^2}{s}\right)^{4-d} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}^2} + \frac{13}{12\varepsilon_{\text{IR}}} - \frac{5\pi^2}{24} + \frac{29}{18} \right) + (\text{other terms}) \right] + O(\varepsilon_{\text{IR}}) \tag{5.245}$$

IR Divergence of $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$

接下来, 我们再看看过程 $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$ 的贡献。在这个过程中, 对 $Q_e^2 Q_\mu^4$ 系数有贡献的 Feynman 图只有以下的两个图:



仍然令初态动量为 p_1, p_2 , 末态动量为 p'_1, p'_2, k 。那么这两个图给出振幅:

$$i\mathcal{M} = \bar{v}_2(-iQ_e e\gamma^\mu)u_1 \left(\frac{1}{i} \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \right) \times \bar{u}'_1 \left[(-iQ_\mu e\gamma_\nu) \frac{1}{i} \frac{-p'_1 - k}{(p'_1 + k)^2} (-iQ_\mu e\gamma_\mu) + (-iQ_\mu e\gamma_\mu) \frac{1}{i} \frac{-p'_2 - k}{(p'_2 + k)^2} (-iQ_\mu e\gamma_\nu) \right] v'_2 \varepsilon_\lambda^\nu \quad (5.246)$$

利用我们在第四章中熟悉的技术, 对振幅取模方、对自旋平均后, 再对末态相空间积分, 就得到:

$$\int d\text{LIPS}_3 \overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 = Q_\mu^4 Q_e^2 \frac{e^6 \tilde{\mu}^{3\varepsilon}}{4s^4} \text{Tr}[\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\sigma] \int d\text{LIPS}_3 \text{Tr}[\not{p}'_1 S_{\mu\nu} \not{p}'_2 S_\sigma^\nu] \quad (5.247)$$

其中 $S_{\mu\nu} := \gamma_\nu \frac{-p'_1 - k}{(p'_1 + k)^2} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{-p'_2 - k}{(p'_2 + k)^2} \gamma_\nu$ 。我们可以将后面和末态有关的信息全都纳入一个张量中, 也就是定义³⁹:

$$X_{\mu\nu}(p) = Q_\mu^2 e^2 \tilde{\mu}^\varepsilon \int d\text{LIPS}_3 \text{Tr}[\not{p}'_1 S_{\mu\nu} \not{p}'_2 S_\sigma^\nu] \quad (5.248)$$

其中 $p = p_1 + p_2$ 就是质心系总动量。这是一个张量积分, 求解十分困难。不过规范不变性允许我们将其进一步化简: 根据下一章中会讨论的 Ward 恒等式, 可以得出 $p_\mu X^{\mu\nu} = p_\nu X^{\mu\nu} = 0$, 从而张量 $X^{\mu\nu}$ 就有 Lorentz 结构 $X^{\mu\nu} = (\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}) X(p)$ 。这告诉我们, 只需要求出 $\eta_{\mu\nu} X^{\mu\nu} = (d-1) X(p)$, 就能知道末态的全部信息。这就将一个张量积分简化为了一个标量积分。经过一些复杂且无趣的计算, 可以算出:

$$X(p) = \frac{1}{d-1} \eta_{\mu\nu} X^{\mu\nu} = 4Q_\mu^2 e^2 \tilde{\mu}^\varepsilon \frac{d-2}{d-1} \int d\text{LIPS}_3 \frac{x_1^2 + x_2^2 + \frac{d-4}{2} x_k^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \quad (5.249)$$

其中 x_i 被定义为 $x_i := -2(p'_i \cdot p)/s$, $x_k := -(2k \cdot p)/s$ 。既然我们计算出 X 就完全知道了末态的所有信息, 那么当然可以从 X 中得到这个过程对截面的贡献。为此将 $X^{\mu\nu}$ 的这个标准型代入散射截面的公式中。在质心系中, 就有:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int d\text{LIPS}_n \frac{\overline{\sum} |\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{s} |\mathbf{p}'_1|_{\text{CM}}} = \frac{1}{2s} \int d\text{LIPS}_3 \overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 \\ &= Q_\mu^2 Q_e^2 \frac{e^4 \tilde{\mu}^{2\varepsilon}}{4s^4} \text{Tr}[\not{p}'_2 \gamma^\mu \not{p}'_1 \gamma^\sigma] (\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}) X(p) \\ &= -Q_\mu^2 Q_e^2 \frac{e^4}{4s^2} \tilde{\mu}^{2\varepsilon} (d-2) X(p) = \sigma^{(0)} \tilde{\mu}^{2\varepsilon} \frac{3\pi}{s} (d-2) X(p) \end{aligned} \quad (5.250)$$

于是接下来需要做的所有工作都归结为了计算 $X(p)$ 。为了计算这个积分, 我们就需要将相空间积分写为对这些 x 变量的积分。为此我们在质心系中考虑问题。此时, $p = (\sqrt{s}, 0, 0, 0)$, 于是 $x_i = 2p'_i / \sqrt{s} = 2|\mathbf{p}'_i| / \sqrt{s}$ 。这告诉我们, 在这个坐标系中, x 和 \mathbf{p}'_i 的

³⁹ 由于我们需要正规化后面的红外发散, 于是这里的相空间积分要在 d 维完成。

模只相差了一个常数因子。从而：

$$\begin{aligned}
 \int d\text{LIPS}_3 &= \int \frac{d^{d-1}p'_1}{(2\pi)^{d-1}2p'_1^0} \int \frac{d^{d-1}p'_2}{(2\pi)^{d-1}2p'_2^0} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}2k^0} (2\pi)^d \delta^d (p'_1 + p'_2 + k - p) \\
 &= (2\pi)^{3-2d} \int \frac{d^{d-1}p'_1}{2p'_1^0} \int \frac{d^{d-1}p'_2}{2p'_2^0} \frac{1}{2k^0} \delta(p'_1^0 + p'_2^0 + k^0 - p^0) \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^3} \left(\frac{\sqrt{s}}{4\pi} \right)^{2d-6} \int d\Omega_{d-1} x_1^{d-3} dx_1 \int d\Omega_{d-1} x_2^{d-3} dx_2 \frac{1}{x_k} \delta(x_1 + x_2 + x_k - 2)
 \end{aligned} \tag{5.251}$$

在后两行中， x_k 是作为 x_1, x_2 的函数 $x_k = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \cos \theta}$ 而存在的。由于后面的被积函数中只有 $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ 的模及其 θ 的依赖性，我们可以将对 p'_2 的积分中的极轴选为 p'_1 的方向。那么“纬度”方向的积分就是对 θ 的积分，它可以被完全提出来，而剩下的角度积分可以被全部积分出：

$$\begin{aligned}
 \int d\text{LIPS}_3 &= \frac{1}{(4\pi)^3} \left(\frac{\sqrt{s}}{4\pi} \right)^{2d-6} \frac{4\pi^{\frac{2d-3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}(d-1)) \Gamma(\frac{1}{2}(d-2))} \int dx_1 x_1^{d-3} \int dx_2 x_2^{d-3} \\
 &\quad \times \int_{-1}^1 dz (1-z^2)^{\frac{d-4}{2}} \frac{1}{x_k} \delta(x_1 + x_2 + x_k - 2)
 \end{aligned} \tag{5.252}$$

利用对 z 的积分去除掉 delta 函数，就能得到（其中 $x_k = 2 - x_1 - x_2$ ）：

$$\int d\text{LIPS}_3 = \frac{4^{\frac{d-4}{2}}}{(4\pi)^3} \left(\frac{\sqrt{s}}{4\pi} \right)^{2d-6} \frac{4\pi^{\frac{2d-3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}(d-1)) \Gamma(\frac{1}{2}(d-2))} \int_0^1 dx_1 \int_{1-x_1}^1 dx_2 [(1-x_1)(1-x_2)(1-x_k)]^{\frac{d-4}{2}} \tag{5.253}$$

这就完全将相空间积分写成了对标量变量 x_i 的积分。从而截面可以写为：

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sigma^{(0)} \times 4Q_\mu^2 e^2 \tilde{\mu}^{2\varepsilon} \frac{3\pi}{s} \frac{(d-2)^2}{d-1} \frac{4^{\frac{d-4}{2}}}{(4\pi)^3} \left(\frac{\sqrt{s}}{4\pi} \right)^{2d-6} \frac{4\pi^{\frac{2d-3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}(d-1)) \Gamma(\frac{1}{2}(d-2))} \\
 &\quad \times \int_0^1 dx_1 \int_{1-x_1}^1 dx_2 [(1-x_1)(1-x_2)(1-x_k)]^{\frac{d-4}{2}} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \frac{d-4}{2}x_k^2}{(1-x_1)(1-x_2)}
 \end{aligned} \tag{5.254}$$

在详细的计算这个积分之前，不妨先看看 4 维下这个积分的哪个区域中存在发散。在 4 维下，这个积分就是 $\int_0^1 dx_1 \int_{1-x_1}^1 dx_2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}$ 而言，发散来自于 $x_1 \sim 1$ 和 $x_2 \sim 1$ 的附近。当 $x_1 \sim 1$ 时，就有 $(p_2 \cdot k) = \frac{1}{2}s(1-x_1) = 0$ ，从而就有 $E'_2 E_k (1 - \cos \phi) = 0$ ，其中 ϕ 是 p'_2 和 k 的夹角。这意味着，在 E'_2 或者 $E_k \sim 0$ 时或 $\phi \sim 0$ 时，都会出现红外发散。这正好对应我们最开始说的两种情况：当辐射的光子能量极小时，也就有 $E_k \sim 0$ 时；当辐射的光子和出射费米子完全平行时，就有 $\phi \sim 0$ 。这两种红外发散就被称为**软发散**和**共线发散**。由于我们的仪器总有一个分辨率，在这个分辨率以内的软光子和共线光子是无法被探测到的，于是仪器探测到的截面就是过程 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 和分辨率之内的 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$ 截面之和。从而这些截面中的红外发散才能够相互抵消。

将这个积分积出，得到：

$$\sigma = \sigma^{(0)} \times s \frac{e^2}{\pi^2} \left(\frac{\mu^2}{Q^2} \right)^{4-d} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{IR}}^2} + \frac{13}{12\varepsilon_{\text{IR}}} - \frac{5\pi^2}{24} + \frac{259}{144} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \tag{5.255}$$

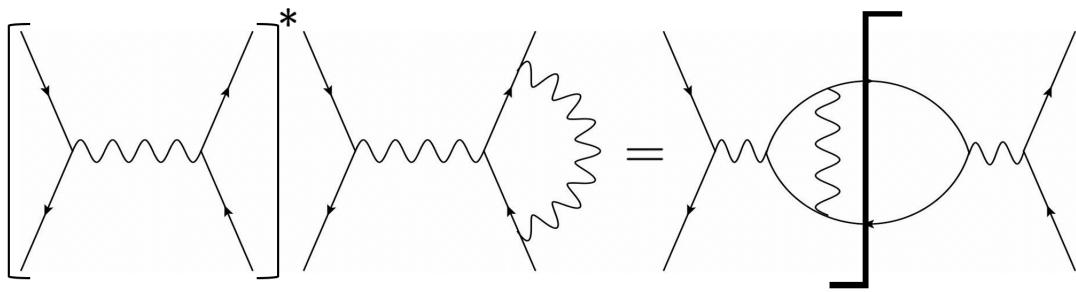
将两个过程的 $Q_e^2 Q_\mu^4$ 系数全部加起来，我们最终看到有：

$$\sigma = \sigma^{(0)} \left[1 + Q_\mu^2 \frac{3e^2}{16\pi^2} + (\text{other terms}) \right] \quad (5.256)$$

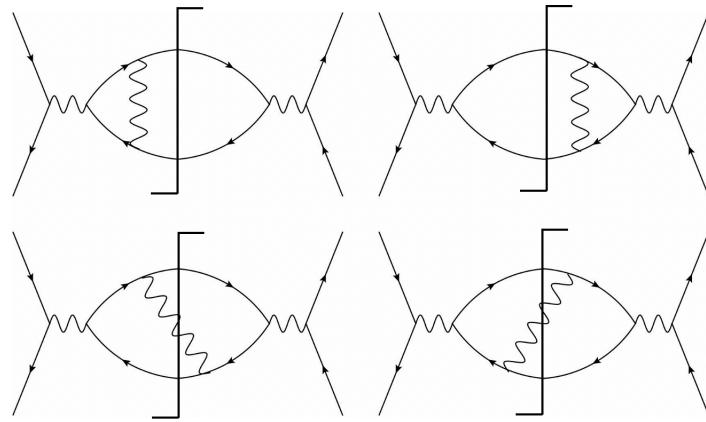
红外发散全部消除了！留下了一个有限的项。从而至少对这个过程而言，微扰论是能够给出一个合理的预言，对可观测量的预言中不会出现无穷大的。

KLN Theorem, Jets and Initial State Radiation

既然我们已经看到了一个过程中的红外发散被消除，那么当然就要问：这个红外发散的消除背后有没有什么更加本质的原因？对所有的过程而言，红外发散都可以完全被消除吗？为了回答这个问题，我们先观察一下这三个发散互相抵消的 Feynman 图的特征。根据第四章末尾的讨论，我们可以将这些 Feynman 图写成 cut 图的形式，例如：



那么，贡献前面看到的红外发散的项便对应以下的 cut 图：



容易看到，这是贡献电子向前散射振幅的一个图的全部四种可能的 cut。根据 Cutkosky 规则，这些 cut 图的和也就是这个 Feynman 图的虚部 $\text{Im } \mathcal{M}$ 。而关于一个振幅的虚部，我们有如下的定理：

KLN Theorem: 可重整理论中，任何向前散射振幅的虚部 $\text{Im } \mathcal{M}(A \rightarrow A)$ 总是有限的。

由于前面四个 cut 图之和是全部的贡献 $\text{Im } \mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)$ 中 $Q_e^2 Q_\mu^4$ 系数的 cut 图, 于是 KLN 定理就保证了这四个图对应的截面中的红外发散一定相消。

KLN 定理保证了总截面中不会出现红外发散, 但是对所有末态求和得到的截面并不是我们实验中能够测量的所有物理量。在实验中, 我们总可以数出“飞出两个东西”和“飞出三个东西”过程的事例数, 然后得到一个“飞出两个东西”和“飞出三个东西”过程的截面⁴⁰。不过由于我们的仪器总有一个分辨率, 它无法分辨出能量在 E_{res} 以下的粒子, 并且仪器一定具有一个有限、非无穷小的尺度, 于是仪器总会有一个能够探测的最小角度 θ_{res} 。这也就意味着, 由于仪器存在一个有限的分辨率, 于是仪器会将一部分 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$ 截面认为是“飞出两个东西”过程的一部分。对于前面讨论的末态辐射软光子、共线光子的过程, 由于其中所有的红外发散都来自于末态的 E_k 太小或 p', k 共线, 于是在 $E_{\text{res}}, \theta_{\text{res}}$ 所确定的积分区域中将会包含所有 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$ 过程中的红外发散, 这些红外发散和 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 过程中的红外发散相抵消。于是 $E_{\text{res}}, \theta_{\text{res}}$ 区域中贡献的截面是有限的。从而“飞出两个东西”过程的截面就是有限的。由于实验测到的都是这种过程, 于是“飞出的东西”将在实验上有很大的重要性。为此需要给它起一个名字——喷注⁴¹。故我们将这种“飞出两个东西”的过程称为两喷注过程。为了理论上得到两喷注过程的截面, 我们可以定义一个具有分辨率 $E_{\text{res}}, \theta_{\text{res}}$ 的两喷注截面是:

$$\sigma_{\text{2-Jet}} = \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) + \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma) \Big|_{E_\gamma < E_{\text{res}} \text{ or } \theta_{\gamma\mu} < \theta_{\text{res}}} + O(\alpha) \quad (5.257)$$

同样, 在次领头阶, 由于我们不用考虑多个软光子、共线光子的情形, 那么三喷注截面就是:

$$\sigma_{\text{3-Jet}} = \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma) \Big|_{E_\gamma > E_{\text{res}} \text{ and } \theta_{\gamma\mu} > \theta_{\text{res}}} + O(\alpha) \quad (5.258)$$

容易发现, $\sigma_{\text{2-Jet}} + \sigma_{\text{3-Jet}} = \sigma_{\text{tot}} + O(\alpha)$ 。于是只要在上面对末态辐射过程的计算中将能量、角度在 $E_{\text{res}}, \theta_{\text{res}}$ 之外的区域积分⁴², 就能得到末态辐射过程 3 喷注过程的截面的贡献, 也就是这些喷注截面中的 $Q_e^2 Q_\mu^4$ 部分:

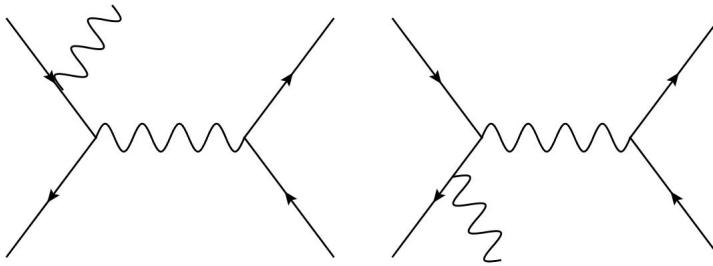
$$\begin{aligned} \sigma_{\text{3-Jet}} = \sigma^{(0)} \frac{Q_\mu^2 e^2}{8\pi^2} & \left\{ \ln \frac{1}{\theta_{\text{res}}} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{s}}{2E_{\text{res}}} - 1 \right) - \frac{3}{4} + 3 \frac{E_{\text{res}}}{\sqrt{s}} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\pi^2}{12} - \frac{7}{16} - \frac{E_{\text{res}}}{\sqrt{s}} + \frac{3}{2} \left(\frac{E_{\text{res}}}{\sqrt{s}} \right)^2 + O\left(\theta_{\text{res}} \ln \frac{E_{\text{res}}}{\sqrt{s}}\right) \right\} + O(\alpha) \end{aligned} \quad (5.259)$$

而 2 喷注截面就是上面求出的总截面减去这个 3 喷注截面。这看似很美好——不但在总截面中保证红外发散全部相消, 也给我们一个有限的喷注截面。但是事实并没有这么简单: 不要忘记, 这一个过程贡献的仅仅是喷注截面的 $Q_e^2 Q_\mu^2$ 系数, 除去这一项之外, 还有另一个过程贡献喷注截面, 其 Feynman 图如下所示:

⁴⁰按理来说, 微分截面也是可观测量, 不过由于微分截面中存在发散可能是正常的, 于是红外发散只能在总截面中体现。

⁴¹喷注有不同的定义, 我们这里采用的定义被称为 Sterman-Weinberg 喷注。

⁴²由于这红外有限, 我们只用在 4 维中计算这个过程。此时仪器的分辨率就类似于一个红外正规化子。



可以验证，这两个图给出的总截面中的红外发散和左边顶点修正给出的红外发散互相抵消了。和之前一样，这些图中的发散可以分为软发散和共线发散。软发散和之前完全相同，但是由于共线发散是由于 Feynman 图中因子 $1/(p - k)^2$ 引起的，于是共线发散将会出现在光子动量 k 和初态动量 p_1 或 p_2 平行时。此时，如果我们计算末态的两喷注截面，由于仪器的分辨率 θ_{res} 给出了是末态两个粒子的最小夹角，而非初态和末态粒子之间的夹角，于是这个分辨率无法正确的正规化此时的共线发散。这会使得理论计算出的喷注截面中包含红外发散。

由于我们可以直接观测喷注截面，于是理论如果对其给出了一个无穷大的预言，就说明了理论出现了问题。事实上，我们还没有走投无路，还有一个好消息和一个坏消息。好消息是，在高能极限下我们放弃的电子质量会扮演这个共线发散的正规化子的角色，于是如果我们在所有计算中恢复电子质量，那么得到的喷注截面中将会没有发散。不过坏消息也接踵而至：虽然没了发散，但是喷注截面中存在 $\log m_e^2/s$ 这种大对数⁴³。当散射的质心系能量不是很大时，也就是 s 远小于 $m_e^2 \exp(1/\alpha) \approx m_e^2 \times e^{137}$ 时，我们还能算出有限的结果和实验做对比，但是当质心系能量很大时，这个大对数会使微扰论失效。此时我们一直使用的微扰论没有能力处理初态辐射的这个共线发散，这个共线发散是一个完全非微扰的效应！

幸运的是，对 QED 而言， $m_e^2 \exp(1/\alpha) \approx m_e^2 \times e^{137}$ 是个天文数字，于是在 QED 的绝大多数过程，微扰论还不至于被这样一个大对数破坏。但在其他理论中就没有这么幸运了：对于我们第七章中会讨论的 QCD 而言，其耦合常数 α_s 在高能时也只有 $1/10$ 的量级，在约 200MeV 的低能时 α_s 将会达到它的“Landau 奇点”⁴⁴，在微扰论一阶的意义上耦合常数趋于无穷大。于是在 QCD 里面，这个共线发散的处理将是完全非微扰的。

在 QCD 中麻烦可不止这个：我们在第七章会看到，胶子也是无质量的，但不像光子，胶子会和自己发生相互作用，在 Feynman 图中表现为三胶子顶点。于是如果我们考虑类似 $gg \rightarrow 2$ 喷注这样的过程，这个初态辐射造成的发散也就无法利用胶子质量进行正规化。同时，由于色禁闭的存在，渐近场论中是没有单夸克态，只有夸克组成的束缚态——强子的。由于质子、中子等强子的质量小于 QCD 的动力学标度，于是其内部结构也是完全非微扰的。于是我们甚至无法写出一个 2 强子 $\rightarrow 2$ 喷注这样的散射过程的 Feynman 振幅。由于人类目前对非微扰的量子场论所知甚少。于是从第一性原理出发计算出任何的 QCD 截面都是困难的。不过我们可以退而求其次，利用一个被称为**共线因子化**的技术来解决上面这些问题，给出对喷注截面的预言。其思路就是将截面中可以微扰处理的微扰部分与不能微扰处理的非微扰部分分开，利用实验结果拟合出非微扰部分对应的函数，而后就可以用纯粹微扰论给出喷注截面的预言。

总结一下，对 QED 而言，重整化消去了所有紫外发散，而 KLN 定理保证了总截面中

⁴³如果你的感觉足够敏锐，那么会发现前面给出的末态辐射喷注截面中也出现了类似的大对数。那时的截面也有这个问题。

⁴⁴在 Landau 奇点这个词上加引号，是因为物理学家往往将处于低能而非高能的“Landau 奇点”叫做**动力学标度**，通过重整化群产生这一标度的过程则被称为**量纲嬗变** (dimensional transmutation)。这个用词的不同在我看来仅仅是物理学家们的习以为常，并不蕴含任何的物理意义在里面。

所有的红外发散都相互抵消。对于喷注截面而言，如过质心系能量不超过一个天文数字，那么红外发散可以被电子质量、仪器的分辨率等参数正规化掉，利用微扰论得到一个对截面的有限的预言。从而在 QED 的绝大多数情况下，红外发散、紫外发散都可以被完全抵消。这就基本上讲完了 QED 中关于发散的故事。欲听 QCD 中后事如何，请在第八章中听下回分解。

Appendix: Formulae in Dimensional Regularization

这个附录的目的是证明我们在维数正规化和重整化过程中使用的各数学公式。首先是以下的公式：

$$\int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{(\bar{q}^2)^a}{(\bar{q}^2 + D)^b} = \frac{\Gamma(b - a - \frac{d}{2}) \Gamma(a + \frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(b) \Gamma(\frac{d}{2})} D^{-(b-a-\frac{d}{2})} \quad (5.260)$$

Proof. 首先考虑 d 维下的立体角 Ω_d 。为了这个目的，考虑积分 $\int d^d x e^{-x_1^2 - \dots - x_n^2}$ 。在直角坐标下，这就是：

$$\int d^d x e^{-x_1^2 - \dots - x_n^2} = \prod_{i=1}^n \int dx e^{-x^2} = (\sqrt{\pi})^n = \pi^{n/2} \quad (5.261)$$

在 n 维球坐标下：

$$\int d^d x e^{-x_1^2 - \dots - x_n^2} = \Omega_d \int dr r^{n-1} e^{-r^2} = \frac{\Omega_d}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \quad (5.262)$$

于是就有：

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \quad (5.263)$$

有了这个结果，就可以将原来的角度部分积分掉：

$$\int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{(\bar{q}^2)^a}{(\bar{q}^2 + D)^b} = \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dq q^{2a+d-1} (q^2 + D)^{-b} \quad (5.264)$$

做变量代换 $q = D^{1/2} x^{1/2}$ ，就有：

$$\int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{(\bar{q}^2)^a}{(\bar{q}^2 + D)^b} = \frac{D^{-(b-a-\frac{d}{2})}}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty dx x^{a+d/2-1} (1+x)^{-b} \quad (5.265)$$

令 $y = \frac{1}{x+1}$ ，最终得到：

$$\int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{(\bar{q}^2)^a}{(\bar{q}^2 + D)^b} = \frac{D^{-(b-a-\frac{d}{2})}}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty dx (1-y)^{a+\frac{d}{2}-1} y^{b-a-\frac{d}{2}-1} = \frac{D^{-(b-a-\frac{d}{2})}}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2})} B\left(a + \frac{d}{2}, b - a - \frac{d}{2}\right) \quad (5.266)$$

将 B 函数用 Gamma 函数表示为 $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ ，就证明了原积分公式。□

下一个要证明的公式是 Feynman 参数化:

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = \int dF_n \frac{1}{[x_1 A_1 + \dots + x_n A_n]^n}, \quad \int dF_n := (n-1)! \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(x_1 + \dots + x_n - 1) \quad (5.267)$$

Proof. 为了证明这个公式, 先考虑以下的积分式:

$$\frac{1}{A} = \int_0^\infty e^{-At} \quad (5.268)$$

从而:

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = \int_0^\infty dt_1 \dots \int_0^\infty dt_n e^{-(A_1 t_1 + \dots + A_n t_n)} \quad (5.269)$$

插入一个 $1 = \int_0^\infty ds \delta(s - \sum_{i=1}^n t_i)$:

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = \int_0^\infty ds \int_0^\infty dt_1 \dots \int_0^\infty dt_n \delta\left(s - \sum_{i=1}^n t_i\right) e^{-(A_1 t_1 + \dots + A_n t_n)} \quad (5.270)$$

做变量替换 $t_i = sx_i$:

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_n \int_0^\infty ds s^{n-1} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) e^{-s(A_1 x_1 + \dots + A_n x_n)} \quad (5.271)$$

对 s 积分:

$$\int_0^\infty ds s^{n-1} e^{-s(A_1 x_1 + \dots + A_n x_n)} = \frac{\Gamma(n)}{(A_1 x_1 + \dots + A_n x_n)^n} = \frac{(n-1)!}{(A_1 x_1 + \dots + A_n x_n)^n} \quad (5.272)$$

将这个积分带回原式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 \dots A_n} &= \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_n \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) \frac{(n-1)!}{(A_1 x_1 + \dots + A_n x_n)^n} \\ &= \int dF_n \frac{1}{(A_1 x_1 + \dots + A_n x_n)^n} \end{aligned} \quad (5.273)$$

这就完成了对 Feynman 参数化公式的证明。 \square

接下来考虑带矢量指标的积分的两个积分公式:

$$\int d^d q q^\mu q^\nu f(q^2) = \frac{1}{d} \eta^{\mu\nu} \int d^d q q^2 f(q^2) \quad (5.274)$$

$$\int d^d q q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma f(q^2) = \frac{1}{d(d+2)} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\sigma\nu} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) \int d^d q (q^2)^2 f(q^2) \quad (5.275)$$

Proof. 首先考虑第一个积分。由于被积分函数是一个二阶 Lorentz 张量，并且积分结果不应该和任何的动量有关。于是 Lorentz 对称性告诉我们，一定有：

$$\int d^d q \ q^\mu q^\nu f(q^2) = A \eta^{\mu\nu} \int d^d q \ q^2 f(q^2) \quad (5.276)$$

为了求出 A，收缩掉左右两边的指标 μ, ν ，就有：

$$\int d^d q^2 f(q^2) = A d \int d^d q \ q^2 f(q^2) \quad (5.277)$$

从而 $A = 1/d$ ，也就证明了第一个积分公式。对于第二个积分公式，Lorentz 对称性告诉我们：

$$\int d^d q \ q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma f(q^2) = (A \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + B \eta^{\mu\rho} \eta^{\sigma\nu} + C \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) \int d^d q (q^2)^2 f(q^2) \quad (5.278)$$

为了得出系数 A, B, C 的值，在两边用 $\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}$ 做收缩：

$$\int d^d (q^2)^2 f(q^2) = (A d^2 + B d + C d) \int d^d q (q^2)^2 f(q^2) \quad (5.279)$$

同样的，可以得到：

$$A d^2 + B d + C d = 0, \quad B d^2 + C d + A d = 0, \quad C d^2 + A d + B d = 0 \quad (5.280)$$

这就告诉我们， $A = B = C = 1/d(d+2)$ ，故证明了第二个积分公式。对于更多矢量指标的积分，也可以用类似的方法去证明。 \square

Chapter 6

Symmetries in Quantum Field Theory

6.1 Classical Symmetries and Quantum Symmetries

在这一章中所考虑的是量子场论中的对称性。在开始一切的讨论之前，我们最好明确一下究竟什么是一个量子理论的对称性，为此需要回头看一看究竟什么是经典理论中的对称性。当我们说一个经典理论具有一个操作下的对称性时，实际上意味着体系的 Lagrangian 在这个对称变换下是不变的，从而经典理论的作用量、运动方程都不变。

但是对量子理论，这件事情就变得复杂了一些。在量子理论中，一个经典作用量满足的对称性是有可能在重整化等过程中被量子修正所破坏的。于是在量子理论中利用 Lagrangian 满足的经典对称性之前，还需要验证这个对称性在考虑任意阶量子修正后是否仍然成立。由于量子作用量包含了理论中的所有量子修正，从而如果一个对称性保持量子作用量不变，那么所有的正规传播子和正规顶点就是不变的，从而生成泛函、所有的关联函数就都是不变的。此时就可以说体系在量子修正下就仍然保持这个对称性。于是如果要分析一个量子理论具有什么对称性，就需要考虑量子作用量的对称性。

为此考虑以下情形：对于一个广义坐标为 ϕ_α 的理论，作用一个如下的无穷小对称变换：

$$\phi_\alpha(x) \rightarrow \phi_\alpha(x) + \delta\phi_\alpha(x) \quad (6.1)$$

假设经典作用量具有该变换下的对称性，即 $S[\phi + \delta\phi] = S[\phi]$ 。为了保证量子理论不变，还假设这个对称变换保持泛函积分测度 $\mathcal{D}\phi$ 不变，也就是 $\mathcal{D}(\phi + \delta\phi) = \mathcal{D}\phi$ （这意味着做这个变量替换所引入的泛函行列式为 1）。

我们可以改变一下被积分的哑变量的名字，这当然不改变生成泛函：

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}(\phi + \delta\phi) \exp \left[iS[\phi + \delta\phi] + i \int d^4x J_\alpha(x)(\phi_\alpha(x) + \delta\phi_\alpha(x)) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[iS[\phi] + i \int d^4x J_\alpha(x)\phi_\alpha(x) \right] \exp \left[i \int d^4x J_\alpha(x)\delta\phi_\alpha(x) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[iS[\phi] + i \int d^4x J_\alpha(x)\phi_\alpha(x) \right] \left(1 + i \int d^4x J_\alpha(x)\delta\phi_\alpha(x) \right) \\ &= Z[J] \left(1 + i \int d^4x \langle \Omega | \delta\phi_\alpha(x) | \Omega \rangle_J J_\alpha(x) \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

其中 $\langle \Omega | \delta\phi_\alpha(x) | \Omega \rangle_J$ 是存在流时的真空期待值:

$$\langle \Omega | \delta\phi_\alpha(x) | \Omega \rangle_J = \frac{1}{Z[J]} \int \mathcal{D}\phi \delta\phi_\alpha(x) \exp \left[iS[\phi] + i \int d^4x J_\alpha(x) \phi_\alpha(x) \right] \quad (6.3)$$

这也就告诉我们:

$$\int d^4x \langle \Omega | \delta\phi_\alpha(x) | \Omega \rangle_J J_\alpha(x) = 0 \quad (6.4)$$

这对任意的 J 都成立。如果将 J 取做 J_ϕ , 那么由于有关系:

$$J_\phi(x) = -\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} \quad (6.5)$$

上面的式子可以被改写为:

$$\int d^4x \langle \Omega | \delta\phi_\alpha(x) | \Omega \rangle_{J_\phi} \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi_\alpha(x)} = 0 \quad (6.6)$$

这个等式被称为 **Slavnov-Taylor 恒等式**。对于量子作用量 $\Gamma[\phi]$ 而言, 如果其宗量 ϕ 变换了 $\delta\phi$, 那么量子作用量的变化量就是:

$$\delta\Gamma[\phi] = \int d^4x \delta\phi(x) \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} \quad (6.7)$$

这能够给 Slavnov-Taylor 恒等式一个新的诠释: 如果场的变换为 $\phi_\alpha(x) \rightarrow \phi_\alpha(x) + \langle \Omega | \delta\phi_\alpha(x) | \Omega \rangle_{J_\phi}$, 那么量子作用量不变。

综合上面的讨论, 我们就发现了: 如果经典作用量和泛函积分测度在无穷小变换 $\phi_\alpha(x) \rightarrow \phi_\alpha(x) + \delta\phi_\alpha(x)$ 下不变, 那么在变换 $\phi_\alpha(x) \rightarrow \phi_\alpha(x) + \langle \Omega | \delta\phi_\alpha(x) | \Omega \rangle_{J_\phi}$ 下, 量子作用量不变。也就是说, 给定一个保持测度不变的经典对称性, 可以找到一个与之对应的量子对称性。

如果希望经典对称性就是量子对称性, 那么就需要 $\delta\phi_\alpha = \langle \Omega | \delta\phi_\alpha(x) | \Omega \rangle_{J_\phi}$ 。这并不是对所有的对称性都成立的。从而并不是所有经典对称性在量子化后都仍然是量子理论的对称性。不过幸运的是, 可以找到一类经典对称性满足上面的关系。这也就给出了以下的充分条件:

对于任何一个线性的、不变换测度 $\mathcal{D}\phi$ 和 Lagrangian 的无穷小对称变换, 它对应的连续对称性在量子化后仍然是量子理论的对称性。

下面就来证明这个充分条件。所谓“线性”, 就意味着:

$$\delta\phi_\alpha(x) = s_\alpha(x) + \int d^4y t_{\alpha\beta}(x, y) \phi_\beta(y) \quad (6.8)$$

其中 s 和 t 是任意的函数。从形式上就可以看出, 这是一个非常“松”的要求。如果 $\delta\phi_\alpha(x)$ 是线性的, 那么就有:

$$\langle \Omega | \delta\phi_\alpha(x) | \Omega \rangle_{J_\phi} = s_\alpha(x) + \int d^4y t_{\alpha\beta}(x, y) \langle \Omega | \phi_\beta(y) | \Omega \rangle_{J_\phi} \quad (6.9)$$

由于 $\langle \Omega | \phi_\beta(y) | \Omega \rangle_{J_\phi} = \phi_\beta(y)$, 于是线性对称性就满足关系 $\delta\phi_\alpha = \langle \Omega | \delta\phi_\alpha(x) | \Omega \rangle_{J_\phi}$ 。这就完成了我们的证明。

在第五章开头曾提到过, 我们不希望量子修正破坏用于构建理论的对称性。对于旋量 QED 而言, 它们就是 Lorentz 对称性和局域规范对称性¹。下面就来证明这两个对称性的确没有被量子修正破坏。首先考虑 Lorentz 对称性: Lorentz 对称性的无穷小变换是 $\delta\phi_\alpha = \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})_{\alpha\beta}\phi_\beta$, 它是线性的。并且由于测度是 Lorentz 标量, Lorentz 变换显然不改变测度。故上面的充分条件告诉我们 Lorentz 对称性在量子理论中的确保持。

然后考虑旋量 QED 的局域规范对称性。从无穷小变换 $\delta\Psi = iq\Gamma\Psi, \delta A = -\partial\Gamma$ 可以验证, 无穷小 U(1) 局域规范对称性是线性的。验证测度 $\mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}$ 的不变性要稍稍花些笔墨。根据第三章的讨论, 对于 Grassmann 变量 ψ_i 的积分而言, 如果做变量代换 $\psi_i \rightarrow \phi_j$, 那么将会有以下的变量代换关系:

$$\int d^n\psi f(\psi) = \det\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial\psi_j}\right) \int d^n\phi f(\phi) \quad (6.10)$$

于是:

$$\int d^n\psi f(\psi) = \int d^n\phi f(\phi) = \det\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\phi_j}\right) \int d^n\psi f(\phi) \quad (6.11)$$

从而可以认为, 在对称变换下测度获得了一个因子 $\det\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\phi_j}\right)$ 。将这套语言用到局域 U(1) 规范对称性上。由于 $\Psi' \rightarrow e^{iq\Gamma(x)}\Psi, \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}e^{-iq\Gamma(x)}$ 。于是对于泛函积分而言, 就有:

$$\int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}e^{iS} = \det(e^{-iq\Gamma(x)}) \det(e^{iq\Gamma(x)}) \int \mathcal{D}\Psi'\mathcal{D}\bar{\Psi}'e^{iS} \quad (6.12)$$

从而在这个对称变换下, 测度的变换就是:

$$\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi} \rightarrow \mathcal{D}\Psi'\mathcal{D}\bar{\Psi}' = \det(e^{iq\Gamma(x)}) \det(e^{-iq\Gamma(x)}) \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi} \quad (6.13)$$

我们还不知道该如何计算这种泛函行列式。不过利用 $\det A \det B = \det AB$, 就可以不用计算这些泛函行列式而直接看出这两个泛函行列式的积是 1。故测度的费米子部分 $\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}$ 是在局域 U(1) 规范对称性下不变的。对于光子部分, 由于光子的规范变换仅仅是一个平移 $A' = A - \partial\Gamma$, 在这个平移下测度 $\mathcal{D}A$ 当然是不变的。从而整个测度都在局域 U(1) 规范下不变。

从而, U(1) 规范不变性作为一个线性的、不改变测度的经典对称性, 在量子理论中是不会被量子修正所破坏的。从而我们就可以安心的在旋量 QED 中使用 Ward 恒等式等从 U(1) 规范不变性中推导出的结论。

事实上, 除去这两个特殊情况之外, 有一个更加一般的结论:

么正变换不改变泛函积分测度。

证明也非常简单: 对于一个对费米子作用的么正变换 U , 那么其测度的变换就是:

$$\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi} \rightarrow \mathcal{D}\Psi'\mathcal{D}\bar{\Psi}' = (\det U)(\det \beta U^\dagger \beta) \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi} \quad (6.14)$$

¹这里还牵扯到一些正规化的问题: 选取不好的正规化也会破坏理论的对称性。而由于这里的所有讨论都是非微扰的, 于是这些微扰计算层面的问题在这里没有讨论到。

如果我们考虑一个无穷小变换，就有 $U = \exp(i\alpha T)$ ，从而：

$$\det U = \det \exp(i\alpha T) = \exp \text{Tr}(i\alpha T) \sim 1 + \text{Tr}(i\alpha T) \quad (6.15)$$

$$\det \beta U^\dagger \beta = \det \exp(-i\alpha \beta T^\dagger \beta) = \exp \text{Tr}(-i\alpha \beta T^\dagger \beta) \sim 1 + \text{Tr}(-i\alpha T^\dagger) \quad (6.16)$$

对于幺正变换而言，其生成元 T 是 Hermitian 矩阵，于是 $(\det U)(\det \beta U^\dagger \beta) = 1 + O(\alpha^2)$ 。这个高阶项不对 Slavnov-Taylor 恒等式的推导产生任何影响。从而我们可以说，幺正变换是不改变测度的。前面我们所考虑的 $U(1)$ 规范变换和 Lorentz 变换显然都是幺正变换，于是它们也当然不改变测度。

在利用这个结论判断一个变换是否改变测度之前，还有些需要注意的事情——在本章最后会看到，如果一个经典的幺正对称性和规范对称性不能同时提升为量子对称性，那么出于希望理论自治的原因，我们使用的正规化总是要保护规范对称性，而在量子层面破坏这个幺正对称性。如果我们不通过有限重整化引入 Lagrangian 中的额外项，那么 Lagrangian 在这个对称性下不变。此时这个对称性的破坏就体现为：在保护规范对称性的正规化下，这个对称性的幺正性就必然丧失。此时这个对称性就是一个量子反常的对称性。我们会在本章最后一节中仔细讨论关于量子反常的内容。

6.2 Conserved Currents in Quantum Field Theory

经过上一节的讨论，我们现在已经知道了什么是量子场论中的对称性，于是可以开始在理论中利用对称性了。在现代物理学中，对称性的用法有两种：其一是“通过对称性构建理论”，具体来说，就是当我们构建一个理论时候，首先要求理论中有某些对称性，从而写出理论的作用量。这种用法的一个典型就是**规范场论**——通过要求理论中具有局域规范对称性，从而引入规范场，将 Lagrangian 中的偏导数换成协变导数，得到新的 Lagrangian。第二种用法就是“通过对称性简化理论”：已知一个理论和其中的对称性，并通过对称性来简化从这个理论中得到预言的过程。一个典型的例子是上面我们讨论的 Furry 定理——我们知道旋量 QED 具有电荷共轭下的对称性，从而利用 Furry 定理，在求出一个过程的振幅、得到散射截面的过程中就不用考虑那些只有奇数条光子外线的 Feynman 图以及含有这些子图的 Feynman 图。

在接下来的三节中，我们就来考虑量子场论中连续对称性的后一种用法，也就是“通过对称性简化理论”。在经典场论中，连续对称性的后一种用法表现为 Noether 定理。它告诉我们，对于一个理论的连续对称性，可以定义一个满足方程 $\partial_\mu J^\mu = 0$ 的守恒流 J^μ 。这一节的一个目标就是将流守恒定律推广到量子场论中。

量子场论和经典场论最大的不同在于路径积分。经典场论中只需要考虑满足最小作用量的物理场，在量子场论中就开始需要考虑非物理的场。而正如在第一章看到的，流守恒定律是一个对物理场才成立的等式。对于非物理的、不满足场方程的场而言，考虑一个时空不变，仅仅变换场的变换 $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ ，如果我们照例定义 Noether 流为 $J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \delta\phi_\alpha$ ，那么有：

$$\partial_\mu J^\mu(x) = \delta\mathcal{L}(x) - \frac{\delta S}{\delta\phi_\alpha(x)} \delta\phi_\alpha(x) \quad (6.17)$$

如果理论具有这个变换下的经典对称性，那么 $\delta\mathcal{L}(x) = 0$ 。先试试将这个提升为一个算符方程：我们知道，一个算符的矩阵元被定义为 $\langle \phi_a, t_a | \mathcal{O}(x) | \phi_b, t_b \rangle := \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}(x) \exp\left(i \int_{t_a}^{t_b} d^4x \mathcal{L}(\phi)\right)$ 。将 \mathcal{O} 取为算符 $\partial_\mu J^\mu(x) + \frac{\delta S}{\delta\phi_\alpha(x)} \delta\phi_\alpha(x)$ ，就可以得到这个算符的每个矩阵元都是 0，从而就

是 0 算符²。并且我们知道，量子场论中的场算符满足作为算符方程的经典场方程，于是算符 $\delta S/\delta\phi_\alpha(x)$ 就等于 0。于是在量子场论中，作为一个算符方程，也有：

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \quad (6.18)$$

这个算符方程当然是有用的，但是也没有那么有用：在量子场论中，我们平时打交道的对象都是关联函数，并不是场算符和流算符。从而比起算符方程，更希望得到编时关联函数 $\langle\Omega|T\{\frac{\delta S}{\delta\phi_\alpha(x)}\mathcal{O}_1(\phi(x_1))\dots\mathcal{O}_n(\phi(x_n))\}|\Omega\rangle$ 所满足的“场方程”和 $\langle\Omega|T\{J^\mu(x)\mathcal{O}_1(\phi(x_1))\dots\mathcal{O}_n(\phi(x_n))\}|\Omega\rangle$ 所满足的“流守恒方程”。

Schwinger-Dyson Equation

首先让我们考虑关联函数的“场方程”。它就是下面的 **Schwinger-Dyson 方程**：对于一系列局域的、作为场算符的函数的算符 $\mathcal{O}_i(\phi(x_i))$ ，有关系：

$$\langle\Omega|T\{\frac{\delta S}{\delta\phi_\alpha(x)}\mathcal{O}_1(\phi(x_1))\dots\mathcal{O}_n(\phi(x_n))\}|\Omega\rangle = i \sum_{j=1}^n \langle\Omega|T\{\mathcal{O}_1(\phi(x_1))\dots\frac{\partial\mathcal{O}_j}{\partial\phi_\alpha}\delta^4(x-x_j)\dots\mathcal{O}_n(\phi(x_n))\}|\Omega\rangle \quad (6.19)$$

Remark: 这里的 $\frac{\delta S}{\delta\phi_\alpha(x)}$ 中应该含有导数算子。这些导数算子应该在关联函数之外，而不是关联函数之内。否则根据之前的讨论， $\frac{\delta S}{\delta\phi_\alpha(x)}$ 算符就是 0 算符，也就无从谈起等式右侧了。

Proof. 考虑编时关联函数 $\langle\Omega|T\{\frac{\delta S}{\delta\phi_\alpha(x)}\mathcal{O}_1(\phi(x_1))\dots\mathcal{O}_n(\phi(x_n))\}|\Omega\rangle$ 。首先需要证明，利用路径积分可以将其写为（导数算子在关联函数之外）：

$$\langle\Omega|T\{\frac{\delta S}{\delta\phi_\alpha(x)}\mathcal{O}_1(\phi(x_1))\dots\mathcal{O}_n(\phi(x_n))\}|\Omega\rangle = \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \frac{\delta S}{\delta\phi_\alpha(x)} \mathcal{O}_1(x_1)\dots\mathcal{O}_n(x_n) \quad (*) \quad (6.20)$$

根据路径积分 $\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \partial_\mu \phi \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n$ 的定义，它是：

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \partial_\mu \phi \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n &= \frac{1}{\varepsilon} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} [\phi(x^\mu + \varepsilon) - \phi(x^\mu)] \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\langle\Omega|T\{\phi(x^\mu + \varepsilon)\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n\}|\Omega\rangle - \langle\Omega|T\{\phi(x^\mu)\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n\}|\Omega\rangle] \\ &= \partial_\mu \langle\Omega|T\{\phi(x^\mu)\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n\}|\Omega\rangle \end{aligned} \quad (6.21)$$

于是一个算符的导数的路径积分翻译为关联函数的语言就是关联函数的导数，而非导数的关联函数。有了这个讨论，就可以理解为什么在 (*) 式中，导数算子会在关联函数之外了。

²对于单一下算符的、不编时的矩阵元而言，这个算符中的导数算子是安全的。对编时关联函数而言，导数算子需要一些额外的处理。详见本节后面的讨论。

在说明了这件事情之后，就可以开始证明 Schwinger-Dyson 方程了。让我们考虑以下的关联函数：

$$Z[J] \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle_J = Z[J] \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}_1(\phi(x_1)) \dots \mathcal{O}_n(\phi(x_n)) \exp \left[iS[\phi] + \int d^4x J_\alpha(x) \phi_\alpha(x) \right] \quad (6.22)$$

考虑任意的一个不变换泛函积分测度的无穷小对称变换 $\phi_\alpha \rightarrow \phi'_\alpha = \phi_\alpha + \delta\phi_\alpha$ 。我们可以做一个积分变量名的替换：

$$\begin{aligned} Z[J] \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle_J &= \int \mathcal{D}(\phi + \delta\phi) \mathcal{O}_1(\phi'(x_1)) \dots \mathcal{O}_n(\phi'(x_n)) \\ &\quad \times \exp \left[iS[\phi + \delta\phi] + i \int d^4x J_\alpha(x) (\phi_\alpha(x) + \delta\phi_\alpha(x)) \right] \\ &= Z[J] \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle_J + i \int \mathcal{D}\phi e^{i(S+\int J\phi)} \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \int d^4x \left(\frac{\delta S}{\delta \phi_\alpha(x)} + J_\alpha(x) \right) \delta\phi_\alpha(x) \\ &\quad + \sum_j \int \mathcal{D}\phi e^{i(S+\int J\phi)} \mathcal{O}_1 \dots \frac{\partial \mathcal{O}_j}{\partial \phi_\alpha(x_j)} \dots \mathcal{O}_n \delta\phi_\alpha(x_j) \end{aligned} \quad (6.23)$$

取 $J=0$ 的特殊情况，就有：

$$i \int d^4x \left[\int \mathcal{D}\phi e^{iS} \left(\frac{\delta S}{\delta \phi_\alpha(x)} \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n - i \sum_j \mathcal{O}_1 \dots \frac{\partial \mathcal{O}_j}{\partial \phi_\alpha(x_j)} \delta^4(x - x_j) \dots \mathcal{O}_n \right) \right] \delta\phi_\alpha(x) = 0 \quad (6.24)$$

由于 $\delta\phi_\alpha$ 是任意的，这就蕴含了 Schwinger-Dyson 方程。 \square

Schwinger-Dyson 方程告诉我们，关联函数满足的场方程比起经典场方程，多了一些接触项。其实我们早在之前就见过这些接触项了：在自由标量场论中，如果将 Schwinger-Dyson 方程中的 \mathcal{O} 取做单个场算符 $\phi(y)$ ，那么 Schwinger-Dyson 方程就是：

$$(\partial^2 - m^2) \langle 0 | T\{\phi(x)\phi(y)\} | 0 \rangle = i\delta^4(x - y) \quad (6.25)$$

这其实就是在说，Feynman 传播子是 Klein-Gordon 方程的 Green 函数。这个结论早在第二章中就被我们熟知了。

对 Schwinger-Dyson 方程，除去“关联函数的运动方程”外，还有一个理解。为了阐释这一点，考虑一个相互作用的标量场论。如果其相互作用项中没有对场导数的依赖，那么其 Lagrangian 就是 $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)$ 。于是：

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = (\partial^2 - m^2)\phi + \mathcal{L}'_{\text{int}} \quad (6.26)$$

由于场方程 $(\partial^2 - m^2)\phi + \mathcal{L}'_{\text{int}} = 0$ ，于是 $\mathcal{L}'_{\text{int}} = -(\partial^2 - m^2)\phi$ 。从而，Schwinger-Dyson 方程可以写为：

$$\begin{aligned} &(\partial^2 - m^2) \langle \Omega | T\{\phi(x)\mathcal{O}_1(\phi(x_1)) \dots \mathcal{O}_n(\phi(x_n))\} | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | T\{(\partial^2 - m^2)\phi(x)\mathcal{O}_1(\phi(x_1)) \dots \mathcal{O}_n(\phi(x_n))\} | \Omega \rangle \\ &\quad + i \sum_{j=1}^n \langle \Omega | T\{\mathcal{O}_1(\phi(x_1)) \dots \frac{\partial \mathcal{O}_j}{\partial \phi_\alpha(x_j)} \delta^4(x - x_j) \dots \mathcal{O}_n(\phi(x_n))\} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (6.27)$$

也就是说, Schwinger-Dyson 方程也描述了这样一件事情: 当你将作用在场算符上的波算符 $(-\partial^2 + m^2)$ 提出关联函数之外时, 会出现额外的接触项。在这个理解之下, 就可以回答第二章中留下一个问题: 在证明 LSZ 约化公式时, 我们为什么能将波算符 $(-\partial^2 + m^2)$ 提出关联函数? 为了回答这个问题, 首先定义一个动量空间关联函数³:

$$\langle \Omega | T\{\tilde{\phi}_{\alpha_1}(k_1)\tilde{\phi}_{\alpha_2}(k_2)\dots\} | \Omega \rangle := \int d^4x_1 \int d^4x_2 \dots e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} \dots \langle \Omega | T\{\phi_{\alpha_1}(x_1)\phi_{\alpha_2}(x_2)\dots\} | \Omega \rangle \quad (6.28)$$

由于坐标空间的关联函数可以用 Feynman 图计算, 从而动量空间的关联函数也可以利用 Feynman 图来计算。经过和 3.6 节类似的讨论, 它就对应所有未截肢的、标记 x_1, \dots, x_n 的 n 个外线上分别具有 n 个入射动量 k_1, \dots, k_n 的、所有不同的 Feynman 图的和再乘上一个因子 $(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + \dots + k_n)$ 。

利用动量空间关联函数, LSZ 约化公式也可以写为⁴:

$$\langle f | S | i \rangle = \lim_{k_i^2 \rightarrow -m_i^2} (k_1^2 + m^2) \dots \langle \Omega | T\{\tilde{\phi}(k_1) \dots \tilde{\phi}(-k'_1) \dots\} | \Omega \rangle \quad (6.29)$$

于是, 关联函数 $\langle \Omega | T\{\tilde{\phi}(k_1) \dots\} | \Omega \rangle$ 应该在 $k_i^2 = -m_i^2$ 处有一个多变量奇点, 其留数就是 S-矩阵元。也就是说, 在所有的 k_i^2 都取在 $-m_i^2$ 附近时, 这个关联函数有行为:

$$\langle \Omega | T\{\tilde{\phi}(k_1) \dots \tilde{\phi}(-k'_1) \dots\} | \Omega \rangle \rightarrow \frac{\langle f | S | i \rangle}{(k_1^2 + m^2) \dots (k_1'^2 + m^2) \dots} \quad (6.30)$$

这告诉我们, 动量空间关联函数在这个极点上的留数蕴含 S-矩阵的性质。从而只有含这个奇点的项才对 S-矩阵元有贡献。而根据 Schwinger-Dyson 方程, 如果我们将波算符从关联函数内拉到关联函数外, 那么就需要加上一些接触项, 它们中总是含至少一个 delta 函数因子 $\delta(x - x_i)$ 的。对这个因子对应的 x_i 做 Fourier 变换, 得到 $e^{ik_i x}$ 。这是不贡献 $k_i^2 = -m_i^2$ 的奇异性的, 不仅如此, 由于接触项的其他部分和这个 x_i 无关, 于是整个接触项 Fourier 变换后, 在 $k_i^2 = -m_i^2$ 都是非奇异的, 故它不贡献这个奇点处的留数, 于是对 S-矩阵元没有贡献。既然它对 S-矩阵元没有贡献, 那么就可以将这些接触项在 LSZ 约化公式中舍去, 安全地将波算符从关联函数内拉到关联函数外了。这就回答了前面遗留的这个问题。

这些对动量空间关联函数的讨论是局限于标量场的。对于旋量和矢量场而言, 也有和上面类似的讨论, 这里就不再重复讨论一遍了。唯一不同的是, 为了下面讨论的简便, 将旋量场的动量空间关联函数定义为:

$$\langle \Omega | T\{\tilde{\Psi}(q_1) \dots \tilde{\bar{\Psi}}(p_1) \dots\} | \Omega \rangle := \int d^4x_1 \dots \int d^4y_1 \dots e^{-iq_1 x_1} \dots e^{ip_1 y_1} \dots \langle \Omega | T\{\Psi(x_1) \dots \bar{\Psi}(y_1) \dots\} | \Omega \rangle \quad (6.31)$$

在 Feynman 图的意义上, 这就意味着所有箭头向外的费米子线带有向外的动量, 所有箭头向内的费米子线具有向内的动量。不用说也知道, 这样的选取是更加符合直观的。

³这里的 T 不代表任何编时排序, 仅仅是这个 Fourier 变换的关联函数的名字的一部分。其严格定义就是以下式子。仿照这个式子, 还可以定义任意算符的动量空间关联函数。例如这一节后续用到的流的动量空间关联函数。

⁴注意由于我们定义的 Fourier 变换关联函数中所有因子都是 e^{ipx} , 这在 LSZ 约化公式中对应入射粒子的动量, 于是出射粒子的动量需要加一个负号。

Ward-Takahashi Identity

在完成了对场算符的关联函数满足的“运动方程”——Schwinger-Dyson 方程的讨论后，接下来考虑流的关联函数满足的“流守恒定律”：如果量子理论具有无穷小对称变换 $\delta\phi$ 下的对称性，并且 Lagrangian 和泛函积分测度在这个变换下不变，那么有：⁵：

$$\begin{aligned} \partial_\mu \langle \Omega | T\{J^\mu(x)\mathcal{O}_1(\phi(x_1))\dots\mathcal{O}_n(\phi(x_n))\} | \Omega \rangle \\ = -i \sum_{j=1}^n \langle \Omega | T\{\mathcal{O}_1(\phi(x_1))\dots\frac{\partial \mathcal{O}_j}{\partial \phi_\alpha}(x_j)\dots\mathcal{O}_n(\phi(x_n))\} | \Omega \rangle \delta^4(x - x_j) \end{aligned} \quad (6.32)$$

这个等式就被我们称为 **Ward-Takahashi 恒等式**，它可以被看作是关联函数的“流守恒定律”，从而就是量子场论中连续对称性的后一种用法。其证明如下：

Proof. 考虑在变换 $\delta\phi$ 下关联函数 $\langle \mathcal{O}_1\dots\mathcal{O}_n \rangle$ 的变换。根据和 Schwinger-Dyson 方程证明过程中类似的讨论，可以得到：

$$0 = i \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \int d^4x \frac{\delta S}{\delta \phi_\alpha(x)} \delta\phi_\alpha(x) + \sum_j \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \mathcal{O}_1 \dots \frac{\partial \mathcal{O}_j}{\partial \phi_\alpha(x_j)} \dots \mathcal{O}_n \delta\phi_\alpha(x_j) \quad (6.33)$$

将关系 $\partial_\mu J^\mu(x) = \delta\mathcal{L}(x) - \frac{\delta S}{\delta \phi_\alpha(x)} \delta\phi_\alpha(x)$ 代入上式，就得到：

$$\begin{aligned} 0 = -i \int d^4x \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \partial_\mu J^\mu(x) \\ + \sum_j \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \mathcal{O}_1 \dots \frac{\partial \mathcal{O}_j}{\partial \phi_\alpha(x_j)} \delta\phi_\alpha(x_j) \dots \mathcal{O}_n \delta^4(x - x_j) \end{aligned} \quad (6.34)$$

将这个式子翻译成关联函数的语言，就证明了 Ward-Takahashi 恒等式。 \square

作为一个特殊情况，对于算符 \mathcal{O}_i 就是场算符的情形，就有：

$$\partial_\mu \langle \Omega | T\{J^\mu(x)\phi_{\alpha_1}(x_1)\dots\phi_{\alpha_n}(x_n)\} | \Omega \rangle = -i \sum_{j=1}^n \langle \Omega | T\{\phi_{\alpha_1}(x_1)\dots\delta\phi_{\alpha_j}(x_j)\dots\phi_{\alpha_n}(x_n)\} | \Omega \rangle \delta^4(x - x_j) \quad (6.35)$$

将上式 Fourier 变换到动量空间：

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \dots \int \frac{d^4k'_n}{(2\pi)^4} e^{-ik'x} \dots e^{-ik'_n x_n} (-ik_\mu) \langle \Omega | T\{\tilde{J}^\mu(k')\tilde{\phi}_{\alpha_1}(k'_1)\dots\tilde{\phi}_{\alpha_n}(k'_n)\} | \Omega \rangle \\ = -i \sum_{j=1}^n \int \frac{d^4k'_1}{(2\pi)^4} \dots \int \frac{d^4k'_n}{(2\pi)^4} e^{-ik'_1 x_1} \dots e^{-ik'_n x_n} \langle \Omega | T\{\tilde{\phi}_{\alpha_1}(k'_1)\dots\delta\tilde{\phi}_{\alpha_j}(k'_j)\dots\tilde{\phi}_{\alpha_n}(k'_n)\} | \Omega \rangle \delta^4(x - x_j) \end{aligned} \quad (6.36)$$

⁵这里假设了守恒流中不能含有场的导数。否则根据上面的讨论，对应的导数应该被移出关联函数之外。

对这个等式两边作用 $\int d^4x \dots \int d^4x_n e^{ikx} \dots e^{ik_n x_n}$, 就得到:

$$k_\mu \langle \Omega | T\{\tilde{J}^\mu(k) \tilde{\phi}_{\alpha_1}(k_1) \dots \tilde{\phi}_{\alpha_n}(k_n)\} | \Omega \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \Omega | T\{\tilde{\phi}_{\alpha_1}(k_1) \dots \delta \tilde{\phi}_{\alpha_j}(k+k_j) \dots \tilde{\phi}_{\alpha_n}(k_n)\} | \Omega \rangle \quad (6.37)$$

这就是动量空间的 Ward-Takahashi 恒等式。直到此处的讨论和场处于 Lorentz 群的哪个表示是无关的。对于旋量场而言, 也有如下的 Ward-Takahashi 恒等式:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \langle \Omega | T\{J^\mu(x) \Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \bar{\Psi}(y_1) \dots \bar{\Psi}(y_n)\} | \Omega \rangle \\ = -i \sum_i \langle \Omega | T\{\Psi(x_1) \dots \delta \Psi(x_i) \dots \Psi(x_n) \bar{\Psi}(y_1) \dots \bar{\Psi}(y_n)\} | \Omega \rangle \delta(x - x_i) \\ - i \sum_j \langle \Omega | T\{\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \bar{\Psi}(y_1) \dots \delta \bar{\Psi}(y_i) \dots \bar{\Psi}(y_n)\} | \Omega \rangle \delta^4(y - x_i) \end{aligned} \quad (6.38)$$

对应的动量空间 Ward-Takahashi 恒等式就是⁶:

$$\begin{aligned} k_\mu \langle \Omega | T\{\tilde{J}^\mu(k) \tilde{\Psi}(p_1) \dots \tilde{\Psi}(p_n) \tilde{\bar{\Psi}}(q_1) \dots \tilde{\bar{\Psi}}(q_n)\} | \Omega \rangle \\ = \sum_i \langle \Omega | T\{\tilde{\Psi}(q_1) \dots \delta \tilde{\Psi}(q_i - k) \dots \tilde{\Psi}(q_n) \tilde{\bar{\Psi}}(p_1) \dots \tilde{\bar{\Psi}}(p_n)\} | \Omega \rangle \\ + \sum_j \langle \Omega | T\{\tilde{\Psi}(q_1) \dots \tilde{\Psi}(q_n) \tilde{\bar{\Psi}}(p_1) \dots \delta \tilde{\bar{\Psi}}(p_i + k) \dots \tilde{\bar{\Psi}}(p_n)\} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (6.39)$$

Conserved Charge as Generators

在这一节的最后, 我们将用 Ward-Takahashi 恒等式证明一个重要的结论:

量子对称性对应的经典 Noether 荷 $Q = \int d^3x J^0(x)$ 是量子理论中对称变换的生成元。

这就意味着, 任何算符在这个对称变换下的变换关系就是 $\tilde{\mathcal{O}} = e^{i\theta Q} \mathcal{O} e^{-i\theta Q}$ 。对于一个无限小变换, 这也就是 $i\theta[\mathcal{Q}, \mathcal{O}] = \delta \mathcal{O}$ 。于是为了证明这件事情, 我们只需要考虑这个 Noether 荷和一个任意算符的对易子。而为了在路径积分中得到对易子, 我们可以利用编时算符的以下性质:

$$\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} dt \frac{\partial}{\partial t} T\{\mathcal{O}(x) \mathcal{O}_0(x_0)\} = [\mathcal{O}(x_0), \mathcal{O}_0(x_0)] \quad (6.40)$$

从而为了得到 $[\mathcal{Q}, \mathcal{O}]$, 可以对 Ward-Takahashi 恒等式的两边积分:

$$\begin{aligned} \int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} dt \int d^3x \partial_\mu \langle \Omega | T\{J^\mu(x) \mathcal{O}_1(\phi(x_1)) \dots \mathcal{O}_n(\phi(x_n))\} | \Omega \rangle \\ = -i \int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} dt \int d^3x \sum_{j=1}^n \langle \Omega | T\{\mathcal{O}_1(\phi(x_1)) \dots \delta \mathcal{O}_j \dots \mathcal{O}_n(\phi(x_n))\} | \Omega \rangle \delta^4(x - x_j) \end{aligned} \quad (6.41)$$

⁶ 我们定义流的动量流入 Feynman 图, 也就是在动量空间关联函数的定义中将流的因子选择为 e^{ikx} 。

由于 t_1, t_2, \dots, t_n 两两不同，我们总可以使得区间 $[t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon]$ 只包含 t_1 而不包含其他 t_j 。此时等式左边的所有空间导数项就全都消失，只有时间导数项留下来。等式右边只有 $\delta\mathcal{O}_1$ 项给出非 0 贡献。于是：

$$\int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} dt \int d^3x \partial_0 \langle \Omega | T\{J^0(x)\mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n)\} | \Omega \rangle = -i \langle \Omega | T\{\delta\mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2) \dots \mathcal{O}_n(x_n)\} | \Omega \rangle \quad (6.42)$$

而根据前面给出的编时算符的性质，并且考虑到 $\theta Q = \int d^3x J^0$ ⁷，于是这就是：

$$i\theta \langle \Omega | T\{[Q(t_1), \mathcal{O}_1(x_1)]\mathcal{O}_2(x_2) \dots \mathcal{O}_n(x_n)\} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T\{\delta\mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2) \dots \mathcal{O}_n(x_n)\} | \Omega \rangle \quad (6.43)$$

由于算符 $\mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n$ 可以是任意的，我们可以将其选做渐进时刻上完备多粒子态的产生和湮灭算符。这样一来就可以证明，存在一组完备的态 $\{|\alpha\rangle\}$ ，对于任意其中的 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ ，都有 $i\theta\langle\alpha| [Q(t_1), \mathcal{O}(x_1)]|\beta\rangle = \langle\alpha| [Q(t_1), \mathcal{O}(x_1)]|\beta\rangle$ 。这也就蕴含了：

$$i\epsilon [Q(t), \mathcal{O}(x)] = \delta\mathcal{O}(x) \quad (6.44)$$

这就最终证明了量子对称性对应的经典 Noether 荷是量子理论中对称变换的生成元。事实上，我们在 3.2 节中所证明“经典 Poincare 对称性的 Noether 荷是量子 Poincare 变换的生成元”不过是这个结论的一个应用——只要将对称性换成时空平移和 Lorentz 变换下的对称性，这一结论就应运而出⁸。

6.3 Ward-Takahashi Identities in Spinor QED

General Analysis

在上一节的讨论中，我们已经知道了如何在量子场论中利用连续对称性。接下来就可以来看看对称性在我们熟悉的旋量 QED 中有什么作用了。旋量 QED 具有的对称性是 Lorentz 对称性和 U(1) 局域规范对称性。Lorentz 对称性的作用早在 3.2 节就看到过了——它帮助我们定义了场的能量、动量和角动量⁹。于是这一节中重点关注的就是 U(1) 规范对称性。

局域的 U(1) 规范对称性并不是一个 Noether 定理意义上的对称性，而只是一个冗余的自由度。这是由于如果场的变换是局域的，那么关系 $\partial_\mu \delta\phi = \delta(\partial_\mu \phi)$ 不再成立，从而第一章中对 Noether 定理的推导也就不再成立。从而局域规范对称性并不对应守恒流，利用 Ward-Takahashi 恒等式能够讨论的就只有全局 U(1) 对称性。

我们考虑重整化的旋量 QED。在任意的 R_ξ 规范下，其 Lagrangian 是：

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(iZ_2\partial^\mu - Z_m m) \Psi - \frac{1}{4}Z_3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{Z_3}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + Z_1 q \bar{\Psi} A \Psi \quad (6.45)$$

⁷这里多了一个 θ 的原因是因为：我们通过 δL 定义的守恒流本身带有一个 θ ，而平常我们说到守恒荷时是不包含这个 θ 的。从而为了得到通常考虑的守恒荷，我们需要将这个 θ 从守恒流里面提出来。

⁸为什么不在那时就给出这个更加简洁的证明呢？答案是：我们需要对重整化、量子作用量这些东西有足够的认识，才能开始我们对于量子场论中对称性的讨论。并且出于讨论的完整性，我比较想单独将“量子场论中的对称性”作为 notes 中一个完整的章节，以对量子场论中的对称性有一个比较完整的认识。

⁹这一点其实也能从 Ward-Takahashi 恒等式中看出。如果将 Poincare 群的生成元代入 Ward-Takahashi 恒等式，就能得到一些含 Poincare 群守恒流 $T^{\mu\nu}, M^{\mu\nu\rho}$ 的关联函数所满足的等式。通过这些等式，也可以推导出 Poincare 群守恒荷就是量子 Poincare 变换的生成元，从而也可以从路径积分形式理论推导出正则形式理论。这种推出正则形式理论的方式和 3.2 节中给出的基于 Schwinger 作用量原理的推导是等价的。

在全局 $U(1)$ 规范对称性下, 旋量场和规范场的变化是 $\Psi \rightarrow e^{-iq\Gamma}\Psi$, $\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}e^{iq\Gamma}$ 。其中 q 是重整化的电荷。从而, 在一个无穷小变化下:

$$\delta\Psi = -iq\Gamma\Psi, \quad \delta\bar{\Psi} = iq\Gamma\bar{\Psi} \quad (6.46)$$

此时, $U(1)$ 全局规范对称性对应的守恒流就是:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)}\delta\phi_\alpha = Z_2q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\Gamma \quad (6.47)$$

为了讨论方便, 将守恒流 J^μ 定义为 $q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ 。代入 Ward-Takahashi 恒等式, 就得到:

$$\begin{aligned} & iZ_2k_\mu\langle\Omega|T\{\tilde{J}^\mu(k)\tilde{\Psi}(q_1)\dots\tilde{\Psi}(q_n)\tilde{\bar{\Psi}}(p_1)\dots\tilde{\bar{\Psi}}(p_n)\}|\Omega\rangle \\ &= q\sum_i\langle\Omega|T\{\tilde{\Psi}(q_1)\dots\tilde{\Psi}(q_i-k)\dots\tilde{\Psi}(q_n)\tilde{\bar{\Psi}}(p_1)\dots\tilde{\bar{\Psi}}(p_n)\}|\Omega\rangle \\ &\quad - q\sum_j\langle\Omega|T\{\tilde{\Psi}(q_1)\dots\tilde{\Psi}(q_n)\tilde{\bar{\Psi}}(p_1)\dots\tilde{\bar{\Psi}}(p_i+k)\dots\tilde{\bar{\Psi}}(p_n)\}|\Omega\rangle \end{aligned} \quad (6.48)$$

我想这里有必要明确一下, 等式左边的定义是:

$$\begin{aligned} & \langle\Omega|T\{\tilde{J}^\mu(k)\tilde{\Psi}(p_1)\dots\tilde{\Psi}(p_n)\tilde{\bar{\Psi}}(q_1)\dots\tilde{\bar{\Psi}}(q_n)\}|\Omega\rangle \equiv \\ & q\int d^4x\int d^4x_1\dots\int d^4y_1\dots e^{ikx}e^{-iq_1x_1}\dots e^{ip_1y_1}\dots\langle\Omega|T\{\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)\Psi(x_1)\dots\Psi(x_n)\bar{\Psi}(y_1)\dots\bar{\Psi}(y_n)\}|\Omega\rangle \end{aligned} \quad (6.49)$$

在 Feynman 图的意义上, 这就是 (对具有所有这些外线结构的图求和):

(这里有个 Feynman 图)

其中, 每个图左边的虚线代表一个动量为 k 的流。由于在关联函数中的算符 $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ 意味着对生成泛函作用 $(\gamma^\mu)^\alpha_\beta \frac{\delta}{\delta\eta_\beta} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}^\alpha}$, 这相当于将两个箭头方向不同的外线粘在了一个坐标为 x 的点上:

(这里有个 Feynman 图)

由于常见的关联函数中并不会出现流, 所以现在这个形式的 Ward-Takahashi 恒等式不太好用。幸运的是, 费米子流和光子场的联系是十分紧密的。为了看到这个联系, 考虑光子场的 Schwinger-Dyson 方程:

$$\begin{aligned} & Z_3\left(\partial^2\eta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right)\langle\Omega|T\{A^\nu(x)\mathcal{O}_1\dots\mathcal{O}_n\}|\Omega\rangle \\ &= Z_1\langle\Omega|T\{J_\mu(x)\mathcal{O}_1\dots\mathcal{O}_n\}|\Omega\rangle + i\sum_j\langle\Omega|T\{\mathcal{O}_1\dots\frac{\partial\mathcal{O}_j}{\partial A^\mu}\dots\mathcal{O}_n\}|\Omega\rangle\delta^4(x-x_j) \end{aligned} \quad (6.50)$$

如果后面的局域算符 \mathcal{O}_i 都是场算符, 那么就有:

$$\begin{aligned} Z_3 \left(\partial^2 \eta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right) \langle \Omega | T\{\tilde{A}^\nu(x) A_{\mu_1}(x_1) \dots \tilde{\Psi}(y_1) \dots \tilde{\Psi}(z_1) \dots\} | \Omega \rangle \\ = Z_1 \langle \Omega | T\{\tilde{J}_\mu(k) \tilde{A}_{\mu_1}(k_1) \dots \tilde{\Psi}(q_1) \dots \tilde{\Psi}(p_1) \dots\} | \Omega \rangle \\ + i \sum_j \langle \Omega | T\{\tilde{A}_{\mu_1}(k_1) \dots \tilde{A}_{\mu_{j-1}}(k_{j-1}) \tilde{A}_{\mu_{j+1}}(k_{j+1}) \dots \tilde{\Psi}(q_1) \dots \tilde{\Psi}(p_1) \dots\} | \Omega \rangle \delta^4(x - x_j) \end{aligned} \quad (6.51)$$

对上式做 Fourier 变换, 得到:

$$\begin{aligned} -Z_3 \left(k^2 \eta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k_\mu k_\nu \right) \langle \Omega | T\{A^\nu(k) A_{\mu_1}(k_1) \dots \Psi(q_1) \dots \bar{\Psi}(p_1) \dots\} | \Omega \rangle \\ = Z_1 \langle \Omega | T\{J_\mu(k) A_{\mu_1}(k_1) \dots \Psi(q_1) \dots \bar{\Psi}(p_1) \dots\} | \Omega \rangle \\ + i \sum_j \langle \Omega | T\{\tilde{A}_{\mu_1}(k_1) \dots \tilde{A}_{\mu_{j-1}}(k_{j-1}) \tilde{A}_{\mu_{j+1}}(k_{j+1}) \dots \tilde{\Psi}(q_1) \dots \tilde{\Psi}(p_1) \dots\} | \Omega \rangle (2\pi)^4 \delta^4(k_j + k) \delta_{\mu, \mu_j} \end{aligned} \quad (6.52)$$

这个式子中的 $k^2 \eta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k_\mu k_\nu$ 事实上就是光子自由传播子的逆。于是在 Feynman 图的层面上, 上式就意味着流关联函数和截取光子自由传播子的光子关联函数相差一个接触项。将上式和矢量 k 缩并。缩并后, 前面和 $k^2 \eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu$ 相关的部分就消失掉了, 剩下 $\frac{Z_3}{\xi} k_\mu k_\nu$ 的一项, 当我们取上一章中所使用的 R_{Z_3} 规范时, 这一项前面的因子就是 1。在右手边应用 Ward-Takahashi 恒等式, 于是在 R_{Z_3} 规范下就有:

$$\begin{aligned} -k^2 k_\mu \langle \Omega | T\{A^\nu(k) A_{\mu_1}(k_1) \dots \Psi(q_1) \dots \bar{\Psi}(p_1) \dots\} | \Omega \rangle \\ = i Z_1 Z_2^{-1} q \left(- \sum_i \langle \Omega | T\{\tilde{A}_{\mu_1}(k_1) \dots \tilde{\Psi}(q_1) \dots \tilde{\Psi}(q_i - k) \dots \tilde{\Psi}(p_1) \dots\} | \Omega \rangle \right. \\ \left. + \sum_j \langle \Omega | T\{\tilde{A}_{\mu_1}(k_1) \dots \tilde{\Psi}(q_1) \dots \tilde{\Psi}(p_1) \dots \tilde{\Psi}(p_i + k) \dots\} | \Omega \rangle \right) \\ + i \sum_j k_{\mu_j} \langle \Omega | T\{\tilde{A}_{\mu_1}(k_1) \dots \tilde{A}_{\mu_{j-1}}(k_{j-1}) \tilde{A}_{\mu_{j+1}}(k_{j+1}) \dots \tilde{\Psi}(q_1) \dots \tilde{\Psi}(p_1) \dots\} | \Omega \rangle (2\pi)^4 \delta^4(k_j + k) \delta_{\mu, \mu_j} \end{aligned} \quad (6.53)$$

这就是用光子关联函数写出的旋量 QED 中的 Ward-Takahashi 恒等式。

Ward Identity

下面我们讨论 Ward-Takahashi 恒等式的最重要的应用, 也是规范对称性最重要的应用: Ward 恒等式。首先讨论 Feynman 振幅的 Ward 恒等式: 对于一个含光子外线的 Feynman 振幅 $\mathcal{M} = \varepsilon_\mu \mathcal{M}^\mu$ 而言, 有 $k_\mu \mathcal{M}^\mu = 0$ 。

接下来就来证明这个等式。从旋量场、光子场的 LSZ 约化公式中可知, 含有光子外线的 Feynman 振幅是:

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle &= \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta(k_{\text{in}} - k_{\text{out}}) i \mathcal{M}_{fi} \\ &= i^n \varepsilon^{\mu_1}(k_1) \dots \int d^4 x_1 \dots e^{ik_1 x_1} \dots \left(-\partial_1^2 \eta_{\mu_1, \nu_1} + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_{1, \mu_1} \partial_{1, \nu_1} \right) \dots \langle \Omega | T\{A_{\nu_1}(x_1) \dots A_{\nu_n}(x_n) \dots\} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (6.54)$$

Schwinger-Dyson 方程告诉我们，截去外线的光子关联函数和流关联函数只相差一些接触项。对于 Feynman 振幅而言，由于接触项不具有正确的极点结构，从而它对 S-矩阵没有贡献。从而就有：

$$\langle f|S|i\rangle = i^n Z_3^{-n} \dots \varepsilon^{\mu_1}(k_1) \dots \int d^4x_1 \dots e^{ik_1 x_1} \dots \langle \Omega | T\{ J_{\mu_1}(x_1) \dots J_{\mu_n}(x_n) \dots \} | \Omega \rangle \quad (6.55)$$

于是¹⁰：

$$\frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{\text{in}} - k_{\text{out}}) i k_\mu \mathcal{M}^\mu}{(\not{p}_1 + m_{\text{ph}}) \dots (\not{p}_1 + m_{\text{ph}}) \dots k^2 k_1^2 \dots} = i k_\mu \langle \Omega | T\{ \tilde{J}_\mu(k) \tilde{\Psi}_{m_1}(q_1) \dots \tilde{\Psi}_{n_1}(p_1) \dots \tilde{A}_{\nu_1}(k'_1) \dots \} | \Omega \rangle \quad (6.56)$$

利用 Ward-Takahashi 恒等式，就得到：

$$\begin{aligned} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{\text{in}} - k_{\text{out}}) i k_\mu \mathcal{M}^\mu}{(\not{p}_1 + m_{\text{ph}}) \dots (\not{p}_1 + m_{\text{ph}}) \dots k^2 k_1^2 \dots} &= \sum_i q \langle \Omega | T\{ \tilde{\Psi}(q_1) \dots \tilde{\Psi}(q_i - k) \dots \tilde{\Psi}(p_1) \dots \tilde{A}_{\nu_1}(k'_1) \dots \} | \Omega \rangle \\ &\quad - \sum_j q \langle \Omega | T\{ \tilde{\Psi}(q_1) \dots \tilde{\Psi}(p_1) \dots \tilde{\Psi}(p_j + k) \dots \tilde{A}_{\nu_1}(k'_1) \dots \} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (6.57)$$

对于等式右边的项，变量 p_i, q_j 中的极点从 $\not{p}_i = -m_{\text{ph}}$ 处偏移到了 $\not{p}_i + \not{k} = -m_{\text{ph}}$ ，从而当 $k \neq 0$ 时，这些项在 $\not{p}_i = -m_{\text{ph}}$ 处是非奇异的，从而不贡献 S-矩阵。说的直观一些，就是在这些项中总会有一个外线 off shell，也就不对应物理的散射过程。于是等式右边对这个多变量极点没有贡献，留数 $(2\pi)^4 \delta^4(k_{\text{in}} - k_{\text{out}}) i k_\mu \mathcal{M}^\mu$ 就是 0。由于前面的因子不可能为 0，最终得到：

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu = 0 \quad (6.58)$$

这就是 Feynman 振幅的 Ward 恒等式。值得注意的是，在前几章的讨论中，除去 Feynman 振幅的 Ward 恒等式之外，还用过光子自能和四光子正规顶点的 Ward 恒等式 $k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0, k_\mu V^{\mu\nu\sigma\rho} = 0$ 。这些恒等式是局域规范不变性的推论而非整体规范不变性的推论，从而它们是无法从 Ward-Takahashi 恒等式中得出的。在下一节中，我们会详细的讨论局域规范不变性在旋量 QED 中的作用。

Z1=Z2

由于一个经典对称性不一定是一个量子对称性，并且一个量子对称性也不一定是一个经典对称性，从而我们并不能通过要求量子理论在规范变换下不变来得出经典 Lagrangian 也在相应的变换下不变，从而在第五章中利用 Lagrangian 的经典对称性证明 $Z_1 = Z_2$ 的过程实际上是不严格的。利用 Ward-Takahashi 恒等式，我们可以给 $Z_1 = Z_2$ 一个严格的、直到任意阶微扰的证明。

考虑 Ward-Takahashi 恒等式的一个特殊情况：

$$ik^2 k_\mu \langle \Omega | T\{ A^\nu(k) \Psi(q) \bar{\Psi}(p) \} | \Omega \rangle = Z_1 Z_2^{-1} q \left(-\langle \Omega | T\{ \tilde{\Psi}(q - k) \tilde{\Psi}(p) \} | \Omega \rangle + \langle \Omega | T\{ \tilde{\Psi}(q) \tilde{\Psi}(p + k) \} | \Omega \rangle \right) \quad (6.59)$$

利用 Feynman 图来计算两侧。对于左边，它对应一个截去光子自由传播子¹¹的、含有一个光子外线和两个箭头方向不同的费米子外线的 Feynman 图之和。

¹⁰除此之外，还有一些外线因子没有写出。它们的存在对这里的讨论没有影响。

¹¹为了和上一章中的结论保持一致，虽然整体的处理是在 R_{Z_3} 规范下做的，但当涉及到 Feynman 图时，我们使用的自由传播子都是 Feynman 规范下的。这里就相当于用 ik^2 截去了 Feynman 规范下的自由传播子。

(这里有个 Feynman 图)

利用正规传播子和正规顶点, 可以将其写为:

$$\begin{aligned} ik^2 k_\mu \langle \Omega | T\{A^\nu(k) \Psi(q) \bar{\Psi}(p)\} | \Omega \rangle \\ = k^\mu (2\pi)^4 \delta^4(k+p-q) (\delta_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\rho}(k) \Delta_\nu^\rho(k) + \dots) \left(\frac{1}{i} S(q) \right) (iV^\nu(p, q, k)) \left(\frac{1}{i} S(p) \right) \end{aligned} \quad (6.60)$$

局域规范不变性告诉我们 $k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$, 于是那个自能的级数中除去第一项之外全部都是 0:

$$ik^2 k_\mu \langle \Omega | T\{A^\nu(k) \Psi(q) \bar{\Psi}(p)\} | \Omega \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k+p-q) k_\mu S(q) V^\mu(p, q, k) S(p) \quad (6.61)$$

对于右边的 $\langle \Omega | T\{\tilde{\Psi}(q) \tilde{\bar{\Psi}}(p)\} | \Omega \rangle$, 这就是电子的两点函数:

$$\langle \Omega | T\{\tilde{\Psi}(q) \tilde{\bar{\Psi}}(p)\} | \Omega \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p-q) S(p) \quad (6.62)$$

将这些结果代入 Ward-Takahashi 恒等式, 我们就得到了以下的恒等式:

$$k_\mu V^\mu(p, q, k) = Z_1 Z_2^{-1} q [S^{-1}(q) - S^{-1}(p)] \quad (6.63)$$

我们的目标是证明 $Z_1 = Z_2$ 。不过由于在不同的重整化方案下 Z_1, Z_2 的定义也是不同的, 于是只能在某个特定的重整化方案下证明 $Z_1 = Z_2$ 。让我们考虑 OS 方案。有了上面的恒等式, 为了证明 $Z_1 = Z_2$, 就只需要证明存在一个特殊情况, 此时 $k_\mu V^\mu(p, q, k) = q [S^{-1}(q) - S^{-1}(p)]$ 。

在 OS 方案下, 我们给正规顶点的重整化条件是 $V^\mu(p, q, k)|_{p, q, k \text{ on shell}} = q \gamma^\mu$, 并且根据电子传播子的 Lehmann-Kallen 谱分解, 当 p on shell 时, 就有 $S^{-1}(p) = \not{p} + m$ 。于是当 p, q 和 k 都 on shell 的时候, 就有:

$$\not{k} = Z_1 Z_2^{-1} (\not{q} - \not{p}) = Z_1 Z_2^{-1} \not{k} \quad (6.64)$$

这也就蕴含了 $Z_1 = Z_2$ 。直到此处, 我们就完成了对 OS 方案下 $Z_1 = Z_2$ 的直到任意阶微扰的证明。

最后, 这里还有一个值得说一下的地方: 如果这里不采用 R_{Z_3} 规范, 而采用 Feynman 规范的话, 那么 Ward 恒等式前面会有一个因子 Z_3 , 它似乎会造成这个恒等式的左侧出现因子 Z_3 。不过在 Feynman 规范下, 抵消项顶点是 $-i(Z_3 - 1)k^2 \eta_{\mu\nu}$, 从而自能除去 $k^2 \eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu$ 部分之外, 还会有一个发散未消去的 $k_\mu k_\nu$ 部分, 这使得正规传播子的纵向部分也会获得一个因子。综合考虑这个因子和自能的纵向部分后, Feynman 规范下的级数 $\delta_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\rho}(k) \Delta_\nu^\rho(k) + \dots$ 刚好和 R_{Z_3} 规范下相差了 Z_3 倍。这消去了左手边的因子 Z_3 。这些讨论也可以延伸到任何的 R_ξ 规范下, 从而这个对 $Z_1 = Z_2$ 的证明对任何 R_ξ 规范都是成立的。

6.4 Local Gauge Invariance in Spinor QED

上一节中所讨论的 Ward-Takahashi 恒等式是旋量 QED 具有整体 $U(1)$ 规范不变性的推论。而旋量 QED 不仅仅具有整体 $U(1)$ 规范不变性, 还有局域的 $U(1)$ 规范不变性。这一节的目标就是讨论这个局域 $U(1)$ 规范不变性给理论带来了什么。

首先, 局域规范不变性不对应守恒流, 于是也就没有与之对应的 Ward 恒等式。故我们只能从最基本的生成泛函出发¹²:

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \times \exp \left[i \int d^4x \left(\bar{\Psi} (iZ_2 \not{D} - Z_m m) \Psi - \frac{Z_3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{Z_3}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + J_\mu A^\mu + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta \right) \right] \quad (6.65)$$

在无穷小局域规范变换下, 有:

$$\delta\Psi = -iq\Gamma(x)\Psi(x), \quad \delta\bar{\Psi} = iq\Gamma(x)\bar{\Psi}(x), \quad \delta A_\mu(x) = -\partial_\mu\Gamma(x) \quad (6.66)$$

按照我们的惯常操作, 对生成泛函做一个积分变量名的替换:

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}(A + \delta A) \mathcal{D}(\Psi + \delta\Psi) \mathcal{D}(\bar{\Psi} + \delta\bar{\Psi}) \times \exp \left[i \int d^4x \left(\bar{\Psi} (iZ_2 \not{D} - Z_m m) \Psi - \frac{Z_3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{Z_3}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + J_\mu A^\mu + \bar{\Psi}\eta + \bar{\eta}\Psi \right) \right] \times \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{Z_3}{\xi} \partial_\mu A^\mu \partial^2 \Gamma - J_\mu \partial^\mu \Gamma - iq\Gamma(x)\bar{\eta}\Psi + iq\Gamma(x)\bar{\Psi}\eta \right) \right] \quad (6.67)$$

在本章第一节中已经证明过了, 局域规范变换保持泛函积分测度不变。并且由于 $\Gamma(x)$ 是无穷小的, 我们可以将第二个指数展开, 得到:

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{i(S + \int JA + \int \bar{\eta}\Psi + \int \bar{\Psi}\eta)} \int d^4x \left(\frac{Z_3}{\xi} \partial_\mu \partial^2 A^\mu + \partial_\mu J^\mu - iq\bar{\eta}\Psi + iq\bar{\Psi}\eta \right) \Gamma(x) = 0 \quad (6.68)$$

由于函数 $\Gamma(x)$ 的选取是任意的, 于是:

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{i(S + \int JA + \int \bar{\eta}\Psi + \int \bar{\Psi}\eta)} \left(\frac{Z_3}{\xi} \partial_\mu \partial^2 A^\mu + \partial_\mu J^\mu - iq\bar{\eta}\Psi + iq\bar{\Psi}\eta \right) = 0 \quad (6.69)$$

这也就等价于:

$$\left(\frac{Z_3}{\xi} \partial_\mu \partial^2 \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} + \partial_\mu J^\mu - q\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} + q\eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) Z[J, \eta, \bar{\eta}] = 0 \quad (6.70)$$

选用熟悉的 Z_3 规范, 就可以将第一项前面的那个因子扔掉了。并且利用关系 $Z = \exp iW$, 就得到:

$$\partial_\mu \partial^2 \frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)} + \partial_\mu J^\mu - iq\bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} + iq\eta \frac{\delta W}{\delta \eta} = 0 \quad (6.71)$$

对这个式子做一些泛函导数后, 已经可以给出一些关联函数之间的关系了。不过这里可以更进一步, 将 W 做一个 Legendre 变换, 这样可以给出正规传播子、正规顶点之间的关系。由于:

$$\Gamma[A, \Psi, \bar{\Psi}] = W[J, \eta, \bar{\eta}] - \int d^4x (J_\mu A^\mu + \bar{\Psi}\eta + \bar{\eta}\Psi) \quad (6.72)$$

¹²这里已经利用了这一页中新鲜出炉的结论: $Z_1 = Z_2$ 。

这里在记号上偷了个懒：上式中的源 $J, \eta, \bar{\eta}$ 是使得场真空期待值是 Γ 宗量 $A, \Psi, \bar{\Psi}$ 的源，在我们之前的记号中就是 J_ϕ 。也就是说¹³：

$$\frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)} = A_\mu(x), \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} = \Psi(x), \quad \frac{\delta W}{\delta \eta(x)} = -\bar{\Psi}(x) \quad (6.73)$$

于是，就有：

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} &= \frac{\delta W}{\delta A_\mu(x)} - J^\mu(x) - \int d^4x' \left(\frac{\delta J_v(x')}{\delta A_\mu(x)} A^v(x') + \bar{\Psi}(x') \frac{\delta \eta(x')}{\delta A_\mu(x)} + \frac{\delta \bar{\eta}(x')}{\delta A_\mu(x)} \Psi(x') \right) \\ &= \int d^4x' \left(\frac{\delta J_v(x')}{\delta A_\mu(x)} \frac{\delta W}{\delta J_v(x')} + \frac{\delta \eta(x')}{\delta A_\mu(x)} \frac{\delta W}{\delta \eta(x')} + \frac{\delta \bar{\eta}(x')}{\delta A_\mu(x)} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x')} \right) - J^\mu(x) \\ &- \int d^4x' \left(\frac{\delta J_v(x')}{\delta A_\mu(x)} \frac{\delta W}{\delta J_v(x')} - \frac{\delta W}{\delta \eta(x')} \frac{\delta \eta(x')}{\delta A_\mu(x)} + \frac{\delta \bar{\eta}(x')}{\delta A_\mu(x)} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x')} \right) \\ &= -J^\mu(x) \end{aligned} \quad (6.74)$$

按照同样的步骤，可以得到：

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} = -J^\mu(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \Psi(x)} = \bar{\eta}(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Psi}(x)} = -\eta(x) \quad (6.75)$$

局域规范不变性中得到的方程对任何源都成立，如果将这些源取做使得场真空期待值是 Γ 宗量 $A, \Psi, \bar{\Psi}$ 的源，就可以将其改写为：

$$\partial_\mu \partial^2 A^\mu(x) - \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} - iq \frac{\delta \Gamma}{\delta \Psi(x)} \Psi(x) + iq \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Psi}(x)} \bar{\Psi}(x) = 0 \quad (*) \quad (6.76)$$

这就是我们想要的结果。通过对 (*) 式求泛函导数，就可以给出局域规范不变性给正规顶点和正规传播子的限制。首先分别对 $\Psi, \bar{\Psi}$ 求两次泛函导数，在此之后令 $A = \Psi = \bar{\Psi} = 0$ ，就可以得出¹⁴：

$$\partial_{x,\mu} \frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta \bar{\Psi}(z) \delta \Psi(y) \delta A_\mu(x)} = iq \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{\Psi}(z) \delta \Psi(x)} \delta^4(x-y) - iq \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{\Psi}(x) \delta \Psi(y)} \delta^4(x-z) \quad (6.77)$$

利用正规顶点的定义，就得出（注意 $\Gamma^{(2)} = -\Delta^{-1}$ ，所以会多一个负号。）：

$$\partial_{x,\mu} V^\mu(x, y, z) = -iq \delta^4(x-y) S^{-1}(x-z) + iq \delta^4(x-z) S^{-1}(x-y) \quad (6.78)$$

Fourier 变换到动量空间。回忆在第三章中，动量空间正规顶点的定义是：

$$V^\mu(x, y, z) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+p-q) V^\mu(p, q, k) e^{-ikx} e^{-ipy} e^{iqz} \quad (6.79)$$

于是：

$$k_\mu (2\pi)^4 \delta^4(p+k-q) V^\mu(p, q, k) = q (2\pi)^4 \delta^4(k+p-q) [S^{-1}(q) - S^{-1}(p)] \quad (6.80)$$

¹³这里的所有的导数算子都是左导数算子。

¹⁴这里选择先作用对 Ψ 的泛函导数，后作用 $\bar{\Psi}$ 的泛函导数。需要注意的是两个泛函导数交换、泛函导数跨过费米场都会带来额外的负号。

在上一节中，我们也通过 Ward-Takahashi 恒等式导出过这个关系。由于当时的讨论中已经利用了局域规范不变性带来的 $k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$ ，所以这应该是一个局域规范不变性带来的结论。这里直接利用局域规范不变性证明了它。

下面就来证明局域规范不变性最重要的推论：光子正规顶点和光子自能的 Ward 恒等式 $k_\mu V^{\mu\dots} = 0$ 。这个恒等式保证了旋量 QED 的可重整性。首先对于 n 光子顶点 ($n > 2$) 而言，我们只需要对 (*) 式求 $n-1$ 次光子场的泛函导数，并且令 $A = \Psi = \bar{\Psi} = 0$ 。此时除去第二项之外的项全部消失，只剩下：

$$-\frac{\partial}{\partial x_1^{\mu_1}} \frac{\delta^n \Gamma[0]}{\delta A_{\mu_1}(x_1) \dots \delta A_{\mu_n}(x_n)} = 0 \quad (6.81)$$

Fourier 变换到动量空间，这就蕴含了：

$$k_{1,\mu} V^{\mu_1, \dots, \mu_n}(k_1, \dots, k_n) = 0 \quad (6.82)$$

这就是光子正规顶点的 Ward 恒等式。对于光子自能的 Ward 恒等式而言，这个推导过程稍稍复杂一些。对 (*) 式求一次光子场的泛函导数，令 $A = \Psi = \bar{\Psi} = 0$ ，得到：

$$\partial_\mu \partial^2 \delta^4(x - y) \eta^{\mu\nu} - \partial_\mu \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta A_\mu(x) \delta A_\nu(y)} = 0 \quad (6.83)$$

正规二点函数是负的逆正规传播子。于是：

$$\partial_\mu \partial^2 \delta^4(x - y) \eta^{\mu\nu} + \partial_\mu \Delta^{-1, \mu\nu}(x - y) = 0 \quad (6.84)$$

Fourier 变换到动量空间：

$$-ik^2 k_\mu \eta^{\mu\nu} + ik_\mu \tilde{\Delta}^{-1, \mu\nu}(k) = 0 \quad (6.85)$$

如果自能的形式是 $\Pi^{\mu\nu}(k) = A(k^2)(k^2 \eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) + B(k^2)k^\mu k^\nu$ ，那么光子正规传播子就是：

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(k) = \frac{\eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2}{k^2(1 - A(k^2)) - i\varepsilon} + \frac{k_\mu k_\nu / k^2}{k^2(1 - B(k^2)) - i\varepsilon} \quad (6.86)$$

那么正规传播子的逆就是：

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{-1}(k) = (k^2 \eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) (1 - A(k^2)) + k_\mu k_\nu (1 - B(k^2)) = k^2 \eta_{\mu\nu} - \Pi_{\mu\nu}(k) \quad (6.87)$$

代入上面得到的式子，就最终得到了：

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0 \quad (6.88)$$

这就是光子自能的 Ward 恒等式。¹⁵

¹⁵当然，这里仅仅在 R_{Z_3} 规范下证明了光子自能的 Ward 恒等式。在上一节末尾有提到，如果考虑非 R_{Z_3} 规范，那么光子自能似乎会出现一些纵向部分。利用这套语言，也可以试图验证这一点。如果利用 Feynman 规范，那么局域规范不变性中得到的方程第一项中就含有一个因子 Z_3 。于是：

$$Z_3 \partial_\mu \partial^2 \delta^4(x - y) \eta^{\mu\nu} - \partial_\mu \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta A_\mu(x) \delta A_\nu(y)} = 0 \quad (6.89)$$

从而：

$$-iZ_3 k^2 k_\mu \eta^{\mu\nu} + ik_\mu (k^2 \eta_{\mu\nu} - \Pi_{\mu\nu}(k)) = 0 \quad (6.90)$$

这就说明，在 Feynman 规范下，光子自能的纵向部分是正比于 $(Z_3 - 1)$ 的。这和上一节末尾所期待的结果相同。

6.5 Spontaneous Symmetry Breaking

在接下来的几节中，我们转而考虑另一件事情：在前面的讨论中，通常考虑的量子对称性不仅不变换量子作用量，还不变换真空态。那么存不存在不变换量子作用量，但是变换真空态的对称性呢？答案是存在的。这些对称性被称为**自发破缺的对称性**。

如果在我们利用微扰量子场论分析这个理论时，一定需要选择一个真空态，在这个真空态附近做微扰。由于真空态不具有这个对称性，于是选择真空态的过程会显式地破缺对称性。这个过程就被称为**对称性自发破缺**。在对称性自发破缺前后，也就是选择真空态前后，量子作用量都具有自发破缺的对称性，于是自发破缺的对称性始终是量子体系的对称性，并没有真正的破缺。对称性自发破缺的过程所“破缺”的只不过是显式的对称性，而不是对称性本身。

在量子理论中，体系的对称性对应的对称操作总是和 Hamiltonian 对易的。从而对称操作前后的态应该具有相同的能量。由于自发破缺对称性的对称操作联系不同的真空态，这也就是说，对称性自发破缺总是和真空态的简并联系在一起的。

在前面我们也说过，量子场论中的对称性有两种用法：用来构建理论和用来求解理论。那么在构建理论时，对称性自发破缺有什么用呢？答案是它可以在要求理论具有某个对称性的基础上帮助我们在 Lagrangian 中引入显式上被对称性禁戒的项。这个用法的一个典型例子就是 **Higgs 机制**：在电弱理论中，实验表明传递弱作用的 W Boson 和 Z Boson 具有质量。但是电弱理论是一个规范理论，W 和 Z Boson 是规范场的激发，从而它们的质量项会破坏规范对称性。这个问题解决方案就是在理论中引入规范对称性的自发破缺，从而可以在 Lagrangian 中引入规范场的质量项。在后面的几节中，这个问题还会被详细探讨。

6.5.1 An Example: SSB in ϕ^4 Theory

接下来来看一个对称性自发破缺的例子。考虑以下的理论：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 \quad (6.91)$$

在 $\mu^2 > 0$ 时，这就是熟悉的 ϕ^4 理论，具有 $\phi \rightarrow -\phi$ 的对称性。其“势能” $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4$ 只有一个极小值，就是 $\phi \equiv 0$ 。而在 $\mu^2 < 0$ 时，势 $V(\phi)$ 在 $\phi = \pm\sqrt{\frac{6|\mu^2|}{\lambda}}$ 处为全局最小值，而 $\phi = 0$ 成为一个局域极大值。

这意味着什么呢？我们先给出以下结论：如果不考虑量子修正，那么每一个经典势能最低的场构型都对应着量子理论中的一个真空。在这个真空下，场的真空期望值 $\langle\Omega|\phi|\Omega\rangle$ 就是这个势能最低点对应的场构型。这个结论的正确性会在本节稍后证明。

由于在 $\mu^2 < 0$ 的 ϕ^4 理论中，存在两个全局最小值 $\phi = \pm\sqrt{\frac{6|\mu^2|}{\lambda}}$ ，于是在量子理论中，存在两个不同的真空 $|\Omega_+\rangle, |\Omega_-\rangle$ 。场的真空期待值分别是：

$$\langle\Omega_+|\phi|\Omega_+\rangle = \sqrt{\frac{6|\mu^2|}{\lambda}}, \quad \langle\Omega_-|\phi|\Omega_-\rangle = -\sqrt{\frac{6|\mu^2|}{\lambda}} \quad (6.92)$$

此时，体系具有两个不同的真空。如果定义一个幺正变换 Z ，满足 $Z\phi Z^{-1} = -\phi$ ，那么显然 Z 不改变 Lagrangian，从而体系具有 Z 下的对称性。对于两个真空 $|\Omega_+\rangle, |\Omega_-\rangle$ 而言，由于它们是具有最低能量的唯一的态，并且场的真空期待值满足前述的关系，于是一定有：

$$Z|\Omega_\pm\rangle = |\Omega_\mp\rangle \quad (6.93)$$

从而, 真空不具有 Z 下的对称性, 也就是说 Z 是一个自发破缺的对称性。

对于一个量子场论, 我们唯一会做的处理方法就是微扰论。为了微扰地分析这个体系, 就需要选择一个真空, 并在这个真空附近做微扰。在这里可以选择 $|\Omega_+\rangle$ 为我们所处理的真空。为了保证这个真空附近的微扰论不会“看见”另一个真空, 还需要两个真空满足: 对于任何算符 \mathcal{O} 而言, 都有 $\langle\Omega_+|\mathcal{O}|\Omega_-\rangle = 0$, 这也就意味着在一个真空附近做微扰论时, 另一个真空完全不会出现。如果将这个算符 \mathcal{O} 取做 Hamiltonian, 那么这也就意味着真空之间不存在隧穿效应。

事实上, 如果真空之间存在隧穿效应, 对称性自发破缺本身就不会发生。如果 $\langle\Omega_+|H|\Omega_-\rangle$ 非 0, 事实上 $|\Omega_\pm\rangle$ 就不是真正的能量本征态, 也就不是真正的真空。在 $|\Omega_\pm\rangle$ 张成的空间中对 Hamiltonian 做对角化, 就能发现 $|\Omega_+\rangle \pm |\Omega_-\rangle$ 之一才是真正的真空。从而: 这个体系真正的真空并不破缺 \mathbb{Z}_2 对称性——也就是说, 对称性自发破缺根本不会发生。

在我们选择真空 $|\Omega_+\rangle$ 后, 由于散射理论的成立要求 $\langle\Omega|\phi|\Omega\rangle = 0$, 还需要对场做一个平移¹⁶:

$$\rho(x) := \phi(x) - v \equiv \phi(x) - \sqrt{\frac{6|\mu^2|}{\lambda}} \quad (6.94)$$

做完这些之后, 就可以利用熟悉的方法求解这个理论了。对于场 $\rho(x)$ 而言, 其 Lagrangian 是:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho - \frac{1}{2}\mu^2(\rho+v)^2 - \frac{1}{4!}\lambda(\rho+v)^4 = -\frac{1}{2}\partial^\mu\rho\partial_\mu\rho - \frac{1}{6}\lambda v^2\rho^2 - \frac{1}{3!}\lambda v\rho^3 - \frac{1}{4!}\lambda\rho^4 \quad (6.95)$$

从而我们发现, 除去 ρ^2, ρ^4 耦合之外, 还出现了 ρ^3 这种看起来违背 $\phi \rightarrow -\phi$ 对称性的东西, 看起来就像 $\phi \rightarrow -\phi$ 对称性被破缺了一样。这就是在本节开头所说的: 选择真空态的过程会引入被对称性“禁戒”的耦合, 从而显式破缺 $\phi \rightarrow -\phi$ 的对称性。

Tunneling Between Vacua

前面的讨论指出了: 如果对称性自发破缺能够发散, 那么真空之间不能出现隧穿效应。事实上, 这个“无隧穿”条件只能在无界空间中成立。为了看到这一点, 我们先看看在有界空间中会出现什么问题。考虑一个体积 V 的空间中的、用上面这个 ϕ^4 理论描述的系统。那么在 Schrodinger 绘景中, 真空 $|\Omega_-\rangle$ 和 $|\Omega_+\rangle$ 之间的跃迁振幅就是如下的路径积分:

$$\langle\Omega_+|e^{iHt}|\Omega_-\rangle = \int (\mathcal{D}\phi)_{\phi(0)=-v}^{\phi(t)=v} e^{-S_E} \quad (6.96)$$

其中我们将理论 Wick 转动到了 Euclidean 时空, S_E 就是 Euclidean 场论的作用量。利用路径积分的鞍点近似, 可以计算出:

$$\langle\Omega_+|e^{iHt}|\Omega_-\rangle \approx e^{-S_E} = e^{-V \int_0^t \mathcal{L}_E(\phi_{cl})dt} \quad (6.97)$$

在经典路径上, $\mathcal{L}_E(\phi_{cl})$ 是一个有限值。在有限体积的体系中, V 是一个有限值, 于是跃迁振幅 $\langle\Omega_+|e^{iHt}|\Omega_-\rangle$ 是非 0 的。从而在有界空间中, 对称性自发破缺是不会发生的。只有体系的尺度远大于我们要考虑的尺度, 从而能将体系视作无界空间中的体系时, 这个压低才能被完全忽略为 0 时, 真空之间才能没有隧穿, 对称性自发破缺才能发生。

当然, 上面这个讨论是仅仅局限于这个 ϕ^4 理论的。事实上, 我们可以证明:

¹⁶注意: 由于只有平移之后的场才满足渐进条件, 从而计算的 S -矩阵元都是平移之后的场 ρ 激发的粒子态的 S -矩阵元。从而平移之后的场 ρ 的激发才是被我们观测到的那些粒子!

对于任何无界空间中的理论，都存在一组真空态 $\{|\Omega_n\rangle\}$ ，使得这些真空之间满足：
 对于任何算符 \mathcal{O} 而言，都有 $\langle\Omega_m|\mathcal{O}|\Omega_n\rangle = 0$ 。

为了看到这一点，让我们考虑一个理论，其中所有的简并真空态构成集合 $\{|\Omega_n\rangle\}$ ，并考虑真空态 $|\Omega_m\rangle, |\Omega_m\rangle$ 之间两个任意算符的等时关联函数 $\langle\Omega_m|A(\mathbf{x}, t)B(0, t)|\Omega_n\rangle$ 。在这个关联函数中间插入一组完备基，有：

$$\begin{aligned}
 & \langle\Omega_m|A(\mathbf{x}, t)B(0, t)|\Omega_n\rangle \\
 &= \sum_k \langle\Omega_m|A(\mathbf{x}, t)|\Omega_k\rangle\langle\Omega_k|B(0, t)|\Omega_n\rangle + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \sum_X \langle\Omega_m|A(\mathbf{x}, t)|X_p\rangle\langle X_p|B(0, t)|\Omega_n\rangle \\
 &= \sum_k \langle\Omega_m|A(0, t)|\Omega_k\rangle\langle\Omega_k|B(0, t)|\Omega_n\rangle + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \sum_X e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \langle\Omega_m|A(0, t)|X_p\rangle\langle X_p|B(0, t)|\Omega_n\rangle
 \end{aligned} \tag{6.98}$$

其中在第二个等号处，我们利用了真空的平移不变性。在一个无界空间的理论中，我们总可以取 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ 。此时由于 Riemann-Lebesgue 引理¹⁷，后一项不产生任何贡献。于是：

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \langle\Omega_m|A(\mathbf{x}, t)B(0, t)|\Omega_n\rangle = \sum_k \langle\Omega_m|A(0, t)|\Omega_k\rangle\langle\Omega_k|B(0, t)|\Omega_n\rangle \tag{6.99}$$

类似的讨论也告诉我们：

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \langle\Omega_m|B(0, t)A(\mathbf{x}, t)|\Omega_n\rangle = \sum_k \langle\Omega_m|B(0, t)|\Omega_k\rangle\langle\Omega_k|A(0, t)|\Omega_n\rangle \tag{6.100}$$

由于 (\mathbf{x}, t) 和 $(0, t)$ 的间隔一定是类空的。于是根据微观因果性原理， $[A(\mathbf{x}, t), B(0, t)] = 0$ 。从而上面两式是相等的：

$$\sum_k \langle\Omega_m|A(0, t)|\Omega_k\rangle\langle\Omega_k|B(0, t)|\Omega_n\rangle = \sum_k \langle\Omega_m|B(0, t)|\Omega_k\rangle\langle\Omega_k|A(0, t)|\Omega_n\rangle \tag{6.101}$$

这告诉我们：如果我们将 A 和 B 看成真空态张成的空间中的矩阵，那么这两个矩阵是对易的，从而它们可以同时对角化。并且注意到，这个讨论对任意的 A 和 B 都是有效的，从而对于任意的两个局域算符，它们在这个空间中都可以具有共同本征态。于是：存在一组真空态的基 $\{|\Omega_n\rangle\}$ ，使得在这组基下，任何的局域算符都是对角的。这也就是说：存在一组真空态，使得任何局域算符都不能使这些真空相互转化。从而这就是我们需要寻找的无隧穿的真空。这就完成了这个证明¹⁸¹⁹。

这个结论告诉我们，无界空间中的对称性自发破缺是可以发生的。并且只要理论中存在对称性自发破缺，我们总可以选定一个真空，使得在这个真空附近的微扰论看不见其他的真空。

¹⁷如果你不知道这个，可以简单的理解为：因为指数震荡太快，于是整个积分值为 0。

¹⁸这里的证明仅仅考虑了真空态有限，也就是离散对称性自发破缺的情形。对于连续对称性自发破缺而言，这个命题依然成立，但是其证明需要用到更多泛函分析的技术，在这里就不再给出了。

¹⁹你可能会想：非局域算符怎么办呢？答案是，只要它们能用局域算符构造出来，那么这个命题一样成立。而在量子场论中，一切非局域算符都可以从场算符出发构造出来。

6.5.2 Searching for Vacuum

在上面的讨论中, 为了寻找真空态, 也就是能量最低的场构型, 我们不加证明地直接将场的经典势能求了最小值, 并说这个势能的最小值对应量子体系的真空, 此时的经典场构型就是量子场的真空期待值。下面就来证明这件事情, 并且更深一步的, 讨论量子修正如何对这件事情产生影响。

所有这些事情都可以归结于以下的命题:

量子作用量 $\Gamma[\phi]$ 的全局最大值对应量子体系的真空, 此时的场构型就是场的真空期待值。

为了证明它, 首先回忆在 3.7 节中得到的方程:

$$\left(\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} \right)_{\phi=\langle \Omega | \phi | \Omega \rangle} = 0 \quad (6.102)$$

当时将它诠释为场的经典期望值满足的方程。而在“寻找真空”的意义上, 它已经解决我们的大部分问题了: 这意味着真空的确对应一个量子作用量的极值点, 并且这个极值点的场构型的确是量子场的真空期待值。

更进一步, 还需证明真空不仅仅对应一个极值点, 还应该对应量子作用量全局最大值。证明这一点的思路是: 通过上面的方程, 原则上可以解出所有的极值点对应的场构型 $\phi_0(\mathbf{x})$ ²⁰。对于每一个场构型 ϕ_0 而言, 我们在所有满足 $\langle \Psi | \phi(\mathbf{x}, t) | \Psi \rangle = \phi_0(\mathbf{x})$ 的态中寻找一个能量最低的 $|\Psi\rangle$, 并且求出它的能量。再将所有极值点对应的最低能量进行对比, 得到能量的全局最小值。这个能量最小值对应的 $|\Psi\rangle$ 就是真空。

对于一个极值点对应的场构型 ϕ_0 , 需要寻找的是 $\langle \Psi | H | \Psi \rangle$ 最小, 并且满足约束 $\langle \Psi | \phi(\mathbf{x}) | \Psi \rangle = \phi_0(\mathbf{x})$, $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$ 的态。为了寻找这样的态, 可以利用 Lagrange 乘数法, 转而最小化以下的量²¹:

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle - A \langle \Psi | \Psi \rangle - \int d^3x B(\mathbf{x}) \langle \Psi | \phi(\mathbf{x}) | \Psi \rangle \quad (6.103)$$

最小化这个, 就意味着:

$$H|\Psi\rangle = A|\Psi\rangle + \int d^3x B(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) |\Psi\rangle \quad (6.104)$$

其中 A, B 的选择要满足上面所述的两个约束条件, 从而也依赖于 ϕ_0 。

我们如何找到满足这个方程和约束的态呢? 答案是猜。考虑一个含流 Hamiltonian 的、具有能量 $E[J]$ 的本征态 $|\Psi_J\rangle$:

$$\left(H - \int d^3x J(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \right) |\Psi_J\rangle = E[J] |\Psi_J\rangle \quad (6.105)$$

²⁰这里要求场的真空期望值和时间无关, 是因为我们需要真空具有时间平移对称性。

²¹注意 (在格点的意义上) 对于每一个空间格点, 都有一个场期待值的约束, 从而我们也需要格点数这么多的 Lagrange 乘子来消去这个约束。

可以看到, 如果取 $B = J_0 := J_{\phi_0}$, $A = E[J_{\phi_0}]$ (回顾一下, 这就是使场的真空期待值为 ϕ_0 的 J), 那么 $|\Psi_J\rangle$ 满足上面的所有要求和约束条件。从而是使能量取极值的态²²。

由于真空是体系的能量最低态, 我们就需要考虑量子作用量和能量的关系。为此考虑这样一件事情: 对于有一个时间无关的外源 $J(\mathbf{x})$ 的场论, 其 Hamiltonian 是 $H = H_0 - \int d^3x J(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})$ 。并且在打开流 $J(x)$ 的过程中, 真空演化为一个含流 Hamiltonian 的、具有最低能量 $E[J]$ 的本征态 $|\Psi_J\rangle$ ²³, 那么真空-真空振幅应该就是:

$$\langle \Omega, \infty | \Omega, -\infty \rangle_J = \exp(-iE[J]T) \quad (6.106)$$

而根据定义, 这个真空-真空振幅也就是场的生成泛函 $Z[J] = \exp(iW[J])$ 。于是就有:

$$W[J] = -E[J]T \quad (6.107)$$

回到原本的、无外源的理论。由上面的讨论, 它“可能的真空态”就是 $|\Psi_{J_0}\rangle$ 。并且有:

$$H|\Psi_{J_0}\rangle = \left(E[J] + \int d^3x J(\mathbf{x})\phi_0(\mathbf{x}) \right) |\Psi_{J_0}\rangle = \frac{1}{T} \left(-W[J_0] + \int d^4x J_0(x)\phi_0(x) \right) |\Psi_{J_0}\rangle = -\frac{\Gamma[\phi_0]}{T} |\Psi_{J_0}\rangle \quad (6.108)$$

我们发现, 期待值为场构型 ϕ_0 的态的能量和这个场构型对应的量子作用量仅仅相差一个因子 $-1/T!$ 于是对于从方程 $\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} = 0$ 中得到的所有场构型, 量子作用量最高的也就对应能量的最低点, 从而是真空态。这就证明了这个结论。

量子作用量总可以用场的导数展开:

$$\Gamma[\phi] = - \int d^4x \left(V_{\text{eff}}(\phi) + \frac{1}{2} Z(\phi) \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + \dots \right) \quad (6.109)$$

定义其中不含导数的项 V_{eff} 为**有效势**。我们总是希望真空具有 Poincare 群下的对称性 (也就是说, 自发破缺的对称性总是内部对称性), 从而场的真空期待值也不应该随着时空变化, 而是一个常数 ϕ_0 。此时, $\Gamma[\phi_0]$ 中的所有导数项都是 0, 从而:

$$\Gamma[\phi_0] = -VTV_{\text{eff}}(\phi_0) \quad (6.110)$$

这也极大简化了搜寻真空的过程: 真空就对应有效势的全局最小值。由于在第三章中得出过以下的结论: 在最低阶近似下, 量子作用量就是经典作用量。从而对于一个可以用微扰论处理的理论, 在最低阶近似下, 有效势就是 Lagrangian 中的经典势, 从而经典势的极小值也就对应真空态。这就说明了上面我们的讨论是没有问题的。

Computation of the Effective Potential

在第三章中, 除去量子作用量的最低阶近似之外, 我们还知道了如何将量子作用量计算到单圈阶。于是接下来, 我们就会将 ϕ^4 理论的量子作用量计算到单圈阶, 从而在单圈水平上得到 ϕ^4 理论的有效势。第三章中, 我们利用路径积分的鞍点近似得到了任何理论中单圈阶的量子作用量:

$$\Gamma[\phi_0] = S[\phi_0] + \frac{i}{2} \log \det \left(\frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right)_{\phi_0} \quad (6.111)$$

²²当然会问: 这个为什么是能量取最小值的态呢? 答案是我们的构造中就要求 $E[J]$ 是能量最低的 $E[J]$ 。

²³这件事情由我们在 Hamiltonian 中插入的因子 $(1 - i\varepsilon)$ 保证。由于这个因子的存在, 可以只考虑一个能量最低的本征态。

而对于 ϕ^4 理论, 这就是:

$$\Gamma[\phi_0] = S[\phi_0] + \frac{i}{2} \log \det (i(-\partial^2 + \mu^2 - i\varepsilon))_{\phi_0} \quad (6.112)$$

其中 $\mu^2 = m^2 + \frac{1}{2}\lambda\phi_0^2$ 。从而:

$$\begin{aligned} i\Gamma^{(1)}[\phi_0] &= (\text{Const.}) - \frac{1}{2} \log \det [i(-\partial^2 + \mu^2 - i\varepsilon)] \\ &= (\text{Const.}) - \frac{1}{2} \text{Tr} \log [(-\partial^2 + \mu^2 - i\varepsilon)] \end{aligned} \quad (6.113)$$

这是我们第一次需要计算一个泛函行列式的具体值。在计算之前, 重点解释一下这个行列式的意义是有益的。首先这里的导数算子被看作是一个 \mathbb{R}^4 上的函数空间 $\mathcal{F}(\mathbb{R}^4)$ 上的无穷维矩阵 $D_{xy} = (-\partial^2 + m^2 - i\varepsilon)_{xy}$ ²⁴。而这里的 trace 也是这个矩阵作为一个函数空间上的算符的 trace。并且在这个函数空间上, 两个函数的内积也可以被自然的定义:

$$(f, g) := \int d^4x f(x)g(x) \quad (6.114)$$

有了这个内积结构之后, 这个函数空间的结构实际上和 \mathbb{R}^4 上的单粒子量子力学中的 Hilbert 空间是一致的。于是为了计算这个空间上一个算符的 trace, 我们可以插入一组这个空间上的完备基——“坐标本征基”:

$$\text{Tr} \log [(-\partial^2 + \mu^2 - i\varepsilon)] = \int d^4x \langle x | \log [(-\partial^2 + \mu^2 - i\varepsilon)] | x \rangle \quad (6.115)$$

这里将波算符前面的 i 扔掉了, 因为取 \log 之后这只不过是个常数项, 可以被吸入前面的常数中。利用动量空间, 可以将这个“矩阵”对角化。为此可以插入两组“动量本征基”:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \log [(-\partial^2 + \mu^2 - i\varepsilon)] &= \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \langle x | k \rangle \langle k | \log [(-\partial^2 + \mu^2 - i\varepsilon)] | k' \rangle \langle k' | x \rangle \\ &= \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log [(k^2 + \mu^2 - i\varepsilon)] \end{aligned} \quad (6.116)$$

其中, 在第二个等号处, 我们利用了关系 $\langle k | f(-i\partial) | k' \rangle = f(k) \delta^4(k - k')$ ²⁵。为了计算这个动量积分, 可以先将其 Wick 转动到 Euclidean 空间, 然后做以下的 trick:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log (k^2 + \mu^2 - i\varepsilon) &= i \int \frac{d^4\bar{k}}{(2\pi)^4} \log (\bar{k}^2 + \mu^2) \\ &= -i \frac{\partial}{\partial \alpha} \int \frac{d^4\bar{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\bar{k}^2 + \mu^2)^\alpha} \bigg|_{\alpha=0} \\ &= -i \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} (\mu^2)^{d/2-\alpha} \right) \bigg|_{\alpha=0} \\ &= -i \frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} (\mu^2)^{d/2} = -\frac{i\mu^4}{32\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{3}{2} + \log \left(\frac{4\pi}{\mu^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (6.117)$$

²⁴如果严格来讲的话, 由于场需要满足一些条件 (例如作用量不能发散), 这里的空间其实不是 $\mathcal{F}(\mathbb{R}^4)$, 而是一个更类似于 Rigged Hilbert space 的东西。

²⁵如果你不理解这个, 回忆一下量子力学中的动量算符。它在坐标表象下就是 $\hat{p} = -i\partial$ 。

于是单圈阶的量子作用量就是：

$$i\Gamma^{(1)}[\phi_0] = (\text{Const.}) + i(VT) \left[-\frac{\mu^4}{32\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log \left(\frac{4\pi}{\mu^2} \right) \right) - \frac{1}{2}(Z_m - 1)m^2\phi_0 - \frac{1}{24}(Z_\lambda - 1)\lambda\phi_0^4 \right] \quad (6.118)$$

选择合适的重整化方案，就有：

$$\Gamma^{(1\text{-Loop})}[\phi_0] = \Gamma^{(0)}[\phi_0] + \Gamma^{(1)}[\phi_0] = -(VT) \left[\frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{1}{24}\lambda\phi_0^4 + \frac{\mu^4(\phi_0) \log \mu^2(\phi_0)}{64\pi^2} \right] \quad (6.119)$$

于是，最终计算出的 ϕ^4 理论有效势就是：

$$V_{\text{eff}}^{(1\text{-Loop})}[\phi_0] = \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{1}{24}\lambda\phi_0^4 + \frac{\mu^4(\phi_0) \log \mu^2(\phi_0)}{64\pi^2} \quad (6.120)$$

这是一个著名的结果，被称为 **Coleman-Weinberg 势**。如果我们对这个结果求全局极小值，就可以将对称性自发破缺后场的真空中待值计算到单圈阶。由于经典的极小值并不一定是量子有效势的极小值，于是在有些理论中，树图 Lagrangian 并不会显现出多个简并的真空，但是由于量子效应的影响实际存在着对称性自发破缺。一个这样的理论的例子就是无质量的标量 QED：其经典势只有一个极小值 $\phi = 0$ ，但其单圈 Coleman-Weinberg 势是“墨西哥帽”状的，从而真正的真空对应帽檐中的点而非 $\phi = 0$ 。这种量子修正导致对称性自发破缺的机制被称为 **Coleman-Weinberg 机制**²⁶。

Renormalization of Theories with SSB

讨论到此处，我们已经对存在对称性自发破缺的理论有了基本的认识，不过我们还有一个重要的问题没有解决：正如 ϕ^4 理论在对称性自发破缺后出现了 ϕ^1, ϕ^3 的项，理论在对称性自发破缺后会出现额外的耦合。但是理论中能够吸收无穷大的参数仍然只有 Z_ϕ, Z_m, Z_λ 。那么一个自然的问题就是：这些重整化常数会不会不足以吸收对称性自发破缺后的理论中的发散？答案是否定的。事实上，我们有以下的结论为我们保驾护航：

对称性自发破缺前的理论中的重整化常数可以消去对称性自发破缺后的理论中的所有发散。

为了证明这一结论，我们需要证明一个引理：存在背景场 ϕ_0 时的量子作用量 $\Gamma[\phi, \phi_0]$ 满足 $\Gamma[\phi, \phi_0] = \Gamma[\phi + \phi_0]$ 。考虑存在背景场时的生成泛函：

$$Z[J, \phi_0] = \exp iW[J, \phi_0] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[iS[\phi + \phi_0] + i \int d^4x J_\alpha(x)\phi_\alpha(x) \right] \quad (6.121)$$

对于没有背景场的生成泛函，也可以做一个积分变量名的替换，并且由于平移不改变测度，有：

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp iW[J] = \int \mathcal{D}(\phi + \phi_0) \exp \left[iS[\phi + \phi_0] + i \int d^4x J_\alpha(x)(\phi_\alpha(x) + \phi_{\alpha,0}(x)) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[iS[\phi + \phi_0] + i \int d^4x J_\alpha(x)\phi_\alpha(x) \right] \exp \left[i \int d^4x J_\alpha(x)\phi_{0,\alpha}(x) \right] \end{aligned} \quad (6.122)$$

²⁶顺便说一句，这里的 Weinberg 并不是建立标准模型的那位 Steven Weinberg，而是 Erick Weinberg。

对比这两个式子，就得到：

$$W[J, \phi_0] = W[J] - \int d^4x J_\alpha(x) \phi_{0,\alpha}(x) \quad (6.123)$$

那么对于有效作用量就有：

$$\Gamma[\phi(\phi_0)] = W[J_\phi(\phi_0), \phi_0] - \int d^4x J_\alpha(x) \phi_\alpha(x) = W[J_\phi] - \int d^4x J_\alpha(x) (\phi_\alpha(x) + \phi_{0,\alpha}(x)) \quad (6.124)$$

其中 $J_\phi(\phi_0)$ 是在有背景场的理论中使场真空间待值为 ϕ 的流，它满足：

$$\left. \frac{\delta W[J, \phi_0]}{\delta J_\alpha(x)} \right|_{J=J_\phi(\phi_0)} = \phi_\alpha(x) \quad (6.125)$$

由于有关系 $W[J, \phi_0] = W[J] - \int d^4x J_\alpha(x) \phi_{0,\alpha}(x)$ ，于是：

$$\left. \frac{\delta W[J]}{\delta J_\alpha(x)} \right|_{J=J_\phi(\phi_0)} - \phi_{0,\alpha}(x) = \phi_\alpha(x) \quad (6.126)$$

这告诉我们 $J_{\phi+\phi_0} = J_\phi(\phi_0)$ ，由于后者是在无背景场的理论中使场真空间待值为 $\phi + \phi_0$ 的流。从而：

$$\Gamma[\phi, \phi_0] = W[J_{\phi+\phi_0}] - \int d^4x J_\alpha(x) (\phi_\alpha(x) + \phi_{0,\alpha}(x)) = \Gamma[\phi + \phi_0] \quad (6.127)$$

引理至此得证。从物理意义上，这也是某种“对称性自发破缺不改变有效作用量”。

对于对称性自发破缺前的理论，如果其有效作用量为 $\Gamma[\phi]$ ，那么对称性自发破缺后的场论的有效作用量就是 $\Gamma[\rho, \phi_0]$ 。根据这个结果，就有 $\Gamma[\rho, \phi_0] = \Gamma[\rho + \phi_0] = \Gamma[\phi]$ 。由于对称性自发破缺前的理论中的重整化常数可以完全消去 $\Gamma[\phi]$ 中的所有发散，于是当然可以消去 $\Gamma[\rho, \phi_0]$ 中的所有发散。从而当我们对一个对称性自发破缺的理论中做重整化时，可以先在对称性未破缺的理论中计算出所有的重整化常数，然后再对场做平移。这通常会大大简化我们的计算。

6.6 Spontaneous Breaking of Continuous Symmetries

6.6.1 Goldstone's Theorem

上面举了一个分立对称性自发破缺的例子。当自发破缺的对称性是连续对称性，而不是分立对称性时，会出现一个重要的现象：

Goldstone's Theorem 在一个对称性自发破缺的理论中，对于自发破缺的、连续的量子对称性的每个生成元而言，自发破缺后的理论中都会出现一个无质量、无自旋的粒子。

这个结论就称为 **Goldstone 定理**。这些无质量、无自旋的粒子被称为 **Goldstone Boson**²⁷。我们这一节接下来的任务就是证明 Goldstone 定理。根据上面的讨论，对于一个若干场 ϕ_α 构成的系统，其真空对应有效势 $V_{\text{eff}}(\phi_\alpha)$ 的极小值 $\phi_{0,\alpha}$ 。由于我们希望真空态具有 Poincare 对称性，于是 $\phi_{0,\alpha}$ 是常数。此情况下，平移后的场就是 $\rho_\alpha = \phi_\alpha - \phi_{0,\alpha}$ 。

为了证明存在无质量粒子，首先我们需要知道如何从有效势中得到质量。根据 Lehmann-Kallen 谱表示，一个场激发的粒子的质量就对应其正规传播子的奇异性，也就对应一个逆正规传播子的零点。由于传播子是量子作用量二次项的逆，于是一个质量为 m 的粒子就对应以下矩阵的零本征值：

$$\int d^4x e^{ik(x-y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \rho_\alpha(x) \delta \rho_\beta(y)} \Big|_{\rho=0} \quad (6.128)$$

其中 k 满足 $k^2 = -m^2$ 。由于我们关注的是无质量粒子，于是就可以寻找 $k=0$ 时这个矩阵的零本征值。并且由于真空应该具有平移不变性，我们可以不考虑任何 $\Gamma[\phi]$ 的导数项。根据有效势的定义，寻找矩阵 $\int d^4x \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \rho_\alpha(x) \delta \rho_\beta(y)} \Big|_{\rho=0}$ 的零本征值的问题可以被转化为寻找以下矩阵的零本征值的问题：

$$M_{\alpha\beta} := \left(\frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(\phi)}{\partial \phi_\alpha \partial \phi_\beta} \right)_{\phi=\phi_0} \quad (6.129)$$

我们下面就要证明：对于每一个自发破缺对称性的生成元，矩阵 M 都有一个零本征值。

为了说明这一点，先考虑场在对称群下的无穷小变换。如果对称群的生成元是 $T_{\alpha\beta}^n$ ，那么对于场 ϕ ，由于任意的一个无穷小对称变换可以写为 $\phi'_\alpha = \phi_\alpha + i\varepsilon_n T_{\alpha\beta}^n \phi_\beta$ ，其中 ε_n 是一系列无穷小参数。在任何量子对称性的对称变换下，量子作用量都不变，从而有效势都是不变的。也就是说，有效势满足：

$$\delta V_{\text{eff}}(\phi) = \left(\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \phi_\alpha} \right) i \varepsilon_n T_{\alpha\beta}^n \phi_\beta = 0 \quad (6.130)$$

对这个式子求 $\partial/\partial\phi_\beta$ ，并取 $\phi = \phi_0$ ，就得到了：

$$\varepsilon_n T_{\alpha\beta}^n \left(\frac{\partial V_{\text{eff}}(\phi)}{\partial \phi_\alpha} \right)_{\phi_0} + \varepsilon_n T_{\alpha\gamma}^n \phi_{0,\gamma} M_{\alpha\beta} = 0 \quad (6.131)$$

由于 ϕ_0 对应有效势的极小值，从而第一项是 0。并且由于 ε_n 是我们任意选取的，从而就得到了：

$$\Delta_{n,\alpha}(\phi_0) M_{\alpha\beta} = 0 \quad (6.132)$$

对于未自发破缺的对称性，它们的对称变换保持真空不变，从而它们导致的 ϕ_0 的变换一定满足 $T_{\alpha\gamma}^n \phi_{0,\gamma} = 0$ ，上式不蕴含任何信息。而对于自发破缺的对称性，如果场的确具有一个非零的真空期望值 ϕ_0 ，那么对应的对称变换一定变换体系的真空态，于是对于每一个自发破缺对称性的生成元，都有 $T_{\alpha\gamma}^n \phi_{0,\gamma} \neq 0$ ，那么 $\Delta_{n,\alpha}(\phi_0)$ 就是矩阵 M 的一个具有零本征值的本征向量。并且由于生成元的定义，自发破缺对称性的每个生成元 T^n 给出的

²⁷注意我在这里强调了量子对称性。对于一个反常的对称性而言，如果它被自发破缺了，在 Lagrangian 层面上的确会出现一个没有质量项的场，但是这个场会被量子修正所赋予物理质量，从而它也就不再是 Goldstone 场。

$T_{\alpha\gamma}^n \phi_{0,\gamma}$ 都是线性无关的，于是对于每个自发破缺对称性的生成元，我们都能找到矩阵 M 的一个零本征值。

不过直到此处，我们仅仅证明了 Goldstone 粒子无质量，还没有证明 Goldstone 粒子没有自旋。不过要证明 Goldstone 粒子没有自旋相当简单：由于我们在讨论对称性自发破缺时，Lorentz 对称性总是未破缺的²⁸。并且由于一个场的真空期待值一定是一个固定的值，不在任何 Lorentz 变换下改变，于是场的真空期待值就一定是一个 Lorentz 标量。从而也就只有标量场能够获得真空期待值。这也就是说，我们上面所讨论的场 ρ_α 就一定是 0 自旋的。由于 Goldstone 场只可能是这些 0 自旋场的函数，它也应该是 0 自旋的。这就完成了 Goldstone 定理的证明。

从势能的图像上看，Goldstone 定理有一个十分明确的几何意义。接下来用一个例子来说明这个几何意义，考虑以下的理论，忽略量子修正：

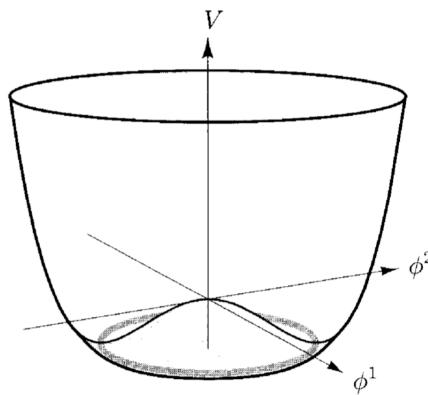
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1\phi_1 + \phi_2\phi_2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1\phi_1 + \phi_2\phi_2)^2 \quad (6.133)$$

其中 ϕ_1, ϕ_2 是两个实标量场。对于这个理论而言，任何保持 $\phi_1\phi_1 + \phi_2\phi_2$ 不变的变换都不改变其 Lagrangian，从而这个理论的对称群是 $O(2)$ 。在 $\mu^2 < 0$ 的情形中， $\phi_1 = \phi_2 = 0$ 不再是势能的极小值，而 $\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 \equiv |\mu^2|/\lambda$ 的任何场构型都对应一个势能的全局最小值。根据在这一节先前给出的结论，这就对应体系有无穷多个简并的真空 $|\Omega_\theta\rangle$ ，满足 $\langle\Omega_\theta|\phi_1|\Omega_\theta\rangle = v \sin \theta, \langle\Omega_\theta|\phi_2|\Omega_\theta\rangle = v \cos \theta$ ，这些真空可以通过 $O(2)$ 变换联系起来。于是在 $\mu^2 < 0$ 的情形中， $O(2)$ 对称性是自发破缺的。

选择真空为 $|\Omega_{\theta=0}\rangle$ ，并且定义 $\phi_1(x) = \pi(x), \phi_2 = v + \sigma(x)$ 。那么对称性自发破缺后，Lagrangian 就变为：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\pi\partial^\mu\pi - \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - |\mu^2|\sigma^2 - \sqrt{\lambda|\mu^2|}(\sigma^3 + \pi^2\sigma) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^4 + \pi^4 + 2\pi^2\sigma^2) \quad (6.134)$$

可以看到，正如 Goldstone 定理所预料的，在对称性自发破缺后，的确出现了一个无质量的玻色场 π 。在这个理论中，势能是：



选取真空为 $|\Omega_{\theta=0}\rangle$ ，就相当于选择了势能低谷中 ϕ_2 方向的那个点为真空。此时，对于径向，势能的二阶导数是正的，对应一个有质量的场。而对于角向，势能曲线是平的，从而这个方向对应的场是无质量的，也就对应 Goldstone 玻色子。

²⁸ 经过某些尝试，可能可以构造出一些模型，在这些模型中能量最低的场构型是某种类似孤子的局域场构型。此时 Lorentz 对称性就会自发破缺（具体可不可以构造出这样的模型我并不了解）。不过在我们考虑的范围内，这种事情基本不会发生。

这就是 Goldstone 定理的几何意义：在势能曲面上，如果我们选取了一个真空态 $|\Omega\rangle$ ，那么对于任何自发破缺对称性的生成元，它都给出对称群的一个单参子群。 $|\Omega\rangle$ 在这个单参子群下的轨道中所有的态都是真空态，这些真空态具有同样的势能。从而在这个轨道对应的方向上，势能曲线是平的，从而这个方向上的激发就是无质量的。

6.6.2 Operators and Broken Continuous Symmetries

在前面的讨论中，我们仅仅局限在了场的真空期望值破缺对称性的情形。在前面对 Goldstone 定理的证明中，我们也要求了 ϕ_0 不为 0，这样对于自发破缺的对称性而言， $T_{\alpha\beta}^n\phi_{0,\beta}$ 才不为 0。但事实上，当理论中不存在任何可以获得 VEV 的标量场时，对称性自发破缺仍然有可能发生，并且此时所有场的真空期待值都是 0。对于这样的理论，我们该如何知道理论中存不存在对称性自发破缺呢？如果存在对称性自发破缺的话，Goldstone 定理还是否成立呢？

首先回答第一个问题：即便场不可能获得真空期待值，理论中其他的 Lorentz 标量算符也是可能获得真空期待值的。我们可以考察这些标量算符的真空期待值来判断理论中是否存在对称性自发破缺。具体而言，就是：

如果一个在对称群下处于非平凡表示的算符 \mathcal{O} 获得了非零的真空期待值，那么该对称性是自发破缺的。

利用反证法来证明这一结论。首先令这个对称群在 Hilbert 空间上的生成元是 Q ，那么如果这一对称性不是自发破缺的，那么对称变换总是保持真空不变的，从而有 $Q|\Omega\rangle = 0$ 。我们只需要证明：如果对称性不是自发破缺的，那么一个在对称群下处于非平凡表示的算符 \mathcal{O} 一定没有真空期待值，就证明了这一结论。

为此，考虑一系列处于表示 R 的算符 \mathcal{O}_n ，它们在对称群下的变换关系是：

$$\delta\mathcal{O}_n = i\varepsilon[Q, \mathcal{O}_n] = i\varepsilon T_{nm}\mathcal{O}_m \quad (6.135)$$

其中 T_{nm} 是表示 R 中对称群的生成元。如果真空不破缺对称性，那么就有：

$$0 = \langle\Omega|[Q, \mathcal{O}_n]|\Omega\rangle = T_{nm}\langle\Omega|\mathcal{O}_m|\Omega\rangle \quad (6.136)$$

如果 R 并不是平凡表示，那么 T 就不是 0 矩阵。由于这一关系对任何的 n 都成立，于是也就蕴含着 $\langle\Omega|\mathcal{O}_m|\Omega\rangle = 0$ 。从而如果一个处于非平凡表示的算符满足 $\langle\Omega|\mathcal{O}|\Omega\rangle = 0$ ，那么一定有 $Q|\Omega\rangle \neq 0$ ——理论中存在对称性自发破缺。

作为例子，让我们考虑存在 N 个自由 Dirac 场 q_i 的理论，其 Lagrangian 为：

$$\mathcal{L} = \bar{q}_i(i\cancel{\partial})q_i \quad (6.137)$$

那么，这个理论的 Lagrangian 在以下的 $U(N)_L \times U(N)_R$ 变换下是不变的²⁹：

$$q_{L,i} \rightarrow (U_L)_i^j q_{L,j}, \quad q_{R,i} \rightarrow (U_R)_i^j q_{R,j} \quad (6.138)$$

²⁹这是一个么正变换，理论中也没有要保留的其他对称性能够破坏这个变换的么正性，于是这个对称性也不反常。

这被称为手征对称性。当 Lorentz 标量算符 $\bar{q}_i q_j$ 具有一个非零的真空期待值 $\langle \Omega | \bar{q}_i q_j | \Omega \rangle = v_{ij}$ 时, 由于 $\bar{q}_i q_j$ 仅仅在 $U_L = U_R$ 的变换下不变, 于是 $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ 的对称性就会被自发破缺到 $U_L = U_R$ 的子群 $U(N)_V$ 。这个破缺手征对称性的机制被称为费米子凝聚, 我们在第七、八章中讨论强耦合 QCD 时还会遇到这些东西。

Another Proof of Goldstone's Theorem

既然这样的理论中可能出现对称性自发破缺, 那么紧接着要考虑的就是: Goldstone 定理在这个情形下是否成立? 答案是肯定的。不过由于前面的证明只在场的真空期待值不为 0 时成立, 于是为了证明这个情形下仍然存在对称性自发破缺, 就需要从另外一个角度出发证明 Goldstone 定理³⁰。事实上, 我们将证明的是: 如果理论中包含一个处于对称群的非平庸表示, 并且具有非零真空期待值的算符, 那么理论中一定具有一个质量为 0 的、非真空的态——它就对应 Goldstone 粒子。

首先, 令我们考虑的对称性对应 Noether 流 J^μ , 并且考虑一组在对称群下处于表示 R 的算符 \mathcal{O}_n 。为了证明 Goldstone 定理, 考虑关联函数 $\langle \Omega | [J^\mu(y), \mathcal{O}_n(x)] | \Omega \rangle$ 。对于对易子 $[J, \mathcal{O}] = J\mathcal{O} - \mathcal{O}J$ 中的每一项, 我们都可以在其中插入一组完备基:

$$\langle \Omega | J^\mu(y) \mathcal{O}_n(x) | \Omega \rangle = \sum_X \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \langle \Omega | J^\mu(y) | X_p \rangle \langle X_p | \mathcal{O}_n(x) | \Omega \rangle \quad (6.139)$$

于是, 如果我们定义某种谱密度为:

$$\rho_n^\mu(p) = \sum_X \int \frac{d^3 p_X}{(2\pi)^3 2\omega_{p_X}} \langle \Omega | J^\mu(0) | X_{p_X} \rangle \langle X_{p_X} | \mathcal{O}_n(0) | \Omega \rangle \delta^4(p - p_X) \quad (6.140)$$

从而, 就有 $\langle \Omega | J^\mu(y) \mathcal{O}_n(x) | \Omega \rangle = \int d^4 p \rho_n^\mu(p) e^{ip(y-x)}$ 。对后面的 $\langle \mathcal{O}J \rangle$ 项也进行类似的操作, 就可以得到:

$$\langle \Omega | [J^\mu(y), \mathcal{O}_n(x)] | \Omega \rangle = \int d^4 p [\rho_n^\mu(p) e^{ip(y-x)} + \bar{\rho}_n^\mu(p) e^{-ip(y-x)}] \quad (6.141)$$

其中:

$$\bar{\rho}_n^\mu(p) = \sum_X \int \frac{d^3 p_X}{(2\pi)^3 2\omega_{p_X}} \langle \Omega | \mathcal{O}_n(0) | X_{p_X} \rangle \langle X_{p_X} | J^\mu(0) | \Omega \rangle \delta^4(p - p_X) \quad (6.142)$$

有了这个结果之后, 我们来对两个谱函数 $\rho, \bar{\rho}$ 的结构进行一些更加精细的讨论。首先, 由于它们仅仅是由动量 p 构造出的 Lorentz 4-矢量, 于是一定满足 $\rho_n^\mu(p) = p^\mu \rho_n(p^2)$ 。另外, 由于所有多粒子态 $|X\rangle$ 都具有正的能量, 于是 ρ_n 中一定包含一个 step function $\theta(p^0)$ 。也就是说:

$$\rho_n^\mu(p) = p^\mu \rho_n(-p^2) \theta(p^0), \quad \bar{\rho}_n^\mu(p) = p^\mu \bar{\rho}_n(-p^2) \theta(p^0) \quad (6.143)$$

将这些关系代入关联函数 $\langle \Omega | [J^\mu(y), \mathcal{O}_n(x)] | \Omega \rangle$, 就有:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | [J^\mu(y), \mathcal{O}_n(x)] | \Omega \rangle &= \int d^4 p [p^\mu \rho_n(-p^2) \theta(p^0) e^{ip(y-x)} + p^\mu \bar{\rho}_n(-p^2) \theta(p^0) e^{-ip(y-x)}] \\ &= (-i) \frac{\partial}{\partial y_\mu} \int ds [\rho_n(s) \Delta_+(y-x, s) + \bar{\rho}_n(s) \Delta_+(x-y, s)] \end{aligned} \quad (6.144)$$

³⁰这个证明来自于 Weinberg 的第二卷, 19.2 节。

其中：

$$\Delta_+(z, s) := \int d^4 p \theta(p^0) \delta(p^2 + s) e^{ipz} \quad (6.145)$$

在数学上可以证明：如果 z 是类空的，那么 $\Delta_+(z, s)$ 满足 $\Delta_+(z, s) = \Delta_+(-z, s)$ 。当然，从物理中也可以看到这一点：考虑一个自由标量场。经过一些比较简单的计算，就可以得到 $[\phi(x), \phi(y)] = \Delta_+(x - y) - \Delta_+(y - x)$ 。根据微观因果性原理，当 $x - y$ 类空时，这个式子的左手边一定是 0，于是右手边也是 0——这就蕴含 $\Delta_+(z, s) = \Delta_+(-z, s)$ 。于是在这个情形下，有：

$$\langle \Omega | [J^\mu(y), \mathcal{O}_n(x)] | \Omega \rangle = (-i) \frac{\partial}{\partial y_\mu} \int ds [\rho_n(s) + \bar{\rho}_n(s)] \Delta_+(y - x, s) \quad (6.146)$$

微观因果性原理再度告诉我们： $\rho_n(s) = -\bar{\rho}_n(s)$ 。由于这个谱函数仅仅是 s 的函数，于是这个关系是普遍的，不依赖于某个间隔是否类空。另外，由于这个对称性不反常，于是流算符 J^μ 满足 $\partial_\mu J^\mu = 0$ 。这也就告诉我们：

$$\frac{\partial}{\partial y_\mu} \langle \Omega | [J^\mu(y), \mathcal{O}_n(x)] | \Omega \rangle = \langle \Omega | [\partial_\mu J^\mu(y), \mathcal{O}_n(x)] | \Omega \rangle + (\text{contact terms}) = (\text{contact terms}) \quad (6.147)$$

从而：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_\mu} \langle \Omega | [J^\mu(y), \mathcal{O}_n(x)] | \Omega \rangle &= (-i) \partial_y^2 \int ds [\rho_n(s) \Delta_+(y - x, s) + \bar{\rho}_n(s) \Delta_+(x - y, s)] \\ &= (-i) \int ds s \rho_n(s) [\Delta_+(y - x, s) - \Delta_+(x - y, s)] = (\text{contact terms}) \end{aligned} \quad (6.148)$$

其中在第二个等号处，我们不但利用了新鲜出炉的 $\rho_n(s) = -\bar{\rho}_n(s)$ ，还利用了函数 $\Delta_+(z, s)$ 所满足的关系 $\partial^2 \Delta_+(z, s) = s \Delta_+(z, s)$ 。如果我们在这个结果中将 x 和 y 取做任何间隔类时的时空点，那么由于 $x \neq y$ ，接触项便会消失，而由于在 z 类时的情形下 $\Delta_+(z, s) \neq \Delta_+(-z, s)$ ，从而对于任何间隔类时的 x 和 y ，都有：

$$0 = \int ds s \rho_n(s) [\Delta_+(y - x, s) - \Delta_+(x - y, s)] = 0 \quad (6.149)$$

这也就蕴含：

$$s \rho_n(s) = 0 \quad (6.150)$$

从而， $\rho_n(s)$ 只有可能在 $s = 0$ 时才能取非零值，也就是：

$$\rho_n(s) \propto \delta(s) \quad (6.151)$$

另外，如果我们将 x 和 y 的 0 分量取做相等的，并将守恒流的指标 μ 取做 0 分量，那么就有：

$$\begin{aligned} \langle \Omega | [J^0(y, t), \mathcal{O}_n(x, t)] | \Omega \rangle &= 2i \int ds \rho_n(s) \int d^4 p \sqrt{p^2 + s} e^{ip \cdot y - ix} \delta(p^2 + s) \\ &= i(2\pi)^3 \delta^3(y - x) \int ds \rho_n(s) \end{aligned} \quad (6.152)$$

将这个式子两边对 y 积分，就有：

$$\langle \Omega | [Q, \mathcal{O}_n(x)] | \Omega \rangle = i(2\pi)^3 \int ds \rho_n(s) \quad (6.153)$$

其中 Q 是我们所考虑的对称性的生成元。根据我们的假设， \mathcal{O}_n 是一个处于对称群的表示 R 中的算符。如果 R 表示中的生成元是 T_{mn} ，那么就有：

$$T_{mn} \langle \Omega | \mathcal{O}_n(0) | \Omega \rangle = i(2\pi)^3 \int ds \rho_n(s) \quad (6.154)$$

前面的讨论告诉我们：如果我们的理论中存在一个处于对称群的非平凡表示，并且具有真空期待值的算符，那么该对称性一定是自发破缺的。在这个情形下，我们就将 \mathcal{O}_n 取做这个算符，于是这个算符对应的谱函数 $\int ds \rho_n(s)$ 非零。根据谱函数的定义， $\rho(s=0)$ 非零就意味着完备多粒子态 $|X\rangle$ 中存在一个质量为 0 的粒子。换句话说，理论中一定包含一个质量为 0 的粒子态——这也就是 Goldstone 粒子。于是到此为止，我们便完成了在这个情形下对 Goldstone 定理的证明。

6.6.3 The Higgs Mechanism in Scalar QED

上一节中提到了对称性自发破缺可以帮助我们在构建理论时引入被对称性所禁戒的耦合，从而在标准模型中用来引入规范玻色子的质量项。在这一节中，我们就以标量 QED 为例，详细讨论这个质量项是如何被引入的。其基本思路就是：我们的理论中有一个标量场 (**Higgs 场**)，它的存在导致规范对称性自发破缺，产生 Goldstone 粒子。局域规范不变性允许规范 Boson 吃掉了 Goldstone 粒子，获得质量。

我们先从一个复标量场和 $U(1)$ 规范场的耦合开始。如果我们要求一个标量场 $\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi / 2 - V(\phi)$ 具有局域的 $U(1)$ 规范对称性，那么我们可以引入一个规范场，耦合后的 Lagrangian 是：

$$\mathcal{L} = -(D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (6.155)$$

考虑一个模型：如果 $V(\phi)$ 有形式 $V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(\phi^\dagger \phi - \frac{1}{2}v^2)^2$ 。可以轻易地看出，这个 Lagrangian 具有局域的 $U(1)$ 规范对称性。但是从经典场论来看，这个场的基态是 $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}v e^{i\chi(x)}$ 。于是在量子场论中，我们要求理论有一系列基态 $|\chi\rangle$ ，这些基态下场的期待值是：

$$\langle \chi | \phi(x) | \chi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}v e^{i\chi(x)/v} \quad (6.156)$$

我们对场做重新定义，使得有 $\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle = 0$ ，从而 LSZ 约化公式成立，我们可以利用前面讨论的微扰量子场论处理这个体系。为此定义：

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x)) e^{i\chi(x)/v} \quad (6.157)$$

其中 χ, ρ 都是实标量场。那么 Lagrangian 可以写为：

$$-\frac{1}{2} \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho - \frac{1}{2}(v + \rho)^2 \left(\frac{1}{v} \partial_\mu \chi - e A_\mu \right) \left(\frac{1}{v} \partial^\mu \chi - e A^\mu \right) - \frac{1}{4} \lambda v^2 \rho^2 + \frac{1}{4} \lambda v \rho^3 + \frac{1}{16} \lambda \rho^4 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (6.158)$$

可以看到，对于场 ρ 而言，体系不再具有在 $\rho \rightarrow \rho e^{ie\Gamma}$ 下的对称性，也就是说 U(1) 整体规范对称性自发破缺了。并且我们看到， χ 是一个无质量的场，它的激发就是 Goldstone Boson。

对于规范场论而言，我们可以做一个局域的规范变换，使得考虑的基态 $|\chi\rangle$ 下场的期待值变为 $v/\sqrt{2}$ 。也就是说，我们可以通过确定规范来将场 χ 设置为 0。这个规范被称为**幺正规范**。在幺正规范下，Lagrangian 写为：

$$-\frac{1}{2}\partial^\mu\rho\partial_\mu\rho - \frac{1}{2}e^2(v+\rho)^2A^\mu A_\mu - \frac{1}{4}\lambda v^2\rho^2 - \frac{1}{4}\lambda v\rho^3 - \frac{1}{16}\lambda\rho^4 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (6.159)$$

第二项可以被拆为三项：一项 ρAA 的耦合，一项 $\rho^2 AA$ 的耦合，还有一个电磁场的质量项。这也就是说，规范场 A “吃掉” 了 Goldstone 场，并获得了质量 $M = ev$ 。这个使规范场获得质量的机制就被称为 **Higgs 机制**。由于 A_μ 变为了重矢量场，那么我们对它做正则量子化的时候，就不再只有螺旋度为 ± 1 的模式，而变为了自旋 1，磁量子数 $-1, 0, 1$ 的三个模式，也就是说，这里多出了一个物理的自由度。这个自由度来自于 Goldstone Boson。从这个角度看，我们说规范场“吃掉” Goldstone 场后，Goldstone 场变为了矢量场的纵向偏振自由度。

既然规范对称性只是一个冗余的自由度，是非物理的，那么为什么它会变为一个物理的自由度（光子的 0 偏振）呢？这里的重点在于区分整体规范对称性和局域规范对称性。整体规范对称性是一个真实的对称性，在这个对称性下有不同的基态，这些基态可以用一个全局的相位来标记。而局域规范对称性不是一个真实的对称性，而是一个冗余的自由度，它可以认为是在同样的基态上的不同标记，在上面的讨论中，自发破缺的都是整体规范对称性。而局域规范自由度在我们理论中的作用是，它使得规范场可以吃掉这个 Goldstone 场来获得质量。

事实上，规范场在对称性自发破缺后获得质量这件事可以用来解释超导体中的 **Meissner 效应**。在理论上，超导体中的 Cooper 对可以用一个标量场 ϕ 来有效地描述，而如果我们再在理论中加入电磁场，那么这些 Cooper 对的动力学就可以用本节讨论的这个 Lagrangian 所描述。倘若由于标量势的形状，这些 Cooper 对获得了一个真空气望值 $\langle\phi\rangle$ ，那么根据上面的讨论，由于 Cooper 对带有电荷 $2e$ ，那么电磁场将获得一个质量 $m_\gamma = 2ev$ 。从而在这个真空中，恒定电磁场满足的 Maxwell 方程将从 $\nabla^2\mathbf{B} = 0$ 变为以下的 **Proca 方程**：

$$\nabla^2\mathbf{B} = m_\gamma^2\mathbf{B} \quad (6.160)$$

于是如果超导体外有一个沿着 z 方向的恒定磁场 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ ，那么在超导体内部的磁场就是：

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{B}_0 e^{-m_\gamma z} \quad (6.161)$$

也就是说，超导体内部的电磁场是指数衰减的，磁通量无法穿透超导体的深处，这便是 Meissner 效应。而在超导体的表面，磁通量可以有效地穿透 $L = 1/m_\gamma$ 的距离，这个距离就被称为**穿透深度**。

6.7 Axial Current Anomaly in Spinor QED

在 6.1 节中举的两个例子：Lorentz 对称性和 U(1) 规范对称性都是经典对称性没有被量子修正破坏的例子。在这一节中，我们就要考虑与之相反的另一种情况：经典理论中的

对称性被量子修正所破坏，这种现象被称为**量子反常**。接下来就将考虑一个量子反常的例子——旋量 QED 中的**轴矢流反常**³¹。

先来看看经典理论中的轴矢流对称性。考虑一个无质量的旋量 QED，其 Lagrangian 是：

$$\mathcal{L} = iZ_2 \bar{\Psi} \not{D} \Psi - \frac{Z_3}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (6.162)$$

让我们考虑一个全局的**轴 U(1) 变换**： $\Psi \rightarrow e^{-i\beta\gamma_5} \Psi, A \rightarrow A$ 。首先，由于 γ_5 的旋量共轭 $\bar{\gamma}_5 = -\gamma_5$ ，于是对 $e^{-i\beta\gamma_5}$ 做旋量共轭，就得到：

$$\overline{e^{-i\beta\gamma_5}} = e^{-i\beta\gamma_5} \quad (6.163)$$

从而在轴 U(1) 变换下，场如下变换³²：

$$\Psi \rightarrow e^{-i\beta\gamma_5} \Psi, \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} e^{-i\beta\gamma_5} \quad (6.164)$$

由于 $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ ，于是：

$$e^{-i\beta\gamma_5} \gamma^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\beta)^n}{n!} \gamma_5^n \gamma^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\beta)^n}{n!} (-1)^n \gamma^\mu \gamma_5^n = \gamma^\mu e^{i\beta\gamma_5} \quad (6.165)$$

从而 Lagrangian 在这个变换下不变。这个经典对称性被我们称为**轴 U(1) 对称性**。与之对应的守恒流就是**轴矢流**：

$$J_5^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi \quad (6.166)$$

轴 U(1) 对称性是一个经典对称性。但是由于泛函积分测度在轴 U(1) 变换下并非不变的，从而轴 U(1) 对称性不是量子理论的对称性。为了看到这一点，考虑在一个局域的轴 U(1) 变换 $\Psi \rightarrow e^{-i\beta(x)\gamma_5} \Psi, A \rightarrow A$ 下测度 $\mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi}$ 如何变换。由于费米子路径积分在变量代换下的性质，有：

$$\int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{iS[\Psi]} = \int \mathcal{D}\Psi' \mathcal{D}\bar{\Psi}' e^{iS[\Psi']} = \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} (e^{-i\beta\gamma_5})^{-1} (e^{-i\beta\gamma_5})^{-1} e^{iS[\Psi']} \quad (6.167)$$

从而测度的变换就是：

$$\mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \rightarrow (\det e^{2i\beta(x)\gamma_5}) \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \equiv J[\beta, A] \quad (6.168)$$

下面就利用 **Fujikawa 方法** 计算出这个泛函行列式。首先由于 $\det e^A = e^{\text{Tr } A}$ ，于是：

$$\det e^{2i\alpha(x)\gamma_5} = \exp [2i \text{Tr}(\beta(x)\gamma_5)] \quad (6.169)$$

这里的迹的意味值得一些讨论。考虑一个格点上的场论，那么此时泛函积分测度就是 $\prod_i d\Psi(x_i)$ ，积分变换带来的因子也就是 Jacobi 行列式的倒数 $(\det \frac{\partial \Psi'_\alpha(x_i)}{\partial \Psi_\beta(x_j)})^{-1}$ 。这里的 Jacobi

³¹这个反常也叫做**ABJ 反常**和**手征反常**。前一个名字是为了纪念这一反常的发现者——Adler, Bell 和 Jackiw，而后一个名字则是因为 γ_5 和手征性关系紧密。在 8.3 节中会看到：在一个手征规范理论中，就有可能会出现同样的反常。

³²注意到这里的变换不涉及到规范场，于是如果我们将规范场取做没有动力学的背景场（也就是说，在路径积分中不加入规范场对应的测度），那么我们接下来的推导也将成立。

矩阵是同时具有费米场指标和格点指标 i 的矩阵。于是在上式中，我们也应该将 $\beta(x)\gamma_5$ 视为一个矩阵 $\beta(x_i)\delta_{ij}\gamma_5$ 。当我们取连续极限时，它就称为了一个 Dirac 空间和 $L^2(\mathbb{R}^4)$ 的直积空间上的算符³³。于是为了求它的 trace，我们可以插入一组这个空间上的“坐标本征基”，并且对 Dirac 指标求 trace：

$$\begin{aligned}\det e^{2i\beta(x)\gamma_5} &= \exp \left[2i \int d^4x \langle x | \sum_{\alpha} \beta(x)(\gamma_5)_{\alpha\alpha} | x \rangle \right] \\ &= \exp \left[2i \int d^4x \sum_{\alpha} \beta(x) \delta^4(x-x)(\gamma_5)_{\alpha\alpha} \right]\end{aligned}\quad (6.170)$$

写到这里，就会发现我们写下了一些无意义的东西： $\delta(x-x)$ 是无穷大，而 γ_5 的迹是 0，于是这里就包含着一些“无穷大乘以零”。为了计算出这个无穷大乘以 0 究竟是什么，就需要对这个式子做一个正规化。这就又回到了前面一节中看到的那个问题：无论利用什么正规化方法，我们都无法保证规范对称性 $U(1)_V$ 和轴 $U(1)$ 对称性 $U(1)_A$ 这两个对称性同时在量子理论中成立。由于规范对称性对我们的理论至关重要，如果没有这个对称性，体系的可重整性和幺正性都要受到威胁。从而在这个两难抉择下，我们选择了保持 $U(1)_V$ 而舍弃 $U(1)_A$ 。从而在这里，就要选择一个保持 $U(1)_V$ 对称性的正规化方式。

如何选择这样的正规化呢？答案是在计算反常时切换一组 $L^2(\mathbb{R}^4)$ 的基——从“坐标本征基”切换为 Dirac 算符 \mathcal{D} 的本征基。不过为了使这组基有良好的性质，我们希望 Dirac 算符能够是 Hermitian 的。而不幸的是，在 Minkowski 时空中，Gamma 矩阵满足 $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$, $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ ，从而 Gamma 矩阵并非是反 Hermitian 的，Dirac 算符 $\mathcal{D} = (\partial_{\mu} - iqA_{\mu})\gamma^{\mu}$ 也就不是 Hermitian 的。

为了修好这一点，我们可以将理论 Wick 转动到 Euclidean 时空，并定义：

$$x_4 := ix^0, \quad \partial_4 := -i\partial_0, \quad \gamma_4 := i\gamma^0, \quad A_4 := iA^0 \quad (6.171)$$

如果我们将算符 ∂_4 视为 Euclidean 时空上的函数空间 $L^2(\mathbb{R}_E^4)$ 上的算符，那么其 Hermitian 共轭就是 $-\partial_4$ ；并且在 Euclidean 时空中，我们认为规范场的 4 分量是实数。那么在轴规范场 $A_{\mu} = 0$ 的情形下， $\mathcal{D} = (\partial_{\mu} - iA_{\mu})\gamma^{\mu}$ 就是一个 Hermitian 算符。作为一个 Hermitian 算符，它在 $\mathcal{F}(\mathbb{R}_E^4)$ 上一定有以下的正交、归一、完备的本征函数³⁴：

$$\mathcal{D}\phi_m(x) = \lambda_m|\phi_m\rangle, \quad \langle\phi_m|\phi_n\rangle = \delta_{mn}, \quad \sum_m |\phi_m\rangle\langle\phi_m| = 1_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_E^4)} \quad (6.172)$$

用坐标表象写出这些关系，也就是：

$$\int d^4x_E \phi_m^{\dagger}(x) \phi_n(x) = \delta_{mn}, \quad \sum_n \phi_n(y) \phi_n^{\dagger}(x) = \delta_E^4(y-x) \quad (6.173)$$

那么，我们的旋量场作为一个时空的函数，也可以用这些完备的本征函数做展开³⁵：

$$\Psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x), \quad \bar{\Psi} = \sum_n b_n \phi_n^{\dagger}(x) \quad (6.174)$$

³³ 你可能会问：为什么是 $L^2(\mathbb{R}^4)$ 而不是 \mathbb{R}^4 上所有函数组成的空间？这是由于：如果场是平方不可积的，那么其对应的作用量便是无穷大，对路径积分没有贡献。于是我们只需要考虑 $L^2(\mathbb{R}^4)$ 中的场。这样一来，作用在场空间上的算符自然是 $L^2(\mathbb{R}^4)$ 上的算符。

³⁴ 时刻记住：这里的 Dirac 符号表示的是 $L^2(\mathbb{R}_E^4)$ 中的函数，而不是量子的 Hilbert 空间中的态！

³⁵ 由于我们想要将旋量场 explicitly 地写成坐标的函数，这里相当于取了一个“坐标表象”。

当然, 由于旋量场是 Grassmann 变量, 而本征函数 $\langle x|\phi_n \rangle$ 是复数, 于是展开系数 a_n 应该是 Grassmann 变量。接下来, 我们就想要将旋量场的泛函测度和这些 a_n 的积分测度 da_n 联系起来。如果将考虑的变量从 $\Psi(x)$ 转化为 a_n , 这实际上就是对这个 Grassmann 积分做了一次变量代换, 这个变量代换矩阵也就是 $\langle x|\phi_n \rangle$ 。于是根据 Grassmann 积分的变量代换关系, 就有:

$$\mathcal{D}\Psi = \prod_x d\Psi(x) = \prod_n da_n (\det \langle x|\phi_n \rangle)^{-1} \quad (6.175)$$

对共轭旋量的积分测度 $\mathcal{D}\bar{\Psi}$ 也做类似的操作, 就可以得到:

$$\mathcal{D}\bar{\Psi} = \prod_n db_n (\det \langle \phi_n|x \rangle)^{-1} \quad (6.176)$$

从而:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} &= \prod_n da_n \prod_m db_m (\det \langle \phi_n|x \rangle)^{-1} (\det \langle x|\phi_m \rangle)^{-1} \\ &= \prod_n da_n \prod_m db_m (\det \langle \phi_n|\phi_m \rangle)^{-1} = \prod_n da_n \prod_m db_m \end{aligned} \quad (6.177)$$

在第三个等号处, 利用了正交性关系 $\langle \phi_m|\phi_n \rangle = \delta_{mn}$, 这导致 $\det \langle \phi_n|\phi_m \rangle = 1$ 。从而在这一组基下, 路径积分就可以写为:

$$\int \prod_n da_n \prod_m db_m e^{-S_E[\Psi, \bar{\Psi}, A]} \quad (6.178)$$

为了在这组基下计算反常, 我们就需要考虑测度 $\prod_n da_n \prod_m db_m$ 在轴 U(1) 变换下的变换性质。根据 Ψ 的变换性质:

$$\sum_n a'_n |\phi_n \rangle = (1 - i\beta(x)\gamma_5) \sum_m a_m |\phi_m \rangle, \quad \sum_n b_n \langle \phi_n | = \sum_n b_n \langle \phi_n | (1 - i\beta(x)\gamma_5) \quad (6.179)$$

根据正交性, 我们就能提取出:

$$a'_n = a_n - i \sum_m \langle \phi_n | \beta(x)\gamma_5 | \phi_m \rangle a_m, \quad b'_n = b_n - i \sum_m b_m \langle \phi_m | \beta(x)\gamma_5 | \phi_n \rangle \quad (6.180)$$

从而在 $A = 0$ 时, 这个积分测度在这个变换下的变换关系就是:

$$\prod_n da'_n \prod_m db'_m = \prod_n da_n \prod_m db_m [\det (1 - i\langle \phi_n | \beta(x)\gamma_5 | \phi_m \rangle)]^{-1} [\det (1 - i\langle \phi_m | \beta(x)\gamma_5 | \phi_n \rangle)]^{-1} \quad (6.181)$$

由于矩阵 γ_5 是 Hermitian 的, 于是 $\langle \phi_m | \gamma_5 | \phi_n \rangle = \langle \phi_n | \gamma_5 | \phi_m \rangle$ 。从而这个 Jacobi 行列式就是³⁶:

$$\begin{aligned} \det e^{2i\beta(x)\gamma_5} &\equiv [\det (1 - 2i\langle \phi_m | \beta(x)\gamma_5 | \phi_n \rangle)]^{-1} = \det (1 + 2i\langle \phi_m | \beta(x)\gamma_5 | \phi_n \rangle) \\ &= \exp \text{Tr} [2i\langle \phi_m | \beta(x)\gamma_5 | \phi_n \rangle] = \exp \text{tr} \left[2i \sum_n \langle \phi_n | \beta(x)\gamma_5 | \phi_n \rangle \right] \\ &= \exp \text{tr} \left[2i \int d^4 x_E \beta(x) \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x) \right] \end{aligned} \quad (6.182)$$

³⁶ 其中 Tr 代指整个函数空间上的 trace, 而 tr 代指 Dirac 指标的 trace。

从这个表达式中，我们也可以看到“无穷大乘以0”的问题：

$$\begin{aligned} \text{tr} \int d^4x_E \beta(x) \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x) &= \text{tr} \int d^4x_E \beta(x) \sum_n \langle \phi_n | x \rangle \gamma_5 \langle x | \phi_n \rangle \\ &= \text{tr} \int d^4x_E \beta(x) \gamma_5 \langle x | x \rangle = \int d^4x_E \beta(x) \text{tr}[\gamma_5] \delta^4(0) \end{aligned} \quad (6.183)$$

于是，这也是需要进一步正规化的。在经过了这么多的铺垫之后，我们终于可以尝试引入一个保持 $U(1)_V$ 对称性的正规化了。我们将这里的 Jacobi 行列式定义为：

$$\begin{aligned} \det e^{2i\beta(x)\gamma_5} &\equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \exp \text{tr} \left[2i \sum_m \langle \phi_m | \beta(x) \gamma_5 e^{-\frac{\lambda_m^2}{M^2}} | \phi_m \rangle \right] \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \exp \text{tr} \left[2i \int d^4x_E \beta(x) \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\lambda_n^2/M^2} \phi_n(x) \right] \end{aligned} \quad (6.184)$$

为什么这保持了 $U(1)_V$ 对称性呢？首先对于 $U(1)_V$ 变换而言，正规化后的变换矩阵变成了 $\delta\Psi = i\alpha(x)e^{-\not{p}^2/M^2}$ ，这仍然是一个 Hermitian 变换，于是幺正性保持，测度仍然不变， $U(1)_V$ 对称性也就在量子理论中保持。这个正规化的好处还不止如此：注意到，Dirac 算子本身是在 $U(1)_V$ 下不变的，于是其本征值 λ_n 和本征函数 $|\phi_n\rangle$ 也在 $U(1)_V$ 变换下不变。也就是说：如果我们对外场 V_μ 做一个 $U(1)_V$ 变换，那么这个 Jacobi 行列式中的一切都将不变，于是这个正规化是显式地保持 $U(1)_V$ 对称性的。

为了计算这个泛函行列式，我们可以在指数上插入一组“动量本征基”：

$$\begin{aligned} \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\lambda_n^2/M^2} \phi_n(x) &= \sum_n \langle \phi_n | x \rangle \gamma_5 e^{-\lambda_n^2/M^2} \langle x | \phi_n \rangle \\ &= \sum_n \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_E}{(2\pi)^4} \langle \phi_n | p \rangle e^{-ipx} \gamma_5 e^{-\not{p}^2/M^2} e^{iqx} \langle q | \phi_n \rangle \\ &= \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \langle q | p \rangle e^{-ipx} \gamma_5 e^{-\not{p}^2/M^2} e^{iqx} \\ &= \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \gamma_5 e^{-\not{p}^2/M^2} e^{ipx} \end{aligned} \quad (6.185)$$

于是：

$$\det e^{2i\beta(x)\gamma_5} = \lim_{M \rightarrow \infty} \exp \text{tr} \left[2i \int d^4x_E \beta(x) \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \gamma_5 e^{-\not{p}^2/M^2} e^{ipx} \right] \quad (6.186)$$

利用恒等式 $e^{-ipx} f(\partial) e^{ipx} = f(\partial + ip)$ ，它可以被化简为：

$$\det e^{2i\beta(x)\gamma_5} = \lim_{M \rightarrow \infty} \exp \text{tr} \left[2i \int d^4x_E \beta(x) \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \gamma_5 e^{-(\not{p}+ip)^2/M^2} \right] \quad (6.187)$$

将 $(\not{D} + i\not{p})^2$ 展开, 就得到:

$$\begin{aligned}
 (\not{D}_x + i\not{p})^2 &= (\not{\partial} - iq\not{A} + i\not{p})^2 = -iq\not{\partial}\not{A} - (q\not{A} - \not{p})^2 \\
 &= -\frac{1}{2}i\partial_\mu qA_\nu([\gamma^\mu, \gamma^\nu] + \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) + (qA - p)^2 \\
 &= -\frac{1}{2}i\partial_\mu qA_\nu(-4iS^{\mu\nu} - 2\eta^{\mu\nu}) + (qA - p)^2 \\
 &= -F^{\mu\nu}S_{\mu\nu} + iq(\partial_\mu A^\mu) + (qA - p)^2
 \end{aligned} \tag{6.188}$$

从而, 我们希望计算的泛函行列式就是:

$$\begin{aligned}
 \det e^{2i\beta(x)\gamma_5} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \exp \left\{ 2i \int d^4x_E \beta(x) \right. \\
 &\quad \times \left. \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma_5 \exp \left(\frac{F^{\mu\nu}S_{\mu\nu} - iq(\partial_\mu A^\mu) - (qA - p)^2}{M^2} \right) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{6.189}$$

对动量的积分做一个缩放:

$$\begin{aligned}
 \det e^{2i\beta(x)\gamma_5} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \exp \left\{ 2i \int d^4x_E \beta(x) \right. \\
 &\quad \times M^4 \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma_5 \exp \left(\frac{F^{\mu\nu}S_{\mu\nu} - iq(\partial_\mu A^\mu) - q^2A^2}{M^2} + \frac{2qp_\mu A^\mu}{M} - p^2 \right) \right] \left. \right\}
 \end{aligned} \tag{6.190}$$

我们可以对 trace 里面的指数做展开, 这样就可以利用熟悉的 $\text{Tr}[\gamma_5\gamma^\mu\dots]$ 来计算出 trace 里面的内容。在 $M \rightarrow \infty$ 的极限下, 只有分母为 M^4 或以下幂次的项非零。并且除去 $\frac{1}{2}(F^{\mu\nu}S_{\mu\nu})^2/M^4$ 之外的其他分母为 M^4 或以下幂次的项都只含有四个以下的 Gamma 矩阵, 从而迹为 0。于是:

$$\det e^{2i\beta(x)\gamma_5} = \exp \left[iq^2 \int d^4x_E \beta(x) \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} \text{tr} [\gamma_5 S_{\mu\nu}S_{\rho\sigma}] e^{-p^2} \right] \tag{6.191}$$

在 Euclidean 时空中, γ_5 的 trace 关系变成了 $\text{tr}[\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho] = 4\varepsilon_E^{\mu\nu\rho\sigma}$, 其中 $\varepsilon_E^{\mu\nu\rho\sigma}$ 满足 $\varepsilon_E^{1234} = 1$ 。从而就可以计算出这个迹:

$$\text{tr} [\gamma_5 S_{\mu\nu}S_{\rho\sigma}] = -\frac{1}{16} \text{tr} [\gamma_5 [\gamma_\mu, \gamma_\nu][\gamma_\rho, \gamma_\sigma]] = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}^E \tag{6.192}$$

这就最终完成了这个泛函行列式的计算:

$$\begin{aligned}
 \det e^{2i\beta(x)\gamma_5} &= \exp \left[iq^2 \int d^4x_E \beta(x) \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} e^{-p^2} \varepsilon_E^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \right] \\
 &= \exp \left[\frac{iq^2}{16\pi^2} \int d^4x_E \beta(x) \varepsilon_E^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \right]
 \end{aligned} \tag{6.193}$$

当然, 我们也可以将这个结果 Wick 转动回 Minkowski 空间, 得到:

$$\det e^{2i\beta(x)\gamma_5} = \exp \left[-\frac{iq^2}{16\pi^2} \int d^4x \beta(x) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \right] \tag{6.194}$$

有了这些讨论之后，我们就知道了在轴 U(1) 变换下测度如何改变。为了分析这个改变所带来的物理后果，考虑生成泛函：

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left[i \int d^4x (i\bar{\Psi} \not{D} \Psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J_\mu A^\mu + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta) \right] \quad (6.195)$$

做一个变量名字的代换：

$$\begin{aligned} Z[J, \eta, \bar{\eta}] &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi' \mathcal{D}\bar{\Psi}' \exp \left[i \int d^4x (i\bar{\Psi}' \not{D} \Psi' - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J_\mu A^\mu + \bar{\eta} \Psi' + \bar{\Psi}' \eta) \right] \\ &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left[-\frac{iq^2}{16\pi^2} \int d^4x \alpha(x) F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \right] \\ &\quad \times \exp \left[i \int d^4x (i\bar{\Psi}' \not{D} \Psi' - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J_\mu A^\mu - \alpha(x) \partial_\mu J_5^\mu + \bar{\eta} \Psi' + \bar{\Psi}' \eta) \right] \end{aligned} \quad (6.196)$$

在一个无穷小变换下，有 $\Psi' = \Psi - i\beta(x)\gamma_5\Psi$ 。从而：

$$\begin{aligned} Z[J, \eta, \bar{\eta}] &= Z[J] - i \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{iS + \int (JA + \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta)} \\ &\quad \times \left[\int d^4x \alpha(x) \left(\frac{q^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + \partial_\mu J_5^\mu + \bar{\eta} \gamma_5 \Psi + \bar{\Psi} \gamma_5 \eta \right) \right] \end{aligned} \quad (6.197)$$

由于 $\beta(x)$ 是任意的，于是我们可以扔掉那个对 x 的积分。并且如果取所有的外源都是 0 时，就有：

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{iS} \left(\frac{q^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + \partial_\mu J_5^\mu \right) = 0 \quad (6.198)$$

转换成关联函数的形式，就是：

$$\partial_\mu \langle \Omega | J_5^\mu(x) | \Omega \rangle = -\frac{q^2}{4\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho \langle \Omega | A_\nu(x) A_\sigma(x) | \Omega \rangle \quad (6.199)$$

如果是轴 U(1) 对称性是一个量子对称性，那么应该有 Ward 恒等式 $\partial_\mu \langle \Omega | J_5^\mu(x) | \Omega \rangle = 0$ ，而上面这个结果告诉我们这个 Ward 恒等式并不成立，而是多了一项反常项。这也就意味着轴 U(1) 对称性是一个经典对称性，但并不是一个量子对称性。这个现象就是**轴矢流反常**。除去这个结果以外，如果将路径积分取做任何两个场构型之间的路径积分，这个关系都仍然成立。于是这个关系是在算符层面上成立的：

$$\partial_\mu J_5^\mu(x) = -\frac{q^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad (6.200)$$

得到这个结果，有些读者可能会觉得很奇怪——为什么轴 U(1) 变换这个幺正变换会改变测度呢？为什么 $\exp(-2i\beta\gamma_5)$ 这个和规范场 A 毫无相关性的东西会依赖于 A 呢？这是因为：轴矢流反常的本质是 $U(1)_V$ 对称性和 $U(1)_A$ 对称性不能同时满足，我们在 $U(1)_V$ 对称性和 $U(1)_A$ 对称性的两难抉择中选择了前者。为了保持理论的 $U(1)_V$ 对称性，我们就一定要对 $\text{Tr}(\alpha(x)\gamma_5)$ 做一个规范不变的正规化，这一步相当于对轴 U(1) 变换做了一个重新定义。而在这个新定义中，由于 λ_n^2 是依赖于规范场 A 的，于是这个重定义给了轴 U(1) 变换规

范场的依赖性。更进一步地，这个新定义使轴 U(1) 变换矩阵变成了 $\delta\Psi = i\beta(x)\gamma_5 e^{-\not{p}^2/M^2}$ ，而由于 $[\not{D}, \gamma_5] \neq 0$ ，这不再是 Hermitian 的，从而变换也就丧失了幺正性。这就使得测度可以发生改变，并且这个改变量和规范场有关。

如果我们选择不同的、不重新定义轴 U(1) 变换的正规化，例如格点正规化，那么为了保持规范对称性，就要做一个有限重整化，引入一些原来 Lagrangian 中没有的耦合来抵消原 Lagrangian 中的规范破坏。而这样引入的新耦合一定是破坏轴矢流对称性的。通过这个新耦合计算出的 $\partial_\mu J_5^\mu$ 应该也和这里一致。

除去这一节中使用的路径积分和 Fujikawa 方法计算反常之外，我们还可以直接利用 Feynman 图计算 $\langle p, k_{\text{out}} | \partial_\mu J_5^\mu | \Omega \rangle$ ，从而在微扰论中计算出这个反常。出于篇幅原因，我们并不会在这里给出这个计算的详细过程³⁷，具体的计算可以参看 Peskin 的第 19 章。

³⁷关于这个计算，有一个有趣的事——轴矢流反常是 **one-loop exact** 的。这也就意味着，如果我们仅仅将反常用 Feynman 图计算到单圈阶，得到的结果将会和利用非微扰方法计算出的结果完全相同。事实上，这个现象是由于反常的拓扑性质导致的：由于轴矢流的反常散度正比于 $\int \tilde{F}F$ ，而这个积分事实上只能取分立值（拓扑上，它是主丛的第二陈数），从而在连续的重整化群变换下一定不变。

Chapter 7

Non-Abelian Gauge Theory

7.1 Yang-Mills Theory

这一章要讨论的是非 Abelian 规范理论。它在某种意义上是我们在第四章中所接触到的 QED 的推广：在第四章中说过，QED 是一个 $U(1)$ 规范理论，它从一个具有整体 $U(1)$ 规范不变性的理论出发，通过引入一个规范场 A_μ 、将偏导数变为协变导数的方式将这个整体 $U(1)$ 规范不变性提升为了局域 $U(1)$ 规范不变性。在这一章中要做的就是将这个规范群从 $U(1)$ 群换成 $SU(N)$ ，经过类似的步骤，看看会得到什么样的理论。

$U(1)$ Gauge Invariance From Geometry

为了将 $U(1)$ 规范理论推广到其他 Lie 群的情形，最好回来以几何的眼光重新认识一下 $U(1)$ 规范理论。考虑局域规范变换前后的两个不同点的场：

$$\phi(x) \rightarrow e^{-iq\Gamma(x)}\phi(x), \quad \phi(y) \rightarrow e^{-iq\Gamma(y)}\phi(y) \quad (7.1)$$

如果想要比较 x 和 y 两点上场的大小，那么就需要考虑 $\phi(x) - \phi(y)$ 这个量。不幸的是，这个量并不是局域规范不变的，它依赖于函数 $\Gamma(x)$ 的选取，从而不是一个“好的”比较方式。为了修好这一点，我们可以引入一个函数 $W(x, y)$ ，如果其变换方式是：

$$W(x, y) \rightarrow e^{-iq\Gamma(x)}W(x, y)e^{iq\Gamma(y)} \quad (7.2)$$

那么量 $W(x, y)\phi(y)$ 就和 x 点的场具有相同的变换关系，从而 $|W(x, y)\phi(y) - \phi(x)|$ 就是规范不变的。这给了我们一个规范不变的比较两个场的方式。这里引入的函数 $W(x, y)$ 的作用就是将一个点的场“拉到”另一个点上去。

有了这个比较方式之后，就可以对场定义一个规范不变的导数了：

$$D_\mu \phi(x) := \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{W(x, x + \delta x)\phi(x + \delta x) - \phi(x)}{\delta x^\mu} \quad (7.3)$$

这其实就是在第四章引入的协变导数。为了看到这一点，我们可以对 $W(x, y)$ 做 Taylor 展开。由于我们希望 $W(x, y)$ 不改变本地的场，从而 $W(x, x) = 1$ 。从而有：

$$W(x, x + \delta x) = 1 - iqA_\mu(x)\delta x^\mu + O(\delta x^2) \quad (7.4)$$

代入 $D_\mu \phi(x)$, 就得到:

$$D_\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi(x) - iqA_\mu(x) \quad (7.5)$$

并且, 由于 $W(x, y)$ 的变换关系是 $W(x, y) \rightarrow e^{-iq\Gamma(x)}W(x, y)e^{iq\Gamma(y)}$, 从而:

$$\begin{aligned} W'(x, x + \delta x) &= 1 - iqA'_\mu(x)\delta^\mu x \\ &= e^{-iq\Gamma(x)}W(x, x + \delta x)e^{iq\Gamma(x)} = 1 + iq\Gamma(x + \delta x) - iq\Gamma(x) - iqA_\mu(x)\delta^\mu x \end{aligned} \quad (7.6)$$

从而:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \Gamma(x) \quad (7.7)$$

这正是第四章中看到的规范场的变换关系。这种引入规范场的方式有点像 Riemann 几何中引入联络的方式: 在那里, 我们也是希望比较两个不同点处的量的大小, 从而引入了平行移动的概念。对于一个无穷小的平行移动, 也引入了系数 $V_{\text{Transported}}^\mu(x + dx) = V^\mu(x) + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu dx^\nu V^\sigma + O(dx^2)$, 在那里系数 $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ 就称为联络系数, 它联系了不同的切空间。同样的, 对于规范理论而言, 也可以认为规范场 A_μ 是一个联络, 联系了不同点的场。

上面给出的条件并没有完全定下 $W(x, y)$ 的表达式: 我们仅仅要求了 $W(x, y)$ 满足变换关系 $W(x, y) \rightarrow e^{-iq\Gamma(x)}W(x, y)e^{iq\Gamma(y)}$, 并且有展开式 $W(x, x + \delta x) = 1 - iqA_\mu(x)\delta x^\mu + O(\delta x^2)$ 。容易验证, 对于任何的从 y 到 x 的路径 P 而言, 以下的 $W(x, y)$ 都满足上面的条件:

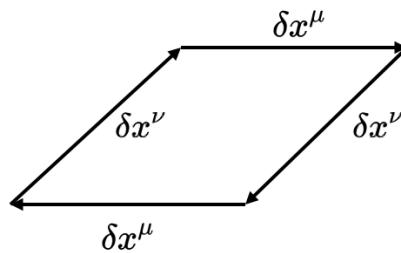
$$W_P(x, y) := \exp \left[iq \int_P dx^\mu A_\mu(x) \right] \quad (7.8)$$

这个函数被称为一个 **Wilson 线**。不幸的是, Wilson 线 W_P 和路径 P 是有关的。为了看到这一点, 可以考虑 P 首尾相连的情形, 此时的 Wilson 线变成了 **Wilson 圈**:

$$W_P^{\text{loop}} = \exp \left[iq \oint_P dx^\mu A_\mu(x) \right] = \exp \left[i \frac{q}{2} \int_\Sigma d\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \right] \quad (7.9)$$

其中 Σ 是圈 P 所围的曲面。由于场强的面积分不一定为 0, 从而 Wilson 线和路径 P 是有关的。

明白了规范场的几何意义之后, 我们还可以给场强 $F_{\mu\nu}$ 一个几何意义。由于 Wilson 圈中直接出现了场强, 于是我们考虑场经以下闭合路径的“移动”:



“移动”一圈之后, 就有 (记这个路径为 P):

$$\phi_{\text{Transported}}(x) = W_P^{\text{loop}} \phi(x) = 1 + i \frac{q}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + O(dx^4) \quad (7.10)$$

和 Riemann 几何做一个类比，就会发现场强是某种类似于曲率的东西：在 Riemann 几何中，曲率 R 也用来衡量一个矢量平移一圈之后的变化。下面的等式更明显的揭示了这一点：

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{q} [D_\mu, D_\nu] \quad (7.11)$$

虽然这看起来是一个算符，但是由于偏导数是可交换的，从而这实际上是一个数。这个等式的几何意义十分的明确：场强就正比于一个场绕上面的无穷小围道“移动”一周之后产生的变化。

有了这些讨论之后，我们就对 $U(1)$ 规范理论产生了一个几何上的认识：为了规范不变地比较两个不同点处的场，我们引入了一个“移动” $W(x, y)$ ，这个“移动”对应的联络就是规范场 A_μ ，曲率就是场强 $F_{\mu\nu}$ 。在数学上，这件事情的本质就是纤维丛：直观而不严格地讲，就是有一个微分流形作为底空间，其上的每一点都“长出”了一个微分流形，称为纤维。对 $U(1)$ 规范理论而言，底空间就是 Minkowski 空间，而纤维就是 $U(1)$ 群。选择一个规范的过程就是在每一点的纤维中都选择一个元素，这被称为纤维丛的一个截面。规范场在这套语言下就是主丛上的联络，而场强就对应主丛上的曲率。

Yang-Mills Theory

接下来就将上面的这一套讨论搬到规范群为 $SU(N)$ 的情形。在 $U(1)$ 规范理论中，为了确定不同的场在 $U(1)$ 规范变换下如何变换，我们引入了电荷。一个具有电荷 q 的场在 $U(1)$ 群下的变换就是 $\Psi \rightarrow e^{-iq\Gamma} \Psi$ 。这事实上就是确定了场所在的 $U(1)$ 群不可约表示¹。如果要将规范群从 $U(1)$ 群换成 $SU(N)$ 群，那么就要在定义理论时先决定场在规范群的哪个不可约表示中。确定了场处于 $SU(N)$ 在什么表示下之后，也就知道了场在规范群 $SU(N)$ 下如何变换。于是我们就能重复本节开始的讨论，利用几何语言引入规范场、协变导数和规范场强。

仍然先从 $W(x, y)$ 开始。对于 $SU(N)$ 而言， $W(x, y)$ 就应该成为一个矩阵，并应该有变换关系²：

$$W_{\alpha\beta}(x, y) \rightarrow U(x)W(x, y)U^{-1}(y) = [\exp(-ig\Gamma^a(x)T_R^a)W(x, y)\exp(ig\Gamma^a(y)T_R^a)]_{\alpha\beta} \quad (7.12)$$

照例对 $W(x, y)$ 做 Taylor 展开，得到：

$$W_{\alpha\beta}(x, x + \delta x) = \delta_{\alpha\beta} - ig\mathbf{A}_{\mu,\alpha\beta}(x)\delta x^\mu + O(\delta x^2) \quad (7.13)$$

如果我们希望 $W(x, y)$ 满足 $[W(x, y)]^\dagger = W(y, x)$ ，并且 $\det W(x, y) = 1$ ，那么 \mathbf{A} 就是无迹且 Hermitian 的³。也就是说，在每一个时空点上， \mathbf{A} 都是一个 $su(N)$ 李代数的元素：

$$\mathbf{A}_\mu(x) = A_\mu^a(x)T_R^a \quad (7.14)$$

¹如果场不处于不可约表示，那么就可以通过表示的约化将这个场分为不同不可约表示中的场。从而我们总可以使“基本的”场处于规范群得到不可约表示中。

²由于 $SU(N)$ 群是紧致、单连通李群，于是从李代数到李群的指数映射是一个满射。这意味着任何一个 $SU(N)$ 变换都可以写为 $\exp(i\Gamma^a T^a)$ 的形式。

³当然这里的要求并不是 $W(x, y)$ 所一定要满足的。这里仅仅是取了一个最简便的选择，相当于给了 $W(x, y)$ 一些额外要求。

这引入了规范场 $A_\mu^a(x)$, 其数量和规范群的 Lie 代数维数相同。对 $SU(N)$ 而言, 就是 $N^2 - 1$ 个规范场。利用 $W(x, y)$ 的 Taylor 展开, 也可以得到协变导数:

$$D_{\mu,\alpha\beta} = \partial_\mu \delta_{\alpha\beta} - ig \mathbf{A}_{\mu,\alpha\beta} \quad (7.15)$$

利用 $W(x, y)$ 的变换关系, 也可以得到规范场在规范变换下的变换关系:

$$\mathbf{A}_\mu \rightarrow U(x) \mathbf{A}_\mu U^{-1}(x) - \frac{i}{g} (\partial_\mu U(x)) U^{-1}(x) \quad (7.16)$$

在一个无穷小规范变换下, $U(x) = 1 - ig\Gamma^a(x)T^a$, 从而可知规范场分量的变换关系就是:

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x) &\rightarrow A_\mu^a(x) - [\partial_\mu \delta^{ac} - gf^{abc} A_\mu^b(x)] \Gamma^c(x) \\ &= A_\mu^a(x) - [\partial_\mu \delta^{ac} - ig A_\mu^b(x) (T_A^b)^{ac}] \Gamma^c(x) \\ &= A_\mu^a(x) - D_\mu^{ab} \Gamma^b(x) \end{aligned} \quad (7.17)$$

这里利用了伴随表示的生成元 $(T_A^a)^{bc} = -if^{abc}$, D_μ^{ab} 也意味着伴随表示的协变导数⁴。这个关系将在后面大量的被使用。

有了规范场的变换关系, 就能得到协变导数的变换关系:

$$D_\mu(x) \rightarrow U(x) D_\mu(x) U^{-1}(x) \quad (7.18)$$

这个变换关系可以让我们写出很多局域规范不变的算符。例如对于复标量场, 由于 $\phi \rightarrow U\phi, \phi^\dagger \rightarrow \phi^\dagger U^{-1}$, 从而 $\phi^\dagger D_\mu \phi$ 就是规范不变的。类似的, 由于矩阵 β 只作用在旋量指标上, 于是 U 的旋量共轭也就是 U^{-1} 。从而 $\bar{\Psi} D_\mu \Psi$ 也是规范不变的。从而对于 Lagrangian 中的动力学项, 我们仍然可以通过将偏导数换成协变导数来得到一个规范不变的 Lagrangian。

在非 Abel 规范理论中, 仍然类似曲率地定义规范场强:

$$\mathbf{F}_{\mu\nu,\alpha\beta} := \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu]_{\alpha\beta} = \frac{i}{g} (-ig \partial_\mu \mathbf{A}_\nu + ig \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - g^2 [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu]) = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - ig [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu] \quad (7.19)$$

从这个定义中就能看出, 规范场强是一个 Lie 代数取值的 2-形式。如果将其分量记做 $F_{\mu\nu}^a T_R^a$, 那么就有:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (7.20)$$

其中 f^{abc} 是规范群 Lie 代数的结构常数, 满足 $[T^a, T^b] = if^{abc} T^c$ 。值得注意的是, 这样定义的规范场强并不是规范不变的, 而是有以下的变换关系:

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \rightarrow U \mathbf{F}_{\mu\nu} U^{-1} \quad (7.21)$$

这也就告诉我们, 算符 $F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \propto \text{Tr}(\mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu})$ 也是规范不变的, 从而它可以在 Lagrangian 中作为规范场的动力学项存在。

在非 Abelian 规范理论中, 也可以构造出满足以上条件的 Wilson 线:

$$W_P(x, y) = \text{P exp} \left[ig \int_P \mathbf{A}_\mu(x) dx^\mu \right] \quad (7.22)$$

⁴更多关于伴随表示的讨论可参见本章附录。

其中 P 是路径排序算符, 其作用就类似编时算符一样, 使最接近路径尾端的场 \mathbf{A}_μ 排在最前面。与上面的讨论不同的是, 在 $U(1)$ 规范理论中, Wilson 圈是规范不变的。而在非 Abelian 情形下, 由于 $U(x)W_P(x, x)U^{-1}(x) \neq W_P(x, x)$, 从而一个首尾相接的 Wilson 线并非规范不变的。为了修好这一点, 可以转而将 Wilson 圈定义为:

$$W_P^{\text{loop}} := \text{Tr } W_P(x, x) \quad (7.23)$$

此时 $\text{Tr } UW_P(x, x)U^{-1} = \text{Tr } W_P(x, x)U^{-1}U = \text{Tr } W_P(x, x)$, 从而 Wilson 圈是规范不变的⁵。

有了所有这些讨论之后, 我们就可以写出 $SU(N)$ 规范理论的 Lagrangian 了。如果理论中有一系列处于 $SU(N)$ 群基本表示中的费米场, 就可以写出以下的规范不变的 Lagrangian⁶:

$$\mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}} = \bar{\Psi}_\alpha (i \not{D}_{\alpha\beta} - m \delta_{\alpha\beta}) \Psi_\beta - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu}) = \bar{\Psi}_\alpha (i \not{D}_{\alpha\beta} - m \delta_{\alpha\beta}) \Psi_\beta - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (7.24)$$

其中利用了基本表示的指标 $T(N) = 1/2$ 。这就是 Yang-Mills 理论的 Lagrangian。这一章的目标就是求解量子的 Yang-Mills 理论。

Yang-Mills 理论的一个重要应用就是量子色动力学/QCD, 它是如今人类对强相互作用的最根本的认识。QCD 就是一个规范群为 $SU(3)$ 的 Yang-Mills 理论, 其物质场由若干味道的自旋 1/2 的夸克场组成, 每味夸克有三种颜色, 在 $SU(3)$ 规范变换下, 每味夸克的三色按照 $SU(3)$ 的基础表示 (3) 变换。在 QCD 中, 传递强相互作用的粒子是规范场的激发, 它们被称为胶子, 从而 $SU(3)$ 规范场有时也被称为胶子场。由于 $SU(3)$ 有 8 个生成元, 从而也有 8 个胶子场 A_μ 。由 Yang-Mills 理论的 Lagrangian, 容易写出 QCD 的 Lagrangian:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{\text{Flavors}} \bar{q}_i (i \not{D}_{ij} - m_q \delta_{ij}) q_j - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (7.25)$$

其中 $i=1,2,3$ 是色指标。为了不和后面也使用的 Dirac 旋量指标混淆, 这里将其记号改为了拉丁字母 i,j,k,\dots 。

在上面写出的 Yang-Mills 理论的 Lagrangian 中其实并不包含规范不变、Lorentz 不变且可重整的所有耦合。事实上, 满足这些要求的还有以下的项:

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\theta}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(\mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}_{\rho\sigma}) \quad (7.26)$$

这一项是一个规范场的二次项, 在 Feynman 规则中本应该对应一个传播子的成分, 但是将其变换到动量空间后, 这项会正比于一个 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\mu k_\rho$, 从而为 0, 于是在微扰论中这一

⁵ 你一定在疑惑: 为什么我们要费这么大力气去讨论 Wilson 线和 Wilson 圈呢? 答案当然是因为这些东西在理论中有重要的地位。事实上, Wilson 圈是一个规范理论中最普遍的规范不变量 (你可以想想 Aharonov-Bohm 效应); 在格点场论中, 我们也以 Wilson 圈为基本自由度来构建理论; 在后面的讨论中, 我们有时候会用两个不同时空点的费米场来构建一个非局域算符。为了使这个非局域算符是规范不变的, 我们也可以在两个费米场之间插入一个 Wilson 线。

⁶ 注意, 这里的势能中具有一项 $\text{Tr}(T^a T^b)$ 。这个东西在数学上被称为李代数的 Killing 度规。数学上可以证明, 只有对于紧致、半单李代数而言, 这一项对能量的贡献才是正定的。于是在规范场论中, 我们考虑的规范群的李代数都应该是紧致、半单李代数。多说一句: 这种紧致、半单李代数总可以写为一系列紧致、单纯李代数的直和, 而所有紧致、单纯李代数只有 $A_n = \text{su}(n+1)$, $B_n = \text{so}(2n+1)$, $C_n = \text{sp}(2n)$, $D_n = \text{so}(2n)$ 四个典型李代数和五个例外李代数 E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 这九种。也就是说, 规范场论中要考虑的李代数只能是九种李代数及其直和。

项并不贡献任何效应。不过分析规范场在 T 变换下的行为可知，这一项破坏了 T 对称性，从而是破坏 CP 对称性的。也就是说，这一项的存在会在非微扰层面上造成理论的 CP 破坏。人们测量了 $SU(3)$ 规范理论中这个 CP 破坏的大小，并且得到了这一项的耦合常数 θ 的上界约为 10^{-10} 。这是非常匪夷所思的——Lagrangian 中的 θ 项满足一切对称性，从而它的耦合常数应该不应该压缩到这么小的值。对此最令人信服的解释就是：存在一个我们还不知道的对称性禁戒了这个耦合。不过关于这个对称性究竟是什么，人类对此还所知甚少。这个尚未解决的问题就被称为强 CP 问题。

7.2 Quantization of Yang-Mills Theory

Faddeev-Popov Quantization

写下 Lagrangian 之后的下一步就是将 Yang-Mills 理论量子化。在第三章中已经看到了，对于一个规范场，由于积分测度中存在局域规范对称性带来的冗余自由度，这会造成本应是传播子的逆的矩阵不可逆，从而无法利用通常的方式进行路径积分量子化。在那时，我们所采用的方式是 Faddeev-Popov 方法，通过排除掉非物理的场，并引入一个规范固定项来规避这个不可逆性。对于 Yang-Mills 理论，也可以利用同样的方法进行量子化。

考虑 Yang-Mills 理论的生成泛函：

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left[iS_{\text{YM}} + i \int d^4x (J^{a\mu} A_\mu^a + \bar{\eta}\Psi + \eta\bar{\Psi}) \right] \quad (7.27)$$

我们希望排除其中不满足规范条件 $G^a(x) \equiv \partial^\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x) = 0$ 的场，为此在其中插入以下的单位算符：

$$1 = \int \mathcal{D}\Gamma \det \left(\frac{\delta G^a}{\delta \Gamma^b} \right) \delta(G(A)) \quad (7.28)$$

从而：

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Gamma \det \left(\frac{\delta G^a}{\delta \Gamma^b} \right) \delta(G(A)) \exp \left[iS_{\text{YM}} + i \int d^4x (J^{a\mu} A_\mu^a + \bar{\eta}\Psi + \eta\bar{\Psi}) \right] \quad (7.29)$$

这里有必要再提一下，这里相当于在每个时空点 x_i 上有一个变量 $\Gamma^a(x_i)$ ， $\mathcal{D}\Gamma = \prod_{i,a} d\Gamma^a(x_i)$ 就是对这些变量积分。行列式 $\det \left(\frac{\delta G^a}{\delta \Gamma^b} \right)$ 中的矩阵 $\frac{\delta G^a}{\delta \Gamma^b}$ 是以每一点上的 x_i 和规范群生成元指标 a 作为行列指标的矩阵 $(\frac{\delta G^a}{\delta \Gamma^b})_{ia,jb} = \frac{\delta G^a(x_i)}{\delta \Gamma^b(x_j)}$ ， $\delta(G(A))$ 也需要理解为对每一点都有一个 delta 函数 $\prod_{i,a} \delta(G^a(x))$ 。为了计算这个生成泛函，需要首先计算这个泛函行列式。考虑一个无穷小的规范变换 $\delta\Gamma^a(x)$ ，在其下：

$$G^a(x) \rightarrow G^a(x) + \partial^\mu \delta A_\mu^a(x) = G^a(x) - \partial^\mu D_\mu^{ab} \Gamma^b(x) \quad (7.30)$$

从而，需要计算的泛函行列式就是⁷：

$$\det \left(\frac{\delta G^a}{\delta \Gamma^b} \right) = \det \left(-\partial_x^\mu D_{x,\mu}^{ab} \right) \quad (7.31)$$

⁷类似 6.5 节中的讨论，这个矩阵 $(-\partial_x^\mu D_{x,\mu}^{ab})$ 的矩阵元是 $(-\partial_x^\mu D_{x,\mu}^{ab}) \delta^4(x - y)$ ，其中前面的导数算符是作用于 delta 函数之上的。

下面给出一个很重要的技巧，可以将这个行列式的计算纳入到 Feynman 规则中。在第三章中曾看到过，对于一个 Grassmann 变量的 Gaussian 积分，有：

$$\int d^n \psi d^n \phi \exp \left(\sum_{i,j} \phi_i^\dagger M_{ij} \psi_j \right) = \det M \quad (7.32)$$

其中 ψ, ϕ 是两个复标量 Grassmann 场。这允许将行列式 $\det M$ 的计算写为一个路径积分。当取连续极限时，积分测度 $d^n \psi$ 就变成了泛函积分测度 $\mathcal{D}\psi$ ，而指数上的求和就变成了对时空积分：

$$\det(-\partial_x^\mu D_{x,\mu}^{ab}) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}c' \exp \left(- \int d^4x \int d^4y c'^a(x) \delta^4(x-y) \partial_x^\mu D_{x,\mu}^{ab} c^b(y) \right) \quad (7.33)$$

其中 c, c' 是为了计算行列式而引入的，在规范群伴随表示中的标量 Grassmann 场。由于它完全来自于泛函行列式的数学处理，不对应物理实在，从而将 c, c' 分别称为 **Faddeev-Popov 鬼场和反鬼场**。为了记号上的简洁，在下面的讨论中将场 c' 的记号换成 \bar{c} ，不过需牢记：虽然它看起来是 c 的共轭，但是和 c 没有任何关系。由于生成泛函乘以任何一个常数都不改变物理，于是可以对行列式乘一个无伤大雅的因子 $-i$ ，这样可以使得指数上的形式更加接近作用量的 e^{iS} ，这就得到：

$$\begin{aligned} \det(-\partial_x^\mu D_{x,\mu}^{ab}) &\propto \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left(i \int d^4x \bar{c}^a(x) \partial_x^\mu D_{x,\mu}^{ab} c^b(x) \right) \\ &= \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left(-i \int d^4x \partial^\mu \bar{c}^a(x) D_\mu^{ab} c^b(x) \right) \end{aligned} \quad (7.34)$$

可以看到，这个泛函行列式的存在就相当于在 Lagrangian 中添加了一项鬼场的 Lagrangian：

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = -\partial^\mu \bar{c}^a(x) D_\mu^{ab} c^b(x) = -\partial^\mu \bar{c}^a(x) \partial_\mu c^a(x) + g f^{abc} (\partial^\mu \bar{c}^a(x)) c^b(x) A_\mu^c(x) \quad (7.35)$$

对于 U(1) 规范场的情形，由于生成泛函为 0，从而鬼的 Lagrangian 就是自由标量场的 Lagrangian，可以被直接积分掉，留下一个虽然无穷大但是没什么物理后果的因子，于是在第三章的讨论中就没见过鬼场。而在非 Abelian 规范理论中，由于鬼场 Lagrangian 中包含鬼场和规范场的相互作用，从而会在 Feynman 图的计算中带来物理后果。

加入鬼场 Lagrangian 之后，生成泛函就是：

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] \propto \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\Gamma \delta(G[A]) \exp \left[iS_{\text{YM}} + iS_{\text{ghost}} + i \int d^4x (J^{a\mu} A_\mu^a + \bar{\eta}\Psi + \eta\bar{\Psi}) \right] \quad (7.36)$$

和第三章的处理相同，为了能够正确的得到规范场传播子，还需要引入一个规范固定项。为此在生成泛函上面乘一个如下的常数因子：

$$\int \mathcal{D}\omega \exp \left(-\frac{i}{2\xi} \int d^4x \omega^a(x) \omega^a(x) \right) \quad (7.37)$$

生成泛函变为：

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] \propto \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\Gamma \mathcal{D}\omega \delta(G[A]) \\ \times \exp \left[iS_{\text{YM}} + iS_{\text{ghost}} + i \int d^4x (J^{a\mu} A_\mu^a + \bar{\eta}\Psi + \eta\bar{\Psi}) \right] \exp \left(-\frac{i}{2\xi} \int d^4x \omega^a(x) \omega^a(x) \right) \quad (7.38)$$

利用 delta 函数积分掉 ω ，并且由于剩下的东西和 Γ 无关，也可以将 Γ 积分掉。将无关的常数全都吸入泛函积分测度的定义中，最终得到的就是以下的生成泛函：

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \\ \times \exp \left[iS_{\text{YM}} + iS_{\text{ghost}} - \frac{i}{2\xi} \int d^4x \partial^\mu A_\mu^a \partial^\nu A_\nu^a + i \int d^4x (J^{a\mu} A_\mu^a + \bar{\eta}\Psi + \eta\bar{\Psi}) \right] \quad (7.39)$$

这就等效于一个具有以下的 Lagrangian 的理论的生成泛函

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \bar{\Psi}_i (i\cancel{D}_{ij} - m) \Psi_j - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \partial^\mu \bar{c}^a D_\mu^{ab} c^b - \frac{1}{2\xi} \partial^\mu A_\mu^a \partial^\nu A_\nu^a \\ = \bar{\Psi}_i (i\cancel{\partial} - m) \Psi_i + \frac{1}{2} A_\mu^a \left(\eta^{\mu\nu} \partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu^a - \partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c^a \\ + g \bar{\Psi}_i \gamma^\mu A_\mu^a T_{ij}^a \Psi_j - g f^{abc} A^{a\mu} A^{b\nu} \partial_\mu A_\nu^c - \frac{1}{4} g^2 f^{abe} f^{cde} A^{a\mu} A^{b\nu} A_\mu^c A_\nu^d + g f^{abc} (\partial^\mu \bar{c}^a) c^b A_\mu^c \quad (7.40)$$

为了消去理论中的紫外发散，就需要对这个 Lagrangian 做重整化。通过对场和耦合常数的重新定义，就得到了：

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = i Z_2 \bar{\Psi}_i \cancel{\partial} \Psi_i - Z_m m \bar{\Psi}_i \Psi_i + \frac{1}{2} Z_3 A_\mu^a \left(\eta^{\mu\nu} \partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu^a - Z_{2c} \partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c^a \\ + Z_1 g \bar{\Psi}_i \gamma^\mu A_\mu^a T_{ij}^a \Psi_j - Z_{3g} g f^{abc} A^{a\mu} A^{b\nu} \partial_\mu A_\nu^c - \frac{1}{4} Z_{4g} g^2 f^{abe} f^{cde} A^{a\mu} A^{b\nu} A_\mu^c A_\nu^d + Z_{1c} g f^{abc} (\partial^\mu \bar{c}^a) c^b A_\mu^c \quad (7.41)$$

在重定义场的过程中，能够调整的参数是费米场 Ψ 、规范场 A 、鬼场 c 、耦合常数 g 和费米子质量 m 的五个参数，而上面的 Lagrangian 中出现了 $Z_1, Z_2, Z_3, Z_m, Z_{3g}, Z_{4g}, Z_{1c}$ 和 Z_{2c} 共八个重整化常数。这也就说明，八个重整化常数不独立，它们之间一定存在三个关系。通过对裸 Lagrangian 和重整的 Lagrangian，可以知道：

$$A_0 = \sqrt{Z_3} A, \quad \Psi_0 = \sqrt{Z_2} \Psi, \quad c_0 = \sqrt{Z_{2c}} c, \quad g_0 = \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} g, \quad m_0 = \frac{Z_m}{Z_2} m \quad (7.42)$$

和余下的三项相互作用项对比，就有：

$$Z_{3g} = \frac{Z_1}{Z_2} Z_3, \quad Z_{4g} = \frac{Z_1^2}{Z_2^2} Z_3, \quad Z_{1c} = \frac{Z_1}{Z_2} Z_{2c} \quad (7.43)$$

这就是重整化常数之间需要满足的关系。

Feynman Rules of Yang-Mills Theory

既然得到了 Yang-Mills 理论量子化、重整化后的等效 Lagrangian，接下来我们的目的就是从这个 Lagrangian 中求出 Yang-Mills 的 Feynman 规则。首先从 Lagrangian 中，可以一眼看出 Yang-Mills 理论中的所有相互作用顶点，它们是⁸：夸克-反夸克-胶子顶点，三胶子顶点，四胶子顶点和胶子-鬼顶点。

下面就来求出这些相互作用顶点对应的顶点因子。在任意一个 R_ξ 规范下工作，将 Lagrangian 的自由部分、相互作用部分分为：

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \bar{\Psi}_i (i\cancel{D} - m) \Psi_i + \frac{1}{2} A_\mu^a \left(\eta^{\mu\nu} \partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu^a - \partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c^a \quad (7.44)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g \bar{\Psi}_i \gamma^\mu A_\mu^a T_{ij}^a \Psi_j - g f^{abc} A^{a\mu} A^{b\nu} \partial_\mu A_\nu^c - \frac{1}{4} g^2 f^{abe} f^{cde} A^{a\mu} A^{b\nu} A_\mu^c A_\nu^d + g f^{abc} (\partial^\mu \bar{c}^a) c^b A_\mu^c + \mathcal{L}_{\text{CT}} \quad (7.45)$$

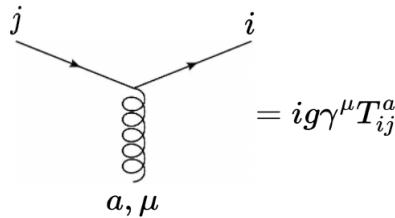
其中，抵消项是：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CT}} = & i(Z_2 - 1) \bar{\Psi}_i \cancel{D} \Psi_i - (Z_m - 1) m \bar{\Psi}_i \Psi_i + \frac{1}{2} (Z_3 - 1) A_\mu^a \left(\eta^{\mu\nu} \partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu^a \\ & - (Z_{2c} - 1) \partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c^a + (Z_1 - 1) g \bar{\Psi}_i \gamma^\mu A_\mu^a T_{ij}^a \Psi_j + (Z_{3g} - 1) g f^{abc} A^{a\mu} A^{b\nu} \partial_\mu A_\nu^c \\ & - \frac{1}{4} (Z_{4g} - 1) g^2 f^{abe} f^{cde} A^{a\mu} A^{b\nu} A_\mu^c A_\nu^d + (Z_{1c} - 1) g f^{abc} (\partial^\mu c^a) c^b A_\mu^c \end{aligned} \quad (7.46)$$

依照第三章的讨论，自由部分的 Feynman 规则就是：

$$\begin{aligned} \text{夸克传播子} \quad & \overrightarrow{p}^i \quad = \frac{1}{i} \frac{-\cancel{p} + m}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} \delta_{ij} \\ \text{胶子传播子} \quad & \overbrace{\quad \quad \quad}^{a, \mu} \overbrace{\quad \quad \quad}^{b, \nu} \quad = \frac{1}{i} \frac{\delta^{ab}}{k^2 - i\varepsilon} \left(\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \\ \text{鬼传播子} \quad & \overrightarrow{k}^a \quad = \frac{1}{i} \frac{\delta^{ab}}{k^2 - i\varepsilon} \end{aligned}$$

然后考虑相互作用项。第一个相互作用项是 $g \bar{\Psi}_i \gamma^\mu A_\mu^a T_{ij}^a \Psi_j$ ，它给出夸克-反夸克-胶子顶点：

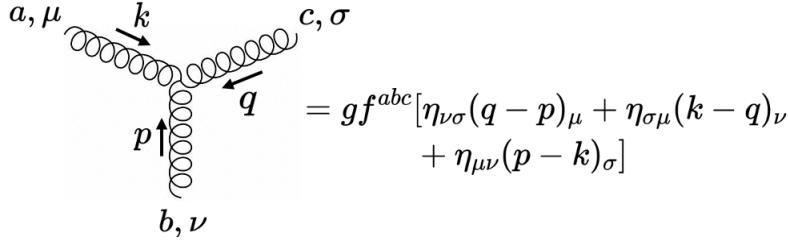


第二个相互作用项是 $-g f^{abc} A^{a\mu} A^{b\nu} \partial_\mu A_\nu^c = -g f^{abc} \eta_{\nu\sigma} A^{a\mu} A^{b\nu} \partial_\mu A^{c\sigma}$ ，它给出三个胶子的相互作用。在推导这个顶点的 Feynman 规则时需要注意两点：首先考虑坐标空间中的

⁸由于“规范玻色子”和“费米子”听起来没有“胶子”和“夸克”顺耳，这里就用 QCD 里面的名字命名它们了。

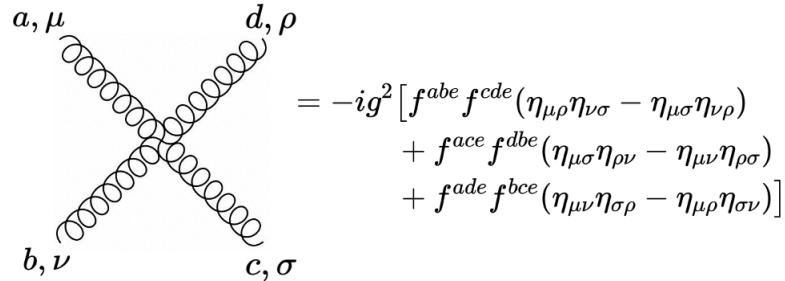
Feynman 规则。从第 3.6 节的讨论中看到，在对每个传播子都变换到动量空间之后，如果传播子上动量方向射入坐标为 x 的顶点，那么这个传播子的 Fourier 因子就是 $e^{ik(x-y)}$ ，于是这个顶点中作用在相应场上的导数 ∂_μ 就给出因子 ik_μ 。反之，如果导数作用的场对应一个动量射出顶点的传播子，那么这个导数就给出因子 $-ik_\mu$ 。

另一个需要注意的地方是，由于 f^{abc} 的存在，顶点的每种“粘合”方式都会给顶点带来不同的贡献。如果顶点连接的是指标分别为 $(a, \mu), (b, \nu), (c, \sigma)$ 的三个胶子传播子，那么就需要考虑 $gf^{efg}\eta_{\nu\sigma}A^{e\mu}A^{f\nu}\partial_\mu A^{g\sigma}$ 中的 (e, f, g) 分别对应 $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), \dots$ 的一共六种情形，每个情形都给出顶点因子 $gf^{efg}\eta_{\nu\sigma}k_\mu$ 。将所有六个情形的贡献加起来，就得到了以下的顶点因子：



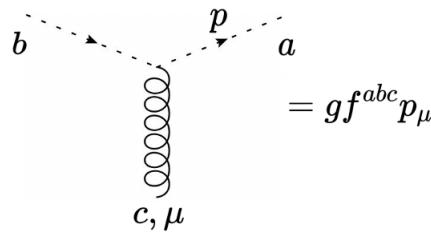
$$= gf^{abc}[\eta_{\nu\sigma}(q-p)_\mu + \eta_{\sigma\mu}(k-q)_\nu + \eta_{\mu\nu}(p-k)_\sigma]$$

第三个相互作用项是 $-\frac{1}{4}g^2f^{abe}f^{cde}A^{a\mu}A^{b\nu}A_\mu^cA_\nu^d = -\frac{1}{4}g^2f^{abe}f^{cde}\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}A^{a\mu}A^{b\nu}A^{c\sigma}A^{d\rho}$ 。经过和上面类似的讨论，可以得到：



$$= -ig^2[f^{abe}f^{cde}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) + f^{ace}f^{dbe}(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\rho\nu} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) + f^{ade}f^{bce}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\sigma\nu})]$$

最后一个相互作用项就是 $gf^{abc}(\partial^\mu\bar{c}^a)c^bA_\mu^c$ 。类似 4.2 节中的讨论，可以得到 \bar{c} 对应的是箭头射出顶点的传播子。从而胶子-鬼顶点的顶点因子就是：



$$= gf^{abc}p_\mu$$

综合上面的讨论，最终就得到了 Yang-Mills 理论的 Feynman 规则：

Yang-Mills 理论的 Feynman 规则

夸克传播子		$= \frac{1}{i} \frac{-p + m}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} \delta_{ij}$
胶子传播子		$= \frac{1}{i} \frac{\delta^{ab}}{k^2 - i\varepsilon} \left(\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$
鬼传播子		$= \frac{1}{i} \frac{\delta^{ab}}{k^2 - i\varepsilon}$
夸克-反夸克-胶子顶点		$= ig\gamma^\mu T_{ij}^a$
三胶子顶点		$= gf^{abc} [\eta_{\nu\rho}(q-p)_\mu + \eta_{\rho\mu}(k-q)_\nu + \eta_{\mu\nu}(p-k)_\rho]$
四胶子顶点		$= -ig^2 [f^{abe}f^{cde}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) + f^{ace}f^{dbe}(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\rho\nu} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) + f^{ade}f^{bce}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\sigma\nu})]$
胶子-鬼顶点		$= gf^{abc} p_\mu$

这里我们没有写出外线因子，不过由于 LSZ 约化公式没有任何变化，从而外线因子也和第四章中 QED 的外线因子没有区别。

最后讨论一下抵消项顶点。从 Lagrangian 中可以看出，相互作用顶点对应的抵消项顶点就是对应的相互作用顶点乘上相应的 $(Z - 1)$ 。夸克和胶子抵消项顶点和 QED 中没有什么差异，分别是 $-i(Z_2 - 1)\not{p} - i(Z_m - 1)m$ 和 $-i(Z_3 - 1)(k^2\eta_{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi})k_\mu k_\nu)$ 。由于鬼的抵消项 Lagrangian 是 $-(Z_{2c} - 1)\partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c^a$ ，从而鬼抵消项顶点就是 $-i(Z_{2c} - 1)k^2$ 。

Other Gauges

上面的讨论全部都是在 R_ξ 规范下进行的。而除去 R_ξ 规范之外，还有很多种不同的规范选择。在量子规范理论中，“选择一个规范”一般就指选择一个规范固定函数 $G(A)$ 。对于一个一般的规范固定函数，生成泛函是：

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \det \left(-\frac{\partial G^a}{\partial A_\mu^c} D_\mu^{cb} \right) \delta(G^a(A) - \omega^a) \exp(iS_{\text{YM}}) \quad (7.47)$$

仍然利用鬼场来计算这个泛函行列式：

$$\det \left(-\frac{\partial G^a}{\partial A_\mu^c} D_\mu^{cb} \right) \propto \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left[i \int d^4x \left(\bar{c}^a(x) \frac{\partial G^a}{\partial A_\mu^c} D_\mu^{cb} c^b(x) \right) \right] \quad (7.48)$$

并且利用因子 $\int \mathcal{D}\omega \exp \left[-\frac{i}{2\xi} G^a G^a \right]$ 进行规范固定。最终得到任意规范下的生成泛函是：

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left[iS_{\text{YM}} + i \int d^4x \left(\bar{c}^a(x) \frac{\partial G^a}{\partial A_\mu^c} D_\mu^{cb} c^b(x) - \frac{1}{2\xi} G^a(x) G^a(x) \right) \right] \quad (7.49)$$

通过这个生成泛函，也可以得到其他规范下的 Feynman 规则。在某些问题中，选择一个 R_ξ 规范之外的规范可能会给计算带来很大的简化，例如计算 QCD 的单圈 beta 函数时，可以选择**背景场规范**；计算 QCD 的树图振幅时，可以选择**Garvais-Neveu 规范**。

7.3 Symmetries of Yang-Mills Theory

7.3.1 Gauge Invariance and Gluon Proper Vertices

现在我们已经完成了 Yang-Mills 理论的量子化，得到了一个含 Faddeev-Popov 鬼场和规范固定项的等效 Lagrangian，并且从这个 Lagrangian 中求出了 Feynman 规则。下一步就是要对 Yang-Mills 理论做重整化、消去理论中的发散了。不过正如讨论 QED 的重整化时离不开 Ward 恒等式一样，在讨论 Yang-Mills 理论的重整化之前，需要看一看 Yang-Mills 理论中具有什么对称性、这些对称性又有什么物理后果。

作为一个规范场论，Yang-Mills 理论的（未规范固定的）Lagrangian 当然具有局域不变性。为了在量子理论中利用这个对称性，还需要考虑泛函积分测度 $\mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi}$ 在这个局域规范变化下的行为。在上一章中，我们证明了幺正变换是不改变测度的。对于一个 $SU(N)$ 规范变换而言，它自然是一个幺正变换。并且在这里，我们考虑的正是规范对称性本身，其幺正性不会由于和规范对称性不相容的原因所丧失，从而这里可以安心的说：规范变换不改变泛函积分测度。

在 QED 中，局域规范不变性蕴含了光子正规顶点的 Ward 恒等式。那么自然会想到，Yang-Mills Lagrangian 的局域规范不变性应该也对胶子正规顶点有一定限制。下面就来推导出这一点。由于我们仅仅考虑胶子的关联函数，于是可以考虑一个只有胶子源的生成泛函：

$$Z[J] := \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left[iS_{\text{YM}} + iS_{\text{ghost}} + i \int d^4x \left(-\frac{Z_3}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + J^{a\mu} A_\mu^a \right) \right] \quad (7.50)$$

对这个生成泛函做一个积分变量的换元，就得到：

$$\begin{aligned}
 Z[J] &= \int \mathcal{D}A' \mathcal{D}c' \mathcal{D}\bar{c}' \mathcal{D}\Psi' \mathcal{D}\bar{\Psi}' \exp \left[iS_{\text{YM}} + iS_{\text{ghost}} + i \int d^4x \left(-\frac{Z_3}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu'^a)^2 + J^{a\mu} A_\mu'^a \right) \right] \\
 &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{iS_{\text{eff}} + i \int JA} \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{Z_3}{\xi} \partial^\nu A_\nu^a \partial^\mu D_\mu^{ab} \Gamma^b(x) - J^{\mu a} D_\mu^{ab} \Gamma^b(x) \right) \right] \\
 &= Z[J] + i \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \int d^4x e^{iS_{\text{eff}} + i \int JA} \left(-\frac{Z_3}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu A_\nu^a - J^{\mu a} \right) D_\mu^{ab} \Gamma^b(x)
 \end{aligned} \tag{7.51}$$

于是：

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \int d^4x e^{iS_{\text{eff}} + i \int JA} \left(-\frac{Z_3}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu A_\nu^a - J^{\mu a} \right) D_\mu^{ab} \Gamma^b(x) = 0 \tag{7.52}$$

注意：这里并不能说由于 $D_\mu^{ab} \Gamma^b(x)$ 是任意的，于是 $D_\mu^{ab} \Gamma^b(x)$ 前面的那些东西是 0。这是由于 $D_\mu^{ab} \Gamma^b(x)$ 带一个 Lorentz 指标，而这个指标是我们不能“随意操作”的（也就是说，我们并不能让每个 μ 指标对应的 $D_\mu^{ab} \Gamma^b(x)$ 都是一个 delta 函数 $\delta^4(x - y)$ ）。于是为了“修好”这一点，可以定义：

$$\partial^\mu D_\mu^{ab} \Gamma^b(x) = \chi^b(x) \tag{7.53}$$

由于 $\Gamma^a(x)$ 的指标 a 是可以“随意操作”的，于是就可以令 $\chi^b(x)$ 的每个分量都是 delta 函数 $\delta^4(x - y)$ ，从而 $\forall \chi^a(x), \int d^4x f^a(x) \chi^a(x) = 0$ 的确蕴含了 $f^a(x)$ 恒为 0。

在代入 $\partial^\mu D_\mu^{ab} \Gamma^b(x) = \chi^b(x)$ 的时候还会遇到一个问题：如何用 $\chi^a(x)$ 来表达 $\Gamma^a(x)$ 呢？这引导我们定义“矩阵” $M_{xz}^{ab} := \delta^4(x - z) \partial^\mu D_\mu^{ab}$ 的逆 $M_{xy}^{-1,ab}$ ：

$$M_{xz}^{ac} M_{zy}^{-1,cb} = \int \delta^4(x - z) \partial_z^\mu D_{z,\mu}^{ab} M_{zy}^{-1,ab} = \partial_x^\mu D_{x,\mu}^{ac} M_{xy}^{-1,cb} = \delta^{ab} \delta^4(x - y) \tag{7.54}$$

那么，就有：

$$\Gamma^a(x) = \int d^4y M_{xy}^{-1,ab} \chi^b(y) \tag{7.55}$$

将这个关系代入从生成泛函中得到的恒等式，就有：

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \int d^4x e^{iS_{\text{eff}} + i \int JA} \left(\frac{Z_3}{\xi} \partial^\nu A_\nu^a \chi^a(x) - \int d^4y J^{\mu a}(x) D_{x,\mu}^{ac} M_{xy}^{-1,cb} \chi^b(y) \right) = 0 \tag{7.56}$$

从而：

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{iS_{\text{eff}} + i \int JA} \left(\frac{Z_3}{\xi} \partial^\nu A_\nu^a - \int d^4y J^{\mu b}(y) D_{y,\mu}^{bc} M_{yx}^{-1,ca} \right) = 0 \tag{7.57}$$

这个式子有时候被叫做推广的 Ward 恒等式。为了从中提取出胶子正规传播子的信息，可以先求一个泛函导数 $\frac{\delta}{\delta J^{b\mu}(z)}$ ，并取 $J = 0$ 。此时 $\frac{\delta W}{\delta J(x) \delta J(y)}$ 就是胶子的正规传播子 $\Delta_{\mu\nu}^{ab}(x - y)$ ，就有：

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{iS_{\text{eff}} + i \int JA} \left(\frac{Z_3}{\xi} i A_\mu^b(z) \partial^\nu A_\nu^a - D_{z,\mu}^{bc} M_{zx}^{-1,ca} \right) = 0 \tag{7.58}$$

其中泛函导数作用在 S_{eff} 上得到的项均含有 $J(x)$, 于是为 0。为了消除掉右边那些我们不知道如何处理的东西, 对这个式子作用一个 ∂_z^μ 。由于 $i\langle\Omega|T A_\mu^a(x) A_\nu^b(x)|\Omega\rangle = \Delta_{\mu\nu}^{ab}(x-y)$:

$$\frac{Z_3}{\xi} \partial_z^\mu \partial_x^\nu \Delta_{\mu\nu}^{ab}(x-z) - \delta^{ab} \delta^4(x-z) = 0 \quad (7.59)$$

将这个结果 Fourier 变换到动量空间, 就得到了以下的关系:

$$\frac{Z_3}{\xi} k^\mu k^\nu \tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \quad (7.60)$$

$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{ab}(k)$ 作为一个仅和 k 有关的二阶 Lorentz 张量, 可以将其分解为横向和纵向的部分:

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{ab}(k) = A^{ab}(k^2) \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + B^{ab}(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \quad (7.61)$$

那么, 这个结果就蕴含了 $\frac{Z_3}{\xi} k^2 B^{ab} = \delta^{ab}$, 从而胶子正规传播子就有结构:

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{ab}(k) = A^{ab}(k^2) \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{\xi}{Z_3} \frac{\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \delta^{ab}}{k^2 - i\varepsilon} \quad (7.62)$$

在常用的 R_{Z_3} 规范下, 这也就意味着胶子正规传播子的纵向部分和自由传播子相同。由于正规传播子和自由传播子之间有关系 $\Delta = \Delta_F + \Delta_F \Pi \Delta_F + \dots$, 这也就意味着在 R_{Z_3} 规范下有:

$$k_\mu \Pi_{\mu\nu}^{ab}(k) = 0 \quad (7.63)$$

这就是 Yang-Mills 理论中胶子自能的 Ward 恒等式。可以看到, 它和我们在 QED 中所见到的光子自能 Ward 恒等式是相同的。在 QED 中, 这个恒等式保证了光子自能中只包含对数发散, 从而在重整化时不用引入对应光子质量的抵消项, 保证了 QED 的可重整性。在 Yang-Mills 理论中, 这个恒等式也会给出类似的效果。

考虑一个一般的 R_ξ 规范。如果在重整化时使用了和 R_{Z_3} 规范类似的小技巧, 利用 R_ξ 规范下的传播子和“裸”抵消项顶点计算 $R_{Z_3\xi}$ 规范下的重整化, 那么 $k_\mu \Pi_{\mu\nu}^{ab}(k) = 0$ 就仍然成立。如果没有使用这个技巧, 那么胶子正规传播子的纵向部分相比自由传播子就会多出一个因子 $1/Z_3$, 从而自能也会有一个正比于 $-(Z_3 - 1)$ 的纵向分量。

利用推广的 Ward 恒等式, 还可以得到规范对称性对其他纯胶子正规顶点的约束。为此对推广的 Ward 恒等式求 $\frac{\delta}{\delta J^{b_1 \mu_1}(z_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J^{b_n \mu_n}(z_n)}$, 然后取 $J = 0$, 就有:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{iS_{\text{eff}}} & \left(\frac{Z_3}{\xi} (\partial^\nu A_\nu^a) A_{\mu_1}^{b_1}(z_1) \dots A_{\mu_n}^{b_n}(z_n) \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^n D_{z_j, \mu_j}^{b_j c} M_{z_j x}^{-1, ca} A_{\mu_1}^{b_1}(z_1) \dots A_{\mu_{j-1}}^{b_{j-1}}(z_{j-1}) A_{\mu_{j+1}}^{b_{j+1}}(z_{j+1}) \dots A_{\mu_n}^{b_n}(z_n) \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.64)$$

为了消去所有项中的 DM^{-1} , 作用 $\partial_{z_1}^{\mu_1} \dots \partial_{z_n}^{\mu_n}$, 就有:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{Z_3}{\xi} \partial_x^\nu \partial_{z_1}^{\mu_1} \dots \partial_{z_n}^{\mu_n} \langle \Omega | T \{ A_\nu^a(x) A_{\mu_1}^{b_1}(z_1) \dots A_{\mu_n}^{b_n}(z_n) \} | \Omega \rangle \\ & - \sum_{j=1}^n \delta^{ab_j} \partial_{z_1}^{\mu_1} \dots \partial_{z_n}^{\mu_n} \left(\delta^4(x - z_j) \langle \Omega | T \{ A_{\mu_1}^{b_1}(z_1) \dots A_{\mu_{j-1}}^{b_{j-1}}(z_{j-1}) A_{\mu_{j+1}}^{b_{j+1}}(z_{j+1}) \dots A_{\mu_n}^{b_n}(z_n) \} | \Omega \rangle \right) \end{aligned} \quad (7.65)$$

注意到，等式右边的所有项对应的 Feynman 图都是非联通的，于是就有：

$$\partial_x^\nu \partial_{z_1}^{\mu_1} \dots \partial_{z_n}^{\mu_n} \langle \Omega | T\{ A_\nu^a(x) A_{\mu_1}^{b_1}(z_1) \dots A_{\mu_n}^{b_n}(z_n) \} | \Omega \rangle_{\text{conn.}} = 0 \quad (7.66)$$

对于三胶子关联函数而言，由于联通的三胶子关联函数就是三胶子正规顶点上面连三个胶子正规传播子，并且如上面讨论所说，胶子正规传播子和动量缩并后就是一个常数乘以这个动量。从而这就蕴含了：

$$k_1^\mu k_2^\nu k_3^\sigma V_{\mu\nu\sigma}^{abc}(k_1, k_2, k_3) = 0 \quad (7.67)$$

这就是三胶子正规顶点的 Ward 恒等式。可以看到这和 QED 中多光子顶点的 Ward 恒等式有些不同：必须对全部三个动量都做收缩，才能得到 0。对于四胶子顶点而言，事情就变得更复杂了。由于四胶子顶点可以展开为一个四胶子正规顶点和一些用胶子正规传播子连起来的三胶子正规顶点的和，并且对于含有三胶子正规顶点的图，中间的胶子正规传播子无法被消除掉，于是 Ward 恒等式中就会包含一些和横向三胶子顶点有关的项。并且在 Yang-Mills 理论中，存在四胶子正规顶点对应的抵消项，于是其发散是可以被消除的。从而四胶子正规顶点的 Ward 恒等式没有什么用，这里就不再继续推导下去了。

7.3.2 BRST Symmetry and Physical States

上面讨论的规范不变性是 Yang-Mills Lagrangian 的不变性。而由于在量子化的过程中我们已经选择了 R_ξ 规范，于是含 Faddeev-Popov 鬼场和规范固定项的等效 Lagrangian 并没有规范不变性。但由于 R_ξ 规范和电动力学中的 Lorentz 规范、Coulomb 规范不同，它没有完全排除冗余的非物理自由度，从而这个等效 Lagrangian 中还存在一些“剩余的”规范对称性。这个对称性就被称为 **Becchi-Rouet-Stora-Tyutin 对称性**，简称为 **BRST 对称性**。

为了看到 BRST 对称性，考虑等效 Lagrangian 如何在无穷小规范变换 $\Psi_i \rightarrow \Psi_i - ig\Gamma(x)T_{ij}^a\Psi_j$, $A_\mu \rightarrow A_\mu - D_\mu^{ab}\Gamma^b(x)$ 下如何变化。首先 Yang-Mills Lagrangian 当然是不变的，而对于规范固定项和鬼场 Lagrangian 中和规范场有关的部分而言，它的变化并不是 0：

$$\delta\mathcal{L}_{\text{GF}} = -\frac{1}{2\xi} \delta(\partial^\mu A_\mu^a(x))^2 = \frac{1}{\xi} \partial^\mu A_\mu^a(x) \partial^\nu (D_\nu^{ab}\Gamma^b(x)) \quad (7.68)$$

$$\delta\mathcal{L}_{\text{ghost}} = -gf^{abc} (\partial^\mu \bar{c}^a) c^b D_\mu^{cd} \Gamma^d(x) \quad (7.69)$$

能不能一个定义一个鬼场、规范场的变化，使得整个等效 Lagrangian 不变呢？答案是可以的。不过由于规范固定项是和 ξ 选择有关的，这么定义的变换并不是和 ξ 无关的，比较丑陋。一个和 ξ 无关的方案是，引入一个辅助场来将 Lagrangian 中的 ξ 部分彻底分开。这样，Lagrangian 就变为：

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \bar{\Psi}_i (i\mathcal{D}_{ij} - m) \Psi_j - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \partial^\mu \bar{c}^a D_\mu^{ab} c^b + \frac{\xi}{2} B^a B^a - B^a \partial^\mu A_\mu^a \quad (7.70)$$

同时在泛函积分测度中添加一个 $\mathcal{D}B$ ，那么只要将辅助场积掉，得到的就是原来的 Lagrangian。为了寻找一个使等效 Lagrangian 不变的，且不依赖于 ξ 的变化，只需要规定

$\delta B = 0$, 然后让后面几项抵消就行。为此找出⁹:

$$\begin{aligned}\delta_B A_{0,\mu}^a &= \theta D_\mu^{ab} c_0^b(x), & \delta_B \Psi_{0,i} &= i g_0 \theta c_0^a(x) T_{ij}^a \Psi_j(x) \\ \delta_B B_0^a &= 0, & \delta_B \bar{c}_0^a &= \theta B_0^a(x), & \delta_B c_0^a &= -\frac{1}{2} g_0 \theta f^{abc} c_0^b(x) c_0^c(x)\end{aligned}\quad (7.71)$$

这组变换就是 **BRST 变换**¹⁰。注意这里场的下标 0 代表裸场。如果考虑重整场的话, 这一组变换还要加上额外的重整化因子。由于鬼和反鬼没有要求有任何的联系, 于是这里可以给鬼场 c^a 和反鬼场 \bar{c}^a 完全不同的变换行为。

下面就来证明等效 Lagrangian 在 BRST 变换下不变。由于不太想写出那些繁杂的重整化常数, 于是在本节余下的讨论中, 我将取所有的场都是裸场, 并忽略裸场的下标 0。在 BRST 变换下, 规范固定项的变化是:

$$\delta_B \mathcal{L}_{\text{GF}} = -\theta B^a \partial^\mu (D_\mu^{ab} c^b) \quad (7.72)$$

而鬼 Lagrangian 的变化是:

$$\delta_B \mathcal{L}_{\text{ghost}} = -\partial^\mu (\delta_B \bar{c}^a) D_\mu^{ab} c^b - \partial^\mu \bar{c}^a \delta_B (D_\mu^{ab} c^b) \quad (7.73)$$

这个变化的前一项是:

$$-\partial^\mu (\delta_B \bar{c}^a) D_\mu^{ab} c^b = -\theta B^a D_\mu^{ab} c^b = -\delta_B \mathcal{L}_{\text{GF}} \quad (7.74)$$

这从而说明, 这一项和规范固定项的变换相抵消了。对于鬼场变化的后一项, 有:

$$\begin{aligned}\delta_B (D_\mu^{ab} c^b) &= \partial_\mu (\delta_B c^a) - g f^{abc} (\delta_B A_\mu^c) c^b - g f^{abc} A_\mu^c (\delta_B c^b) \\ &= -\frac{1}{2} g \theta f^{abc} \partial_\mu (c^b c^c) - g \theta f^{abc} (\partial_\mu c^a - g f^{ade} A_\mu^e c^d) c^b + \frac{1}{2} g^2 \theta f^{abc} f^{bde} A_\mu^c c^d c^e \\ &= g \theta f^{abc} \partial_\mu (c^c) c^b - g \theta f^{abc} (\partial_\mu c^c) c^b + g^2 \theta f^{abc} f^{cde} A_\mu^e c^d c^b + \frac{1}{2} g^2 \theta f^{abc} f^{bde} A_\mu^c c^d c^e \\ &= g^2 \theta f^{abc} f^{cde} A_\mu^e c^d c^b + \frac{1}{2} g^2 \theta f^{abc} f^{bde} A_\mu^c c^d c^e\end{aligned}\quad (7.75)$$

利用 Jacobi 恒等式 $f^{abd} f^{dce} + f^{bcd} f^{dae} + f^{cad} f^{dbe} = 0$, 有以下的结果:

$$f^{abc} f^{bde} A_\mu^c c^d c^e = (f^{cdb} f^{bae} + f^{dab} f^{bce}) A_\mu^c c^d c^e = 2 f^{cdb} f^{bae} A_\mu^c c^d c^e \quad (7.76)$$

从而:

$$\delta_B (D_\mu^{ab} c^b) = g^2 \theta (f^{abc} f^{cde} A_\mu^e c^d c^b + f^{cdb} f^{bae} A_\mu^c c^d c^e) = 0 \quad (7.77)$$

这就告诉我们, $\delta_B \mathcal{L}_{\text{ghost}} = -\delta_B \mathcal{L}_{\text{GF}}$, 从而整个等效 Lagrangian 在 BRST 变换下是不变的, 从而 BRST 对称性至少是一个经典对称性。

上面引入 BRST 对称性时是以无穷小形式引入的。对于一个非无穷小的 BRST 对称性, 我们期待它有形式:

$$U_B = \exp(i \theta Q_B) \quad (7.78)$$

⁹这里的 θ 是一个 Grassmann 变量, 其出现是因为要求一个复数的变化还是一个对易的对象, 而 Grassmann 变量的变化还是一个反对易的对象

¹⁰可以看到, 在 BRST 变换中, 只有一个 θ 的自由度。这便不再是一个 local 对称性的自由度。

其中 Q_B 就是 BRST 变换的生成元, 它也被称为 **BRST 算符**。 U_B, Q_B 都是 Hilbert 空间上的算符, 并且 U 是玻色的, Q 是费米的。这意味着一个 Grassmann 数 θ 经过 U 不变号, 而经过 Q 变号。在这个变换下, 玻色场和费米场算符的变换就是¹¹:

$$U_B \phi U_B^{-1} = \phi + i\theta [Q_B, \phi] = \phi + \delta_B \phi \quad (7.79)$$

$$U_B \Psi U_B^{-1} = \Psi + i\theta \{Q_B, \Psi\} = \Psi + \delta_B \Psi \quad (7.80)$$

从而 BRST 算符 Q_B 和裸场的对易子是:

$$\begin{aligned} i[Q_B, A_\mu^a] &= D_\mu^{ab} c^b(x), \quad i\{Q_B, \Psi_i\} = igc^a(x)T_{ij}^a \Psi_j(x) \\ i[Q_B, B^a] &= 0, \quad i\{Q_B, \bar{c}^a\} = \frac{1}{\xi} \partial^\mu A_\mu^a(x), \quad i\{Q_B, c^a\} = -\frac{1}{2} g f^{abc} c^b(x) c^c(x) \end{aligned} \quad (7.81)$$

由于我们希望 BRST 变换是幺正的, 从而就希望 BRST 算符是 Hermitian 的。对上面这些对易子取 Hermitian 共轭之后就发现, 如果鬼场和反鬼场 c, \bar{c} 都是 Hermitian 的, 那么 BRST 算符就是 Hermitian 的。

BRST 算符有一个重要的性质, 就是幂零性 $Q_B^2 = 0$ 。下面来证明这一点:

Proof. 考虑对一个算符连续作用两次 BRST 变换:

$$\delta_B \delta_B \mathcal{O} = \sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial}{\partial \phi_\beta} \mathcal{O} \right) \delta_B \phi_\alpha \delta_B \phi_\beta + \sum_\alpha \frac{\partial^2 \mathcal{O}}{\partial \phi_\alpha^2} \delta_B \delta_B \mathcal{O} \quad (7.82)$$

由于 $\delta_B \phi_\alpha = i\theta [Q_B, \phi_\alpha]$, 从而第一项就正比于 $\theta_1 \theta_2 \sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial}{\partial \phi_\beta} \mathcal{O} \right) [Q_B, \phi_\alpha] [Q_B, \phi_\beta]$ 。由于 $[Q_B, \phi_\alpha]$ 和 ϕ_α 的统计相反, 于是交换前两个偏导数并交换后面两个对易子的过程一定会带来一个负号, 从而这一项一定是 0。对于第二项, 如果对各种场都有 $\delta_B \delta_B \phi_\alpha = 0$, 那么第二项也不存在。为此先看规范场:

$$\delta_B \delta_B A_\mu^a = \delta_B (\theta_1 D_\mu^{ab}) c^b \quad (7.83)$$

这在上面的讨论中已经被验证过是 0。对于费米子场:

$$\begin{aligned} \delta_B \delta_B \Psi_i &= ig \delta_B (\theta_1 c^a T_{ij}^a \Psi_j) = -\frac{1}{2} ig^2 \theta_1 \theta_2 f^{abc} c^b c^c T_{ij}^a \Psi_j - g^2 \theta_1 c^a T_{ij}^a \theta_2 T_{jk}^b c^b \Psi_k \\ &= -\frac{1}{2} ig^2 \theta_1 \theta_2 f^{abc} c^b c^c T_{ij}^a \Psi_j + \frac{1}{2} g^2 \theta_1 \theta_2 (T_{ij}^a T_{jk}^b - T_{ij}^b T_{jk}^a) c^a c^b \Psi_k \\ &= -\frac{1}{2} ig^2 \theta_1 \theta_2 f^{abc} c^b c^c T_{ij}^a \Psi_j + \frac{1}{2} ig^2 \theta_1 \theta_2 f^{abc} T_{ik}^c c^a c^b \Psi_k = 0 \end{aligned} \quad (7.84)$$

对于鬼场:

$$\begin{aligned} \delta_B \delta_B c^a &= \delta_B \left(-\frac{1}{2} g \theta_1 f^{abc} c^b c^c \right) = \frac{1}{4} g^2 (\theta_1 f^{abc} (\theta_2 f^{bde} c^d c^e) c^c + \theta_1 f^{abc} c^b \theta_2 f^{cde} c^d c^e) \\ &= \frac{1}{4} g^2 \theta_1 \theta_2 (f^{abc} f^{bde} c^d c^e c^c - \theta_1 f^{abc} f^{cde} c^b c^d c^e) = 0 \end{aligned} \quad (7.85)$$

¹¹由于 $\theta^2 = 0$, 只需要展开到第一阶。

最后, 对反鬼场:

$$\delta_B \delta_B \bar{c}^a = \delta_B B^a = 0 \quad (7.86)$$

而对于 B 场而言, $\delta_B \delta_B B^a = 0$ 是显然的。这就证明了对于任何算符 \mathcal{O} , 都有 $\delta_B \delta_B \mathcal{O} = 0$ 。又由于:

$$\delta_B \delta_B \mathcal{O} \propto [Q_B, [Q_B, \mathcal{O}]_{\pm}]_{\mp} = [Q_B^2, \mathcal{O}] = 0 \quad (7.87)$$

这说明 Q_B^2 和所有算符对易, 从而只有两种可能: $Q_B^2 = 0$ 或 Q_B^2 正比于单位算符。为了排除后一种可能, 可以引入一个新的量子数, 称为**鬼数**¹²: 认为鬼场算符携带鬼数 1, 而反鬼场携带鬼数-1, 非鬼的场携带鬼数 0。那么由于 $[Q_B, A]$ 是一个鬼数为 1 的算符, 于是 Q_B 一定携带鬼数 1, 从而 Q_B^2 的鬼数是 2。但是单位算符不具有鬼数, 从而 Q_B^2 不可能是单位算符, 只能是 0。 \square

上面讨论的 BRST 变换全部都是在 R_ξ 规范下讨论的。在任意规范固定函数 G^a 对应的规范下, 加入辅助场的 Lagrangian 就需要变为:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \bar{\Psi}_i (i \not{D}_{ij} - m) \Psi_j - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{\partial G^a}{\partial A_\mu^c} \bar{c}^c D_\mu^{cb} c^b + \frac{\xi}{2} B^a B^a - B^a G^a \quad (7.88)$$

裸场的 BRST 变换仍然有形式:

$$\begin{aligned} \delta_B A_{0,\mu}^a &= \theta D_\mu^{ab} c_0^b(x), & \delta_B \Psi_{0,i} &= i g_0 \theta c_0^a(x) T_{ij}^a \Psi_j(x) \\ \delta_B B_0^a &= 0, & \delta_B \bar{c}_0^a &= \theta B_0^a, & \delta_B c_0^a &= -\frac{1}{2} g_0 \theta f^{abc} c_0^b(x) c_0^c(x) \end{aligned} \quad (7.89)$$

通过同样的方法, 就可以证明这个 BRST 变换的幂零性和 Lagrangian 在其下的不变性。这里就不再重复计算一遍了。

BRST Cohomology and Physical States

我们为什么要这么大费周章的阐述这么多 BRST 变换和 BRST 算符的性质呢? 原因是 BRST 算符给了我们一个很好的“筛选”物理态的方法。正如 2.3 节中看到的一样, 如果利用规范固定的 Lagrangian 做量子化, 那么 Hilbert 空间中一定含有非物理的态。下面就要说明, 所有的物理态都在 BRST 算符的上同调中。

稍稍解释一下上面的这句话。令 \mathcal{H} 为场论的 Hilbert 空间, 那么由于 $Q_B^2 = 0$, 于是任何处于 $\text{Im } Q_B \subset \mathcal{H}$ 中的态都处于 $\ker Q_B \subset \mathcal{H}$ 中, 也就是 $\text{Im } Q_B \subset \ker Q_B$ 。并且由于 $\text{Im } Q_B$ 和 $\ker Q_B$ 都是线性空间, 从而 $\text{Im } Q_B$ 是 $\ker Q_B$ 的子空间。这允许我们定义一个商空间:

$$H_B := \ker Q_B / \text{Im } Q_B \quad (7.90)$$

这个空间就是算符 Q_B 的上同调空间。上同调空间中的元素就是 $|\psi\rangle \in \ker Q_B$ 给出的等价类 $\{|\psi\rangle + Q_B|\phi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}\}$ 。

为了看到这个上同调空间和物理态的联系, 我们需要思考一下究竟什么是一个“物理态”。物理态 $|\psi\rangle$ 应该具有的性质是: 具有正的模方 $\langle\psi|\psi\rangle > 0$, 并且在两个物理态之间,

¹²这和 \mathcal{L}_{eff} 的一个对称性——**鬼相位不变性**互相关联: 在鬼相位变换下, 令一个具有鬼数 N 的场的变换为 $\psi \rightarrow e^{iN\alpha} \psi$, 那么 \mathcal{L}_{eff} 不变。这个对称性就蕴含了鬼数守恒。

任意算符的矩阵元都应该是规范不变的。下面首先要证明，在 \mathcal{H} 中，所有 $\ker Q_B - \text{Im } Q_B$ 中的态全部具有这些性质，而 $\ker Q_B - \text{Im } Q_B$ 以外的态没有这些性质。

首先考虑两个态 $|\psi\rangle, |\psi'\rangle \in \mathcal{H}$ 。算符 \mathcal{O} 在它们之间的矩阵元是 $\langle\psi'|\mathcal{O}|\psi\rangle$ 。如果对 \mathcal{O} 做一个 BRST 变换，那么这个矩阵元的变化就是：

$$\delta_B \langle\psi'|\mathcal{O}|\psi\rangle = i\theta \langle\psi'|[Q_B, \mathcal{O}]|\psi\rangle \quad (7.91)$$

由于这需要对任意的 \mathcal{O} 成立，所以一定要有 $Q_B|\psi\rangle = 0, Q_B|\psi'\rangle = 0$ 才可以使矩阵元是 BRST 不变的。由于 BRST 不变性是一种特殊的局域规范不变性，于是 $\ker Q_B$ 之外的态都不满足第二个要求，只有 $\ker Q_B$ 中的态才可能是物理的。

然后考虑第一个要求 $\langle\psi|\psi\rangle > 0$ ，考虑 $\text{Im } Q_B$ 中的态 $|\phi\rangle = Q_B|\Phi\rangle$ ，其模方是：

$$\langle\phi|\phi\rangle = \langle\Phi|Q_B^\dagger Q_B|\Phi\rangle = \langle\Phi|Q_B^2|\Phi\rangle = 0 \quad (7.92)$$

从而，所有 $\text{Im } Q_B$ 中的态也不可能物理的。于是物理态只可能在 $\ker Q_B - \text{Im } Q_B$ 中。

并且，对于一个物理态而言，在其上加一个非物理态 $Q_B|\phi\rangle$ 得到的态仍然在 $\ker Q_B - \text{Im } Q_B$ 中，这些东西也需要被排除掉。从而物理态实际上对应的是等价类 $\{|\psi\rangle + Q_B|\phi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}\}$ 。这也就是 BRST 算符上同调中的元素。这也就说明，所有的物理态都在 BRST 算符的上同调中。

利用这个工具，我们就能真正说明物理的 Hilbert 空间中没有鬼粒子态和纵向极化的规范玻色子态了。考虑一个渐进时刻的场论，其中没有任何相互作用，只有自由场。如果我们将辅助场 B 积分掉，就得到以下的变换关系：

$$\begin{aligned} \delta_B A_\mu^a &= \theta D_\mu^{ab} c^b(x), & \delta_B \Psi_i &= ig\theta c^a(x) T_{ij}^a \Psi_j(x) \\ \delta_B \bar{c}^a &= \frac{1}{\xi} \theta \partial_\mu A^{a\mu}(x), & \delta_B c^a &= -\frac{1}{2} g\theta f^{abc} c^b(x) c^c(x) \end{aligned} \quad (7.93)$$

此时可以将规范场和鬼场展开为产生湮灭算符（由于希望 Q_B 是 Hermitian 的，这里将鬼和反鬼取为 Hermitian 的）：

$$A_\mu^a(x) = \sum_\lambda \int \widetilde{dk} \left[\varepsilon_{\lambda,\mu}^*(k) a_\lambda^a(k) e^{ikx} + \varepsilon_{\lambda,\mu}(k) a_\lambda^{a\dagger}(k) e^{-ikx} \right] \quad (7.94)$$

$$c^a(x) = \sum_\lambda \int \widetilde{dk} \left[b^a(k) e^{ikx} + b^{a\dagger}(k) e^{-ikx} \right], \quad \bar{c}^a(x) = \sum_\lambda \int \widetilde{dk} \left[d^a(k) e^{ikx} + d^{a\dagger}(k) e^{-ikx} \right] \quad (7.95)$$

将这些展开代入上面的变换关系中，就得到：

$$[Q_B, a_\lambda^a(k)] = -\varepsilon_{\lambda,\mu}^*(k) k^\mu b(k), \quad [Q_B, a_\lambda^{a\dagger}(k)] = \varepsilon_{\lambda,\mu}(k) k^\mu b^{a\dagger}(k) \quad (7.96)$$

$$\{Q_B, d^a(k)\} = \frac{1}{\xi} \varepsilon_{\lambda,\mu}^* k^\mu a_\lambda^a(k), \quad \{Q_B, d^{a\dagger}(k)\} = \frac{1}{\xi} \varepsilon_{\lambda,\mu} k^\mu a_\mu^{a\dagger}(k) \quad (7.97)$$

$$\{Q_B, b^a(k)\} = \{Q_B, b^{a\dagger}(k)\} = 0 \quad (7.98)$$

从而，对于一个渐进时刻的纵向极化胶子态，由于 $k \cdot \varepsilon \neq 0$ ，有 $[Q_B, a_\lambda^a(k)] \neq 0$ ，这蕴含 $Q_B a_\lambda^a(k)|0\rangle \neq 0$ ，于是这个态是不在 $\ker Q_B$ 中的，从而纵向极化胶子态是不物理的。同

样, 对于反鬼粒子态, 由于 $\{Q_B, d^{a\dagger}(k)\} \neq 0$, 它也不在 $\ker Q_B$ 中。对于一个鬼粒子态, 由于 $b^{a\dagger}(k)|0\rangle = Q_B[a_\lambda^{a\dagger}(k)|0\rangle]/(\varepsilon_{\lambda,\mu}(k)k^\mu)$, 从而鬼粒子态在 $\text{Im } Q_B$ 中。从而这也说明了物理的 Hilbert 空间 H_B 中没有鬼和反鬼粒子态。

由于渐进时刻下物理 Hilbert 空间中没有纵极化胶子态、鬼粒子态和反鬼粒子态, 并且 S-矩阵元可以认为是渐进时刻物理态之间的矩阵元, 从而这些态就不会出现在 S-矩阵元两端, 从而我们就不用担心一个物理的散射过程的末态可能出现这些非物理的态。

并且, 由于一个物理态和一个非物理态的内积总是 0, 于是如果我们想要插入在两个物理态之间插入一个物理态空间的单位算符时, 就可以转而插入一个全空间的单位算符:

$$\sum_{\phi \in \mathcal{H}_{\text{phys}}} \langle \psi_{a,\text{phys}} | \phi_{\text{phys}} \rangle \langle \phi_{\text{phys}} | \psi_{b,\text{phys}} \rangle = \sum_{\phi \in \mathcal{H}} \langle \psi_{a,\text{phys}} | \phi \rangle \langle \phi | \psi_{b,\text{phys}} \rangle \quad (7.99)$$

于是, 当我们考虑光学定理、胶子 Lehmann-Kallen 谱表示这种需要插入物理空间单位算符的时候, 就可以转而插入一个全 Hilbert 空间的单位算符。对于光学定理而言, 这也就意味着如果我们需要求出一个物理态的向前散射振幅的虚部, 那么可以只考虑中间态 X 中只有物理极化的胶子, 并且没有鬼传播子的情形。这保证了鬼和非物理极化胶子的贡献相互抵消。在这个意义上, 我们可以认为鬼是一种负的自由度, 抵消了非物理极化的贡献。

而在推导胶子 Lehmann-Kallen 谱表示的时候, 会有一步对胶子极化求和的步骤。如果只对两个物理极化求和, 得到的 Lehmann-Kallen 谱表示的分子上将不是 $\eta^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=+,-,0,3} \varepsilon_\lambda^\mu \varepsilon_\lambda^{*\nu}$ 。这时上面所说的这件事情就保证了, 无论对两个物理极化还是全部四个极化求和, 得到的结果是不影响物理的。从而这允许让我们安全的对四个极化求和, 得到一个形式简单的 Lehmann-Kallen 谱表示。

Zinn-Justin Equation

上面我们证明了 BRST 对称性是一个经典对称性。但是在量子理论中, 由于 BRST 变换不是线性的, 于是无法利用 Slavnov-Taylor 恒等式证明 BRST 对称性也是量子作用量的对称性, 这使得在量子理论中利用 BRST 对称性的过程比起线性对称性复杂很多。本节的余下部分的目标就是得到 BRST 对称性所对应的“Ward-Takahashi 恒等式”。

为了仿照第六章中的推导, 首先需要知道测度在 BRST 对称性下的变换。不过由于 BRST 变换是费米的, 这个处理会比较棘手: 规范场是复数而物质场、鬼场是 Grassmann 变量, 并且它们还会在 BRST 变换下相互转化, 于是不能直接使用复数或 Grassmann 变量测度的变换规则, 而是需要重新考虑一下这个情况下的 Jacobian 会是什么样子。这里不加证明的给出¹³:

$$\int d^m x d^m \phi f(x, \phi) = \int d^n y d^m \psi \text{Ber} \left(\frac{\partial(x, \phi)}{\partial(y, \psi)} \right) f(x(y, \psi), \phi(y, \psi)) \quad (7.100)$$

变量代换产生的因子被称为 **Berezinian**。对于这个 Jacobi 矩阵:

$$\frac{\partial(x, \phi)}{\partial(y, \psi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & x \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & \phi \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (7.101)$$

¹³这种混合复数和 Grassmann 变量的积分被称为 **Berezin 积分**。这个结果是从 Berezin 积分的 Wikipedia 页面中看到的。其证明可以在 Berezin 的 *Introduction to Superanalysis* 中找到。

其 Berezinian 定义为:

$$\text{Ber} \left(\frac{\partial(x, \phi)}{\partial(y, \psi)} \right) = \frac{\det(A - BD^{-1}C)}{\det D} \quad (7.102)$$

对于 BRST 变换而言, 仍然积分掉辅助场, 那么根据上一段所给出的变换, Jacobi 矩阵就是¹⁴:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} \eta_\mu^\nu (\delta^{ab} - g\theta f^{acb} c^c) & 0 & 0 & (*) & 0 \\ 0 & \delta_{ij} + igT_{ij}^a \theta c^a & 0 & (*) & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{ij} - igT_{ij}^a \theta c^a & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^{ab} - g\theta f^{acb} c^b & 0 \\ (*) & 0 & 0 & 0 & \delta^{ab} \end{array} \right) \delta^4(x - y) \quad (7.103)$$

其中 * 是不太重要的矩阵元。容易验证有 $BD^{-1}C = 0$, 于是这个 Jacobi 矩阵的 Berezinian 就是:

$$\text{Ber} \left(\frac{\partial(A_\mu^a, \Psi'_i, \bar{\Psi}'_i, c'^a, \bar{c}'^a)}{\partial(A_v^b, \Psi_j, \bar{\Psi}_j, c^b, \bar{c}^b)} \right) = \frac{\det[\eta_\mu^\nu (\delta^{ab} - g\theta f^{acb} c^c) \delta^4(x - y)]}{\det[\delta_{ij} (\delta^{ab} - g\theta f^{acb} c^c) \delta^4(x - y)]} \quad (7.104)$$

上下两个行列式对应的变换都是幺正的, 于是 Berezinian 中上下两个行列式都是 1。这就蕴含测度 $\mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}$ 都是 BRST 不变的。从而 BRST 对称性就是一个保持测度不变的经典对称性。按照我们处理对称性一贯的方法, 对 (含鬼的) 生成泛函做一个变量替换¹⁵:

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}, \xi, \bar{\xi}] = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} e^{iS_{\text{eff}}} \exp \left[i \int d^4x (J^{a\mu} \delta_B A_\mu^a + \bar{\eta} \delta_B \Psi + \delta_B \bar{\Psi} \eta + \bar{\xi}^a \delta_B c^a + \delta_B \bar{c}^a \xi^a) \right] \quad (7.105)$$

为了讨论方便, 定义积掉辅助场后的 $\delta_B \phi_\alpha = \theta \Delta_B \phi_\alpha$ 。那么上面这个式子就蕴含着:

$$\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} e^{iS_{\text{eff}}} \int d^4x (J^{a\mu} \Delta_B A_\mu^a - \bar{\eta} \Delta_B \Psi + \Delta_B \bar{\Psi} \eta - \bar{\xi}^a \Delta_B c^a + \Delta_B \bar{c}^a \xi^a) = 0 \quad (7.106)$$

定义一个含有“反场” K, ζ, κ 的生成泛函:

$$\begin{aligned} Z[J, \eta, \bar{\eta}, \xi, \bar{\xi}; K, \zeta, \bar{\zeta}_\Psi, \kappa, \bar{\kappa}] \\ = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} e^{iS_{\text{eff}}} \exp \left[i \int d^4x (K^{a\mu} \Delta_B A_\mu^a + \bar{\zeta} \Delta_B \Psi + \Delta_B \bar{\Psi} \zeta + \bar{\kappa}^a \Delta_B c^a + \Delta_B \bar{c}^a \kappa^a) \right] \end{aligned} \quad (7.107)$$

那么, 上面的方程就意味着:

$$\int d^4x \left(J^{a\mu} \frac{\delta}{\delta K^{a\mu}} - \bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\zeta}} + \eta \frac{\delta}{\delta \zeta} - \bar{\xi}^a \frac{\delta}{\delta \bar{\kappa}^a} + \xi^a \frac{\delta}{\delta \kappa^a} \right) Z[J, \eta, \bar{\eta}, \xi, \bar{\xi}; K, \zeta, \bar{\zeta}_\Psi, \kappa, \bar{\kappa}] = 0 \quad (7.108)$$

¹⁴Berezinian 也满足 $\text{Ber}(AB) = \text{Ber}(A)\text{Ber}(B)$, 于是 $\text{Ber}(A^{-1}) = 1/\text{Ber } A$ 。这里考虑的其实是 Jacobi 矩阵的逆。

¹⁵这里的场全部是重整场, 也就是说 $\delta_B \phi$ 中有那些重整化常数。

如果仍然定义 e^{iW} , 那么上式中的 Z 就可以换成 W 。为了将这个方程变为一个对量子作用量的约束, 可以将新的生成泛函做 Legendre 变换:

$$\Gamma[A, \Psi, \bar{\Psi}, c, \bar{c}; K, \zeta, \bar{\zeta}_\Psi, \kappa, \bar{\kappa}] := W[J_\phi, \eta_\phi, \bar{\eta}_\phi, \xi_\phi, \bar{\xi}_\phi; K, \zeta, \bar{\zeta}, \kappa, \bar{\kappa}] - \int d^4x (J_\phi^{a\mu} A_\mu^a + \bar{\eta}_\phi \Psi + \bar{\Psi} \eta_\phi + \bar{\xi}_\phi^a c^a + \bar{c}^a \xi_\phi^a) \quad (7.109)$$

其中 J_ϕ 的定义仍然是令 $(\delta W[J, K]/\delta J_\alpha)_{J_\phi, K} = \phi_\alpha$ 的流¹⁶。于是:

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu^a} \Gamma[\phi, K] = -J^{a\mu}, \quad \frac{\delta}{\delta \Psi} \Gamma[\phi, K] = \bar{\eta}, \quad \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} \Gamma[\phi, K] = -\eta \quad (7.110)$$

$$\frac{\delta}{\delta c^a} \Gamma[\phi, K] = \bar{\xi}^a, \quad \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} \Gamma[\phi, K] = -\xi^a \quad (7.111)$$

并且对反场而言, W 和 Γ 的泛函导数相同。于是:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left(\frac{\delta \Gamma[\phi, K]}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta \Gamma[\phi, K]}{\delta K^{a\mu}} + \frac{\delta \Gamma[\phi, K]}{\delta \Psi} \frac{\delta \Gamma[\phi, K]}{\delta \bar{\zeta}} + \frac{\delta \Gamma[\phi, K]}{\delta \bar{\Psi}} \frac{\delta \Gamma[\phi, K]}{\delta \zeta} \right. \\ & \left. + \frac{\delta \Gamma[\phi, K]}{\delta c^a} \frac{\delta \Gamma[\phi, K]}{\delta \bar{\kappa}^a} + \frac{\delta \Gamma[\phi, K]}{\delta \bar{c}^a} \frac{\delta \Gamma[\phi, K]}{\delta \kappa^a} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.112)$$

这个式子就被称为 **Zinn-Justin 方程**。由于取 $K_\alpha = 0$ 时, 新的量子作用量 $\Gamma[\phi, K]$ 就回到了原量子作用量, 于是这就是 BRST 对称性对量子作用量的约束。我们还可以将 Zinn-Justin 方程写为一个更加紧凑的形式, 为此引入一个记号:

$$(F[\phi, K], G[\phi, K]) := \int d^4x \left(\frac{\delta F[\phi, K]}{\delta \phi_\alpha} \frac{\delta G[\phi, K]}{\delta K_\alpha} \right) \quad (7.113)$$

在这个记号下, Zinn-Justin 方程就是 $(\Gamma, \Gamma) = 0$ 。

Zinn-Justin 方程的最大应用就是证明 Yang-Mills 理论的可重整性。由于这个证明实在是有些复杂, 在这里仅仅给出其基本思路: 由于做重整化的过程就是通过对场和参数的重新定义引入抵消项, 并且通过这些抵消项来抵消每个正规顶点中的发散, 而正规顶点就是量子作用量中的耦合。那么根据 Slavnov-Taylor 恒等式, 每个保持测度和 Lagrangian 的经典对称性它一定对应一个量子作用量的对称性, 这些对称性会给量子作用量中出现的耦合一些限制。如果对称性给这些耦合的限制使得所有可能出现的发散项都可以被消除, 那么具有这些对称性的理论就是可重整的。在这个证明中, 我们用到的 S_{eff} 的对称性是 Lorentz 对称性、整体规范对称性、反鬼平移不变性、鬼相位不变性和 BRST 对称性。对于前四者而言, 它们都是线性的经典对称性, 于是量子作用量会原封不动的继承这些对称性。对于 BRST 对称性而言, 它对量子作用量的限制就体现为 Zinn-Justin 方程。

7.4 One-Loop Corrections of Yang-Mills Theory

有了上面的这些讨论, 就可以开始对 Yang-Mills 理论重整化的讨论了。首先由于 Yang-Mills 理论的耦合常数没有量纲, 于是一个图的表观发散度也就是其量纲, $D = [V_n] = 4 - \frac{3}{2}n_f - n_b$, 其中 n_f 和 n_b 分别是图中的费米子、玻色子外线数。在 Yang-Mills 理论中, 表观发散度大于 0 的正规顶点有以下的几种:

¹⁶ ϕ, K 是对上面那些场和反场的缩写。

正规顶点	费米子外线数 n_f	玻色子外线数 n_b	表观发散度 D
胶子自能	0	2	2
夸克自能	2	0	1
鬼粒子自能	0	2	2
夸克-胶子顶点	2	1	0
三胶子顶点	0	3	1
双鬼粒子-胶子顶点	0	3	1
四胶子顶点	0	4	0
双鬼粒子-双胶子顶点	0	4	0
四鬼粒子顶点	0	4	0

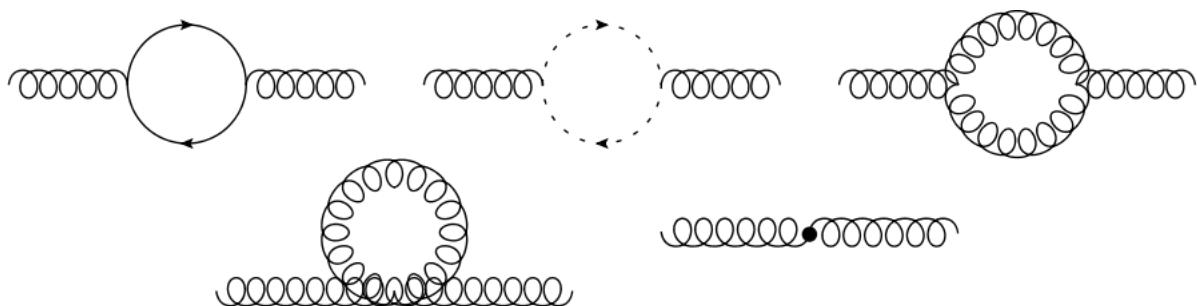
可以看到, 这里也考虑了含有鬼粒子的正规顶点, 它们对应的耦合是不出现在 $\Gamma[A, \Psi, \bar{\Psi}]$ 中的。不过如果我们在生成泛函 $Z[J, \eta, \bar{\eta}]$ 中加入对应鬼场的源 $\xi, \bar{\xi}$, 使其成为 $Z[J, \eta, \bar{\eta}, \xi, \bar{\xi}]$; 并且将量子作用量定义为 $\Gamma[A, \Psi, \bar{\Psi}, c, \bar{c}] = W[J, \eta, \bar{\eta}, \xi, \bar{\xi}] - \int (JA + \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta + \xi c + \bar{c}\xi)$, 量子作用量中就有这些鬼正规顶点对应的项。但是由于鬼粒子不是物理的, 在我们计算任何一个散射振幅对应的关联函数时, 这些鬼正规顶点都不会出现, 于是这些鬼正规顶点实际上没什么用。并且对于规范理论, 我们并不像对 QED 一样用 BPHZ 定理直接证明其可重整性, 而可以采用利用一个基于 BRST 对称性的巧妙的方式证明其可重整性¹⁷。于是也就没必要特意关注这些鬼正规顶点中发散的抵消。于是在这一节中, 我们并不会计算出所有表观发散的正规顶点。

下面我们的目标就是将 Yang-Mills 理论的重整化常数计算到单圈阶, 并且从这些重整化常数中将 Yang-Mills 理论的 Beta 函数计算到单圈阶。正如 7.2 节中所见的, Yang-Mills 理论中的八个重整化常数中只有五个是独立的。于是只要计算出 Z_1, Z_2, Z_3, Z_{2c} 和 Z_m 五个重整化常数, 就能计算出所有的重整化常数。所以在下面的计算中, 我们只会考虑胶子自能 (对应 Z_3)、夸克自能 (Z_2, Z_m)、鬼粒子自能 (Z_{2c}) 和夸克-胶子顶点 (Z_1) 这四个正规顶点。

在开始计算之前, 先说明一下: 这里利用的重整化方案是 \overline{MS} 方案, 并且将使用 R_{Z_3} 规范的 trick, 利用 Feynman 规范下的传播子计算 R_{Z_3} 规范下的重整化。

Gluon Self Energy

我们考虑的第一个正规顶点是胶子自能。在单圈阶, 对其有贡献的 1PI 图是以下的五个:



¹⁷ 具体证明见 Weinberg 第二卷第 17 章第二节。

对胶子自能有贡献的第一个图是费米子圈。根据 Feynman 规则，它对自能的贡献是：

$$i\Pi_{1,\mu\nu}^{ab} = - \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} (ig\tilde{\mu}^{\varepsilon/2})^2 \text{Tr} \left[\gamma^\mu T_{ij}^a \frac{1}{i} \frac{-l + m}{l^2 + m^2 - i\varepsilon} \gamma^\nu T_{ji}^b \frac{1}{i} \frac{-k - l + m}{(k + l)^2 + m^2 - i\varepsilon} \right] \quad (7.114)$$

利用 $T_{ij}^a T_{ji}^b = T(N)\delta^{ab}$ ，可以计算出规范群生成元对应的部分。利用第五章中早已熟悉的维数正规化、Feynman 参数化和 Wick 转动的技巧，可以计算出这个积分：

$$\begin{aligned} i\Pi_{1,\mu\nu}^{ab} = -4ig^2\tilde{\mu}^\varepsilon T(N)\delta^{ab} \int_0^1 dx & \left\{ \left(1 - \frac{d}{2}\right) \eta^{\mu\nu} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} D_1^{\frac{d}{2}-2} \right. \\ & \left. + [-2x(1-x)k^\mu k^\nu + (x(1-x)k^2 - m^2)\eta^{\mu\nu}] \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} D_1^{d/2-2} \right\} \end{aligned} \quad (7.115)$$

其中 $D_1 = m^2 + x(1-x)k^2$ 。和 QED 的情形一样，对应二次发散的 Gamma 函数 $\Gamma(1-d/2)$ 前面有一个因子 $(1-d/2)$ ，这消去了 $d=2$ 处的极点，从而这一项中是没有二次发散的。将 $(1-d/2)\Gamma(1-d/2)$ 替换为 $\Gamma(2-d/2)$ ，继续计算完这个积分的发散部分，就得到：

$$i\Pi_{1,\mu\nu}^{ab} = -\frac{ig^2}{6\pi^2\varepsilon} T(N)\delta^{ab} (k^2\eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) + (\text{finite}) \quad (7.116)$$

注意，在 QCD 中，夸克并不只有一个味道。对于夸克的每个味道而言，它都贡献一个如上的发散项。于是在一个有 N_f 味夸克的理论中，上面的结果还要乘一个因子 N_f 。

对胶子自能有贡献的第二个图是鬼粒子圈。注意由于鬼场也是 Grassmann 变量场，于是鬼粒子圈也会带来一个额外的负号。鬼粒子圈对自能的贡献是：

$$i\Pi_{2,\mu\nu}^{ab} = - \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} g^2\tilde{\mu}^\varepsilon \left[\frac{1}{i} \frac{1}{(k+l)^2 - \varepsilon} f^{dcb} l_\nu \frac{1}{i} \frac{1}{l^2 - \varepsilon} f^{cda} (l+k)_\mu \right] \quad (7.117)$$

结构常数部分可以利用关系 $f^{acd}f^{bcd} = C(A)\delta^{ab}$ 来计算出。在维数正规化下，这就是：

$$i\Pi_{2,\mu\nu}^{ab} = -ig^2\tilde{\mu}^\varepsilon C(A)\delta^{ab} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} D_2^{d/2-1} - x(1-x)k_\mu k_\nu \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} D_2^{d/2-2} \right] \quad (7.118)$$

其中 $D_2 = x(1-x)k^2$ 。可以看到，这个式子中的二次发散并没有被完全消除掉。不过这并不影响我们求出这个式子的发散部分，它是：

$$i\Pi_{2,\mu\nu}^{ab} = \frac{ig^2}{48\pi^2\varepsilon} C(A) \left(\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} k^2 + k_\mu k_\nu \right) + (\text{finite}) \quad (7.119)$$

对胶子自能有贡献的第三个图是三胶子顶点粘合的胶子圈。它对自能的贡献是：

$$\begin{aligned} i\Pi_{3,\mu\nu}^{ab} = \frac{1}{2} g^2 \tilde{\mu}^\varepsilon \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} & \frac{1}{i} \frac{\eta_{\rho\sigma}}{(k+l)^2 - i\varepsilon} \frac{1}{i} \frac{\eta_{\gamma\lambda}}{l^2 - i\varepsilon} f^{adc} f^{cdb} \\ & \times [\eta^{\gamma\rho}(-k-2l)^\mu + \eta^{\rho\mu}(2k+l)^\gamma + \eta^{\mu\gamma}(l-k)^\rho] [\eta^{\lambda\nu}(l-k)^\sigma + \eta^{\nu\sigma}(2k+l)^\lambda + \eta^{\sigma\lambda}(-k-2l)^\nu] \end{aligned} \quad (7.120)$$

经过冗长的计算, 可以算出:

$$\begin{aligned} i\Pi_{3,\mu\nu}^{ab} &= \frac{i}{2}g^2\tilde{\mu}^\varepsilon C(A) \int_0^1 dx \left\{ 3(d-1)\eta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} D_2^{d/2-1} \right. \\ &\quad \left. + [k_\mu k_\nu [d(1-4x+4x^2) - 6(1-x+x^2)] + k^2 \eta_{\mu\nu} (5-2x+2x^2)] \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} D_2^{d/2-2} \right\} \end{aligned} \quad (7.121)$$

这个式子的发散部分是:

$$i\Pi_{3,\mu\nu}^{ab} = \frac{ig^2}{16\pi^2\varepsilon} C(A) \left(\frac{19}{6}k^2\eta_{\mu\nu} - \frac{11}{3}k_\mu k_\nu \right) + (\text{finite}) \quad (7.122)$$

对胶子自能有贡献的第四个图是四胶子顶点粘合的胶子圈, 其贡献是:

$$\begin{aligned} i\Pi_{4,\mu\nu}^{ab} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-ig^2\tilde{\mu}^\varepsilon) \frac{1}{i} \frac{\eta^{\rho\sigma}\delta^{cd}}{k^2 - i\varepsilon} \\ &\quad \times [f^{abe}f^{cde}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) + f^{ace}f^{bde}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) + f^{ade}f^{bce}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma})] \\ &= -g^2\mu^\varepsilon\delta^{ab}\eta_{\mu\nu}C(A)(d-1) \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 - i\varepsilon} \end{aligned} \quad (7.123)$$

这里值得一些讨论: 首先由于这个积分中不含有标度, 于是在维数正规化下是 0, 不贡献 $\Pi(k)$ 中的发散部分¹⁸。如果仅仅需要求出重整化常数, 那么大可把这个图直接扔掉。不过由于鬼圈和三胶子顶点粘合的胶子圈的二次发散加起来也不能抵消, 于是这个图在抵消二次发散的过程中还是发挥了一定作用的。为了看到这一点, 可以对这个积分乘一个因子 $(k+l)^2/(k+l)^2$, 这样在 Feynman 参数化后就能分离出二次发散的项:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 - i\varepsilon} &= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(k+l)^2}{l^2(k+l)^2} = \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{q^2 + (1-x)^2 k^2}{(q^2 + D_2)^2} \\ &= i \int_0^1 dx \left[\frac{d}{2} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} D_2^{d/2-1} + (1-x)^2 k^2 \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} D_2^{d/2-2} \right] \end{aligned} \quad (7.124)$$

经过这样的操作, 我们就分离出了四胶子顶点粘合的胶子圈中的二次发散部分。将第 2, 3, 4 个图的二次发散部分加起来, 就是:

$$i\Pi_{\text{quad},\mu\nu}^{ab} = -ig^2\tilde{\mu}^\varepsilon C(A)\eta_{\mu\nu}\delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} D_2^{d/2-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}(d-1) + \frac{d}{2}(d-1) \right) \quad (7.125)$$

后面那个因子就是 $(d-2)^2/2$ 。和 $\Gamma(1-d/2)$ 乘起来, 就消去了 $d=2$ 处的极点, 从而就消去了胶子自能中的二次发散。

最后, 第五个图也就是胶子抵消项顶点, 在 R_{Z_3} 规范下, 就是:

$$i\Pi_{5,\mu\nu}^{ab} = -i(Z_3 - 1)(k^2\eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)\delta^{ab} \quad (7.126)$$

¹⁸如果你忘了这一点, 可以回去看看 5.8 节中关于这类积分的讨论。

于是，胶子自能的总发散部分就是：

$$i\Pi_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{ig^2}{24\pi^2\varepsilon} \delta^{ab} (k^2 \eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) [5C(A) - 4T(N)N_f] - i(Z_3 - 1)(k^2 \eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \delta^{ab} + (\text{finite}) \quad (7.127)$$

注意到，第 2, 3 个图中的贡献加起来，使得胶子自能有了 $k^2 \eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu$ 的结构。这和上一节中从规范不变性中看到的结果是一致的。从这个式子中，可以得到 $\overline{\text{MS}}$ 方案下的重整化常数 Z_3 ：

$$Z_3 = 1 + \frac{g^2}{24\pi^2\varepsilon} [5C(A) - 4T(N)N_f] + O(g^4) \quad (7.128)$$

Quark Self Energy

下一个考虑的正规顶点是夸克自能。对其有贡献的 1PI 图只有两个：



第一个图对夸克自能的贡献是：

$$i\Sigma_{1,ij}(p) = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} (ig\tilde{\mu}^{\varepsilon/2})^2 T_{jk}^a \gamma^\mu \frac{1}{i} \frac{-\not{l} + m}{l^2 + m^2 - i\varepsilon} T_{ki}^b \gamma^\nu \frac{1}{i} \frac{\delta^{ab} \eta_{\mu\nu}}{(p - l)^2 - i\varepsilon} \quad (7.129)$$

利用 $T_R^a T_R^a = C(R)$ ，可以计算出 $i\Sigma_{1,ij}(p)$ 的发散部分：

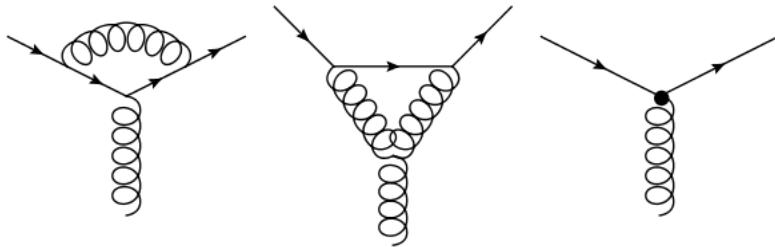
$$i\Sigma_{1,ij}(p) = -\frac{ig^2}{8\pi^2\varepsilon} C(N) \delta_{ij} (\not{p} + 4m) \quad (7.130)$$

抵消项顶点的贡献是 $i\Sigma_{2,ij}(p) = -i\delta_{ij}[(Z_2 - 1)\not{p} + (Z_m - 1)m]$ 。于是重整化常数就是：

$$Z_2 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} C(N) + O(g^4), \quad Z_m = 1 - \frac{g^2}{2\pi^2\varepsilon} C(N) + O(g^4) \quad (7.131)$$

Quark-Gluon Vertex

下一个考虑的正规顶点是夸克-胶子正规顶点。对其有贡献的 1PI 图是以下的三个：



对这个正规顶点有贡献的第一个图给出（将射入的费米子动量记做 p ，射出的费米子动量记做 q ）：

$$iV_{1,ij}^{a\mu}(p, q) = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} (ig\tilde{\mu}^{\varepsilon/2})^3 T_{ik}^b \gamma^\nu \frac{1}{i} \frac{-\not{q} + \not{l} + m}{(q - l)^2 + m^2 - i\varepsilon} T_{kl}^a \gamma^\mu \frac{-\not{p} + \not{l} + m}{(p - l)^2 + m^2 - i\varepsilon} T_{lj}^c \gamma^\sigma \frac{1}{i} \frac{\eta_{\nu\sigma} \delta^{bc}}{l^2 - i\varepsilon} \quad (7.132)$$

这个式子中生成元的部分是 $T_{ik}^b T_{kl}^a T_{lj}^b = (T^b T^a T^b)_{ij}$ 。对其处理值得单独讨论一下：

$$\begin{aligned} T^b T^a T^b &= [T^b, T^a] T^b + T^a T^b T^b = i f^{bac} T^c T^b + T^a C(N) = \frac{1}{2} i f^{bac} [T^c, T^b] + T^a C(N) \\ &= -\frac{1}{2} f^{bac} f^{cbd} T^d + T^a C(N) = T^a \left[C(N) - \frac{1}{2} C(A) \right] \end{aligned} \quad (7.133)$$

于是 $T_{ik}^b T_{kl}^a T_{lj}^b = T_{ij}^a [C(N) - \frac{1}{2} C(A)]$ 。完成其他部分的处理之后，就能得出这个积分的发散部分：

$$iV_{1,ij}^{a\mu}(p, q) = \frac{ig^3}{8\pi^2\varepsilon} T_{ij}^a \gamma^\mu \left[C(N) - \frac{1}{2} C(A) \right] + (\text{finite}) \quad (7.134)$$

第二个图对正规顶点的贡献是：

$$\begin{aligned} iV_{2,ij}^{a\mu}(p, q) &= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} (ig\tilde{\mu}^{\varepsilon/2})^2 T_{ik}^b \gamma^\nu \frac{1}{i} \frac{-l + m}{l^2 + m^2 - i\varepsilon} T_{kj}^c \gamma^\rho \frac{1}{i} \frac{1}{(q-l)^2 - i\varepsilon} \frac{1}{i} \frac{1}{(p-l)^2 - i\varepsilon} \\ &\times g\tilde{\mu}^{\varepsilon/2} f^{abc} [\eta_{\nu\rho}(p+q-2l)_\mu + \eta_{\rho\mu}(q+l-2p)_\nu + \eta_{\mu\nu}(p+l-2q)_\rho] \end{aligned} \quad (7.135)$$

因子 $f^{abc} T^b T^c$ 可以用和上面类似的技巧算出，其值是 $C(A)T^a/2$ 。这部分贡献的发散部分是：

$$iV_{2,ij}^{a\mu}(p, q) = \frac{3ig^3}{16\pi^2\varepsilon} C(A) T_{ij}^a \gamma^\mu \quad (7.136)$$

第三个图就是抵消项顶点，给出因子 $iV_{ij}^{3,a\mu} = i(Z_1 - 1)gT_{ij}^a \gamma^\mu$ 。从而夸克-胶子正规顶点的值就是：

$$iV_{ij}^{a\mu}(p, q) = \frac{ig^3}{8\pi^2\varepsilon} T_{ij}^a \gamma^\mu [C(N) + C(A)] + i(Z_1 - 1)gT_{ij}^a \gamma^\mu + (\text{finite}) \quad (7.137)$$

于是，直到单圈阶就有：

$$Z_1 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon} [C(N) + C(A)] + O(g^4) \quad (7.138)$$

Ghost Self-Energy

我们最后需要计算的重整化常数是 Z_{2c} ，为此考虑鬼粒子的自能。对其有贡献的 1PI 图只有两个：



第一个图给出：

$$i\Pi_1^{ab} = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} (g\tilde{\mu}^{\varepsilon/2} f^{dbc} k_\nu) \frac{1}{i} \frac{1}{l^2 - i\varepsilon} (g\tilde{\mu}^{\varepsilon/2} f^{dca} l_\mu) \frac{1}{i} \frac{\eta_{\mu\nu}}{(k-l)^2 - i\varepsilon} \quad (7.139)$$

其发散部分是：

$$i\Pi_1^{ab} = \frac{ig^2}{16\pi^2\varepsilon} C(A) \delta^{ab} k^2 + (\text{finite}) \quad (7.140)$$

鬼粒子的抵消项顶点给出 $i\Pi_2^{ab} = -i(Z_{2c} - 1)k^2\delta^{ab}$, 于是就有：

$$Z_{2c} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2\varepsilon} C(A) + O(g^4) \quad (7.141)$$

Renormalization Factors, Beta Function and Asymptotic Freedom

有了前面计算出的五个重整化常数, 我们就可以通过关系 $Z_{3g} = \frac{Z_1}{Z_2}Z_3$, $Z_{4g} = \frac{Z_1^2}{Z_2^2}Z_3$, $Z_{1c} = \frac{Z_1}{Z_2}Z_{2c}$ 计算出剩下的三个重整化常数了。它们是：

$$\begin{aligned} Z_{1c} &= 1 - \frac{g^2}{16\pi^2\varepsilon} C(A) + O(g^4) \\ Z_{3g} &= 1 + \frac{g^2}{12\pi^2\varepsilon} [C(A) - 2n_f T(N)] + O(g^4) \\ Z_{4g} &= 1 - \frac{g^2}{24\pi^2\varepsilon} [C(A) + 4n_f T(N)] + O(g^4) \end{aligned} \quad (7.142)$$

从这些重整化常数中, 还能计算出 Yang-Mills 理论的 beta 函数。为了讨论方便, 可以定义一个“精细结构常数” $\alpha = g^2/4\pi$ 。在维数正规化下, 重整的耦合常数和裸耦合常数之间有如下的关系：

$$\alpha_0 = \alpha \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} \tilde{\mu}^\varepsilon \quad (7.143)$$

类似之前对 QED 的讨论, 如果定义 $G(\alpha, \varepsilon) = \log \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}}$, 那么 Beta 函数就是 $\beta(\alpha) = \alpha^2 G'_1(\alpha)$, 其中 $G_1(\alpha)$ 就是 G 对 ε 的 Laurent 展开中 $1/\varepsilon$ 的系数。根据上面计算出的重整化常数, 就可以算出以下的单圈 beta 函数：

$$\frac{d\alpha}{d \log \mu} = -\varepsilon\alpha + \beta(\alpha), \quad \beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\pi} \left[\frac{11}{6}C(A) - \frac{2}{3}N_f T(N) \right] + O(\alpha^3) \quad (7.144)$$

对于 QCD 而言, $N=3$, 从而 $C(A) = 3, T(N) = 1/2$ 。于是单圈 beta 函数就是 $\frac{\alpha_s^2}{\pi} \left[\frac{11}{2} - \frac{1}{3}N_f \right]$ 。于是当夸克的味数小于 $N_f = 17$ 时, beta 函数都是小于 0 的。beta 函数小于 0 就意味着 QCD 的耦合常数是随着能标的增大而减小的。从而计算高能的过程, 例如夸克-夸克散射的散射截面时, 微扰论就是一个好的理论。但当我们计算低能物理, 例如和质子的内部结构相关的物理时, 耦合常数就增大到微扰论坏掉的程度, 只能仰赖非微扰的方法, 例如 AdS/CFT 对偶或者格点场论。QCD 的这种性质被称为渐近自由。

有了 QCD 的 beta 函数, 自然就可以求解重整化群方程, 来得到单圈水平上耦合常数随能标的演化, 也可以求出其“Landau 奇点”。由于 QCD 是一个渐进自由的理论, 其“Landau 奇点”“并不在高能区, 而在低能区¹⁹。利用 α_s 的测量值 $\alpha_s(10 \text{ GeV}) = 0.18$, 可以

¹⁹物理学家们通常不将低能区的“Landau 奇点”叫做“Landau 奇点”, 而是将其称为动力学标度, 而将重整化群产生这一标度的现象称为量纲嬗变。这很大程度上是物理学家的习以为常。

计算出 QCD 的动力学标度 $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 200 \text{ MeV}^{20}$ 。前面我们也提到，耦合常数并不会真的跑到无穷大，而计算出无穷大的耦合常数是由于我们的微扰论不再适用了。于是 Λ_{QCD} 就可以指示微扰论不适用的能标：当我们的能标和 Λ_{QCD} 可比拟时，微扰 QCD 就坏掉了。在下一节的讨论中，我们会看到：这也意味着 QCD 处于色禁闭中。

7.5 Confinement and IR Phases of Yang-Mills Theory

从上面计算出的 beta 函数中可以看到，对于同一个规范群的规范理论而言，不同的 N_f 会带来完全不同的红外、紫外行为。例如 $N_f \leq 17$ 的 QCD 的 beta 函数大于 0，于是理论在红外区间弱耦合，而在紫外区间是强耦合的；真实的 $N_f = 6$ 的 QCD 则截然相反，理论在红外强耦合而在紫外弱耦合。这些不同的红外、紫外行为可以被认为是理论的不同相²¹。

当然，前面的这几句话是不严谨的，如果我们需要严谨地探究 Yang-Mills 理论中有什么样的 IR 相，首先要思考的问题就是应该如何分类理论的这些行为。对于理论的红外行为而言，这可以通过两个带色荷的粒子之间的相互作用势来实现。注意到：如果我们将一切有质量的自由度都积分掉，那么在这个 IR 有效理论中将不会有质量标度，从而其中的相互作用势 $V(r)$ 应该只依赖于跑动耦合常数 α 和 r 。根据 $[V] = 1$ ，于是 $V(r)$ 只能有以下的行为：

$$V(\alpha, r) = \frac{f(\alpha, \log r)}{r} \quad (7.145)$$

其中 $f(\alpha, \log r)$ 中只含有 r 的对数依赖。而根据 5.3 节中的讨论，重整化群方程能够吸收掉相互作用势中的一切大对数，从而 $f(\alpha, \log r)$ 也就只能依赖于 r^{-1} 这个能标上的跑动耦合常数 $\alpha(r^{-1})$ 。而在固定能标减除方案下，我们定义耦合常数时就相当于将一个能标处的 $V(r)$ 取做了 $\alpha(\mu)/r$ 的形式，从而在任意一个能标上，相互作用势一定有形式：

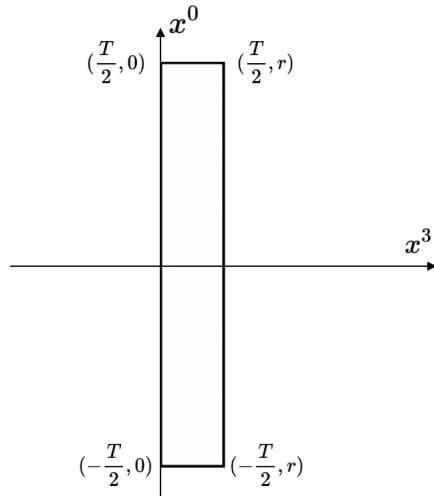
$$V(r) = \frac{\alpha(r^{-1})}{r} \quad (7.146)$$

由此可以看到，相互作用势中的确包含跑动耦合常数的全部信息，从而利用理论的相互作用势，我们可以将理论的红外行为分类为不同的相。鉴于分类这些相的标准是理论的红外行为，于是这些相被称为理论的 **IR 相**。读到这里，你可能会问：我们一般通过序参量的不同行为来区分不同的相。而既然我们将这些红外行为称为 IR 相，那么它对应的序参量是什么呢？

答案可能有些惊人：分类这些相的序参量是 Wilson 圈的期待值 $\langle W_C[A] \rangle$ 。具体而言，考虑下面这个回路上的 Wilson 圈：

²⁰ 回忆 5.4 节末尾的讨论：当我们在不同的能标计算耦合常数的跑动时，要考虑的味数是不一样的。当 $\mu < m_f$ 时， m_f 对跑动的贡献就可以近似地忽略不计。于是真正计算（固定能标减除方案下的）跑动耦合常数和动力学标度时， N_f 要取质量小于 μ 的有效味数。

²¹ 这里的讨论来自于 David Tong 的 Gauge Theory 讲义。



为了弄清楚这个 Wilson 圈 $\langle W_C[A] \rangle$ 的期待值有什么物理意义, 可以用路径积分重新写出这个东西:

$$\langle W_C[A] \rangle = \int \mathcal{D}A \mathcal{P} \exp \left[iS_{\text{Gauge Field}}[A] + ig \oint_C dx^\mu \mathbf{A}_\mu \right] \quad (7.147)$$

后面这一项可以被认为是一个“试探色荷”在规范场下的作用量。为了弄明白这是什么意思, 让我们考虑一个非 Abelian 规范理论中的粒子, 其世界线随着固有时的变化为 $x^\mu(\tau)$ 。除去这些空间自由度之外, 它应该还携带一些内部的规范自由度, 例如 QCD 中的夸克应该带有颜色。如果令这个粒子处于表示 R 中, 那么这个内部自由度就可以用一个 $\dim R$ 维的复矢量 w_i 描写。类似 QED 中的电荷, 这个 w 有时候就被称为粒子携带的色荷。

当这个粒子在空间中运动时, 其内部的色荷也在色空间上改变。在前面我们看到, 规范势的地位就类似联络, 于是色荷应该满足以下的平行移动方程:

$$i \frac{dw}{d\tau} = g \frac{dx^\mu}{d\tau} \mathbf{A}_\mu(x) w \quad (7.148)$$

这可以被认为色荷 w 的运动方程。如果我们希望写出一个色荷相关的作用量, 就应该让其 Euler-Lagrange 方程对应这个运动方程。满足这一点的最简单的选取方式是:

$$S_{\text{Chromocharge}}[\lambda, w, w^\dagger] = \int d\tau \left[i w^\dagger \frac{dw}{d\tau} + g \frac{dx^\mu}{d\tau} w^\dagger \mathbf{A}_\mu(x(\tau)) w \right] \quad (7.149)$$

有了这个 Lagrangian 之后, 我们就能描述一个具有固定经典空间轨迹, 但是带有量子色荷的粒子在量子的规范场下的运动了。在这个体系中, 关联函数 $\langle w_i(\tau = \infty) w_i^\dagger(\tau = -\infty) \rangle$ 可以被写为如下的路径积分:

$$\langle w_i(\tau = \infty) w_i^\dagger(\tau = -\infty) \rangle \propto \int \mathcal{D}A \mathcal{D}w \mathcal{D}w^\dagger e^{iS_{\text{Yang-Mills}}[A] + iS_{\text{Chromocharge}}[w, w^\dagger]} w_i(\tau = \infty) w_i^\dagger(-\tau = \infty) \quad (7.150)$$

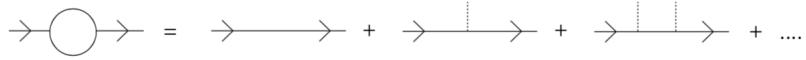
我们先不加入规范场的动力学, 仅仅考虑以下的积分, 其物理意义就是背景场 A 下的关联函数:

$$\langle w_i(\tau = \infty) w_i^\dagger(\tau = -\infty) \rangle_A \equiv \int \mathcal{D}w \mathcal{D}w^\dagger e^{iS_{\text{Chromocharge}}[w, w^\dagger]} w_i(\tau = \infty) w_i^\dagger(-\tau = \infty) \quad (7.151)$$

这个路径积分可以用 Feynman 图的方法来计算。我们可以将色荷作用量中的第一项 $d/d\tau$ 看作传播子的逆，而将第二项看作一个相互作用顶点。那么这个理论的 Feynman 规则就是：

$$\text{传播子: } \theta(\tau_1 - \tau_2) \delta_{ij}, \quad \text{顶点: } ig \frac{dx^\mu}{d\tau} \mathbf{A}_\mu(x(\tau)) \quad (7.152)$$

而上面这个关联函数可以被看作以下图的和²²:



对这些图求和后，不难看出：

$$\langle w_i(\tau = \infty) w_i^\dagger(\tau = -\infty) \rangle_A = \text{Tr P exp} \left(i \int d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} \mathbf{A}_\mu(\tau) \right) = W_P[A] \quad (7.153)$$

这也就是沿粒子世界线定义的 Wilson 线 $W_P[A]$ 。当我们考虑规范场的量子效应后，就有：

$$\langle w_i(\tau = \infty) w_i^\dagger(\tau = -\infty) \rangle = \langle W_P[A] \rangle \quad (7.154)$$

通过正则量子化的技巧，容易证明 $[w, H] = 0$ ，也就是说 $w^\dagger|\Omega\rangle$ 和真空具有相同的能力。从而如果我们加入这个试探粒子后体系的基态能量成为了 E_0 ，那么这个关联函数应该正比于：

$$\langle w_i(T/2) w_i^\dagger(-T/2) \rangle = \langle W_P[A] \rangle \propto e^{iE_0 T} \quad (7.155)$$

而对我们之前考虑的这个 Wilson 圈而言，它可以看作一个轨迹为“先正着时间方向在 0 处运动 T，再逆着时间方向在 r 处运动 T”的粒子的上述关联函数。由于逆着时间方向运动的粒子可以被我们理解为反粒子，于是其真空期待值 $\langle W_C[A] \rangle$ 就应该正比于：

$$\langle W_C[A] \rangle \propto e^{iE_{\text{pair}} T} \propto e^{iV(r)T} \quad (7.156)$$

其中 E_{pair} 是这对正反粒子体系的基态总能量，而 $V(r)$ 就是除去自相互作用能后剩下的相互作用势。从这里就能看出，Wilson 圈的期待值中包含着理论中两个试探色荷之间的相互作用势的信息。于是我们便可以利用 Wilson 圈期待值的 IR 行为来一窥相互作用势的 IR 行为，进而给理论的 IR 行为分类为不同的 IR 相。

使用 Wilson 圈作为序参量的一个另外的原因是它们可以自然地在格点场论中计算出来。在格点场论中，我们通常会将路径积分做一个 Wick 转动，定义 $x_4 = ix^0$ 。从而对于一个在 x_4 方向延伸 T、在空间方向延伸 r 的 Wilson 圈而言，其真空期待值应该正比于 $\langle W_C \rangle \propto e^{-V(r)T}$ 。对于后面看到的禁闭相而言，由于其强耦合本质，微扰论完全无法计算那时的相互作用势。于是关于禁闭相的结果基本都要靠格点场论来非微扰地计算。

IR Phases of QED

明白了如何分类理论的红外行为后，就终于可以看看规范理论中会出现什么样的红外行为了。首先让我们考虑最简单的 QED 中究竟有什么 IR 相。回忆我们曾经在 5.4 节中计算出 QED 的 beta 函数为：

$$\beta(\alpha) = \frac{2}{3} \alpha^2 \quad (7.157)$$

²²这个图也来自 David Tong 的 Gauge Theory 讲义。

当然, 这个 beta 函数是在 $\overline{\text{MS}}$ 方案下计算出的。而我们计算相互作用势时使用的是固定能标减除方案, 从而事实上这个 beta 函数并不能用来计算相互作用势的跑动行为。不过根据 5.4 节末尾的讨论, 如果我们在能标小于某个费米子质量时将这个费米子对 beta 函数的贡献忽略不计, 那么计算出的 $\overline{\text{MS}}\beta$ 函数将是对固定能标减除方案 beta 函数的一个很好的近似。于是如果理论中的费米子是无质量的, 这个 beta 函数才在 $r \sim \infty$ 时成立, 而如果理论中的费米子有质量, 由于 $r > 1/m$ 时将不会有任何东西贡献 beta 函数, 于是体系的耦合常数将会停止跑动。

这两种行为事实上就对应 QED 的两种 IR 相: 如果体系中存在无质量费米子, 那么精细结构常数在 $r \sim \infty$ 时的行为将会是:

$$\alpha(r^{-1}) \sim \frac{1}{\log r \mu_0} \quad (7.158)$$

它给出如下的相互作用势:

$$V(r) \sim \frac{1}{r \log r \mu_0} \quad (7.159)$$

这被称为 **IR 自由相**。而如果体系中不存在无质量费米子, 那么精细结构常数将在 $r \sim \infty$ 时停止跑动, 给出如下的相互作用势

$$V(r) \sim \frac{1}{r} \quad (7.160)$$

这就是我们熟悉的 Coulomb 相互作用, 于是体系的这种红外行为被称为 **Coulomb 相**。

除去无质量费米子之外, 标量粒子也会给出不同的红外行为。假设体系中存在 Higgs 粒子, 使得 $U(1)$ 规范对称性自发破缺, 规范玻色子获得质量 m_A 。此时, 体系的相互作用势将会被 $e^{-m_A r}$ 指数压低, 这又给出一种全新的 IR 行为, 称为 **Higgs 相**。

The IR Free Phase

接下来, 我们终于可以将目光转向 Yang-Mills 理论中。上一节中我们计算出 Yang-Mills 理论的 beta 函数为:

$$\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\pi} \left[\frac{11}{6} C(A) - \frac{2}{3} N_f T(N) \right] + O(\alpha^3) \quad (7.161)$$

对于一个规范群为 $SU(N)$, 并含有 N_f 味费米子的理论而言, 这就成为:

$$\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\pi} \left[\frac{11}{6} N - \frac{1}{3} N_f \right] + O(\alpha^3) \quad (7.162)$$

同样, 这里的结果是 $\overline{\text{MS}}$ 方案下的, 如果我们用它来近似固定能标减除方案下的结果, 那么 N_f 要被理解为质量低于当前能标的有效味数。例如在 QCD 中, 当我们考虑 Λ_{QCD} 附近的物理时, 由于只有 u, d, s 三味夸克的质量小于这个能标, 于是有效的 N_f 就是 3。同样, 如果我们希望计算核子尺度 $r \sim 1/\Lambda_{\text{QCD}}$ 上夸克之间的有效相互作用势, 也要取 $N_f = 3$ 。当我们讨论理论中的 IR 相时, 通常考虑的尺度都是 $r \sim \infty$, 于是 N_f 事实上是理论中无质量夸克的味数。

理论中可能存在的第一种红外行为出现在无质量味数 $N_f \geq \frac{11}{2}N$ 时。此时耦合常数在红外下的行为如同：

$$\alpha(r^{-1}) \sim \frac{1}{\log r \mu_0} \quad (7.163)$$

从而，两个夸克之间的有效相互作用势是：

$$V(r) \sim \frac{1}{r \log r \mu_0} \quad (7.164)$$

这样的红外行为和 QED 中的 IR 自由相完全类似，于是也被称为 **IR 自由相**。在红外下，这些理论是弱耦合的，可以利用微扰论轻易地计算。不过类似 QED，这样的理论会在紫外下出现 Landau 奇点，这意味着它不可能是一个“终极理论”，而应该是一个 UV 理论的低能有效理论。

The Conformal Window

当 N_f 小于但是接近 $\frac{11}{2}N$ 时，beta 函数的单圈贡献会变得很小，我们需要考虑 beta 函数的两圈贡献：

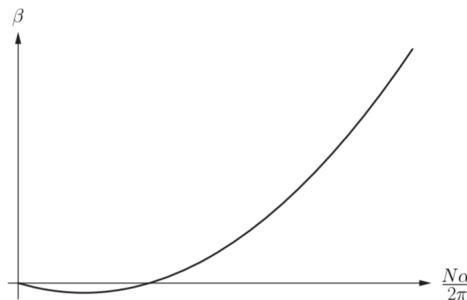
$$\beta(\alpha) = \beta_1 \alpha^2 + \beta_2 \alpha^3 + \dots \quad (7.165)$$

在这个情况下，当 α 取 $\alpha_* = -\frac{\beta_1}{\beta_2}$ 时体系的 beta 函数会成为 0，从而 α_* 是一个重整化群下的不动点——这被称为 **Banks-Zaks 不动点**。我们刚才计算出了在 $N_f < \frac{11}{2}N$ 时单圈 beta 函数会小于 0，而根据一些更加复杂的计算，两圈 beta 函数 β_2 会在 $N_f > 34N^3/(13N^2 - 3)$ 时大于 0，从而在这个区间中总是存在 Banks-Zaks 不动点的。不过 $N_f < 34N^3/(13N^2 - 3)$ 时，三圈 beta 函数又会给出一个正的贡献，使得理论中仍然存在 Banks-Zaks 不动点。总的来说，当 N_f 处于 $N_* < N_f < \frac{11}{2}N$ 的“窗口”，我们总是期待理论中存在这样的一个不动点，不过由于我们需要计算到无穷阶微扰才能弄清楚 N_* 究竟在哪里，从而 N_* 的具体值至今还是个未解之谜。

容易计算出，在 Banks-Zaks 不动点处 beta 函数的导数为：

$$\beta'(\alpha_*) = 2\beta_1 \alpha_* + 3\beta_2 \alpha_*^2 + \dots = \beta_2 \alpha_* + \dots > 0 \quad (7.166)$$

也就是说，Banks-Zaks 不动点处 $\alpha(\mu)$ 的二阶导数大于 0，从而是一个“稳定”的不动点。只要 $\alpha(\mu)$ 的初始值不距离 α_* 太遥远，在红外下耦合常数总会跑动到 Banks-Zaks 不动点。更加精细的计算表明，在这个窗口中，体系的 beta 函数随能标的变化如下图所示²³，从而对所有 $\alpha(\mu)$ 的初始值，这个结论都成立：



²³这个图来自 M. Shifman 的 *Advanced Topics in Quantum Field Theory: A Lecture Course*

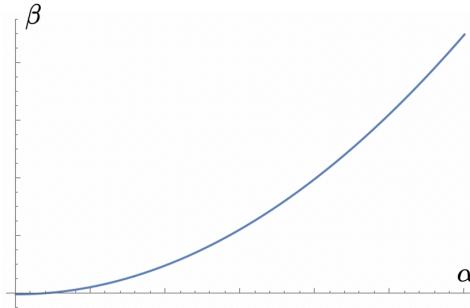
由于这 N_f 个费米子都是无质量的, 此时 Yang-Mills 理论中不存在一个内禀的质量标度, 于是 Banks-Zaks 不动点上的理论在重标度变换 (也就是将所有量纲为 d 的量乘上因子 b^d) 下是不变的。这意味着在红外, $V(r)$ 只能具有以下形式的依赖:

$$V(r) \propto \frac{1}{r} \quad (7.167)$$

虽然没有一个严格的证明, 不过物理学家一般期待 4 维下标度不变的理论总是具有**共形对称性**的, 从而这个 $N_* < N_f < \frac{11}{2}N$ 的窗口又被称为**共形窗口**。理论的这种 IR 行为被称为**共形相**。由于这种 IR 行为和 QED 中的 Coulomb 相如出一辙, 于是这也被称为**非-Abelian Coulomb 相**。

Confinement Phase

当理论中的无质量味数 N_f 小于 N_* 时, 体系中将不再存在 Banks-Zaks 不动点, 于是 beta 函数将不会达到 0, 而如图所示一直是正的:



于是在微扰论中, 体系的耦合常数将不会“冻结”在某个不动点上, 而是随着能标降低不断增长, 造成微扰论失效。不过还好, 我们还可以通过格点场论计算 Wilson 圈的期待值来得到两个带有色荷的试探粒子 (“试探夸克”) 之间的相互作用势。计算的结果是: 在不存在物质的纯 Yang-Mills 理论中, 一个在空间方向延伸 r , 时间方向延伸 T 的 Wilson 圈的期待值为:

$$\langle W_C \rangle \propto e^{-\sigma A} \quad (7.168)$$

其中 $A = Tr$ 是 Wilson 圈的面积, 根据前面的讨论, 这意味着两个试探夸克之间的相互作用为:

$$V(r) \sim \sigma r \quad (r \rightarrow \infty) \quad (7.169)$$

也就是说, 当两个试探夸克相隔无穷远时, 它们的相互作用能将会达到无穷大! 于是在这样的理论能够描述的体系中, 任何具有非平凡色荷 (也就是处于规范群的非平凡表示) 的**非色单态**都将具有无穷大的能量, 而只有**色单态**能够具有有限的能量。从而在实验上, 就只能观测到处于色单态的粒子。对于处于非色单态的基本粒子而言, 在实验上也只能观测到它们处于色单态的束缚态。这个现象就被称为**色禁闭**, 理论的这种 IR 行为就被称为**禁闭相**。前面给出的“面积法则” $\langle W_C \rangle \propto e^{-\sigma A}$ 就是对禁闭相的一个判据。

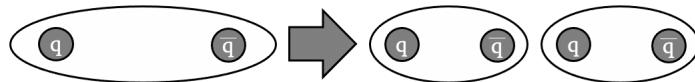
在我们的世界中, QCD 就处于这样的禁闭相中。在实验中, 我们也确实没有观测到任何非色单态的粒子, 例如夸克和胶子, 而只观测到了处于色单态中的夸克、胶子束缚态——**强子**。禁闭同时意味着在低能标下理论的粒子谱中将仅仅包含这些色单态, 例如夸克

结合成介子和重子、胶子结合成胶球。那么对于一个处于禁闭相的理论，一个重要的问题就是：如何得到这些色单态复合粒子的动力学？我们将不会在这里回答这个问题，而是将这个问题留到第八章中处理。在那时，我们会证明存在禁闭的理论中一定会发生手征对称性破缺，利用这个手征对称性破缺，我们可以得到关于这些介子、重子的有效理论——手征微扰论。不幸的是，手征微扰论并不能处理一切这种色单态，它对于胶球等东西而言无能为力。事实上，人类目前还对这些色单态复合粒子的性质知之甚少。例如我们还不能完全明白禁闭后的这些自由度中是否含有无质量粒子²⁴！

当然，前面这些讨论都仅仅在理论中不存在物质场时成立。对于存在物质场的理论而言，Wilson 圈事实上不会遵循上述的面积法则，而是改为遵循周长法则：

$$\langle W_C \rangle \propto e^{-\mu P}, \quad P = 2(T + r) \quad (7.170)$$

这个现象有一个很清晰的物理解释：周长法则对应恒定势，也就意味着两个试探夸克之间的相互作用在远距离被“屏蔽”。这个屏蔽的来源可以被认为是：当正反夸克相距一定距离时，其间的色“电场”过强，导致从真空中涌现出一对正反夸克对，分别和之前的正反夸克形成色单态的介子，如图所示：



而两个介子之间的相互作用近似可以忽视，于是正反夸克对之间的相互作用在超过这个距离之后被屏蔽。从这个直观角度看，这个非无穷大的势并不意味着禁闭被解除，而仅仅意味着两个束缚态之间不存在类似非色单态粒子之间的相互作用。

在非 Abelian 规范理论中，如果规范对称性发生自发破缺，规范玻色子存在质量，此时理论也会处于 **Higgs 相**。此时，两个试探粒子之间的相互作用也会被屏蔽，Wilson 圈也会遵循类似的周长法则，于是似乎不存在一个序参量可以区分 Higgs 相和禁闭相。事实上，在某些理论中，Higgs 相和禁闭相就是同一个相，它们可以通过参数的连续变化过渡到对方。

在这些讨论的最后，我们需要明确：这里讨论的相都是 IR 相，分类的是理论的红外性质。Yang-Mills 理论在有限温度、有限化学势下还会具有十分丰富的其他相。例如在高温下，一个在零温下处于禁闭相的理论会发生解禁闭相变，呈现夸克-胶子等离子体相。这些相变的序参量就不再是简单的 Wilson 圈，而是 Polyakov 圈等其他的东西了，由于对这些相的讨论超出这个 notes 的范围，我们就不深入探讨下去了。

²⁴这事实上是千禧年七大难题之一——Yang-Mills 理论的 mass gap 问题。如果你解决了这个问题，你将会获得 100 万美元的奖励！

Chapter 8

The Standard Model

8.1 Electroweak Unification and The Standard Model

在上一章中，我们对规范理论有了一个大致的了解。这一章的目的就是利用规范理论来试图理解这个世界究竟是如何运作的。根据还原论的观点，只要知道这个世界的基本组分以及基本组分之间的相互作用，就明白了世界的运作方式。在这一章中，我们会给出目前人类对微观世界的最深理解¹——粒子物理标准模型。

根据人类现在的认知，世界由夸克、轻子、规范玻色子和 Higgs 粒子组成。其中夸克、轻子有三代，是费米子。这些费米子构成我们常见的一切物质：夸克构成质子和中子，质子和中子组合成原子核，它和电子一起构成原子。从而激发这些粒子的量子场也被称为物质场。规范玻色子负责传递物质之间的相互作用，而人类目前认知的基本相互作用一共有四种——电磁相互作用、弱相互作用、强相互作用和引力。这四种相互作用除引力之外的三种²都可以用下面讨论的标准模型所描述。

标准模型是一个规范理论，并且由两部分相对独立的理论构成：描述强相互作用的理论就是上一章中讨论过的量子色动力学，它是一个 $SU(3)$ 的规范理论。描述电磁相互作用和弱相互作用的理论是电弱理论，它是规范群为 $SU(2) \times U(1)$ 的规范理论，有时候也称这两个群为电弱 $SU(2)$ 和超荷 $U(1)$ 。不过正如前面所见的，如果没有对称性自发破缺的话，由于规范玻色子的质量项会破坏规范不变性，于是规范玻色子总是无质量的。但由于实验要求传递弱相互作用的玻色子是有质量的，于是需要引入 Higgs 机制来赋予传递弱相互作用的玻色子以质量。下面我们就详细讨论一下这件事情。

Electroweak Unification

先不考虑物质场，只考虑 $SU(2) \times U(1)$ 规范理论中的规范场 W_μ^a, B_μ 和复标量 Higgs 场 $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ 的耦合。并假设 Higgs 场在 $SU(2)$ 群下按照基础表示 (2) 变换，在 $U(1)$ 群下按照表示 $-\frac{1}{2}$ 变换（也可以说它具有超荷-1/2）。这也就是说，在任何一个 $SU(2) \times U(1)$ 变换

¹更严格的说，已经被实验验证的最深刻理解。

²至于为什么引力无法用量子场论描述，第五章末尾已经给出了相关的讨论——引力是不可重整的。

下, 其变换关系是:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix} = \exp \left(-ig_2 \theta^a \frac{\sigma^a}{2} \right) \exp(-ig_1 \alpha Y) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

其中 $\sigma^a/2$ 和 Y 就是对应表示的生成元, 对于 Higgs 场所处的表示, σ^a 是 Pauli 矩阵, $Y = -\frac{1}{2}\mathbb{I}$ 。于是这个规范理论的 Lagrangian 就是:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi) \quad (8.2)$$

其中协变导数是:

$$D_{\mu,ij} = \partial_\mu \delta_{ij} - ig_2 W_\mu^a \frac{\sigma_{ij}^a}{2} - ig_1 B_\mu Y_{ij} \quad (8.3)$$

如果势 $V(\phi)$ 使得 Higgs 场具有多个简并的真空, 并且我们关心的真空中 Higgs 场具有以下形式的真空期待值³:

$$\langle \Omega | \phi | \Omega \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

如果在规范变换中取 $\theta^1 = \theta^2 = 0, g_2 \theta^3/2 = -g_1 \alpha Y$, 那么这个真空就在这样的规范变换下不变。这也就是说, 选择这样的真空相当于将规范群 $SU(2) \times U(1)$ 群破缺到了 $U(1)$ 群, 这个 $U(1)$ 群中变换就是满足 $g_2 \theta^3/2 = -g_1 \alpha Y$ 的规范变换。一会我们会看到, 这个 $U(1)$ 群就对应电磁相互作用。

根据 Goldstone 定理, 从 $SU(2) \times U(1)$ 到 $U(1)$ 破缺了三个生成元对应的对称性, 于是理论中也就会产生三个 Goldstone Boson。如果我们选择幺正规范, 那么这三个 Goldstone Boson 就都将被“吃掉”, 给 Higgs 场留下一个实自由度。于是在幺正规范下, Higgs 场的量子激发可以被写为:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

将对称性自发破缺后的 Higgs 场代入上面的作用量。首先考虑 Higgs 项, 有:

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) = & -\frac{1}{2} \left[\partial_\mu H \partial^\mu H + \frac{g_2^2}{4} (v + H)^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} (v + H)^2 (W_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (8.6)$$

第一项就是场 H 的动力学项。对于第二项, 如果定义:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2) \quad (8.7)$$

³在脚注里面多说几句: Higgs 的这个真空期待值是取决于势 $V(\phi)$ 的形式的。不过由于可重整性和对称性的要求, 如果 Higgs 场就是一个 $SU(2)$ 二重态中的复标量场, 那么 Higgs 的势实际上就只能是 ϕ^4 理论中的 $\mu^2 \phi_i^\dagger \phi_i + \lambda (\phi_i^\dagger \phi_i)^2$ 。如果一个模型中需要有 ϕ^4 之外的 Higgs 势, 就需要 Higgs 不仅仅是两个复标量场。这样的模型被称为 **Composite Higgs**。

那么这一项就是 $-\frac{g_2^2}{4}(v + H)^2 W_\mu^- W^{+\mu}$, 就是这个复矢量场的质量项。如果将场 W^\pm 激发的粒子称为 **W Boson**, 那么其质量就是 $m_W = g_2 v/2$ 。对于后一项, 为了将这两个场写成质量本征态, 就需要对角化中间的矩阵:

$$\begin{pmatrix} W^{3\mu} & B^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^\mu & A^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^2 + g_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

其中:

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} & -\frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \\ \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} & \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

这里我们定义了 **Weinberg 角** $\theta_w = \tan^{-1}(g_1/g_2)$ 。可以看到, 规范场 W^3 和 B 经过混合后, 成为了一个具有 $m_Z = g_2 v/2c_w$ 的重矢量场和一个无质量的矢量场 A 。

利用这些新定义的场 W^\pm, Z, A , 经过一些麻烦的计算, 可以将原来的 Lagrangian 写为:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - D^\dagger \mu W^{-\nu} D_\mu W_\nu^+ + D^\dagger \mu W^{-\nu} D_\nu W_\mu^+ \\ & + ie (F^{\mu\nu} + \cot \theta_w Z^{\mu\nu}) W_\mu^+ W_\nu^- - \frac{1}{2} g_2^2 (W^{+\mu} W_\mu^- W^{+\nu} W_\nu^- - W^{+\mu} W_\mu^+ W^{-\nu} W_\nu^-) \\ & - \left(m_W^2 W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) (1 + H/v)^2 - \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) \end{aligned} \quad (8.10)$$

其中对 W^+ 的协变导数是:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2(s_w A_\mu + c_w Z_\mu) \quad (8.11)$$

从这个 Lagrangian 中可以看到, 如果令 Z 和 H 在一个局域 $U(1)$ 变换下不变, 令 W^\pm 在局域 $U(1)$ 变换下按 $W^\pm \rightarrow e^{\mp i g_2 s_w \alpha}$ 变换, 并且认为 A 是这个局域 $U(1)$ 对称性对应的规范场, 那么理论将在这个局域 $U(1)$ 变换下保持不变。这个 $U(1)$ 对称性就是前面所述的未破缺的 $U(1)$ 对称性, 这被我们诠释为电磁 $U(1)$ 对称性。那么上面这些变换关系就意味着 Z Boson 和 Higgs Boson 不带电, W^\pm 带电 $g_2 s_w/e$ 。由于实验要求 W Boson 带一个单位电荷, 于是就有关系:

$$g_2 = \frac{e}{\sin \theta_w} \quad (8.12)$$

于是, 电弱理论中的两个耦合常数 g_1, g_2 就可以用电磁耦合常数 e 和 Weinberg 角 θ_w 表示出来。从这个意义上, 我们说 Weinberg 角是和元电荷一样基础的物理量, 它刻画了电磁相互作用和弱相互作用耦合强度的相对大小。由于在对撞机上测量出 $m_W = 80\text{GeV}$, $m_Z = 91\text{GeV}$, 于是 Weinberg 角的测量值就大约是 $\sin^2 \theta_w = 0.223$ 。

Weak Interaction of Fermions

下面我们就要在这个理论中加入物质场。考虑一系列处于 $SU(2)$ 群表示 R 中, 具有超荷 Y 的费米场 Ψ_i , 并先不考虑这些物质场的质量项。加入物质场之后的 Lagrangian 就是:

$$\mathcal{L} = (\text{Gauge} + \text{Higgs}) + \bar{\Psi}_i (i \not{D})_{ij} \Psi_j \quad (8.13)$$

其中物质场的协变导数 D 是：

$$D_{\mu,ij} = \partial_{\mu}\delta_{ij} - ig_2W_{\mu}^aI_{\text{R}}^a - ig_1B_{\mu}Y\delta_{ij} \quad (8.14)$$

其中 T_{R} 是表示 R 中的 $\text{SU}(2)$ 群生成元。如果将 D 中的规范场用电弱对称性自发破缺后的 A, Z, W^{\pm} 写出，Lagrangian 就变为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Fermion}} = & i\bar{\Psi}_i\partial\Psi_i + \frac{g_2}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_i\left(W^{+}T_{\text{R},ij}^{+} + \frac{g_2}{\sqrt{2}}W^{-}T_{\text{R},ij}^{-}\right)\Psi_j \\ & + \bar{\Psi}_i\left(g_2c_wT_{\text{R},ij}^3 - g_1s_wY\delta_{ij}\right)\not{Z}\Psi_j + \bar{\Psi}_i\left(g_2s_wT_{\text{R},ij}^3 + g_1c_wY\delta_{ij}\right)\not{A}\Psi_j \end{aligned} \quad (8.15)$$

可以看到，费米子和玻色子 W^{\pm}, Z, A 都有相互作用。如果将这些相互作用写成流耦合的形式：

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{1}{\sqrt{2}}g_2W_{\mu}^{+}J^{-\mu} + \frac{1}{\sqrt{2}}g_2W_{\mu}^{-}J^{+\mu} + \frac{e}{s_w}c_wZ_{\mu}J_Z^{\mu} + eA_{\mu}J_{\text{EM}}^{\mu} \quad (8.16)$$

其中流 J^{\pm} 被称为弱带电流， J_Z 被称为弱中性流，而 J_{EM} 就是电磁流。根据上面的 Lagrangian，可以得到这些流是：

$$J^{\pm\mu} = \bar{\Psi}_iT_{\text{R},ij}^{\mp}\gamma_{\mu}\Psi_j, \quad J_{\text{EM}}^{\mu} = \bar{\Psi}_i(T_{\text{R},ij}^3 + Y\delta_{ij})\gamma_{\mu}\Psi_j, \quad J_Z^{\mu} = \bar{\Psi}_i(c_w^2T_{\text{R},ij}^3 - s_w^2Y\delta_{ij})\gamma_{\mu}\Psi_j \quad (8.17)$$

如果选择场为 T_{R}^3 的本征矢，并且对应本征值 T^3 ，那么这个场就具有确定的电荷：

$$Q = T^3 + Y \quad (8.18)$$

讨论完了一般的情况，就可以来引入标准模型中的费米子了。标准模型中一共有三代费米子，每一代中都有一种上型夸克、一种下型夸克，一种带电轻子和一种中微子。它们的名字分别是：

Generation	第一代	第二代	第三代
上型夸克	上夸克 u	粲夸克 c	顶夸克 t
下型夸克	下夸克 d	奇异夸克 s	底夸克 b
带电轻子	电子 e	μ 子 μ	τ 子 τ
中微子	电子中微子 ν_e	μ 子中微子 ν_{μ}	τ 子中微子 ν_{τ}

在标准模型中，左手费米子场和右手费米子场处于在规范群的不同表示，也就是说它们在规范变换下的行为不同。为了理解这一点，我们就要将 Dirac 旋量场 Ψ 看作两个 Weyl 旋量场的“拼合”：

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}, \quad \Psi_L := \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} \xi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_R := \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_R \end{pmatrix} \quad (8.19)$$

而 ξ_L, χ_R 都是独立的 Weyl 场，它们可以在规范群的不同表示中。那么如上定义的 Ψ_L, Ψ_R 当然可以在规范群的不同表示中。由于标准模型有这样的特征，称标准模型是一个手征规范理论。在我们计算的时候，由于 Lagrangian 的形式和一个正常 Dirac 旋量场完全相同，于是依然可以将这些费米子场看作 Dirac 旋量场，将相互作用项中的 Ψ_L 看成作用了算符 $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ 的 Ψ 去处理。

手征规范理论有一个重要的性质——**宇称不守恒**，也称 **P 破坏**。为了看到这一点，可以对 Lagrangian 中的左手项 $i\bar{\Psi}_{i,L}\not{D}_{ij}\Psi_{j,L}$ 做一个 P 变换。在第二章中看到过：在 P 变换下，场 Ψ 变为 $\eta\beta\Psi$ 。于是 Ψ_L 变为 $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\eta\beta\Psi = \eta\beta\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi = \eta\beta\Psi_R$ 。从而左手项 $i\bar{\Psi}_{i,L}\not{D}_{ij}\Psi_{j,L}$ 就变成了右手项 $i\bar{\Psi}_{i,R}\not{D}_{ij}\Psi_{j,R}$ 。对于左右手场变换规律不同的手征规范理论，这也就意味着 Lagrangian 不具有 P 下的对称性，从而宇称不守恒。

下面详细看看标准模型中费米子在规范群下如何变化。以第一代费米子为例，物质场所处的 $SU(2)$ 和 $U(1)$ 群表示被列在下表中。对于更高代的粒子而言，表示是类似的。

粒子	$SU(2)$ 表示	$U(1)$ 表示 (超荷)
左手夸克 $q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	2	1/6
右手上夸克 u_R	1	2/3
右手下夸克 d_R	1	-1/3
左手轻子 $l_L = \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix}$	2	-1/2
右手电子 e_R	1	-1

注意在标准模型中右手中微子并不存在。将这个粒子表中的信息代入上面求出的三个流中，利用 $SU(2)$ 基础表示的 $T^a = \sigma^a/2^4$ ，就有：

$$J^{-\mu} = \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L, \quad J^{+\mu} = \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L, \quad J_{EM}^\mu = \frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu d - \bar{e} \gamma^\mu e \quad (8.20)$$

$$\begin{aligned} J_Z^\mu &= \bar{\nu}_L \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} \right) \nu_L + \bar{e}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + s_w^2 \right) e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu s_w^2 e_R + \bar{u}_L \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} s_w^2 \right) u_L \\ &\quad + \bar{u}_R \gamma^\mu \left(-\frac{2}{3} s_w^2 \right) u_R + \bar{d}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} s_w^2 \right) d_L + \bar{d}_R \gamma^\mu \left(\frac{1}{3} s_w^2 \right) d_R \end{aligned} \quad (8.21)$$

这告诉我们，弱带电流和左手夸克、轻子耦合，并改变夸克和轻子的味道。电磁流不关心手性，并和中微子之外的所有费米子均有耦合。弱中性流不改变味道，和所有费米子都有耦合，且左右手粒子的耦合常数不同。

从这个流的形式中可以得出弱带电流相互作用不跨代的结论。对于轻子部分，这的确是正确的。不过对于夸克部分而言，这并非是标准模型中的最终结果。正如我们下面会看到的，在 Higgs 场赋予夸克质量时，会导致不同代的夸克之间存在混合，使得弱作用本征态的夸克并不是质量本征态的夸克。对于质量本征态的夸克，弱带电流相互作用是跨代的。由于质量本征态的夸克才应该是我们所测量到的夸克，这也就导致对于测量到的夸克而言，存在跨代的弱带电流相互作用。

Fermion Masses from the Higgs Mechanism

之前的讨论中我们一直忽视了费米子质量项的存在，而下面就要为这些费米子加上质量。首先根据手性分析，会得到质量项 $m\bar{\Psi}\Psi$ 的手征结构是 $m(\bar{\Psi}_L\Psi_R + \bar{\Psi}_R\Psi_L)$ 。但由于右手费米子在 $SU(2)$ 下按表示 (1) 变化，而左手费米子按表示 (2) 变化。由于对 $SU(2)$ 表示，有 $(1) \otimes (2) = (2)$ ，从而这一项整体并不是 $SU(2)$ 规范不变的。也就是说，被这样 naive 的放入的质量是被规范对称性所禁戒的。

⁴其中 σ^a 是 Pauli 矩阵。

那如何才能给费米子加上质量呢？答案是令 Higgs 场赋予费米子质量。如果我们有一个 Yukawa 耦合 $\phi\Psi\Psi$ ，那么 Higgs 场的真空期待值就会自动给出费米子质量项。Higgs 场在 $SU(2)$ 下按照表示 (2) 变化，由于对于 $SU(2)$ 表示，有 $(1) \otimes (2) \otimes (2) = (1) \oplus (3)$ ，于是通过合适的投影，就可以令 $\phi\Psi_L\Psi_R$ 按照平凡表示变化。这就保证了 Lagrangian 的规范不变性。

先考虑一下如何投影才能令表示 $(2) \otimes (2)$ 中的算符 $\phi_i\Psi_{L,j}$ 按平凡表示变化。群论告诉我们，对于 $SU(N)$ 而言，有：

$$N \otimes \bar{N} = (1) + A \quad (8.22)$$

其中 N 是基础表示而 A 是伴随表示。并且对于这个分解，容易验证 δ_i^j 就是从 $N \otimes \bar{N}$ 到表示 (1) 的投影算子。对于 $SU(2)$ ，如果场 ϕ_i 处于基本表示 (2) 中，而 $\psi^{\dagger,j}$ 处于 (2) 的复共轭 $(\bar{2})$ 中⁵，那么 $\psi^{\dagger,i}\phi_i$ 就是 $SU(2)$ 不变的。

对于 $SU(N)$ 而言，由于基础表示是一个么正表示，于是还有一个关系：

$$\bigotimes_{i=1}^N N = (1) \oplus \dots \quad (8.23)$$

对应这个分解的投影算子是 Levi-Civita 张量 $\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n}$ 。对 $SU(2)$ ，如果场 ϕ_i, ψ_j 均处于基本表示 (2) 中，那么 $\varepsilon^{ij}\phi_i\psi_j$ 也是 $SU(2)$ 不变的。多提一句：从 $\varepsilon^{ij}\phi_i\psi_j$ 和 $\psi^{\dagger,i}\phi_i$ 均为 $SU(2)$ 不变量可以看出，如果 ϕ_i 按照表示 (2) 变化，那么 $\varepsilon^{ij}\phi_j$ 就按照 $(\bar{2})$ 变化。于是 ε^{ij} 实际上就给出了从 (2) 到 $(\bar{2})$ 的等价变换。用指标的语言说，就是 ε^{ij} 可以将一个表示 (2) 的下指标提升为 $(\bar{2})$ 的上指标。

由于 $(2) \otimes (\bar{2}) = (1) \oplus (3)$ ，而到 (1) 的投影算符就只有一个 δ_i^j （对于 (2) 和 (2) 来说这是 ε^{ij} ），于是通过群论分析，就得到：只存在两个通过 Higgs 场和左手费米子场构造出的、规范不变的 Yukawa 项，它们是：

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -y_1 \bar{\Psi}_R \varepsilon^{ij} \phi_i \Psi_{L,j} - y_2 \bar{\Psi}_R \phi^{\dagger i} \Psi_{L,i} + \text{h.c.} \quad (8.24)$$

当然，上面所给出的要求只是 $SU(2)$ 规范对称性的要求。为使这些项也是 $U(1)$ 不变的，还需要让这些场的超荷之和为 0。在标准模型中，被允许的项就是：

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -y_e \bar{e}_R \varepsilon^{ij} \phi_i e_{L,j} - y_d \bar{d}_R \varepsilon^{ij} \phi_i q_{L,j} - y_u \bar{u}_R \phi^{\dagger i} q_{L,i} + \text{h.c.} \quad (8.25)$$

在电弱对称性破缺后，这就是：

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\frac{y_e}{\sqrt{2}} \bar{e}_R e_L (v + H) - \frac{y_d}{\sqrt{2}} \bar{d}_R d_L (v + H) - \frac{y_u}{\sqrt{2}} \bar{u}_R u_L (v + H) + \text{h.c.} \quad (8.26)$$

可以看到，如果只有一代夸克、轻子，那么费米子将获得质量 $m_e = y_e v / \sqrt{2}$, $m_d = y_d v / \sqrt{2}$, $m_u = y_u v / \sqrt{2}$ 。不过当我们考虑多代夸克、轻子的存在时，除去这些耦合之外，还可以有如下的跨代耦合：

$$-\frac{y}{\sqrt{2}} \bar{s}_R d_L (v + H) \quad (8.27)$$

如果将代指标记做大写拉丁字母，那么最普遍的 Yukawa 耦合是：

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\frac{y_{e,IJ}}{\sqrt{2}} \bar{e}_{I,R} e_{J,L} (v + H) - \frac{y_{d,IJ}}{\sqrt{2}} \bar{d}_{I,R} d_{J,L} (v + H) - \frac{y_{u,IJ}}{\sqrt{2}} \bar{u}_{I,R} u_{J,L} (v + H) + \text{h.c.} \quad (8.28)$$

⁵这里的上指标意味着复共轭表示 $(\bar{2})$ 的指标。

对矩阵 y_{IJ} 可以做奇异值分解，可以用两个幺正矩阵和一个对角矩阵将其对角化：

$$y_e = \bar{E}^\dagger Y_e E, \quad y_d = \bar{D}^\dagger Y_d D, \quad y_u = \bar{U}^\dagger Y_u U \quad (8.29)$$

其中两侧的矩阵都是幺正矩阵，中间夹的矩阵是对角的。这也就告诉我们，如果定义 $\tilde{e}_{I,L} = E_{IJ} e_{J,L}$, $\tilde{e}_{I,R} = \bar{E}_{IJ} e_{J,R}$, 那么 \tilde{e} 的质量项就是对角的。 \tilde{e} 此时就被称为质量本征态的场。对于上、下型夸克而言，我们也可以如此操作来定义质量本征态的夸克场。由于我们所观测到的粒子都具有确定的质量，于是我们所观测到的电子、 μ 子和 τ 子实际上都是质量本征态中的这些粒子。

而上面讨论的弱作用都是在未混合的场下讨论的，由于这些未混合的场的弱作用不跨代，于是将它们称为弱作用本征态。为了讨论真实观测的粒子如何相互作用，就需要看看这个混合对轻子、夸克的弱作用有什么影响。在动力学项、电磁流和弱中性流相互作用中，涉及到的两个费米场都是相同的场，由于矩阵 E 的幺正性，这些项都应该是不变的。从而这个混合唯一可能影响的项就是弱带电流相互作用。以 J^- 的变换为例：

$$J^{-\mu} = \bar{\nu}_{I,L} \gamma^\mu e_{I,L} = \bar{\nu}_{I,L} \gamma^\mu E_{IJ} \tilde{e}_{J,L} \quad (8.30)$$

这看起来会变化，但是如果我们将中微子也旋转一下，变为 $\tilde{\nu}_L = E \nu_L$ ，那么这整个一项都是不变的。从而这么定义的 $\tilde{\nu}, e$ 既是质量本征态也是弱作用本征态。

可以看到，轻子部分能做到这件事情很大程度上依赖于中微子没有质量，从而无论在场空间中如何旋转中微子，它们都是质量本征态。不过对夸克而言，这件事情并不成立，于是在夸克部分这个混合会对弱带电流有些影响。考虑夸克部分 J^- 的变换是：

$$J^{-\mu} = \bar{u}_{I,L} \gamma^\mu d_{I,L} = \tilde{\bar{u}}_{J,L} \gamma^\mu (UD^\dagger)_{JK} \tilde{d}_{K,L} \equiv \tilde{\bar{u}}_{J,L} \gamma^\mu V_{JK} \tilde{d}_{K,L} \quad (8.31)$$

于是，夸克的质量本征态并不是弱作用本征态，从而夸克的弱带电流相互作用存在跨代相互作用。三代夸克之间的这个混合矩阵 $V = UD^\dagger$ 就被称为 **Cabbibo-Kobayashi-Maskawa 矩阵**，简称 **CKM 矩阵**。

CKM 矩阵是一个幺正矩阵。作为一个 3×3 矩阵，它应该有 18 个实参数。而幺正条件带来了 9 个约束条件，从而参数的数量减少到 9。对于六个夸克而言，我们还可以调节 5 个相对相位，使得 CKM 矩阵的第一行、第一列是实数。于是 CKM 矩阵就只剩下四个参数。它们可以被选择为三个混合角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 以及一个相角 δ ：

$$V = \begin{pmatrix} c_1 & +s_1 c_3 & +s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (8.32)$$

重点讨论一下相角 δ 。如果我们将这个 Lagrangian 做一个时间反演变换，那么由于 T 是反幺正的，从而在 T 下，有些 CKM 矩阵元素会改变，有的不变。也就是说，如果 $\delta \neq 0$ ，那么弱相互作用不可能是 T 不变的。由 CPT 定理， T 守恒其实就是 CP 守恒，从而 $\delta \neq 0$ 预示着 **CP 破坏**。利用实验，测量出 CKM 矩阵的参数是： $s_1 = 0.224, s_2 = 0.041, s_3 = 0.016$ ，而最重要的 **CP 相角** $\delta = 40^\circ$ 。这告诉我们，弱作用下不仅仅 P 不守恒， CP 也是不守恒的。

最后总结一下电弱理论中的费米子相互作用。由于我们测量到的夸克、轻子实际上都是质量本征态的夸克、轻子。于是在接下来的讨论中，将舍去质量本征态场上的 tilde。根据上面的讨论，就可以最终得到电弱理论中的费米子流：

$$J^{-\mu} = \bar{\nu}_{I,L} \gamma^\mu e_{I,L} + \bar{u}_{I,L} \gamma^\mu V_{IJ} d_{J,L}, \quad J^{+\mu} = \bar{e}_{I,L} \gamma^\mu \nu_{I,L} + \bar{d}_{I,L} \gamma^\mu (V^\dagger)_{IJ} u_{J,L} \quad (8.33)$$

$$J_{\text{EM}}^\mu = \frac{2}{3}\bar{u}_I \gamma^\mu u_I - \frac{1}{3}\bar{d}_I \gamma^\mu d_I - \bar{e}_I \gamma^\mu e_I \quad (8.34)$$

$$\begin{aligned} J_Z^\mu &= \bar{\nu}_{I,L} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} \right) \nu_{I,L} + \bar{e}_{I,L} \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + s_w^2 \right) e_{I,L} + \bar{e}_{I,R} \gamma^\mu s_w^2 e_{I,R} + \bar{u}_{I,L} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} s_w^2 \right) u_{I,L} \\ &+ \bar{u}_{I,R} \gamma^\mu \left(-\frac{2}{3} s_w^2 \right) u_{I,R} + \bar{d}_{I,L} \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} s_w^2 \right) d_{I,L} + \bar{d}_{I,R} \gamma^\mu \left(\frac{1}{3} s_w^2 \right) d_{I,R} \end{aligned} \quad (8.35)$$

这些流中就蕴含了费米子弱相互作用的所有信息。

The Standard Model

现在我们已经得到了完整的电弱理论，其 Lagrangian 是：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EW}} &= -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi) \\ &+ \bar{q}_{I,L,i} (iD)_{ij} q_{I,L,j} + \bar{u}_{I,R} (iD) u_{I,R} + \bar{d}_{I,R} (iD) d_{I,R} + \bar{l}_{I,L,i} (iD)_{ij} l_{I,L,j} + \bar{e}_{I,R} (iD) e_{I,R} \\ &- y_{e,IJ} \bar{e}_{I,R} \varepsilon^{ij} \phi_i l_{J,L,j} - y_{d,IJ} \bar{d}_{I,R} \varepsilon^{ij} \phi_i q_{J,L,j} - y_{u,IJ} \bar{u}_{I,R} \phi^{\dagger i} q_{J,L,i} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (8.36)$$

接下来，只需要在其中添加上强相互作用，就能得到整个标准模型了。而正如第七章所讨论的，描述强相互作用的理论就是量子色动力学，它是一个 $SU(3)$ 规范理论。而如果想要将 $SU(3)$ 规范理论加入上面这个理论，只需要将规范群从 $SU(2) \times U(1)$ 扩充到 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 即可。在这个 $SU(3)$ 下，各费米子所处的表示如下表：

粒子	$SU(3)$ 表示	$SU(2)$ 表示	$U(1)$ 表示 (超荷)
左手夸克 $q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	3	2	1/6
右手上夸克 u_R	3	1	2/3
右手下夸克 d_R	3	1	-1/3
左手轻子 $l_L = \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix}$	1	2	-1/2
右手电子 e_R	1	1	-1

这些场和上面讨论的电弱理论中唯一的区别就是：标准模型中，夸克的每一味从一个场变成了三个处于 $SU(3)$ 基础表示中的场。并且既然多了一个规范群，那么自然会有对应这个规范群的规范场出现。对于 $SU(3)$ 而言，这就是胶子场。

最终，我们得到标准模型的 Lagrangian⁶：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EW}} &= -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi) \\ &+ \bar{q}_{I,L,i,\alpha} (iD)_{ij,\alpha\beta} q_{I,L,j,\beta} + \bar{u}_{I,R,\alpha} (iD)_{\alpha\beta} + \bar{d}_{I,R,\beta} + \bar{u}_{I,R,\alpha} (iD)_{\alpha\beta} d_{I,R,\beta} + \bar{l}_{I,L,i} (iD)_{ij} l_{I,L,j} + \bar{e}_{I,R} (iD) e_{I,R} \\ &- y_{e,IJ} \bar{e}_{I,R} \varepsilon^{ij} \phi_i l_{J,L,j} - y_{d,IJ} \bar{d}_{I,R} \varepsilon^{ij} \phi_i q_{J,L,j,\alpha} - y_{u,IJ} \bar{u}_{I,R,\alpha} \phi^{\dagger i} q_{J,L,i,\alpha} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (8.37)$$

⁶这里面指标实在是有点多，需要梳理一下：首先 $\alpha = 1, 2, 3$ 是 $SU(3)$ 基础表示的指标（色指标）， $A = 1, \dots, 8$ 是 $SU(3)$ 伴随表示的指标。 $i = 1, 2$ 是 $SU(2)$ 基础表示的指标， $a = 1, 2, 3$ 是 $SU(2)$ 伴随表示的指标。大写字母 $I = 1, 2, 3$ 是代指标。 $\mu = 0, 1, 2, 3$ 是 Lorentz 指标。

其中，协变导数就是⁷：

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu^A T_R^A - ig_2 W_\mu^a I_R^a - ig_1 B_\mu Y \quad (8.38)$$

这个 Lagrangian 就蕴含着人类现在对微观世界的、已经被实验检验的最深刻的认识。在这一章中，我们的目标就是明白如何从这个 Lagrangian 中预言散射实验，并且讨论标准模型中存在什么问题，又有什么能够解决这些问题的理论等待着我们去检验。

8.2 Quantization of Gauge Theories with SSB

Quantization of Gauge Theories with SSB

下面就来考虑一下如何从这个 Lagrangian 中得到 Feynman 规则。在第七章中，我们已经看到了标准模型的 SU(3) 部分该如何处理，剩下的就是电弱理论的量子化了。这看上去很简单：只要从电弱破缺的 Lagrangian 中读出 Feynman 规则即可，但是背后潜藏着一个很大的问题：当我们计算理论的圈图修正时，如果直接利用幺正规范去计算，那么 W 和 Z Boson 的传播子就会是：

$$\Delta_W^{\mu\nu} = \frac{1}{k^2 + m_W^2 - i\varepsilon} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{M^2} \right) \quad (8.39)$$

在第五章的开头我们已经看到，这个传播子的高能行为是 Λ^0 而非 Λ^{-2} ，这会使得之前利用数量纲的方式证明的可重整性条件失效，令理论变得不可重整。从而为了进行圈图阶的计算，我们就需要从幺正规范切换到一个其他的规范。不过需要注意的是，在幺正规范中 Goldstone Boson 是被完全吸收的。但在其他规范下，Goldstone Boson 也是理论中的动力学自由度。

如何选择一个其他规范呢？为了回答这个问题，就需要对这个规范理论做 Faddeev-Popov 量子化。考虑一个一般的规范理论，其规范群为 G，并且 G 下的对称性被 Higgs 场 ϕ 的真空中期待值所自发破缺。先不考虑费米子部分，那么这个理论的 Lagrangian 就是：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a - (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi) \quad (8.40)$$

为了讨论的方便，可以将 Higgs 中的每个复标量场拆为两个实标量场 $(\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ 。这样一来，Higgs 场就能写为 N 个实标量场 ϕ 。如果令 Higgs 的分量为 ϕ_α ，那么其变换关系是 $\delta\phi_\alpha = -ig T_{\alpha\beta}^a \Gamma^a \phi_\beta$ ，其中 T 是 Higgs 所处表示的生成元。根据这个变换关系，就有：

$$\delta\phi_{\alpha 1} + i\delta\phi_{\alpha 2} = -ig T_{\alpha\beta}^a \Gamma^a (\phi_{\beta 1} + i\phi_{\beta 2}) \quad (8.41)$$

对这个式子做一个 Hermitian 共轭，由于 Higgs 所处的表示是幺正的，T 是 Hermitian 矩阵。于是：

$$\delta\phi_{\alpha 1} - i\delta\phi_{\alpha 2} = ig T_{\beta\alpha}^a \Gamma^a (\phi_{\beta 1} - i\phi_{\beta 2}) \quad (8.42)$$

二者相加、相减，就能得到 $\phi_{\alpha I}$ (其中 $I=1,2$) 的变换关系。如果认为 $\phi_{\alpha I}$ 处于表示 R，那么就有：

$$\delta\phi_{\alpha I} = -ig \Gamma^a (T_R^a)_{\alpha I, \beta J} \phi_{\beta J} \quad (8.43)$$

⁷为了区分 SU(3) 和 SU(2) 生成元，我们将 SU(2) 生成元的记号改为了 I。

根据上面的两个式子，便求出：

$$i(T_R^a)_{\alpha 1, \beta 1} = i(T_R^a)_{\alpha 2, \beta 2} = \frac{i}{2}(T_{\alpha \beta}^a - T_{\beta \alpha}^a), \quad i(T_R^a)_{\alpha 1, \beta 2} = -i(T_R^a)_{\alpha 2, \beta 1} = -\frac{1}{2}(T_{\alpha \beta}^a + T_{\beta \alpha}^a) \quad (8.44)$$

容易从这些关系中证明， $i(T_R)_{\alpha I, \beta J} = -i(T_R)_{\beta J, \alpha I}$ ，并且 $(i(T_R)_{\alpha I, \beta J})^* = i(T_R)_{\alpha I, \beta J}$ 。于是 $i(T_R)$ 是实的反对称矩阵。从而我们就证明了：如果将 Higgs 这样写成一系列实标量场 ϕ_i ，那么 ϕ_i 所处表示的生成元矩阵 $T_{R,ij}^a$ 就是实的反对称矩阵。

将这些实标量场代入 $(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi)$ 中，就得到：

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) = \frac{1}{2}(D_\mu \phi_i)(D^\mu \phi_i), \quad D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i - ig A_\mu^a T_{R,ij}^a \phi_j \quad (8.45)$$

这就将 Lagrangian 用实标量场 ϕ_i 写出了。假设 $V(\phi)$ 使得 Higgs 具有真空期待值 $\langle \Omega | \phi_i | \Omega \rangle = v_i$ ，那么量子激发就是 $\phi_i = v_i + \rho_i$ ，那么 V 中 ρ_i 的质量项就是：

$$-V(\phi) = -\frac{1}{2}m_{ij}^2 \rho_i \rho_j + (\dots), \quad m_{ij}^2 = \left. \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \rho_i \partial \rho_j} \right|_{\rho=0} \quad (8.46)$$

既然说到质量和对称性自发破缺，自然会想到 Goldstone 定理。根据 Goldstone 定理，在对称性自发破缺后，对于每个破缺的生成元，都存在一个 Goldstone Boson。在第六章中，我们通过量子作用量在任意阶微扰论证明了这件事情。对于经典作用量，也就是零阶微扰论的量子作用量而言，这件事情更加简单：如果考虑经典势 $V(\phi)$ 的规范变换，就有：

$$[V((1 - ig \Gamma^a T_R^a) \phi) - V(\phi)]_{\phi=v} = ig \Gamma^a m_{ij}^2 T_{R,ij}^a v_j = 0 \quad (8.47)$$

这里由于在最低阶中 v 即为经典势的最小值，于是舍去了 Taylor 展开中的一阶项。对于每个破缺的生成元， $T_{ij}^a v_j$ 非零，于是就有关系 $m_{ij}^2 T_{R,ij}^a v_j = 0$ ，从而 $T_{R,ij}^a v_j$ 就是 m_{ij}^2 具有零本征值的本征矢量，也就对应一个零质量模式。这正是在微扰论最低阶利用 Goldstone 定理所得到的结论。

有了这些准备之后，就可以对这个对称性破缺的理论做量子化了。在对称性自发破缺后，这个理论的 Lagrangian 可以展开为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(D_\mu \phi_i)^2 - \frac{1}{2}m_{ij}^2 \rho_i \rho_j + (\text{self-interaction}) \\ &= \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu \rho_i \partial^\mu \rho_i + g A_\mu^a (\partial^\mu \rho_i) (iT_{R,ij}^a) (v_j + \rho_j) \\ &\quad - \frac{1}{2}g^2 A_\mu^a A^{b\mu} (iT_{R,ij}^a) (iT_{R,ik}^b) (v_j + \rho_j) (v_k + \rho_k) - \frac{1}{2}m_{ij}^2 \rho_i \rho_j + (\text{self-interaction}) \end{aligned} \quad (8.48)$$

为了下面讨论的简便，定义一个矩阵 $F_i^a := g(iT_{R,ij}^a)v_j$ 。从而规范 Boson 的质量项可以写为 $-\frac{1}{2}A_\mu^a F_i^a F_i^b A^{b\mu}$ 。下面会看到，经过 Faddeev-Popov 量子化后，鬼场和 Goldstone Boson 获得的质量也可以用 F 表达出来。

接下来就正式开始做 Faddeev-Popov 量子化。考虑如下的路径积分：

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\rho \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L} \right) \quad (8.49)$$

经过熟悉的插入单位算符、作用 Gaussian 积分等操作后，这就变成了：

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\rho \det \left(\frac{\delta G^a}{\delta \Gamma^b} \right) \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} G^a G^a \right) \right] \quad (8.50)$$

一个方便的规范选择是可重整 ξ -规范，或者 \mathbf{R}_ξ 规范⁸：

$$G^a = \partial_\mu A^{a\mu} - \xi F_i^a \rho_i \quad (8.51)$$

在这个规范下，Faddeev-Popov 行列式就是：

$$\frac{\delta G^a}{\delta \Gamma^b} = -\partial^\mu D_\mu^{ab} + i\xi g F_i^a T_{R,ij}^b (v_i + \rho_j) \quad (8.52)$$

将这个 Faddeev-Popov 行列式转化为鬼的 Lagrangian，并且将这个规范固定函数代入规范固定项，就得到了以下的有效 Lagrangian：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 - \frac{1}{2} A_\mu^a F_i^a F_i^b A^{b\mu} \right] + \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \rho_i \partial^\mu \rho_i - \frac{1}{2} m_{ij}^2 \rho_i \rho_j - \frac{1}{2} \xi F_i^a F_j^a \rho_i \rho_j \right] \\ & + \left[-\partial^\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a - \xi \bar{c}^a F_i^a F_i^b c^b \right] + A_\mu^a (\partial^\mu \rho_i) (ig T_{R,ij}^a) \rho_j - \frac{1}{2} A_\mu^a A^{b\mu} [F_i^a (ig T_{R,ij}^b) + F_i^b (ig T_{R,ij}^a)] \rho_j \\ & - \frac{1}{2} A_\mu^a A^{b\mu} (ig T_{R,ij}^a) (ig T_{R,ik}^b) \rho_j \rho_k + g f^{abc} \partial^\mu \bar{c}^a c^b A_\mu^c \end{aligned} \quad (8.53)$$

前三个大括号中就是规范玻色子、Higgs 场与 Goldstone Boson，还有 Faddeev-Popov 鬼的动力学项。这就完成了理论的量子化。可以看到，在 R_ξ 规范下，不仅仅是规范玻色子，Goldstone Boson 和 Faddeev-Popov 鬼都获得了额外的质量。

值得注意的是，矩阵 $F_i^a F_i^b$ 和 $F_i^a F_j^a$ 不一定是对角的，于是这里的场 A, c, ρ 都不一定是质量本征态的场。为了预言真实测量到的粒子的衰变率或者截面，还需要对这个矩阵做对角化。对角化是因理论而异的，这里就不再展开讨论了。

Feynman Rules of Electroweak Theory in \mathbf{R}_ξ Gauge

接下来就要将上面这一套讨论用到电弱理论中去。电弱理论的规范群有四个生成元： T^1, T^2, T^3 和 Y 。根据前面给出的关系 $i(T_R^a)_{\alpha 1, \beta 1} = i(T_R^a)_{\alpha 2, \beta 2} = \frac{i}{2}(T_{\alpha\beta}^a - T_{\beta\alpha}^a)$, $i(T_R^a)_{\alpha 1, \beta 2} = -i(T_R^a)_{\alpha 2, \beta 1} = -\frac{1}{2}(T_{\alpha\beta}^a + T_{\beta\alpha}^a)$ ，可以计算出：

$$igT_R^1 = g_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad igT_R^2 = g_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.54)$$

$$igT_R^3 = g_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad igT_R^Y = g_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.55)$$

⁸我们在量子化一般的规范场时候也见过这个名字，那时它指代 $G = \partial A$ 的规范。

由于 $v_1 = v, v_2 = v_3 = v_4 = 0$, 通过计算 $F_i^a = igT_{R,ij}^a v_j$, 可以算出:

$$F_i^a F_i^b = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2^2 & -g_1 g_2 \\ 0 & 0 & -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix}, \quad F_i^a F_j^a = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_1^2 + g_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_2^2 \end{pmatrix} \quad (8.56)$$

第一个矩阵我们已经很熟悉了: 它就是弱相互作用本征态的规范场的质量矩阵。通过对角这个矩阵, 可以将 W^3 和 B “旋转” 为 Z 和 A , 并且其质量是:

$$m_W = \frac{g_2 v}{2}, \quad m_Z = \frac{\sqrt{g_1^2 + g_2^2} v}{2} = \frac{m_W}{\cos \theta_w} \quad (8.57)$$

除去四个规范场之外, 如果定义:

$$c^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(c^1 \mp i c^2), \quad c_Z := c_w c^3 - s_w c^Y, \quad c_A := s_w c^3 + c_w c^Y \quad (8.58)$$

那么这四个鬼场也类似的获得了质量:

$$m_{c^\pm} = \sqrt{\xi} m_W, \quad m_{c_Y} = \sqrt{\xi} m_Z, \quad m_{c_A} = 0 \quad (8.59)$$

对于第二个矩阵, 它告诉我们除 Higgs 没有获得额外质量之外, 三个 Goldstone Boson 在 R_ξ 规范下都获得了额外质量。我们也可以定义:

$$H := \phi_1 - v, \quad \phi_Z := \phi_H, \quad \phi^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 \pm i \phi_4) \quad (8.60)$$

那么, 三个 Goldstone Boson 获得的额外质量就是:

$$m_{\phi^\pm} = \sqrt{\xi} m_W, \quad m_{\phi_Z} = \sqrt{\xi} m_Z \quad (8.61)$$

有了这些准备之后, 我们就可以开始推导标准模型的完整 Feynman 规则了。先不考虑费米子。综合上面所有讨论, 得到电弱理论的完整等效 Lagrangian 是:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 \right] + \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \rho_i \partial^\mu \rho_i - \frac{1}{2} m_{ij}^2 \rho_i \rho_j - \frac{1}{2} \xi F_i^a F_j^a \rho_i \rho_j \right] \\ & + \left[-\partial^\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a - \xi \bar{c}^a F_i^a F_i^b c^b \right] + A_\mu^a (\partial^\mu \rho_i) (igT_{R,ij}^a) \phi_j \\ & - \frac{1}{2} A_\mu^a A^{b\mu} (igT_{R,ij}^a) (igT_{R,ik}^b) \phi_j \phi_k + g f^{abc} \partial^\mu \bar{c}^a c^b A_\mu^c \end{aligned} \quad (8.62)$$

将上面定义的所有场、求出的矩阵 igT^a 都代入这个 Lagrangian, 经过复杂的计算, 最终可以得到⁹:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{Kinetic}} + \mathcal{L}_{A^3} + \mathcal{L}_{A^4} + \mathcal{L}_{\phi\phi A} + \mathcal{L}_{\phi\phi AA} + \mathcal{L}_{ccA} \quad (8.63)$$

⁹由于我们还不知道 Higgs 势是什么样的, 于是这里没有写出 Higgs 的自相互作用。

其中动力学项就是：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Kinetic}} = & \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right] + \left[-\frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu Z^\mu)^2 - \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \right] \\ & + \left[W_\mu^- (\partial^2 \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) W_\nu^+ - \frac{1}{\xi} \partial_\mu W^- \partial^\mu W^+ - m_W^2 W_\mu^- W^{+\mu} \right] + \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \right] \\ & + \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_Z \partial^\mu \phi_Z - \frac{1}{2} \xi m_Z^2 \phi_Z^2 \right] + \left[-\partial_\mu \phi^- \partial^\mu \phi^+ - \xi m_W^2 \phi^+ \phi^- \right] + \left[-\partial_\mu \bar{c}_Z \partial^\mu c_Z - \xi m_Z^2 \bar{c}_Z c_Z \right] \\ & + \left[-\partial_\mu \bar{c}^- \partial^\mu c^+ - \partial_\mu \bar{c}^+ \partial^\mu c^- - \xi m_W^2 (\bar{c}^+ c^- + \bar{c}^- c^+) \right] - \partial_\mu \bar{c}_A \partial^\mu c_A \end{aligned} \quad (8.64)$$

从这个动力学项中，可以得出以下的传播子：

$$\Delta_W^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{i} \frac{1}{k^2 + m_W^2} \left[\eta^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + \xi m_W^2} \right], \quad \Delta_Z^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{i} \frac{1}{k^2 + m_Z^2} \left[\eta^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + \xi m_Z^2} \right] \quad (8.65)$$

$$\Delta_{\phi_Z}(k^2) = \frac{1}{i} \frac{1}{k^2 + \xi m_Z^2}, \quad \Delta_{\phi^\pm}(k^2) = \frac{1}{i} \frac{1}{k^2 + \xi m_W^2}, \quad \Delta_{c^\pm} = \frac{1}{i} \frac{1}{k^2 + \xi m_W^2}, \quad \Delta_{c_Z} = \frac{1}{i} \frac{1}{k^2 + \xi m_Z^2} \quad (8.66)$$

三规范玻色子的相互作用项是：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A^3} = & -ig_2 (s_w A^\mu + c_w Z^\mu) [W^{-\nu} (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) + W^{+\nu} (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-)] \\ & + ig_2 W_\mu^+ W_\nu^- (s_w F^{\mu\nu} + c_w Z^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (8.67)$$

四规范玻色子的相互作用项是：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A^4} = & -g_2^2 (s_w A^\mu + c_w Z^\mu) (s_w A_\mu + c_w Z_\mu) W^{-\nu} W_\nu^+ + g_2^2 (s_w A^\mu + c_w Z^\mu) (s_w A^\nu + c_w Z^\nu) W_\mu^- W_\nu^+ \\ & - \frac{g_2^2}{2} (W^{+\mu} W_\mu^- W^{+\nu} W_\nu^- - W^{+\mu} W_\mu^+ W^{-\nu} W_\nu^-) \end{aligned} \quad (8.68)$$

Higgs、Goldstone 玻色子与规范玻色子的 $\phi\phi A$ 相互作用部分：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi\phi A} = & \frac{g_2}{2} [i (\partial^\mu H) (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) - i H (W_\mu^+ \partial^\mu \phi^- - W_\mu^- \partial^\mu \phi^+) \\ & + (\partial^\mu \phi_Z) (W_\mu^- \phi^+ + W_\mu^+ \phi^-) - \phi_Z (W_\mu^- \partial^\mu \phi^+ + W_\mu^+ \partial^\mu \phi^-)] \\ & + \frac{g_2}{2c_w} Z_\mu (H \partial^\mu \phi_Z - \phi_Z \partial^\mu H) + \frac{ig_2}{2} \left(\frac{c_w^2 - s_w^2}{c_w} Z_\mu + 2s_w A_\mu \right) (\phi^- \partial^\mu \phi^+ - \phi^+ \partial^\mu \phi^-) \end{aligned} \quad (8.69)$$

Higgs、Goldstone 玻色子与规范玻色子的 $\phi\phi AA$ 相互作用部分，其中包含 Higgs VEV 带来的 ϕAA 相互作用：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi\phi AA} = & -\frac{1}{4} g_2^2 (2vH + H^2 + \phi_Z^2 + 2\phi^- \phi^+) W_\mu^- W^{+\mu} - \frac{g_2^2}{8c_w^2} Z_\mu Z^\mu (2vH + H^2 + \phi_Z^2) \\ & - \frac{g_2^2}{4c_w^2} (c_w^2 - s_w^2)^2 \phi^- \phi^+ Z_\mu Z^\mu - g_2^2 s_w^2 \phi^- \phi^+ A_\mu A^\mu - g_2^2 \tan \theta_w (c_w^2 - s_w^2) \phi^- \phi^+ A_\mu Z^\mu \\ & + \frac{1}{2} g_2^2 \left(-\frac{s_w^2}{c_w} Z_\mu + s_w A_\mu \right) [(v + H) (\phi^- W^{+\mu} + \phi^+ W^{-\mu}) + i\phi_Z (\phi^+ W^{-\mu} - \phi^- W^{+\mu})] \end{aligned} \quad (8.70)$$

最后一部分是 Faddeev-Popov 鬼和规范玻色子的耦合：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ccA} = & ig_2 \left[(\partial_\mu \bar{c}^-) c^+ - (\partial_\mu \bar{c}^+) c^- \right] (c_w Z^\mu + s_w A^\mu) + ig_2 \left[(\partial_\mu \bar{c}^+) W^{-\mu} - (\partial_\mu \bar{c}^-) W^{+\mu} \right] (c_w c_Z + s_w c_A) \\ & + ig_2 (c_w \partial_\mu \bar{c}_Z + s_w \partial_\mu \bar{c}_A) (c^- W^{+\mu} - c^+ W^{-\mu})\end{aligned}\quad (8.71)$$

从这个 Lagrangian 的形式中，就能轻易的读出 Feynman 规则。

Feynman Rules of Fermions

接下来在这个纯电弱理论中加入费米子。费米子的 Lagrangian 是：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Fermion}} = & \bar{q}_{I,L,i,\alpha} (i \not{D})_{ij,\alpha\beta} q_{I,L,j,\beta} + \bar{u}_{I,R,\alpha} (i \not{D})_{\alpha\beta} + d_{I,R,\beta} + \bar{u}_{I,R,\alpha} (i \not{D})_{\alpha\beta} d_{I,R,\beta} \\ & + \bar{l}_{I,L,i} (i \not{D})_{ij} l_{I,L,j} + \bar{e}_{I,R} (i \not{D}) e_{I,R} - y_{e,IJ} \bar{e}_{I,R} \varepsilon^{ij} \phi_i l_{J,L,j} - y_{d,IJ} \bar{d}_{I,R,\alpha} \varepsilon^{ij} \phi_i q_{J,L,j,\alpha} \\ & - y_{u,IJ} \bar{u}_{I,R,\alpha} \phi_i^\dagger q_{J,L,i,\alpha} + \text{h.c.}\end{aligned}\quad (8.72)$$

在 R_ξ 规范下，费米子的规范耦合部分和上面在么正规范中的讨论是完全类似的。于是上面求出的相互作用可以完全照搬过来：

$$\mathcal{L}_{\Psi\Psi A} = \frac{1}{\sqrt{2}} g_2 W_\mu^+ J^{-\mu} + \frac{1}{\sqrt{2}} g_2 W_\mu^- J^{+\mu} + \frac{e}{s_w} c_w Z_\mu J_Z^\mu + e A_\mu J_{\text{EM}}^\mu \quad (8.73)$$

费米子流就是：

$$J^{-\mu} = \bar{\nu}_{I,L} \gamma^\mu e_{I,L} + \bar{u}_{I,L} \gamma^\mu V_{IJ} d_{J,L}, \quad J^{+\mu} = \bar{e}_{I,L} \gamma^\mu \nu_{I,L} + \bar{d}_{I,L} \gamma^\mu (V^\dagger)_{IJ} u_{J,L} \quad (8.74)$$

$$J_{\text{EM}}^\mu = \frac{2}{3} \bar{u}_{I,L} \gamma^\mu u_I - \frac{1}{3} \bar{d}_{I,L} \gamma^\mu d_I - \bar{e}_{I,L} \gamma^\mu e_I \quad (8.75)$$

$$\begin{aligned}J_Z^\mu = & \bar{\nu}_{I,L} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} \right) \nu_{I,L} + \bar{e}_{I,L} \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + s_w^2 \right) e_{I,L} + \bar{e}_{I,R} \gamma^\mu s_w^2 e_{I,R} + \bar{u}_{I,L} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} s_w^2 \right) u_{I,L} \\ & + \bar{u}_{I,R} \gamma^\mu \left(-\frac{2}{3} s_w^2 \right) u_{I,R} + \bar{d}_{I,L} \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} s_w^2 \right) d_{I,L} + \bar{d}_{I,R} \gamma^\mu \left(\frac{1}{3} s_w^2 \right) d_{I,R}\end{aligned}\quad (8.76)$$

R_ξ 规范和么正规范中唯一不同的一点就是需要考虑 Goldstone 玻色子和费米子的相互作用。这被包含在 Higgs 二重态和费米子的相互作用中。在将场换到质量本征态后，Higgs 就是 $\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (v + H + i\phi_Z) \\ \phi^- \end{pmatrix}$ 。将这个场代入，经过一些暴力计算，就得到了 Higgs 玻色子、Goldstone 玻色子和费米子的 Yukawa 相互作用：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Psi\Psi\phi} = & -m_{d_I} \bar{d}_I d_I - m_{u_I} \bar{u}_I u_I - m_{l_I} \bar{l}_I l_I - \frac{m_{d_I}}{v} H \bar{d}_I d_I - \frac{m_{u_I}}{v} H \bar{u}_I u_I - \frac{m_{l_I}}{v} H \bar{l}_I l_I \\ & - i \frac{m_{d_I}}{v} \phi_Z \bar{d}_I \gamma_5 d_I + i \frac{m_{u_I}}{v} \phi_Z \bar{u}_I \gamma_5 u_I - i \frac{m_{l_I}}{v} \phi_Z \bar{l}_I \gamma_5 l_I + \frac{\sqrt{2} V_{IJ}}{v} \phi^+ \bar{u}_I (m_{u_I} P_L - m_{d_J} P_R) d_J \\ & - \frac{\sqrt{2} (V^\dagger)_{JI}}{v} \phi^- \bar{d}_J (m_{d_J} P_L - m_{u_I} P_R) u_I - \frac{\sqrt{2} m_{l_I}}{v} (\phi^+ \bar{\nu}_I P_R l_I + \phi^- \bar{l}_I P_L \nu_I)\end{aligned}\quad (8.77)$$

到此为止，我们就已经清楚了电弱理论中费米子的所有 Feynman 规则。标准模型除去电弱理论之外，还有量子色动力学，其 Feynman 规则已经在第七章中被我们所知道了。将所有这些东西拼在一起，就完成了对标准模型 Feynman 规则的讨论。

8.3 Anomalies in the Standard Model

8.3.1 Anomalies in Chiral Gauge Theories

到此为止，我们似乎已经知道了标准模型的一切，可以试图利用这个理论解释世间万物了。不过在我们将手伸向这个世界之前，最好先停下来想一想：我们至今构造的这个理论真的是自洽的吗？

这个疑问并非空穴来风，而是来源于所有的手征规范理论都必须面对的一个问题——规范反常。为了看到这个问题，让我们考虑一个最简单的手征规范理论：只有一个无质量的左手费米子，处于规范群的表示 R 中。那么这个理论的 Lagrangian 就是：

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_L (i\mathcal{D}) \Psi_L - \frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \quad (8.78)$$

在一个整体规范变换下，费米子和规范场的变换就是：

$$\Psi_L \rightarrow \exp(i\Gamma^a T_R^a P_L) \Psi_L, \quad \bar{\Psi}_L \rightarrow \bar{\Psi}_L \exp(-i\Gamma^a T_R^a P_R) \quad A_\mu^a = A_\mu^a - g f^{abc} \Gamma^b A_\mu^c + O(\Gamma^2) \quad (8.79)$$

于是发现，费米子部分的变换中存在 $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ 。根据我们处理轴矢流反常的经验，当一个对称性对应的对称变换涉及到 γ_5 时，这个对称性有可能就是反常的。而如果整体规范对称性是反常的、会被量子修正所破坏的，那么我们依赖于规范对称性所建立起的理论便会失去它最初的一块基石，从而变得不自洽。当然，我们可以仅仅从实用主义的意味出发，写下一个经典规范场论的 Lagrangian，并且在量子化之后对规范对称性不管不顾。但是在前面的讨论中也发现，规范对称性保证了理论的可重整性、幺正性。而如果规范对称性反常，这些基础的性质将会被破坏，从而我们也无法在实用主义的意义上应用这个理论。这就是我们在本节最初所提到的问题：在我们写出一个手征规范理论之后，首先要保证其规范对称性不反常，才能保证理论的自洽性。

为了保证规范对称性不反常，我们就需要保证泛函积分测度在规范变换下不变。考虑 $\mathcal{D}\Psi_L \mathcal{D}\bar{\Psi}_L$ 在一个局域规范变换下的变换：

$$\mathcal{D}\Psi_L \mathcal{D}\bar{\Psi}_L \rightarrow \mathcal{D}\Psi'_L \mathcal{D}\bar{\Psi}'_L = \det \exp(-i\Gamma^a(x) T_R^a P_L) \det \exp(i\Gamma^a(x) T_R^a P_R) \mathcal{D}\Psi_L \mathcal{D}\bar{\Psi}_L \quad (8.80)$$

这个泛函行列式就是：

$$\begin{aligned} \det \exp(-i\Gamma^a(x) T_R^a P_L) \det \exp(i\Gamma^a(x) T_R^a P_R) \\ = \det \exp(-i\Gamma^a(x) T_R^a P_L) \exp(i\Gamma^a(x) T_R^a P_R) \\ = \det \exp(-i\Gamma^a(x) T_R^a (P_L - P_R)) = \det \exp(i\Gamma^a(x) T_R^a \gamma_5) \\ = \exp \text{Tr}(i\Gamma^a(x) T_R^a \gamma_5) \end{aligned} \quad (8.81)$$

这出现了一个我们熟悉的东西：一个时空函数乘上 γ_5 的 trace，只不过这次 trace 里面多了一个规范群生成元 T_R^a 。我们将仍然利用 Fujikawa 方法处理这个泛函行列式。首先作为一个保护规范不变性的尝试，对这个泛函行列式做如下的正规化：

$$\det e^{i\Gamma^a(x) T_R^a \gamma_5} = \lim_{M \rightarrow \infty} \exp \left[i \int d^4x \Gamma^a(x) \lim_{y \rightarrow x} \text{Tr} \left[\gamma_5 T_R^a e^{-\mathcal{D}_x^2/M^2} \delta^4(x-y) \right] \right] \quad (8.82)$$

和 6.7 节中做同样的处理：将 delta 函数变换到动量空间，然后让正规化子穿过 e^{ikx} ，从而可以安全的取掉 $y \rightarrow x$ 的极限。做完这些操作后，就会得到：

$$\det e^{i\Gamma^a(x)T_R^a\gamma_5} = \lim_{M \rightarrow \infty} \exp \left[i \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma^a(x) \text{Tr} \left[\gamma_5 T_R^a e^{-(\not{P}+ik)^2/M^2} \right] \right] \quad (8.83)$$

在规范群非 Abelian 的情形，分子上的 $(\not{P}+ik)^2$ 需要更精细的处理：

$$\begin{aligned} (\not{P}+ik)^2 &= [(\partial_\mu - igT_R^a A_\mu^a + ik_\mu) \gamma^\mu]^2 = [(\partial_\mu - ig\mathbf{A}_\mu + ik_\mu) \gamma^\mu]^2 \\ &= (\partial_\mu - ig\mathbf{A}_\mu + ik_\mu) (-ig\mathbf{A}_v + ik_v) \gamma^\mu \gamma^v \\ &= [-ig\partial_\mu \mathbf{A}_v - (g\mathbf{A}_\mu - k_\mu)(g\mathbf{A}_v - k_v)] \gamma^\mu \gamma^v \\ &= \frac{1}{2} [-ig\partial_\mu \mathbf{A}_v - (g\mathbf{A}_\mu - k_\mu)(g\mathbf{A}_v - k_v)] ([\gamma^\mu, \gamma^v] + \{\gamma^\mu, \gamma^v\}) \\ &= [-ig\partial_\mu \mathbf{A}_v - (g\mathbf{A}_\mu - k_\mu)(g\mathbf{A}_v - k_v)] (-2iS^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (8.84)$$

类似 6.7 节的推导，对于后面不含 gamma 矩阵的项，所有除去 k^2 之外的项将不会对泛函行列式产生贡献。于是：

$$\begin{aligned} (\not{P}+ik)^2 &\approx iS^{\mu\nu} [ig(\partial_\mu \mathbf{A}_v - \partial_v \mathbf{A}_\mu) + [g\mathbf{A}_\mu - k_\mu, g\mathbf{A}_v - k_v]] \\ &= k^2 - gS^{\mu\nu} [\partial_\mu \mathbf{A}_v - \partial_v \mathbf{A}_\mu - ig[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_v]] = k^2 - gS^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (8.85)$$

从而，在对 k 做一个 rescale 后，原泛函行列式就是：

$$\det e^{i\Gamma^a(x)T_R^a\gamma_5} = \lim_{M \rightarrow \infty} \exp \left[iM^4 \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-k^2} \Gamma^a(x) \text{Tr} \left[\gamma_5 T_R^a e^{gS^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu}/M^2} \right] \right] \quad (8.86)$$

展开这个指数，唯一有贡献的项就是：

$$\begin{aligned} \det e^{i\Gamma^a(x)T_R^a\gamma_5} &= \exp \left[\frac{ig^2}{2} \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-k^2} \Gamma^a(x) \text{Tr} [\gamma_5 S^{\mu\nu} S^{\rho\sigma}] \text{Tr} [T_R^a \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}_{\rho\sigma}] \right] \\ &= \exp \left[-\frac{ig^2}{32\pi^2} \int d^4x \Gamma^a(x) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{Tr} [T_R^a T_R^b T_R^c] \right] \\ &= \exp \left[-\frac{ig^2}{64\pi^2} \int d^4x \Gamma^a(x) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{Tr} [T_R^a \{T_R^b, T_R^c\}] \right] \end{aligned} \quad (8.87)$$

可以看到，规范对称性的确存在反常，并且反常是正比于系数 $\text{Tr} [T_R^a \{T_R^b, T_R^c\}]$ 的。通过定义 $\text{Tr} [T_R^a \{T_R^b, T_R^c\}] = \frac{1}{2} A(R) d^{abc}$ ，这个系数的指标结构可以被纳入一个三阶对称张量 d^{abc} 中。出于显然的原因，我们将系数 $A(R)$ 称为表示 R 的反常系数。利用这些关系，最终算出这个泛函行列式：

$$\det e^{i\Gamma^a T_R^a \gamma_5} = \exp \left[-\frac{ig^2}{128\pi^2} A(R) \int d^4x \Gamma^a d^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \right] \quad (8.88)$$

这个规范反常存在，就意味着如果我们的手征规范理论中只有一个左手费米子，并且其所在表示的反常系数不为 0，那么这个手征规范理论必然是不自洽的。那么退而求其次的，为了保证整个理论的自洽性，我们就需要一个理论中所有费米子对规范反常的贡献全部抵消。这个反常相消就是一个手征规范理论所必须满足的条件。

Anomaly Cancellation in SM

接下来我们看看标准模型中反常是否相消。对于标准模型，它比起上面这个简单的规范理论多出两个元素：首先，标准模型中除去左手费米子之外，还有右手费米子。对右手费米子而言，由于其规范变换中出现的是 P_R 而非 P_L ，于是测度变换的泛函行列式将比左手费米子多出一个负号，是：

$$\det e^{i\Gamma^a T_R^a \gamma_5} = \exp \left[-\frac{ig^2}{128\pi^2} A(R) \int d^4x \Gamma^a d^{abc} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \right] \quad (8.89)$$

于是在一个变换 Γ^a 下，路径积分测度的改变就应该是：

$$\exp \left[-\frac{ig^2}{128\pi^2} \left(\sum_{\text{left}} A(R) - \sum_{\text{right}} A(R) \right) \int d^4x \Gamma^a d^{abc} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \right] \quad (8.90)$$

从而如果全部规范反常互相抵消，理论中所有手征费米子的反常系数应该满足：

$$\sum_{\text{left}} A(R) - \sum_{\text{right}} A(R) = 0 \quad (8.91)$$

当然，标准模型的规范群并不是一个单李群，而是 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 这个半单李群。对于一个半单群而言，其反常系数并不一定是个常数。于是反常相消的条件并不是所有费米子的 $\pm A(R)$ 之和为零¹⁰，而是需要回到原来的 $\text{Tr}[T_R^a \{T_R^b, T_R^c\}]$ 中。此时，每个费米子处于半单规范群的表示 $R = (R_{SU(3)}, R_{SU(2)}, R_{U(1)})$ 中， $\text{Tr}[T_R^a \{T_R^b, T_R^c\}]$ 中的 T_R^a 可以取 $SU(3)$, $SU(2)$ 以及 $U(1)$ 群的任意生成元。对于所有 T_R^a, T_R^b, T_R^c 的选择，如果所有费米子的 $\pm \text{Tr}[T_R^a \{T_R^b, T_R^c\}]$ 相加均为 0，反常才能得以相消。

于是，为了验证标准模型中所有反常相消，就需要考虑所有可能的 T_R^a, T_R^b, T_R^c 的选取。下面就来枚举所有可能的选取，并且验证其 $\pm \text{Tr}[T_R^a \{T_R^b, T_R^c\}]$ 之和为 0。

由于标准模型中所有费米子都处于 $SU(2), SU(3)$ 群的基本表示或平凡表示中，而这些表示的生成元都是无迹的。于是如果选择 T_R^a, T_R^b, T_R^c 中只有一个 $SU(2)$ 的生成元，其他 T_R^a 都是其他规范群的生成元，那么得到的 $\text{Tr}[T_R^a \{T_R^b, T_R^c\}]$ 一定有因子 $\text{Tr}[T^a]$ ，故为 0。对于 $SU(3)$ ，也有类似的讨论。从而在 $SU(3), SU(2)$ 和 $U(1)$ 的所有组合中，只有以下的五种组合可能给出非零的 $\text{Tr}[T_R^a \{T_R^b, T_R^c\}]$ 。

- **SU(3)-SU(3)-SU(3)** 这意味着 T_R^a, T_R^b, T_R^c 都取 $SU(3)$ 生成元的情形。此时 $\text{Tr}[T_R^a \{T_R^b, T_R^c\}]$ 就正比于 $SU(3)$ 表示 R 的反常系数 $A(R)$ 。对于 $SU(3)$ 而言，其基础表示的反常系数是 $A(3)=1$ ，而平凡表示的反常系数是 0。而标准模型的一代费米子中，有 u_L, d_L 两个左手场属于 (3)， u_R, d_R 两个右手场属于 (3)。从而对反常的贡献正比于 $A(3) + A(3) - A(3) - A(3) = 0$ 。故每一代对这一反常的贡献相互抵消。
- **SU(3)-SU(3)-U(1)** 不妨令 T^a 是 $U(1)$ 群的生成元 Y ，于是 $\text{Tr}[T_R^a \{T_R^b, T_R^c\}] = 2YT(R)\delta^{bc}$ 。由于 $T(3) = 1/2, T(1) = 0$ ，于是对于一代费米子而言，反常正比于 $\sum_{u_L, d_L} Y - \sum_{u_R, d_R} Y = 1/6 + 1/6 + 1/3 - 2/3 = 0$ ，从而这个生成元的组合也不存在反常。

¹⁰ \pm 分别对应左、右手费米子对反常的贡献。

- **SU(2)-SU(2)-SU(2)** 对于 $SU(2)$ 而言，其所有表示都是实或赝实的。对于一个幺正表示，其复共轭表示的生成元是 $T_R = -T_R^T$ ，于是反常系数满足 $A(R) = -A(\bar{R})$ 。对于一个实或赝实的表示，它和它的复共轭表示等价，于是就有 $A(R) = -A(R)$ ，故 $A(R)=0$ 。对于三个生成元属于同一规范群的情形，其反常正比于反常系数，这对 $SU(2)$ 而言都是 0。从而 $SU(2)-SU(2)-SU(2)$ 这一生成元组合不存在反常。
- **SU(2)-SU(2)-U(1)** 类似上面对 $SU(3)-SU(3)-U(1)$ 的讨论，如果取 T^a 为 $U(1)$ 生成元，那么一个费米子对反常的贡献正比于 $2YT(R)$ 。在标准模型的一代费米子中，三色 q_L 和轻子 l_L 都属于 $SU(2)$ 的基础表示 (2)，其他费米子属于平凡表示 (1)。于是反常正比于 $N_c Y_{q_L} + Y_{l_L} = 3 \times 1/6 - 1/2 = 0$ ，不存在对应的反常。
- **U(1)-U(1)-U(1)** 最后考虑三个生成元都是超荷 Y 的情形。此时的 $\text{Tr}[T_R^a \{T_R^b, T_R^c\}]$ 就正比于简单的 Y^3 。对一代费米子的 $\pm Y^3$ 求和，得到这一反常正比于 $\sum_{\text{left}} Y^3 - \sum_{\text{right}} Y^3$ 。这也就是 $6(-\frac{1}{6})^3 - 3(\frac{2}{3})^3 - 3(-\frac{1}{3})^3 + 2(\frac{1}{2})^3 - (-1)^3 = 0$ 。

从而，在所有生成元的选取下，一代费米子的 $\pm \text{Tr}[T_R^a \{T_R^b, T_R^c\}]$ 之和都是 0。这也就意味着，对于一代费米子而言，它们对规范反常的贡献相互抵消，从而我们担心的情况没有发生，标准模型仍然是一个自洽的理论。

可以证明：对于费米子而言，引力相当于一个规范群生成元为 Lorentz 生成元 $S^{\mu\nu}$ 的规范理论。于是如果我们希望标准模型是一个量子引力的有效理论，那么理论中也不应该出现规范-引力反常。由于 $\text{Tr}[S^{\mu\nu}] = \text{Tr}[S^{\mu_1\nu_1} S^{\mu_2\nu_2} S^{\mu_3\nu_3}] = 0$ ，加入引力后可能不为 0 的反常系数只有 $\text{Tr}[T_R^a \{S^{\mu_1\nu_1}, S^{\mu_2\nu_2}\}]$ 。又由于 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 群都满足 $\text{Tr}[T_R^a] = 0$ ，于是唯一需要考虑的规范-引力反常就只有：

- **U(1)-引力-引力** 由于引力和 $U(1)$ 生成元互相对易，于是这个反常系数正比于 $\sum_{\text{left}} Y - \sum_{\text{right}} Y$ 。在标准模型的一代费米子中，由于 $6(-\frac{1}{6}) + 3(\frac{2}{3}) + 3(-\frac{1}{3}) + 2(\frac{1}{2}) + (-1) = 0$ ，从而这一生成元组合也不存在反常。

这也就是说，标准模型中不但不具有规范反常，还不具有规范-引力反常。这说明标准模型不但作为一个量子理论是自洽的，它还可以被视为一个量子引力的有效理论。

Anomalies in Global Symmetries

上面的这些讨论也可以轻易的扩充到全局对称性的反常中。按照上面的讨论，对于一个由于 $\Gamma(x)$ 给出的变换而言，其中出现的反常正比于 $\text{Tr}[\Gamma(x) \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}_{\rho\sigma}]$ 。如果我们考虑的变换是一个全局对称变换，那么只有 Γ 中能够含有全局对称性的生成元，其余的 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 中仅有规范对称性的生成元。于是在一个全局对称变换下，路径积分中多出的 Jacobian 因子是：

$$\exp \left[-\frac{i}{128\pi^2} \left(\sum_{\text{left}} \text{Tr}[G_R^\alpha \{T_R^b, T_R^c\}] - \sum_{\text{right}} \text{Tr}[G_R^\alpha \{T_R^b, T_R^c\}] \right) \int d^4x \Gamma^\alpha \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} g^2 F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \right] \quad (8.92)$$

其中 G^α 是全局对称性的生成元，而 T^a 是规范对称性的生成元。从而一个全局对称变换的反常正比于：

$$\sum_{\text{left}} \text{Tr}[G_R^\alpha \{T_R^b, T_R^c\}] - \sum_{\text{right}} \text{Tr}[G_R^\alpha \{T_R^b, T_R^c\}] \quad (8.93)$$

这告诉我们：对于全局对称性，只需要考虑全局-规范-规范反常，而不需要考虑全局-全局-全局反常。当然，由于这些反常的对称性并不是规范对称性，它们的反常无法相消并不会造成理论的不自洽，而仅仅告诉我们这个对称性在量子水平上是破缺的。

在标准模型中，存在着两个连续的全局 $U(1)$ 对称性——重子数对称性 $U(1)_B$ 和轻子数对称性 $U(1)_L$ ，其荷被称为重子数和轻子数。在标准模型的粒子谱中，所有夸克都具有重子数 $1/3$ 和轻子数 0 ，而所有轻子都具有重子数 0 和轻子数 1 。于是在一代费米子中，由于 $U(1)_Y-U(1)_Y-U(1)_B$ 的反常系数之和为：

$$\sum_{\text{left}} BY^2 - \sum_{\text{right}} BY^2 = \frac{1}{3} \left(6 \times \left(\frac{1}{6} \right)^2 - 3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 3 \times \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right) = -\frac{1}{2} \quad (8.94)$$

而 $U(1)_Y-U(1)_Y-U(1)_L$ 的反常系数之和为：

$$\sum_{\text{left}} LY^2 - \sum_{\text{right}} LY^2 = 2 \times \left(-\frac{1}{2} \right)^2 - (-1)^2 = -\frac{1}{2} \quad (8.95)$$

从而这两个全局 $U(1)$ 对称性都是反常的。事实上，除了这两个反常之外， $SU(2)$ - $SU(2)$ - $U(1)_B$ 和 $SU(2)$ - $SU(2)$ - $U(1)_L$ 中也存在反常。不过由于 $U(1)_Y-U(1)_Y-U(1)_B$ 和 $U(1)_Y-U(1)_Y-U(1)_L$ 的反常系数之和相等，如果我们利用它们定义一个新的对称性 $U(1)_{B-L}$ ，使所有费米子在其下的荷都是其重子数减去轻子数，那么 $U(1)_Y-U(1)_Y-U(1)_{B-L}$ 是不反常的。

另外，可以轻易的验证 $SU(2)$ - $SU(2)$ - $U(1)_{B-L}$ 和 $SU(3)$ - $SU(3)$ - $U(1)_{B-L}$ 都是不反常的。于是在标准模型的框架下， $B-L$ 对称性是一个量子对称性。如果我们将引力考虑在内，就会发现标准模型中的一代费米子无法抵消 $U(1)_{B-L}$ -引力-引力反常。也就是说，如果标准模型的粒子组分就是宇宙中全部的粒子，那么在背景引力场下将会存在 $B-L$ 不守恒的过程。这个 $U(1)_{B-L}$ -引力-引力反常可以通过在标准模型中加入一个处于 $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$ 单态的右手中微子而消去，在那时 $B-L$ 在任何过程中都将守恒。

你可能会问：既然我们知道重子数、轻子数这两个对称性是反常的，于是总会有一个过程中出现重子数、轻子数不守恒。那么如何构造出这样的过程呢？这个问题的答案和拓扑场构型有关，我们将会在附录 B 的 B.4.5 节对此进行详细的讨论。在那时我们将会看到：对于手征反常而言，这些手征荷 $Q_5 = \int d^3x \bar{\Psi} \gamma^0 \gamma_5 \Psi$ 不守恒的过程和瞬子有关。而对于重子数和轻子数反常，它们对应另外一种拓扑场构型——**sphaleron**。

这些重子数、轻子数不守恒的过程对早期宇宙中发生的重子数产生而言是十分重要的。在宇宙大爆炸时，宇宙中应该不存在任何重子数，但是我们今天看到的宇宙充满重子数为正的物质，而重子数为负的反物质不见踪影。从而在宇宙演化到今天的过程中，一定发生了一些重子数不守恒的过程，而 sphaleron 就可能贡献了这些过程。

除了重子数不守恒之外，Sakharov 给出了重子数产生的两个其他条件：CP 不守恒和宇宙演化远离平衡态。前者是为了保证重子和反重子的产生过程具有不同的振幅；后者是因为如果宇宙演化一直处于平衡态，那么由于细致平衡原理，重子数产生速率及其反过程速率一定相同，从而宏观上不可能具有净的重子数产生。在标准模型中，这三个条件事实上都满足（CKM 矩阵给出 CP 不守恒，而电弱相变发生时宇宙不处于平衡态），但是根据计算，标准模型的重子数破坏、CP 破坏和非平衡程度事实上都还不够产生当前我们看到这么多的重子数，这也是很多超出标准模型的新物理模型的 motivation。

8.3.2 't-Hooft Anomaly Matching and Chiral Symmetry Breaking

前面我们看到，一个手征规范理论中的全局对称性只存在全局-规范-规范反常，而不存在全局-全局-全局反常。而在这一节的剩下部分，我们的目标就是说明这些全局-全局-全局反常事实上能够帮助我们获得关于禁闭相的很多理解。

为了看到这一点，可以尝试着去将处于禁闭相的理论中一个对称群为 G_F 的全局对称性规范化。如果理论中存在 G_F - G_F - G_F 反常，那么规范化后的理论将是不自洽的。为此，我们可以引入一些无质量的、只具有 G_F 荷，且只和 G_F 规范场的旁观费米子来消除 G_F - G_F - G_F 反常。当然，这些旁观费米子和原来的场（也就是理论中的基本粒子）贡献的反常满足以下关系：

$$A_{UV} + A_{\text{Spectator}} = 0 \quad (8.96)$$

如果我们将 G_F 的规范耦合取得足够小，那么它应该不改变原来理论中的 IR 能谱（这对应禁闭后的束缚态），而仅仅是在这些能谱中加入了旁观费米子。如果 G_F 这一对称性不由于某些动力学原因自发破缺，我们就一定可以写出一个基本自由度为这些束缚态的有效理论，由于这个有效理论也应该是自洽的，从而：

$$A_{IR} + A_{\text{Spectator}} = 0 \quad (8.97)$$

也就是说：如果 G_F 对称性不自发破缺，那么基本粒子和禁闭后的束缚态应该给出相同的 G_F - G_F - G_F 反常。这就被称为 '**t Hooft 反常匹配**'。反之而言，如果禁闭后的束缚态无论如何都无法给出相同的 G_F - G_F - G_F 反常，那么 G_F 对称性一定因为某些动力学原因而自发破缺。

接下来，我们就要利用 '**t Hooft 反常匹配**' 说明：一个具有 $N_f \geq 3$ 味无质量费米子的 $SU(N)$ 规范理论中的手征对称性一定是自发破缺的。具体而言，就是考虑如下的规范理论¹¹：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr}[\mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu}] + \bar{q}_i (i \not{D}) q_i \quad (8.98)$$

当然， N, N_f 的选择需要让这个理论处于禁闭相。这个理论的经典 Lagrangian 具有如下的 $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ 手征对称性：

$$q_{L,i} \rightarrow L_{ij} q_{L,j}, \quad q_R \rightarrow R_{ij} q_{R,j}, \quad L, R \in U(N_f) \quad (8.99)$$

由于一个任意的 $U(N_f)$ 变换可以被分解为 $e^{i\theta} U$ ，其中 $U \in SU(N_f)$ ，从而这个对称群也可以被组合为 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_L \times U(1)_R$ 。

这个手征对称性是经典 Lagrangian 的对称性，只有其中不出现全局-规范-规范反常的子群才是理论的量子对称性。由于 $SU(N_f)$ 满足 $\text{Tr}[T^a] = 0$ ，于是 $SU(N_f)$ 不存在全局-规范-规范反常。对于 $U(1)$ 子群而言， $U(1)_L \times U(1)_R$ 又可以分解为 $L = R$ 的子群 $U(1)_V$ 和 $L = R^\dagger$ 的子群 $U(1)_A$ 的直积。由于左手、右手场都携带 $U(1)_V$ 荷 1，于是左右手给出的 $U(1)_V$ -规范-规范反常相消；而由于左手场都携带 $U(1)_A$ 荷 1，右手场携带 $U(1)_A$ 荷 -1，从而理论中存在 $U(1)_A$ -规范-规范反常， $U(1)_A$ 不再是体系的量子对称性。综上所述，手征对称群中只有以下的子群是理论的量子对称性：

$$G_F = SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V \quad (8.100)$$

接下来的思路就是：分别计算夸克和禁闭后的束缚态——强子给出的 G_F - G_F - G_F 反常，并说明 '**t Hooft 反常匹配**' 条件不可能被满足，从而手征对称性一定是自发破缺的。

¹¹ 这里使用了夸克的记号 q ，并且之后也会将这些场称为夸克。不过只要理论处于禁闭相，这些讨论对规范群为任何 $SU(N)$ 的规范理论都成立。

Quarks' Contribution

首先考虑夸克给出的 G_F - G_F - G_F 反常。我们已经非常熟悉这些反常正比于以下的反常系数：

$$\sum_{\text{left}} \text{Tr} [T_R^a \{ T_R^b, T_R^c \}] - \sum_{\text{right}} \text{Tr} [T_R^a \{ T_R^b, T_R^c \}] \quad (8.101)$$

在这个 N_f 味的 $SU(N)$ 规范理论中，我们有 N 个在群 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V$ 的表示 $(N_f, 1)_{Q_V=1}$ 的左手费米子多重态，以及 N_f 个处于表示 $(1, N_f)_{Q_V=1}$ 的右手费米子多重态。如同上面讨论标准模型一样，由于群 $G_F = SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V$ ，于是我们需要分别考虑不同子群组合的反常系数。

首先考虑含有 $SU(N_f)_L$ 的反常：由于 $SU(N_f)$ 满足 $\text{Tr}[T^a] = 0$ ，从而含有 $SU(N_f)_L$ 的反常只有 $SU(N_f)_L$ - $SU(N_f)_L$ - $SU(N_f)_L$ 反常和 $SU(N_f)_L$ - $SU(N_f)_L$ - $U(1)_V$ 可能非 0。并且由于理论具有 $L \rightarrow R$ 的“左右对称性”，于是我们只需要考虑 $SU(N_f)_L$ 的这些反常，不需要考虑含有 $SU(N_f)_R$ 的反常。于是除去这些含有 $SU(N_f)_L$ 的反常之外，需要讨论的就仅仅是 $U(1)$ - $U(1)$ - $U(1)$ 反常。对于这三个需要考虑的反常系数，分别计算如下：

- $SU(N_f)_L$ - $SU(N_f)_L$ - $SU(N_f)_L$ ：由于 $\text{Tr} [T_R^a \{ T_R^b, T_R^c \}] = A(R) d^{abc}$ ，于是这个反常系数为：

$$\sum_{\text{left}} \text{Tr} [T_L^a \{ T_L^b, T_L^c \}] - \sum_{\text{right}} \text{Tr} [T_L^a \{ T_L^b, T_L^c \}] = N A(N_f) d^{abc} \quad (8.102)$$

- $SU(N_f)_L$ - $SU(N_f)_L$ - $U(1)_V$ ：由于 $\text{Tr}[T_R^a T_R^b] = T(R) \delta^{ab}$ ，于是：

$$\sum_{\text{left}} \text{Tr} [Q_V \{ T_L^a, T_L^b \}] - \sum_{\text{right}} \text{Tr} [Q_V \{ T_L^a, T_L^b \}] = 2 N T(N_f) \delta^{ab} \quad (8.103)$$

- $U(1)$ - $U(1)$ - $U(1)$ ：这个反常系数正比于：

$$\sum_{\text{left}} Q_V^3 - \sum_{\text{right}} Q_V^3 = N - N = 0 \quad (8.104)$$

这就计算出了夸克给出的全部三个需要考虑的反常系数。

Hadrons' Contribution

接下来考虑手征对称性没有破缺时强子对 G_F - G_F - G_F 反常的贡献。为此，首先要考虑的就是强子所处的 G_F 表示。由于 $SU(N)$ 群只有两个独立的投影张量 δ_j^i 和 $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}$ ，于是需要考虑的色单态也就只有由 $q^i q_i$ 组成的介子和由 $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N} q_{i_1} \dots q_{i_N}$ 组成的重子，其余的色单态都可以被看成这些介子、重子的束缚态，它们不是基本自由度，不贡献反常。

对于介子而言，由于它们是两个费米子组成的，从而是玻色子。根据自旋-统计定理，它们在有效理论中不能用左右手旋量场所描述，不贡献反常。于是所有反常都来自于重子。

当 N 为偶数时，重子也由偶数个费米子组成，也是玻色子，不贡献反常。此时强子永远无法给出和夸克相同的反常，从而在 N 为偶数的 $SU(N)$ 规范理论中，'t Hooft 反常匹配条件无法成立，手征对称性必然破缺。

N 为奇数时的讨论比 N 为偶数时复杂得多, 于是在下面我们仅仅关注 $N = 3$, 也就是 QCD 的情形。此时重子由三个夸克组成, 它们所处的 G_F 表示一定包含于三个夸克所处的 G_F 表示的直积中。倘若我们知道了三个夸克所处的 G_F 表示的直积中有什么不可约表示¹², 就可以设出处于每个不可约表示 r 中的重子多重态数 n_r , 并且将反常系数表示为 n_r 的函数 $A(n_r)$ 。如果不存在任何一组 n_r 使得 $A(n_r)$ 和夸克给出的反常系数相同, 那么 G_F 也就一定自发破缺。按照这个思路, 我们只需要列举出三夸克的直积表示中含有什么不可约表示即可。根据 $SU(N_f)$ 直积表示的如下分解关系¹³:

$$\square \otimes \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \square \square, \quad \square \otimes \square \otimes \square = \square \square \square \oplus 2 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad (8.105)$$

可以将所有可能的夸克组分给出的不可约表示列举如下:

- $q_L q_L q_L$ 组成的重子: 由于 q_L 处于 $(N_f, 1)_{Q_V=1} = (\square, 1)_{Q_V=1}$, 于是 $q_L q_L q_L$ 处于 $[(\square, 1)_{Q_V=1}]^3$ 中。这可以分解出以下不可约表示:

$$(\square \square \square, 1)_{Q_V=3}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, 1)_{Q_V=3}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, 1)_{Q_V=3} \quad (8.106)$$

并且由于左手夸克处于 Lorentz 群的表示 $(2, 1)$ 中, 而三个 $(2, 1)$ 的直积包含 $(2, 1)$ 而不包含 $(1, 2)$, 所以如果这些由 $q_L q_L q_L$ 组成的重子能用 Weyl 费米子描述, 那么它们一定是左手费米子。

- $q_L q_L q_R$ 组成的重子: 同样, 我们需要考虑 $[(\square, 1)_{Q_V=1}]^2 \otimes (1, \square)_{Q_V=1}$ 。它能够分解以下的不可约表示

$$(\square \square, \square)_{Q_V=3}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \square)_{Q_V=3} \quad (8.107)$$

类似, 由于 Lorentz 群表示 $(2, 1) \otimes (2, 1) \otimes (1, 2)$ 中包含 $(2, 1)$ 而不包含 $(1, 2)$, 于是这些重子是左手的。

除去这些重子之外, 还有 $q_L q_R q_R$ 构成的重子和 $q_R q_R q_R$ 构成的重子。容易发现, 只需要将上面这些讨论的左手表示和右手表示切换一个位置就能得到这些情形下重子所处的不可约表示, 并且此时的重子是右手的。并且由于 QCD 是宇称守恒的, 如果理论中包含一定量的处于 $(r_L, r_R)_{Q_V}$ 表示的左手费米子, 那么也应该包含等量的处于 $(r_R, r_L)_{Q_V}$ 的右手费米子。从而我们只需要设出上面五个表示中的左手重子多重态数目, 就可以得到相应的右手重子多重态数目¹⁴。

不失一般性地, 可以假设理论中的左手重子多重态数目如下:

$$n_1(\square \square \square, 1)_{Q_V=3} \oplus n_2(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, 1)_{Q_V=3} \oplus n_3(\square \square, \square)_{Q_V=3} \oplus n_4(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \square)_{Q_V=3} \oplus n_5(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, 1)_{Q_V=3} \quad (8.108)$$

¹²由于一切表示都可以分解为这些不可约表示的直和, 于是这里的讨论是普遍的。

¹³如果你不熟悉 Young 图和 $SU(N)$ 不可约表示的关系, 可以看看我的另一个关于李群和李代数的 notes。

¹⁴你可能会质疑: 宇称会不会也是自发破缺的? 对于 QCD 这样的理论而言, 有一个定理 (Vafa-Witten-Weingarten 定理) 保证了宇称不会自发破缺。

于是, 这些重子能够给出的 $SU(N_f)_L$ - $SU(N_f)_L$ - $SU(N_f)_L$, $SU(N_f)_L$ - $SU(N_f)_L$ - $U(1)_V$ 和 $U(1)$ - $U(1)$ - $U(1)$ 反常系数就如下所示:

$$\sum \pm \text{Tr}[T_L^a \{T_L^b, T_L^c\}] = \sum_i n_i [\dim r_{i,R} A(r_{i,L}) - \dim r_{i,L} A(r_{i,R})] \quad (8.109)$$

$$\sum \pm \text{Tr}[Q_V \{T_L^a, T_L^b\}] = \sum_i 6n_i [\dim r_{i,R} T(r_{i,L}) - \dim r_{i,L} T(r_{i,R})] \quad (8.110)$$

$$\sum \pm Q_V^3 = 0 \quad (8.111)$$

根据以下的信息¹⁵, 我们就最终计算出了重子给出的反常系数。

\mathbf{R}	$\dim(\mathbf{R})$	$T(\mathbf{R})/T(N_f)$	$A(\mathbf{R})/A(N_f)$
	N_f	1	1
	$\frac{1}{2}N_f(N_f + 1)$	$N_f + 2$	$N_f + 4$
	$\frac{1}{2}N_f(N_f - 1)$	$N_f - 2$	$N_f - 4$
	$\frac{1}{6}N_f(N_f + 1)(N_f + 2)$	$\frac{1}{2}(N_f + 2)(N_f + 3)$	$\frac{1}{2}(N_f + 3)(N_f + 6)$
	$\frac{1}{6}N_f(N_f - 1)(N_f - 2)$	$\frac{1}{2}(N_f - 2)(N_f - 3)$	$\frac{1}{2}(N_f - 3)(N_f - 6)$
	$\frac{1}{3}N_f(N_f^2 - 1)$	$N_f^2 - 3$	$N_f^2 - 9$

对于真实世界的 QCD 而言, 由于有三味夸克的质量小于 QCD 的动力学标度 $\Lambda_{\text{QCD}} = 200 \text{ MeV}$, 于是可以近似地将无质量味数取做 $N_f = 3$ 。此时, 't Hooft 反常匹配关系给出:

$$27n_1 - 15n_3 = 3, \quad 15n_1 - 9n_3 + 6n_5 = 1 \quad (8.112)$$

容易看出, 第二个关系的左边一定是 3 的倍数, 而右边不是, 从而对于真实世界中的 $N_f = 3$ 味 QCD 而言, 反常匹配关系也一定不能满足, 从而其中的 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 手征对称性一定是自发破缺的。根据我们在第六章的讨论, 这意味着一定存在一个在 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的非平凡表示中的 Lorentz 标量算符获得了真空中期待值, 而最简单的可能性就是出现所谓的夸克凝聚:

$$\langle \bar{q}_R q_L \rangle \neq 0 \quad (8.113)$$

在后面几节的讨论中, 我们将利用这一事实写出一个关于这些介子、重子的有效理论——手征微扰论。

¹⁵这个表格来自 David Tong 的 Gauge Theory 讲义, 我将其表头改为了这个和 notes 相同的记号。

Decoupling Condition

对于 N_f 不是 3 的倍数的情形而言, 我们并不能直接通过't Hooft 反常匹配条件说明手征对称群 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V$ 是自发破缺的。例如对于 $N_f = 4$ 的情形, 't Hooft 反常匹配条件给出以下的方程:

$$35n_1 - n_2 - 22n_3 + 6n_4 + 7n_5 = 3, \quad 21n_1 + n_2 - 14n_3 - 2n_4 + 13n_5 = 1 \quad (8.114)$$

这组方程的确有解 $n_2 = 3, n_4 = 1, n_1 = n_3 = n_5 = 0$, 这是否说明 $N_f = 4$ 时手征对称性可以不自发破缺呢? 事实上, 't Hooft 给出了另外一个条件——**退耦条件**来说明在 $N_f \geq 3$ 时理论中的手征对称性一定破缺。其基本思路是: 如果我们给了一味夸克质量, 那么手征对称群就会从 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V$ 破缺到 $SU(N_f - 1)_L \times SU(N_f - 1)_R \times U(1)_V$, 而这些剩余的手征对称性不应该阻止含有重夸克的束缚态获得质量。并且如果一个处于 $SU(N_f - 1)_L \times SU(N_f - 1)_R$ 表示 (r'_L, r'_R) 的束缚态能够获得质量, 左手重子和右手重子分解出的 (r'_L, r'_R) 应该具有相同的重数, 否则将无法对所有这种重子多重态写出形如 $\bar{\Psi}_L \Psi_R$ 的质量项。这给出了以下的退耦条件:

对于一个含有重夸克的束缚态所处的 $SU(N_f - 1)_L \times SU(N_f - 1)_R$ 表示, 当我们将重子所处的总 $SU(N_f)$ 表示限制在 $SU(N_f - 1)$ 上时, 左手重子和右手重子分解出的该表示一定具有相同的重数。

n_1, \dots, n_5 除去要满足't Hooft 反常匹配条件之外, 还需要满足每一个含有重夸克的束缚态可能所处的表示给出的退耦条件。如果不存在这样的 n_1, \dots, n_5 , 那么手征对称性就应该自发破缺。

由于重夸克在新的手征群 $SU(N_f - 1)_L \times SU(N_f - 1)_R \times U(1)_V$ 中处于平凡表示, 从而如果重子中含有一个重夸克, 那么它所处的 $SU(N_f - 1)_L \times SU(N_f - 1)_R$ 表示应该包含于两个夸克所处的表示的直积中。从而, 含有重夸克的束缚态所处的 $SU(N_f - 1)_L \times SU(N_f - 1)_R$ 表示可以列举如下:

- 组分为 $q_L q_L q_{\text{Heavy}}$ 的重子: 此时夸克所处的 $SU(N_f - 1)_L \times SU(N_f - 1)_R$ 表示是 $(\square, 1) \otimes (\square, 1)$, 其中包含:

$$(\square\square, 1), \quad (\square\bigcirc, 1) \quad (8.115)$$

- 组分为 $q_L q_R q_{\text{Heavy}}$ 的重子: 此时夸克所处的 $SU(N_f - 1)_L \times SU(N_f - 1)_R$ 表示是 (\square, \square) , 这本身就是不可约的, 从而只包含:

$$(\square, \square) \quad (8.116)$$

- 组分为 $q_R q_R q_{\text{Heavy}}$ 的重子: 此时夸克处于 $(1, \square) \otimes \square$, 这可以分解出:

$$(1, \square\square), \quad (1, \square\bigcirc) \quad (8.117)$$

这就是含有单个重夸克的束缚态能够处于的一切表示，接下来我们就需要依次考虑这些表示给出的退耦条件，下面就以 $(\square\square\square, 1)$ 为例仔细看看这个过程。根据前面的讨论，理论中具有如下数量的左手重子多重态：

$$n_1(\square\square\square, 1) \oplus n_2(\square\square, \square) \oplus n_3(\square\square, 1) \oplus n_4(\square, \square) \oplus n_5(\square\square\square, 1) \quad (8.118)$$

利用 Gel'fand 符号，我们可以计算出一个 $SU(N)$ 表示限制在子群 $SU(N-1)$ 上时能分解出什么表示。对于这五个 $SU(N_f) \times SU(N_f)$ 表示而言， $(\square\square\square, 1)$, $(\square\square\square, 1)$, $(\square\square, \square)$ 都能分解出一个 $SU(N_f-1) \times SU(N_f-1)$ 表示 $(\square\square, 1)$ 。于是左手费米子能分解出的 $(\square\square, 1)$ 重数就是：

$$n_L = n_1 + n_3 + n_5 \quad (8.119)$$

而对于右手费米子，没有相应的 $SU(N_f) \times SU(N_f)$ 表示能够分解出 $SU(N_f-1) \times SU(N_f-1)$ 表示 $(\square\square, 1)$ 。从而 $(\square\square, 1)$ 给出的退耦条件就是：

$$n_1 + n_3 + n_5 = 0 \quad (8.120)$$

利用类似的方法，我们能够得到全部五个单个重夸克的束缚态可能处于的表示对应的退耦条件。事实上，其中只有 $q_L q_L q_{\text{Heavy}}$ 重子给出的两个条件是独立的： $q_R q_R q_{\text{Heavy}}$ 重子给出的条件和 $q_L q_L q_{\text{Heavy}}$ 给出的条件等价，而 $q_L q_R q_{\text{Heavy}}$ 重子给出的条件在宇称守恒的理论中天然被满足。这两个独立的条件分别就是：

$$n_1 + n_3 + n_5 = 0, \quad n_2 + n_4 + n_5 = 0 \quad (8.121)$$

可以证明：对于 $N \geq 2, N_f \geq 3$ 的情形，不存在任何一组 $\{n_i\}$ 能够同时满足't Hooft 反常匹配条件和所有的退耦条件。于是我们最终得到了结论：

在一个具有 N_f 味处于基础表示的无质量 Dirac 费米子的 $SU(N)$ 规范理论中，如果 $N \geq 2, N_f \geq 3$ 并且理论处于禁闭相，那么手征对称性 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V$ 一定是自发破缺的。

't Hooft 反常匹配条件能够给出的结果到此为止。利用't Hooft 反常匹配，我们不知道 $N_f = 2$ 时是否具有手征对称性破缺，但是格点 QCD 等数值计算显示手征对称性破缺仍然是存在的。

IR Phases of Massless QCD, Revisited

利用手征对称性的自发破缺，我们又能对无质量 QCD 的 IR 相有一个更深刻的了解。让我们从 N_f 较高时开始：

- 当 N_f 大于等于 $\frac{11}{2}N$ 时，任意圈的 beta 函数都是正的，此时理论处于 IR 自由相。
- 当 N_f 满足 $N_* \leq N_f < \frac{11}{2}N$ 时，理论中存在 Banks-Zaks 不动点，并且这些理论在 IR 端都会流向这个不动点。这使得理论在 IR 端是一个**共形场论**。至于共形窗口的下界 N_* 在哪里，我们毫无头绪。

- 当 N_f 小于 N_* 时, 理论跨入禁闭相。根据前面的讨论, 由于此时't Hooft 反常匹配条件无法满足, 于是理论中一定存在手征对称性破缺, 产生 Goldstone 玻色子。由于理论是无质量的, 手征对称性是理论的精确对称性而非近似对称性, 于是这些 Goldstone 玻色子的质量严格为 0, 从而理论中不存在 mass gap。
- N_f 一路减小, 直到 $N_f = 1$ 。此时理论中不再具有手征对称性, 也就不再有 Goldstone 玻色子。此时理论在 IR 的自由度只有介子、重子和胶球, 理论中存在 mass gap¹⁶。
- 最后, 当 $N_f = 0$ 时, 理论中也就没有任何夸克, 此时理论仍然处于禁闭相, IR 自由度只存在胶球, 而 mass gap 依然存在。

8.4 QCD and Chiral Perturbation Theory

既然上一节告诉我们标准模型是一个自治的、没有规范反常的理论, 那么我们就终于可以开始用标准模型来计算一些物理过程了, 对吧? 不幸的是, 经过前面这些讨论, 我们实际上仅仅明白了如何计算规范玻色子、Higgs 粒子和轻子之间散射的散射截面。而对于夸克部分, 我们还有一个重要的问题没有解决。

这个问题就是 QCD 中的色禁闭。由于存在色禁闭, 于是渐进时刻的场论中是不包含任何非色单态的自由多粒子态, 而只包含这些束缚态的。但是我们平常在散射问题中处理的都是自由多粒子态的散射: Lagrangian 中直接包含这个自由多粒子态中粒子的产生湮灭算符, 这样才能使用 LSZ 约化公式将 S-矩阵转化为编时关联函数, 从而用 Feynman 图计算。而对于束缚态而言, 我们暂时不明白如何计算它们之间的 S-矩阵, 也就不知道如何预言散射截面了。

在这一节中, 我们的目的就是用手征微扰论来解决这个问题。我们知道, 强子分为介子 (夸克组分为 $q\bar{q}$) 和重子 (夸克组分为 qqq)。手征微扰论的基本思路就是将介子认为是 QCD 中手征对称性破缺带来的 Goldstone 玻色子。对于这些 Goldstone 玻色子而言, 存在一个普适的方法来参数化这些场, 进而能够据此写出包含这些 Goldstone 玻色子的有效作用量, 这也就能给出介子-介子散射的散射截面。而对于重子而言, 我们知道它们在手征对称变换下的对应的变换关系, 从而可以引入一个重子场, 以介子和重子为理论的基本自由度写出一个包含一切可能耦合的有效 Lagrangian, 从而构造出一个介子和重子的低能有效场论。利用这个有效场论, 我们就能给出对低能下强子散射截面的预言。

8.4.1 Nonlinear Realizations and Goldstone Bosons

遵循这个思路, 我们首先需要明白如何参数化一个任意的对称性自发破缺带来的 Goldstone 玻色子。为了明白这一点, 我们需要先讨论一下规范群的**非线性实现**: 我们一般在说物质场在规范群下如何变换时, 考虑的都是规范群的一个表示。这隐含了一个假设——物质场在规范群下的变换是线性的。而除去这种可能性之外, 场还可以在规范群下非线性地变化, 这可以被认为是规范群 G 在场流形上的一个群作用。接下来, 我们考虑的就是这种在规范群下非线性变换的场的性质: 我们首先会给出一个“标准”的非线性实现, 紧接着说明一

¹⁶ 你可能会想: 既然我们已经知道了 QCD 中存不存在 mass gap, 那么为什么不去领取百万美元的奖金呢? 答案是因为由于我们不知道禁闭相形成的细节, 于是这些讨论都是不严格、基于定性结论的。千禧年难题可不是这么容易攻克的事情!

切非线性实现都可以被化为这个例子中的形式。并且我们将会发现：这个形式自动就给出了对 Goldstone 玻色子的参数化¹⁷。

首先，让我们给出这个“标准”的非线性实现。假如我们的规范群是紧致、联通且半单的李群 G ，而经过某种对称性自发破缺后，它被破缺到了子群 H 上。那么我们可以将 H 的生成元取为 V_i ，并将 G 中 H 之外部分（也就是陪集空间 G/H ）的生成元取为 A_l 。并且在这个选取中，这些生成元满足通常的 $\text{Tr}(T_i T_j) \propto \delta_{ij}$ 。由于李代数到李群的指数映射在单位元邻域中可逆，于是在这个邻域中，任何的群元素 $g \in G$ 都可以写为：

$$g = \exp(i\xi_l A_l) \exp(iu_i V_i) \quad (8.122)$$

从而，如果我们对一个陪集空间的元素 $e^{\xi_l A_l}$ 作用一个任意的群元素 g_0 ，也一定有分解：

$$g_0 \exp(i\xi_l A_l) = \exp(i\xi'_l(\xi, g_0) A_l) \exp(iu'_i(\xi, g_0) V_i) \quad (8.123)$$

有了这个关系，就可以给出“标准”的非线性实现了。如果一个场 ϕ 在未破缺规范群 H 的表示 D 中，那么我们可以将这个 H 的表示扩展为一个 G 的非线性实现。具体而言，就是定义：

$$g_0 : \xi \rightarrow \xi'(\xi, g_0), \quad \phi \rightarrow D\left(e^{iu'_i(\xi, g_0) V_i}\right) \phi \quad (8.124)$$

在本节后面就将看到： ϕ 对应理论中非 Goldstone 的场，而 ξ 就对应了这个对称性破缺所产生的 Goldstone 场。而这个“标准”的非线性实现也就相当于将理论中的场参数化为了 $\Phi = \exp(i\xi_l A_l) \phi$ 。在这个参数化下，这个变换关系也就自然是：

$$\Phi \rightarrow g_0 \Phi = g_0 \exp(i\xi_l A_l) \phi = \exp(i\xi'_l(\xi, g_0) A_l) \exp(iu'_i(\xi, g_0) V_i) \phi \quad (8.125)$$

有了这个非线性实现，我们的下一步就是要说明：任何非线性实现都能写成上面这个标准形式。如果用严格的数学语言表述的话，一个非线性实现就对应场流形 M 上的一个群作用 $\sigma : G \times M \rightarrow M$ ，而“任何非线性实现都能写成上面这个标准形式”也就意味着：对于任意的群作用 $\sigma : G \times M \rightarrow M$ 而言，流形 M 上总存在一组坐标卡 (ξ, ϕ) ，使得这组坐标在群下的变化有如上的形式。为了证明这件事情，首先考虑以下的引理：

Lemma 1 (Linearization Lemma). 对于群 G 在流形 M 上的群作用 $\sigma : G \times M \rightarrow M$ 而言，如果 M 上一点 p 的稳定子群 H 是紧致李群，那么我们可以找到一个包含 p 的坐标卡，使得： p 的坐标为 0，并且 H 在这组坐标下的作用是线性的。

Proof. 证明非常简单。首先我们总能找到一个坐标卡 x 使 p 的坐标为 0，在这组坐标下， G 的群作用总可以写为 $x \mapsto T_g x$ 。对于无穷小的 h ，总可以对这个变换关系 Taylor 展开：

$$T_g x = D(g)x + O(x^2) \quad (8.126)$$

利用这个 $D(g)$ ，我们就能构造出满足这些要求的这组坐标：

$$y = \int dh D^{-1}(h) T_h x \quad (8.127)$$

¹⁷这些讨论来自于 Coleman, Callan, Wess 和 Zumino 写的两篇文章 *Phys. Rev.* **177**, 2239 (1969) 和 *Phys. Rev.* **177**, 2247 (1969)，这两篇文章也正是提出这套构造的原始文献。当然，如果你仅仅想要了解手征微扰论，那么这里的这些数学化的讨论并不是必要的，你可以直接跳过这一小节去看下一小节。

其中 $\int dh$ 是紧李群 H 上的 Haar 测度, 满足 $\int dh = 1$ 。在这组坐标下, 由于 $T_h 0 = 0$, 于是 $y = 0$, 从而第一个要求在这组坐标下满足。并且对 y 作用一个 h 元素, 就有:

$$T_h y = \int dh' D^{-1}(h') T_{h'}(T_h x) = \int dh' D^{-1}(h' h^{-1}) T_{h'} x = D(h) \int dh' D^{-1}(h') T_{h'} x = D(h) y \quad (8.128)$$

也就是说, 这组坐标也满足我们的第二个要求, 从而就是我们想找的坐标。 \square

有了这个结论之后, 我们就能开始着手考虑原本的问题了。既然我们想要证明: 对于任意的群作用 $\sigma: G \times M \rightarrow M$ 而言, 流形 M 上总存在一组坐标卡 (ξ, ϕ) , 使得这组坐标在群下的变化具有前述的“标准”形式。那么最直接的证明方法当然就是将这组坐标构造出来。

为此, 让我们考虑考虑 M 上的一点 p (其物理意义就是我们选择的真空场构型)。如果 p 在这个群作用下的轨道为 N (物理上就是真空流形), 那么 N 中任意的点都可以写为 gp 。更进一步地, 如果令 p 的稳定子群为紧李群 H (未破缺的规范群), 并将 H 和 G 的生成元和上面一样, 取为 V_i, A_l , 那么就可以将 N 中任意的点写为 $\exp(i\xi_l A_l)p$ 。这一组 ξ_l 就可以作为 N 上的坐标。

接下来, 我们引入剩下的几个坐标 $\tilde{\Psi}$ 。并且在这个引入的过程中, 我们总可以让 N 上的点对应 $\tilde{\Psi} = 0$, 从而其坐标就是 $(\xi, 0)$ 。对于 N 上的点 $\exp(i\xi_l A_l)p$ 而言, 如果我们作用一个群元 g , 那么这一点将变为:

$$g \exp(i\xi_l A_l p) = \exp(i\xi'_l(\xi, g) A_l) \exp(iu'_i(\xi, g) V_i) p = \exp(i\xi'_l(\xi, g) A_l) p \quad (8.129)$$

根据前面所述的线性化引理, 只要定义:

$$(\xi, \Psi) := \left(\xi, \int dh D^{-1}(h) T_h \tilde{\Psi} \right) \quad (8.130)$$

那么 H 对 Ψ 的作用就可以被取做线性的。不过到此为止, 我们仅仅使得 N 上的点 $(\xi, 0)$ 在 G 下的变化满足我们的“标准”形式, 但是并没有使得任意的 (ξ, Ψ) 在 G 下按照“标准”形式变化。为此, 我们可以引入一组新的坐标, 它如下定义:

$$(0, \phi) := \exp(-i\xi_l A_l)(\xi, \Psi) \quad (8.131)$$

这个关系定义了什么是 ϕ 。有了 ϕ 的定义, 我们就可以将原先点 (ξ, Ψ) 的新坐标定义为 (ξ, ϕ) 。从而, 这组坐标满足:

$$(\xi, \phi) = \exp(i\xi_l A_l)(0, \phi) \quad (8.132)$$

并且在这组坐标下, $(\xi, 0)_{\text{New}} = \exp(i\xi_l A_l)(0, 0) = \exp(i\xi_l A_l p) = (\xi, 0)_{\text{Old}}$, 从而在新旧坐标下 N 上元素都具有相同的坐标。这样一来, 这组新坐标在群 G 下的变换关系就明确了:

$$\begin{aligned} g(\xi, \phi)_{\text{New}} &= g \exp(i\xi \cdot A)(0, \phi)_{\text{Old}} = \exp(i\xi'(\xi, g) \cdot A) \exp(iu'(\xi, g) \cdot V)(0, \phi)_{\text{Old}} \\ &= \exp(i\xi'(\xi, g) \cdot A) \left(0, D \left(e^{iu'(\xi, g) \cdot V} \right) \phi \right)_{\text{Old}} = \left(\xi'(\xi, g), D \left(e^{iu'(\xi, g) \cdot V} \right) \phi \right)_{\text{New}} \end{aligned} \quad (8.133)$$

从而可以发现: 这就正是我们想要的坐标! 于是到此为止, 我们就可以说: 对于任意的群作用 $\sigma: G \times M \rightarrow M$ 而言, 流形 M 上总存在一组坐标卡 (ξ, ϕ) , 使得这组坐标在群下的变化为标准形式 $g(\xi, \phi) = (\xi'(\xi, g), D(e^{iu'(\xi, g) \cdot V}) \phi)$ 。

因为我们是做物理的，这些数学可能对我们太抽象了，需要翻译成物理语言：对于一个存在对称性自发破缺的规范理论而言，无论场在规范群下如何变换，我们总能取一组合适的参数化 (ξ, ϕ) ，使得场的规范变换满足上面的标准变换关系。这就相当于将 Goldstone 放在了陪集空间中，并令非 Goldstone 的场按照 $D(e^{iu \cdot V})$ 变换。

当然，我们在前面一直在说场 ξ 对应 Goldstone 场，而并没有证明 Lagrangian 中的的确没有它的质量项。实际上，其证明十分简单：只用考虑群元素 $g = \exp((k-1)\xi \cdot A)$ 给出的规范变换。从“标准”的非线性实现中，容易看到：场 ϕ 在这个变化下不变，而 ξ 变成了 $k\xi$ 。由于 Lagrangian 一定要具有规范对称性，从而 Lagrangian 在任何 k 对应的变化下都不变。不幸的是，场 ξ 的质量项 ξ^2 在这个变换下会乘一个因子 k^2 ，从而 Lagrangian 中就不能包含 ξ 的质量项，于是 ξ 也的确是一个 Goldstone Boson。

总结一下上面的讨论，就是：

对于任意的一个对称性自发破缺 $G \rightarrow H$ ，我们总能将理论中的场参数化为 $\Phi = \exp(i\xi \cdot A)\phi$ ，其中陪集空间中的场 ξ 就是这个对称性自发破缺对应的 Goldstone 场，而 ϕ 是非 Goldstone 的场，它们按照群 H 的线性表示变换。

有了这个结论之后，我们就明白了如何描述一个任意的对称性自发破缺对应的 Goldstone 场——不需要知道理论中任何的粒子组分，只需要知道这样一个对称性破缺对应的群 $G \rightarrow H$ ，就可以将 Goldstone 场参数化为 $U = \exp(i\xi \cdot A)$ ，其中 A 是破缺的生成元。而这正是我们所需要的：对于低能标下的 QCD 而言，我们并不会用夸克和胶子来描述任何的强子，于是只能将强子作为新的基本自由度放进理论中。正如前面所说：介子可以被认为是手征对称性破缺下的 Goldstone 玻色子，于是只要知道了手征对称性破缺对应的群 $G \rightarrow H$ ，介子就能完全用这样一个陪集空间中的场描述。

8.4.2 Chiral Symmetry Breaking in Two-Flavor QCD

为了看到手征对称性破缺对应的对称群，可以考虑一个简单的模型：只有两味轻夸克的 QCD，当忽略这些轻夸克的质量时，理论的 Lagrangian 具有以下的 $U(2)_L \times U(2)_R = SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_L \times U(1)_R$ 对称性¹⁸：

$$q_L \rightarrow L q_L, \quad q_R \rightarrow R q_R \quad (L, R \in U(2)) \quad (8.134)$$

这个 $U(2)_L \times U(2)_R$ 对称性也可以被重新组合为 $SU(2)_V \times SU(2)_A \times U(1)_V \times U(1)_A$ ：

$$\begin{pmatrix} q_L \\ q_R \end{pmatrix} \rightarrow \exp[-i(\alpha^a \sigma^a + \alpha)] \exp[-i(\beta^a \sigma^a + \beta) \gamma_5] \begin{pmatrix} q_L \\ q_R \end{pmatrix} \quad (8.135)$$

其中前一个 \exp 中的元素就对应 $SU(2)_V, U(1)_V$ ，而后一个就对应 $SU(2)_A, U(1)_A$ 。不过上一节的讨论告诉我们：由于't Hooft 反常匹配条件不能被满足，于是这个手征对称性一定是自发破缺的。这个自发破缺可以被认为是由 $\langle \bar{q}_R q_L \rangle \neq 0$ ，也就是费米子凝聚所引

¹⁸这一节剩下的讨论来自 Weinberg II (关于从 CCWZ 构造推出手征微扰论)，2018 年 A. Hook 在 TASI 讲授的有关强 CP 问题和轴子的讲座 arXiv:hep-ph/1812:02669 (关于 θ 角和 U(1) 问题) 和 Srednicki (关于强子的电弱作用)。

起的¹⁹。由于 $\bar{q}_R q_L$ 只在 $L = R$ 的变换下不变, 于是在这个费米子凝聚下, 理论的对称性从 $U(2)_L \times U(2)_R$ 自发破缺到了 $L = R$ 的子群 $U(2)_V = SU(2)_V \times U(1)_V$, 而 $L = R^\dagger$ 的 $SU(2)_A \times U(1)_A$ 被破缺了。由于这使得原本对称群中的四个生成元被破缺, 从而破缺后的理论中似乎应该存在四个 Goldstone 粒子。

我们希望得到的是一个描述介子和重子的有效理论, 而由于强耦合带来的局限性, 我们能够利用的只有 $U(2)_L \times U(2)_R \rightarrow SU(2)_V \times U(1)_V$ 的对称性破缺规律。根据 Goldstone 定理, 既然我们的理论是对称性破缺后的理论, 那么其中必然有四个 Goldstone 粒子。根据前面的讨论, 我们总可以将这四个 Goldstone 粒子参数化为 $\exp(i\xi \cdot A)$ 的形式, 在我们这个理论中, 由于破缺的生成元是 $A_i = \{\sigma^a \gamma_5, \gamma_5\}$, 于是 Goldstone 粒子就可以参数化为:

$$\exp(i(\xi^a \sigma^a + \xi) \gamma_5) \quad (8.136)$$

按照前面给出的“标准”变换关系, 经过一个 $U(2)_L \times U(2)_R$ 变换后, 这些 Goldstone 粒子的变换关系满足:

$$\exp(i\alpha_i T_i + i\beta_i T_i \gamma_5) \exp(i\xi_i T_i \gamma_5) = \exp(i\xi'_i T_i \gamma_5) \exp(iu'_i T_i) \quad (8.137)$$

其中我们将生成元 $\{\sigma^a, 1\}$ 统一地写做了 T_i 。如果我们定义 $\alpha_{L,R} = \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$, 并将这个式子中的左手、右手部分分开, 就可以得到以下的方程:

$$\begin{aligned} \exp(i\alpha_{R,i} T_i) \exp\left(\frac{1}{2}i\xi_i T_i\right) &= \exp\left(\frac{1}{2}i\xi'_i T_i\right) \exp\left(\frac{1}{2}iu'_i T_i\right) \\ \exp(i\alpha_{L,i} T_i) \exp\left(-\frac{1}{2}i\xi_i T_i\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2}i\xi'_i T_i\right) \exp\left(\frac{1}{2}iu'_i T_i\right) \end{aligned} \quad (8.138)$$

只要对下式右乘上一个上式的逆, 就可以得到以下的变换关系:

$$\exp(-i\xi'_i T_i) = \exp(i\alpha_{L,i} T_i) \exp(-i\xi_i T_i) \exp(-i\alpha_{R,i} T_i) = L \exp(-i\xi_i T_i) R^\dagger \quad (8.139)$$

从而, 除去用上面这个方法参数化 Goldstone 粒子之外, 我们还可以将 Goldstone 粒子参数化为:

$$U = \exp(-i\xi_i T_i) \quad (8.140)$$

并且在这种参数化下, Goldstone 场 U 具有如下的变换关系:

$$U \rightarrow U' = L U R^\dagger \quad (8.141)$$

也就是说, 这些 Goldstone 场在手征变换群 $U(2)_L \times U(2)_R$ 下按照表示 $(2) \times (\bar{2})$ 变换。当然, 这样定义的场 ξ_i 是量纲为 0 的。而一个具有正常运动学项的标量场一定具有量纲 1, 从而这些 ξ_i 一定要经过某种重定义才能具有正确的动力学项。为此, 可以定义以下的四个场 π^a, η' :

$$U = \exp\left(\frac{i}{f_\pi}(\pi^a \sigma^a + \eta')\right) \quad (8.142)$$

¹⁹实际上在那时我们仅仅证明了 $N_f \geq 3$ 时手征对称性一定自发破缺, 而我们现在讨论的情形是 $N_f = 2$, 事实上是可以不存在手征对称性破缺的。不过出于讨论的简便性, 这里就暂且用了 $N_f = 2$ 为例, 而 $N_f \geq 3$ 的讨论是类似的。

不用多说, π^a, η' 就是这个理论中的基本动力学自由度, 而 f_π 是一个量纲为 1 的常数。如果我们的理论中只有 Goldstone 粒子, 那么 Lagrangian 就由 U 给出的、在对称群 $U(2)_L \times U(2)_R$ 下保持不变的项构成。按照第五章中的讨论, 由于我们想要构造的理论是有效理论, 其中可以具有任意量纲的算符, 而这些算符都可以通过将 U 展开来得到。由于在 U 的展开中每多一个场 π , 这一项的前面总会多一个因子 f_π , 于是 f_π 的角色就类似于 Wilson 的 EFT 能标。如果我们仅仅关注 (q/f_π) 的领头阶中的结果, 那么就只需要关注以下的项:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}f_\pi^2 \text{tr}[\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger] = -\frac{1}{2}\partial_\mu \pi^a \partial^\mu \pi^a - \frac{1}{2}\partial_\mu \eta' \partial^\mu \eta' + \dots \quad (8.143)$$

这个 Lagrangian 也就给出了 Goldstone 的动力学项及其自相互作用项。不过别忘了: $U(2)_L \times U(2)_R$ 对称性仅仅在两味轻夸克都无质量的情形下严格成立。在真实的世界中, 两味轻夸克是具有不同的质量的, 从而 $U(2)_L \times U(2)_R$ 对称性也仅仅是一个近似对称性。在近似对称性自发破缺时, 理论中也可以存在类似 Goldstone Boson 的轻自由度, 不过此时它们并非是无质量的。

那么如何在我们这个有效理论中给 Goldstone 粒子加上质量呢? 在 QCD 中, 夸克的质量项可以被写为 $\bar{q}_R M q_L + \bar{q}_L M^\dagger q_R$, 其中 M 是质量矩阵 $M = \text{diag}(m_u, m_d)$ 。如果我们将质量矩阵提升为一种有变换关系 $M' = R M L^\dagger$ 的场²⁰, 那么这个质量项将在 $U(2)_L \times U(2)_R$ 下保持不变。如果我们将这个 spurion 也视为有效理论中的“基本自由度”, 那么有效 Lagrangian 就能写出包含 U 和 M 的、保持 $U(2)_L \times U(2)_R$ 的耦合, 从而赋予 Goldstone 粒子质量。如果我们仍然仅仅考虑包含 M 和 U 的最低阶算符, 就能写出以下的质量项:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}f_\pi^2 \text{tr}[\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger] + a f_\pi^3 \text{tr}[M U + M^\dagger U^\dagger] \quad (8.144)$$

将这个质量项展开, 容易发现它包含:

$$-2a f_\pi (m_u + m_d) \pi^+ \pi^- - a f_\pi (\pi^0 \eta') \begin{pmatrix} m_u + m_d & m_u - m_d \\ m_u - m_d & m_u + m_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^0 \\ \eta' \end{pmatrix}, \quad \pi^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^1 \pm i\pi^2) \quad (8.145)$$

这给出了以下的质量:

$$m_{\pi^\pm}^2 = 2(m_u + m_d) a f_\pi, \quad m_{\pi^0}^2, m_{\eta'}^2 = 4m_u a f_\pi, 4m_d a f_\pi \quad (8.146)$$

在实验上, $SU(2)_A$ 对应的三个 Goldstone 粒子对应 π 介子, 它们的质量和这个关系吻合良好; 但物理学家们并没有看到 $U(1)_A$ 对应的 Goldstone 粒子 η' 。这个 Goldstone 粒子失踪的问题在历史上被称为 **U(1) 问题**。不过我们现在知道, 这个 $U(1)_A$ 对称性是反常的²¹, 于是它本来就不是一个量子理论的对称性, 不应该对应 Goldstone 粒子。事实上, 在这样的一个理论中, 存在另一个和反常相关的机制赋予了 η' 一个很大的质量, 从而在 $M = 0$ 的极限下 η' 仍然具有质量。

为了看到这一点, 我们需要回到 QCD 中的手征反常: $U(1)_A$ 变换 $\bar{\Psi}_f \rightarrow \exp(-i\gamma_5 \beta_f) \Psi_f$ 会带来路径积分测度的如下贡献:

$$\mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \rightarrow \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left[\frac{i}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) \sum_f \beta_f \right] \quad (8.147)$$

²⁰由于这是个虚假 (spurious) 的场, 文献中有时候叫它 spurion。

²¹你可能会问: 为什么 $SU(2)_A$ 不是反常的? 答案是因为 $SU(2)$ 群只有实和赝实表示, 于是任何的反常系数都是 0。

虽然 $U(1)_A$ 是反常的，不过别忘了：QCD 的 Lagrangian 中还可能存在 θ 项。如果我们将 θ 项中的系数 θ 也提升为一个 spurion，那么以下的对称性仍然是这个两味 QCD 的量子对称性：

$$u \rightarrow \exp(-i\gamma_5\beta)u, \quad d \rightarrow \exp(-i\gamma_5\beta)d, \quad \theta \rightarrow \theta - N_f\beta = \theta - 2\beta \quad (8.148)$$

从而，如果我们在有效理论中纳入 θ ，Lagrangian 中就应该包含 U, M, θ ，并且在 $U \rightarrow LUR^\dagger, M \rightarrow RML^\dagger$ 和 $\theta \rightarrow \theta - 2\beta$ 下不变的项。由于 $q \rightarrow e^{-i\beta\gamma_5}q$ 对应着 $q_L \rightarrow e^{i\beta}q_L, q_R \rightarrow e^{-i\beta}q_R$ ，于是这就对应：

$$U \rightarrow e^{2i\beta}U, \quad M \rightarrow e^{-2i\beta}M \quad (8.149)$$

于是在前面的保持 $U(2)_L \times U(2)_R$ 之外的耦合之外，我们还可以写出和 θ 角有关，破坏 $U(1)_A$ 但在上面这个量子对称性下不变的项：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}f_\pi^2 \text{tr}[\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger] + af_\pi^3 \text{tr}[MU + M^\dagger U^\dagger] + bf_\pi^4 [e^{i\theta} \det U + e^{-i\theta} \det U^\dagger] \quad (8.150)$$

我们仍然仅仅考虑了最低阶的耦合。由于 θ 角可以被认为是瞬子的贡献，于是新加入的这一项在某些文献中也被称为瞬子项。在这一项中， η 便获得了质量 $m_\eta^2 = 8bf_\pi^2 \cos\theta$ ，从而在 $M = 0$ 时就不是无质量的。我们从这个过程中很好地看到了手征反常如何赋予 η' 以额外的质量，从而解决 $U(1)$ 问题。

这一项还有一些其他的物理效应：加入这一项之后，体系的真空就不再是 $\pi = \eta' = 0$ ，而是一个另外的构型。为了看到这一点，我们可以考虑不同真空构型的经典势，其极小值对应的构型就是真正的真空。由于 $U(1)_{EM}$ 对称性不会自发破缺，于是 π^\pm 一定没有非零的真空期待值。并且由于 $e^{2i\theta} \det U = \exp\left(\frac{2i}{f_\pi}(\eta' + \frac{1}{2}f_\pi\theta)\right)$ ，并且考虑到 η' 大部分的质量都来自于这一项，于是 η' 的真空期望值应该是 $-\langle\eta'\rangle = -\frac{1}{2}\theta f_\pi$ 。如果令 $\langle\pi^0\rangle = f_\pi\phi$ ，那么真空的场构型就是：

$$\langle U \rangle = \begin{pmatrix} e^{i\phi-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi-i\theta/2} \end{pmatrix} \quad (8.151)$$

如果要求这个构型对应经典势 $-af_\pi^3 \text{tr}[MU + M^\dagger U^\dagger]$ 的最小值，那么就有：

$$\tan\phi = -\frac{m_u - m_d}{m_u + m_d} \tan\frac{1}{2}\theta \quad (8.152)$$

这就给出了这个理论中真正的真空场构型，我们的一切微扰论都应该是在这个真空附近做的。你可能会觉得：由于这个 $\langle U \rangle$ 并不在 $SU(2)_V$ 下不变，这似乎意味着 $SU(2)_V$ 被自发破缺了。不过事实并非如此：由于我们导出这个真空期待值时已经利用了 $m_u - m_d \neq 0$ ，从而 $SU(2)_V$ 本身就不是理论的对称性，没有自发破缺这一说。当我们把这两个夸克的质量差取为 0 时，理论和真空的 $SU(2)_V$ 对称性就都被恢复了。于是这里没有额外的对称性自发破缺。

直到这里，我们已经从两味 QCD 的对称性自发破缺出发，给出了一个完整的有关介子的有效场论。不过别忘了：我们的最终目标是为了描述强子的散射，而强子中除了介子还有重子。在我们这样的一个两味 QCD 中，能用 u 和 d 夸克组成的重子只有质子和中子。实验告诉我们，质子和中子可以被认为是一个 Dirac 费米子二重态，在 $U(2)_L \times U(2)_R$ 下具有如下的变换关系：

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad N_L \rightarrow L N_L, \quad N_R \rightarrow R N_R \quad (8.153)$$

从而加入这个重子二重态后，能够写出的包含 N, U, M, θ 的最低阶耦合就是：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\bar{N}\not{D}N - m_N\bar{N}(U^\dagger P_L + UP_R)N - c_1\bar{N}(MP_L + M^\dagger P_R)N \\ & - c_2\bar{N}(U^\dagger M^\dagger U^\dagger P_L + UMUP_R)N - \frac{i}{2}(g_A - 1)\bar{N}\gamma^\mu(U\partial_\mu U^\dagger P_L + U^\dagger\partial_\mu UP_R)N \end{aligned} \quad (8.154)$$

这就是我们用来描述重子的理论。将这个 Lagrangian 在前述真空的附近展开，经过一通复杂的计算，最终会得到如下的 $\pi - N$ 耦合（由于实验测出的 θ 很小，这里也对 θ 进行了展开，并且仅仅保留了 θ 的一阶）：

$$\mathcal{L} = \theta \frac{c_+ + \mu}{f_\pi} \pi^a \bar{N} \sigma^a N - i \frac{g_A m_N}{f_\pi} \pi^a \bar{N} \sigma^a \gamma_5 N \quad (8.155)$$

其中：

$$\mu = \frac{m_u m_d}{m_u + m_d}, \quad c_+ = c_1 + c_2 \quad (8.156)$$

利用这个有效 Lagrangian，我们便能够给出对强子-强子散射的预言了。值得注意的是，在这个 Lagrangian 中直接出现了 θ 角，并且此时 θ 角是具有微扰效应的！例如在后面的讨论中会看到，利用手征微扰论计算出的中子的电偶极矩是正比于 θ 的，从而可以利用这些效应来测量 θ 的值。事实上，7.1 节中所给出的测量值 $|\theta| \leq 10^{-9}$ 就是用中子电偶极矩计算出的结果。总的来说，如果我们不关注 η' 介子有关的耦合，那么 θ 角的物理效应也就是这一项

当然，如果我们不关注 θ -项相关的物理，那么由于自然界中测量到的 θ 太小，一切和 θ 相关的效应都不用考虑。于是此时 $\phi = 0$ ，体系的真空也就是 $\pi = \eta' = 0$ ，我们也就没有必要在一个复杂的真空附近做展开了。这样一来，这个 $\pi - N$ 耦合中就只剩下了后面的 Yukawa 项。

强子-强子散射并不是我们想要计算出的全部过程。对于深度非弹散射这样的过程，初末态中除去有强子，还有电子这样的轻子。而我们知道，轻子-强子相互作用是通过规范相互作用进行的，为了描述这些过程，我们还需要在这个理论中加入规范场-强子的耦合。由于强子都是色单态，它们和胶子没有耦合，于是我们可以不考虑标准模型规范群中的 $SU(3)_C$ 部分，仅仅考虑电弱理论的对称群 $SU(2)_W \times U(1)_B$ 。而这些对称群恰巧是手征对称群 $U(2)_L \times U(2)_R$ 的对角子群。为了引入电弱理论中的规范场和强子的耦合，我们也可以将不反常的手征对称群 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ 规范化，并将 $SU(2)_W \times U(1)_B$ 子群对应的规范场认同为电弱理论中的规范场。

为了将手征对称性规范化，我们需要引入 $U(N)_L \times U(N)_R$ 对应的规范场 $l_\mu = l_\mu^a \tau^a + b_\mu$, $r_\mu = r_\mu^a \tau^a + b_\mu$ ²²。其变换关系如下：

$$l_\mu \rightarrow Ll_\mu L^\dagger + iL\partial_\mu L^\dagger, \quad r_\mu \rightarrow Rr_\mu R^\dagger + iR\partial_\mu R^\dagger \quad (8.157)$$

和之前一样，我们只需要将 Lagrangian 中的偏导数换成协变导数，就将前面的理论提升为一个规范群为手征对称群的规范理论。由此可以得到以下的 Lagrangian：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}f_\pi^2 \text{tr}[D_\mu U D^\mu U^\dagger] + af_\pi^3 \text{tr}[MU + M^\dagger U^\dagger] + bf_\pi^4 [e^{2i\theta} \det U + e^{-2i\theta} \det U^\dagger] \\ & + i\bar{N}\not{D}N - m_N\bar{N}(U^\dagger P_L + UP_R)N - c_1\bar{N}(MP_L + M^\dagger P_R)N \\ & - c_2\bar{N}(U^\dagger M^\dagger U^\dagger P_L + UMUP_R)N - \frac{i}{2}(g_A - 1)\bar{N}\gamma^\mu(U\partial_\mu U^\dagger P_L + U^\dagger\partial_\mu UP_R)N \end{aligned} \quad (8.158)$$

²²由于我们将手征对称群中的 $U(1)_V \times U(1)_A$ 限制在了 $U(1)_V$ 上，于是这些规范场中的 $U(1)$ 生成元部分应该是相同的。

其中, 由于介子场 U 处于手征群的表示 $(2)_L \times (\bar{2})_R$ 、左手重子场处于表示 $(2)_L \times (1)_R$ 、右手重子场处于表示 $(1)_L \times (2)_R$ 的缘故, 它们的协变导数分别是:

$$\begin{aligned} D_\mu U &= \partial_\mu U - il_\mu U + iUr_\mu \\ D_\mu U^\dagger &= \partial_\mu U^\dagger + iU^\dagger l_\mu - ir_\mu U^\dagger \\ D_\mu N_L &= (\partial_\mu - il_\mu) N_L \\ D_\mu N_R &= (\partial_\mu - ir_\mu) N_R \end{aligned} \quad (8.159)$$

得到了这个规范理论之后, 下一步就是将这里的一部分规范场认同为标准模型的规范场。首先由于标准模型的 $SU(2)_L$ 就是手征对称群 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 的子群 $SU(2)_L$, 于是:

$$g_2 W_\mu^a = l_\mu^a \quad (8.160)$$

标准模型的另一部分规范群是 $U(1)_B$ 。不过在这个理论中, 电磁场 $U(1)_{EM}$ 反而更好讨论: 由于电磁相互作用不改变味道, 于是它一定是 l_3, r_3 和 b 的线性组合。如果再额外加上质子电荷为 $+e$ 、中子电荷为 0 的限制, 那么电磁场就可以唯一地确定下来:

$$eA_\mu = l_\mu^3 + r_\mu^3 + \frac{1}{2}b_\mu \quad (8.161)$$

知道了这些规范场的形式之后, 我们就可以从上面这个 Lagranian 中读出强子和规范场的耦合了。经过十分复杂的计算, 可以得到:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{\sqrt{2}}g_2 W_\mu^+ J^{-\mu} + \frac{1}{\sqrt{2}}g_2 W_\mu^- J^{+\mu} + \frac{e}{s_w c_w} Z_\mu J_Z^\mu + eA_\mu J_{EM}^\mu \quad (8.162)$$

其中:

$$\begin{aligned} J^{+\mu} &= \cos \theta_c (J_L^{1\mu} - iJ_L^{2\mu}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta_c (f_\pi \partial^\mu \pi^+ + i\pi^0 \overleftrightarrow{\partial}^\mu \pi^+) + \frac{1}{2} \cos \theta_c \bar{n} \gamma^\mu (1 - g_A \gamma_5) p + \dots \\ J^{-\mu} &= \cos \theta_c (J_L^{1\mu} + iJ_L^{2\mu}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta_c (f_\pi \partial^\mu \pi^- - i\pi^0 \overleftrightarrow{\partial}^\mu \pi^-) + \frac{1}{2} \cos \theta_c \bar{p} \gamma^\mu (1 - g_A \gamma_5) n + \dots \\ J_Z^\mu &= J_L^{3\mu} - s_w^2 J_{EM}^\mu \\ &= \frac{1}{2} (f_\pi \partial^\mu \pi^0 + i\pi^+ \overleftrightarrow{\partial}^\mu \pi^-) \\ &\quad + \frac{1}{4} \bar{p} \gamma^\mu (1 - g_A \gamma_5) p - \frac{1}{4} \bar{n} \gamma^\mu (1 - g_A \gamma_5) n + \dots \\ J_{EM}^\mu &= J_L^{3\mu} + J_R^{3\mu} + \frac{1}{2} J_B^\mu \\ &= i\pi^+ \overleftrightarrow{\partial}^\mu \pi^- + \bar{p} \gamma^\mu p + \dots \end{aligned} \quad (8.163)$$

其中 θ_c 是 Cabibbo 角: 标准模型中存在带电流的 CKM 混合, 而我们前面的讨论中完全没有考虑这个混合。为了将这个混合效应纳入这个有效理论, 我们手工地将所有带电流

过程的系数乘了一个 $\cos \theta_c$ 。有了这些 Lagrangian 之后，我们就完全得到了强子和规范场的相互作用。到此为止，我们就明白如何在低能标下计算含有强子的过程了。

当然，我们这里仅仅考虑了两味无质量夸克的手征对称性，于是能够描述的强子仅仅是由 u 和 d 夸克组成的质子和中子。事实上，由于 s 夸克的质量也小于 Λ_{QCD} ，从而我们也可以将 s 夸克纳入讨论，考虑手征对称性 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 的自发破缺，并利用这个关系构建出手征微扰论。在那时，我们就能计算含有介子八重态和重子十重态中所有强子的过程。不过由于那时的讨论太过于复杂，这里就不再给出详细的过程了。

另外需要注意的是：由于手征微扰论是一个有效理论²³，它最多能够处理能标在 Λ_{QCD} 附近的过程。于是这里给出的与 W 玻色子相关的项只能用于计算外线都是低能粒子，而虚 W 玻色子在内线上的过程（例如中子衰变）。对于外线上含有 W 的过程而言，手征微扰论便无能为力，只能利用下一节会给出的共线因子化定理计算了。

Example: Electric Dipole Moment of Neutron

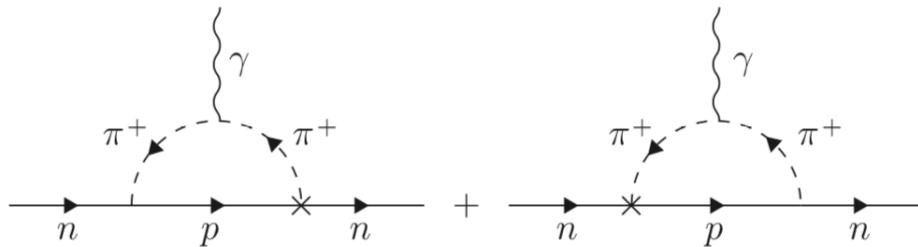
到现在为止，我们已经明白了如何在低能标下计算含有强子的过程。作为一个具体的例子，下面将会计算中子的电偶极矩。在具有 CP 破缺的理论中，光子-正反费米子正规顶点 V^μ 除了 5.4 节中看到的两个形状因子 $F_1(k^2)$ 和 $F_2(k^2)$ 之外，还会额外具有两个和 γ_5 有关的形状因子：

$$\bar{u}(q)V^\mu u(p) = e\bar{u}(q) \left[F_1(k^2)\gamma^\mu + G_1(k^2)\gamma^\mu i\gamma_5 - \frac{i}{m}F_2(k^2)S^{\mu\nu}k_\nu - \frac{i}{m}G_2(k^2)S^{\mu\nu}i\gamma_5k_\nu \right] u(p) \quad (8.164)$$

经过类似 5.5 节的讨论，可以得知形状因子 G_2 给出粒子的电偶极矩：

$$\mathbf{d}_e = eG_2(0)\mathbf{S} \quad (8.165)$$

从而，为了计算中子的电偶极矩，我们就需要计算手征微扰论中的光子-正反中子正规顶点。这由以下两个 Feynman 图给出：



其中，带有 \times 号的顶点意味着含有 θ 的 CP 破坏顶点，而不带有 \times 号的顶点意味着正比于 g_A 的 CP 守恒顶点。根据上面给出的 Lagrangian，容易写出这两个图对应的 Feynman

²³ 虽然我们还不知道如何从 QCD 中直接得到它…

振幅：

$$\begin{aligned} \bar{u}(q)iV^\mu u(p) &= \frac{2ie\theta c_+ \mu g_A m_N}{f_\pi^2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(l + \frac{1}{2}k)^2 + m_\pi^2\right] \left[(l - \frac{1}{2}k)^2 + m_\pi^2\right] \left[\left(l + \frac{(p+q)}{2}\right)^2 + m_N^2\right]} \\ &\times \bar{u}(q) \left[\gamma_5 \left(-\not{v} - \frac{1}{2}(\not{p} + \not{q}) + m_N \right) + \left(-\not{v} - \frac{1}{2}(\not{p} + \not{q}) + m_N \right) \gamma_5 \right] (2l)^\mu u(p) \end{aligned} \quad (8.166)$$

由于 $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$ ，于是两个旋量波函数中正比于 γ^μ 的项都互相抵消，只剩下：

$$\bar{u}(q)iV^\mu u(p) = \frac{4ie\theta c_+ \mu g_A m_N^2}{f_\pi^2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l + \frac{1}{2}k)^2 + m_\pi^2} \frac{1}{(l - \frac{1}{2}k)^2 + m_\pi^2} \frac{1}{\left(l + \frac{(p+q)}{2}\right)^2 + m_N^2} \bar{u}(q) \gamma_5 u(p) (2l)^\mu \quad (8.167)$$

这个表达式还可以做进一步的简化。由于旋量波函数 $u(p)$ 满足 $\bar{u}(p) \gamma_5 u(p) = 0$ ，于是 $\bar{u}(q) \gamma_5 u(p)$ 一定是 $O(k)$ 阶的。由于我们只需要知道 $G_2(0)$ ，于是所有 $O(k^2)$ 阶及以上的量对我们都不重要，于是在除了旋量波函数之外的部分可以取 $q = p$ 。这就将这个表达式简化为：

$$\begin{aligned} \bar{u}(q)iV^\mu u(p) &= \frac{4ie\theta c_+ \mu g_A m_N^2}{f_\pi^2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2l^\mu}{2p \cdot l} \frac{1}{(l^2 + m_\pi^2)^2} \bar{u}(q) \gamma_5 u(p) \\ &= \frac{4ie\theta c_+ \mu g_A m_N^2}{f_\pi^2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu}{p^2} \frac{1}{(l^2 + m_\pi^2)^2} \bar{u}(q) \gamma_5 u(p) \\ &= -\frac{4ie\theta c_+ \mu g_A}{f_\pi^2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 + m_\pi^2)^2} p^\mu \bar{u}(q) \gamma_5 u(p) \\ &= \frac{ec_+ \mu g_A}{4\pi^2 f_\pi^2} \log\left(\frac{\Lambda^2}{m_\pi^2}\right) \bar{u}(q) S^{\mu\nu} k_\nu i\gamma_5 u(p) \end{aligned} \quad (8.168)$$

在第二个等号处，我们将 $l^\mu/(p \cdot l)$ 替换为了 p^μ/p^2 ，这是由于这个积分对平行于 p 的分量是偶的，而对所有垂直于 p 的分量是奇的，从而垂直于 p 的分量不对积分产生任何贡献。而在第四个等号处，我们完成了对圈动量的积分。由于手征微扰论是一个有效理论，于是这个积分有一个自然的截断 $\Lambda \sim 4\pi f_\pi$ ，我们无需面对任何紫外发散。最后，利用以下的 Gordon 恒等式：

$$p^\mu \bar{u}(q) \gamma_5 u(p) = \bar{u}(q) S^{\mu\nu} k_\nu i\gamma_5 u(p) + O(k^2) \quad (8.169)$$

就可以得到：

$$G_2(0) = \frac{\theta c_+ \mu g_A m_N}{4\pi^2 f_\pi^2} \log\left(\frac{\Lambda^2}{m_\pi^2}\right) \quad (8.170)$$

由于中子自旋为 $1/2$ ，于是根据 $\mathbf{d}_e = eG_2(0)\mathbf{S}$ ，最终就计算出了中子的电偶极矩：

$$d_n = \frac{e\theta c_+ \mu g_A m_N}{8\pi^2 f_\pi^2} \log\left(\frac{\Lambda^2}{m_\pi^2}\right) = 3.2 \times 10^{-16} \theta e/\text{cm} \quad (8.171)$$

在实验中，我们至今没有测量到中子的电偶极矩，而仅仅给出了一个上限 $|d_n| < 6.3 \times 10^{-26} e \text{ cm}$ 。从而实验上测量到的 θ 角的上限就是 $|\theta| < 2 \times 10^{-10}$ 。

8.4.3 The Wess-Zumino-Witten Term

在前面这些讨论中，我们似乎已经构造出了一个完整的、有关重子和介子的有效理论。不过事实上，直到现在的这个理论还不能完整地给出 QCD 的低能行为，其中还有一个重要的问题没有解决。

第一个问题是：由于 QCD 中存在手征反常，于是 $\partial_{x,\mu} \langle J_5^\mu(x) J^\nu(y) J^\sigma(z) \rangle$ 并不为 0。而根据 Schwinger-Dyson 方程，这会给出过程 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ 的衰变。

(未完成)

8.4.4 Axions and Peccei-Quinn Mechanism

正如前面所说：实验中测量到的结果测量的结果是惊人的 $|\theta| \leq 10^{-9}$ ，这对于理论中的一个无量纲自由参数而言小得不自然。这个自然性问题就被称为 **强 CP 问题**。

在这一节中，我们将给出一个强 CP 问题的可能解决方案：**轴子**。其基本思路就是：如果在 UV 存在一些高能的物理，使得在 SM 能标适用的有效理论中除去标准模型的粒子组成之外，还存在一个质量低于 $\Lambda_{QCD} \approx 200\text{MeV}$ 的赝标量场——轴子场 a ，并且 a 和标准模型粒子之间只有如下的耦合²⁴：

$$\mathcal{L} \supset -\left(\frac{a}{f_a} + \theta\right) \frac{1}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\mu\nu}^a G_{\sigma\rho}^a + (\text{derivative terms}) \quad (8.172)$$

其中最后一项导数项中不存在 a 的依赖性，只有对其导数 $\partial_\mu a, \partial_\mu \partial_\nu a, \dots$ 的依赖性。此时， $U(1)_A$ 对应的量子对称性就变为了 $\theta \rightarrow \theta - 2\alpha, a \rightarrow -2f_a\alpha$ 。除去这个对称性之外，这个理论还包含另外两个对称性： $a \rightarrow a + \delta f_a, \theta \rightarrow \theta - \delta$ 。这个对称性显然保证测度不变，从而是量子对称性。

当我们从这个 SM 能标的理论中构造出一个能标在 $\Lambda_{QCD} \approx 200\text{MeV}$ 的、包含重子和介子的“手征微扰论”时，由于轴子质量低于 $\Lambda_{QCD} \approx 200\text{MeV}$ ，于是这个“手征微扰论”中也将包含轴子。并且由于最终得到的“手征微扰论”将继承前面这两个量子对称性，于是最终写出的理论就将和上一节得到的结论完全相同，只不过将 θ 换成了 $\theta + a/f_a$ ：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} f_\pi^2 \text{tr}[\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger] + a f_\pi^3 \text{tr}[M U + M^\dagger U^\dagger] \\ & + b f_\pi^4 [e^{i(\theta + \frac{a}{f_\pi})} \det U + e^{-i(\theta + \frac{a}{f_\pi})} \det U^\dagger] + (\text{derivative terms}) \end{aligned} \quad (8.173)$$

为了得到轴子场的真空中待值，为此可以将轴子场取做一个时空无关的恒定值 a ，而使得经典势最小的 a 就对应轴子的真空中待值。此时这些导数项不会带来任何贡献。通过和 8.6 节完全类似的讨论，我们也能得知：在轴子场取值为 a 的条件下最低的经典势为：

$$V = -m_\pi^2 f_\pi^2 \sqrt{1 - \frac{4m_u m_d}{m_u + m_d} \sin^2(\theta + \langle a \rangle / f_a)} \quad (8.174)$$

最小化这个经典势，就可以看到轴子场的真空中待值为：

$$\langle a \rangle = -\theta f_a \quad (8.175)$$

²⁴为了区分胶子场和 $SU(2), U(1)$ 规范场，我们将其记号改为了 $G_{\mu\nu}^a$ 。

在这个修正后的手征微扰论中，重子-介子的最低阶相互作用中的 θ 也应该被替换为 $\theta + a/f_a$ 。从而最低阶的重子-介子耦合应该被更新为：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\left(\theta + \frac{a}{f_a}\right) \frac{c_+\mu}{f_\pi} \pi^a \bar{N} \tau^a N - i \frac{g_A m_N}{f_\pi} \pi^a \bar{N} \tau^a \gamma_5 N \\ &= -\left(\theta + \frac{\langle a \rangle}{f_a}\right) \frac{c_+\mu}{f_\pi} \pi^a \bar{N} \tau^a N - i \frac{g_A m_N}{f_\pi} \pi^a \bar{N} \tau^a \gamma_5 N + (\text{coupling to axion})\end{aligned}\quad (8.176)$$

于是，包含轴子的理论中的中子反常磁矩就应该是将原结果中的 θ 换为 $\theta + \langle a \rangle/f_a$ 之后的结果，而根据前面的讨论， $\theta + \langle a \rangle/f_a$ 是 0，于是在这个理论中，我们不用引入一个小得不自然的 θ 来解释了为什么我们没有观测到中子反常磁矩这一事实，从而解决了强 CP 问题。

这一切看起来十分的合理，不过由于当我们构造 EFT 时，我们通常做的是确定粒子组成以及理论的对称性，并且写下所有满足对称性的耦合。由于前面讨论中的轴子没有质量，并且 a 本身（相对于其导数）只有和 $G\tilde{G}$ 的耦合。如果理论中没有相应的对称性保证这些事情，那么 SM 能标的 EFT 中将会不可避免地出现轴子和其他 SM 粒子之间的耦合，破坏上面的讨论。于是我们还需要一些合适的机制来保证轴子质量远低于 Λ_{QCD} ，并且 a 本身只有和 $G\tilde{G}$ 的耦合。

一个解决这个问题的方式就是所谓的 **Peccei-Quinn 机制**，其基本思路就是：在 UV 理论中存在一个对称性 $U(1)_{PQ}$ ，它在远高于 SM 能标的能标上自发破缺，而轴子就是这个对称性自发破缺产生的 Goldstone Boson。第八章中讨论手征微扰论时候看到：对于这样的 Goldstone 粒子而言，我们总能将其放进陪集空间，也就是将其参数化为 e^{ia/f_a} ，并且它在 $U(1)$ 变换 $e^{i\delta}$ 下的变换规律为：

$$e^{i\delta} : e^{ia/f_a} \mapsto e^{i(\delta+a/f_a)} \quad (8.177)$$

并且，我们还要求这个 $U(1)_{PQ}$ 对称性是反常的：在对称变换 $e^{i\delta}$ 下，Lagrangian 具有一个有效的变化：

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{\delta}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a \quad (8.178)$$

从而根据 Lagrangian 的反常关系， $a \rightarrow a + f_a \delta$ ， $\theta \rightarrow \theta - \delta$ 就成了 UV 理论中的量子对称性，于是 SM 能标的 EFT 中也应该存在这样一个对称性。它保证了 SM 能标的 EFT 中只能出现如下的关于轴子的耦合：

$$\mathcal{L}_a = -\frac{1}{64\pi^2} \left(\theta + \frac{a}{f_a}\right) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a + (\text{derivative terms}) \quad (8.179)$$

从而我们可以说：Peccei-Quinn 机制保证了 a 本身只有和 $G\tilde{G}$ 的耦合。并且由于 SM 能标的 EFT 中不存在轴子的质量项，于是其质量和 π 介子一样，也应该来自于费米子凝聚，从而其质量也应该是低于 QCD 能标的。事实上，从前面这个修正的手征微扰论中就能看出：轴子的质量项只能来自于 e^{2ia/f_a} 项，于是任何轴子的质量项都应该正比于 $1/f_a^2$ 。这意味着：

$$m_a \approx \frac{\Lambda_{QCD}^2}{f_a} \quad (8.180)$$

由于 f_a 是 UV 理论的能标，远高于 QCD 能标，这也就是说：轴子的质量不仅小于 QCD 能标，甚至远远小于它。综合这些讨论，就能看到：Peccei-Quinn 机制能够保证轴子质量远低于 Λ_{QCD} ，并且 a 本身只有和 $G\tilde{G}$ 的耦合，从而就解决了上面的这个问题。

除去能够解决强 CP 问题之外，轴子还是一个绝佳的暗物质候选者——它稳定、不参与电磁相互作用，由于它和其他物质的相互作用正比于 $1/f_a$ ，于是它和其他物质的相互作用也很微弱。不幸的是，直到这个 notes 被写成为止，物理学家并没有在自然界中找到轴子，从而轴子也只能是解决强 CP 问题的一个可能的方案，并没有被自然界所承认。直到今天，强 CP 问题也是一个未解之谜。

8.5 QCD and the Parton Model

手征微扰论虽然能够计算含有强子的过程，但是由于它是一个有效理论，于是这些过程的特征能标一定要小于 $4\pi f_\pi$ ，否则这个有效理论就会坏掉。但是在 LHC 上，我们将质心系能量逾 TeV 的强子互相对撞，而这些散射过程手征微扰论无能为力。于是在这一节中，我们需要给出一个另外的计算含有强子的散射过程的方式。

含有强子的散射过程分为两部分——强子在初态和强子在末态的情形。在实验上，探测末态的强子利用的是**强子量能器**，其原理是：末态夸克强子化后所形成的强子喷注打在介质中。和介质的相互作用过程又形成大量能量更小的末态强子，直到能量全部被介质吸收为止。在这样一个过程中，我们完全无法分辨出末态究竟出现了什么强子，而只能看到“有一些能量被打到了这些区域”。于是我们关心的截面就不再是末态出现某个特定强子的截面，而是第 5.8 节中所定义的**喷注截面**。经过适当的对喷注的定义，我们可以使末态强子喷注的截面就是末态为强子化出这些喷注的夸克、胶子的截面²⁵。有了这些讨论，我们就只用计算末态为夸克、胶子的过程的总截面，而不需要关心这些东西是如何强子化的了。

Collinear Factorization and Parton Distributions

讨论完了末态的强子，那么如何处理初态的强子呢？强子是夸克的束缚态，可以认为组成强子的夸克之间交换通过交换低能胶子组合在一起，这些胶子的能标大约就是质子质量的能标。由于这和 Λ_{QCD} 处于同一个量级，于是这已经达到了微扰论失效的能标，从而强子内部的相互作用是完全非微扰的。而另一方面，如果我们的散射过程的质心系能量很大，那么散射的过程就应该是可以用微扰论描述的。这也就是说，我们的整个散射过程似乎可以被分为两个部分：一部分是强子内部的非微扰过程，另一部分是微扰的散射过程。如果我们可以将这两部分过程完全分离开，那么就可以先计算好微扰的部分，然后用实验去拟合完全非微扰的部分的结果，再用这些拟合出来的结果去预言新的实验。虽然这个过程并不是纯粹从第一性原理出发的，但是这可能是我们不借助格点 QCD 等手段能够做到的最好的方式了。

那么问题就转化为了：如何将微扰和非微扰的部分分离开？为了得到这个问题的答案，可以先看看微扰部分和非微扰部分的物理意义。首先对于非微扰的部分，由于我们的微扰论只会处理夸克和胶子的散射截面，那么我们就希望非微扰的部分是夸克、胶子的散射截面；而相应的，如果我们可以借助微扰论描述夸克、胶子的散射过程，那么非微扰的部分就应该是从强子中“分裂”出一个夸克或胶子的过程。所以整个过程的物理图像就是：初态强子中只会有一部分的夸克、胶子参与散射过程，而剩下的部分直接进入了散射末态。这些参与散射的部分被 Feynman 称为**部分子**，这个图像也就是**部分子模型**的图像。

²⁵这些截面中红外发散的处理和 5.8 节中的处理方法类似，末态辐射和末态的顶角修正两个过程中的红外发散会互相抵消。如果想要计算一个特定的 n 喷注过程的截面，也可以对末态辐射粒子的能量、角度做适当的截断。

那么, 这个思想如何从数学上严格的表达呢? 答案就是以下的**共线因子化定理**, 其内容是:

Collinear Factorization Theorem: 对于任何初态包含强子 H 的、对末态求和的过程, 若其质心系能量为 $s \equiv Q^2$, 那么这个过程的截面可以写为:

$$\sigma(H(P) + A \rightarrow X) = \sum_q \int_0^1 d\xi f_{q/H}(\xi) \hat{\sigma}(q(\xi P) + A \rightarrow X) + O\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{Q}\right) \quad (8.181)$$

其中 $\sigma(H + A \rightarrow X)$ 是初态包含动量为 P 的强子 H 的、对所有末态求和的截面; $f_{q/H}(\xi)$ 是**部分子分布函数/PDF**, 它是非微扰的, 并且只和部分子 q 和强子 H 有关, 与过程无关; 而 $\hat{\sigma}(q(k) + A \rightarrow X)$ 是一个利用微扰论可计算的函数, 它不依赖于强子 H , 固定部分子 q 和初末态的情形下, 它只和动量 k 有关。

我们先看看共线因子化定理的物理意义。部分子分布函数 $f_{q/H}(\xi)$ 物理意义十分明确: $f_{q/H}(\xi)$ 就是从动量为 P 的强子 H 中发现一个 P 方向动量为 ξP 的部分子的概率密度; 而对于 $\hat{\sigma}(q(\xi P) + A \rightarrow X)$, 我们会在后面的讨论中看到: 在微扰论的领头阶, $\hat{\sigma}^{(0)}(q(\xi P) + A \rightarrow X)$ 就是将动量为 P 的强子替换为动量为 ξP 的部分子的过程的截面 $\sigma^{(0)}(q + A \rightarrow X)$ 。于是共线因子化定理的物理图像和上面我们说的图像是吻合的: 强子的散射截面就是强子分裂出的部分子的散射截面, 乘以强子分裂出这个部分子的概率, 再对所有可能分裂出的部分子求和。这听起来也十分自然。

这里仅仅给出了共线因子化定理, 而没有对其证明。事实上, 共线因子化定理并没有一个对任何过程 $H + A \rightarrow X$ 都成立的证明, 而是需要对每一个过程分别证明。直到现在, 人们也只会对几个特殊的过程²⁶证明共线因子化定理。鉴于这些证明比较复杂且缺乏普适性, 我们将不给出对共线因子化定理的具体的证明²⁷。

那么, 有了共线因子化定理, 如何计算出初态存在强子时的截面呢? 事实上, 因为等式右边两项其实我们都不知道如何计算, 所以只有上面这个定理还是不足以计算出强子截面的。为此, 我们至少需要对等式右边这些东西做进一步的定义²⁸。下面就将给出一个对 $f_{q/H}(\xi)$ 的一个算符层面的定义。不过在给出定义前, 还需要一些准备工作:

首先来定义一个处理极端相对论过程时非常好用的坐标: **光锥坐标**。如果 n_0, n_3 分别是时间和空间第三方向的基矢, 那么定义**光锥方向**为:

$$n_+^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}}(n_0^\mu + n_3^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1), \quad n_-^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}}(n_0^\mu - n_3^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1) \quad (8.182)$$

那么就有关系: $n_+ \cdot n_+ = n_- \cdot n_- = 0$, $n_+ \cdot n_- = -1$ 。于是任何一个矢量 v 就可以被展开为:

$$v = -(v \cdot n_-)n_+ - (v \cdot n_+)n_- + v^1 n_1 + v^2 n_2 \equiv v^+ n_+ + v^- n_- + v^1 n_1 + v^2 n_2 \quad (8.183)$$

²⁶详细而言, 人们只会对**深度非弹性散射** (强子中的一个夸克和轻子通过电磁作用散射) 和 **Drell-Yan 过程** (两个入射强子中的正反夸克对湮灭, 产生正反轻子对) 这两个过程证明这个结果。

²⁷在 Schwartz 的 *Quantum Field Theory and The Standard Model* 的第 32.4 节中, 作者利用算符乘积展开的工具给出了一个对深度非弹性散射过程中的共线因子化定理的证明。在那时, 部分子分布函数被定义为一系列 twist-2 算符在渐进强子态中的期待值虚部的和。

²⁸为什么没有在共线因子化定理的证明中给出对这些东西的定义呢? 原因是这个定义是具有一定任意性的: 任何相差一个 $O(\Lambda_{\text{QCD}}/Q)$ 的定义都满足共线因子化定理。

对于一个极端相对论性的粒子，如果其动量为 $P = (Q, 0, 0, Q)/\sqrt{2}$ ，那么利用光锥坐标，就可以将其写为 $P = (Q^+, 0^-, 0_T)$ 。此时， n_+ 方向就是这个粒子动量的方向。我们为什么要在这里定义光锥坐标呢？答案是我们要描述一个动量在强子运动方向的分量。在极端相对论情况下，由于 P 是类光的，于是 $v \cdot P / \sqrt{P \cdot P}$ 是没有意义的。光锥坐标就是我们想到的解决方案。

有了这些准备后，就可以定义部分子分布函数了：

$$f_{q/H}(\xi) := \int \frac{d\omega^-}{2\pi} e^{-i\xi P^+ \omega^-} \langle H_{\text{in}} | \bar{\Psi}_q(\omega^-) \frac{\gamma^+}{2} W(\omega^-, 0) \Psi_q(0) | H_{\text{in}} \rangle_C \quad (8.184)$$

其中 $|H_{\text{in}}\rangle$ 是渐进强子态， Ψ_q 是部分子 q 对应的场， $W(\omega^-, 0) := P \exp \left(ig \int_0^{\omega^-} dy^- \mathbf{A}_+(y^-) \right)$ 是 Wilson 线，其中 $\mathbf{A}_+ = A_+^a T_R^a$ ，而 R 是场 Ψ_q 所在表示的生成元。它的存在使得 PDF 是规范不变的。角标 C 意味着我们只考虑这个矩阵元的联通部分²⁹。这个定义看起来非常复杂，我们知道，一个复杂的定义背后一定有这么定义的道理，否则物理学家们不会无事生非地去做这样的定义。下面我们会给出一个如此定义的一个原因³⁰：

我们知道，部分子 q 的流算符可以被写作 $J_q^\mu(x) = \bar{\Psi}_q(x) \gamma^\mu \Psi_q(x)$ ，其 0 分量就给出了 q 的粒子数密度。我们知道，在质子静止参考系中，时间方向也就是 n^+ 的方向。那么既然我们希望描述强子中有多少部分子，就可以试着考虑 J_q^+ 在渐进强子态 $|H_{\text{in}}\rangle$ 下的期待值，也就是 $\langle H_{\text{in}} | \bar{\Psi}_q(x) \gamma^+ \Psi_q(x) | H_{\text{in}} \rangle$ 。插入一组完备的 $|X\rangle$ ，就得到：

$$\sum_X \int \prod_{X_i} \widetilde{dp_{X_i}} \langle H_{\text{in}} | \bar{\Psi}_q(x) \gamma^+ | X \rangle \langle X | \Psi_q(x) | H_{\text{in}} \rangle \quad (8.186)$$

这里， X 可以被认为是某种“分裂出一个部分子后的状态”， X_i 是这个状态中包含的粒子。于是为了描述 P 方向动量为 ξP 的部分子，可以在上面这个式子中多引入一个 delta 函数，就得到：

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_X \int \prod_{X_i} \widetilde{dp_{X_i}} (2\pi)^4 \delta^4(P - p - p_X) \langle H_{\text{in}} | \bar{\Psi}_q(x) \gamma^+ | X \rangle \langle X | \Psi_q(x) | H_{\text{in}} \rangle \delta(\xi P^+ - p^+) \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d\omega^-}{(2\pi)} \sum_X \int \prod_{X_i} \widetilde{dp_{X_i}} (2\pi)^4 \delta^4(P - p - p_X) \langle H_{\text{in}} | \bar{\Psi}_q(0) \gamma^+ | X \rangle \langle X | \Psi_q(0) | H_{\text{in}} \rangle e^{-i\omega^-(\xi P^+ - p^+)} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d\omega^-}{(2\pi)} \sum_X \int \prod_{X_i} \widetilde{dp_{X_i}} (2\pi)^4 \delta^4(P - p - p_X) \\ & \quad \times \langle H_{\text{in}} | \bar{\Psi}_q(\omega^-) \gamma^+ | X \rangle \langle X | \Psi_q(0) | H_{\text{in}} \rangle e^{-i\omega^-(\xi P^+ - p^+)} e^{i\omega^-(p_X^+ - P^+)} \\ &= \int \frac{d\omega^-}{(2\pi)} e^{-i\xi\omega^- P^+} \langle H_{\text{in}} | \bar{\Psi}_q(\omega^-) \gamma^+ \Psi_q(0) | H_{\text{in}} \rangle \end{aligned} \quad (8.187)$$

²⁹这个矩阵元的联通部分被严格定义为：

$$\langle H_{\text{in}} | \bar{\Psi}_q(\omega^-) \frac{\gamma^+}{2} W(\omega^-, 0) \Psi_q | H_{\text{in}} \rangle_C := \langle H_{\text{in}} | \bar{\Psi}_q(\omega^-) \frac{\gamma^+}{2} W(\omega^-, 0) \Psi_q | H_{\text{in}} \rangle - \langle H_{\text{in}} | H_{\text{in}} \rangle \langle \Omega | \bar{\Psi}_q(\omega^-) \frac{\gamma^+}{2} W(\omega^-, 0) \Psi_q | \Omega \rangle \quad (8.185)$$

³⁰既然是“原因”不是“证明”，那么自然这些导出过程是不严格的。真正严格的东西只有上面这个定义。

这个东西是物理的，所以我们不希望它是依赖于规范的。为此可以稍稍想一个小 trick：既然是规范不变的，我们可以随便选一个规范，在这个规范下进行上面的讨论，然后再推广到任意规范中。可以认为上面全部这些计算都是在光锥规范，也就是 $A^+ = 0$ 的规范下进行的，那么为了使其规范不变，就可以在两个夸克场算符之间插入一个 Wilson 线 $W(\omega^-, 0)$ 。并且由于我们希望描述的过程是强子中分裂出一个部分子，于是我们只希望考虑这个矩阵元的联通部分。最后，我们距离上面的定义还相差了一个因子 $1/2$ 。我们在后面会看到，这个因子可以被认为是一个归一化因子，它的存在保证了（自旋平均的） $f_{q/q}(\xi)$ 在微扰论的领头阶是 $\delta(1 - \xi)$ ，这也和我们的物理直觉相符合。

这里仅仅定义了部分子是正粒子时的部分子分布函数。而事实上，一个强子中除去可以分裂出夸克之外，还可能分裂出反夸克和胶子。反夸克的定义很简单：如果我们在上面的过程中将 $\Psi_q, \bar{\Psi}_q$ 互换，那么得到的就会是以下的定义：

$$f_{\bar{q}/H}(\xi) := \int \frac{d\omega^-}{2\pi} e^{-i\xi P^+ \omega^-} \langle H_{\text{in}} | \text{Tr} \left[\Psi_q(\omega^-) \frac{\gamma^+}{2} W(\omega^-, 0) \bar{\Psi}_q(0) \right] | H_{\text{in}} \rangle_C \quad (8.188)$$

可以看到，一切都很类似，只不过这里多了一个 Tr 。而对于胶子而言，我们并不能利用一个 $\bar{\Psi}_q(x) \gamma^\mu \Psi_q(x)$ 的流来描述胶子流。根据 Noether 定理，胶子场在时空平移下的守恒流是 $(G^a)^{\mu\sigma} (G^a)_\sigma^\nu$ ，其中 G 就是场强张量 $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ 。为此可以试图将胶子的 PDF 定义为：

$$f_{g/H}(\xi) := \int \frac{d\omega^-}{2\pi} e^{-i\xi P^+ \omega^-} \langle H_{\text{in}} | (G^a(\omega^-))^{+\nu} W(\omega^-, 0) (G^a(0))_\nu^+ | H_{\text{in}} \rangle_C \quad (8.189)$$

其中 Wilson 线中的生成元是伴随表示的生成元。当然，这里有必要重申一下：前面关于 PDF 的所有的这些推导都是不严格的。真正严格的只有对 $f_{q/H}, f_{\bar{q}/H}$ 和 $f_{g/H}$ 的三个定义。当然我们会问：这样定义出的 PDF 真的满足共线因子化定理吗？答案是肯定的。不过鉴于篇幅原因，我们将不会给出相应的证明³¹。

Hadronic Cross-Sections

有了这个定义之后，我们就可以计算初态存在强子时的截面了。前面也说到过，强子的 PDF 是完全非微扰的，从而我们无法在微扰论中求出强子的 PDF，只能通过实验结果拟合强子的 PDF。于是下面所要计算的实际上是截面和强子 PDF 之间的关系。知道了这个关系之后，我们才可以从实验结果中拟合出强子 PDF，然后利用这个关系预言新的实验。在这个逻辑下，计算时候就应该将强子的 PDF 视作已知的。

回去看看共线因子化定理：既然 PDF 可以被视作已知的，那么需要计算的东西也就只有 $\hat{\sigma}(q(\xi) + A \rightarrow X)$ 了。既然 $\hat{\sigma}(q(\xi) + A \rightarrow X)$ 是和 H 无关的，我们就可以将 H 取做 q 本身，此时就有：

$$\sigma(q + A \rightarrow X) = \sum_q \int_0^1 d\xi f_{q/q}(\xi) \hat{\sigma}(q(\xi) + A \rightarrow X) + O\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{Q}\right) \quad (8.190)$$

其中 $\sigma(q + A \rightarrow X)$ 是过程 $q + A \rightarrow X$ 的真实截面，而 $\hat{\sigma}(q(\xi) + A \rightarrow X)$ 就是要求出的函数。在这个式子中，截面 $\sigma(q + A \rightarrow X)$ 和 PDF $f_{q/q}(\xi)$ 都是完全可以通过微扰论逐阶

³¹J. C. Collins 在文章 Nucl. Phys. B 194, 445-492 (1982) 中给出了这个证明，其思路就是将 PDF 的这个定义通过 Mellin 矩和前面所说的 twist-2 算符联系起来。

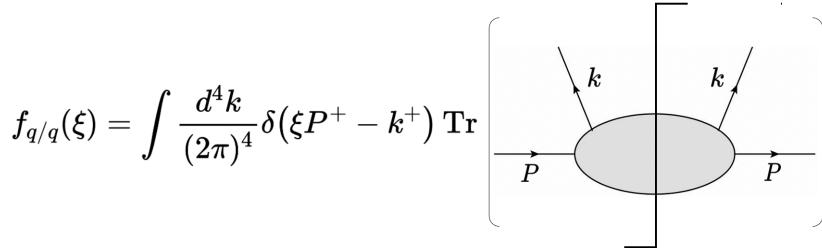
求出的, 从而 $\hat{\sigma}(q(\xi P) + A \rightarrow X)$ 也可以利用这个式子逐阶求出。而求出 $\hat{\sigma}(q(\xi P) + A \rightarrow X)$ 也就完成了我们的目标。

那么预言强子截面的问题就被转化为了求出 $\sigma(q + A \rightarrow X)$ 和 $f_{q/q}(\xi)$ 的问题。 $\sigma(q + A \rightarrow X)$ 的计算我们再熟悉不过了: 在这个 notes 的前面七章中, 我们计算的其实全部都是形如 $\sigma(q + A \rightarrow X)$ 的截面; 而对于 $f_{q/q}(\xi)$, 还需要一些额外的讨论我们才会计算这个东西。

计算 $f_{q/q}(\xi)$ 的时候遇到的一个问题是: $\langle q_{\text{in}} | \bar{\Psi}_q(\omega^-) \frac{\gamma^+}{2} W(\omega^-, 0) \Psi_q | q_{\text{in}} \rangle_C$ 是两个渐进初态之间的不编时矩阵元, 而我们计算这种渐进态的唯一武器是 LSZ 约化公式, 它仅仅能够计算渐进初态和末态之间的矩阵元。另外, 我们利用路径积分也只会计算编时的关联函数, 对这种不编时关联函数也没有什么办法。于是计算 PDF 的第一步就应该是将它写成一个渐进初态和末态之间的编时矩阵元, 这可以通过插入一组完备的渐进末态实现 (为了计算的简便, 仍然取光锥规范³²) :

$$\begin{aligned} f_{q/q}(\xi) &= \sum_X \int \prod_{X_i} \widetilde{dp}_{X_i} \int \frac{d\omega^-}{2\pi} e^{-i\xi P^+ \omega^-} \text{Tr} \left[\langle q_{\text{in}} | \bar{\Psi}_q(\omega^-) | X_{\text{out}} \rangle \frac{\gamma^+}{2} \langle X_{\text{out}} | \Psi_q(0) | q_{\text{in}} \rangle \right]_C \\ &= \sum_X \int \prod_{X_i} \widetilde{dp}_{X_i} \int \frac{d\omega^-}{2\pi} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-i\xi P^+ \omega^-} e^{ik^+ \omega^-} \text{Tr} \left[\langle q_{\text{in}} | \tilde{\bar{\Psi}}_q(k) | X_{\text{out}} \rangle \frac{\gamma^+}{2} \langle X_{\text{out}} | \tilde{\Psi}_q(k) | q_{\text{in}} \rangle \right]_C \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta(\xi P^+ - k^+) \text{Tr} \left[\frac{\gamma^+}{2} \sum_X \int \prod_{X_i} \widetilde{dp}_{X_i} \langle X_{\text{out}} | \tilde{\bar{\Psi}}_q(k) | q_{\text{in}} \rangle \langle q_{\text{in}} | \tilde{\Psi}_q(k) | X_{\text{out}} \rangle \right]_C \quad (8.192) \end{aligned}$$

由此看出, 这对应如下的 Feynman 图:



其中, LSZ 约化公式使得初末态动量为 P 的部分子传播子截肢, 并带有外线因子 $u_s(P), \bar{u}_s(P)$, 而动量为 k 的“分裂出的”部分子未被截肢, 也不带有任何外线因子。有了 $f_{q/q}$ 的这个 Feynman 规则之后, 我们就可以在微扰论中一阶一阶地计算出 $f_{q/q}$ 。这就可以将前面讨论的所有东西拼合在一起: $\sigma(q(P) + A \rightarrow X)$ 也可以在微扰论中一阶一阶计算出。于是共线因子化定理可以在微扰论的意义下一阶一阶地展开为:

$$\sigma^{(0)}(q) + \sigma^{(1)}(q) + \dots = \int_0^1 d\xi \left[f_{q/q}^{(0)}(\xi) + f_{q/q}^{(1)}(\xi) + \dots \right] [\hat{\sigma}^{(0)}(q) + \hat{\sigma}^{(1)}(q) + \dots] \quad (8.193)$$

³²光锥规范的 Feynman 规则和我们熟悉的 R_ξ 规范有些不同, 这是由光锥规范的规范固定函数 G^a 和 R_ξ 规范不同导致的。取 $G^a = A_+^a$, 重复 7.2 节中的推导, 就会发现: 光锥规范中没有 Faddeev-Popov 鬼场, 并且规范场传播子是:

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab} = \frac{1}{i} \frac{1}{k^2} \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{n_-^2}{(n_- \cdot k)^2} k^\mu k^\nu - \frac{k^\mu n_-^\nu + k^\nu n_-^\mu}{(k \cdot n_-)} \right) \quad (8.191)$$

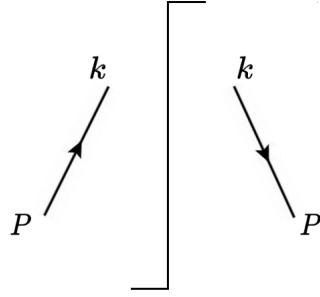
其他 Feynman 规则和上面讨论的 R_ξ 规范相同。事实上, 如果我们将条件 $A_+ = 0$ 替换为 $n \cdot A = 0$, 那么这对应一大类称为**轴规范**的规范。其规范场传播子就是将上式中的 n_- 换成 n 。

顺便, 最后要提醒一下: 虽然 $\hat{\sigma}$ 是和规范无关的, 但是在计算过程中还是要使用同一规范来进行计算的。如果在计算 PDF 时使用了光锥规范, 那么在计算截面 $\sigma(q(P) + A \rightarrow X)$ 时也要使用光锥规范进行计算。

于是，匹配各阶的系数，就得到：

$$\sigma^{(0)}(q) = \int_0^1 d\xi f_{q/q}^{(0)}(\xi) \hat{\sigma}^{(0)}(q), \quad \sigma^{(1)}(q) = \int_0^1 d\xi f_{q/q}^{(1)}(\xi) \hat{\sigma}^{(0)}(q) + \int_0^1 d\xi f_{q/q}^{(0)}(\xi) \hat{\sigma}^{(1)}(q), \dots \quad (8.194)$$

对于一个一般的 $f^{(0)}$ 而言，这并不足以从中提取出 $\hat{\sigma}$ 的信息。好在在微扰论的领头阶，部分子分布函数就是 $\delta(1 - \xi)$ ，这允许我们能够一阶一阶地求出 $\hat{\sigma}$ 。为了看到这点，下面我们就来详细计算一下 $f_{q/q}^{(0)}$ 。在领头阶，只有一个 Feynman 图对 PDF 有贡献：



这也就相当于将插入的末态 $|X_{\text{out}}\rangle$ 取为 $|\Omega\rangle$ 。于是可以计算出：

$$\begin{aligned} f_{q/q}^{(0)}(\xi) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta(\xi P^+ - k^+) \text{Tr} \left[\frac{\gamma^+}{2} \langle \Omega | \tilde{\Psi}_q(k) | q_{\text{in}} \rangle \langle q_{\text{in}} | \tilde{\Psi}_q(k) | \Omega \rangle \right] (2\pi)^4 \delta^4(P - k) \\ &= \delta(\xi P^+ - P^+) \text{Tr} \left[\frac{\gamma^+}{2} u_s(P) \bar{u}_s(P) \right] \end{aligned} \quad (8.195)$$

我们通常考虑的过程中，都会对初态自旋求平均、末态自旋求和。于是更常用的是以下的自旋平均的 PDF：

$$f_{q/q}^{(0)}(\xi) = \frac{1}{2} \sum_s \delta(\xi P^+ - k^+) \text{Tr} \left[\frac{\gamma^+}{2} u_s(P) \bar{u}_s(P) \right] = \delta(\xi P^+ - k^+) P^+ = \delta(1 - \xi) \quad (8.196)$$

至此我们就得到了：在微扰论的领头阶，部分子分布函数就是 $\delta(1 - \xi)$ ³³。这个结果不但重要，其物理意义也十分明确：在不考虑任何相互作用时，一个部分子就不能分裂出其他的东西，只能一直以原来的动量继续传播。在计算出 $f_{q/q}^{(0)}$ 之后，将其代入用微扰论按阶展开的共线因子化定理，就可以得到：

$$\sigma^{(0)}(q(P) + A \rightarrow X) = \hat{\sigma}^{(0)}(q(P) + A \rightarrow X) \quad (8.197)$$

$$\sigma^{(1)}(q(P) + A \rightarrow X) = \int_0^1 d\xi f_{q/q}^{(1)}(\xi) \hat{\sigma}^{(0)}(q) + \hat{\sigma}^{(1)}(q(P) + A \rightarrow X) \quad (8.198)$$

这就得到了我们需要的 $\hat{\sigma}$ 。特别地，领头阶的式子证明了一个前面提到过的结论：在微扰论的领头阶， $\hat{\sigma}^{(0)}(q(\xi P) + A \rightarrow X)$ 就是将动量为 P 的强子替换为动量 ξP 的部分子的过

³³这里并没对胶子和反夸克证明这件事情，不过证明是类似且简单的。

程的截面 $\sigma^{(0)}(q(\xi P) + A \rightarrow X)$ 。有了这个结果，就可以在微扰论的领头阶计算出强子截面了。它是：

$$\begin{aligned}\sigma(H(P) + A \rightarrow X) &= \sum_q \int_0^1 d\xi f_{q/H}(\xi) \hat{\sigma}(q(\xi P) + A \rightarrow X) + O\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{Q}\right) \\ &= \sum_q \int_0^1 d\xi f_{q/H}(\xi) \left[(\sigma^{(0)} + \sigma^{(1)})(q(\xi P) + A \rightarrow X) - \int_0^1 d\xi f_{q/q}^{(1)} \sigma^{(0)}(q(\xi P) + A \rightarrow X) \right] + (\dots)\end{aligned}\quad (8.199)$$

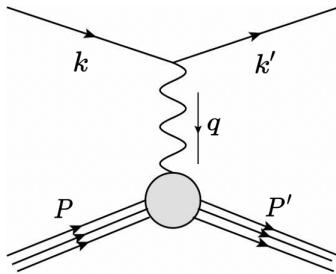
其中 (...) 中包含了 $\hat{\sigma}$ 中的高阶微扰修正，以及 Λ_{QCD}/Q 的高阶项。不过故事还没有讲完：在计算这些高阶微扰修正的时候还会出现一些问题：正如我们在第五章所看到的：截面 $\sigma(q(P) + A \rightarrow X)$ 中可能存在红外发散。不过由于我们真正的可观测量并不是这个 $\sigma(q(P) + A \rightarrow X)$ ，而是 $\hat{\sigma}(q(P) + A \rightarrow X)$ 。事实上，我们在叙述共线因子化定理时就说过：截面 $\hat{\sigma}(q(P) + A \rightarrow X)$ 是完全微扰的，而红外发散本身就是非微扰效应的体现，于是 $\hat{\sigma}(q(P) + A \rightarrow X)$ 中就不应该存在红外发散，其中所有的红外发散都应该抵消掉。在这个计算过程中，这体现为 PDF 中也存在相同的红外发散，而 PDF 中的红外发散和截面 $\sigma(q(P) + A \rightarrow X)$ 中的红外发散相互抵消。

这个红外发散的抵消和我们在紫外做的事情有一点相似：在紫外，我们重新定义了场，认为物理的散射截面和裸散射截面相差一个常数因子，于是可以将裸截面中的紫外发散藏在这个常数因子里面；而在红外，我们认为物理的截面和“裸”截面相差了一个对 PDF 的积分（数学上，这样的操作被称为卷积），于是可以将“裸”截面中的红外发散藏在 PDF 中。就像紫外发散的处理用的是重整化一样，红外发散的处理用的就是因子化。

Example: e^-p Deep Inelastic Scattering at Leading Order

故事直到此处，我们就明白该如何处理初态的强子了。作为例子，让我们来计算一下一个初态存在强子的过程——电子-质子深度非弹性散射的散射截面。所谓电子-质子深度非弹性散射，也就是将一束电子和一束质子对撞，并且对撞的质心系能量远高于质子质量。定性地说，在这个极限下，质子会被“打散”成许多强子，我们关心的就是所有这些强子的总截面 $\sigma(P + e \rightarrow X)$ 。

先来考虑一下这个过程的运动学：令初态质子动量为 P ，初态电子动量为 k ，末态电子动量为 k' ，于是过程中的动量转移可以被记为 $q = k - k'$ 。暂时不考虑弱相互作用的贡献，那么这个过程就只能通过电子和质子交换虚光子来进行。故它对应以下的 Feynman 图：



当我们讨论 QCD 的前两阶微扰时，由于 $\alpha \ll \alpha_s$ ，于是我们可以完全不考虑上面那个电磁顶点和中间光子传播子中的 QED 高阶修正项，仅考虑下面一个顶点中的 QCD 修正。如果将下面这部分 $\gamma^* + P \rightarrow X$ 对 Feynman 振幅的贡献记作 $i\mathcal{M}_\mu(\gamma^* P \rightarrow X)$ ，那么整个

过程的 Feynman 振幅就是：

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(k')(-ie\gamma^\mu)u(k)\frac{-i}{q^2}i\mathcal{M}_\mu(\gamma^* + P \rightarrow X) \quad (8.200)$$

于是，自旋平均的截面就是：

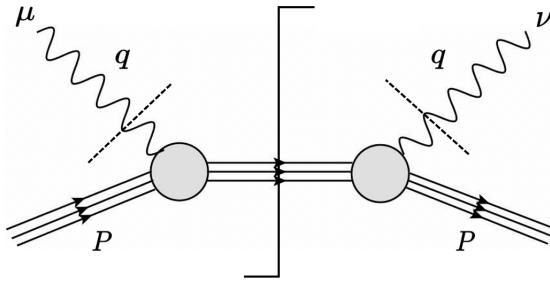
$$\sigma = \frac{1}{4m_P|\mathbf{k}|} \sum_X \int \widetilde{dp_X} \widetilde{dk'} (2\pi)^4 \delta^4(p_X + k' - k - P) \frac{e^2}{4q^4} \text{Tr}[\not{k'} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu] \mathcal{M}_\mu(\gamma^* P \rightarrow X) \mathcal{M}_\nu^*(\gamma^* P \rightarrow X) \quad (8.201)$$

如果我们定义轻子张量 $L_{\mu\nu}$ 和强子张量 $W_{\mu\nu}$ 为：

$$L^{\mu\nu}(k, q) := \frac{1}{2} \text{Tr}[\not{k'} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu] = 2(k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu - \frac{1}{2} Q^2 \eta^{\mu\nu}) \quad (8.202)$$

$$W_{\mu\nu}(P, q) := \frac{1}{4\pi e^2} \sum_X \int \widetilde{dp_X} (2\pi)^4 \delta^4(p_X - P - q) \mathcal{M}_\mu(\gamma^* P \rightarrow X) \mathcal{M}_\nu^*(\gamma^* P \rightarrow X) \quad (8.203)$$

这可以被画为如下的 Feynman 图：



图中的虚线代表“截肢”。有了这两个定义，截面就可以被写为：

$$\sigma = \frac{1}{4m_P|\mathbf{k}|_{\text{Lab}}} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2E'_k} \frac{4\pi e^4}{q^4} L_{\mu\nu}(k, q) W^{\mu\nu}(P, q) \quad (8.204)$$

将这个截面对立体角做些微分，就可以得到微分截面：

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dE'_k d\Omega} \right)_{\text{Lab}} = \frac{\alpha^2}{q^4 m_P} \frac{E'_k}{E_k} L_{\mu\nu}(k, q) W^{\mu\nu}(P, q) \quad (8.205)$$

不过比起依赖于参考系的这个微分截面，我们更喜欢用 Lorentz 不变的运动学变量来描述整个散射过程，于是可以定义以下的几个 Lorentz 不变的运动学变量，并用它们替换 q, P' 等这些运动学变量：

$$Q^2 := q^2, \quad \nu := -(P \cdot q), \quad x := -\frac{Q^2}{2(P \cdot q)}, \quad y := \frac{(P \cdot q)}{(P \cdot k)} \quad (8.206)$$

在实验室系中, 这些变量就是 $Q^2 = 2E_k E'_k (1 - \cos \theta)$, $\nu = m_P (E'_k - E_k)$, $y = (E'_k - E_k)/E_k$ 。于是利用这些运动学变量, 就可以给出 Lorentz 不变的微分截面:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} &= 2\pi \frac{d^2\sigma}{dxd\Omega} \left| \frac{dQ^2}{d\cos\theta} \right|^{-1} = \frac{\pi}{E_k E'_k} \frac{d^2\sigma}{dxd\Omega} \\ &= \frac{\pi}{E_k E'_k} \frac{d^2\sigma}{dE'_k d\Omega} \left| \frac{dx}{dE_k} \right|^{-1} = \frac{\pi}{E_k E'_k} \frac{Q^2}{2m_p x^2} \frac{d^2\sigma}{dE'_k d\Omega} \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{2Q^2 m_p^2 E_k^2 x^2} L_{\mu\nu}(k, q) W^{\mu\nu}(P, q) \end{aligned} \quad (8.207)$$

这个结果还可以进一步化简。Ward 恒等式告诉我们 $q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0$, 于是 $W^{\mu\nu}(P, q)$ 就一定有形式:

$$W^{\mu\nu}(P, q) = W_1 \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + W_2 \left(P^\mu - \frac{(P \cdot q)}{q^2} q^\mu \right) \left(P^\nu - \frac{(P \cdot q)}{q^2} q^\nu \right) \quad (8.208)$$

将这个标准型和上面的轻子张量收缩, 得到:

$$\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[xy^2 F_1(x, Q^2) + \left(1 - y - \frac{m_p^2 y^2}{Q^2} \right) F_2(x, Q^2) \right] \quad (8.209)$$

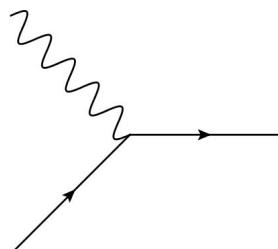
对于我们考虑的深度非弹性散射过程, 由于动量转移应该远大于质子质量, 于是应该有以下的深度非弹性条件: $Q^2 \gg m_p^2$, $-(P \cdot q) \gg m_p^2$, 而其比 $2x$ 是有限值。于是在深度非弹性条件下, 有:

$$\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} [xy^2 F_1(x, Q^2) + (1 - y) F_2(x, Q^2)] \quad (8.210)$$

这就给出了深度非弹性散射微分截面的标准型, 其中 $F_1 := W_1/x$, $F_2 := W_2\nu/x$, 这两个函数是我们在实验中真正能够测量的函数, 它们被称为**质子结构函数**。我们只要计算出 $W^{\mu\nu}$, 就能从中得到 W_1, W_2 的值, 于是就能通过实验得到对 F_1, F_2 这两个结构函数的预言。从而接下来的问题就是: 如何计算出 $W^{\mu\nu}$ 呢? 首先, 并且按照本节前面所给出形式理论, 我们可以将 $W^{\mu\nu}$ 分解为一些部分子截面和 PDF 的卷积。不过由于 $W^{\mu\nu}$ 是一个二阶张量, 部分子截面中也就含有张量积分, 为了处理简便起见, 我们最好将其所有指标都收缩掉。为此就考虑:

$$\eta^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 3W_1 + \left(P^2 - \frac{(P \cdot q)^2}{Q^2} \right) W_2 = 3W_1 - \frac{\nu}{2x} W_2, \quad P^\mu P^\nu W_{\mu\nu} = \frac{\nu}{2x} W_1 - \frac{\nu^2}{4x^2} W_2 \quad (8.211)$$

在求出这两个标量函数之后, 我们就能通过这两个方程解出 W_1, W_2 。为此, 我们就把眼光放在求出这两个标量函数上面去。对于 $\eta^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$ 而言, 前面的形式理论告诉我们应该考虑过程 $\gamma^* q \rightarrow X$ 。在微扰论的最低阶, 只有夸克和反夸克贡献这个过程, 其 Feynman 图是:



于是：

$$\eta^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{(0)}(q(\xi)) = \frac{1}{4\pi e^2} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'^0} (2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) [\bar{u}(p')(iQ_q e \gamma^\mu) u(p)] [\bar{u}(p)(-iQ_q e \gamma_\mu) u(p')] \quad (8.212)$$

其中 $p = \xi P$ 是部分子所携带的动量。由于：

$$\int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'^0} = \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \delta(p'^2 + m_q^2) \approx \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'^0} = \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \delta(p'^2) \quad (8.213)$$

从而可以将这个标量积分化简为：

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{(0)}(q(\xi)) &= \frac{Q_q^2}{4\pi} \delta((p+q)^2) \text{Tr}[(\not{p} + \not{q}) \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu] \\ &= \frac{2Q_q^2}{\pi} \xi \nu \delta\left(Q^2 - \frac{\xi}{x} Q^2\right) = \frac{2Q_q^2}{\pi} \xi \nu \frac{x}{Q^2} \delta(\xi - x) = \frac{Q_q^2}{\pi} \xi \delta(\xi - x) \end{aligned} \quad (8.214)$$

通过类似的方式，可以证明 $P^\mu P^\nu W_{\mu\nu}^{(0)} = 0$ 。于是就可以从这两个标量积分中得到质子结构函数的值。并且前面的形式理论告诉我们，这也就是领头阶的 $\hat{\sigma}$ 。从而截面 $\hat{\sigma}$ 中的结构函数就是：

$$\hat{F}_1^{(0)}(q(\xi)) = \frac{1}{2} Q_q^2 \delta(\xi - x), \quad \hat{F}_2^{(0)}(q(\xi)) = \xi Q_q^2 \delta(\xi - x) \quad (8.215)$$

将这些结构函数和质子的部分子分布函数做卷积，最终就得到电子-质子深度非弹性散射中的结构函数在领头阶的值：

$$F_1^{(0)}(P) = \sum_q \frac{1}{2} Q_q^2 f_{q/P}(x), \quad F_2^{(0)}(P) = \sum_q x Q_q^2 f_{q/P}(x) \quad (8.216)$$

代入前面得到的散射截面的标准型，就得到了树图阶 $e^- p$ 深度非弹性散射的微分截面。

8.6 Beyond the Standard Model

我们现在已经完成了对标准模型的讨论，而接下来我们想要讨论的就是**超出标准模型的新物理**(BSM)。既然“超出标准模型的新物理”这个概念存在，就一定意味着标准模型作为一个“终极理论”是存在一些缺陷的，否则如果标准模型是完美的，我们就不需要大费周章地用巨量经费建造对撞机等大科学装置来试图搜寻超出标准模型的迹象，世界上也不会有那么多物理学家研究超出标准模型的新物理，而这个 notes 就可以在上一节终止了。

那么，作为讨论超出标准模型的新物理的起点，我们就应该先讨论一下标准模型存在什么问题，然后才能试图搭建各种模型来解决这些问题。在这一节中，我们将标准模型存在的问题分为两部分——第一部分是标准模型所无法解释的实验现象，而第二部分是标准模型作为一个理论所具有的缺陷。

实验上，标准模型存在以下问题：

- **中微子质量：**人们在实验上发现了**中微子振荡**的现象，也就是三味中微子会随时间相互转变，一个初始为电子中微子的单粒子态经过一定时间的演化后可能处于 μ 子

中微子态上。对此的一个解释是：中微子具有质量，并且弱相互作用本征态 ν_e, ν_μ, ν_τ 并不是质量本征态。这就会导致 ν_e, ν_μ, ν_τ 之间的混合。在标准模型中，由于没有右手中微子，所以无法直接通过中微子和 Higgs 的 Yukawa 耦合 $y_\nu \phi \bar{\nu}_L \nu_R$ 给中微子加上 Dirac 质量。从而如何解释中微子质量的来源便成了标准模型所面对的一个问题。另外，如果中微子具有质量，其质量一定比标准模型中所有其他费米子的质量都小很多，为何如此这也是中微子质量起源必须解答的一个问题。我们会在本节稍后讨论这个问题的一个解决方案——**跷跷板机制**。

- **暗物质和暗能量：**观测表明，我们所处的宇宙中，重子物质³⁴只占宇宙物质总量的 5%，在此之外，某种未知的、不参与强相互作用和电磁相互作用的尘埃型³⁵物质——**暗物质**占据了宇宙物质总量的 27%，而剩下的 68% 全部都是某种负压强的物质——**暗能量**。它们也在宇宙形成过程中有至关重要的角色——暗能量驱动了宇宙的膨胀，而暗物质使得星系、恒星等结构能够生成。在标准模型的框架下，我们无法回答什么是暗物质、为什么重子物质在宇宙物质总量中只占据这么少的份额的问题。另外一个问题：如果将暗能量视为宇宙学常数，也就是真空能量，并且认为直到 Planck 能标标准模型都是有效的话，那么量子场论计算出的真空能量将是 10^{54}GeV^4 ，这和实验值 10^{-47}GeV^4 相差了 100 多个数量级。

很多超出标准模型的理论都能提供暗物质的候选者——只要它是稳定的、不会衰变，就能作为暗物质候选者存在。例如前面讨论的轴子、超对称理论中最轻的超对称伴子都可以作为暗物质的候选。而对于暗能量而言，好像还没什么模型能够抚平理论和实验间这么大的差异。

- (未完成：CP 破缺和重子数产生)

在理论层面上，标准模型的问题通常是和**自然性**有关的。所谓“自然性”是物理学家的一个美好愿景：如果 Lagrangian 中的一项耦合没有被对称性所禁戒，那么其（无量纲的）耦合常数应该是 $O(1)$ 的。如果 Lagrangian 中一项没有被对称性所禁戒的耦合不存在或者其耦合常数太小，那么这便是不自然的，需要我们探索其背后的机制。具体而言，标准模型存在以下的问题：

- **Hierarchy 问题：**这是和标准模型中的标量场——Higgs 场相关的一个问题。如果我们从 Wilsonian 有效场论的角度看标准模型，认为标准模型是一个截断在 Planck 能标的有效理论，那么标量的裸质量和物理质量之间的关系就是：

$$m_\phi^2 = m_{\phi,0}^2 - C(\Lambda_{\text{Pl}}^2 - \Lambda^2) \quad (8.217)$$

如果耦合系数是自然的，那么 C 就应该在 $1/16\pi^2$ 左右，从而后面的这一项就是 10^{36}GeV^2 的量级。为了解释 Higgs 的质量是 125GeV 的这个实验现象，我们就需要将理论中的一个参数——裸质量调节至 $m_0^2 = (1 - 10^{-34})\Lambda_{\text{Pl}}^2$ 。这个过程看起来就有些过于刻意了。这个问题就被称为 **Fine-Tuning 问题**。由于这个问题可以认为是电弱理论的能标 m_{Higgs} 和引力能标 Λ_{Pl} 差异悬殊而带来的，这似乎意味着四大基本相互作用中有一个巨大的“等级差距”，于是这个问题也被称为 **Hierarchy 问题**。

这件事情似乎是标量场所独有的：对于旋量场而言，其质量项量纲为 1，并且由于 Lorentz 对称性，其耦合常数的线性发散被降低为了对数发散，从而就不会出现

³⁴这里的“重子”是宇宙学家的说法，和粒子物理学家所常用的“重子”不太一样。标准模型中的所有费米子在宇宙学家眼中都是“重子”。

³⁵回忆广义相对论：宇宙学中常常将物质视为理想流体，“尘埃”就是没有压强的物质。

Fine-Tuning 问题；对于规范场而言，其质量项被规范对称性所禁戒，于是理论中不存在会正幂次发散的耦合。于是 Fine-Tuning 问题只会发生在标量场中。

这个问题的一个解决方案是**超对称**——对每个标准模型中的粒子引入一个伴子，使得粒子及其伴子对 Higgs 自能二次发散的贡献完全抵消，这样就消去了 Hierarchy 问题。在这个 notes 的附录中，我们将专门对超对称进行讨论。

- **强 CP 问题**：我们在第七章中讨论 QCD 时提到过，标准模型的所有对称性都没有禁戒 Lagrangian 中 $\frac{\theta}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\text{Tr}(\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}_{\rho\sigma})$ 的存在³⁶。由于这一项来自于 SU(3) 规范理论，并且破坏 CP 对称性，于是将其称为**强 CP 项**。强 CP 项不会带来任何微扰层面上的影响，但是它会带来一些非微扰的效应。实验表明，这一项的耦合常数 $\theta < 10^{-9}$ ，这是十分不自然的。“为什么 θ 这么小”这个自然性问题就被称为**强 CP 问题**。在前一章中，我们已经看到了对 CP 问题的一个可能解决方案：轴子和 Peccei-Quinn 机制。
- (未完成：真空衰变问题)
- **味物理问题**：在标准模型中，三代费米子的质量差异十分悬殊，如下所示：

Name	Symbol	Mass (GeV)	Name	Symbol	Mass (MeV)
up	u	0.0017	electron	e	0.511
down	d	0.0039	electron neutrino	ν_e	0
strange	s	0.076	muon	μ	105.7
charm	c	1.3	muon neutrino	ν_μ	0
bottom	b	4.3	tau	τ	1777
top	t	174	tau neutrino	ν_τ	0

(8.218)

为什么只有三代费米子？为什么三代费米子的质量差异如此之大？这些问题就被称为**味物理问题**。

解决三代费米子质量差异的一个方案是**圈产生质量**，这个想法来自于 Weinberg：我们知道标准模型是一个有效场论，在更高的能标上存在一个 UV 理论。由于三代费米子的质量比大约是 $1 : 100 : 10000$ ，而这个 100 的因子和圈因子 $1/16\pi^2$ 相差不大，于是如果对应 μ 子和电子的质量项并不在 UV 理论中存在，我们看到的这些质量项实际上是 Wilson 有效作用量中的有效算符，并且 μ 子质量对应的算符是由单圈图产生、电子质量对应的算符由两圈图产生，那么三代费米子的质量将会自然带上 $1/16\pi^2$ 的圈因子，这就解释了三代费米子质量差异的问题。

- **大统一理论和量子引力**：除去这些问题之外，标准模型仅仅是将电弱相互作用和强相互作用放在相同的量子场论的框架下而已，电弱相互作用和强相互作用仍然分别使用两个不同的耦合常数去描述，这说明标准模型并没有真正统一地描述强、弱和电磁相互作用。也就是说，标准模型还是一个**大统一理论**。除去强、弱和电磁相互作用之外，世界上还存在引力相互作用。在 Planck 能标之上，引力效应和量子效应将同时变得显著。此时如何描述引力的量子效应便是**量子引力**的任务。

由于标准模型的三代费米子可以被嵌入 $SU(5)$ 的表示 $(\bar{5}) \oplus (10)$ 中，于是 Glashow 提出了 $SU(5)$ 大统一理论来尝试统一强、弱和电磁相互作用，其能标大约是 10^{16}GeV 。

³⁶事实上，这一项可以通过瞬子引入，具体可以参见附录 B。

我们马上会看到这个理论出了什么问题。而对于量子引力而言，最受学界关注的量子引力理论当然就是**弦论**。可惜这些量子引力理论的能标都至少在 Planck 能标，它们对可观测量的贡献至少是正比于 $1/\Lambda_{\text{pl}}$ 的，于是人类还没有能力去检验这些量子引力理论。

可以看到，物理学家提出了很多模型来解决这些问题。不过作为物理学的一部分，仅仅提出一个模型解决上述问题是不够的，我们还要从模型中得到对实验的预言，然后和实验进行比较。直至现在为止，这些解决方案给出的模型全部都没有相应的实验验证，从而并不能作为人类对世界的更深刻的认识被写进教科书。直到现在，标准模型仍然是人类对微观世界最深刻的认识。

直至现在，所有超出标准模型的新物理模型都没有相应的实验验证。这很大一部分因素是我们没有看到除中微子振荡之外的超出标准模型的实验现象³⁷。于是要验证这些新物理模型，我们就要从实验上寻找超出标准模型的蛛丝马迹。

新物理的能标应该是大于现有对撞机所能达到的能标的，否则我们就应该已经从对撞机中将这些新粒子撞了出来。既然新物理能标大于标准模型能标，那么就可以在路径积分中将所有的 BSM 粒子积分掉，得到一个截断在新物理能标 Λ_{BSM} 的有效理论——这被称为 **SMEFT**。在 SMEFT 中可以含有很多高量纲的算符，并且所有这些高量纲的算符的来源都应该是新物理。于是搜寻超出标准模型的新物理可以通过搜寻这些高量纲的算符的方式进行。在找到这些高量纲算符之后，就可以 bottom-up 地利用有效场论找到新物理可能的形式。

我们要搜寻什么样的高量纲算符呢？首先，由于 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 的规范对称性对世界的描述是十分成功的，于是我们不是很希望新物理会破坏这个规范对称性。如果我们要搜寻的算符不破坏标准模型中的任何偶然对称性，那么标准模型也会贡献量子作用量 $\Gamma[\phi]$ 中这一算符对应的项。由于我们的可观测量可以完全由量子作用量给出，于是这一项耦合对任何可观测量的贡献将会被标准模型冲淡。除非我们能够精确测量相应的可观测量，否则搜寻不破坏任何对称性的高量纲算符的过程将是困难的。

于是一个更好的选择是搜寻破坏标准模型中偶然对称性的高量纲算符。标准模型中最重要的两个偶然对称性就是**轻子数守恒**和**重子数守恒**，它们分别对应两个不同的全局 $U(1)$ 变换。对于轻子数变换，可以选定一代轻子，这一代中所有轻子场的变换都是 $e^{i\theta}$ ，反轻子场的变换都是 $e^{-i\theta}$ ，而这一代轻子之外的所有其他场都不变。对于重子数变换，所有夸克的变换就是 $e^{i\theta/3}$ ，反夸克的变换就是 $e^{-i\theta/3}$ ，其他场不变。破坏这两个对称性的过程一旦出现，就相当于找到了超出标准模型高量纲算符。

另外，对于量纲 7 及以上的算符，它们要不就对应三体以上的散射，不好观测，要不就可以通过取 VEV 变为一个量纲更低的算符。于是在下面的讨论中，我们只会列举出量纲为 6 及以下的算符。

那么，下面就列举一些破坏偶然对称性或可以被精确测量的量纲 6 及以下的高量纲算符。首先考虑量纲为 5 的情形：

- **Majorana 质量和跷跷板机制**：对应的算符是³⁸：

$$\mathcal{O}_5 = \frac{1}{\Lambda} \gamma_{IJ} \phi^{\dagger, i} \phi^{\dagger, j} l_{L,I,i} l_{L,J,j} = \frac{1}{\Lambda} \gamma_{IJ} \phi^{\dagger, i} \phi^{\dagger, j} L_{L,I,i}^T \mathcal{C} L_{L,J,j} \quad (8.219)$$

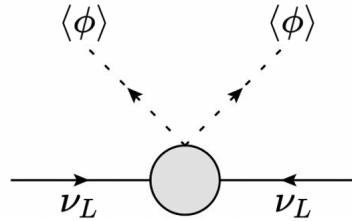
³⁷暂且不论星系旋转曲线这些观测结果，至少在地球上的实验没有看到超过 5σ 的实验现象。也许 μ 子反常磁矩会是下一个？

³⁸ I, J 是代指标， i, j 是 $SU(2)$ 指标。在下面一式中，下指标 a 是 Lorentz 群 $(1/2, 0)$ 表示的指标，上指标 A 是 Lorentz 群表示 $(0, 1/2)$ 表示的指标。

其中 l 是二分量旋量的轻子场, L 是 4 分量旋量的轻子场, 满足:

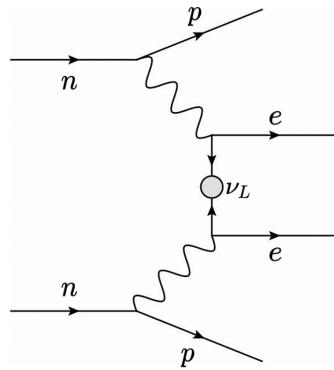
$$L = \begin{pmatrix} l_{La} \\ l_R^A \end{pmatrix}, \quad L_L = \begin{pmatrix} l_{La} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_R = \begin{pmatrix} 0 \\ l_R^A \end{pmatrix} \quad (8.220)$$

如下面的 Feynman 图所示, 在取了 VEV 之后, 这就成为了 $\frac{v^2}{\Lambda} \gamma_{IJ} \nu_{L,I} \nu_{L,J}$, 给出中微子的质量项。这一项就被称为中微子的 Majorana 质量。实际上, 由于它是唯一的保证 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 对称性的 dim-5 算符³⁹, 人们为了纪念其发现者, 也将其称为 Weinberg 算符。



如果中微子具有这个形式的质量项, 那么矩阵 γ_{IJ} 的非对角项就能给出三味中微子之间的混合, 从而解释中微子振荡现象。这个形式的 Majorana 质量还可以解释为什么中微子质量这么小的问题: 从这个算符的形式中可以看到, 这样赋予的中微子质量具有形式 v^2/Λ 。只要 Λ 远大于 $v = 246\text{GeV}$, 中微子的质量就自然很小。

可以看出, 这样一个 Majorana 质量是破坏轻子数守恒的。特殊的, 它允许两个不同方向的中微子线连在一起。于是为了探测这一算符的贡献, 可以寻找无中微子的双 beta 衰变过程, 也就是 $n + n \rightarrow p + p + e + e$ 。其 Feynman 图就是:

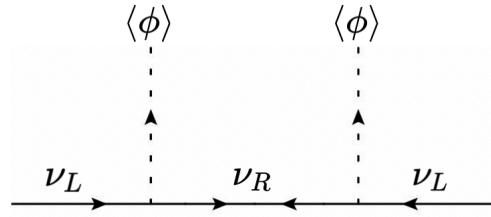


给出这个高量纲算符的一个可能的高能理论是跷跷板机制。其基本思路是, 引入一个右手中微子场 N_R , 它具有一个 Majorana 质量, 并且通过 Higgs 机制赋予中微子以一个 Dirac 质量。也就是说, Lagrangian 中有以下的耦合:

$$\mathcal{L} \supset -m_R N_R^T \mathcal{C} N_R - y_{IJ} \phi_i \bar{L}_L^i N_R + \text{h.c.} \quad (8.221)$$

下面这个 Feynman 图表明, 积去右手费米子后, 这一理论的确可以给出上面的算符, 并且给出质量 $m_\nu = y^2 v^2 / m_R$ 。

³⁹下面看到的其他“dim-5 算符”都实际上来自于 dim-6 算符的电弱破缺。



- $\mu \rightarrow e\gamma$: 另外一种破坏轻子数守恒的量纲 5 的算符是:

$$\mathcal{O}_5 = \frac{1}{\Lambda} e F_{\mu\nu} \bar{\mu} \sigma^{\mu\nu} e + \text{h.c.} \quad (8.222)$$

这个算符的存在会导致过程 $\mu \rightarrow e\gamma$ 。当然由于 $\sigma^{\mu\nu}$ 双线性型的手征结构是 $\bar{\Psi}_L \sigma^{\mu\nu} \Psi_R$, 其中一定有一个 (2) 表示中的左手轻子场和一个 (1) 表示中的右手轻子场, 于是这个算符是破坏 $SU(2)$ 规范对称性的。这就说明, 这个算符的来源一定是电弱对称性破缺。在破缺前, 它可以是以下的量纲 6 算符:

$$\mathcal{O}_6 = \frac{1}{\Lambda^2} \lambda_{IJ} F_{\mu\nu} \phi_i \bar{L}_{L,I}^i \sigma^{\mu\nu} L_{R,J} + \text{h.c.} \quad (8.223)$$

对于这个一般形式的算符而言, λ_{IJ} 的非对角项就会带来轻子数破坏。当然除了这些量纲 6 算符, 也可以通过在上面这个算符中加入任意多 $\phi^\dagger \phi$ 来构造贡献这一项的量纲 8, 量纲 10 算符, 不过量纲每提升 1, 就会带来一个 v^2/Λ^2 的因子, 于是这个量纲 6 算符对这一项起主导作用。

- **反常磁矩和电偶极矩:** 接下来我们考虑两个不破坏任何偶然对称性, 但是可以被精确测量的量纲 5 算符:

$$\mathcal{O}_5 = \frac{1}{\Lambda} F_{\mu\nu} \bar{\Psi} \sigma^{\mu\nu} \Psi + \text{h.c.}, \quad \mathcal{O}_5 = \frac{1}{\Lambda} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} \bar{\Psi} \sigma_{\mu\nu} \Psi + \text{h.c.} \quad (8.224)$$

其中 Ψ 是任何一个费米子场。在非相对论极限下, 这两个算符各给出粒子 Ψ 的反常磁矩和电偶极矩。由电偶极矩是破坏 CP 对称性的, 而在标准模型中, 所有破坏 CP 的过程都需要涉及到全部三代费米子, 并且一般会被圈因子 $1/16\pi^2$ 压低, 从而一般标准模型对 CP 破坏的物理量贡献都很小。从而对于电偶极矩而言, 新物理和标准模型的贡献可能在同一数量级, 甚至标准模型的贡献还更小些。对于反常磁矩而言, 这应该是人类历史上我们能够测量出最准确的物理量, 甚至能测量到小数点后 11、12 位。这已经足够让我们分辨出标准模型和新物理的贡献了。

和上面的 $\mu \rightarrow e\gamma$ 一样, 这两个算符也会破坏 $SU(2)$ 规范对称性, 于是在电弱对称性自发破缺前对它起主导贡献的是 SMEFT 中的以下量纲 6 算符:

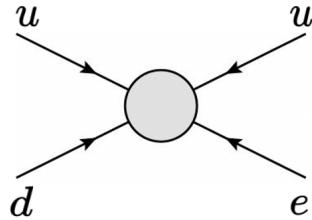
$$\mathcal{O}_6 = \frac{1}{\Lambda^2} F_{\mu\nu} \phi_i \bar{\Psi}_L^i \sigma^{\mu\nu} \Psi_R + \text{h.c.}, \quad \mathcal{O}_6 = \frac{1}{\Lambda^2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} \phi_i \bar{\Psi}_L^i \sigma_{\mu\nu} \Psi_R + \text{h.c.} \quad (8.225)$$

然后考虑量纲 6 的高量纲算符:

- **质子衰变**: 在 $SU(5)$ 大统一理论中, 存在如下的一个破坏重子数和轻子数的高量纲算符:

$$\mathcal{O}_6 = \frac{1}{\Lambda^2} \varepsilon^{ij} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (D_{R,\alpha}^T \mathcal{C} \gamma^\mu L_{L,i}) (U_{R,\beta}^T \mathcal{C} \gamma_\mu Q_{L,j,\gamma}) + \text{h.c.} \quad (8.226)$$

其中, D_R, U_R 分别是右手的上、下夸克场, 而 L_L, Q_L 分别是左手轻子和夸克二重态。 α, β 是 $SU(3)$ 基础表示指标, 而 i, j 是 $SU(2)$ 基础表示指标。可以看到, 这个算符贡献如下的顶点:



对于夸克组分为 uud 的质子而言, 这个顶点使其中的 u 和 d 夸克变为 \bar{u} 和正电子, 其中 \bar{u} 和另一个 u 夸克组合成 π^0 介子。从而如果这个算符存在, 那么质子将存在衰变道 $p \rightarrow \pi^0 e^+$ 。并且这个衰变的衰变率正比于 $|\mathcal{M}|^2 \sim 1/\Lambda^4$ 。实验表明, 质子的寿命至少为 10^{33} 年, 于是如果这一项存在, 那么对应的新物理能标就要大于 $\Lambda \sim 10^{15} \text{ GeV}$ 。不幸的是, 对于 $SU(5)$ 大统一理论而言, 用其他方式计算出的 $SU(5)$ 大统一能标是小于质子衰变的这个实验下限的。于是 $SU(5)$ 大统一模型已经被实验所排除了。

- **味改变中性流**: 最后我们讨论的高量纲算符是以下的算符:

$$\mathcal{O}_6 = \frac{1}{\Lambda^2} (\bar{d} \gamma^\mu s) (\bar{d} \gamma_\mu s) + \text{h.c.} \quad (8.227)$$

这个算符会对过程 $ss \rightarrow dd$ 产生贡献。虽然这个过程并不会破坏标准模型中的任何偶然对称性, 不过由于在标准模型中, 这一味改变中性流过程会被 GIM 机制在树图层面上禁戒, 于是所有的标准模型贡献都至少是一圈阶的, 这会被圈因子和耦合常数所压低。如果新物理能标在 TeV 左右, 那么新物理的贡献将是可能被观测到的。于是观测这些味改变中性流过程, 例如 $K\bar{K}$ 介子混合, 也可能会发现新物理的痕迹。

其他的高量纲算符就不再列举了。上面的讨论已经告诉了我们除去直接对撞出新物理粒子, 还有什么方法可以从实验中寻找新物理的痕迹。这对于 bottom-up 地构造模型、top-down 地检验模型而言都是至关重要的。

Appendix A

Finite-Temperature Field Theory

A.1 Matsubara Formalism

有限温度量子场论讨论的是一个多粒子量子系统的统计性质。我们总希望我们的系统具有一个恒定的温度，这也就相当于使其和一个大热源相互接触。并且由于量子场这一系统当然是粒子数不定的，粒子在系统内部就会产生、湮灭，于是粒子数当然是不守恒的¹。从而，对于和一个恒温热源接触的量子场，我们最好使用正则系综对其进行处理。物理学家在幼儿园中就熟知正则系综的密度矩阵是：

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr}(e^{-\beta H})} \quad (\text{A.1})$$

其中 $\beta = 1/T$ 。注意到我们在这里忽略了 Boltzmann 常数的存在，这是因为我们选取了一个特殊的自然单位制：

$$k_B = \hbar = c = 1 \quad (\text{A.2})$$

在这个自然单位制下，温度就具有了能量的量纲，于是就有 $[T] = [p] = [x]^{-1}$ 。我们还知道，一个算符 \mathcal{O} 的系综平均值可以写为：

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\text{Tr}(\rho \mathcal{O})}{\text{Tr}(\rho)} = \frac{\text{Tr}(e^{-\beta H} \mathcal{O})}{\text{Tr}(e^{-\beta H})} \quad (\text{A.3})$$

如果将温度取为 0，那么只有真空会贡献这一期待值，于是这就回到了 $\langle \Omega | \mathcal{O} | \Omega \rangle$ ，多么亲切！从而可以说，我们之前一直考虑的量子场论是某种“零温”量子场论。

从而，为了计算一个算符在有限温度下的期待值，我们就需要考虑一个算符的 $\text{Tr}(e^{-\beta H} \mathcal{O})$ 。我们接下来就要考虑如何计算这个 trace。先考虑配分函数 $\text{Tr}(e^{-\beta H})$ 。首先，根据路径积分原理，我们有：

$$\langle \phi', t' | \phi, t \rangle = \langle \phi' | e^{-iH(t-t')} | \phi \rangle = \int (\mathcal{D}\phi)_{\phi,t}^{\phi',t'} \exp \left[i \int_t^{t'} d^4x \mathcal{L}(\phi) \right] \quad (\text{A.4})$$

¹当然，如果我们有一个被对称性保护的守恒荷 Q ，例如 U(1) 对称性保护的粒子数-反粒子数算符，我们当然也可以在巨正则系综中讨论这个问题。由于巨正则系综的密度矩阵将是 $\rho = \Xi^{-1} e^{-\beta H - \alpha Q}$ ，这可以在 Lagrangian 中加上额外的项来实现。

其中 $|\phi, t\rangle$ 是 Heisenberg 绘景中算符的本征基，而 $|\phi\rangle$ 是 Schrodinger 绘景中算符的本征基。我们接下来就要试图扩展路径积分原理，使得这个关系在时间是复数的情形下依然成立。

在我们将时间从实轴上扩展到了复平面上后，这样一个 naive 的路径积分可能会遇到一些问题：实轴上的时间路径只有一条，于是 d^4x 中的 dt 是有一个确定的时间路径的。但是当我们引入虚时间之后，这个时间路径便可能是连接时间复平面上起止点的任意路径。一个自然的问题便是：对任何的路径 C 而言，路径积分的结果 $\langle\phi', t'|\phi, t\rangle_C$ 是一样的吗？

答案是肯定的。从正则形式理论中看，路径积分中的不同时间路径仅仅相当于选择 $t' - t$ 的不同拆分方式，由于 H 和自身对易，于是不论选取什么样的拆分，最终结果总是相同的算符 $\exp(-iH(t' - t))$ 。从而路径积分的结果是不依赖于时间路径的。从而，上面这个结果也可以被原封不动地应用到任何复平面上的时间路径上去。

有了复时间下的路径积分原理之后，我们就可以着手计算配分函数了。既然一个同时面上的场本征态是完备的，那么 $\text{Tr}(e^{-\beta H})$ 中的 trace 就是：

$$\begin{aligned} \text{Tr}(e^{-\beta H}) &= \int (\mathcal{D}\phi)_{t=0} \langle\phi|e^{-iH(-i\beta)}|\phi\rangle = \int (\mathcal{D}\phi)_{t=0} \int (\mathcal{D}\phi)_{\phi', t=-i\beta} \exp \left[i \int_{t=0}^{t=-i\beta} d^4x \mathcal{L}(\phi) \right] \\ &= \int (\mathcal{D}\phi)_{\phi(0)=\phi(-i\beta)} \exp \left[i \int_{t=0}^{t=-i\beta} d^4x \mathcal{L}(\phi) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

其中，我们采取的时间路径就是从 $t = 0$ 到 $t = -i\beta$ 的一条直线。为了看到更加熟悉的形式，可以做一个 Wick 转动来将其“切换”到熟悉的场论中。为此，定义一个虚时间：

$$\tau := it \quad (\text{A.6})$$

这样，就有 $d^4x_E := d^3x d\tau = i d^4x$ 。在对 $\mathcal{L}_E(\phi) := -\mathcal{L}(\phi)$ 也进行相应的替换后，便可以得出：

$$\text{Tr}(e^{-\beta H}) = \int (\mathcal{D}\phi)_{\phi(0)=\phi(\beta)} \exp \left[- \int_{\tau=0}^{\tau=\beta} d^4x_E \mathcal{L}_E(\phi) \right] \quad (\text{A.7})$$

这其实也就是一个 Euclidean 空间下的场论，我们在计算重整化、讨论有效场论时也见过。另外，这个路径积分和零温场论中看到的路径积分有所不同：首先，作用量中的时间积分并不是从无穷远的过去到无穷远的未来的积分，而是一个有限时间区域中的积分；另外，路径积分上附加了一个边界条件 $\phi(\tau = 0) = \phi(\tau = \beta)$ 。这两个不同点相当于：有限温度场论的时空实际上并不具有 \mathbb{R}^4 的拓扑，而是在时间方向“首尾粘合”在一起，变为 $S^1 \times \mathbb{R}^3$ 。从而我们也可以说明，Wick 转动联系了有限温度场论和拓扑为 $S^1 \times \mathbb{R}^3$ 的 Minkowski 时空中的零温场论。

有了这个结果之后，我们转而看看其他算符的系综平均值。和讨论路径积分时类似的操作告诉我们：

$$\text{Tr}(e^{-\beta H} T_\tau \{\mathcal{O}_1(\tau_1) \dots \mathcal{O}_n(\tau_n)\}) = \int (\mathcal{D}\phi)_{\phi(0)=\phi(\beta)} \mathcal{O}_1(\tau_1) \dots \mathcal{O}_n(\tau_n) \exp \left[- \int_{\tau=0}^{\tau=\beta} d^4x_E \mathcal{L}_E(\phi) \right] \quad (\text{A.8})$$

其中 T_τ 是编虚时算符。从而，计算一切系综平均值的问题都转化为计算以下量的问题：

$$\int (\mathcal{D}\phi)_{\phi(0)=\phi(\beta)} \mathcal{O}_1(\tau_1) \dots \mathcal{O}_n(\tau_n) \exp \left[- \int_{\tau=0}^{\tau=\beta} d^4x_E \mathcal{L}_E(\phi) \right] \quad (\text{A.9})$$

仿照第三章的方法，为了计算这个，可以定义一个生成泛函：

$$Z_\beta[J] := \int (\mathcal{D}\phi)_{\phi(0)=\phi(\beta)} \exp \left[- \int_{\tau=0}^{\tau=\beta} d^4x_E (\mathcal{L}_E(\phi) + J(x)\phi(x)) \right] \quad (\text{A.10})$$

那么只要计算出了生成泛函，就能通过泛函导数求出所有的“编虚时”关联函数。而要计算生成泛函，就可以借助微扰论的力量：仍然将 $\mathcal{L}_{E,\text{int}}$ 以泛函导数的形式扔出泛函积分，成为一个作用于自由生成泛函的算子。这样一来，只需要计算出自由生成泛函，就可以以 Feynman 图的形式计算出相互作用的生成泛函。

以标量场为例。对于自由生成泛函而言，我们有：

$$\begin{aligned} Z_{\beta,0}[J] := & \int (\mathcal{D}\phi)_{\phi(0)=\phi(\beta)} \\ & \times \exp \left[- \int_{\tau=0}^{\tau=\beta} d^4x_E \left(\frac{1}{2} \partial_\tau \phi \partial_\tau \phi + \frac{1}{2} (\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi) + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J(x)\phi(x) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

仍然利用 Fourier 方法求出自由传播子。与零温场论不同的是，由于时间方向上存在一个周期性边界条件，于是时间方向的 Fourier 变换会存在一点点差异：

$$\phi(x) = \frac{1}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\phi}(\omega_n, \mathbf{k}) e^{i(\omega_n t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad \tilde{\phi}(\omega_n, \mathbf{k}) = \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \phi(x) e^{-i(\omega_n t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (\text{A.12})$$

其中，因子 $1/\beta$ 类似于因子 $1/2\pi$ ，是由 Fourier 变换带来的。可以从中看到，周期性边界使得时间方向的频率离散化：

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \quad (\text{A.13})$$

这组频率就被称为 **Matsubara 频率**。利用类似的配方、取逆等操作之后，自由生成泛函就可以被计算出：

$$Z_{\beta,0}[J] = Z_{\beta,0}[0] \exp \left[\frac{1}{2\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} J(\mathbf{k}, \omega_n) \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} J(-\mathbf{k}, -\omega_n) \right] \quad (\text{A.14})$$

这里由于我们并不需要将 H 加上一个无穷小的虚部，于是传播子的分母中也就没有了无穷小的虚部。在计算出自由生成泛函之后，来考虑一下相互作用部分。例如 ϕ^4 理论，其相互作用部分就是²：

$$\exp \left[- \frac{1}{4!} \int_{\tau=0}^{\tau=\beta} d^4x_E (-\lambda) \left(-\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] \quad (\text{A.15})$$

这就对应一个顶点因子 λ 。从而， ϕ^4 理论在有限温下的 Feynman 规则就是：

- 自由传播子： $\tilde{\Delta}_{\beta,F} = \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2}$
- 顶点： λ ，在每个顶点处 Matsubara 频率和动量守恒
- 圈： $\frac{1}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$

²别忘了 ϕ^4 理论的相互作用是 $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\lambda \phi^4$ 。

当然, 上面这些讨论讨论的全部都是玻色场。对于有限温度下的费米场而言, Matsubara 频率和传播子需要更改一下。对于 Matsubara 频率而言, 其改变实际上来自于费米场的反对易性。为了看到这一点, 考虑费米场的 Hilbert 空间中一个算符的 trace:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{O}) &= \sum_n \langle n | \mathcal{O} | n \rangle = \sum_n \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi^* \langle n | \Psi \rangle \langle \Psi | \mathcal{O} | n \rangle = \sum_n \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi^* \langle -\Psi | \mathcal{O} | n \rangle \langle n | \Psi \rangle \\ &= \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi^* \langle -\Psi | \mathcal{O} | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

其中, 第一行最后一个等号来自于 Grassmann 变量的以下关系:

$$\int d\psi d\psi^* g(\psi) f(\psi^*) = \int d\psi d\psi^* f(-\psi^*) g(\psi) \quad (\text{A.17})$$

只要注意到由于 $\psi\psi = 0$, 于是 $f(\psi) = a + b\psi$, 那么这个关系将无比显然。从这个结果中就可以看出, 费米场在做虚时路径积分时, 周期性边界条件应该是 $\Psi(\beta) = -\Psi(0)$ 。这个周期性边界条件的变化也就当然会造成 Matsubara 频率的变化。从而费米场的 Matsubara 频率就是:

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta} \quad (\text{A.18})$$

另外, 由于费米场的自由作用量是 $\bar{\Psi}(i\partial - m)\Psi$, 于是其自由传播子也应该做类似的变化。根据和上面完全类似的过程, 就可以得出有限温度下费米场的传播子:

$$\tilde{S}_{\beta,F}(\omega_n, \mathbf{p}) = \frac{\gamma^0 \omega_n + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} \quad (\text{A.19})$$

其他的有限温 Feynman 规则就都和上面求出的结果相同。在得到有限温度场论的 Feynman 规则之后, 就可以用其计算出任何你喜欢的编虚时关联函数了, 例如配分函数就可以通过对所有“真空”图求和来求出。通过配分函数, 我们就能得到这样一个量子场的一切平衡态热力学性质。不过暂时不要急着高兴: 除去热力学可观测量之外, 一个有限温量子系统还有其他的可观测量。如何求出这些可观测量? 我们现在只会求出编虚时的关联函数, 这些关联函数和可观测量之间又有什么关系? 这些问题将在下一节被解答。

A.2 Linear Response and Transportation Properties

要回答这个问题, 我们就需要思考一下: 除去热力学可观测量之外, 有限温度场论中还有什么可观测量? 首先有限温度场论既然是统计力学和量子场论的结合, 其中的可观测量一定是宏观量, 否则过大的涨落将会破坏掉我们的一切结论。而热力学完全描述了宏观平衡态的性质, 于是除去热力学可观测量之外, 只有非平衡态的可观测量——例如输运性质需要我们描述。

如何定量描述这些输运性质呢? 考虑一个外界的扰动 $F'_i(x')$, 它对物理量 $X_j(x)$ 产生的影响总可以写为³

$$X_i(x) = \int d^4x \chi_{ij}(x, x') F'_j(x') + O(F'^2) \quad (\text{A.20})$$

³由于 X 表示的是扰动后的平均值和原来的平均值的差异, 于是在未扰动的理论中就有 $X = 0$ 。

这里的 $\chi_{ij}(x, x')$ 就被称为响应函数。响应函数是完全内禀的、系统自身的性质，它描述了系统的输运性质。由于扰动 F'_j 和物理量 X_i 都是可观测的，于是响应函数也可以在实验上被测量出来。事实上，我们通常见到的电阻率、热导率等其实都是响应函数。

从物理直观上来看，响应函数应该满足以下性质：

- 首先，因果律要求当 $(x - x')^2 > 0$ 时， $\chi_{ij}(x, x') = 0$ 。也就是类空间隔的两点之间不能有任何的因果联系。这个关系事实上仅仅确定了响应函数只在光锥内部有定义，并没有排除未来向过去相互作用的情形。于是因果律还应该要求 $\chi_{ij}(x, x')$ 仅仅当 x 在 x' 的前向光锥中时有定义。而区分前、后向光锥的依据就是 $t > t'$ 或 $t < t'$ 。从而因果律还要求：当 $x^0 < x'^0$ 时， $\chi_{ij}(x, x') = 0$ 。这两个要求共同将响应函数限制在了前向光锥内。
- 当扰动和扰动前的理论都具有 Poincare 对称性时，响应函数应该仅仅依赖于两个时空点的相对位置，也就是 $\chi_{ij}(x, x') = \chi_{ij}(x - x')$ 。此时如果我们将响应函数做一个 Fourier 变换，就会有：

$$\tilde{X}_i(p) = \tilde{\chi}_{ij}(p) \tilde{F}'_j(p) + O(F^2) \quad (\text{A.21})$$

到此为止，我们知道了响应函数能够描述系统的输运性质，也明白了，响应函数又要如何计算呢？这就要涉及到一个被称为**线性响应**的理论，其基本思路如下：首先在外界的扰动下，系统的作用量会有一个变化。由于 F' 很小，于是这个变化量中起主导作用的线性项总可以写为：

$$\delta S'[F', \phi] = \int d\tau \int d^3x F'(\tau, x) X'(\tau, x) \quad (\text{A.22})$$

其中 τ 是虚时间。为了能利用泛函导数的方式提出算符 X ，我们还会引入一个耦合到算符 X 的外源 F 。这样一来，总的扰动后的作用量就是：

$$S[F, F', \phi] = S_0[\phi] + \int d\tau \int d^3x (F(\tau, \mathbf{x}) X(\tau, \mathbf{x}) + F'(\tau, \mathbf{x}) X'(\tau, \mathbf{x})) \quad (\text{A.23})$$

如果我们认为体系在扰动后经历了一段足够长时间的热化，以至于扰动后的体系能够认为是处于如上作用量的正则系综中，那么扰动后的可观测量 $X(\tau, \mathbf{x})$ 的系综平均值就是：

$$\begin{aligned} \langle X(\tau, \mathbf{x}) \rangle &= - \frac{\delta \log Z[F, F']}{\delta F(\tau, \mathbf{x})} \Big|_{F=0} \\ &= - \int d\tau' \int d^3x' F'(\tau', \mathbf{x}') \left(\frac{\delta}{\delta F(\tau, \mathbf{x}) \delta F'(\tau', \mathbf{x}')} \log Z[F, F'] \right) \Big|_{F=F'=0} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

这个结果还可以进一步简化。由于 $\langle X \rangle$ 表示的是扰动后的平均值和原来的平均值的差异，于是在未扰动的理论中就有 $\langle X \rangle$ 。从而：

$$\chi(\tau, \mathbf{x}; \tau', \mathbf{x}') = - \frac{1}{Z[0, 0]} \left(\frac{\delta}{\delta F(\tau, \mathbf{x}) \delta F'(\tau', \mathbf{x}')} Z[F, F'] \right) \Big|_{F=F'=0} = - \langle T_\tau \{ X(\tau, \mathbf{x}) X'(\tau', \mathbf{x}') \} \rangle \quad (\text{A.25})$$

从而，虚时间下的响应函数可以通过一个编虚时的关联函数求出，而根据前面给出的 Matsubara 形式理论，这就可以通过 Feynman 图计算。顺便说一句，这个结果有时候也被称为**涨落-耗散定理**。如果 X' 和 X 是同一个算符，那么此时的虚时间响应函数就是：

$$\chi(\tau, \mathbf{x}; \tau', \mathbf{x}') = - \langle T_\tau \{ (X(\tau, \mathbf{x}) - \langle X(\tau, \mathbf{x}) \rangle)(X(\tau', \mathbf{x}') - \langle X(\tau', \mathbf{x}') \rangle) \} \rangle \quad (\text{A.26})$$

等式右边是和涨落相关的物理量，而等式左边体现了体系的耗散性质——例如电导率和电阻率息息相关，它描述了体系的能量在体系内部的耗散。从而这个关系也被称为涨落-耗散定理。

现在我们已经明白如何计算虚时间下的响应函数了。不过我们实际观测到的并不是虚时间下的响应函数 $\chi(\tau, \mathbf{x}; \tau', \mathbf{x}')$ ，而是物理的 $\chi(x, x')$ 。我们接下来要做的就利用一个类似 Lehmann-Kallen 谱表示的手段给出这两个响应函数之间的关系。

为了给出这个关系，我们要先明确物理的响应函数究竟是什么。首先，我们在 t 时刻观测到的物理量 X 就是 Heisenberg 绘景下物理量 X 的系综平均值，它的时间演化由加上扰动项 $\int d^3x F'(x) X'(x)$ 的 Hamiltonian 给出。而既然我们更加熟悉不加上扰动的物理量，那么就可以将这些东西切换到相互作用绘景：

$$X_F(x) = U_I^\dagger(t) X(x) U_I(t) = e^{iHt} e^{-iH_0 t} X(x) e^{iH_0 t} e^{-iHt} \quad (\text{A.27})$$

其中 X 是未扰动的 Heisenberg 绘景算符。而众所周知，相互作用绘景的演化算符可以被展开成 Dyson 级数：

$$U_I(t) = \mathcal{T} \left\{ \exp \left(-i \int_{-\infty}^t dt H_I(t) \right) \right\} \approx 1 - i \int_{-\infty}^t dt H_I(t) + \dots \quad (\text{A.28})$$

其中积分下限为负无穷的原因是我们给演化算符确定的边界条件是 $U_I(-\infty) = 1$ 。将这个结果代入算符 $X_F(t)$ 的表达式，发现：

$$X_F(x) = \left(1 + i \int_{-\infty}^t dt' H_I(t') \right) X(x) \left(1 - i \int_{-\infty}^t dt' H_I(t') \right) = X(x) - i \int_{-\infty}^t dt' [X(x), H_I(t')] \quad (\text{A.29})$$

由于“相互作用” Hamiltonian 是 $H_I(t') = \int d^3\mathbf{x} F'(\mathbf{x}, t') X'(\mathbf{x}, t')$ ，从而：

$$\langle X_F(x) \rangle = -i \int_{-\infty}^t d^4x' F'(x') \langle [X(x), X'(x')]_{\zeta_X} \rangle = -i \int d^4x F'(x') \theta(t - t') \langle [X(x), X'(x')]_{\zeta_X} \rangle \quad (\text{A.30})$$

其中 ζ_X 是一个指示 X 的统计性质的量：如果 X 是玻色的算符，那么这些定义中取对易子；如果 X 是费米的，那么将取反对易子。这就说明，物理的响应函数是⁴：

$$\chi^+(x, x') = -i\theta(x^0 - x'^0) \langle [X(x), X'(x')]_{\zeta_X} \rangle \quad (\text{A.31})$$

为了使因果律不违反，我们还需要检验一下那两个条件。首先微观因果性原理已经在算符层面上保证了第一个要求被满足，而第二个要求被这个 step function 保证。于是这个**推迟响应函数**确实是物理的响应函数。为了一些理论上的原因，我们还会定义一些非物理的实时间响应函数——**编时响应函数**和**超前响应函数**：

$$\chi^T(x, x') = -i \langle \mathcal{T} \{ X(x) X'(x') \} \rangle, \quad \chi^-(x, x') = i\theta(x'^0 - x^0) \langle [X(x), X'(x')]_{\zeta_X} \rangle \quad (\text{A.32})$$

明白了物理的响应函数是什么，接下来就要试图去将物理的推迟响应函数和前面求出的虚时响应函数联系起来。为此会使用一个类似于 Lehmann-Kallen 谱表示的手段来得到

⁴这里的 χ^+ 就是前面的 χ 。至于为什么要加这个上标 +，你马上就能看到原因。

响应函数的结构。对于推迟响应函数而言，有：

$$\begin{aligned}\chi^+(x - x') &= -i\theta(x^0 - x'^0)\langle [X(x), X'(x')]_{\zeta_X} \rangle \\ &= -\frac{i}{Z}\theta(x^0 - x'^0) [\text{Tr}(e^{-\beta H} X(x) X'(x')) - \zeta_X \text{Tr}(e^{-\beta H} X'(x') X(x))]\end{aligned}\quad (\text{A.33})$$

其中：

$$\begin{aligned}\text{Tr}(e^{-\beta H} X(x) X'(x')) &= \sum_{n,m} \langle n | e^{-\beta H} e^{itH} X(\mathbf{x}, 0) e^{-itH} | m \rangle \langle m | e^{it'H} X'(\mathbf{x}, 0) e^{-it'H} | n \rangle \\ &= \sum_{n,m} e^{i(t-t')(E_n - E_m)} e^{-\beta E_n} X_{nm}(\mathbf{x}) X'_{mn}(\mathbf{x}')\end{aligned}\quad (\text{A.34})$$

其中 $X_{nm}(\mathbf{x}) = \langle n | X(\mathbf{x}, 0) | m \rangle$ 。从而：

$$\chi^+(x - x') = -\frac{i}{Z}\theta(x^0 - x'^0) \sum_{n,m} e^{i(t-t')(E_n - E_m)} X_{nm}(\mathbf{x}) X'_{mn}(\mathbf{x}') [e^{-\beta E_n} - \zeta_X e^{-\beta E_m}] \quad (\text{A.35})$$

在对时间分量做 Fourier 变换之后，就有：

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}^+(\omega, \mathbf{x} - \mathbf{x}') &:= \int dt \chi^+(t, \mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{i\omega t - \varepsilon|t|} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{m,n} X_{nm}(\mathbf{x}) X'_{mn}(\mathbf{x}') \left[\frac{e^{-\beta E_n}}{\omega + E_n - E_m + i\varepsilon} - \frac{\zeta_X e^{-\beta E_m}}{\omega + E_n - E_m + i\varepsilon} \right]\end{aligned}\quad (\text{A.36})$$

其中，我们给频率加上了一个小虚部，其目的是为了保证 Fourier 变换的收敛性。当我们在第二章中讨论 Lehmann-Kallen 谱表示时，这被封装进了 step function 的 Fourier 变换。这个小虚部的物理意义也很明确：这相当于在无穷远的过去和无穷远的未来，扰动是被“绝热关闭”的。这个看上去类似 Lehmann-Kallen 谱表示的东西也被称为 **Lehmann 谱表示**。类似的，对于编时和超前响应函数而言，也有：

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}^+(\omega, \mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \frac{1}{Z} \sum_{m,n} X_{nm}(\mathbf{x}) X'_{mn}(\mathbf{x}') \left[\frac{e^{-\beta E_n}}{\omega + E_n - E_m + i\varepsilon} - \frac{\zeta_X e^{-\beta E_m}}{\omega + E_n - E_m - i\varepsilon} \right] \\ \tilde{\chi}^-(\omega, \mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \frac{1}{Z} \sum_{m,n} X_{nm}(\mathbf{x}) X'_{mn}(\mathbf{x}') \left[\frac{e^{-\beta E_n}}{\omega + E_n - E_m - i\varepsilon} - \frac{\zeta_X e^{-\beta E_m}}{\omega + E_n - E_m - i\varepsilon} \right]\end{aligned}\quad (\text{A.37})$$

看起来，这三个响应函数的差异仅仅在于极点位置上：实时间响应函数在实轴的上下都有极点⁵，而推迟、超前响应函数的极点仅在实轴的一侧有极点。事实上，这是一个很普遍的结论的特例：当函数只在 $t > 0$ 上有定义时，其 Fourier 变换在复平面的上半平面上是解析的。

对虚时间的响应函数，我们也可以类似的得到 Lehmann 谱表示。不过不同的是，在虚时间中， ω 的取值是从 0 到 β 的。从而虚时间 Fourier 变换后的响应函数也只能定义在分立的 Matsubara 频率上。利用类似的技巧，可以得到：

$$\tilde{\chi}^\tau(i\omega_n, \mathbf{x} - \mathbf{x}') := \int_0^\beta d\tau \chi^\tau(\tau, \mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{-i\omega_n \tau} = \frac{1}{Z} \sum_{m,n} \frac{X_{nm}(\mathbf{x}) X'_{mn}(\mathbf{x}')}{i\omega_n + E_n - E_m} (e^{-\beta E_n} - \zeta_X e^{-\beta E_m}) \quad (\text{A.38})$$

⁵当然，多粒子态也会给出割线。

有了这些准备之后，我们就能明白如何从虚时间响应函数中得到实时间响应函数了。在上面的 Matsubara 形式理论中，我们能够计算出的都是 $\tilde{\chi}^\tau(i\omega_n, \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 。而如果将之延拓到整个复平面上，得到的就将会是：

$$\tilde{\chi}(z, \mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{Z} \sum_{m,n} \frac{X_{nm}(\mathbf{x}) X'_{mn}(\mathbf{x}')}{z + E_n - E_m} (e^{-\beta E_n} - \zeta_X e^{-\beta E_m}) \quad (\text{A.39})$$

从这里就可以看出，如果 $\tilde{\chi}^\tau(i\omega_n, \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 的宗量延拓到复平面上，那么取 $z = \omega + i\varepsilon$ 时，得到的就将会是 $\tilde{\chi}^+(\omega, \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ ；当我们取 $z = \omega - i\varepsilon$ 时，得到的就是 $\tilde{\chi}^-(\omega, \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 。从而，如果想要计算出体系的响应函数，可以遵循以下的步骤：

如何计算物理可观测的响应函数

- 利用 Matsubara 形式理论计算出虚时响应函数 $\chi^\tau(\tau, \mathbf{x}; \tau', \mathbf{x}')$ 。
- 对虚时响应函数做 Fourier 变换，得到 $\tilde{\chi}^\tau(i\omega_n, \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 。将宗量 $i\omega_n$ 替换为 $\omega + i\varepsilon$ ，得到 $\tilde{\chi}^+(\omega_n, \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 。
- 对 $\tilde{\chi}^+(\omega_n, \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 做逆 Fourier 变换，最终得到物理可观测的推迟响应函数 $\chi^+(x, x')$ 。

这就完全回答了我们最开始提出的问题。到此为止，我们就明白了如何利用 Matsubara 形式理论计算出可观测量。不过 Matsubara 形式理论也有它显而易见的问题——它只能计算平衡态以及无穷接近平衡态的输运过程，而无法处理真正非平衡的物理问题。如果要考虑量子场的非平衡统计性质，就要求诸 **Schwinger-Keldysh 路径积分** 等其他形式理论了。出于篇幅原因，这里就将不涉及这些非平衡性质该如何处理了。

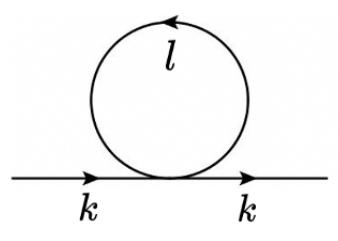
A.3 Mass Correction and Electroweak Phase Transition

接下来，我们考虑前两节给出的这个形式理论的一个应用——标量场的热质量修正。在本节后面会看到，这和宇宙初期的电弱相变有着很深刻的联系。

考虑一个含有对称性自发破缺的理论，其 Lagrangian 是：

$$\mathcal{L} = -(\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (\text{A.40})$$

根据我们在第五章中的结论，真空对应有效势的最小值。而有效势中的质量项的修正可以通过计算自能得出。在有限温度下，给出这个标量粒子的自能的领头阶贡献的图是：



根据前面讨论的 Matsubara 形式理论, 这给出:

$$\Pi(\omega_m, \mathbf{p}) = \frac{\lambda}{2\beta} \sum_n \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + l^2 + m^2} = \frac{\lambda}{2\beta} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2 \sum_n \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{n^2 + \left(\frac{\beta E_l}{2\pi}\right)^2} \quad (\text{A.41})$$

其中 $E_l := \sqrt{l^2 + m^2}$ 。首先计算级数部分, 由于:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + y^2} = \frac{\pi}{y} \coth \pi y \quad (\text{A.42})$$

从而,

$$\Pi(\omega_n, \mathbf{p}) = \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_l} \coth \left(\frac{\beta E_l}{2}\right) = \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_l} (1 + 2n_B(E_l)) \quad (\text{A.43})$$

其中, 我们利用了恒等式 $\coth(\beta x) = 1 + 2n_B(2x)$, 其中 $n_B(x) := 1/(e^{\beta x} - 1)$ 是 **Bose-Einstein 分布函数**。并且我们发现, 由于温度为 0 时的 Bose-Einstein 分布函数一定是无穷大, 于是零温下的自能就是前一部分。接下来的计算会表明, 这一部分积分中含有全部的发散, 于是我们不必为了有限温度的情形引入额外的抵消项。这其实是有限温度场论中的一个普遍性质: 有限温度不会带来新的紫外发散。

接下来考虑第二部分, 也就是有限温度的贡献。不幸的是, 这个积分是没有解析解的。我们只能借助一些近似来计算它。我们通常计算这个积分在高温下的领头阶贡献, 于是可以将被积函数用 βm 展开:

$$\begin{aligned} \Pi_T(\omega_n, \mathbf{p}) &= \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{n_B(E_l)}{E_l} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{l^2 dl}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2}} \frac{1}{e^{\beta\sqrt{l^2 + m^2}} - 1} \\ &= \frac{\lambda}{2\beta^2} \int \frac{l^2 dl}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2}} \frac{1}{e^{\beta\sqrt{l^2 + m^2}} - 1} = \frac{\lambda}{4\pi^2 \beta^2} \int \frac{l dl}{e^{\beta l} - 1} + O(\beta^2 m^2) \quad (\text{A.44}) \\ &= \frac{\lambda}{24\beta^2} + O(\beta^2 m^2) \end{aligned}$$

从而在量子作用量中, 质量项在有限温度下的修正就是:

$$m^2(T) = m^2(0) + \frac{\lambda T^2}{24} + O(m^2/T^2) \quad (\text{A.45})$$

注意到, 在高温下, 有限温度给出的质量修正项和原本场的质量无关。从而上面这一切讨论都可以照搬到 $m^2 < 0$ 的情形中去。这就给出了一个非常有意思的现象: 当 $m^2 < 0$ 时, 在零温场论中会出现对称性自发破缺, 使得场 ϕ 获得真空期望值 $v^2 = 6|m^2|/\lambda$ 。而随着温

度的升高，由于有限温度对质量的修正，这个真空气望值会逐渐变小，直到变为 0。而在这个临界温度 $T_{\text{crit}} = \sqrt{24|m^2|/\lambda}$ 以上，有效势中 ϕ 的系数将从负变正，从而真空场构型 $\phi \equiv 0$ 将成为稳定的，对称性自发破缺也就不再存在。

这件事情可以用来解释电弱对称性自发破缺是如何发生的：在宇宙诞生初期，宇宙的温度是非常高的。从而 Higgs 的有效势中二次项系数为正，此时真空 $\phi \equiv 0$ 是稳定的，不存在电弱对称性自发破缺。而随着宇宙的膨胀，宇宙迅速冷却，使得 Higgs 的有效势中二次项系数从正转负。这个过程导致 Higgs 场获得一个真空气待值，随之带来 $SU(2)_{\text{EW}} \times U(1)_{\text{Y}}$ 向 $U(1)_{\text{EM}}$ 的电弱破缺。这整个过程就被称为**电弱相变**⁶。

⁶由于 Higgs 在相变点附近的真空气望值连续，而二阶导数不连续，于是电弱相变也是一个二级相变。在一些新物理模型中，Composite Higgs 或 Higgs 势形状的改变会使得电弱相变成为一级相变。而电弱相变是一级还是二级的是可以观测到的。这给出了一个检验这些新物理模型的方式。

Appendix B

Topological Objects in Quantum Field Theory

B.1 Mathematical Prerequisites: Homotopy Groups

这个附录的目标是讨论量子场论中的拓扑场构型。在讨论这些东西之前，我们当然要问一个问题：什么是拓扑场构型，又为什么要讨论这些拓扑场构型¹？

首先，拓扑场构型是一些满足运动方程的经典场，从而也是作用量的鞍点。讨论拓扑场构型的第一个理由是：在量子场论中，由于我们的路径积分要对所有可能的给定的经典场构型求和，于是一些拓扑场构型（例如瞬子）也自然会包括在路径积分中。在平时使用的微扰论中，我们仅仅在真空场构型附近对路径积分做鞍点近似，忽略了其他鞍点对路径积分的贡献。而通过考虑这些拓扑场构型，我们可以将其他的鞍点的贡献考虑在内。虽然在 Euclidean 路径积分中，这些贡献会被 e^{-S} 指数压低，不过我们将会看到，它们有重要的物理后果。

另外一个理由是：在一些不同于真空的边界条件下，一些被称为孤子的拓扑场构型可能具有局域的能量，其行为类似一个粒子。并且由于拓扑上的原因，这些场构型是稳定的。于是在量子理论中，我们也相信这些东西对应一个理论中可能出现的、并非场的微扰激发的稳定粒子。于是为了考虑理论中可能出现的所有粒子，也需要将这些孤子考虑在内。更加有趣的是：在后面的讨论中会看到，孤子实际上可以在规范理论中给出磁单极子。如果我们在实验中找到了磁单极子，那么它很有可能是一个孤子。

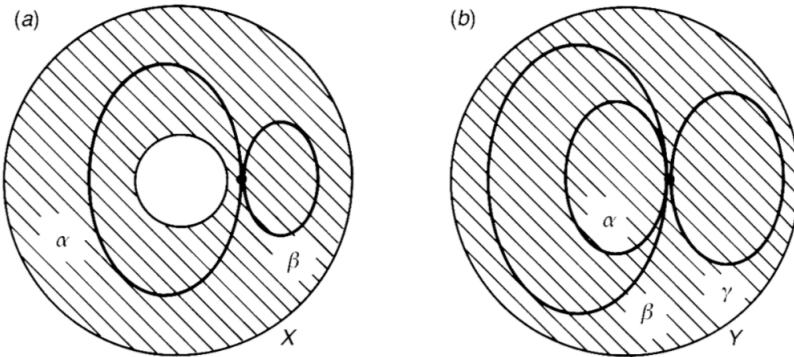
不过由于我们都是学物理的，大概对讨论这些拓扑场构型所必需的数学知识——代数拓扑不甚了解。于是在开始对这些拓扑场构型的讨论之前，最好对这些数学做一些简短的、不严格的、但是充满物理直观的介绍。特别地，这一节的目标之一就是讨论代数拓扑中的一个很基础的概念：同伦群。简略地说，它可以帮助我们分类球面 S^n 到任何一个拓扑空间 X 的映射。

闲话少说，让我们开始吧。在数学上，拓扑学的终极目标是通过找到一系列拓扑不变量来对拓扑空间进行分类。所谓拓扑不变量也就是同胚下的不变量：对于同胚的拓扑空间 X, Y 而言，如果 $C(X) = C(Y)$ ，那么 C 就是一个拓扑不变量。我们即将看到的同伦群也

¹这一章的主要参考是 M. Shifman 的书 *Advanced Topics in Quantum Field Theory* 以及 S. Weinberg 著名的三卷本量子场论中的第二卷。在有关数学基础的两节中，参考得比较多的书有 Nakahara 的 *Geometry, Topology and Physics*。其他不来自这些地方的讨论应该都在脚注中注明了来源。

就是这样的一个拓扑不变量，它关注的是拓扑空间中“洞”的数量：几何直观上来讲，同胚就是在不粘合、不打洞的条件下对拓扑空间进行各种“捏橡皮泥”操作，那么对于一个拓扑空间而言，与之同胚的各个拓扑空间就一定有相同的“洞数”。

为了讨论拓扑空间上的洞数，我们可以转而考虑拓扑空间上首尾相接的道路——圈。如图，考虑一个有洞的圆盘 X 和没有洞的圆盘 Y 。可以看出，在 Y 中的圈 α, β 可以连续变化到对方， X 中则不行。于是我们可以引入一个等价关系，称为同伦，它使 Y 中的这两个圈是同伦的， X 中则不是。那么对于一个拓扑空间，我们能从其中的圈能够如何划分为同伦下的等价类中得到这个拓扑空间的拓扑信息。



这个思路也可以被推广到更高的维度：圈可以被认为圆环 S^1 到这个拓扑空间的映射。如果我们考虑圈的推广，也就是 S^n 到拓扑空间 X 的映射，所有的圈构成集合 $\mathcal{F}(S^n, X)$ 。并且定义：如果两个圈可以连续变化到对方，那么称它们是同伦的。那么我们就可以从 $\mathcal{F}(S^n, X)$ 能如何划分为同伦类中得到 X 的拓扑信息。这就是同伦群的基本思路。

下面要做的就是将前面这些用自然语言表述的思路转化为数学语言。首先，我们需要严格定义什么是一个道路，什么又是一个圈：

Definition 1 (道路，圈). 对于拓扑空间 X ，如果连续映射 $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ 满足 $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1$ ，那么 α 就称为 X 中的一条起点为 x_0 ，终点为 x_1 的道路。如果一个道路的起点和终点相同，均为 x_0 ，那么称这个道路为基点为 x_0 的圈。由于 $[0, 1]$ 首尾粘起来就成了 S^1 ，于是圈也等价于映射 $\alpha : S^1 \rightarrow X$ 。

为了描述圈的连续变化，可以用一个函数来描述这个连续变化的过程。这就是同伦的定义：

Definition 2 (同伦). 对于拓扑空间 X 和其中两个基点为 x_0 的圈 $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ ，如果存在连续映射 $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ ，使得 $F(0, t) = F(1, t) = x_0, F(s, 0) = \alpha(s), F(s, 1) = \beta(s)$ ，那么就称 F 为这两个圈 α, β 间的同伦。并称 α, β 是同伦的，记为 $\alpha \sim \beta$ 。

这具有十分清晰的物理意义： $F(s, t)$ 的变量 s 意味着圈上的位置，而变量 t 就模拟了两个圈连续变化的过程。为了将圈划分为同伦下的等价类，我们还需要先证明同伦是一个等价关系：

Proposition 1. 同伦是一个等价关系。

Proof. 等价关系意味着这个关系满足自反性 ($\alpha \sim \alpha$)，对称性 ($\alpha \sim \beta$ 蕴含 $\beta \sim \alpha$) 和传递性 ($\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$ 蕴含 $\alpha \sim \gamma$)。接下来我们就对这三个性质做分别的证明：

- 自反性：令 $F(s, t) := \alpha(s)$ ，于是对于任何 X 上的开集 U ， U 在映射 F 下的逆像就是 $F^{-1}(U) = \alpha^{-1}(U) \times [0, 1]$ 。由于 α 是连续的，于是这是一个开集。从而 F 满足一切开集的逆像都是开集，这也就意味着 F 是一个连续映射，从而是同伦。于是 $\alpha \sim \alpha$ 。
- 对称性：如果 $\alpha \sim \beta$ ，同伦映射是 $F(s, t)$ ，那么显然 $F(s, 1-t)$ 也是连续映射，从而 $\beta \sim \alpha$ 。
- 传递性：如果 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$ ，并且这两个同伦映射分别为 F 和 G ，那么考虑映射：

$$H(s, t) := \begin{cases} F(s, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s, 2t-1), & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

容易证明 H 连续。从而 H 是同伦。

这就证明了等价关系所满足的全部三个性质，从而同伦是一个等价关系。 \square

对于任何一个等价关系而言，我们可以定义其下的等价类。对于同伦而言，这就是²：

Definition 3 (同伦类). 对于一个基点为 x_0 的圈 α ，定义其同伦类为 $[\alpha] := \{\beta | \beta \sim \alpha\}$ 。记基点为 x_0 的所有同伦类构成的集合为 $\pi_1(x_0, X)$ 。

我们希望给同伦类一个代数结构，从而可以利用代数手段来描写同伦类。为此我们可以定义道路的乘法和道路的逆，并且将其拓展为同伦类的乘法和同伦类的逆，这样 $\pi_1(x_0, X)$ 就可以被附加上群结构。一个自然的对道路的乘法和道路的逆的定义是：将两个道路乘起来就是将两条道路首尾相连，道路的逆就是沿反向走过这条道路：

Definition 4 (道路的乘法、道路的逆). 对于两个拓扑空间 X 上的道路 $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ 而言，如果 $\alpha(1) = \beta(0)$ ，那么可以定义其乘法：

$$(\alpha * \beta)(s) := \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \leq s < \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

并且对于一个 X 上的道路 $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ ，其逆可以被定义为：

$$\alpha^{-1}(s) := \alpha(1-s) \quad (\text{B.3})$$

为了使集合成为群，其中的任意两个元素之间都要能定义乘法。所有基点为 x_0 圈构成的集合就满足这个要求。但是这个集合实际上也无法成为群：虽然道路 α^{-1} 的意义是 α 的反向，但是在乘法运算下， $\alpha * \alpha^{-1}$ 更像是“先走过道路 α ，然后再原路返回”，这和“原地不动”还是不一样的。于是圈构成的集合并没有一个群结构。不过鉴于“原地不动”可以连续变形为这样的一条来回走动的道路，于是 $\alpha * \alpha^{-1}$ 和“原地不动”是同伦的。于是我们可以定义一个同伦类的乘法，使得同伦类的集合称为一个群：

Definition 5 (同伦类的乘法). 对于拓扑空间 X 上的同伦类 $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(x_0, X)$ ，定义其乘法为 $[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$

我们首先需要说明这个乘法是良定义的：由于上面这个定义要选取同伦类中的一个元素，我们必须说明对于同伦类中的任意元素而言，定义出的 $[\alpha] * [\beta]$ 都是相同的同伦类。

²这里角标 1 的意义是我们考虑一维的圈。对于高维的圈，我们也有类似的记号。

Proposition 2. 如果 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 那么 $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$

Proof. 令 α, α' 间的同伦为 F , β, β' 间的同伦为 G 。那么我们定义:

$$H(s, t) := \begin{cases} F(2s, t), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t), & \frac{1}{2} \leq s < 1 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

容易验证这是 $\alpha * \beta$ 和 $\alpha' * \beta'$ 之间的同伦。这就完成了这个证明。 \square

在这个乘法下, 可以验证 $\pi_1(x_0, X)$ 的确成为了一个群:

Proposition 3. $(\pi_1(x_0, X), *)$ 是一个群

Proof. 我们需要验证群所满足的四条要求: 对乘法封闭, 结合律, 有单位元, 有逆元。

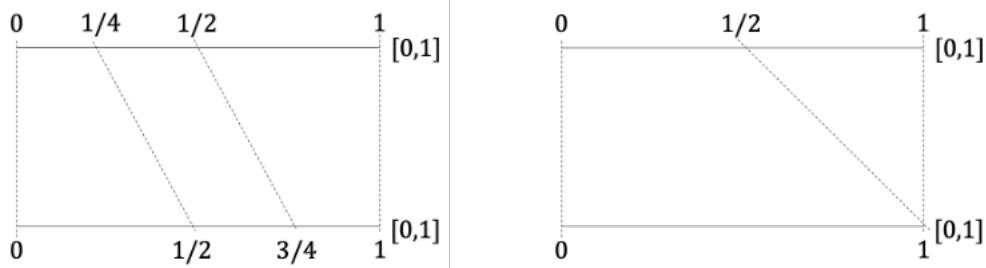
- 对乘法封闭: 由我们的定义, 显然。
- 结合律, 也就是 $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$ 。由道路乘法的定义, 有:

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(s) = \begin{cases} \alpha(4s), s \in [0, \frac{1}{4}] \\ \beta(4s - 1), s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2s - 1), s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \quad (\alpha * (\beta * \gamma))(s) = \begin{cases} \alpha(2s), s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(4s - 2), s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma(4s - 3), s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

我们定义一个 $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 的映射 f 来描述这两个区间的变化过程:

$$f(s, t) = \begin{cases} (1+t)s, & s \in [0, \frac{1}{4}] \\ s + \frac{1}{4}t, & s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ (1 - \frac{1}{2}t)s + \frac{1}{2}t, & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

这个过程可以简单的表示为左下图:



这显然是个连续映射, 并且由于 $F(s, 0) = ((\alpha * \beta) * \gamma)(s), F(s, 1) = (\alpha * (\beta * \gamma))(s)$, 于是 F 是同伦。这也就意味着 $\alpha * (\beta * \gamma) \sim (\alpha * \beta) * \gamma$, 从而 $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$ 。

- 单位元: 考虑恒等映射 $c_{x_0} : [0, 1] \rightarrow X, c_{x_0}(s) := x_0$ 。通过右上图的构造, 容易验证 $\alpha * c_{x_0}$ 和 α 同伦, 于是 $[\alpha] = [\alpha] * [c_{x_0}]$, $[c_{x_0}]$ 就是这个群的单位元。
- 逆元: 我们需要证明 $[\alpha] * [\alpha^{-1}] = [c_{x_0}]$, 为此需要证明 $\alpha * \alpha^{-1} \sim c_{x_0}$ 。构造以下的同伦:

$$F(s, t) := \begin{cases} \alpha(2ts), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \alpha(2t(1-s)), & s \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

容易验证这是 $\alpha * \alpha^{-1}$ 和 c_{x_0} 间的同伦。这就证明了 $[\alpha] * [\alpha^{-1}] = [c_{x_0}]$ 。 \square

我们称群 $(\pi_1(x_0, X), *)$ 为 X 在 x_0 的基本群或第一同伦群。仅有这样的基本群还不够好：基本群理应反应整个拓扑空间的拓扑性质，而这里的基本群却看似是和其上一个特别的点有关的。好在如果一个道路连通的拓扑空间，任意两点都可以用一条道路连接。利用这个性质，我们可以将空间上任意两点的基本群联系起来：

Proposition 4. 对于道路联通的拓扑空间 X 中的任意两点 x, y , $\pi_1(x, X) \cong \pi_1(y, X)$ 。

Proof. 由于 X 是道路联通的，于是 x 和 y 之间一定存在一个道路 $\eta : [0, 1] \rightarrow X$, 使得 $\eta(0) = x, \eta(1) = y$ 。于是对于任意的 $\alpha \in \pi_1(x, X)$, 我们可以构造一个基点在 y 的圈 $\eta * \alpha * \eta^{-1}$ 。于是对于同伦类，可以定以一个映射 $P_\eta : \pi_1(x, X) \rightarrow \pi_1(y, X), [\alpha] \mapsto [\eta * \alpha * \eta^{-1}]$ 。

为了证明 $\pi_1(x, X) \cong \pi_1(y, X)$, 接下来我们就要证明这样构造出的 $P_\eta : \pi_1(x, X) \rightarrow \pi_1(y, X)$ 是群同构。首先证明 P_η 是群同态：

$$P_\eta([\alpha] * [\beta]) = [\eta * \alpha * \beta * \eta^{-1}] = [\eta * \alpha * \eta^{-1}] * [\eta * \beta * \eta^{-1}] = P_\eta([\alpha]) * P_\eta([\beta]) \quad (\text{B.8})$$

然后证明 P_η 是双射，也就是证明它可逆。只要构造一个 $Q_\eta : \pi_1(y, X) \rightarrow \pi_1(x, X), [\beta] \mapsto [\eta^{-1} * \beta * \eta]$, 容易证明 $P_\eta \circ Q_\eta, Q_\eta \circ P_\eta$ 都是对应基本群上的单位映射，从而 Q_η 就是 P_η 的逆， P_η 是双射，进而是群同构。 \square

这告诉我们，对于道路连通的拓扑空间，我们不需要给出我们以什么点为基点定义基本群。其基本群可以记为 $\pi_1(X)$ 。还记得我们在数学上定义同伦群的目标是为了寻找拓扑空间在同胚下的不变量。事实上，基本群也的确是一个拓扑不变量。不过由于我们物理中使用同伦群时基本都是利用它分类不同的圈 $S^1 \rightarrow X$, 和这个本来的目的鲜少有关联，于是我们将不会给出下面这些定理的完整证明。

基本群不但是拓扑不变量，还在一个更弱的关系下不变。为了看到这一点，我们可以将同伦的定义拓展到一般的映射上：

Definition 6 (映射的同伦). 对拓扑空间 X, Y 以及其间的映射 $f, g : X \rightarrow Y$, 如果存在一个连续映射 $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, 使得 $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$, 那么称 f 和 g 是同伦的，记做 $f \sim g$ 。 F 称为 f 和 g 间的同伦映射。

有了映射之间的同伦，我们就可以稍稍放松一下同胚的条件：

Definition 7 (同伦等价). 对拓扑空间 X, Y , 如果其中存在两个映射 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$, 使得 $g \circ f \sim id_X, f \circ g \sim id_Y$, 那么称 f 是 X 和 Y 间的同伦等价。

容易验证同伦等价是一个等价关系。并且可以看出，同伦等价是一个比同胚更弱的关系，同胚的拓扑空间必然同伦等价，反之则不一定。数学上可以证明：同伦等价的拓扑空间上的基本群是同构的：

Theorem 1. 如果拓扑空间 X, Y 是同伦等价的，同伦等价映射为 $f : X \rightarrow Y$, 那么 $\pi_1(x, X) \cong \pi_1(f(x), Y)$ 。也就是说，基本群是同伦等价下的不变量。

由于同胚蕴含同伦等价，于是基本群是同伦不变量蕴含基本群是拓扑不变量。从而我们可以利用基本群来分类拓扑空间。但与此同时，用基本群无法完全分类同胚的拓扑空间，而是只能通过基本群不同给出两个拓扑空间不同胚。不过正如我们前面所说：在物理中，同伦群的用处并不是分类空间，而是分类映射或场构型。从而这个定理将不会在物理上有太多的应用。

有了基本群的概念，我们已经知道如何将 $S^1 \rightarrow X$ 的映射分类为同伦类了。在此之外，也可以将这个方法推广到更高维度的圈中，得到高阶同伦群：

Definition 8 (n-圈, n-圈的同伦). 对于拓扑空间 X , 连续映射 $\alpha : S^n \rightarrow X$ 被称为一个 **n-圈**。对于两个 n -圈 $\alpha, \beta : S^n \rightarrow X$, 如果存在连续函数 $F : S^n \times [0, 1] \rightarrow X$, $F(s, 0) = \alpha(s)$, $F(s, 1) = \beta(s)$, 那么称 α, β 同伦。

和上面类似, 也可以证明 n -圈的同伦是一个等价关系, 于是也可以定义 n -圈的同伦类, 并可以记 X 中所有以 x_0 为基点的 n -圈同伦类构成集合 $\pi_n(X, x_0)$ 。为了给 n -圈的同伦类一个群结构, 我们考虑 n -圈的乘法和逆。

在 1 维中, 利用道路的首尾相连定义道路的乘法是自然的。而推广到 n 维时, 我们也需要一个将两个区域粘合的方式。由于将超立方体 $[0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ 边界上每一点都认同为同一个点后, 得到的拓扑空间 $I/\partial I$ 就同胚于 S^n , 于是一个基点为 x_0 的 n -圈也可以认为是一个超立方体到 X 的映射, 并且超立方体边界上的点都被映射到 x_0 。从而为了粘合两个 n -圈, 可以将两个超立方体的各一个面粘合起来:

Definition 9 (n-圈, n-圈的同伦). 对于两个 n -圈 $\alpha, \beta : I \rightarrow X$, 定义 $\alpha * \beta : I \rightarrow X$ 为:

$$(\alpha * \beta)(s_1, \dots, s_n) := \begin{cases} \alpha(2s_1, s_2, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 < 1/2 \\ \beta(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & 1/2 \leq s_1 \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

同样的, 我们定义 $\alpha^{-1}(s_1, \dots, s_n) := \alpha(1 - s_1, \dots, s_n)$ 为 n -圈的逆。对于 n -圈同伦类而言, 其乘法和逆也被定义为 $[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$, $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ 。

有了这些定义后, 利用类似的证明过程, 也可以证明 $(\pi_n(x_0, X), *)$ 构成一个群, 被称为**第 n 同伦群**。上面讨论的基本群的性质也可以被搬到高阶同伦群中: $\pi_n(x_0, X)$ 是同伦不变量, 并且如果 X 是道路联通的, 那么 $\pi_n(x_0, X)$ 和基点无关。另外, 我们将不加证明地给出以下性质:

Theorem 2. 对于两个道路联通的拓扑空间 X, Y , 其直积空间的第 n 同伦群满足:

$$\pi_n(X \times Y) = \pi_n(X) \times \pi_n(Y) \quad (\text{B.10})$$

直到现在, 我们知道了可以利用第 n 同伦群 $\pi_n(X)$ 来分类 $S^n \rightarrow X$ 的映射。不过在实际应用中, 仅仅知道“能够利用 $\pi_n(X)$ 来分类映射”是不够的, 还需要求出 $\pi_n(X)$ 究竟是什么样的群。不幸的是, 这并非一个简单的工作。在数学上, 计算同伦群时无法避免地会使用复杂的代数拓扑工具, 于是在这里无法给出计算同伦群的普遍方法。不过对于物理中常用的同伦群, 数学家们早已帮我们算好了它们是什么, 使用时查表即可。以下就是常用的同伦群表³:

球面的同伦群

³这个同伦群表一部分来自于 Weinberg 第二卷 23 章的附录, 其最初的参考文献是 A. Actor, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 461 (1979); *Encyclopedic Dictionary of Mathematics* (MIT Press, Cambridge, 1980): Appendix A; 关于绕数和拓扑数的部分来自于北京大学陈斌老师的讲义。

$$\begin{aligned}
\pi_n(S^m) &= 0 \text{ for } n < m \\
\pi_n(S^n) &= \mathbb{Z} \\
\pi_{n+1}(S^n) &= \mathbb{Z}_2 \text{ except } \pi_2(S^1) = 0; \pi_3(S^2) = \mathbb{Z} \\
\pi_{n+2}(S^n) &= \mathbb{Z}_2 \text{ except } \pi_3(S^1) = 0 \\
\pi_{n+3}(S^n) &= \mathbb{Z}_{24} \text{ except } \pi_4(S_1) = 0; \pi_5(S^2) = \mathbb{Z}_2; \pi_6(S^3) = \mathbb{Z}_{12}; \pi_7(S^4) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12} \\
\pi_n(S^1) &= 0 \text{ except } \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

特别地, 由于 $\pi_n(S_n) = \mathbb{Z}$, 于是每个 $S^n \rightarrow S^n$ 的映射都能用一个整数来分类。这个整数通常被称为 **绕数**。由于 S^n 可以被嵌入到 \mathbb{R}^{n+1} 中, 于是 S^n 上一点可以用满足 $x^a x^a = 1$ 的 $x^a \in \mathbb{R}^{n+1}$ 来描述。从而映射 $n : S_M^n \rightarrow S_N^n$ 可以被描述为 $x^\alpha \mapsto n^\alpha$, 其中 x^α, n^α 分别是 S_M^n, S_N^n 上的坐标。

Theorem 3. 映射 $n^a(x^\alpha) : S_M^n \rightarrow S_N^n$ 的绕数可以被写为:

$$Q = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\pi^{n+1/2} n!} \int_{S_M^n} \epsilon_{a_1 \dots a_{n+1}} n^{a_1}(x) dn^{a_2}(x) \wedge dn^{a_3}(x) \wedge \dots \wedge dn^{a_{n+1}}(x) \in \mathbb{Z} \tag{B.12}$$

其中 n^a 满足 $n^a n^a = 1$ 。

李群的同伦群

$$\begin{aligned}
\pi_1(G) &= \begin{cases} \mathbb{Z} & G = U(1) \\ \mathbb{Z}_2 & G = SO(n) (n \geq 3) \\ 0 & \text{other simple compact connected Lie groups} \end{cases} \\
\pi_2(G) &= 0 \quad G \text{ any compact connected Lie group} \\
\pi_3(G) &= \mathbb{Z} \quad G \text{ any compact connected simple Lie group} \\
\pi_4(G) &= \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & G = SO(4), Spin(4) \\ \mathbb{Z}_2 & G = USp(2n), SU(2), SO(3), Spin(5), SO(5) \\ 0 & G = SU(n) (n \geq 3), SO(n) (n \geq 6), G_2, F_4, E_n \end{cases}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

在此之外, **Bott 周期定理** 给出了以下的同伦群:

$$\begin{aligned}
\pi_k(USp(2n)) &= \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 3, 7 \pmod{8} \\ \mathbb{Z}_2 & k = 4, 5 \pmod{8} \\ 0 & k = 0, 1, 2, 6 \pmod{8} \end{cases}, \quad \text{For } n \geq (k-1)/4, k \geq 2 \\
\pi_k(SO(n)) &= \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 3, 7 \pmod{8} \\ \mathbb{Z}_2 & k = 0, 1 \pmod{8} \\ 0 & k = 2, 4, 5, 6 \pmod{8} \end{cases}, \quad \text{For } n \geq k+2, k \geq 2 \\
\pi_k(SU(n)) &= \begin{cases} \mathbb{Z} & k \text{ odd} \\ 0 & k \text{ even} \end{cases}, \quad \text{For } n \geq (k+1)/2, k \geq 2
\end{aligned} \tag{B.14}$$

从这个表中可以看到：对于李群 $SU(n)$ 而言，由于 $\pi_{2r+1}(SU(n)) = \mathbb{Z}$ ，于是映射 $g(x) : S^{2r+1} \rightarrow SU(n)$ 也可以被一个拓扑数来描述：

Theorem 4. 映射 $g(x) : S^{2r+1} \rightarrow SU(n)$ 的拓扑数是：

$$Q = \lambda \int_{S^{2r+1}} \text{Tr}(g^{-1}dg)^{2r+1} \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.15})$$

其中 λ 是一个归一化常数，使得 Q 是一个整数。

另外，由于任何紧致、联通、单纯李群的第三同伦群都是整数，映射 $g(x) : S^3 \rightarrow G$ 也可以被一个拓扑数描述：

Theorem 5. 映射 $g(x) : S^3 \rightarrow G$ 的拓扑数是：

$$Q = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{Tr}(g^{-1}dg)^3 \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.16})$$

你一定发现了：这两个情形下的拓扑数 Q 具有类似的形式。事实上，这在数学上被称为 **Maurer-Cartan 积分不变量**。在此之外，对于李群的同伦群，还有以下的结论：

Theorem 6. 对于任意的李群 G 及其李子群 $H \subset G$ ，陪集空间 G/H 的第二同伦群满足：

$$\pi_2(G/H) = \ker(\pi_1(H) \mapsto \pi_1(G)) \quad (\text{B.17})$$

也就是说， $\pi_2(G/H)$ 是当 H 被嵌入 G 时， $\pi_1(H)$ 的被映射到 $\pi_1(G)$ 中单位元的子群。如果 $\pi_1(G) = 0$ ，那么由于整个 $\pi_1(H)$ 都被映射到 $\pi_1(G) = 0$ 的单位元上，就一定有 $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$ 。

我们会在后面的讨论中多次用到同伦群相关的内容以及这里给出的绕数、拓扑数的表达式。

B.2 Solitons in Scalar Field Theory

有了这些数学基础之后，我们就可以正式讨论量子场论中的拓扑场构型了。首先要讨论的一种场构型称为**孤子**。简单地说，它们是一些满足经典场方程的经典场，从而也是路径积分的鞍点。孤子的特殊之处在于，它具有局域的、有限的能量，于是它看起来很像一个粒子。并且它们具有拓扑非平庸的边界条件，于是拓扑保证了它们无法连续变换到真空对应的场构型，从而它们是稳定的。由于它具有这些性质，于是我们相信在量子场论中它们也对应理论中的稳定的粒子态，来自于场的集体行为。于是为了考虑理论中可能出现的所有粒子，也需要将这些孤子考虑在内。

B.2.1 The Kink Solution

阅读上面这段话时，你可能会疑惑：什么是一个“拓扑非平庸的边界条件”？于是我们接下来就以标量场论为例对这句话进行更多的讨论。对于 d 维时空中的标量场论而言，其 Hamiltonian 可以写为：

$$H = \int d^{d-1}x \left(\frac{1}{2} \dot{\phi} \dot{\phi} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + V(\phi) \right) \quad (\text{B.18})$$

其中 $V(\phi)$ 的最低值被选择为 0。正如上面我们所说，孤子是具有有限能量的经典场构型。而对于一个场构型，如果 $V(\phi)$ 在 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ 时不为 0，那么这个场构型的能量一定是无穷大的。并且我们知道， $V(\phi)$ 的最小值对应着真空的场构型。于是为了使这个场构型能量有限， $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ 时的场一定趋于常数，并且此时的 $\phi(\mathbf{x})$ 一定趋于某个真空对应的场取值。

如果体系中所有的真空场取值构成一个真空流形 \mathcal{V} ，那么具有有限能量的经典场构型就一定满足 $\phi(\mathbf{x} \rightarrow \infty) \in \mathcal{V}$ 。这也就给出一个从 $d-1$ 维空间的所有无穷远点到真空流形 \mathcal{V} 的映射。而 $d-1$ 维空间的所有无穷远点构成一个流形，它具有球面 S^{d-2} 的拓扑，从而这些场构型的边界条件就给出一个映射 $S^{d-2} \rightarrow \mathcal{V}$ 。

根据这个附录第一节的讨论，这样的映射可以用流形 \mathcal{V} 的第 $d-2$ 同伦群 $\pi_{d-2}(\mathcal{V})$ 来刻画。对于体系任意真空对应的场构型 $\phi(\mathbf{x}) \equiv v \in \mathcal{V}$ 而言，它都在同伦群 $\pi_{d-2}(\mathcal{V})$ 的单位元，也就是平凡同伦类中。根据同伦类的定义，对于平凡同伦类中的每个场构型，我们总可以将它的边界条件连续变形到某个真空对应的边界条件，从而如果放任它自行演化，它将会衰变到某个真空。而对于属于 $\pi_{d-2}(\mathcal{V})$ 中非平凡元素的场构型而言，由于它的边界条件不能连续过渡到真空，于是拓扑告诉我们：至少在经典上，它不能自行衰变到某个真空。于是这些拓扑非平凡的、能量有限的场构型就对应我们讨论的孤子。

由于一个单点构成的流形不可能具有任何非平凡的同伦群，于是存在孤子的理论中一定存在多个简并的真空，于是理论中一定存在对称性自发破缺。正如我们在场论中看到的，最简单的具有对称性自发破缺的理论当属 ϕ^4 理论，于是下面我们就来看看 ϕ^4 理论中的孤子究竟是什么样子的。

在对称性自发破缺的 ϕ^4 理论中，势 $V(\phi)$ 可以写为：

$$V(\phi) = \frac{1}{2} g^2 (\phi^2 - v^2)^2 \quad (\text{B.19})$$

由于我们现在考虑的是这个理论的经典解，于是我们不必考虑量子效应对势的修正。理论的真空流形就是两个单点 $\mathbb{Z}_2 = \{\pm v\}$ ⁴。不幸的是，这个东西的任何正整数阶同伦群都是平凡的，于是在 $d \geq 3$ 时这个理论中都没有孤子。不过在 1+1 维的场论中，由于一维空间的边界并不是 S^n 而是两个单点，于是边界条件可以用 $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ 来刻画。由于两个真空对应的边界映射分别是 $\pm \infty \rightarrow v, \pm \infty \rightarrow -v$ ，从而边界映射 $\pm \infty \rightarrow \pm v, \pm \infty \rightarrow \mp v$ 满足我们的要求：无法连续变换到任何一个真空的边界，故这个边界下可能存在孤子。

先考虑 $\pm \infty \rightarrow \pm v$ ，试图求出其下的孤子解。由于孤子满足经典场方程，于是：

$$\ddot{\phi} - \phi'' + \partial_\phi V = 0 \quad (\text{B.20})$$

并且由于孤子是稳定解，不含时，于是 $\ddot{\phi} = 0$ ，上面这个方程成为了 $-\phi'' + \partial_\phi V = 0$ 。为了求解这个偏微分方程，可以考虑其初积分：

$$\frac{1}{2} (\phi')^2 - V(\phi) = C \quad (\text{B.21})$$

⁴这是一个 0 维流形。

从中可以解出：

$$x - x_0 = \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}} \quad (B.22)$$

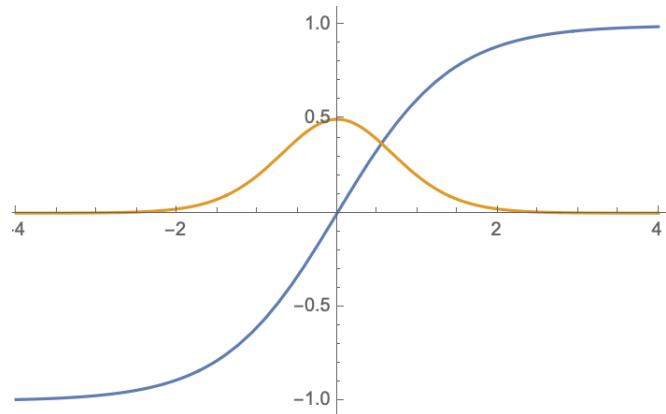
代入边界条件 $\phi(\pm\infty) = \pm v$ ，就得到了以下的 **Kink** 解：

$$\phi_k(x) = v \tanh \left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right) \quad (B.23)$$

其中 $\mu = gv$ 。同样，如果我们选择边界条件为 $\pm\infty \rightarrow \mp\infty$ ，那么也会得到**反 Kink** 解，其场构型即为上述场构型的相反数。将 Kink 解代入能量密度的表达式中，就能得到其能量分布为：

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\phi'_k)^2 + V(\phi_k) = \frac{v^2}{2} \cosh^{-4} \left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right) \quad (B.24)$$

将这个解和能量分布画在一张图上，就可以得到以下的图像：



其中横轴是 μx ，蓝线代表 Kink 解，而黄线代表 Kink 的能量密度。从图中可以看出，Kink 解的能量局限在尺度约为 $1/\mu$ 的区域内，分布类似一个粒子的波包。如果将 Kink 解的能量密度对全空间积分，就会发现孤子的总能量是 $M = 2\sqrt{2}\mu^3/3g^2$ ，这也就对应一个孤子的质量。如果我们将孤子解做一个 boost，就会得到一个“运动的孤子”，并且此时的孤子也会具有一个类似粒子的质壳关系 $E^2 = M^2 + \mathbf{p}^2$ 。这符合我们对孤子的一切期待——拓扑保护的稳定性⁵、能量局域且有限、行为类似一个粒子。并且由于一个固定尺度的孤子能量反比于耦合常数的平方，从而孤子是一个完全非微扰的效应。正是因为它的非微扰本质，于是我们并不会在通常的微扰量子场论中计算孤子相关的效应，例如两个孤子的散射截面。直到如今，我们唯一能够做的就是半经典地描述这些东西——我们不知道它在量子场论中对应什么态，但是可以从这个经典的场构型出发讨论它的量子效应。

当我们说到孤子的量子效应的时候，我们实际上能够讨论的有三件事情：第一件事情是量子效应对孤子自身的修正：由于量子场论中的经典外场满足的方程也会被量子修正所修改，于是孤子的参数（例如孤子的质量）也会由于量子修正而变化。为了计算这个修正，我们可以将孤子视作这个量子理论的背景场，考虑这个场构型附近的量子激发对真空能量的影响。

⁵ 并且如果我们用变分法分析体系的总能量，也会发现 Kink 是这个边界条件下能量的最低态，从而经典上它是稳定的。

第二件事情就是孤子作为一个粒子的量子性质：对于 Kink 而言，它存在一个坐标自由度 x_0 ，从而所有 x_0 的集合就是孤子的“参数空间”。我们在后面会看到，这个参数空间有一个其他的名字——模空间，并且这个坐标自由度被称为零模。事实上，如果我们想要半经典地描述一个孤子的运动，我们能做的就是对模空间中的这些参数做量子化，得到孤子的单粒子量子力学性质。

第三件事情就是讨论孤子背景下的物质场。如果我们在上面这个标量理论中加入费米子，并且在 Kink 解的背景场下考虑费米子的量子激发，那么这些量子激发将会具有十分反直觉的性质，例如荷分数化。在后面的讨论中，我们将逐个讨论这三件事情。

B.2.2 Semi-Classical Quantization of Kink

首先讨论第一件事情：量子效应对孤子质量的修正。为了计算这个质量修正，我们可以将孤子视作这个量子理论的背景场，考虑这个场构型附近的量子激发对真空能量的影响。为此，我们可以将这个理论的作用量在孤子解附近展开。由于孤子解是场方程的经典解，于是这个展开中的一次项自然为 0。如果我们只需要计算单圈阶的质量修正，那么也就只需要将其展开到二次项⁶。

$$\begin{aligned} S[\phi_k + \chi] &= S[\phi_k] + \int d^2x d^2y \chi(x) \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right)_{\phi=\phi_k} \chi(y) \\ &= S[\phi_k] + \int dt dx \left[\frac{1}{2} (\dot{\chi}(t, x))^2 - \frac{1}{2} \chi(t, x) L_2 \chi(t, x) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

其中：

$$L_2 := -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 \left[1 - \frac{3}{2 \cosh \frac{1}{2} mx} \right] \quad (\text{B.26})$$

这个作用量给出了 χ 的场方程 $\ddot{\chi} = L_2 \chi$ ，它也作为一个算符方程在量子理论中被满足。由于算符 L_2 在 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R})$ 上是一个 Hermitian 算符，于是这个算符一定具有以下的本征函数和本征值：

$$L_2 \chi_n(x) = \omega_n^2 \chi_n(x) \quad (\text{B.27})$$

并且作为 Hermitian 算符的本征函数，这些 $\chi_n(x)$ 满足以下的正交完备性关系：

$$\int dx \chi_n^*(x) \chi_m(x) = \delta_{mn}, \quad \sum_n \chi_n^*(x) \chi_n(y) = \delta(x - y) \quad (\text{B.28})$$

既然 χ 作为算符满足 $\ddot{\chi} = L_2 \chi$ ，那么根据分离变量法，它一定有以下的模式展开：

$$\chi(x) = \sum_n a_n(t) \chi_n(x) \quad (\text{B.29})$$

利用这个展开式和前面的正交完备性关系，我们能将 Hamiltonian 改写为：

$$H = M + \int dx \left[\frac{1}{2} (\dot{\chi}(t, x))^2 + \frac{1}{2} \chi(t, x) L_2 \chi(t, x) \right] = M + \sum_n \left(\frac{1}{2} \omega_n^2 a_n^2 + \frac{1}{2} \dot{a}_n^2 \right) \quad (\text{B.30})$$

⁶这个结论可以通过数 \hbar 简单地得到，具体的讨论可以参见场论 notes 的 3.7 节。

当我们把 χ 提升为算符后, a_n 也成为了算符。根据正则对易关系, 我们也能得到 $[a_n, \dot{a}_m] = i\delta_{nm}$ 。从而这个 Hamiltonian 实际上就对应着无穷多个独立的谐振子。

在从这个式子中得到孤子质量的量子修正之前, 我们需要小心一点行事: 对于 $\omega_n = 0$ 的零模 $\chi_0(x)$ 而言, 由于在这个模式方向的扰动不改变体系的能量, 于是这个模式上的量子修正有可能很大, 从而需要小心地单独处理。这个零模的出现实际上就对应着 Kink 解的坐标自由度: 如果我们对 Kink 做一个整体的平移, 那么这个平移将不会改变体系的能量。这也就是说, 对应整体平移的模式 $\chi = \partial_{x_0}\phi_k(x - x_0)$ 就应该具有 0 能量, 从而对应这个零模。

这些零模和孤子解的对称性息息相关: 如果孤子解具有一个对称性, 那么作用一个无穷小对称变换后体系的能量就不应该改变。这样一来, 这个无穷小对称变换也就对应一个零模。在我们的这个例子中, 这个零模的出现实际上反映了 Kink 解的空间平移对称性。

由于零模上的量子修正并不会增加体系的能量, 于是这些量子修正有可能很大, 并不能将其视作一个 ϕ_k 的微扰, 从而我们不能将其视为一个 χ 中的模式。实际上, 正确的考虑方法是直接考虑孤子解中参量 x_0 对应的动力学。经典上, 对于一个运动的孤子解 $\phi_k(x - x_0(t))$ 而言, 其作用量可以被写为:

$$S = \int dx dt \left[-\frac{1}{2}\phi_k'^2 - V(\phi_k) + \frac{1}{2}\phi_k'^2 \dot{x}_0^2 \right] = \int dt \left(-M + \frac{1}{2}M\dot{x}_0^2 \right) \quad (\text{B.31})$$

这对应的 Hamiltonian 为:

$$H = M + \frac{1}{2}M\dot{x}_0^2 \quad (\text{B.32})$$

从而在我们单独考虑这个零模后, 这个体系的 Hamiltonian 应该写为:

$$H = M + \frac{1}{2}M\dot{x}_0^2 + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{2}\omega_n^2 a_n^2 + \frac{1}{2}\dot{a}_n^2 \right) \quad (\text{B.33})$$

这就是完整的、考虑孤子附近量子激发后体系的 Hamiltonian。既然零模对应孤子整体的平移, 它代表孤子作为一个粒子的运动, 从物理意义上讲不应该贡献孤子静止质量的修正。于是真正贡献孤子静止质量的量子修正的也就是最后一项对非零模的求和。由于每一个非零模都类似一个独立的谐振子, 于是这个理论的基态能量就应该是:

$$E_0 = M + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2}\omega_n \quad (\text{B.34})$$

然而这还不是孤子的能量: 对于一个不存在孤子的真空而言, 其基态能量也是无穷大的, 从而我们还需要从这个基态能量中减去真空的能量, 得到的才是孤子的能量。对于我们这个理论而言, 真空能也就是体系在 $\phi = v$ 附近展开时的总能量。由于我们也仅仅需要将真空能量计算到单圈阶, 于是需要考虑的作用量也就仅仅是:

$$S[v + \chi] = S[v] + \int dt dx \left[\frac{1}{2}(\dot{\chi}(t, x))^2 - \frac{1}{2}\chi(t, x) [-\partial_x^2 + m^2] \chi(t, x) \right] \quad (\text{B.35})$$

于是对于真空而言，我们完全可以进行类似的讨论，只不过将 L_2 换成 $-\partial_x^2 + m^2$ 。于是经过同样的模式展开，我们也可以将真空的能量写成一系列振子零点能的形式： $E_{\text{vac}} = \sum_{m \neq 0} \frac{1}{2} \omega_m^{\text{vac}}$ 。而孤子的能量就是前面给出的基态能量减去这个零点能：

$$M_{\text{1-loop}} = M + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2} \omega_n - \sum_{m \neq 0} \frac{1}{2} \omega_m^{\text{vac}} \quad (\text{B.36})$$

剩下要计算的一切东西就只是这两个求和了。在这里，我们并不打算深入探讨这个求和是如何计算出的，而是只给出一个最后的结果⁷

$$M_{\text{1-loop}} = \frac{m_R^3}{3g^2} - m_R \left(\frac{3}{2\pi} - \frac{\sqrt{3}}{12} \right) + O(g^2) \quad (\text{B.37})$$

其中 m_R 是重整化的质量。这就完成了关于量子效应对孤子质量的修正的讨论。在这个讨论中，我们以孤子为背景，正则量子化了孤子附近的量子激发。作为一个“副产品”，我们也得到了描述这些量子激发的动力学的 Hamiltonian。事实上，这里进行的这个流程就是讨论经典背景下的、Lagrangian 为场的二次型的量子场论的标准流程——无论是以引力场或者这些拓扑场构型作为背景，只要我们仅仅将作用量展开到鞍点近似的第二阶，这个流程就依然适用。

B.2.3 Quantization of Moduli

第二部分的讨论是孤子作为一个粒子的量子性质。正如前一部分的讨论所说：孤子附近量子扰动的零模对应孤子整体的平移，它代表孤子作为一个粒子的运动。于是如果我们想要讨论一个运动的、不带有任何其他非零模的量子激发的孤子解，就可以仅仅考虑孤子背景下的 Hamiltonian 中的零模部分：

$$H = M + \frac{1}{2} M \dot{x}_0^2 \quad (\text{B.38})$$

当然，由于我们关心的仅仅是和参数 x_0 有关的部分，在这里的讨论完全忽略了非零模的零点能。如果希望将这部分零点能包括进来，只需要将 M 换成 $M_{\text{1-loop}}$ 。虽然在上面的讨论中，这个 Hamiltonian 是通过对“量子修正”场做正则量子化得到的，不过事实上它完全不需要如此复杂的讨论。为了得到零模对应的 Hamiltonian，我们只需要考虑一个参数含时的孤子，并将其代入理论的 Hamiltonian 即可。

有了这个 Hamiltonian 之后，剩下的就仅仅是一个量子力学问题——求解 1+1 维时空中的 Hamiltonian $H = M + \frac{1}{2} M \dot{x}_0^2$ 。我想任何一个受过正规物理学本科教育的人都应该十分清楚这个问题该如何求解，我们便不在此赘述了。总之，对于这个孤子而言，其能谱就是连续的 $E_p = M + p^2/2M$ 。由于我们在推导这个 Hamiltonian 时默认了 \dot{x}_0 是很微小的，于是这里得到的色散关系自然是非相对论的。

对于 Kink 而言，这些讨论确实有点无聊。不过后面将看到：对于规范理论中的孤子解而言，其模空间量子化后将会得到一些有趣的结论。

⁷如果你对这个计算有兴趣，可以看看 M. Shifman 在 *Advanced Topics in Quantum Field Theory: A Lecture Course* 一书的 5.4 节中的讨论。

B.2.4 Fermions in Kink Background

最后，我们要讨论的第三件事情就是孤子背景下的物质场。前面的讨论中预告过：如果我们在孤子背景下加入一个和标量场之间存在 Yukawa 相互作用的 Dirac 费米子，那么会出现一些反直觉的结论。具体而言，就是任何量子态上的费米子数将不是整数，而是半整数——这被称为荷分数化。为了看到这一点，让我们先写出理论的 Lagrangian：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\phi^4} + \bar{\Psi}(i\partial)\Psi + \lambda\phi\bar{\Psi}\Psi \quad (\text{B.39})$$

不过在分析这个 Lagrangian 之前，我想有必要对 1+1 维时空中的 Dirac 费米子做一些讨论。为了给出 Gamma 矩阵，在 2D 中我们仍然希望寻找 Gamma 代数 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}$ 的一个 2 维表示。为此，我们找到了：

$$\gamma^0 = \sigma^2, \quad \gamma^1 = i\sigma_3, \quad \gamma_5 = \gamma^0\gamma^1 = -\sigma_1 \quad (\text{B.40})$$

从而，1+1 维时空中的 Dirac 费米子是 2 分量的旋量，并且与它们相关的 Gamma 矩阵就是上面这三个矩阵。有了这个 Lagrangian 之后，接下来要做的就是在孤子背景下对这些费米子场做量子化。假设标量场不具有动力学，只有纯粹的孤子背景场 ϕ_k ，此时费米子的 Lagrangian 可以写为：

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\partial)\Psi + \lambda\phi_k\bar{\Psi}\Psi \quad (\text{B.41})$$

于是，费米子的运动方程就是：

$$(i\partial + \lambda\phi_k)\Psi = \begin{pmatrix} -\partial_x + \lambda\phi_k & \partial_t \\ -\partial_t & \partial_x + \lambda\phi_k \end{pmatrix} \Psi = 0 \quad (\text{B.42})$$

这个 Lagrangian 的确是场的二次型，于是可以利用前面给出的这套流程做量子化。按照前面的标准流程，我们先要对费米子场做模式展开。如果我们定义两个在 $L^2(\mathbb{R})$ 上互为 Hermitian 共轭的算符：

$$P := \partial_x + \lambda\phi_k, \quad P^\dagger = -\partial_x + \lambda\phi_k \quad (\text{B.43})$$

并且将费米子场如下地分离变量：

$$\Psi = e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} \tilde{\chi} \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{B.44})$$

那么这个运动方程就可以改写为：

$$P^\dagger \tilde{\chi} = i\omega \chi, \quad P\chi = -i\omega \tilde{\chi} \quad (\text{B.45})$$

于是， $\chi, \tilde{\chi}$ 满足以下 Hermitian 算符的本征方程：

$$L_2\chi \equiv P^\dagger P\chi = \omega^2\chi, \quad \tilde{L}_2\tilde{\chi} \equiv PP^\dagger\tilde{\chi} = \omega^2\tilde{\chi} \quad (\text{B.46})$$

对于 $PP^\dagger, P^\dagger P$ 这种算符而言，它们的谱以下重要的性质：

Proposition 5. $L_2 := P^\dagger P, \tilde{L}_2 := PP^\dagger$ 的非零模一一对应；在 Kink 背景场下费米子的这个情形中，只有 L_2 具有零模， \tilde{L}_2 不具有零模。

Proof. 非零模一一对应非常好看出：对于一个 $P^\dagger P$ 的具有本征值 ω_n^2 本征函数 $\chi_n(x)$ ，很容易看出 $\tilde{\chi}_n(x) := P\chi_n(x)/\omega_n$ 是 PP^\dagger 的、也具有本征值 ω_n^2 的本征函数：

$$PP^\dagger \left(\frac{1}{\omega_n} P\chi_n(x) \right) = \frac{1}{\omega_n} P(P^\dagger P)\chi_n(x) = \omega_n^2 \left(\frac{1}{\omega_n} P\chi_n(x) \right) \quad (\text{B.47})$$

而对于零模而言，由于 L_2 的零模满足 $P\chi_0 = 0$ ，这也就是 $\partial_x \chi_0 = -\lambda \phi_k \chi_0$ ，从而 L_2 的零模是：

$$\chi_0(x) = N \exp \left(-\lambda \int_0^x dy \phi_k(y) \right) \quad (\text{B.48})$$

这个解是平方可积的，于是的确存在于我们的 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R})$ 中，从而 L_2 的确具有一个零模。而对于 \tilde{L}_2 而言，如果其零模存在，那么它就要满足 $\partial_x \tilde{\chi}_0 = \lambda \phi_k \tilde{\chi}_0$ 。这个方程的解应该是：

$$\tilde{\chi}_0(x) = N \exp \left(\lambda \int_0^x dy \phi_k(y) \right) \quad (\text{B.49})$$

这个解并非平方可积的，于是 \tilde{L}_2 在 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R})$ 上不存在零模。 \square

明白了这些谱的性质之后，我们就可以尝试给出 $\Psi, \bar{\Psi}$ 的模式展开了。不过现在仅仅给出了 $PP^\dagger, P^\dagger P$ 的本征值，并没有给出 Dirac 方程的具有本征能量 ω_n 的解。实际上，由于要求 $\omega_n^2 \in \mathbb{R}$ ，从而一个本征值 ω_n^2 将会对应两个模式，分别对应 $\omega_n, -\omega_n$ 。利用 Dirac 方程，可以看到 ω_n 对应 $(\tilde{\chi}_n, -i\chi_n)^T$ ，而 $-\omega_n$ 对应 $(\tilde{\chi}_n, i\chi_n)^T$ 。

从而，我们有以下的模式展开：

$$\Psi(x) = a_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_0(x) \end{pmatrix} + \sum_{n \neq 0} \left[e^{-i\omega_n t} \frac{a_n}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_n(x) \\ -i\chi_n(x) \end{pmatrix} + e^{i\omega_n t} \frac{b_n^\dagger}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_n(x) \\ i\chi_n(x) \end{pmatrix} \right] \quad (\text{B.50})$$

经过正则量子化之后， a_n, b_n 也成为了算符。并且由于正则反对易关系，我们有 $\{a_n, a_m^\dagger\} = \{b_n, b_m^\dagger\} = \delta_{nm}$ 。一些无趣的计算，也可以将 Hamiltonian 写为：

$$H = \sum_{n \neq 0} \omega_n (a_n^\dagger a_n + b_n^\dagger b_n) + (\text{Constant}) \quad (\text{B.51})$$

这并没有任何奇怪的地方，也并不反直觉。不过由于 Hamiltonian 中没有出现零模的产生湮灭算符，于是 $|\text{Kink}\rangle$ 和 $|\text{Kink} + 0\rangle = a_0^\dagger |\text{Kink}\rangle$ 就都是体系的真空。这也就是说：在加入费米子后，体系有两个简并的真空，分别对应存在和不存在零模激发的态。

真正值得注意的是电荷算符：如果我们令场变换 $\Psi \rightarrow e^{i\theta} \Psi, \bar{\Psi} \rightarrow e^{-i\theta} \bar{\Psi}$ ，那么体系的 Lagrangian 也在这个变化下不变。这个 global 的 U(1) 对称性对应的守恒荷是：

$$Q_{\text{Fermion}} = \frac{1}{2} (a_0^\dagger a_0 - a_0 a_0^\dagger) + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} (a_n^\dagger a_n + b_n^\dagger b_n - b_n^\dagger b_n - a_n a_n^\dagger) \quad (\text{B.52})$$

如果我们求出体系的两个真空中电荷的期待值，那么我们将惊愕地发现：

$$\langle \text{kink} | Q_{\text{Fermion}} | \text{kink} \rangle = -\frac{1}{2}, \quad \langle \text{kink} + 0 | Q_{\text{Fermion}} | \text{kink} + 0 \rangle = \frac{1}{2} \quad (\text{B.53})$$

这告诉我们：虽然一个费米子携带的电荷为 1，但是真空却具有半整数的电荷！这个现象就被称为荷分数化。事实上不仅仅是在 Kink 附近的费米子激发如此，对于其他的孤子而言也存在类似的现象。究其原因，这实际上是由于在孤子附近的费米子激发存在零模导致的。

直到此处，我们便完成了对 Kink 的讨论。总结一下，就是：

Summary: The Kink Solution in ϕ^4 Theory

- Kink 是对称性自发破缺的 ϕ^4 理论的能量有限的经典解。由于其边界条件和任何真空都具有不同的拓扑，于是它是稳定的。又因为其能量密度局域在一个小的空间区域中，从而其行为类似一个粒子。
- 我们并不会在量子场论中描述一个对应 Kink 的粒子态。不过在量子理论中，可以通过考虑 Kink 背景下的量子涨落来考虑 Kink 的一些量子性质。例如 Kink 的质量会在量子修正下被改变，这个质量修正可以通过计算 Kink 背景和真空背景下体系基态的能量差来求得。
- 在考虑 Kink 背景下的量子涨落时，有一些方向的涨落不会改变体系的能量，这些涨落被称为零模。零模对应着 Kink 的整体运动，可以看作 Kink 的参数/集体坐标。如果想要求出 Kink 作为一个量子粒子的性质，可以将这些参数看作含时的变量，代入场的 Hamiltonian，从而得到一个以这些参数为基本自由度的 Hamiltonian。求解这个 Hamiltonian 对应的量子力学问题，就得到了 Kink 作为一个量子粒子的性质。
- 在 Kink 背景下还可以考虑费米子场。一个反直觉的情形出现在费米子无质量的情形中，此时由于理论中存在费米子零模，于是 Kink 对应的态及其加上一个费米子零模激发的态都是体系的真空。并且在这两个真空中，都会出现费米子荷分数化的现象。

B.2.5 Are There Any Solitons in Higher Dimension?

在完成了对 ϕ^4 理论中孤子解的讨论后，我们自然会问：还有什么标量场论中有孤子解？这些孤子解长什么样子？在 1+1 维的时空中，有很多模型都能给出孤子解——几乎只要它们有多个分立的简并真空就可以。但是在 2+1 维及以上的时空中，下面的 Derrick 定理给我们泼了一盆冷水：

Theorem 7 (Derrick). 在 $d \geq 3$ 的时空中，Lagrange 密度有形式 $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi)$ 的标量场论中不存在稳定的、能量局域且有限的孤子解。

Proof. 证明十分简单：既然孤子是稳定的，它在任意的无穷小变换下能量一定增大。并且由于孤子和真空不在同一同伦类中，那么孤子的能量一定大于 0。假设 d 维时空中的标量理论中存在孤子解，并且其场构型为 $\phi(\mathbf{x})$ ，能量为 E 。如果我们对这个孤子解做一个重标度：

$$\phi_\lambda(\mathbf{x}) := \phi(\lambda\mathbf{x}) \quad (\text{B.54})$$

那么在这个重标度下, 动能项和势能项的变换关系是:

$$T[\phi_\lambda] = \int d^{d-1}x \frac{1}{2} \nabla \phi(\lambda \mathbf{x}) \cdot \nabla \phi(\lambda \mathbf{x}) = T[\phi]/\lambda \quad (\text{B.55})$$

$$V[\phi_\lambda] = \int d^{d-1}x V(\phi(\lambda \mathbf{x})) = T[\phi]/\lambda^{d-1} \quad (\text{B.56})$$

将孤子解换成一个无穷小的 λ 对应的 $\phi_\lambda(\mathbf{x})$ 相当于给孤子一个无穷小变换。为了使孤子稳定, 就一定有:

$$\frac{d}{d\lambda}(T[\phi]/\lambda + V[\phi]/\lambda^{d-1}) = 0, \quad \frac{d^2}{d\lambda^2}(T[\phi]/\lambda + V[\phi]/\lambda^{d-1}) > 0 \quad (\text{B.57})$$

这也就意味着:

$$-T[\phi] - (d-1)V[\phi] = 0, \quad 2T[\phi] + d(d-1)V[\phi] > 0 \quad (\text{B.58})$$

这也就蕴含着 $(2-d)T[\phi] > 0$ 。在 $d \geq 3$ 的情形下, 由于动能的正定性, 这个不等式永远不会被满足。于是 $d \geq 3$ 的时空中就算存在能量局域且有限的场构型, 它也不可能稳定。这就证明了这个定理。 \square

Derrick 定理杀死了 $d \geq 3$ 的标量理论中的孤子。于是如果要构建出 $d \geq 3$ 的时空中的孤子, 我们必须在标量场外给理论添加其他的自由度, 例如加入规范场。这也就是下一节想要讨论的内容。

B.3 Solitons in Gauge Theory

B.3.1 't Hooft-Polyakov Monopole

我们接下来的目标就是在规范理论中寻找孤子。前面我们说过, 存在孤子解的理论中一定要有对称性自发破缺, 于是要看到规范理论中的孤子, 就一定要考虑一个具有对称性自发破缺的规范理论。于是作为例子, 可以考虑四维时空中的、规范群为 $SU(2)$ 的 **Georgi-Glashow** 模型:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2}(D_\mu \Phi)^a (D^\mu \Phi)^a - V(\Phi) \quad (\text{B.59})$$

其中 Φ 是出于规范群伴随表示中的标量场, 其协变导数有形式:

$$(D_\mu \Phi)^a = \partial_\mu \Phi^a + e\epsilon^{abc} A_\mu^b \Phi^c \quad (\text{B.60})$$

并且和我们熟知的 Higgs 机制相同, $V(\Phi)$ 使得规范群从 $SU(2)$ 破缺到 $U(1)$, 它有形式:

$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{4}(\Phi^a \Phi^a - v^2)^2 \quad (\text{B.61})$$

由于孤子是拓扑非平庸的、能量有限的经典解, 于是在空间的边界处孤子场构型的 Hamilton 密度一定比 $1/r^2$ 更快地衰减到 0。由于这个 Lagrangian 对应的能量是:

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (E^a E^a + B^a B^a + (D_0 \Phi)^2 + (\mathbf{D}\Phi)^2) + V(\Phi) \right] \quad (\text{B.62})$$

其中 $E^a = -F^{a0i}$, $B^a = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}^a$ 。这就要求:

$$F^{a\mu\nu} \sim o(1/r), \quad D_\mu\Phi \sim o(1/r) \quad V(\Phi) \sim o(1/r^2) \quad (\text{B.63})$$

其中 o 代表高阶无穷小, 并不是我们平常用 O 代表的同阶无穷小。在这些条件下, 最后一个条件就是我们熟悉的: 空间边界处的场构型一定处于真空流形中。从而这个边界条件可以用空间边界到真空流形的映射来描述, 孤子就对应拓扑非平庸的这类映射。而在这个理论中, 由于真空对应任意的 $\Phi^a\Phi^a = v^2$ 的场构型, 于是真空流形也就是 \mathbb{R}^3 中的一个球面, 具有 S^2 的拓扑。由于我们考虑的是四维时空中的理论, 于是空间的边界具有 S^2 的拓扑。从而一个场构型的边界条件可以用一个映射 $S^2 \rightarrow S^2$ 来刻画, 并且我们可以用同伦群 $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ 来给出对边界条件的拓扑分类。由于这个同伦群 $\pi_2(S^2)$ 并不平凡, 于是这个理论中应该可以存在孤子。

根据这一章前面给出的结果, 映射 $\Phi^a(x^i) : S^2 \rightarrow S^2$ 的的绕数是:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{8\pi} \int_{S^2} \epsilon^{abc} \hat{\Phi}^a d\hat{\Phi}^b \wedge d\hat{\Phi}^c = \frac{1}{8\pi} \int_{S^2} \epsilon^{abc} \hat{\Phi}^a \partial_i \hat{\Phi}^b \partial_j \hat{\Phi}^c dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{S^2} ds_k \epsilon^{ijk} \epsilon^{abc} \hat{\Phi}^a \partial_i \hat{\Phi}^b \partial_j \hat{\Phi}^c = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \epsilon^{ijk} \epsilon^{abc} \partial_i \hat{\Phi}^a \partial_j \hat{\Phi}^b \partial_k \hat{\Phi}^c \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

其中由于绕数公式中要求 $n^a n^a = 1$, 于是我们需要用 v 来 rescale 一下 Φ , 使其成为 $\hat{\Phi} = \Phi/v$ 。于是只要我们找到了具有绕数 $Q \neq 0$ 的边界条件的、满足 $F^{a\mu\nu} \sim o(1/r)$, $D_\mu\Phi \sim o(1/r)$ 的经典解, 就找到了这个理论中的孤子。

在详细讨论满足这些条件的孤子解之前, 我们就可以看到它和磁单极子的关系。为此首先需要明白在这个理论中电磁场的场强究竟是什么。由于电磁 $U(1)$ 是规范群 $SU(2)$ 未破缺的子群, 于是如果我们选择真空场构型为 $\Phi^a = v\delta^{a3}$, 那么电磁场强就自然是 $\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3$ 。这个场强也可以被推广到真空场构型任意的情形: 唯一一个在 $SU(2)$ 规范变换下不变的、能在取 $\Phi^a = v\delta^{a3}$ 时回到 $\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3$ 的反对称二阶张量是:

$$F_{\mu\nu} = \hat{\Phi}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{e} \epsilon^{abc} \hat{\Phi}^a (D_\mu \hat{\Phi})^b (D_\nu \hat{\Phi})^c = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{e} \epsilon^{abc} \hat{\Phi}^a \partial_\mu \hat{\Phi}^b \partial_\nu \hat{\Phi}^c \quad (\text{B.65})$$

于是这就应该对应电磁场强。在这个表达式中, 第三项是磁荷的 source term。正是因为理论中出现磁荷的原因, 我们不能 naive 地将电磁场写为一个电磁势的外微分, 而必须加入这一项 source term。

我们想要计算的是孤子携带的磁荷, 也就是无穷远处的磁通量:

$$g_m = \int_{r=\infty} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \int_{r=\infty} ds_i \epsilon^{ijk} F_{jk} = \frac{1}{2} \int_{r=\infty} ds_i \epsilon^{ijk} \left(\partial_j A_k - \partial_k A_j - \frac{1}{e} \epsilon^{abc} \hat{\Phi}^a \partial_j \hat{\Phi}^b \partial_k \hat{\Phi}^c \right) \quad (\text{B.66})$$

这个积分的前两项对应 $\int d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \int d^3x \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ 。由于一个矢量场的旋度没有散度, 于是这两项的贡献为 0, 唯一贡献磁荷的就是第三项:

$$g_m = -\frac{1}{2e} \int_{r=\infty} ds_i \epsilon^{ijk} \epsilon^{abc} \hat{\Phi}^a \partial_j \hat{\Phi}^b \partial_k \hat{\Phi}^c = -\frac{4\pi Q}{e} \quad (\text{B.67})$$

这就告诉我们: 在这个规范理论中, 一个绕数不为 0 的孤子解一定带有非零的磁荷。由于这个原因, 这个理论中的孤子解被称为't Hooft-Polyakov 单极子。在此之外, 这个结果也告诉我们如下的磁荷量子化条件:

$$g_m e = 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.68})$$

如果我们在理论中添加一个处于基础表示的场, 那么这个场将会带电荷 $e/2$ 。也就是说, e 并不是这个理论中的“元电荷”, $e/2$ 才是。于是对于这个理论中的任意可能的磁荷、电荷, 它们满足的关系应该是 $g_m q_e = 2\pi n$ 。这也正是 **Dirac 磁荷量子化条件**。

直到此处, 我们还没有构造任何 explicit 的孤子解, 仅仅通过对规范群和拓扑的讨论得到了这些结果。而接下来我们想要做的就是显式地构造出这样一个't Hooft-Polyakov 单极子解。这也就是求解以下的运动方程:

$$D_\mu F^{a\mu\nu} = e\epsilon^{abc}\Phi^b(D^\nu\Phi)^c, \quad (D^2\Phi)^a = -\lambda\Phi^a(\Phi^a\Phi^a - v^2) \quad (\text{B.69})$$

在求解过程中, 我们最好选择一个具体的规范来消除理论中的规范自由度。在这里选择的是**时性规范**, 也就是:

$$A_0^a = 0 \quad (\text{B.70})$$

在此之外, 我们需要的单极子还需要满足边界条件 $F^{a\mu\nu} \sim o(1/r)$, $D_\mu\Phi \sim o(1/r)$, 以及最重要的: 一个具有非零绕数的标量场边界条件。由于这个偏微分方程组十分复杂, 于是寻找所有这样的单极子解的工作也实在是太过复杂。为了简化问题, 我们在这里将会指定一个具有绕数 1 的边界条件, 并且在这个边界条件下求解这些方程。可以验证, 下面的这个映射具有绕数 1, 可以作为单极子解的边界条件:

$$\hat{\Phi}^a(x) = \frac{x^a}{r} \quad (\text{B.71})$$

由于边界条件 $D_\mu\Phi^a = \partial_\mu\Phi^a + e\epsilon^{abc}A_\mu^b\Phi^c \sim o(1/r)$, 于是我们还可以得到规范场的边界条件:

$$A_i^a(x) = \epsilon^{aij}\frac{x_j}{er^2} \quad (\text{B.72})$$

有了这些边界条件, 总该会求解这个方程了吧? 不幸的是我们还不会。事实上, 我们仅仅会在一个特别的情形下求解这个方程。为了看到这一点, 我们先考虑一个稳定的磁单极子的总能量:

$$M = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (E_i^a E_i^a + B_i^a B_i^a + (D_i\Phi^a)^2) + V(\Phi) \right] \geq \frac{1}{2} \int d^3x (E_i^a E_i^a + B_i^a B_i^a + (D_i\Phi^a)^2) \quad (\text{B.73})$$

由于电磁场强满足 $F_{\mu\nu} = \hat{\Phi}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{e}\epsilon^{abc}\hat{\Phi}^a(D_\mu\hat{\Phi})^b(D_\nu\hat{\Phi})^c$, 并且由于 $D_\mu\hat{\Phi} \sim o(1/r)$, 最后一项在无穷远处的表面积分为 0, 从而只有第一项对磁荷和电荷产生贡献。于是, 磁单极子携带的磁荷还可以被写为:

$$g_m = \int_{r=\infty} ds^i \hat{\Phi}^a B_i^a = \frac{1}{v} \int d^3x \partial_i (B_i^a \Phi^a) = \frac{1}{v} \int d^3x B_i^a (D_i\Phi)^a \quad (\text{B.74})$$

其中在最后一个等号处, 我们利用了 B^a 满足 Bianchi 恒等式 $D_i B_i^a = 0$ 。同样, 磁单极子携带的电荷也就是 $q_e = \frac{1}{v} \int d^3x E_i^a (D_i\Phi)^a$ 。利用这两个表达式, 我们可以将磁单极子的总能量改写为:

$$M \geq \frac{1}{2} \int d^3x ((E_i^a - D_i\Phi^a \sin \theta)^2 + (B_i^a - D_i\Phi^a \cos \theta)^2) + v(q_e \sin \theta + g_m \cos \theta) \quad (\text{B.75})$$

其中 θ 是一个任意的角度。由于前一项是正定的, 于是:

$$M \geq v(q_e \sin \theta + g_m \cos \theta) \geq v\sqrt{q_e^2 + g_m^2} \quad (\text{B.76})$$

这就是一个't Hooft-Polyakov 单极子的质量下限，它被称为 **Bogomol'nyi 限**，并且我们称使得不等式 $M \geq v\sqrt{q_e^2 + g_m^2}$ 成为等式的单极子满足 **BPS 条件**。由于 BPS 条件给出的是以下的两个一阶偏微分方程，这比运动方程——两个二阶偏微分方程要好求解很多，于是我们唯一会解析求解的也就是 BPS 条件下的单极子解。

为了讨论的简便，这里仅仅考虑不带电荷的单极子。此时，BPS 条件就是：

$$E_i^a = 0, \quad B_i^a - D_i \Phi^a = 0 \quad (\text{B.77})$$

由于解满足我们选择的边界条件 $\hat{\Phi}^a(x) = \frac{x^a}{r}$, $A_i^a(x) = \epsilon^{aij} \frac{x_j}{er^2}$, 于是为了求解这个方程，可以先假设一个试探解：

$$\Phi^a = \frac{vx^a}{r} f(ev), \quad A_i^a = \epsilon^{aij} \frac{x_j}{er^2} a(ev) \quad (\text{B.78})$$

那么边界条件就要求 $f(\infty) = a(\infty) = 1$, 并且为了这些解不奇异，还要有 $f(0) = a(0) = 0$ 。将这个试探解代入 BPS 条件，可以给出以下的方程：

$$a' = (1 - a)f, \quad f' = (2a - a^2)/(evr)^2 \quad (\text{B.79})$$

这也就可解出：

$$a(ev) = 1 - \frac{evr}{\sinh evr}, \quad f(ev) = \coth evr - \frac{1}{evr} \quad (\text{B.80})$$

这就最终得到了 BPS 条件下的、只具有磁荷不具有电荷的't-Hooft-Polyakov 单极子解：

$$\Phi_{\text{BPS}}^a = \frac{vx^a}{r} \left(1 - \frac{evr}{\sinh evr} \right), \quad A_{i,\text{BPS}}^a = \epsilon^{aij} \frac{x_j}{er^2} \left(\coth evr - \frac{1}{evr} \right) \quad (\text{B.81})$$

这有时候也被称为一个 **BPS 单极子**。根据 BPS 条件，这个单极子的能量就是 $M = g_m v$ 。又由于磁荷量子化条件，这可以写为 $M = \frac{4\pi v}{e}$ 。由于在对称性自发破缺后，W Boson 的质量是 $m_W = ev$ ，从而 BPS 单极子的质量又可以写为 $M = m_W/\alpha_e$ 。由于 BPS 单极子是质量最小的't Hooft-Polyakov 单极子，这也就告诉我们：任何一个't Hooft-Polyakov 单极子都至少具有这么多的质量。由于这个质量是反比于耦合常数的，于是耦合常数越大从而这个单极子是一个非微扰的效应。另外，从 BPS 单极子中可以看出，一个't Hooft-Polyakov 单极子的空间尺度约为 $1/ev \sim 1/m_W$ ，在这个空间尺度之外，单极子的能量密度将会很快衰减。

如果这个 Glashow-Georgi 模型可以描述我们的宇宙，那么 W Boson 的质量将是 80 GeV，而精细结构常数将会是 $1/137$ ，从而这个 BPS 单极子的质量将会有 10 TeV 这么重！不过由于 Glashow-Georgi 模型中没有 Z Boson，于是在 Z Boson 被发现之后，Glashow-Georgi 模型就被排除掉了，最终胜利的是 Glashow-Weinberg-Salam 的电弱理论。不过由于电弱理论的对称性自发破缺是从 $SU(2) \times U(1)$ 到 $U(1)$ 的破缺，于是真空流形的拓扑是 $SU(2)$ ，它并不具有一个非平凡的第二同伦群，于是标准模型中是不可能出现孤子型的磁单极子的。

根据我们在讨论同伦群时给出的定理，如果规范群单连通，也就是 $\pi_1(G) = 0$ ，那么就有关系 $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$ 。由于 $\pi_1(SU(3) \times SU(2) \times U(1)) = \pi_1(U_1) = \mathbb{Z}$ ，从而规范群单连通的、能够直接破缺到标准模型的大统一理论中是存在孤子型的磁单极子的。这些磁单

极子的质量也大约是 $\Lambda_{\text{GUT}}/\alpha_{\text{GUT}}$ ，从而由于大统一能标在 $10^{15} \sim 10^{16} \text{ GeV}$ ，这些磁单极子的质量也至少在这个能标以上。当宇宙从大统一规范群相变到 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 后，由于宇宙的温度约为这个磁单极子的质量，从而这样的磁单极子就将在宇宙中产生。不过如果宇宙没有发生过暴涨，经过一些粗略的估算，我们会发现这样的单极子密度远大于我们所观察到的密度。这也是暴涨理论提出的 motivation 之一。

B.3.2 Quantization of Moduli

在本节前面的两段中，我们所讨论的't Hooft-Polyakov 单极子完全是经典的。而在接下来的讨论中，我们就关注这些磁单极子的量子效应。和前面的 Kink 解一样，我们无法从量子场论出发直接描述这些单极子对应的态，不过可以以这个单极子为背景，讨论它附近的量子激发。和上面一样，有三件事情可以讨论：量子效应对单极子参数的影响、单极子作为一个量子粒子的性质和单极子附近的物质场。不过在这里，我们仅仅关注第二件事情——单极子作为一个量子粒子的性质。由于我们仅仅知道 BPS 单极子的具体解，于是下面就专注讨论 BPS 单极子的这些性质。

在讨论 Kink 解时，我们已经看到了如何讨论这件事情——找到 BPS 单极子的模空间（也就是“参数空间”），将所有模空间中的参数看作含时的变量，代入场的 Hamiltonian，就得到了一个以这些参数为基本自由度的 Hamiltonian H_{QM} 。这便确立了一个以这些参数为基本自由度的量子理论。

从而，讨论的第一步就是试图找到 BPS 单极子的模空间。在前面的讨论中已经看到：孤子解的零模是和孤子的对称性密切相关的——对于每个对称性而言，相应的无穷小对称变换就给出一个零模。于是寻找 BPS 单极子的模空间实际上就是在寻找 BPS 单极子的对称性。由于我们仅仅希望考虑单极子作为一个粒子的物理自由度，而不考虑规范自由度这种冗余的非物理自由度。从而我们寻找的是 BPS 单极子的物理对称性，这包括时空平移对称性以及规范对称性中的物理部分。

那么问题就应运而生：什么是规范对称性中的物理部分？为了区分物理的对称性和冗余的自由度，我们可以考虑物理态在对称变换下的变化。如果一个对称变换不改变任何物理态，那么这个对称性的作用实际上也就是切换了同一个物理本质的不同描述方式，从而相应的对称性也就是描述这个物理系统的冗余自由度。反之，如果在对称变换下任一物理态会发生改变，就意味着这个对称性实际上是物理的。

回忆协变规范下电磁场的量子化：如果我们不消除掉所有的规范自由度，那么 Hilbert 空间中会存在对应光子纵向极化的非物理态。类似地，这里的 Hilbert 空间中也存在非物理的态。按照上面的这个思路，为了区分物理的对称性和冗余的自由度，首先要做的是区分 Hilbert 空间中的物理态和非物理态。在经典场论中，由于 $F_{00} = 0$ ，从而规范理论的 Lagrangian 中不存在 A_0^a 的导数项。这也就意味着： A_0^a 并没有任何的动力学，其运动方程 $G^a = 0$ 是一个对场的约束条件，而这个约束条件不会作为算符方程出现在场算符上。由于物理态的期待值对应物理的经典场，于是我们希望物理态满足：

$$G^a |\text{Phys}\rangle = 0 \quad (\text{B.82})$$

这可以作为一个区分物理态和非物理态的判据。由于 A_0^a 的运动方程是：

$$G^a = (D_i F^{i0})^a + \bar{\Psi} \gamma^0 T^a \Psi = 0 \quad (\text{B.83})$$

从而物理态就要满足：

$$G^a |\text{Phys}\rangle = ((D_i F^{i0})^a + \bar{\Psi} \gamma^0 T^a \Psi) |\text{Phys}\rangle = 0 \quad (\text{B.84})$$

在前面的讨论中，我们取了时性规范 $A_0^a = 0$ 。事实上，时性规范并没有消除掉所有的规范自由度。在其下仍然有以下的规范变换：

$$A_i \rightarrow U_\theta A_i U_\theta^{-1} + \frac{i}{e} U_\theta \partial_i U_\theta^{-1}, \quad U_\theta = e^{i\theta^a(\mathbf{x})T^a} \quad (\text{B.85})$$

其中 $\theta^a(\mathbf{x})$ 纯粹是空间的函数，从而这个规范变换保持了 $A_0^a = 0$ 不变。对于这部分剩余的规范变换而言，可以验证其生成元为：

$$Q(\theta) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(-F^{ai0}(D_i\theta)^a + \theta^a \bar{\Psi} \gamma^0 T^a \Psi \right) \quad (\text{B.86})$$

对于任何一个场而言，它在这个规范变换下的变化都可以写为 $\delta\phi = [\phi, Q(\theta)]$ 。在 Hilbert 空间上，这个规范变换对应的算子也就是 $e^{iQ(\theta)}$ 。根据 Stokes 定理，它也可以写为：

$$Q(\theta) = - \oint_{\partial\mathbb{R}^3} ds_i F^{ai0} \theta^a + \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left((D_i F^{i0})^a + \theta^a \bar{\Psi} \gamma^0 T^a \Psi \right) = - \oint_{\partial\mathbb{R}^3} ds_i F^{ai0} \theta^a + \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \theta^a G^a \quad (\text{B.87})$$

于是，对于物理态而言，如果作用一个由 $\theta^a(\mathbf{x})$ 给出的无穷小规范变换，那么其变化应该是：

$$\delta|\text{Phys}\rangle = -i \oint_{\partial\mathbb{R}^3} ds_i \theta^a F^{ai0} |\text{Phys}\rangle \quad (\text{B.88})$$

按照之前的讨论，如果一个对称变换不改变任何物理态，那么它就是冗余的。如果 θ^a 在 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ 时为 0，那么这个表面积分也一定是 0，从而对于任何的物理态而言，都有 $\delta|\text{Phys}\rangle = 0$ ，于是这部分规范变换一定是非物理的。如果 θ^a 在 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ 时不恒为 0，那么由于 F^{ai0} 不是 0 算符，总能找到一个满足 $F^{ai0}|\text{Phys}\rangle \neq 0$ 的物理态使其变化非 0。从而这部规范变换的确给出物理的变化。

这就给出了一个对规范变换的分类：在空间无穷远处趋于恒等元素的规范变换被称为 **小规范变换**，它们是冗余的自由度：

$$\mathcal{G}_* := \left\{ U(\mathbf{x}) \mid \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} U(\mathbf{x}) = 1 \right\} \quad (\text{B.89})$$

而除去这些变换之外，其他规范变换在空间无穷远都不是恒等元素。不过由于一个在空间无穷远处不趋于恒等元素的变换叠加上趋于恒等元素的变换对应相同的物理变换，于是如果将保持时性规范 $A_0^a = 0$ 的所有规范变换记做 \mathcal{G} ，那么物理的规范对称性应该对应体系在 $\mathcal{G}/\mathcal{G}_*$ 下的对称性。 $\mathcal{G}/\mathcal{G}_*$ 中的规范变换就被称为 **大规范变换**。对于场构型而言，由于可以用小规范变换联系的场具有相同的物理实质，于是如果将满足 $A_0^a = 0$ 的所有场构型构成的空间记做 \mathcal{A} ，那么物理的场构型空间就是场构型在小规范变换下的等价类构成的 $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ 。

明确了什么是规范对称性的物理部分之后，我们就可以开始寻找 BPS 单极子的零模了。由于理论具有大规范变换不变这个物理对称性，于是对 BPS 单极子作用一个无穷大的大规范变换后，BPS 单极子的能量也不会发生变化，从而这个无穷大的大规范变换也就对应一个零模。

在此之外，由于模空间是单极子的“参数空间”，于是一个 BPS 单极子经过其中变换仍然需要是一个 BPS 单极子，满足 BPS 条件 $E_i^a = 0$, $B_i^a - D_i \Phi^a = 0$ 。可以证明，满足这个条件的规范变换在小规范变换等价的意义上是唯一的，它是：

$$U(\mathbf{x}) = e^{i\alpha \Phi^a(\mathbf{x}) T^a / v} \quad (\text{B.90})$$

这里的参数 α 就对应一个零模。并且对于 BPS 单极子而言，由于它的边界条件为 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ 时 $\hat{\Phi}^a \rightarrow x^i/r$ ，于是如果我们取 $\alpha = 2\pi$ ，那么无穷远处的变换就是：

$$U(|\mathbf{x}| \rightarrow \infty) = \exp \left(2\pi i \frac{x^a}{|\mathbf{x}|} \frac{\sigma^a}{2} \right) = 1_{2 \times 2} \quad (\text{B.91})$$

这也就是说， $\alpha = 2\pi$ 的变换在无穷远处为 1，从而也就是一个小规范变换。这也就是说，对于任何一个 $U(\alpha)$ ，它和 $U(\alpha + 2\pi)$ 对应的都是同一个大规范变换。这也就给零模 α 附加了一个周期性边界条件 $\alpha = \alpha + 2\pi$ 。

到此为止，我们就已经得到了 BPS 单极子的模空间——它由 \mathbf{x}_0, α 给出，其中 α 满足周期性边界条件，从而模空间具有 $S^1 \times \mathbb{R}^3$ 的拓扑。如果我们希望考虑 BPS 单极子作为一个粒子的量子力学性质，就可以将这些参数看作含时的变量，并将这个含时的解代入体系的 Hamiltonian。这也可以通过将 Hamiltonian 中的 $\dot{\Phi}, \dot{A}$ 替换为相应的 $\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} \dot{x}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \dot{\alpha}$ 来得到。经过一番复杂的推导，这个 Hamiltonian 就最终可以写为：

$$H_{\text{QM}} = M + \frac{M}{2} (\dot{\mathbf{x}}_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{M}{m_W^2} \dot{\alpha}^2 = M + \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \frac{m_W^2}{2M} \pi_\alpha^2 \quad (\text{B.92})$$

其中 $\pi_\alpha = M\dot{\alpha}/m_W^2$ 就是 α 对应的正则动量。得到了这个 Hamiltonian 后，剩下的最后一步就是利用量子力学来求解这个 Hamiltonian 了。很显然，空间部分的波函数就是一个自由粒子的波函数，也就是 e^{ikx} 。而对于 α 对应的内部自由度，其波函数也应该是 $e^{in\alpha}$ ，不过由于 α 存在周期性边界条件，于是波函数的单值性告诉我们 $e^{2\pi in} = 1$ ，从而 n 一定是整数，这个内部的激发态是分立的。

总结一下：BPS 单极子除去自由粒子的自由度之外，大规范变换下的对称性还给了它一个内部自由度。于是其激发态可以用两个量子数 $|\mathbf{k}, n\rangle$ 来刻画。对于这些激发态而言，一个有趣的事情是：虽然 $n = 0$ 的 BPS 单极子只有磁荷，但是 $n \neq 0$ 的激发态不但具有磁荷，还具有电荷。为了看到这一点，可以回到电场的表达式：

$$E_i = \frac{1}{v} E_i^a \Phi^a = \frac{1}{v} \dot{A}_i^a \Phi^a \quad (\text{B.93})$$

其中在第一个等号处，我们利用了时性规范给出的条件 $A_0^a = 0$ 。对于基态的 BPS 单极子而言，BPS 条件告诉我们 $E_i^a = 0$ ，于是电荷一定为 0。为了求出激发态的 BPS 单极子的电场，我们也可以将其 A, Φ 取做参数 α 含时的 BPS 单极子。此时由于 $\dot{\alpha}$ 的期待值不为 0，于是 A_i^a 的时间导数会有一个非零的期待值，这会带来非零的 E_i^a ，从而带来电荷：

$$E_i = \frac{1}{v} \dot{A}_{i,\text{BPS}}^a (\chi) \Phi_{\text{BPS}}^a = \frac{1}{v^2} \dot{\alpha} \Phi_{\text{BPS}}^a (D_i \Phi_{\text{BPS}})^a = \frac{1}{v^2} \dot{\alpha} \Phi_{\text{BPS}}^a B_{i,\text{BPS}}^a = \frac{1}{m_W} \dot{\alpha} B_{i,\text{BPS}}^a \quad (\text{B.94})$$

其中在第二等号处，我们利用了 $\dot{A}_{i,\text{BPS}}^a (\alpha) = \frac{1}{e} \dot{\chi} (D_i \Phi_{\text{BPS}})^a$ ，这其实是对 $A_i(\alpha) \rightarrow U(\alpha) A_{i,\text{BPS}} U^{-1}(\alpha) + \frac{i}{e} U(\alpha) \partial_i U^{-1}(\alpha)$ 求时间导数带来的结果。在第三个等号处，我们利用了磁场的 BPS 条件。有了电场的这个表达式之后，我们就能求出这个激发态的 BPS 单极子所带的电荷：

$$q_e = \oint_{\partial \mathbb{R}^3} ds^i E_i = \frac{1}{m_W} \dot{\alpha} \oint_{\partial \mathbb{R}^3} ds^i B_i = \frac{1}{m_W} \dot{\alpha} g_m \quad (\text{B.95})$$

对于内部量子数为 n 的激发态而言，其 $\dot{\alpha}$ 的期待值为：

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha e^{-in\alpha} \frac{m_W^2}{M} (-i\partial_\alpha) e^{in\alpha} = \frac{m_W^2}{M} n \quad (\text{B.96})$$

从而, 处于内部量子数为 n 的激发态的 BPS 单极子所带的电荷就是:

$$q_e = \frac{m_W}{M} n g_m = n e \quad (\text{B.97})$$

这就看到了最终的结果: 对于一个 BPS 单极子而言, 其 $n \neq 0$ 的激发态不但具有磁荷 g_m , 还具有电荷 ne , 从而是一个双荷子。

B.3.3 Witten Effect

在前面的讨论中, 我们使用的规范理论 Lagrangian 仅仅包含 CP 守恒的项, 而除去这些项之外, 理论中还可以存在正比于 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$ 的破坏 CP 的 θ 项。在这一节中, 我们考虑的最后一个问题就是: 如果在理论中加入这一项, 那么前面对单极子的讨论会不会改变?

首先, 由于 θ 项可以被写为 Chern-Simons 流的全导数:

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\theta}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a = \frac{\theta}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} \partial_\mu (A_\nu F_{\rho\sigma} + \frac{2}{3} ig A_\nu A_\rho A_\sigma) \quad (\text{B.98})$$

于是它不影响运动方程。并且对于前面所讨论的't Hooft-Polyakov 单极子解而言, 其边界条件 $F_{\mu\nu}^a \sim o(1/r)$ 也意味着 θ 项不会使得单极子的能量发散, 从而前面讨论的运动方程、边界条件、BPS 条件等仍然成立。这也就是说: 加入 θ 项并不改变 BPS 单极子的场构。由于在时性规范下, θ 项又可以写为:

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\theta}{8\pi^2} \dot{\mathbf{A}}^a \cdot \mathbf{B}^a \quad (\text{B.99})$$

从而这一项中一定会涉及到 $\partial_0 A_i$, 这对于稳定的场构型而言一定为 0, 于是 θ 项也不会改变 BPS 单极子的能量。

但是当我们考虑单极子的模空间量子化时, 由于 A_i 有了时间的依赖性, 于是和 $\partial_0 A_i$ 有关的 θ 项会改变 H_{QM} 的表达式, 从而带来一些物理后果。如果我们利用含有 θ 项的 Lagrangian 重新进行上一节的讨论, 经过一些稍显繁琐的计算, 就将得到以下的 Lagrangian:

$$L_{\text{QM}} = -M + \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{x}}_0^2 + \frac{1}{2} \frac{M}{m_W^2} \dot{\alpha}^2 + \frac{\theta}{2\pi} \dot{\alpha} \quad (\text{B.100})$$

这相比之前多了最后一项。这一项的出现会使得 α 对应的正则动量变为 $\pi_\alpha = \frac{M}{m_W^2} \dot{\alpha} + \frac{\theta}{2\pi}$ 。于是经 Legendre 变换后, Hamiltonian 就成为:

$$H_{\text{QM}} = M + \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{x}}_0^2 + \frac{1}{2} \frac{m_W^2}{M} \left(\pi_\alpha - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \quad (\text{B.101})$$

在这个 Hamiltonian 确定的量子理论下, 一个能量本征态依然可以用两个量子数标记为 $|\mathbf{k}, n\rangle$, 空间部分的波函数就仍然是 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, 而内部自由度的波函数也依然是 $e^{in\alpha}, n \in \mathbb{Z}$ 。不过由于正则动量的形式发生了变化, 于是 $\dot{\alpha}$ 的期待值会变为:

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = \frac{1}{2\pi} \frac{m_W^2}{M} \int_0^{2\pi} d\alpha e^{-in\alpha} \left(-i\partial_\alpha - \frac{\theta}{2\pi} \right) e^{in\alpha} = \frac{m_W^2}{M} \left(n - \frac{\theta}{2\pi} \right) \quad (\text{B.102})$$

这也就会导致单极子携带的电荷变为：

$$q_e = \left(n - \frac{\theta}{2\pi} \right) e \quad (\text{B.103})$$

这是个大新闻——如果在 Lagrangian 中加入 θ 项，那么一个 BPS 单极子的电荷将不再是元电荷 e 的整数倍！这个现象最早由 Witten 在 1979 年发现，从而被称为 **Witten 效应**。

到此为止，我们便完成了对't Hooft-Polyakov 单极子的讨论。总结一下：

Summary: 't Hooft-Polyakov Monopole

- 对于一个规范理论而言，如果其中存在对称性自发破缺，并且真空流形 \mathcal{V} 具有非平凡的第二同伦群，那么理论中就将存在孤子解。Georgi-Glashow 模型就是一个这样的理论，其中的孤子解也就是't Hooft-Polyakov 单极子。如果这个孤子解的边界条件具有绕数 Q ，那么相应的't Hooft-Polyakov 单极子就将携带磁荷 $g_m = -4\pi Q/e$ 。
- Bogomolny 限** 告诉我们，一个't Hooft-Polyakov 单极子的质量不能小于 $v\sqrt{g_m^2 + q_e^2}$ 。对于一个一般的单极子，我们并不会解析地求解其场构型。不过在 $M = v\sqrt{g_m^2 + q_e^2}$ 成立的 **BPS 条件下**，我们可以解析地求解这个 **BPS 单极子** 对应的场构型。
- 一个规范理论的规范对称性不完全是冗余的自由度，其中还包含一部分物理对称性。当我们取时性规范 $A_0^a = 0$ 后，剩余的规范变换就是只依赖于空间的规范变换 $U(\mathbf{x})$ 。我们称 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ 时候 $U(\mathbf{x}) \rightarrow 1$ 的规范变换为**小规范变换**，它不改变物理态，是冗余的自由度；而 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ 时不为 1 的规范变换会改变物理态，从而它在小规范变换下的等价类——**大规范变换** 对应体系的物理自由度。
- BPS 单极子的模空间由四个零模给出，其中的三个是单极子中心的位置 \mathbf{x}_0 ，对应空间平移对称性；而最后一个零模 α 对应的是规范对称性的物理部分——大规范变换下的不变性。将这些集体坐标量子化后，体系的能量本征态可以用两个量子数 $|\mathbf{k}, n\rangle$ 来刻画，其中 n 对应的就是 α 给出的内部自由度。对于 $n \neq 0$ 的激发态而言，它除去磁荷之外还会携带电荷 $q_n = ne$ ，从而是**双荷子**。
- 如果在 Lagrangian 中加入正比于 $F\tilde{F}$ 的 θ 项，那么单极子的场构型不会发生任何变化。不过当我们对其集体坐标做量子化之后，**Witten 效应** 告诉我们： θ 项会导致双荷子带有非整数的电荷 $q_n = ne - \frac{\theta}{2\pi}$ 。

B.4 Instantons

B.4.1 Setup: Euclidean Spinors and 't Hooft Symbols

在这一节中，我们讨论的对象是另外一种拓扑场构型——瞬子。简单来说，瞬子是经典场方程的一个含时解，从而也是路径积分中的鞍点。不过瞬子的特殊性在于：瞬子在 $t = \pm\infty$

时趋于两个不同的“真空”场构型⁸，并且具有有限的经典作用量。于是它就会贡献两个不同“真空”之间的跃迁振幅。如果“真空”之间存在这样的跃迁振幅，那么我们必须对不同的“真空”做一个对角化来使其具有确定的能量，并且我们也只能在这个对角化后的、真正的真空中做微扰论。我们将会看到，这个真空的对角化会带来一些重要的物理效应，而这些物理效应都要归功于瞬子的贡献。

后面会看到，在讨论瞬子解时，最方便的方式是将时空做一个 Wick 转动，从 Minkowski 时空变换到 Euclidean 时空中。为了在 Euclidean 时空中讨论问题，我们需要对此时的 $SO(4)$ “Lorentz 群”及其表示有一些了解。这一节的目标就是了解 Euclidean 时空中的这些性质。

首先，让我们复习一下 Minkowski 时空中的 Lorentz 群。在 Minkowski 时空中，Lorentz 群 $SO(3, 1)$ 的生成元 $M^{\mu\nu}$ 被定义为：

$$U(\delta\omega_{\mu\nu}) \equiv 1 + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \quad (B.104)$$

其中 $\omega_{\mu\nu}$ 是一个无穷小的 Lorentz 变换矩阵。这些生成元具有如下的对易关系：

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)) - (\rho \leftrightarrow \sigma) \quad (B.105)$$

这些生成元构成了李代数 $so(3, 1)$ 。除了直接用 $M^{\mu\nu}$ 表达出这些生成元之外，我们还可以定义 $J_i := \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk}$, $K_i := M^{i0}$ 。这样一来，这个对易关系也可以被写成：

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k \quad (B.106)$$

为了讨论 $so(3, 1)$ 的表示，我们可以将这个李代数分为两个 $su(2)$ 李代数的直和。为了看到这一点，可以定义：

$$M_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \quad N_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \quad (B.107)$$

计算 M_i, N_i 的对易关系，就可以得到：

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk}M_k, \quad [N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}N_k, \quad [M_i, N_j] = 0 \quad (B.108)$$

我们发现 M 和 N 各构成两个 $su(2)$ 子代数。于是 $so(3, 1)$ 的表示都可以被写成两个 $su(2)$ 表示 (d) 的直和⁹，可以被标记为 (d_1, d_2) 。在 Minkowski 空间中，左手/右手的 Weyl 旋量就处在表示 $(2, 1)$ 和 $(1, 2)$ 中。如果用 dotted-undotted 指标来标记这两个表示中不同的分量，那么一个左手/右手旋量就可以被写为 $\xi_\alpha, \chi^{\dot{\alpha}}$ 。这两个旋量表示可以通过以下两个投影张量——Pauli 矩阵联系起来：

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu = (1, \vec{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} = (1, -\vec{\sigma}) \quad (B.109)$$

而这两个表示中的生成元也可以用这些 Pauli 矩阵写为：

$$S_L^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2}\left[\frac{1}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)\right] \quad (B.110)$$

$$S_R^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^{\mu\nu} := \frac{i}{2}\left[\frac{1}{2}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)\right] \quad (B.111)$$

⁸这里的“真空”场构型意味着对应经典势的最小值的场构型。我之所以在这里在“真空”一词上加了引号，是因为瞬子贡献了这些“真空”之间的跃迁，于是这里的“真空”并不是量子意义上的真空。在下面的讨论中，我们将沿用这个说法——“真空”对应势的最小值，而不加引号的真空对应量子理论中真正的真空。

⁹这里用维数标记 $su(2)$ 表示。例如 spin-1/2 的表示就标记为 (2)，平凡表示就标记为 (1)。

明白了 Minkowski 时空中 Lorentz 群的性质后, 让我们将时空 Wick 转动为 Euclidean 时空:

$$x_4 := ix^0 = -ix_0, \quad x_I = (\mathbf{x}, x_4) \quad (\text{B.112})$$

为了区分 Euclidean 时空和 Minkowski 时空, 在这个 notes 接下来的讨论中, 我们将用大写的拉丁字母 I, J 代指 Euclidean 时空中的矢量指标、用小写的希腊字母 μ, ν 代指 Minkowski 时空中的矢量指标。另外, 小写的拉丁字母 i, j 被我们用来代指三维的空间指标。

在 Euclidean 时空中, Lorentz 群就描述了这四个坐标轴之间的旋转, 从而是 $\text{SO}(4)$ 群。如果令其生成元是 L_{IJ} , 那么它们满足以下的对易关系:

$$[L_{IJ}, L_{KL}] = i(\delta_{IK}L_{JL} - (I \leftrightarrow J)) + (IJ \leftrightarrow KL) \quad (\text{B.113})$$

如果我们同样定义 $J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}L_{jk}$, $K_i = L_{i4}$, 那么它们的对易关系将会是:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \quad (\text{B.114})$$

可以看到, 这和 Minkowski 时空中的对易关系相差了一个符号。事实上, 如果我们将 Minkowski 中的一切带有 0 指标的東西都按照 $V_4 = iV^0$ 来变换到 Euclidean 时空中, 那么也可以得到相同的对易关系。

$\text{so}(4)$ 代数也可以被写为两个 $\text{su}(2)$ 子代数的直和。为此也需要定义 $M_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i)$, $N_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i)$, 就会发现它们也分别构成 $\text{su}(2)$ 子代数。在矢量表示 (也就是 $\text{SO}(4)$ 在 \mathbb{R}^4 上的表示) 中, 这些 M_i, N_i 的分量可以被写为:

$$(M_i)_{IJ} = -i\bar{\eta}_{iIJ}, \quad (N_i)_{IJ} = -i\eta_{iIJ} \quad (\text{B.115})$$

其中, 我们定义了两个't Hooft 符号:

$$\begin{aligned} \eta_{aIJ} &\equiv \epsilon_{aIJ} + \delta_{aI}\delta_{J4} - \delta_{aJ}\delta_{4I} \\ \bar{\eta}_{aIJ} &\equiv \epsilon_{aIJ} - \delta_{aI}\delta_{J4} + \delta_{aJ}\delta_{4I} \end{aligned} \quad (\text{B.116})$$

再之后讨论瞬子解的时候, 我们会经常用到这些't Hooft 符号。它们的一个重要性质是 **自对偶性**, 也就是说:

$$\eta_{aIJ} = \frac{1}{2}\epsilon_{IJKL}\eta_{aKL}, \quad \bar{\eta}_{aIJ} = -\frac{1}{2}\epsilon_{IJKL}\bar{\eta}_{aKL} \quad (\text{B.117})$$

由于 $\text{so}(4)$ 代数也可以被写为两个 $\text{su}(2)$ 子代数的直和, 从而一个 $\text{so}(4)$ 表示也可以用两个 $\text{su}(2)$ 表示标记为 (d_1, d_2) , 我们也可以讨论处于表示 $(2, 1)$ 和 $(1, 2)$ 中的 Euclidean 旋量 $\xi_\alpha, \chi^\dot{\alpha}$ 。也有以下的 Euclidean Pauli 矩阵作为投影张量联系这两个表示:

$$(\tau_I^-)_{\alpha\dot{\beta}} = (\vec{\sigma}, i), \quad (\tau_I^+)^{\dot{\alpha}\beta} = (\vec{\sigma}, -i) \quad (\text{B.118})$$

它们也可以通过对 Minkowski 时空中的 Pauli 矩阵做 Wick 转动而得到¹⁰。对于这两个旋量表示而言, 其生成元也就是:

$$(S_L)_{IJ} = \frac{1}{2}\sigma_{IJ} := \frac{1}{2} \left[-\frac{i}{2} (\tau_I^- \tau_J^+ - \tau_J^- \tau_I^+) \right] \quad (\text{B.119})$$

$$(S_R)_{IJ} = \frac{1}{2}\bar{\sigma}_{IJ} := \frac{1}{2} \left[-\frac{i}{2} (\tau_I^+ \tau_J^- - \tau_J^+ \tau_I^-) \right] \quad (\text{B.120})$$

¹⁰不过 $\vec{\sigma}$ 在转动后需要额外加一个负号才能得到 τ^+ 。同样的, Euclidean 空间的 σ_{IJ} 的定义中也额外加了一个负号。至于为什么要添加这个符号, 是我们希望这两个 Euclidean Pauli 矩阵互为 Hermitian 共轭的缘故。

容易验证：利用't Hooft 符号，我们还可以将这些 σ_{IJ} 矩阵写为：

$$\sigma_{IJ} = \bar{\eta}_{aIJ}\sigma^a, \quad \bar{\sigma}_{IJ} = \eta_{aIJ}\sigma^a \quad (\text{B.121})$$

利用这两个 Weyl 旋量，我们也可以构造出 Dirac 旋量 $\Psi = (\psi_{L\alpha}, \psi_R^{\dot{\alpha}})^T$ ，并且定义以下的 Gamma 矩阵：

$$\gamma_I = (\gamma_i, i\gamma^0) = \begin{pmatrix} 0 & \tau^- \\ -\tau^+ & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.122})$$

不过当我们试图写出 Dirac 旋量的作用量时，会遇到一个问题：和 Minkowski 时空不同的是，Euclidean 时空中的旋量表示是赝实的，也就是说一个处于左手旋量表示中的旋量在取复共轭后仍然处于左手旋量表示，而右手表示亦然。这可以通过验证以下关系看到：

$$(\sigma_{IJ})^* = \tau_2^- \sigma_{IJ} \tau_2^- \quad (\text{B.123})$$

从而，Euclidean 时空中的左右手旋量需要被看成独立的自由度。在我们写出 Euclidean 时空中旋量场的 Lagrangian 时，写出的相互作用就不再是 $\psi_L^\dagger \bar{\sigma}_\mu \psi_L$ ，而应该是 $\psi_R^\dagger \bar{\sigma}_\mu \psi_L$ 。对于一个 Minkowski 时空中的 Dirac 旋量场 $\Psi = (\psi_{L\alpha}, \psi_R^{\dot{\alpha}})^T$ 而言，其共轭是 $\bar{\Psi} = (\psi_R^\dagger, \psi_L^\dagger)$ ，而在 Euclidean 时空中，其共轭应该被写为 $\bar{\Psi} = (\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger) = \Psi^\dagger$ ，这样才能正确地和 Gamma 矩阵收缩。

在 Minkowski 时空中，一个自由 Dirac 旋量场的 Lagrangian 是：

$$\bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m\psi_R^\dagger \psi_L - m\psi_L^\dagger \psi_R \quad (\text{B.124})$$

而在 Euclidean 时空中，正确的 Lagrangian 应该是：

$$-i\psi_R^\dagger \tau_I^+ \partial_I \psi_L + i\psi_L^\dagger \tau_I^- \partial_I \psi_R - m\psi_L^\dagger \psi_L - m\psi_R^\dagger \psi_R \quad (\text{B.125})$$

从而在将 Minkowski 空间中的 Dirac 旋量变换到 Euclidean 空间时，我们可以令：

$$(\psi_L)_E = \psi_L, \quad (\psi_R)_E = \psi_R, \quad (\psi_L^\dagger)_E = \psi_R^\dagger, \quad (\psi_R^\dagger)_E = \psi_L^\dagger \quad (\text{B.126})$$

并且将 ψ_L, ψ_L^\dagger 看作互相独立的实自由度。这样一来，Euclidean 时空中 Dirac 费米子的 Lagrangian 也可以被写为 $i\bar{\Psi}\gamma_I\partial_I\Psi$ ，并且其中 $\bar{\Psi}, \Psi$ 都和 Minkowski 时空中的旋量具有相同分量，只不过 $\bar{\Psi}$ 的变换关系要如同 Ψ^\dagger 而非 $\Psi^\dagger\beta$ 一样变换。

直到此处，我们就大约明白了 Euclidean 空间中的旋量具有什么样的性质。另外一部分需要讨论的是：在 Euclidean 时空中的路径积分应该如何建立。在 Minkowski 时空中，场论的路径积分是：

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp [iS[\phi]] \quad (\text{B.127})$$

量子场论中的一切物理量都可以通过计算路径积分而得到。而由于我们不希望 Wick 转动改变物理量本身，于是当我们转动到 Euclidean 时空中后，一切 Lorentz 标量还是原来的 object，只不过其宗量从 Minkowski 时空坐标转化为了 Euclidean 时空坐标：

$$\phi(x, t) \rightarrow \phi(x, x_4 = ix^0) \quad (\text{B.128})$$

如果一个物理量中含有矢量指标，那么我们也需要对相应的指标做一下 Wick 转动。例如 Minkowski 时空中的规范场 A_μ^a 在 Euclidean 时空中就应该变为 $A_I^a(x^\mu) =$

$(\mathbf{A}^a(x_I), iA^{a0}(x_I))$ 。对于和旋量相关的物理量，我们只需要将左右手共轭旋量交换，并把 Pauli 矩阵换成 Euclidean 时空中的版本 τ_I^\pm 。作为一个最简单的例子，Minkowski 时空中的 Lagrangian $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ 在 Euclidean 时空中是：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_I\phi\partial_I\phi \quad (\text{B.129})$$

在 Euclidean 时空中，我们希望作用量是正定的，而上面这个表达式是负定的。于是我们将 Euclidean 作用量定义为：

$$S_E[\phi] := -S[\phi] \quad (\text{B.130})$$

为了保证物理相同，路径积分本身值应该是在 Wick 转动前后只相差一个常数的。由于路径积分测度在这个变换下只变换一个常数，并且根据 $d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3 = -idx^1dx^2dx^3dx^4 = -id^4x_E$ ，于是作用量满足：

$$iS[\phi] = i \int d^4x \mathcal{L}(x^\mu) = - \int d^4x_E \mathcal{L}(x_I) = -S_E[\phi] \quad (\text{B.131})$$

于是 Euclidean 场论中的路径积分就是：

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp [iS[\phi]] = \int \mathcal{D}\phi_E \exp [-S_E[\phi]] \quad (\text{B.132})$$

由于路径积分不变，于是如此建立的 Euclidean 场论应该和 Minkowski 时空中的场论具有相同的物理。到此为止，我们就明白了 Euclidean 时空中的量子场论应该如何建立，我们在接下来的讨论中会频繁地用到这些记号。

B.4.2 Instantons and Theta Vacua

有了这些讨论之后，我们就可以进入这个 notes 的正题——讨论瞬子了。在前面说过：在规范理论中，瞬子是在 $t \pm \infty$ 时刻趋于两个不同真空的经典解，于是为了看到瞬子，我们先要对规范理论的真空结构有一定的了解。为此，我们先考虑一个纯 Yang-Mills 理论，其 Lagrangian 为：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (\text{B.133})$$

首先，“真空”对应经典上能量最低的稳定场构型，这些场构型和 $A_i = 0$ 之间只能相差一个规范变换：

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{i}{g}U(\mathbf{x})\partial_i U^\dagger(\mathbf{x}) \quad (\text{B.134})$$

我们马上将会看到：如果这个规范变换 $U(\mathbf{x})$ 在 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ 时不趋于一个固定的、和空间方向无关的常数，那么将不存在能够联系这个场构型和 $A_i^a = 0$ 的场构型的、作用量有限的瞬子，从而这个场构型和 $A_i^a = 0$ 之间就不能相互跃迁。由于我们实际上关心的是可以互相跃迁的“真空”，于是下面考虑的“真空”就都属于 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ 时 $U(\mathbf{x}) \rightarrow$ 常数的情形。

这个边界条件可以被认为是将 \mathbb{R}^3 “紧致化”了：如果空间无穷远可以被认同为一点，那么我们就可以通过球极投影的方式将这个 \mathbb{R}^3 映射到 S^3 上。从而此时的 $U(\mathbf{x})$ 给出了一个 $S^3 \rightarrow G$ 的映射，它便可以用第三同伦群 $\pi_3(G)$ 来分类。

对于 $\pi_3(G)$ 中不同同伦类中的规范变换而言, 由于它们无法被连续地互相变换, 于是我们认为它们在量子理论中对应不同的“真空”态。于是对于这个纯 Yang-Mills 理论而言, 其“真空”一一对应于规范群 G 的第三同伦群 $\pi_3(G)$ 中的元素。例如对于规范群为 $SU(2)$ 的规范理论而言, 由于 $\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$, 从而理论中就有无穷多的、分立的、简并的“真空”。

更加一般地, 附录的同伦群表告诉我们: 一个紧致、联通、单纯的规范群的第三同伦群一定是 $\pi_3(G) = \mathbb{Z}$ 。于是对于一个具有紧致、联通、单纯规范群的规范理论而言, 其中就有无穷多分立、简并的“真空”态。由于 $\pi_3(G) = \mathbb{Z}$ 中的每个同伦类都可以用一个绕数 n 来标记, 于是对应的“真空”态也可以用绕数标记为 $|n\rangle$ 。

正如前面所说: 在这样一个具有无穷多简并“真空”的理论中, 瞬子就是一个具有有限作用量的、在无穷远的过去趋于一个“真空” $|n\rangle$, 在无穷远的未来趋于另外一个“真空” $|n'\rangle$ 的经典含时解。为了讨论的简便, 我们将场论 Wick 转动到 Euclidean 时空。此时 Yang-Mills 理论的作用量为:

$$S_E = \frac{1}{4} \int d^4x \, {}_E F_{IJ}^a F^{aIJ} \quad (B.135)$$

从而, 一个具有有限作用量的含时解就一定要满足:

$$F^{aIJ}(|x| \rightarrow \infty) \rightarrow o(1/r^2) \quad (B.136)$$

从而:

$$A_I^a(|x| \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{i}{g} U(x) \partial_I U^\dagger(x) + o(1/r) \quad (B.137)$$

由于四维 Euclidean 时空的边界也具有 S^3 的拓扑, 于是一个具有有限作用量的含时解的时空边界条件也可以用映射 $S^3 \rightarrow G$ 来刻画, 而这样的映射也可以利用同伦群 $\pi_3(G)$ 来分类。事实上, 这里用于分类含时解的拓扑数和前面用于分类真空构型的拓扑数之间具有很直接的联系:

Theorem 8. 对于一个具有拓扑数 Q 的含时解, 由于其作用量有限, 它在 $x_4 \rightarrow \pm\infty$ 的时刻一定趋于一个能量为 0 的“真空”场构型。如果这些渐进时刻上“真空”场构型的拓扑数分别是 $\mathcal{K}(x_4 \rightarrow \pm\infty)$, 那么这些拓扑数之间满足:

$$Q = \mathcal{K}(x_4 \rightarrow \infty) - \mathcal{K}(x_4 \rightarrow -\infty) \quad (B.138)$$

我们将不会给出这个定理的证明, 不过当我们在后面给出 explicit 的瞬子解时, 我们将会验证这一关系。如果我们接受这个结论, 那么一个具有拓扑数 Q 的含时解就联系了两个拓扑不等价的经典真空, 从而就是一个瞬子。这告诉我们: 要寻找瞬子, 就可以寻找拓扑非平庸的含时解。

根据路径积分原理, 这两个经典真空对应的量子“真空” $|n\rangle, |n+Q\rangle$ 之间的跃迁振幅就是:

$$\langle n+Q, \infty | n, -\infty \rangle = \int_{A(-\infty)=A_n}^{A(-\infty)=A_{n+Q}} \mathcal{D}A \exp(-S_E[A]) \quad (B.139)$$

由于瞬子具有有限的作用量, 于是它一定贡献对这些路径的求和。这也就是说: 瞬子贡献了两个不同“真空”之间的跃迁振幅, 使得:

$$\langle n+Q, \infty | n, -\infty \rangle \approx \exp(-S_{\text{Instanton}}(Q)) \quad (B.140)$$

其中 $S_{\text{Instanton}}(Q)$ 是具有拓扑数 Q 的瞬子解的作用量。作为一个估计, 如果我们能够将一个拓扑数 Q 的瞬子看作 Q 个具有拓扑数 1 的瞬子的叠加, 那么 $S_{\text{Instanton}}(Q)$ 就是 $QS_{\text{Instanton}}$, 其中 $S_{\text{Instanton}}$ 是具有拓扑数 1 的瞬子的作用量。这样一来, 两个不同“真空”之间的跃迁振幅就正比于:

$$\langle n', \infty | n, -\infty \rangle \approx \exp(-|n' - n| S_{\text{Instanton}}) \quad (\text{B.141})$$

既然“真空”之间存在跃迁, 那么它们就不应该作为真正的、可以用于微扰展开的真空而存在。为了得到真正的真空, 我们需要对这些“真空”的能量做一个对角化。由于真空之间的跃迁振幅之和拓扑数之差 $|n' - n|$ 有关, 从而这个对角化可以通过对“真空”做离散 Fourier 变换得到:

$$|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta} |n\rangle \quad (\text{B.142})$$

这样的 θ -真空就是具有确定能量本征值的真空, 可以在其附近做微扰论。不过需要注意的是: 在 θ -真空附近, 作用量会出现额外的项。为了看到这一点, 考虑 θ -真空附近的生成泛函:

$$\begin{aligned} Z_\theta[J] &= \langle \theta, \infty | \theta, -\infty \rangle_J = \sum_{m,n} e^{i\theta(n-m)} \langle m, \infty | n, -\infty \rangle \\ &= \sum_Q e^{i\theta Q} \int (\mathcal{D}A)_Q \exp \left(iS[A] + i \int d^4x JA \right) = \int \mathcal{D}A \exp \left(iS[A] + i\theta Q[A] - \int d^4x JA \right) \end{aligned} \quad (\text{B.143})$$

其中测度 $(\mathcal{D}A)_Q$ 中只有拓扑数为 Q 的路径。从而在 θ -真空附近, 体系的作用量中应该要加上一项 θ -项:

$$S_\theta[A] = S[A] + \theta Q[A] \quad (\text{B.144})$$

由于瞬子产生了 θ -真空, 于是这一项可以被认为是瞬子对路径积分的贡献。特别地, 如果我们的规范群是 $SU(2)$, 由于同伦群 $\pi_3(SU(2))$ 对应的拓扑数是:

$$Q = \frac{1}{24\pi^2} \int_{\partial\mathbb{R}^4} dS_I \varepsilon^{IJKL} \text{Tr} \left[(U \partial_J U^{-1}) (U \partial_K U^{-1}) (U \partial_L U^{-1}) \right] = \frac{ig^3}{24\pi^2} \int_{\partial\mathbb{R}^4} dS_I \varepsilon^{IJKL} \text{Tr} [A_J A_K A_L] \quad (\text{B.145})$$

这给出了 θ -项用规范场写出的具体表达式。如果我们想要把它进一步地写成 Lagrangian 中的一项, 就需要将这个面积分改写为一个体积分。为此可以定义一个 Chern-Simons 流:

$$J_{\text{CS}}^I = 2\varepsilon^{IJKL} \text{Tr} \left[A_J F_{KL} + \frac{2}{3}ig A_J A_K A_L \right] \quad (\text{B.146})$$

由于在时空无穷远处规范场趋于纯规范, 从而场强为 0, Chern-Simons 流中的第一项就是 0。这样一来, 这个拓扑数就可以被写为:

$$Q[A] = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_{\partial\mathbb{R}^4} dS_I J_{\text{CS}}^I = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_E \partial_I J_{\text{CS}}^I \quad (\text{B.147})$$

容易验证, Chern-Simons 流的导数正是:

$$\partial_I J_{\text{CS}}^I = 2\varepsilon^{IJKL} \text{Tr} \left[\partial_I A_J F_{JK} + A_J \partial_I F_{KL} + \frac{2}{3}ig \partial_I (A_J A_K A_L) \right] = \varepsilon^{IJKL} \text{Tr} [F_{IJ} F_{KL}] \quad (\text{B.148})$$

从而，拓扑数也就可以被写为：

$$Q[A] = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x_E \varepsilon^{IJKL} \text{Tr}[F_{IJ}F_{KL}] = -\frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}[F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}] \quad (\text{B.149})$$

在第二个等号处，我们利用了 $\epsilon^{1234} = -\epsilon^{1230}$, $d^4x_E = -id^4x$ 和 $A_4 = -iA_0$ 。由此便得到：在 θ -真空附近做微扰论时额外需要加入的 θ -项也就是¹¹：

$$S_\theta = -\frac{\theta g^2}{32\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}[F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}] = -\frac{\theta g^2}{64\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{a\rho\sigma} \quad (\text{B.150})$$

我想有一点需要额外声明一下：这里的归一化是取 T^a 为基本表示中的生成元后的结果，于是在这里才能利用 $\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ 这一结论。如果需要考虑其他表示中的生成元，那么后面这个用 $F_{\mu\nu}^a$ 写出的结果才是真正的拓扑荷 $Q[A]$ 。

事实上，不仅仅在 $SU(2)$ 的规范理论中的 θ -项有如此的形式，在任意的规范群为单李群的规范理论中， θ -项都可以写为正比于 $\text{Tr}[F\tilde{F}]$ 的这个形式。这可以被认为是我们第七章中讨论到的 θ 项的来源。

B.4.3 The BPST Instanton

在前面的这一切讨论中，我们事实上只用到了瞬子解的存在性，而并没有 explicitly 地去构造一个瞬子解。事实上，和求解't Hooft-Polyakov 单极子解一样，由于 Yang-Mills 方程是复杂的非线性偏微分方程，于是求解一个一般的瞬子解是一个很复杂的问题。不过退而求其次地，我们可以求出极限条件下的瞬子。由于：

$$\int d^4x_E (F \mp \tilde{F})^2 = 2 \int d^4x_E (F^2 \mp F\tilde{F}) \geq 0 \quad (\text{B.151})$$

这对瞬子的作用量有以下的限制：

$$S_E[A] = \frac{1}{4} \int d^4x_E F^2 \geq \frac{8\pi^2}{g^2} \left[\frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x_E F\tilde{F} \right] = \frac{8\pi^2}{g^2} Q[A], \quad S[A] \geq -\frac{8\pi^2}{g^2} Q[A] \quad (\text{B.152})$$

也就是说：

$$S_E[A] \geq \frac{8\pi^2}{g^2} |Q[A]| \quad (\text{B.153})$$

这被称为 **Bogomol'nyi 限**。容易看到：对于一个拓扑数为 Q 的瞬子，如果这个不等式中的等号成立，那么对于 $Q > 0$ 的情形，一定有 $F - \tilde{F} = 0$ ，而对 $Q < 0$ 的情形，一定有 $F + \tilde{F} = 0$ 。回忆前面提到过的电磁对偶，它的对偶变换是交换 F, \tilde{F} 的地位。于是这个结论告诉我们，满足这个极限条件的瞬子一定是自对偶或反自对偶的。

接下来，我们就开始考虑拓扑数 Q 为 1 的瞬子解。由于满足自对偶条件解一定是作用量的极小值，于是它也一定满足 Yang-Mills 方程。此时我们就可以将复杂的 Yang-Mills 方

¹¹ 你肯定认识这个形式——这和前面我们看到的手征反常具有相同的形式。在后面讨论瞬子背景下的无质量费米子时，我们就将看到：瞬子和手征反常是紧密联系在一起的。

程替换为稍微简单的自对偶条件。当然，除去方程之外，我们还需要一个拓扑数为 1 的边界条件。这可以被取为¹²：

$$A_I \rightarrow \frac{i}{g} U_1 \partial_I U_1^\dagger, \quad U_1(x) := \frac{i\tau_I^+ x_I}{\sqrt{x^2}} = \frac{x_4 \mathbf{1}_{2 \times 2} + i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{x^2}} \in \mathrm{SU}(2) \quad (\mathrm{B.154})$$

其中 τ_I^- 就是第 0 节中讨论到的 Euclidean Pauli 矩阵。现在的问题就是在这个边界条件下找到一个满足自对偶条件的解。为此，可以先写出如下形式的试探解：

$$A_I(x) = \frac{i}{g} f(x^2) U_1 \partial_I U_1^\dagger \quad (\mathrm{B.155})$$

将这个解代入自对偶条件，会得到以下的方程：

$$f(1-f) - x^2 f' = 0 \quad (\mathrm{B.156})$$

我们给出的边界条件意味着 $f(\infty) = 1$ ，并且为了 $A_I(0)$ 有限， f 还需要满足 $f(0) = 0$ 。根据这两个边界条件，我们可以解出：

$$f(x^2) = \frac{x^2}{x^2 + \rho^2} \quad (\mathrm{B.157})$$

其中 ρ 是一个积分常数，在这个瞬子解中的物理意义也就是瞬子的时空尺度。到此为止，我们就得到了满足自对偶条件的 explicit 的瞬子解：

$$A_I(x) = \frac{i}{g} \frac{x^2}{x^2 + \rho^2} U_1 \partial_I U_1^\dagger = \frac{\eta_{aIJ} \sigma^a}{g} \frac{x_I}{x^2 + \rho^2}, \quad A_I^a(x) = \frac{2}{g} \frac{\eta_{aIJ} x_J}{x^2 + \rho^2} \quad (\mathrm{B.158})$$

为了纪念其发现者，这个瞬子解被称为 **BPST 瞞子**。由于它满足 Bogol'omyi 条件，于是其作用量也就是：

$$S_{\text{Instanton}} = \frac{8\pi^2}{g^2} \quad (\mathrm{B.159})$$

从而，BPST 瞞子对路径积分的贡献也就正比于 $\exp(-8\pi^2/g^2)$ 。

到此为止，我们已经构造出了一个 $Q = 1$ 的瞬子解，是时候验证它满足关系 $Q = \mathcal{K}(\infty) - \mathcal{K}(-\infty)$ 了。由于真空场构型的拓扑数 \mathcal{K} 是在 $A_4 = 0$ 的时性规范中定义的，而 BPST 瞞子解并非处于这一规范下。为了给出渐进时刻中 BPST 瞞子解对应的 $\mathcal{K}(\pm\infty)$ ，首先要将它变换到时性规范下。如果我们对 BPST 瞞子做一个规范变换，那么它的构型就将成为：

$$A_I \rightarrow A'_I = U^\dagger A_I U + \frac{i}{g} U \partial_I U^\dagger \quad (\mathrm{B.160})$$

时性规范要求变换后的 $A_4 = 0$ ，从而：

$$A'_4 = U^\dagger A_4 U + \frac{i}{g} U \partial_4 U^\dagger = 0 \quad (\mathrm{B.161})$$

¹²注意：在对瞬子的讨论中，我们一直都没有用时性规范，从而这个边界中 A_4 并不是 0！

代入 BPST 瞬子解，便可以得到 U 满足的以下方程：

$$\partial_4 U + \frac{x^2}{x^2 + \rho^2} (U_1 \partial_4 U_1^\dagger) U = 0 \quad (\text{B.162})$$

求解这个微分方程，可以得到：

$$\begin{aligned} U(\infty, \mathbf{x}) &= \exp \left[- \int_{-\infty}^{\infty} dx_4 \frac{x^2}{x^2 + \rho^2} (U_1 \partial_4 U_1^\dagger) \right] U(-\infty, \mathbf{x}) \\ &= \exp \left[- \int_{-\infty}^{\infty} dx_4 \frac{i\sigma \cdot \mathbf{x}}{x^2 + \rho^2} \right] U(-\infty, \mathbf{x}) = \exp \left[- \frac{i\pi\sigma \cdot \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^2 + \rho^2}} \right] U(-\infty, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{B.163})$$

作用这样的一个规范变换 $U(x)$ 后，BPST 瞬子就被放进了时性规范中。在时空无穷远处，由于 BPST 瞬子对应的规范群元素是 $U_1(\pm\infty, \mathbf{x}) = 1$ ，从而变换后对应的规范群元素也就是这个 $U(\pm\infty, \mathbf{x})$ 。并且容易通过计算拓扑数验证： $\exp \left[-i\pi\sigma \cdot \mathbf{x} / \sqrt{\mathbf{x}^2 + \rho^2} \right]$ 对应的拓扑数是 1，从而由于拓扑数满足 $Q[g_1 g_2] = Q[g_1] + Q[g_2]$ ，于是 $U(\pm\infty, \mathbf{x})$ 之间相差的拓扑数也就是 1。这便在 BPST 瞬子的情形下验证了关系 $Q = \mathcal{K}(\infty) - \mathcal{K}(-\infty)$ 。

Instantons in $SU(N)$ Gauge Theories

现在我们已经得到了 $SU(2)$ 规范理论中的瞬子解，接下来我们想要做的就是将这个瞬子解拓展到任意 $SU(N)$ 的情形。对于任意的 $SU(N)$ 而言，其第三同伦群都是 $\pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z}$ ，于是以其为规范群的理论中也一定含有瞬子解。事实上，前面给出的 $SU(2)$ 瞬子可以被简单地嵌入 $SU(N)$ 中。只需要注意到 $su(N)$ 代数中包含以下的矩阵：

$$T^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad T^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & \cdot & \cdot \\ i & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad T^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (\text{B.164})$$

如果我们如下定义一个经典解，使其前三个分量和 $SU(2)$ 瞬子完全一致，而其他分量均为 0：

$$A_I = \sum_{i=1}^3 \frac{2}{g} \frac{\eta_{iIJ} x_J}{x^2 + \rho^2} T^i \quad (\text{B.165})$$

那么这个解将仍然满足 $SU(N)$ 规范理论中的 Bogol'omyi 条件，并且具有拓扑数 1。从而，这个解也应该是 $SU(N)$ 规范理论中的瞬子。由于 $\pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z}$ ，所有 $SU(N)$ 的拓扑场构型只需要用一个瞬子数来刻画，从而 $SU(N)$ 规范理论中的所有瞬子解都能通过对这个解做规范变换得到。这也就意味着：前面讨论过的所有内容都能照搬到任意 $SU(N)$ 的情形。

B.4.4 Moduli of BPST Instanton

到此为止，我们所讨论的一切瞬子解都是经典的，而对瞬子解在路径积分中的贡献的讨论也不超过驻定相位近似的领头阶。为了将我们的讨论拓展到更高阶的量子修正，我们就有必要考虑瞬子解附近的量子涨落。

为了考虑这些量子涨落，我们可以将规范场的作用量 $S[A]$ 在瞬子解 $A_I^{(0)}$ 附近展开。由于瞬子是 Yang-Mills 理论的经典解，于是这个展开中的一次项自然为 0，而如果想要将瞬子在路径积分中的效应计算到单圈阶，就只需要将作用量展开到 Gaussian 阶¹³，并试图计算出这个 Gaussian 的路径积分：

$$Z = \int \mathcal{D}(\delta A) \exp \left(-S[A^{(0)}] - \frac{1}{2} \int d^4x_E d^4y_E \delta A(x) \left(\frac{\delta^2 S_E[A]}{\delta A(x) \delta A(y)} \right)_{A=A^{(0)}} \delta A(y) \right) \quad (\text{B.166})$$

naive 地想，我们似乎可以利用 Gaussian 积分公式

$$\int d^n x \exp \left(-\frac{1}{2} x^T M x \right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det M}} \quad (\text{B.167})$$

来计算这个积分，得到 $\left[\det \left(\frac{\delta^2 S_E[A^{(0)}]}{\delta A(x) \delta A(y)} \right) \right]^{-1/2}$ 。不过事实上，由于矩阵 $\frac{\delta^2 S_E[A]}{\delta A(x) \delta A(y)}$ 存在 0 本征值，于是这样的计算是行不通的。为了看到这些 0 本征值，可以将瞬子解中的 x 替换为 $x - x_0$ ，这样得到的以下场结构也是一个满足自对偶条件的、 $Q = 1$ 的瞬子：

$$A_I(x, x_0) = \frac{i}{g} \frac{(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2 + \rho^2} U_1(x - x_0) \partial_I U_1^\dagger(x - x_0) \quad (\text{B.168})$$

由于它也满足自对偶条件，于是其作用量也是 $8\pi/g^2$ ，从而任意改变 x_0 都不会改变这个作用量。这也就是说：如果在瞬子解附近变化一个：

$$\delta A = \left(\frac{\partial A^{(0)}(x, x_0)}{\partial x_0^\mu} \right)_{x_0=0} \delta x_0^\mu \quad (\text{B.169})$$

那么这个变化将不改变体系的作用量，也就对应矩阵 $\frac{\delta^2 S_E[A]}{\delta A(x) \delta A(y)}$ 的 0 本征值，这样的 δA 被我们称为瞬子解的一个零模。由于这些零模的存在，我们并不能直接利用 Gaussian 积分计算出前面这个路径积分。

那么，前面的讨论出了什么问题呢？答案就是在这些零模对应的方向上，量子效应并不小，不能简单地看作小量进行展开。事实上，前面的讨论中仅仅考虑到了单一参数的瞬子的贡献，而在计算一个路径积分时，我们应该对全部的鞍点——也就是全部可能参数的瞬子求和。由于这些零模对应不同参数的瞬子，于是这些零模对路径积分的贡献就应该相当于对瞬子的不同参数进行积分，从而瞬子对路径积分的贡献应该有以下的形式：

$$\begin{aligned} & e^{-S_E[A^{(0)}]} \int d[\text{parameters}] \int \mathcal{D}(\delta A)_{\text{Nonzero modes}} \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^4x_E d^4y_E \delta A(x) \left(\frac{\delta^2 S_E[A^{(0)}]}{\delta A(x) \delta A(y)} \right) \delta A(y) \right) \\ &= e^{-S_E[A^{(0)}]} \int d[\text{parameters}] \det' \left(\frac{\delta^2 S_E[A^{(0)}]}{\delta A(x) \delta A(y)} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.170})$$

其中 \det' 意味着求这个矩阵的所有非零本征值之积。当然，看到这个式子之后你自然会问：我们应该如何计算排除零模后的这个行列式？又应该如何对瞬子的这些参数进行积分？在这个 notes 的后面，我们将会详细讨论这一点。作为这个讨论的第一步，我们必须先知道 BPST 瞞子有什么样的零模。这也就是这一节剩下的部分想要解决的问题。

¹³ 单圈阶 =Gaussian 阶的这个结论可以通过数 \hbar 轻松地得到，具体的讨论参见我的场论 notes 的第 3.7 节。

一个比较显然的观察是：零模和对称性息息相关。如果理论具有一个对称性，而这个对称性并不是瞬子解的对称性，那么作用一个无穷小对称变换后体系的作用量就不应该改变，而规范场的改变 δA 也不是 0。这样一来，这个无穷小对称变换也就对应一个零模。例如前面关于 x_0 的这个例子：在这个例子下，由于理论具有时空平移下的对称性，而瞬子解并不具有这样的对称性，从而这个对称性会带来四个零模。这也就是说：我们可以通过对称性来寻找 BPST 瞬子的零模：

- 我们考虑的第一部分对称性就是空间平移对称性。前面的讨论已经告诉我们，这个对称性会带来对应 $x_{0,I}$ 的四个零模。
- 第二部分对称性来自于瞬子解中的积分常数 ρ 。由于不同 ρ 的解全部都是满足自对偶条件，从而如果我们改变瞬子解的 ρ ，作用量也不会随之改变。从而 ρ 也就对应瞬子解的一个零模。从对称性的角度看，改变 ρ 相当于对瞬子解做了一个重标度，而这个零模也就来自于 BPST 瞬子在重标度下的对称性。
- 除去这些对称性之外，理论还有 $SU(2)$ 的规范不变性和时空转动下的对称性。不过我们将会看到：这两部分变换对瞬子而言并不是独立的，这六个生成元中有三个不会改变瞬子解，从而不给出任何零模。也就是说，瞬子保持了某些 Lorentz 变换和整体规范变换的联合变换下的对称性。为了看到这一点，我们首先需要知道瞬子解如何在这些变换下改变。

由于 $U_1(x)$ 本身就对应规范场的一个规范变换，于是在 $SU(2)$ 规范变换下， $U_1(x)$ 的变换关系也就是 $U_1(x) \rightarrow UU_1(x)$ 。而在 Euclidean 时空中，Lorentz 变换也是一个 $SO(4)$ 转动。由于 τ_I^+ 是一个投影张量，于是它满足：

$$(\tau_I^+)^{\dot{\alpha}\alpha} = R_{IJ}(U_L)^\alpha_{\beta}(U_R)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}(\tau_J^+)^{\dot{\beta}\beta} \quad (B.171)$$

其中 R, U_L, U_R 分别是矢量表示、左手和右手旋量表示下的 $SO(4)$ 转动。由于 R_{IJ} 是一个正交矩阵，它满足 $R_{IJ}R_{IK} = 1$ ，从而这个关系也可以被写为：

$$R_{IJ}(\tau_I^+)^{\dot{\alpha}\alpha} = (U_L)^\alpha_{\beta}(U_R)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}(\tau_J^+)^{\dot{\beta}\beta} \quad (B.172)$$

由此可知： $i\tau_I^+ x_I$ 在 $SO(4)$ 转动下的变换关系就是：

$$(i\tau_I^+ x_I)^{\dot{\beta}\beta} = i\tau_I^+ R_{IJ} x_J = (U_L)^\alpha_{\beta}(U_R)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}(i\tau_I^+ x_I)^{\dot{\beta}\beta} = U_R(i\tau_I^+ x_I)(U_L^\dagger)^T \quad (B.173)$$

由于 $U_1 = i\tau_I^+ x_I / \sqrt{x^2}$ ，从而 $U_1(x)$ 在这个时空转动下的变换也是：

$$U_1(x) \rightarrow U_R U_1(x) U_L^* \quad (B.174)$$

从中可以看出：只要我们令 $U_L = 1$ ，并且在做完这个 $SO(4)$ 转动后做一个 $U = U_R^\dagger$ 的 $SU(2)$ 规范变换， $U_1(x)$ 便保持不变。从而由于 Yang-Mills 方程和边界条件都满足这个联合变换下的对称性，于是最终得到的瞬子解也包含这个对称性。如果瞬子具有某种对称性，那么这部分对称变换对应 $\delta A = 0$ ，也就不会给出任何零模。这也可以说成是瞬子具有的对称性“吃掉”了原本应该存在的零模。由于一个 $SU(2)$ 转动有三个自由度，从而这部分对称性将会“吃掉” $SU(2)_{\text{Gauge}} \times SU(2)_R$ 转动中的三个零模。

在此之外, 由于瞬子解对 U_1 的依赖形如 $U_1 \partial U_1^\dagger$, 如果我们对其做一个 $SU(2)_L$ 转动, 那么 $U_1 \partial U_1^\dagger$ 的变换关系就是:

$$U_1 \partial U_1^\dagger \rightarrow U_1 U_L^T \partial (U_L^* U_1^\dagger) = U_1 \partial U_1^\dagger \quad (\text{B.175})$$

从而, $SU(2)_L$ 转动也不会改变瞬子解的形式, 这三个零模也被“吃掉”了。综上所述, 规范-时空转动一共有九个生成元, 不过其中的六个对应的变换都不改变瞬子解, 从而只有三个 $SU(2)_{\text{Gauge}} \times SU(2)_R$ 转动变换对应瞬子的零模。这些零模对应 $U_{\text{Gauge}} = U_R$ 的变换。如果定义 $U = U_R^2$, 那么这些变换对瞬子解就有以下的作用:

$$A_I \rightarrow U^\dagger A_I U \quad (\text{B.176})$$

如果我们对将上面所有部分的讨论全部考虑在内, 我们就找到了 BPST 瞞子的全部八个零模, 它们由四个时空平移, 一个重标度和三个没有被“吃掉”的 $SU(2)_{\text{Gauge}} \times SU(2)_R$ 转动给出。对于 $SU(N)$ 瞞子而言, 我们在下一节中马上将会看到它一共具有 $4N$ 个零模, 其中仍然有五个零模对应时空平移和重标度, 剩下的 $4N - 5$ 个都对应 $SU(N)$ 规范转动和 $SO(4)$ 的空间转动。

B.4.5 Zero Modes from Atiyah-Singer Index Theorem

读到这里, 你一定会问: 为什么这八个零模就是 BPST 瞞子的全部零模? 事实上, 对于一个满足自对偶条件的瞬子而言, 其零模个数是完全由规范群的拓扑所决定的。在这一小节的剩余部分中, 我们的目标就是通过 Atiyah-Singer 指标定理看到这一点¹⁴。

数出零模的数量的问题也就是数出独立的令瞬子的作用量不变的无穷小变化 δA_I 的数目问题。由于一个无穷小变化无法改变场构型的拓扑数, 而对于一个和 BPST 瞞子具有相同拓扑数的解, 如果它满足自对偶条件, 那么它一定和 BPST 瞞子具有相同的作用量。于是这个问题也就是寻找所有独立的使自对偶条件不变, 也就是 $\delta F_{IJ} = \delta \tilde{F}_{IJ}$ 的无穷小变化的数目。

对于 δF_{IJ} 而言, 我们总可以将其分解为自对偶部分和反自对偶部分:

$$\delta F_{IJ} = \frac{1}{2}(\delta F_{IJ} + \delta \tilde{F}_{IJ}) + \frac{1}{2}(\delta F_{IJ} - \delta \tilde{F}_{IJ}) \quad (\text{B.177})$$

如果我们找到了两个分别满足自对偶条件和反自对偶条件的二阶张量 $\eta, \bar{\eta}$, 那么只要将 δF_{IJ} 和这两个张量收缩, 就可以提取出 δF_{IJ} 中自对偶和反自对偶的部分。而't Hooft 符号就刚好满足要求。为了将't Hooft 符号的 a 指标收缩掉, 我们可以定义下面两个矩阵:

$$\eta_{IJ} = \eta_{aIJ}\sigma^a, \quad \bar{\eta}_{IJ} = \bar{\eta}_{aIJ}\sigma^a \quad (\text{B.178})$$

从而, $\bar{\eta}_{IJ}\delta F_{IJ}$ 就正比于 δF_{IJ} 中的反自对偶部分。如果我们要求这个无穷小变化不改变瞬子的自对偶性, 那么 δF_{IJ} 中的反自对偶部分就应该是 0, 从而:

$$\bar{\eta}_{IJ}\delta F_{IJ} = 0 \quad (\text{B.179})$$

由于 $F_{IJ} = \partial_I A_J - \partial_J A_I + g[A_I, A_J]$, 于是它在 δA_I 下的改变可以写为:

$$\delta F_{IJ}^a = (D_I^{(0)} A_J)^a - (D_J^{(0)} A_I)^a \quad (\text{B.180})$$

¹⁴这些讨论来自 E. Weinberg, *Phys. Rev.* **D24** (1981) 2669.

其中 $D^{(0)} = \partial - ig[A^{(0)}, \cdot]$ 是 BPST 瞬子解下的协变导数。由于 $\bar{\eta}_{aIJ}$ 中的指标 I 和 J 是反对称的，从而不改变自对偶性这一条件可以被改写为：

$$\bar{\eta}_{IJ} D_I^{(0)} \delta A_J = 0 \quad (\text{B.181})$$

满足这一条件的 δA 都不改变作用量，不过并不是所有满足它的 δA 都对应瞬子零模。除去不改变自对偶性之外，我们还需要排除规范冗余：在对规范场做路径积分量子化时，为了回避路径积分中出现的无穷大，我们通过 Faddeev-Popov 方法使得路径积分测度中仅仅包含规范不等价的场，从而瞬子零模也一定不是规范冗余。于是如果 δA 是瞬子零模，它必须是一个物理场的变换，而不能是一个纯规范。也就是说，不能存在 θ^a 使得 $\delta A_I^a = (D_I^{(0)} \theta)^a$ 。

这个“不是规范冗余”的条件也可以被我们写为一个算符作用于 δA_J 上等于 0 的形式：由于 δA_I^a 可以被视为一个 Hilbert 空间¹⁵上的向量，于是 δA_I^a 没有任何 $(D_I^{(0)} \theta)^a$ 分量也可以被表达为 δA_I^a 和任意的 $(D_I^{(0)} \theta)^a$ 正交。这也就是说：

$$0 = \int d^4 x_E (D_I^{(0)} \theta)^a \delta A_I^a = - \int d^4 x_E \theta^a (D_I^{(0)} \delta A_I)^a \quad (\text{B.182})$$

由于 θ 是任意的，于是这意味着：

$$D_I^{(0)} \delta A_I = \delta_{IJ} D_I \delta A_J = 0 \quad (\text{B.183})$$

我们现在有了两个对 δA_I 的约束： $\delta_{IJ} D_I^{(0)} \delta A_J = 0$ 和 $\bar{\eta}_{IJ} D_I^{(0)} \delta A_J = 0$ 。事实上，由于 $\bar{\eta}_{IJ}$ 是反对称的，而 δ_{IJ} 是对称的，从而它们分别对 $D_I^{(0)} \delta A_J$ 的不同部分产生约束。如果我们写出 $(\delta_{IJ} + i\bar{\eta}_{IJ}) D_I^{(0)} \delta A_J = 0$ ，那么这个式子中将完整包含这两部分约束中的信息。到此为止，我们就将“ δA_I 不是纯规范，并令瞬子的作用量不变”这一条件转写为了：

$$(\delta_{IJ} + i\bar{\eta}_{IJ}) D_I^{(0)} \delta A_J = 0 \quad (\text{B.184})$$

这个条件就能够帮我们数出瞬子零模——一切满足这个条件的 δA 都对应瞬子零模，从而算符 $(\delta_{IJ} + i\bar{\eta}_{IJ}) D_I^{(0)}$ 的零本征值个数也就是瞬子零模的个数，这也正是算符 $(\delta_{IJ} + i\bar{\eta}_{IJ}) D_I^{(0)}$ 的核的维数。

不过直接计算这个算符的核的维数有些复杂，我们可以由此做些简化：可以验证 Euclidean Pauli 矩阵和't Hooft 符号之间有关系 $\tau_I^- \tau_J^+ = \delta_{IJ} + i\bar{\eta}_{IJ}$ ，从而瞬子的零模满足的条件又可以被写成 $\tau_I^- \tau_J^+ D_I^{(0)} \delta A_J = 0$ 。最后，如果定义：

$$\Psi_A := \tau_I^+ \delta A_I, \mathcal{D} := \tau_I^- D_I^{(0)} \quad (\text{B.185})$$

那么这一切的条件就都归结于：

$$\mathcal{D} \Psi_A := \tau_I^- D_I^{(0)} \Psi_A = 0 \quad (\text{B.186})$$

也就是说，满足 $\mathcal{D} \Psi_A = 0$ 的、线性独立的 Ψ_A 的数量也就是算符 $\mathcal{D} := \tau_I^- D_I^{(0)}$ 之核 $\ker \mathcal{D}$ 的维数。但是有一点需要注意：这仅仅数出了独立的 Ψ_A 的个数，这并不是独立的瞬

¹⁵具体而言，这个空间是 $L^2(\mathbb{R}^4)$ 和规范指标对应的内部空间的直积。

子零模个数！对于每一个满足条件 $\mathcal{D}\Psi_A = 0$ 的 Ψ_A 而言， $i\Psi_A$ 也满足这个条件，并且由于 $i\Psi_A$ 和 Ψ_A 线性相关，它们对应 $\ker \mathcal{D}$ 中的同一维度。但是由于 $\Psi_A, i\Psi_A$ 给出的 δA_I 是线性无关的，从而一个满足这个约束的 Ψ_A 将会对应两个线性独立的 δA_I 。从而，如果我们找到了满足这个条件的独立的 Ψ_A 的个数，将其乘以 2 才是 BPST 瞬子的零模数：

$$N_{\text{moduli}} = 2 \dim \ker \mathcal{D} \quad (\text{B.187})$$

更进一步地，我们可以证明算符 \mathcal{D} 的 Hermitian 共轭 \mathcal{D}^\dagger 没有零模，于是 $\dim \ker \mathcal{D}^\dagger = 0$ 。为了看到这一点，可以转而考虑算符 $\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger$ ：

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger = -\tau_I^- \tau_J^+ D_I^{(0)} D_J^{(0)} = -(\delta_{IJ} + i\bar{\eta}_{IJ}) D_I^{(0)} D_J^{(0)} = -(D^{(0)})^2 - \frac{i}{2} \bar{\eta}_{IJ} F_{IJ}^{(0)} \quad (\text{B.188})$$

由于瞬子解是对偶的，而 $\bar{\eta}_{IJ}$ 是反对偶的，于是后面这一项一定是 0。从而算符 $\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger$ 的零模也就对应算符 $(D^{(0)})^2$ 的零模。而如果 $(D^{(0)})^2$ 存在零模 χ ，那它一定要满足：

$$-\int d^4x \chi^\dagger (D^{(0)})^2 \chi = \int d^4x (D^{(0)}\chi)^\dagger (D^{(0)}\chi) = 0 \quad (\text{B.189})$$

这也就蕴含 $D^{(0)}\chi = 0$ ，从而 $F_{IJ}^{(0)}\chi = 0$ 。但是由于 $F_I J^a(x)$ 是瞬子解，它不可能为 0，于是只可能是 $T^a\chi$ 在每个时空点上都是 0——这也就蕴含 χ 恒为 0，从而算符 $(D^{(0)})^2$ 不存在零模。直到此处，我们便证明了算符 \mathcal{D}^\dagger 没有零模。

利用这个事实，BPST 瞬子的零模数也可以被写为：

$$N_{\text{moduli}} = 2(\dim \ker \mathcal{D} - \dim \ker \mathcal{D}^\dagger) \equiv 2I(\mathcal{D}) \quad (\text{B.190})$$

这里定义的 $I(\mathcal{D})$ 在数学上就被称为算子 \mathcal{D} 的 **解析指标**。于是为了回答“为什么 BPST 瞬子只有 8 个零模”这个问题，我们就需要计算出算符 \mathcal{D} 的解析指标 $I(\mathcal{D})$ 。这可以通过以下的方法来计算：由于 \mathcal{D} 的零模也就是 $\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$ 的零模，而对于一个 $\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$ 的零模 ϕ 而言，它满足：

$$\int d^4x_E \phi^\dagger (\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D})\phi = \int d^4x_E (\mathcal{D}\phi)^\dagger (\mathcal{D}\phi) = 0 \quad (\text{B.191})$$

从而 $\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$ 的零模也就是 \mathcal{D} 的零模。这就说明 \mathcal{D} 和 $\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$ 的零模一一对应。对于 \mathcal{D}^\dagger 而言，我们也可以进行类似的讨论，得到 \mathcal{D}^\dagger 的零模和 $\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger$ 的零模一一对应。从而这个解析指标也可以被写为：

$$I(\mathcal{D}) = \dim \ker \mathcal{D}^\dagger\mathcal{D} - \dim \ker \mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger \quad (\text{B.192})$$

并且对于一个 $\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger$ 的具有本征值 λ_n 的非零模 ϕ_n ，我们都可以构造出 $\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$ 的具有相同本征值的非零模 $\mathcal{D}^\dagger\phi_n/\lambda_n$ ，反之亦然。从而 $\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger$ 和 $\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$ 的非零模是一一对应的。于是如果我们找到一个函数 $f(x)$ ，使其在 $x = 0$ 时取为 1，那么以下的量就能给出算符 \mathcal{D} 的指标：

$$\text{Tr}[f(\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}) - f(\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger)] = \text{Tr}_{\ker \mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}}(1) - \text{Tr}_{\ker \mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger}(1) = I(\mathcal{D}) \quad (\text{B.193})$$

我们可以将这个 $f(x)$ 取为 $M^2/(M^2 + x)$ 。对于所有的 M^2 而言， $\text{Tr}[f(\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}) - f(\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger)]$ 的值应该都是相同的，于是我们可以任意地取 M^2 的值。并且为了方便计算，我们将会取 $M^2 \rightarrow \infty$ 。从而：

$$I(\mathcal{D}) = \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \text{Tr} \left(\frac{M^2}{M^2 + \mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}} - \frac{M^2}{M^2 + \mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger} \right) \equiv \lim_{M^2 \rightarrow \infty} I(\mathcal{D}, M^2) \quad (\text{B.194})$$

于是，我们将计算解析指标的问题转化为了计算一个泛函 trace 的问题，而这是我们在量子场论中更加熟悉如何计算的东西。为了计算出 $I(\mathcal{D}, M^2)$ ，可以将这个泛函 trace 进一步化为我们更熟悉的形式。由于 $\mathcal{D} = \tau_I^- D_I^{(0)}$ ，于是如果我们引入以下的 Euclidean Gamma 矩阵：

$$\gamma_I := \begin{pmatrix} 0 & \tau_I^- \\ -\tau_I^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 := \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.195})$$

在第 0 节中我们看到： $\sigma, \bar{\sigma}$ 在经过 Wick 转动后就给出 τ^-, τ^+ 。于是这些 Gamma 矩阵实际上就是将 Minkowski 时空中的 γ^μ 做了一个 Wick 转动而已。于是，这些 Euclidean gamma 矩阵理应和 Minkowski 时空中的 gamma 矩阵满足类似的关系¹⁶：

$$\{\gamma_I, \gamma_J\} = -2\delta_{IJ}, \quad \text{tr}[\gamma_5(\text{less than } 4 \gamma)] = 0, \quad \text{tr}[\gamma_5 \gamma_I \gamma_J \gamma_K \gamma_L] = 4\epsilon_{IJKL} \quad (\text{B.196})$$

利用这些 gamma 矩阵，我们能将 $\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger, \mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$ 合并写在这样一个矩阵中：

$$(\gamma_I D_I^{(0)})^2 = \begin{pmatrix} \mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger & 0 \\ 0 & \mathcal{D}^\dagger\mathcal{D} \end{pmatrix} \quad (\text{B.197})$$

从而：

$$I(\mathcal{D}, M^2) = \text{Tr} \left(\frac{M^2}{M^2 + \mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}} - \frac{M^2}{M^2 + \mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger} \right) = \text{Tr} \left[-\gamma_5 \frac{M^2}{M^2 + (\gamma \cdot D^{(0)})^2} \right] \quad (\text{B.198})$$

到此为止，计算 BPST 瞬子零模数的问题被我们转换为了求出算符 $\mathcal{D} = \tau^- \cdot D^{(0)}$ 的解析指标的问题，这又被我们转换为了计算这个泛函 trace 的问题。而这个泛函 trace 终于是我们知道如何计算的东西了。为了计算这个东西，将 $\gamma \cdot D^{(0)}$ 中的对称、反对称部分分离开：

$$\begin{aligned} (\gamma \cdot D^{(0)})^2 &= \gamma_I \gamma_J D_I^{(0)} D_J^{(0)} = \frac{1}{4} \{\gamma_I, \gamma_J\} \{D_I^{(0)}, D_J^{(0)}\} + \frac{1}{4} [\gamma_I, \gamma_J] [D_I^{(0)}, D_J^{(0)}] \\ &= -(D^{(0)})^2 - \frac{ig}{2} \gamma_I \gamma_J F_{IJ}^{(0)} \end{aligned} \quad (\text{B.199})$$

其中 $F_{IJ}^{(0)} = \frac{i}{g} [D_I^{(0)}, D_J^{(0)}]$ 就是 BPST 瞬子的场强。如果定义：

$$\Delta := \frac{ig}{2} \gamma_I \gamma_J F_{IJ}^{(0)} \quad (\text{B.200})$$

那么，我们需要计算的 $I(\mathcal{D}, M^2)$ 也就可以被写为：

$$I(\mathcal{D}, M^2) = \text{Tr} \left[-\gamma_5 \frac{M^2}{-(D^{(0)})^2 + M^2 - \Delta} \right] \quad (\text{B.201})$$

¹⁶ 上文中的 Tr 意为在 $L^2(\mathbb{R}^4)$ 及内部空间上都取 trace，而下面的小写 tr 意为不考虑时空部分，只考虑规范指标或 Dirac 指标上的 trace。

利用算符关系 $\frac{1}{(1-B)A} = A^{-1}(1 + B + B^2 + \dots)$, 这可以被展开为:

$$\begin{aligned}
 I(\mathcal{D}, M^2) &= \text{Tr} \left[-\gamma_5 \frac{M^2}{(-(D^{(0)})^2 + M^2) \left(1 - \frac{1}{-(D^{(0)})^2 + M^2} \Delta \right)} \right] \\
 &= \text{Tr} \left[-\gamma_5 M^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{-(D^{(0)})^2 + M^2} \left(\Delta \frac{1}{-(D^{(0)})^2 + M^2} \right)^n \right] \\
 &= - \sum_{n=0}^{\infty} M^2 \left(\frac{ig}{2} \right)^n \text{tr}[\gamma_5 \gamma_{I_1} \dots \gamma_{I_{2n}}] \\
 &\quad \times \text{Tr} \left[\frac{1}{-(D^{(0)})^2 + M^2} F_{I_1 I_2}^{(0)} \frac{1}{-(D^{(0)})^2 + M^2} \dots F_{I_{2n-1} I_{2n}}^{(0)} \frac{1}{-(D^{(0)})^2 + M^2} \right]
 \end{aligned} \tag{B.202}$$

我们十分明白如何计算一个 gamma 矩阵的 trace, 于是剩余的问题就是计算最后的这个东西。为了讨论简便, 我们给它起个名字叫 Tr_n 。对于这种行列式而言, 通常的计算方法就是引入一组位置本征基:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}_n &:= \text{Tr} \left[\frac{1}{-(D^{(0)})^2 + M^2} F_{I_1 I_2}^{(0)} \frac{1}{-(D^{(0)})^2 + M^2} \dots F_{I_{2n-1} I_{2n}}^{(0)} \frac{1}{-(D^{(0)})^2 + M^2} \right] \\
 &= \text{tr} \int d^4 x_E \langle x | \frac{1}{-(D^{(0)})^2 + M^2} F_{I_1 I_2}^{(0)}(\hat{x}) \frac{1}{-(D^{(0)})^2 + M^2} \dots F_{I_{2n-1} I_{2n}}^{(0)}(\hat{x}) \frac{1}{-(D^{(0)})^2 + M^2} | x \rangle
 \end{aligned} \tag{B.203}$$

注意, 这里 F 的宗量是作用在两边的位置本征态上的” x 算符”, 而非积分变量 x 。由于我们最后会取 $M^2 \rightarrow \infty$ 的极限, 于是在这里的计算中仅仅考虑 $1/M^2$ 的领头阶也就足够了。此时由于:

$$[(-D^2 + M^2)^{-1}, F(\hat{x})] = \frac{D^2}{(-D^2 + M^2)^2} F \tag{B.204}$$

而这比起 $(-D^2 + M^2)^{-1}$ 而言含有更多的 M^2 的负幂次, 从而可以被我们忽略。既然 F 和 $(-D^2 + M^2)^{-1}$ 的对易子可以忽略, 那么我们就可以将所有的 $F(\hat{x})$ 都移动到最左边, 让这些 \hat{x} 和 $|x\rangle$ 作用, 得到积分变量 x 本身:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}_n &= \text{tr} \int d^4 x_E F_{I_1 I_2}^{(0)}(x) \dots F_{I_{2n-1} I_{2n}}^{(0)}(x) \langle x | \left(\frac{1}{-(D^{(0)})^2 + M^2} \right)^{n+1} | x \rangle \\
 &= \text{tr} \int d^4 x_E F_{I_1 I_2}^{(0)}(x) \dots F_{I_{2n-1} I_{2n}}^{(0)}(x) \langle x | \left(\frac{1}{-(\partial - igA^{(0)}(x))^2 + M^2} \right)^{n+1} | x \rangle
 \end{aligned} \tag{B.205}$$

我们可以插入一组动量本征态来计算这个积分:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}_n &= \text{tr} \int d^4 x_E F_{I_1 I_2}^{(0)}(x) \dots F_{I_{2n-1} I_{2n}}^{(0)}(x) \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \langle x | \left(\frac{1}{-(\partial - igA^{(0)}(x))^2 + M^2} \right)^{n+1} | p \rangle \langle p | x \rangle \\
 &= \text{tr} \int d^4 x_E F_{I_1 I_2}^{(0)}(x) \dots F_{I_{2n-1} I_{2n}}^{(0)}(x) \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \langle x | \left(\frac{1}{-(ip - igA^{(0)}(x))^2 + M^2} \right)^n | p \rangle \langle p | x \rangle
 \end{aligned} \tag{B.206}$$

对这个动量积分做个重标度 $p' = p/M$, 就可以看出这个积分在 $M^2 \rightarrow \infty$ 时的行为:

$$\text{Tr}_n = \frac{1}{M^{2n+2}} \text{tr} \int d^4x_E F_{I_1 I_2}^{(0)}(x) \dots F_{I_{2n-1} I_{2n}}^{(0)}(x) \int M^4 \frac{d^4p'_E}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{(p' - gA^{(0)}(x)/M)^2 + 1} \right)^n \quad (\text{B.207})$$

可以看到, 分母中所有含有 $A^{(0)}$ 的项在对它们展开后都只包含 $1/M^2$ 的更高幂次, 于是我们可以扔掉分母中所有 $A^{(0)}$ 的部分。在抛弃这些项之后, 由于后面这个积分中的一切都是无量纲的, 不贡献任何的 M 幂次, 从而 Tr_n 在 $M^2 \rightarrow \infty$ 时有行为 $\text{Tr}_n \sim O(M^{2-2n})$ 。而由于 Tr_n 的定义:

$$I(\mathcal{D}, M^2) = - \sum_{n=0}^{\infty} M^2 \left(\frac{ig}{2} \right)^n \text{tr}[\gamma_5 \gamma_{I_1} \dots \gamma_{I_{2n}}] \text{Tr}_n \quad (\text{B.208})$$

于是 $I(\mathcal{D}, M^2)$ 中第 n 项在 $M^2 \rightarrow \infty$ 时的行为如同 $O(M^{4-2n})$ 。这也就是说, 我们可以忽略所有 $n = 2$ 以上的项。

对于 $n = 0, 1$ 的两项而言, 由于前面的 Dirac trace 中没有四个 gamma 矩阵, 于是这两项的贡献也是 0。从而唯一贡献 $I(\mathcal{D}, M^2)$ 的就是 $n = 2$ 的项。对于这项而言, 其 Tr_2 就是:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_2 &= \frac{1}{M^2} \int d^4x_E \text{tr}[F_{I_1 I_2}^{(0)}(x) F_{I_3 I_4}^{(0)}(x)] \int \frac{d^4p'_E}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p'^2 + 1} \right)^3 \\ &= \frac{1}{32\pi^2 M^2} \int d^4x_E \text{tr}[F_{I_1 I_2}^{(0)}(x) F_{I_3 I_4}^{(0)}(x)] \end{aligned} \quad (\text{B.209})$$

将这个部分代入 $I(\mathcal{D}, M^2)$ 的表达式, 我们就算出了 $I(\mathcal{D}, M^2)$ 在 $M^2 \rightarrow \infty$ 时的值:

$$I(\mathcal{D}) = \lim_{M^2 \rightarrow \infty} I(\mathcal{D}, M^2) = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x_E \epsilon_{IJKL} \text{tr}[F_{IJ}^{(0)}(x) F_{KL}^{(0)}(x)] \quad (\text{B.210})$$

注意: 这里的规范 trace 是在伴随表示空间而不是基础表示空间上的 trace, 从而虽然它和上面给出的 $Q[A]$ 具有相同的形式, 但是并不能直接将其认定为 $Q[A]$! 正确的做法应该是利用伴随表示生成元满足的 $\text{Tr}(T_A^a T_A^b) = 2\delta^{ab}$ 将其化为:

$$\begin{aligned} \lim_{M^2 \rightarrow \infty} I(\mathcal{D}, M^2) &= \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x_E \epsilon_{IJKL} F_{IJ}^{(0),a}(x) F_{KL}^{(0),a}(x) \\ &= 4 \times \frac{g^2}{64\pi^2} \int d^4x_E \epsilon_{IJKL} F_{IJ}^{(0),a}(x) F_{KL}^{(0),a}(x) = 4Q[A] \end{aligned} \quad (\text{B.211})$$

从而, 一个具有拓扑数 Q 的、满足自对偶条件的瞬子的零模数就是:

$$N_{\text{moduli}} = 2I(\mathcal{D}) = 2 \lim_{M^2 \rightarrow \infty} I(\mathcal{D}, M^2) = 8Q \quad (\text{B.212})$$

这便回答了我们的问题: BPST 瞬子的拓扑数是 1, 于是应该有 8 个零模, 它们就是前面给出的四个空间平移、一个重标度和三个规范-时空联合变换。利用这个计算, 我们可以计算出任意拓扑数的瞬子, 甚至任意规范理论中的瞬子具有的零模数。例如在 $SU(N)$ 群中, 由于 $\text{Tr}(T_A^a T_A^b) = N\delta^{ab}$, 于是 $SU(N)$ 规范理论中瞬子零模数应该是 $4N$ 。如果我们考虑的规范群表示满足 $\text{Tr}(T_R^a T_R^b) = T(R)\delta^{ab}$, 那么就有结论 $I(\mathcal{D}) = 2T(R)Q$ 。

我们刚刚计算出来的这个结论其实就是大名鼎鼎的 **Atiyah-Singer 指标定理**：对于 Dirac 算子 $\mathcal{D} = \gamma_I D_I$ 而言，有：

$$\mathcal{D} = \gamma_I D_I := \begin{pmatrix} 0 & \tau_I^- D_I \\ -\tau_I^+ D_I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D} \\ \mathcal{D}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.213})$$

于是：

$$\mathcal{D} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D} \\ \mathcal{D}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}\psi_L \\ \mathcal{D}^\dagger\psi_R \end{pmatrix} \quad (\text{B.214})$$

你可能会问：为什么此时 Dirac 旋量的前两个分量对应右手零模，而后两个分量对应左手零模？这是因为左手零模被定义为具有 γ_5 本征值-1 的零模，而右手零模定义为具有 γ_5 本征值 1 的零模，而 Euclidean 时空中的 γ_5 和 Minkowski 时空中刚好差了一个负号。容易看出，Dirac 算子的右手零模满足 $\mathcal{D}^\dagger\psi_R = 0$ ，从而是 \mathcal{D}^\dagger 的零模；左手零模满足 $\mathcal{D}\phi_L = 0$ ，从而是 \mathcal{D} 的零模。于是前面计算出的 $I(\mathcal{D})$ 也就是 Dirac 算子的左右手零模数之差。如果将 Dirac 算子中的规范场取在基础表示中，那么就有：

$$n_L - n_R = I(\mathcal{D}) = Q \quad (\text{B.215})$$

这个式子左边是一个算子的解析指标，它一定是整数；而从数学一点的角度来看，右边这个瞬子的拓扑数实际是主丛的第二陈数：

$$c_2 = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \epsilon_{IJKL} F_{IJ}^a F_{KL}^a = Q \quad (\text{B.216})$$

作为一个示性数，陈数只和纤维丛的拓扑有关。从而我们计算出的 $I(\mathcal{D}) = Q$ 联系了纤维丛上一个算子的局域性质以及纤维丛的整体性质。这就是我们刚刚得到的 Atiyah-Singer 指标定理在数学上的意义。

B.4.6 Instantonic Path Integral and Instanton Calculus

知道了瞬子具有什么样的零模之后，我们就可以继续前面的讨论，试图将瞬子的量子效应计算到单圈阶了。前面的讨论说到过，我们的基本思路就是驻定相位近似——也就是规范场的作用量在瞬子附近展开到 Gaussian 阶，并试图算出这个 Gaussian 的路径积分。遵循这个思路，我们可以在瞬子附近将规范场参数化为 $A_I^a = A_I^{(0),a} + a_I^a$ ，从而瞬子对路径积分的贡献应该就是¹⁷：

$$Z_{\text{Instanton}} = \int \mathcal{D}a \exp[-S_E[A^{(0)} + a]] \quad (\text{B.217})$$

不过不要忘记：由于我们的理论是一个规范理论，于是直接计算这个路径积分是会出现问题的。我们熟知：为了解决这些问题，需要使用 Faddeev-Popov 方法来消除额外的规范自由度。如果我们采用的规范固定条件是 $G^a(a) = 0$ ，那么经过规范固定后，理论中就需要加上一项规范固定项和一个鬼项¹⁸：

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = \frac{1}{2\xi} G^a(x) G^a(x), \quad \mathcal{L}_{\text{Ghost}} = \bar{c}^a(x) \frac{\partial G^a}{\partial a_I^c} D_I^{cb} c^b(x) \quad (\text{B.218})$$

¹⁷这一节的讨论主要来自于 S. Vandoren 和 P. van Nieuwenhuizen 的 lecture notes arXiv:hep-th/0802.1862 和 M. Shifman 的 *Advanced Topics in Quantum Field Theory: A Lecture Course*。

¹⁸这里我写出的是 Euclidean 作用量中的 Lagrangian，它和 Minkowski 空间中的版本相差一个负号。

在这个计算中，最方便的规范选取是如下的**背景场规范**：

$$G^a(a) = D_\mu^{(0)} a^{a\mu}, \quad \xi = 1 \quad (\text{B.219})$$

从而此时的规范固定项和鬼项就是：

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = -\frac{1}{2}(D_I^{(0)} a_I^a)^2, \quad \mathcal{L}_{\text{Ghost}} = -\bar{c}^a(x)[D_I^{(0)} D_I c(x)]^a \quad (\text{B.220})$$

如果我们想要计算单圈的路径积分，就只用考虑规范固定后的 Lagrangian 中 Gaussian 的部分，也就是：

$$S_E[A, c, \bar{c}] = \frac{8\pi^2}{g^2} + \frac{1}{2} \int d^4 x_E a_I^a(x) L_{IJ}^{ab} a_J^b + \bar{c}^a(x)(D^{(0)})^2 c^a \quad (\text{B.221})$$

其中：

$$L_{IJ}^{ab} = -(D^{(0)})^2 \delta_{IJ} \delta^{ab} - 2g \epsilon^{abc} F_{IJ}^{(0),c} \quad (\text{B.222})$$

于是，我们下面的任务就是计算以下的路径积分：

$$Z_{\text{Instanton}} = \int \mathcal{D}a \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left(-\frac{8\pi^2}{g^2} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4 x_E a_I^a(x) L_{IJ}^{ab} a_J^b + \bar{c}^a(x)(D^{(0)})^2 c^a \right] \quad (\text{B.223})$$

对于鬼场部分，我们可以无障碍地积分掉它们，得到 $\det(D^{(0)})^2$ ，前面我们也证明了算符 $(D^{(0)})^2$ 不存在零模，于是这个行列式没有任何问题。问题出在规范场部分：如果我们直接将 $\mathcal{D}a$ 部分的积分 naive 地积分掉，就会得到 $(\det L)^{-1/2}$ ，而由于 L 存在零模，这个行列式整个就是 0，得到的路径积分也就是 1/0。出现这个事故的原因就是零模方向上的量子涨落并不小，于是我们对作用量做展开时，二次项中不应该包含零模的部分。

那么问题就来了：如何去除零模的贡献呢？这就需要我们重新审视一下路径积分测度的定义。由于 L 是一个 Hermitian 算符¹⁹，于是它具有完备、正交的本征函数 $(\phi_n)_I^a$ ，并且它们满足：

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle := \int d^4 x_E \phi_{n,I}^a(x) \phi_{m,I}^a(x) = u_n \delta_{mn}, \quad \sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_m| = 1 \quad (\text{B.224})$$

完备性告诉我们， a_I^a 也可以利用这些本征函数展开为：

$$a_I^a(x) = \sum_n c_n \phi_{n,I}^a(x) \quad (\text{B.225})$$

将它代入作用量中的规范场部分，就可以得到：

$$\frac{1}{2} \int d^4 x_E a_I^a(x) L_{IJ}^{ab} a_J^b = \frac{1}{2} \sum_n c_n^2 \lambda_n u_n \quad (\text{B.226})$$

为了分离出不同模式对路径积分的贡献，我们可以重新定义路径积分测度为：

$$\mathcal{D}a := \prod_n \sqrt{\frac{u_n}{2\pi}} dc_n \quad (\text{B.227})$$

¹⁹ 这里用的内积就是上面定义的内积 $\langle f | g \rangle = \int d^4 x f_I^a(x) g_I^a(x)$ 。

在这个定义下，路径积分就是对这些变量 c_n 的 Gaussian 积分，其积分值也就是 $(\det L)^{-1/2}$ ，和我们之前用格点正规化定义的路径积分给出相同的结果，从而这个新定义在我们这个计算中是合理的。当我们这样展开 a_I 时，作用量中的规范场部分便可以写为：

$$\begin{aligned} S_E[A] &= \frac{8\pi^2}{g^2} + \frac{1}{2} \int d^4x_E (a - a_{\text{Zero Mode}}) L(a - a_{\text{Zero Mode}}) \\ &= \frac{8\pi^2}{g^2} + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \lambda_n u_n c_n^2 \end{aligned} \quad (\text{B.228})$$

从而，规范场部分的路径积分就可以写为：

$$\int \mathcal{D}a \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x_E a_I^a(x) L_{IJ}^{ab} a_J^b \right] = \int \prod_n \sqrt{\frac{u_n}{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \lambda_n u_n c_n^2 \right] \quad (\text{B.229})$$

在这个表达式中，我们就可以方便地将零模和非零模的贡献分开了。对于非零模的部分而言，如果我们将算子 L 的所有非零本征值之积记做 $(\det' L)$ ，那么这个积分给出的就是：

$$\prod_{n \neq 0} \sqrt{\frac{u_n}{2\pi}} dc_n \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \lambda_n u_n c_n^2 \right] = (\det' L)^{-1/2} \quad (\text{B.230})$$

于是，瞬子附近的单圈路径积分可以被我们写为：

$$Z_{\text{Instanton}} = \int \prod_{\text{zero modes}} \sqrt{\frac{u_i}{2\pi}} dc_i (\det' L)^{-1/2} (\det(D^{(0)})^2) \quad (\text{B.231})$$

其中，我们用了指标 i 来标记零模。根据前面的定义，这些零模对应的本征函数 ϕ_i 是正交的。根据我们在上一节所说，在计算一个路径积分时，我们应该对全部的鞍点——也就是全部可能参数的瞬子求和。由于这些零模对应不同参数的瞬子，于是这些零模对路径积分的贡献就应该相当于对瞬子的不同参数进行积分。于是对于 BPST 瞬子而言，在上面这个式子中，零模的贡献最终也应该可以写成类似于 $\int d^4x_0 d\rho d(\text{SU}(2) \text{ angles})$ 的积分，本节下面的目标之一就是求出这个对参数的积分到底是什么样的。对于后面这些泛函行列式而言，由于它们的计算实在是有点复杂，我们在这个 notes 中将不会详细计算这些行列式，而是用一个很不严格的方式将它猜出来。

Deriving the Zero-Mode Part

为了得到对瞬子参数的积分，我们需要将 dc_i 的积分转化为对上一节中得到的八个零模参数 x_0, ρ 和 $\text{SU}(2)$ 转角的积分。为此可以做一个小 trick，在积分中插入一个以下形式的 1：

$$1 = \int \prod_{\alpha} d\gamma_{\alpha} \delta(f_{\beta}(\gamma)) \det \left(\frac{\partial f_{\beta}(\gamma)}{\partial \gamma_{\alpha}} \right) \quad (\text{B.232})$$

其中 γ_{α} 代指这八个零模参数 (x_0, ρ 和 $\text{SU}(2)$ 转角)，而 $f(\gamma)$ 是任意一个 γ_{α} 的函数。顺便，在后面的讨论中我们将用 ϕ_{α} 代指对应参数 γ_{α} 的零模。这些零模并不一定是正交的，于是这些 ϕ_{α} 也并不是我们之前定义的 ϕ_i 。将这个 1 插入路径积分中的零模部分，就有：

$$\int \prod_i \sqrt{\frac{u_i}{2\pi}} dc_i = \int \prod_i \sqrt{\frac{u_i}{2\pi}} dc_i \prod_{\alpha} d\gamma_{\alpha} \prod_{\beta} \delta(f_{\beta}(\gamma)) \det \left(\frac{\partial f_{\beta}(\gamma)}{\partial \gamma_{\alpha}} \right) \quad (\text{B.233})$$

为了将 dc_i 的积分消去, 可以将 f 选择为:

$$f_\alpha := - \sum_i c_i \langle \phi_i | \phi_\alpha \rangle = - \langle A - A^{(0)}(\gamma) | \phi_\alpha \rangle \equiv - \int d^4 x_E \left[A_I^a(x) - A_I^{(0),a}(\gamma, x) \right] \phi_{\alpha,I}^a(x) \quad (\text{B.234})$$

这样一来, Jacobi 矩阵 $\frac{\partial f_\beta(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha}$ 就成为:

$$\frac{\partial f_\beta(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} = - \int d^4 x_E \left[- \frac{\partial A_I^{(0),a}(\gamma, x)}{\partial \gamma_\alpha} \phi_{\beta,I}^a(x) + a_I^a(x) \frac{\partial \phi_{\alpha,I}^a(x)}{\partial \gamma_\alpha} \right] \quad (\text{B.235})$$

由于第二项中含有额外的 a_I^a , 于是这一项给出的效应是超出 Gaussian 阶, 也就是超出单圈阶的。如果我们仅仅希望将这个路径积分计算到单圈阶, 就没有必要考虑这一项。并且在背景场规范中, 由于我们需要令 $a(x)$ 满足条件 $D^{(0)}a = 0$, 于是零模对应的本征函数 $\phi_\alpha(x)$ 就不再是通常的 $\phi_\alpha(x) = \partial A_I^{(0),a}(\gamma, x) / \partial \gamma_\alpha$, 而应该额外对它做一个规范变换, 使得 ϕ_α 也满足 $D^{(0)}\phi_\alpha = 0$:

$$\phi_{\alpha,I}^a(x) = \frac{\partial A_I^{(0),a}(\gamma, x)}{\partial \gamma_\alpha} - [D_I^{(0)}\Lambda(x)]^a \quad (\text{B.236})$$

利用这个关系, 就可以将 Jacobi 矩阵写为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\beta(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} &= \int d^4 x_E \left[- \frac{\partial A_I^{(0),a}(\gamma, x)}{\partial \gamma_\alpha} \phi_{\beta,I}^a(x) \right] \\ &= \int d^4 x_E (\phi_{\alpha,I}(x) + D_I^{(0)}\Lambda(x))^a \phi_{\beta,I}^a(x) \\ &= \int d^4 x_E \left(\phi_{\alpha,I}^a(x) \phi_{\beta,I}^a(x) - \Lambda^a(x) D_I^{(0),ab} \phi_{\beta,I}^b(x) \right) \\ &= \int d^4 x_E \phi_{\alpha,I}^a(x) \phi_{\beta,I}^a(x) \equiv \langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.237})$$

其中在第三行处, 我们对 $D_I^{(0)}$ 做了分部积分, 而在最后一行处, 我们利用了零模 ϕ_β 在背景场规范下的这一事实。将这个泛函 Jacobi 矩阵代入前面的路径积分中, 就可以得到:

$$\begin{aligned} \int \prod_i \sqrt{\frac{u_i}{2\pi}} dc_i &= \int \prod_i \sqrt{\frac{u_i}{2\pi}} dc_i \prod_\alpha d\gamma_\alpha \prod_\beta \delta \left(- \sum_i c_i \langle \phi_i | \phi_\beta \rangle \right) \det (\langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle) \\ &= \int \prod_i \sqrt{\frac{u_i}{2\pi}} \prod_\alpha d\gamma_\alpha (\det \langle \phi_i | \phi_\beta \rangle)^{-1} \det (\langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle) \\ &= \int \prod_\alpha \frac{d\gamma_\alpha}{\sqrt{2\pi}} (\det \langle \phi_i | \phi_j \rangle)^{1/2} (\det \langle \phi_i | \phi_\beta \rangle)^{-1} \det (\langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle) \\ &= \int \prod_\alpha \frac{d\gamma_\alpha}{\sqrt{2\pi}} (\det \langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{B.238})$$

这个结果的物理意义也非常的明确: 要考虑瞬子对路径积分的贡献, 就需要同时将所有不同参数的瞬子的贡献囊括在内, 也就是需要以某种形式对这些不同参数瞬子的贡献求和。而刚刚的讨论也就意味着: 这个求和可以用积分 $\int \prod_\alpha \frac{d\gamma_\alpha}{\sqrt{2\pi}} \det (\langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle)^{1/2}$ 来实现。

到此为止，我们距离 explicit 地计算出零模的贡献只差一步：计算出 8×8 矩阵 $\langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle$ 的行列式 $\det(\langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle)$ 。这个计算也非常直接——找出满足背景场规范的零模本征函数，然后计算它们的内积。鉴于篇幅原因，我们将不会给出详细的计算，而是仅仅给出最后的结果：

$$\int \prod_\alpha \frac{d\gamma_\alpha}{\sqrt{2\pi}} \det(\langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle)^{1/2} = \frac{2^{10}\pi^4}{g^8} \int d^4 x_0 \rho^3 d\rho \quad (\text{B.239})$$

Guessing the Nonzero-Mode Part

非零模的贡献比零模的计算还要复杂很多，如果我们希望将它严格地计算出来，可能需要用到行列式线丛等复杂的数学工具。不过幸运的是，我们可以将其结果不严格地猜出来²⁰²¹：如果 $(\det' L)^{1/2}$ 和 $(\det(D^{(0)})^2)$ 的总效果可以写成一个常数乘以一个 e^Φ ，那么：

$$\begin{aligned} Z_{\text{Instanton}} &= e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}} \int \prod_\alpha \frac{d\gamma_\alpha}{\sqrt{2\pi}} \det(\langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle)^{1/2} (\det' L)^{1/2} (\det(D^{(0)})^2) \\ &= (\text{Const.}) \int d^4 x_0 \frac{d\rho^3}{\rho} e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}} e^\Phi \\ &= (\text{Const.}) \int d^4 x_0 \frac{d\rho}{\rho^5} \exp \left[-\frac{8\pi^2}{g^2} + 8 \log(\Lambda_{\text{UV}} \rho) + \Phi \right] \end{aligned} \quad (\text{B.240})$$

由于 $(\det' L)^{1/2}$ 中会出现紫外发散，于是我们需要引入一个 cutoff 来正规化这个发散。反正在 \log 里面塞进这个东西也只会给出一个常数因子，于是我们就能把这个 cutoff 塞进 \log 里面。由于这个路径积分有跃迁振幅的物理意义，指数上不能出现无穷大，于是指数上只能出现重整的耦合常数。不过由于这里的耦合常数是裸的耦合常数，对于 SU(2) 规范理论而言，它们满足以下的重整化群关系：

$$-\frac{8\pi^2}{g_R^2(\rho^{-1})} = -\frac{8\pi^2}{g^2} + \frac{22}{3} \log(\Lambda_{\text{UV}} \rho) \quad (\text{B.241})$$

于是：

$$Z_{\text{Instanton}} = (\text{Const.}) \int d^4 x_0 \frac{d\rho}{\rho^5} \exp \left[-\frac{8\pi^2}{g_R^2(\rho^{-1})} + \frac{2}{3} \log(\Lambda_{\text{UV}} \rho) + \Phi \right] \quad (\text{B.242})$$

那么一个大胆的猜测就是： Φ 抵消掉了所有的紫外发散，并且没有带来任何和瞬子参数有关的有限项：

$$Z_{\text{Instanton}} \xrightarrow{\text{Wild Guess!}} (\text{Const.}) \int d^4 x_0 \frac{d\rho}{\rho^5} \exp \left(-\frac{8\pi^2}{g_R^2(\rho^{-1})} \right) \quad (\text{B.243})$$

猜猜怎么着：这个大胆的猜测是正确的！如果我们真的计算出了这两个泛函行列式，也会得到类似的结论：在 SU(N) 规范理论中，计算出的路径积分是：

$$Z_{\text{Instanton}} = \frac{0.466}{(N-1)!(N-2)!} \left(\frac{8\pi^2}{g^2} \right)^{2N} \int d^4 x_0 \frac{d\rho}{\rho^5} \exp \left(-\frac{8\pi^2}{g_R^2(\rho^{-1})} - 1.296N \right) \quad (\text{B.244})$$

²⁰这个猜测出自 M. Shifman 的书，其过程是极其不严格的，也许只能用来看个乐。真正的计算可以参考 arXiv/0802.1862 和 *Phys. Rev. D* **14** (1976) 3432。不过诚实地说，我也没看这些复杂的详细计算…

²¹另外一个有趣的事情是：在超对称理论中，费米和玻色的非零模贡献也抵消了，这允许我们不进行这些复杂的计算而得到严格的瞬子测度。如果你不熟悉超对称理论，也许可以看看附录 C 的讨论。

这和我们随便蒙的结果仅仅相差一个常数因子。从而我们连蒙带猜地得到了以下的关系：

$$Z_{\text{Instanton}} = \int \mathcal{D}a e^{-S_{\text{YM}}[A^0 + a]} = (\text{Const.}) \int d^4x_0 \frac{d\rho}{\rho^5} \exp\left(-\frac{8\pi^2}{g_R^2(\rho^{-1})}\right) \equiv \int d\mu_{\text{Inst}} \quad (\text{B.245})$$

在最后一个等号处，我们将这个结果定义为了瞬子测度 $d\mu_{\text{Inst}}$ 。瞬子在单圈阶的一切量子修正都被吸收到了这个测度中。它可以被用于计算瞬子背景下物质场关联函数中：如果我们想要将瞬子背景下仅与 Ψ 有关的算符 $\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n$ 在两个不同“真空”之间的关联函数 $\langle m+1 | T\{\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n\} | m \rangle$ 计算到单圈阶，就有：

$$\int \mathcal{D}a \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \exp\left[-\frac{8\pi^2}{g^2} - \int d^4x_E \left(\frac{1}{2}aL_2a + \bar{\Psi}(-i\gamma_I D_I^{(0)} + m)\Psi\right)\right] \quad (\text{B.246})$$

在这里，规范场部分的积分也就是前面给出的瞬子测度，于是这个路径积分可以化为：

$$\int d\mu_{\text{inst}} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \exp\left[-\int d^4x_E \bar{\Psi}(-i\gamma_I D_I^{(0)} + m)\Psi\right] \quad (\text{B.247})$$

也就是说：瞬子对 $\langle m+1 | T\{\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n\} | m \rangle$ 的贡献相当于：瞬子引入了一个经典的背景场，并且在这个理论中将关联函数计算到单圈阶之后，还需要利用瞬子测度对瞬子的参数积分。当然，由于物理的真空并不是 $|m\rangle$ ，而是 θ -真空，于是我们真正需要计算的是 θ -真空下的关联函数，它是：

$$\langle \theta | T\{\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n\} | \theta \rangle = \sum_{n,m} e^{i(n-m)\theta} \langle m | T\{\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n\} | n \rangle \propto \sum_Q e^{iQ\theta} \langle m+Q | T\{\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n\} | m \rangle \quad (\text{B.248})$$

从而，在 θ -真空附近，我们需要对所有拓扑数的瞬子贡献求和，并且每个瞬子的贡献需要加上一个因子 $e^{iQ\theta}$ 。到此为止，我们就基本明白如何计算瞬子对 θ -真空附近关联函数的影响了。当然，我们这里仅仅给出了单瞬子过程的贡献。除去单瞬子过程之外，我们还有如同“先通过瞬子从 $|n\rangle$ 跃迁到 $|n+1\rangle$ ，之后跃迁回 $|n\rangle$ ，再跃迁到 $|n+1\rangle$ ”这种多瞬子过程。如果 $e^{-8\pi^2/g^2}$ 并不小，那么这些过程也会有不可忽视的贡献。一个将全部这些多瞬子过程纳入讨论的方法是所谓的稀疏瞬子气体近似，其基本思路将这些瞬子看作独立的过程。不过由于篇幅原因，这里就不再展开了。

B.4.7 Massless Fermions in Instanton Background

直到现在，我们明白的都是如何计算纯规范理论中的瞬子效应。而我们的世界中除了纯规范理论中的规范玻色子之外，还存在费米子。这一节中我们将看到：如果我们加入的费米子无质量的话，它在瞬子背景下会存在零模，带来许多有趣的效应。为了看到这一点，考虑无质量费米子在瞬子背景下的路径积分：

$$\int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp\left[\int d^4x_E \bar{\Psi}(i\mathcal{D}^{(0)})\Psi\right] \propto \det(\mathcal{D}^{(0)}) \quad (\text{B.249})$$

而这正是我们讨论瞬子零模时也见过的 Dirac 算子。而 Atiyah-Singer 指标定理告诉我们， $\mathcal{D}^{(0)}$ 的左、右手零模数之差 $n_L - n_R$ 正是瞬子的拓扑数 Q 。前面的讨论还告诉我们：

$\mathcal{D}^{(0)}$ 的左手零模是 $\mathcal{D} := \tau^- \cdot D^{(0)}$ 的零模，右手零模是 \mathcal{D}^\dagger 的零模，并且 \mathcal{D}^\dagger 的零模数为 0。从而对于一个拓扑数为 Q 的瞬子而言，其左、右手零模数是：

$$n_L = Q, \quad n_R = 0 \quad (\text{B.250})$$

仍然考虑 BPST 瞬子，那么 Dirac 算子就只有一个左手零模，没有右手零模。此时的旋量场可以被展开为：

$$\Psi_L = a\psi_0 + \sum_n b_n\psi_n, \quad \Psi_R = \sum_n c_n\chi_n \quad (\text{B.251})$$

同时，对于 $\bar{\Psi}$ 而言，它应该被如下展开：

$$\bar{\Psi}_L = \sum_n \bar{b}_n\bar{\chi}_n, \quad \bar{\Psi}_R = \bar{a}\bar{\psi}_0 + \sum_n \bar{c}_n\bar{\psi}_n \quad (\text{B.252})$$

其中 $a, \bar{a}, b, \bar{b}, c, \bar{c}$ 都是 Grassmann 变量，而 ψ, χ 分别是 $\mathcal{D}, \mathcal{D}^\dagger$ 的本征函数。利用这个展开，由于能够给出相同的 Gaussian 积分，于是可以将费米子的泛函测度定义为 $\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi} = dad\bar{a} \prod_n (db_n d\bar{b}_n dc_n d\bar{c}_n)$ 。并且将这个展开式代入作用量中，可以得到：

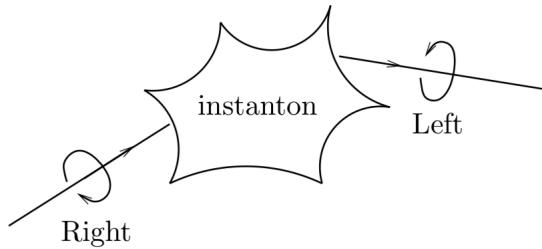
$$S_E[b, \bar{b}, c, \bar{c}] = -i \left[\sum_{m,n} \bar{b}_m b_n \langle \chi_m | \mathcal{D} | \psi_n \rangle + \sum_{m,n} \bar{c}_m c_n \langle \psi_m | \mathcal{D}^\dagger | \chi_n \rangle \right] \quad (\text{B.253})$$

这个路径积分也就是：

$$\int dad\bar{a} \prod_n (db_n d\bar{b}_n dc_n d\bar{c}_n) \exp[-S_E[b, \bar{b}, c, \bar{c}]] \quad (\text{B.254})$$

有趣的现象出现了：由于积分中完全不包含和 a, \bar{a} 有关的变量，于是对这两个 Grassmann 变量而言，对其的积分便会得到 0。这也就是说：由于瞬子背景下的无质量费米子场存在零模，导致这个背景下的路径积分为 0。联系上一节中给出的结论，就可以看到：对于 θ -真空附近的关联函数 $\langle \theta | T\{\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n\} | \theta \rangle$ 而言，如果理论中包含无质量费米子，并且算符 \mathcal{O}_i 和零模的展开系数 a, \bar{a} 无关，那么瞬子将不对这些关联函数产生任何贡献，从而 θ -角也不对这些关联函数产生任何贡献。进一步地，对于一个含有轻夸克的理论而言，由于 $m \rightarrow 0$ 的极限下这些关联函数和 θ 无关，于是其中任何的 θ 有关的效应应该只依赖于夸克质量的正幂次。

不过当算符 $\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n$ 正比于 $\bar{a}a$ 时，对这两个 Grassmann 变量的积分也就不再是 0。例如对于关联函数 $\langle \bar{\Psi}_R \Psi_L \rangle$ 而言，瞬子对它的贡献就不再是 0。事实上，根据 LSZ 约化公式，这个关联函数对应一个 1 到 1 的散射过程：一个右手无质量费米子于 $t = -\infty$ 飞入瞬子，而一个左手费米子于 $t = \infty$ 从瞬子中飞出，如下图所示²²：



²² 这张图来自't Hooft 的讲义：arXiv:hep-th/0010225。

在经典理论中，无质量费米子具有轴 U(1) 对称性： $\Psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\Psi$, $\bar{\Psi} \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\bar{\Psi}$ 。如果它是量子理论中的对称性，那么其 Noether 流和 Noether 荷就是：

$$J_5^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi, \quad Q_5 = \int d^3x \bar{\Psi}\gamma^0\gamma_5\Psi \quad (\text{B.255})$$

由于左手和右手费米子将携带 $Q_5 = -1$ 及 $Q_5 = 1$ 。于是在这个散射过程中， Q_5 并不守恒，而是有如下的改变：

$$\Delta Q_5 = 2 \quad (\text{B.256})$$

也就是说，轴 U(1) 对称性这个经典对称性在这个瞬子导致的物理过程中被破坏，从而不是一个量子对称性——这正是手征反常！这一点也可以通过手征反常的反常 Ward 恒等式看出：

$$\partial_I J_{5,I} = \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon_E^{IJKL} F_{IJ}^a F_{KL}^a \quad (\text{B.257})$$

从而：

$$\Delta Q_5 = \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 \partial_0 \int d^3x J_5^0 = \int d^4x \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon_E^{IJKL} F_{IJ}^a F_{KL}^a = 2Q \quad (\text{B.258})$$

其中在第二个等号处，我们利用了 J_5 在空间边界上为 0 这一边界条件。这也就是说：经过一个拓扑数为 Q 的瞬子后，费米子的轴 U(1) 荷会改变 $2Q$ 。从此便可以看出——瞬子的存在在某种程度上导致了理论中出现手征反常，并且这些手征荷不守恒的过程完全由瞬子的贡献给出。

当然，上面仅仅讨论了理论中只存在一个无质量费米子的情形。如果理论中出现多个无质量费米子，那么瞬子有贡献的关联函数中一定要包含所有这些无质量费米子的零模 $\bar{a}_i a_i$ 。反映到瞬子主导的过程中，也就意味着瞬子主导的过程中一定涉及到所有无质量费米子、同时翻转所有无质量费米子的手性²³。

瞬子的这个效应可以被等效为 Lagrangian 中的一项有效相互作用：在树图阶，瞬子对 $\langle \bar{\Psi}_R \Psi_L \rangle$ 的贡献等价于以下的有效相互作用：

$$\mathcal{O}_{\text{'t Hooft}} = \bar{\Psi}_R \Psi_L \quad (\text{B.259})$$

这被称为't Hooft 有效算符。理论中有多个无质量费米子的情形下，'t Hooft 有效算符中也要包含所有的无质量费米子：

$$\mathcal{O}_{\text{'t Hooft}} = \det(\bar{\Psi}_R \Psi_L) = \prod_i \bar{\Psi}_{i,R} \Psi_{i,L} \quad (\text{B.260})$$

当然，Lagrangian 中的有效相互作用只是正比于't Hooft 有效算符，这个比例系数还需要通过在瞬子背景下详细计算 $\langle \bar{\Psi}_R \Psi_L \rangle$ 来得到。别忘了，计算这个关联函数的最后，我们仍然需要对不同的瞬子求和，也就是对瞬子测度积分。

²³这些讨论对全局-规范-规范反常也成立。在标准模型中存在 $U(1)_B$ - $SU(2)$ - $SU(2)$ 反常，并且有一个类似瞬子的场构型 **sphaleron** 贡献重子数不守恒的过程。

B.4.8 Large Instantons, Higgs Mechanism and Constrained Instantons

看到这里，你一定感觉十分自信，仿佛自己已经会计算规范理论中的一切瞬子贡献了。不过一个残酷的事实是：你还什么都不会算。为了让你意识到这一点，我善意地提醒你回去看看我们导出的 $SU(2)$ 瞬子测度：

$$\int d\mu_{\text{Inst}} = \int d^4 x_0 \frac{d\rho}{\rho^5} \exp\left(-\frac{8\pi^2}{g_R^2(\rho^{-1})}\right) \quad (\text{B.261})$$

在单圈阶，纯 $SU(2)$ 规范理论的跑动耦合常数是：

$$\frac{8\pi^2}{g_R^2(\rho^{-1})} = \frac{8\pi^2}{g^2(M)} - \frac{22}{3} \log(\rho M) \quad (\text{B.262})$$

所以我们的瞬子测度也就是：

$$\int d\mu_{\text{Inst}} = \int d^4 x_0 \frac{d\rho}{\rho^5} (\rho M)^{22/3} \exp\left(-\frac{8\pi^2}{g_R^2(M)}\right) \quad (\text{B.263})$$

你应该已经发现端倪了：这个瞬子测度中包含积分 $\int d\rho \rho^{7/3}$ ，如果我们的被积函数收敛速度小于 $\rho^{-10/3}$ 的话（事实上，大多数你关心的可观测量都不会收敛得这么快），那么这个对 ρ 的积分将会发散！这个发散可不像之前遇到的那些友好的发散一样可以通过加入抵消项等方式进行重整化，它是不可被消去的²⁴。究其原因，是因为瞬子的贡献被 ρ 很大的大瞬子主导，于是这个发散问题就被称为**大瞬子问题**。

大瞬子问题的出现意味着在这个理论中瞬子的贡献是我们无法计算的。由此，Coleman 也将这个问题称为“IR embarrassment”——在熟悉的量子场论中，物理学家们居然没有办法计算理论的瞬子贡献，这太令人蒙羞了。由于这个问题，我们并不认为前面发展出的这一套“瞬子微积分”能够很好地处理 QCD 等理论。

那么，前面这套形式理论有什么用呢？答案是：在具有 Higgs 机制的理论中，Higgs 粒子会带来额外的规范场质量项，而在瞬子背景下，这个质量项的形式正比于 ρ^2 ，从而除了 $\rho^{7/3}$ 的幂次行为之外， e^{-S} 会给瞬子测度中添加一项额外的 $e^{-C\rho^2}$ 。这个指数衰减能够很好地平衡掉大瞬子问题的幂次发散。于是在具有 Higgs 机制的理论中，前面这一套“瞬子微积分”能够帮我们计算瞬子对各个关联函数的贡献。

如果你仔细一想，又会发现不对的地方：在具有 Higgs 机制的理论中，标量场和规范场的运动方程是耦合在一起的。此时构型 $\phi = 0, A = A_{\text{Instanton}}$ 已经不再是作用量的极值点。也就是说：Higgs 机制会更改原本理论中的瞬子解，使得前面给出的形式理论再度失效。这怎么办呢？在这一节接下来的篇幅中，我们就要利用**约束瞬子**的方法解决这个问题，从而计算出 Higgs 理论中瞬子的贡献²⁵。

²⁴如果硬要说这个发散和我们之前遇到的什么发散比较像的话，这可能更像渐近自由理论中跑动耦合常数在 IR 的发散——它意味着我们没有能力用微扰论处理强耦合理论。同样，这个发散也意味着上面这套基于瞬子测度的形式理论没有能力处理这个理论。

²⁵接下来的讨论中，有关 Higgs 理论的部分大多来自于这个 topic 的原始论文之一：Ian Affleck 的文章 Nucl. Phys. **B191** (1981) 429。

Constrained Instantons

为了发展出一套处理这个问题的形式理论, 让我们先考虑一个一般的情形: 原理论的作用量是 S_0 , 并且这个理论中具有瞬子解 ϕ_0 。而 Higgs 场的加入带来了额外的作用量 S_H , 并且这部分远小于 S_0 。例如, 对于以下的、含有处于基础表示的 Higgs 场的 $SU(2)$ 规范理论而言²⁶:

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{4} F_{IJ}^a F_{IJ}^a + \frac{1}{\lambda} \left[|D_I \phi|^2 + \frac{1}{4} (|\phi|^2 - v^2)^2 \right] \quad (B.264)$$

那么除去最后一项的部分就对应 S_0 , 最后一项都相当于在这个理论中加入的额外部分 S_H 。在这样一个理论中, 瞬子解 ϕ 应该只和 ϕ_0 相差一个小量, 从而我们可以将其展开为 $\phi = \phi_0 + \delta\phi$, 此时的作用量也可以被我们展开为:

$$\begin{aligned} S &= S[\phi_0] + \int d^4x_E \left(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} \right)_{\phi_0} \delta\phi(x) + \frac{1}{2} \int d^4x_E d^4y_E \left(\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right)_{\phi_0} \delta\phi(x) \delta\phi(y) \\ &\approx S[\phi_0] + \int d^4x_E \left(\frac{\delta S_H}{\delta\phi(x)} \right)_{\phi_0} \delta\phi(x) + \frac{1}{2} \int d^4x_E d^4y_E \left(\frac{\delta^2 S_0}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right)_{\phi_0} \delta\phi(x) \delta\phi(y) \end{aligned} \quad (B.265)$$

其中在第二行的约等号处, 我们不但利用了 ϕ_0 是 S_0 的极值点, 还利用了 $S_H \ll S_0$ 。实际上, 虽然 S_H 是由一个小参量 v 给出的, 但是在 $r > v^{-1}$ 时 $S_H \ll S_0$ 这一条件实际上是不成立的。不过为了讨论的方便, 让我们先暂且忽视这个问题, 只关注 $S_H \ll S_0$ 成立的区间。此时, 作用量给出的运动方程也就是:

$$\int d^4y_E \left(\frac{\delta^2 S_0}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right)_{\phi_0} \delta\phi(y) = - \left(\frac{\delta S_H}{\delta\phi(x)} \right)_{\phi_0} \quad (B.266)$$

这个方程看似可以利用 Green 函数法求解, 例如:

$$\delta\phi(y) = - \int d^4x_E \left(\frac{\delta^2 S_0}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right)_{\phi_0}^{-1} \left(\frac{\delta S_H}{\delta\phi(x)} \right)_{\phi_0} \quad (B.267)$$

但是事实并非如此。由于算符 $\left(\frac{\delta^2 S_0}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right)_{\phi_0}$ 存在零模, 于是其逆并不存在, 这样求解显然是不正确的。不过如果等式右边不存在零模方向上的投影, 那么我们可以将这个算符限制在非零模的本征空间中, 这样限制的算符就存在逆, 也可以利用 Green 函数求解了。

对于一个一般的 S_H 而言, 等式右边不一定不存在零模方向的分量, 那么我们该如何处理呢? 对于一个原理论的瞬子而言, 如果对其朝零模方向做一个小移动, 这本不应该改变理论的作用量。不过在加上 S_H 之后, 这些小移动就将改变理论的作用量。当然, 此时有些零模方向会增大作用量, 而其他的方向会减小作用量。加入 S_H 之后, 原本的瞬子解 ϕ_0 就不再是作用量的极值点, 而平移 $\delta\phi$ 后的新理论瞬子 $\phi_0 + \delta\phi$ 才是作用量的极小值。

这些讨论的重点是: 当 S_H 足够小时, ϕ 只会朝着作用量减小的方向平移, 于是 $\delta\phi$ 中应该只含有这些减小方向的分量。在前面讨论的 Higgs 理论的情形中, 唯一一个使作用量减小的零模方向就是 $\partial\phi_0/\partial\rho$ 的方向, 从而 $\delta\phi$ 、进而 $\left(\frac{\delta S_H}{\delta\phi(x)} \right)_{\phi_0}$ 中只有 $\partial\phi_0/\partial\rho$ 方向的零模

²⁶ 这里我们对 ϕ 做了一个重定义, 使 Higgs 项和运动学项具有相同的系数。

分量。我们只要试图排除 $\left(\frac{\delta S_H}{\delta \phi(x)}\right)_{\phi_0}$ 中的 $\partial\phi_0/\partial\rho$ 分量，就可以只考虑非零模的本征空间中的问题，从而利用 Green 函数求解了。

那么，问题就转化为了：如何排除等式右边这些东西中的 $\partial\phi_0/\partial\rho$ 分量呢？为此，我们可以对路径积分测度施以如下的 trick：

$$\int \mathcal{D}\phi = \int_0^\infty \frac{d\rho \rho^{d-3}}{|d-4|} \int \mathcal{D}\phi \delta \left[\int d^4x \mathcal{O} - c\rho^{d-4} \right] \quad (\text{B.268})$$

其中 c 是一个常数， \mathcal{O} 是一个任意的局域算符，而 $d = [\mathcal{O}]$ 是这个算符的量纲（稍微看看就能知道，它不能为 4！）。在将路径积分测度如此变形后，我们就相当于先在一个具有约束 $\int d^4x \mathcal{O} - c\rho^{d-4} = 0$ 理论中求出其瞬子解——约束瞬子，计算约束瞬子背景下的物理量后再对 ρ 积分。为什么要引入这样一个约束呢？这是因为：我们在理论中添加的约束 $\int d^4x \mathcal{O} - c\rho^{d-4} = 0$ “限制”了瞬子解向 ρ 方向的平移，于是在具有约束的理论中， $\delta\phi$ 就不会再有这个方向的分量，我们也就能够计算出约束瞬子。

在具有约束 $\int d^4x \mathcal{O} - c\rho^{d-4} = 0$ 的理论中，这个约束可以利用 Lagrange 乘子法改写为 Lagrangian 中的一项：

$$S_{\text{Constrained}} = S_0 + S_H + \sigma \left[\int d^4x \mathcal{O} - c\rho^{d-4} \right] \quad (\text{B.269})$$

重复前面的讨论，这个作用量对应的运动方程也就是：

$$\int d^4y_E \left(\frac{\delta^2 S_0}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right)_{\phi_0} \delta\phi(y) = - \left(\frac{\delta S_H}{\delta\phi(x)} \right)_{\phi_0} - \sigma \left(\frac{\delta\mathcal{O}}{\delta\phi} \right)_{\phi_0} \quad (\text{B.270})$$

通过选择合适的算符 \mathcal{O} ，我们就能消去等式右边在 $\partial\phi_0/\partial\rho$ 方向上的投影，从而可以利用 Green 函数法求出 $\delta\phi$ 。当然，这个 $\delta\phi$ 对应的是约束瞬子相对原理论的瞬子的改变。有了约束瞬子后，我们就能计算约束瞬子背景下的物理量，然后对 ρ 积分来得到 Higgs 理论中瞬子的总贡献。

The Problem at Large $|x|$

现在我们知道了 $S_H \ll S_0$ 时如何处理 Higgs 场改变瞬子解的问题，接下来就要面对前面的讨论中我们视而不见的问题了：在 $r \gg \rho, v^{-1}$ 时，前提 $S_H \ll S_0$ 是不一定成立的。为了看到这一点，我们可以尝试着先考虑以下的 ϕ^4 理论：

$$S_0 = \frac{1}{g} \left[\frac{1}{2} (\partial_I \phi)^2 - \frac{1}{4!} \phi^4 \right], \quad S_H = \frac{1}{2g} \mu^2 \phi^2 \quad (\text{B.271})$$

在 S_0 下，这个理论具有如下的经典解：

$$\phi_0(x) = \frac{\rho}{\rho^2 + x^2} \quad (\text{B.272})$$

在加入 S_H 后，这个理论的运动方程是：

$$\partial^2 \phi = -\frac{1}{6} \phi^3 + \mu^2 \phi \quad (\text{B.273})$$

当 $|x|$ 远大于 ρ 时, 由于 ϕ_0 的行为类似 $1/x^2$, 从而 S_0 给出的 $-\frac{1}{6}\phi^3$ 的收敛速度将会远大于 S_H 给出的 $\mu^2\phi$ 。于是在 $|x| \gg \rho, \mu^{-1}$ 时, 虽然 μ 的确是一个小参数, 但是此时 $S_H \ll S_0$ 这一前提就不再成立。在这个区域中, ϕ 的正确的运动方程应该是:

$$(-\partial^2 + \mu^2)\phi = (\text{small terms of } \phi_0) \quad (\text{B.274})$$

好消息是: 算符 $-\partial^2 + \mu^2$ 是没有零模的。于是在 $|x| > v^{-1}$ 时, 我们的理论是可以用 Green 函数求解的。事实上, 由于所有等式右边的“源”都集中在 $|x|$ 较小的地方, 于是在 $|x|$ 趋于无穷时, ϕ 应该正比于以下的 Green 函数 $G_\mu(x)$:

$$(-\partial^2 + \mu^2)G_\mu(x) = \delta^4(x), \quad G(x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{-\mu|x|} \quad (\text{B.275})$$

如果算符 \mathcal{O} 在无穷远收敛地足够快, 那么约束带来的新相互作用 $\sigma\partial\mathcal{O}/\partial\phi$ 也可以被纳入前面等式右边的“small terms of ϕ ”, 于是在加入约束的理论中, 我们可以通过上面的步骤在 $|x|$ 较小时利用 Green 函数法求解出约束瞬子解; 而在 r 较大时 $\delta\phi$ 满足一个另外的方程, 约束瞬子解本身正比于 Green 函数, 在无穷远处指数衰减。

这也就是说, 就算不是在所有地方都有 $S_H \ll S_0$ 这一前提, 前面的讨论对于加入了约束 $\int d^4x\mathcal{O} - c\rho^{d-4} = 0$ 的理论仍然成立。在具有约束的理论中, 我们仍然可以近似求出约束瞬子解, 并在约束瞬子解附近展开路径积分, 求出各物理量。前面给出的这个流程仍然可以帮助我们解决 Higgs 场改变瞬子解的问题。

不进行具体计算, 我们便可以知道此时约束瞬子的一些特征。首先, 运动方程中的第一项 $\delta S_H/\delta\phi$ 的特征能标是 Higgs 的真空期待值 v , 而第二项的特征长度是瞬子尺度 ρ 。而瞬子解 ϕ_0 的行为在 $|x| \ll \rho$ 时近似为 $|x|/\rho^2$, 而在 $|x| \gg \rho$ 时近似为 $1/|x|$ 。从而当 $|x| \ll \rho$ 时, 这两项的贡献一定至少是 $O(v|x|/\rho^2)$ 和 $O(|x|/\rho)$ 的, 从而它们的贡献都不重要, 此时的约束瞬子解近似于原 Yang-Mills 理论中的瞬子; 而当 $|x| \gg \rho, \gg v^{-1}$ 时, 只有质量项收敛得足够慢, 约束瞬子本身正比于有质量的理论中的 Green 函数, 其行为就如同 $e^{-m|r|}$ 。在后面的讨论中, 我们也会借助这些特征来近似计算出约束瞬子的作用量等我们关心的信息。

Constrained Instanton in the Higgs Theory

好了, 现在我们明白了约束瞬子这一方法的基本思路, 可以试着将其应用于含有 Higgs 场的规范理论了。根据前面的讨论, 我们理论中的 S_0, S_H 分别是:

$$S_0 = \frac{1}{4}F_{IJ}^a F_{IJ}^a + \frac{1}{\lambda}|D_I\phi|^2, \quad S_H = \frac{1}{4\lambda}(|\phi|^2 - v^2)^2 \quad (\text{B.276})$$

在 S_0 下, 通过求解经典场方程, 我们能找到如下的瞬子解:

$$A_{0,I} = \frac{1}{g} \frac{\sigma^a \eta_{aIJ} x_J}{x^2 + \rho^2}, \quad \phi_0 = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + \rho^2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.277})$$

你可能会问: S_0 又不依赖于 v , 为什么我们这里给出的瞬子解有关于 v 呢? 答案是: 我们的经典运动方程是 $D^2\phi = 0$, 而这是一个齐次方程, 我们可以随便对解乘一个因子。在前面的讨论中, 我们假设了加入 S_H 后的瞬子解和 ϕ_0 相差不大, 而加入 S_H 的瞬子在无穷远处一定满足 $|\phi|^2 = v^2$, 从而我们最好也将 ϕ_0 选择为在无穷远处满足 $|\phi|^2 = v^2$ 的解。

有了这个瞬子解之后，我们就可以加入 S_H 了。按照上面的讨论，在 $|x| \ll v^{-1}$ 时，约束瞬子的运动方程是：

$$\left[-\delta_{IJ} D_0^2 + 2F_{IJ}^{(0)} \right] \delta A_J = \frac{1}{\lambda} \phi_0^\dagger \overleftrightarrow{D}_I \phi_0 \quad (\text{B.278})$$

$$D_0^2 \delta \phi = \frac{1}{2} \phi_0 (|\phi_0|^2 - v^2) \quad (\text{B.279})$$

这些方程还不能用 Green 函数法求解，而需要加入一个约束来限制瞬子解在 ρ 方向的改变。在这个情形下，我们需要两个算符 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ 来分别给出 $\partial A_{0,I}/\partial \rho$ 和 $\partial \phi_0/\partial \rho$ 这两个零模方向上的限制。根据前面的讨论，这些算符给出的 $\partial \mathcal{O}_\infty/\partial A_I, \partial \mathcal{O}_\epsilon/\partial \phi$ 需要有零模 $\partial A_{0,I}/\partial \rho, \partial \phi_0/\partial \rho$ 方向的投影，并且其量纲不能为 4。为了能够更好的讨论约束瞬子解的渐进行为，我们也希望这些算符有较高的幂次，这样在 $|x| \rightarrow \infty$ 时它能比 Lagrangian 中的其他算符收敛得更快。综合这些考虑，我们可以选择：

$$\mathcal{O}_1 = \text{tr} F^3, \quad \mathcal{O}_2 = (|\phi|^2 - v^2)^3 \quad (\text{B.280})$$

在下面的讨论中，我们并不会严格地求解出这个约束瞬子解²⁷，而是通过求解其渐进行为来得到我们需要的作用量等信息。在前面的讨论中，我们已经看到了：约束瞬子在 $|x| < \rho$ 时可以被视为原本的瞬子；而在 $|x| \gg \rho, v^{-1}$ 时，约束瞬子满足另外一组以质量项为主导的运动方程：

$$\left(-\delta_{IJ} \partial^2 + \partial_I \partial_J + \frac{g^2}{\lambda} v^2 \right) A_J = 0 \quad (\text{B.281})$$

$$(-\partial^2 + v^2) (\phi - v) = 0 \quad (\text{B.282})$$

根据和上面类似的讨论，约束瞬子解应该正比于这个方程的 Green 函数：

$$\phi - v = \alpha v G_v(x), \quad A_I = \frac{\beta}{g} \sigma^a \eta_{aIJ} \partial_J G_{(gv/\sqrt{\lambda})}(x) \quad (\text{B.283})$$

其中 α, β 是我们未知的两个比例系数。为了求出这两个比例系数，我们需要将这个在 $|x| \gg \rho, v^{-1}$ 处得到的结果和我们熟知的、 $|x|$ 较小时的结果相互对比。作为一个近似，我们可以认为这个 $|x| \gg \rho, v^{-1}$ 处解和原本的瞬子解在 $\rho \ll |x| \ll v^{-1}$ 时都仍然成立。并且在这个区域中，两个解分别可以展开为：

$$\phi_0 = v - \frac{\rho^2 v}{2x^2} + \dots, \quad \phi = v + \frac{\alpha v}{4\pi^2 x^2} + \dots \quad (\text{B.284})$$

$$A_{I,0} = \frac{\sigma^a \eta_{aIJ}}{g} \frac{x_J}{x^2} + \dots, \quad A_I = -\frac{\beta \sigma^a \eta_{aIJ}}{4\pi^2 g} \frac{x_J}{x^2} + \dots \quad (\text{B.285})$$

从而，我们可以得到 $\alpha = -2\pi^2 \rho^2, \beta = -4\pi^2$ 。我们最终得到：约束瞬子解可以被近似为：在 $|x| < \rho$ 时就是 Yang-Mills 瞞子，而在 $|x| > \rho$ 时为以下的构型：

$$\phi = v - 2\pi^2 \rho^2 v G_v(r), \quad A_I = -\frac{4\pi^2}{g} \sigma^a \eta_{aIJ} \partial_I G_{(gv/\sqrt{\lambda})}(x) \quad (\text{B.286})$$

²⁷如果你对严格的约束瞬子解有兴趣，可以看看 N. Nielsen 和 M. Nielsen 的这篇论文：Explicit construction of constrained instantons, arXiv:hep-th/9912006。

将这个约束瞬子解代入作用量 $S = S_0 + S_H$, 就可以得到:

$$\frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x F^2 = \frac{8\pi^2}{g^2} + O[v^4 \rho^4] \quad (\text{B.287})$$

$$\int d^4x |D_I \phi|^2 = \int dS_\mu \phi_0^\dagger \partial_\mu \phi_0 = 2\pi^2 \rho^2 v^2 + O[v^4 \rho^4 \log v \rho] \quad (\text{B.288})$$

$$\int d^4x (|\phi|^2 - v^2)^2 = O[v^4 \rho^4 \log \rho v] \quad (\text{B.289})$$

于是, 约束瞬子的作用量就近似是:

$$S = \frac{8\pi^2}{g^2} + \frac{2\pi^2 \rho^2 v^2}{\lambda} + O(v^4 \rho^4 \log \rho v) \quad (\text{B.290})$$

在约束瞬子附近展开路径积分时, 指数上出现的因子就是 $\exp(-8\pi^2/g^2 - 2\pi^2 \rho^2 v^2/\lambda)$ 而非 $\exp(-8\pi^2/g^2)$ 。通过量纲分析, 可以得到此时的瞬子测度:

$$d\mu_{\text{Inst}} = \int d^4x_0 \frac{d\rho}{\rho^5} \exp\left(-\frac{8\pi^2}{g^2(\rho^{-1})} - \frac{2\pi^2 \rho^2 v^2}{\lambda}\right) \sim \int d^4x_0 \frac{d\rho}{\rho^5} (\rho M)^{\frac{22}{3} - \beta_H} \exp\left(-\frac{2\pi^2 \rho^2 v^2}{\lambda}\right) \quad (\text{B.291})$$

其中 β_H 是 Higgs 场对 beta 函数的额外贡献。这个结果就是 Higgs 理论中的瞬子测度。和之前不同的是, 在原本出现发散的大 ρ 处, 这里多了一个指数衰减的因子 $e^{-2\pi^2 \rho^2 v^2/\lambda}$ 。有了这个因子之后, 整个瞬子测度就不会发散, 理论中就不会出现任何的大瞬子问题了。于是我们终于可以说: 具有 Higgs 机制的理论中不存在大瞬子问题, 于是我们可以利用“瞬子微积分”来计算瞬子对 Higgs 理论中各个物理量的贡献。这就讲完了关于大瞬子问题、Higgs 机制和约束瞬子的整个故事。

Summary: Instanton

最后, 总结一下我们对瞬子的讨论:

Summary: Instanton

- 对于一个规范群为 G 的规范理论, 其“真空”态一一对应于同伦群 $\pi_3(G)$ 中的同伦类。如果 G 是紧致、联通且单纯的, 那么 $\pi_3(G) = \mathbb{Z}$, 理论中就会有无穷多个简并的“真空”态。一个瞬子就是场方程的一个具有有限作用量的、联通两个不同“真空”的经典解。瞬子的存在会导致不同的“真空”之间出现跃迁, 从而不是量子理论中真正的真空。真正的真空是将这些“真空”的能量对角化后得到的 θ -真空。在其附近做微扰论时, 需要在 Lagrangian 中添加上额外的 θ -项。
- 和't Hooft-Polyakov 单极子类似, 我们也不会求解一个一般的瞬子解, 只会在满足 Bogomol'nyi 限的情形下求解。此时瞬子的作用量是 $8\pi^2|Q|/g^2$, 并且满足自对偶或反自对偶条件。对于拓扑数为 1 的情形, 可以由此求解出 **BPST 瞬子解**。

- 如果我们想要将瞬子对关联函数的贡献计算到量子修正的更高阶，就需要考虑瞬子附近的量子涨落。在这些量子涨落中存在零模，它们对应着瞬子解的集体坐标。在规范群为 $SU(N)$ 的规范理论中，一个具有拓扑数 Q 的瞬子具有 $4NQ$ 个零模，从而也就有这么多的参数。当我们在 θ -真空附近计算关联函数时，不但要对所有拓扑数的瞬子的贡献求和，对于一个固定的拓扑数，还需要利用瞬子测度对这些参数积分。
- 如果理论中除去规范场还具有一些无质量的费米子，那么由于在瞬子背景下这些费米子存在零模，瞬子将只会对含零模的关联函数产生贡献。而这些含零模的关联函数给出了手征荷 Q_5 不守恒的过程，从而导致轴 $U(1)$ 对称性在量子水平上被破坏，理论中出现手征反常。费米子零模的这些效应可以在树图阶等效于一个't Hooft 有效算符。
- 在纯粹的 $SU(N)$ 规范理论中，瞬子的效应由大瞬子主导，从而使得瞬子测度发散，理论中出现大瞬子问题。为了解决这个问题，我们可以在理论中引入 Higgs 机制。不过引入 Higgs 机制后的瞬子解也会变化，原瞬子相关的结论不能直接使用，需要利用约束瞬子的方法计算出 Higgs 理论中瞬子的贡献。

Appendix C

Supersymmetry

C.1 The SUSY Algebra

这个附录的目标是讨论超对称¹。在讨论超对称之前，当然要问一个问题：为什么我们需要超对称？我想最主要的原因是：超对称可以用于解决标准模型中 Higgs 的 Hierarchy 问题：在超对称理论中，每个费米子都具有和它一一对应的玻色超对称伴子，从而这些费米子和玻色子圈对 Higgs 自能的贡献在高能下相互抵消。从而引入超对称的标准模型是更加自然的。

由于自旋-统计定理，费米子和玻色子具有不同的自旋，也就分属于不同的 Poincare 代数表示。于是如果我们要将费米子和玻色子用对称性联系在一起，那么新的对称代数一定是对 Poincare 代数的一个扩充，并且在扩充后的代数中，费米子场及其相伴的玻色子场应该属于这个超对称代数的同一个表示中。

为了看到这一点如何实现，我们先从扩充 Poincare 代数开始。扩充后的代数一定具有一个联系费米子、玻色子的变换的生成元。对这些生成元而言，由于它改变自旋，于是它也必然携带 $J_{\mu\nu}$ 的非平凡量子数，从而处于 Lorentz 群的非平凡表示。并且出于可重整性的原因，我们希望将 spin 1/2 的费米子和 spin-0 或 spin-1 的场联系在一起。这样一来，这些生成元应该能够以 1/2 的单位改变自旋。为了实现这一点，一个简单的想法就是：让这些生成元处于 Lorentz 群的 spin-1/2 表示中。并且由于这些生成元联系了 Grassmann 数和 c-数，于是这些生成元一定是费米的。

于是，扩充后的 Poincare 代数又包含费米生成元，又包含玻色生成元。从“生成元是无穷小对称变换”的角度上来看，要知道变换叠加的信息，我们需要的是费米生成元之间的反对易子，而不是对易子。从而，扩充后的 Poincare 代数就不再是通常见到的李代数了。事实上，这种又包含费米生成元，又包含玻色生成元的“李代数”结构在数学上被称为 \mathbb{Z}_2 阶化李代数。而这样一个代数对应的变换群也不是一般的微分流形，它的坐标卡中同时包含实数和 Grassmann 变量。这样的结构在数学上被称为超流形²。

接下来就实际开始构造这样一个扩充的 Poincare 代数。根据前面的讨论，我们可以尝试引入 $2N$ 个互为 Hermitian 共轭的、费米的生成元 $Q_\alpha^I, Q_{\dot{\alpha}}^{I\dagger} (I = 1, \dots, N)$ ，它们分别按照

¹本节和下一节的讨论基本来自 A. Bilal 的 *Introduction to Supersymmetry*, arXiv:hep-th/0101055。

²在第七章中，我们曾经引入 Berezin 积分的概念来处理 BRST 变换中遇到的玻色-费米混合积分。它事实上也就是超流形上的积分。

Lorentz 群的 (2,1) 和 (1,2) 表示变化，并分别携带一个 dotted-undotted 旋量指标：

$$[Q_\alpha^I, J^{\mu\nu}] = (S_L^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta^I, \quad [Q^{\dagger I\dot{\alpha}}, J^{\mu\nu}] = (S_R^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} Q^{\dagger I\dot{\beta}} \quad (C.1)$$

另外，我们不希望这个新的对称操作改变粒子的动量和能量，从而：

$$[Q_\alpha^I, P^\mu] = 0, \quad [Q^{\dagger I\dot{\alpha}}, P^\mu] = 0 \quad (C.2)$$

为了得到这个代数的生成元 $\{P^\mu, J^{\mu\nu}, Q_\alpha^I, Q^{\dagger I\dot{\alpha}}\}$ 之间的所有对易/反对易关系，我们还需要知道新加入的生成元之间的反对易关系才能完全决定这个 \mathbb{Z}_2 阶化李代数。

由于 $(2,1) \otimes (1,2) = (2,2)$ ，于是 $\{Q_\alpha^I, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^J\}$ 一定是一个 4-矢量。变换群的封闭性要求这个任何两个生成元的对易子/反对易子都是生成元的线性组合。而在 Poincare 群中，唯一的选择就是 4-动量。利用第一章中看到的投影张量 $\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu$ 。于是可以尝试写出：

$$\{Q_\alpha^I, Q_{\dot{\alpha}}^{\dagger J}\} = -2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu \delta^{IJ} \quad (C.3)$$

另一方面，由于 $(1,2) \otimes (1,2) = (1,1) \oplus (1,3)$ ，我们无法找到一个已经存在于这个代数中的元素来充当两个 Q_α^I 的反对易子。从而，最简单的选择就是 $\{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0$ 。不过由于量子态乘一个相因子还是同一个量子态，于是对称代数生成元的对易子中可以不仅仅由生成元的线性组合构成，而可以多一个额外的 c 数项³。由于这个 c 数显然在 (1,1) 表示中，从而我们可以利用投影张量 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 写出：

$$\{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} = \varepsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ}, \quad \{Q_{\dot{\alpha}}^{\dagger I}, Q_{\dot{\beta}}^{\dagger J}\} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (Z^{IJ})^* \quad (C.4)$$

由于等式左边的对称性质，中心荷 Z^{IJ} 也要满足 $Z^{IJ} = -Z^{JI}$ 。从而对于 $N=1$ 的情形，这个中心荷只能是 0。直到此处，我们就完整的构造出了超对称代数。其生成元的对易关系就是：

$$[Q_\alpha^I, J^{\mu\nu}] = (S_L^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta^I, \quad [Q^{\dagger I\dot{\alpha}}, J^{\mu\nu}] = (S_R^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} Q^{\dagger I\dot{\beta}} \quad (C.5)$$

$$[Q_\alpha^I, P^\mu] = 0, \quad [Q^{\dagger I\dot{\alpha}}, P^\mu] = 0 \quad (C.6)$$

$$\{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} = \varepsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ}, \quad \{Q_{\dot{\alpha}}^{\dagger I}, Q_{\dot{\beta}}^{\dagger J}\} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (Z^{IJ})^*, \quad \{Q_\alpha^I, Q_{\dot{\alpha}}^{\dagger J}\} = -2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu \delta^{IJ} \quad (C.7)$$

当然，我们要提醒一下：量子理论中的超对称群实际上并不是这个“李代数”对应的“李群”，而是其子群。这是由于量子理论的对称性有一些额外限制而导致的。由于 Wigner 定理，能成为量子理论的连续对称变换一定是幺正的。由于 Q 不是 Hermitian 的， $(1 + i\epsilon Q)$ 本身不能作为一个对称变换，而只有 $(1 + i\epsilon Q + i\epsilon^* Q^\dagger)^4$ 才可以作为一个对称变换。从而我们当我们说一个量子理论的超对称不变性时，我们说的其实都是变换 $(1 + i\epsilon Q + i\epsilon^* Q^\dagger)$ 下的不变性。

有了超对称代数之后，我们应该做的就是看看这个代数的表示是否能够容纳下一个费米子和一个玻色子场，使得它们能够互相变换。为此，我们接下来就试图求出超对称代数的表示。为此，可以先看看超对称代数的表示有什么基本特征：

³这句话用稍微数学一点的语言说，就是：由于量子理论处于超对称群的投影表示中，于是 Hilbert 空间上超对称群的生成元事实上不构成上面这个 \mathbb{Z}_2 阶化李代数，而可以具有非平庸的中心荷——就是上面所提到的 c 数项。

⁴如果你觉得这里的第三项应该加负号，那你错了。由于 ϵ 是一个 Grassmann 变量，于是它和 Q 交换还会带来一个额外的负号。

Proposition 1. 所有处于超对称代数同一不可约表示中的粒子都具有相同的质量。

Proof. 由于 $[P^\mu, Q_\alpha^I] = 0, [P^\mu, Q^{\dagger I \dot{\alpha}}] = 0$, 于是原为 Poincare 代数 Casimir 算符的 P^2 仍然和所有生成元对易, 从而仍然是超对称代数的 Casimir 算符。也就是说, 所有处于超对称代数同一不可约表示中的粒子都具有相同的 P^2 本征值, 从而具有相同的质量 $P^2 = -m^2$ 。□

Proposition 2. 超对称代数任意不可约表示中的态 $|\Phi\rangle$ 一定具有正的 $\langle\Phi|P^0|\Phi\rangle$, 从而具有正的能量。

Proof. 由于:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|Q_\alpha^I|\Phi\rangle\|^2 + \left\| (Q_\alpha^I)^\dagger|\Phi\rangle \right\|^2 = \left\langle \Phi \left| (Q_\alpha^I)^\dagger Q_\alpha^I + Q_\alpha^I (Q_\alpha^I)^\dagger \right| \Phi \right\rangle \\ &= \langle\Phi| \{Q_\alpha^I, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I\} |\Phi\rangle = -2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \langle\Phi|P_\mu|\Phi\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

对这个关系取旋量指标的 trace, 利用 Pauli 矩阵的性质 $\text{Tr}\sigma^\mu = 2\delta^{\mu 0}$ 就可以得出 $0 \leq 4\langle\Phi|P^0|\Phi\rangle$ 。□

Proposition 3. 超对称代数的一个不可约表示中含有相同数量的玻色和费米自由度⁵。

Proof. 这样定义的自由度数其实就是这一表示中具有固定动量的量子态数, 于是我们可以在表示空间的具有动量 P^μ 的子空间 V_P 中考虑问题。首先定义一个算符 $(-1)^{N_F}$, 它作用在费米的态上给出-1, 作用在玻色的态上给出 1。那么容易证明这个算符和 Q 反对易。于是根据 trace 的循环性质, 有:

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Tr}_{V_P} \left[(-1)^{N_F} Q_{\dot{\alpha}}^{\dagger J} Q_\alpha^I - (-1)^{N_F} Q_{\dot{\alpha}}^{\dagger J} Q_\alpha^I \right] = \text{Tr}_{V_P} \left[(-1)^{N_F} Q_{\dot{\alpha}}^{\dagger J} Q_\alpha^I - Q_\alpha^I (-1)^{N_F} Q_{\dot{\alpha}}^{\dagger J} \right] \\ &= \text{Tr}_{V_P} \left[(-1)^{N_F} \{Q_\alpha^I, Q_{\dot{\alpha}}^{\dagger J}\} \right] = -2\sigma_{\alpha\beta}^\mu \text{Tr}_{V_P} [(-1)^{N_F}] P_\mu \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

从而 $\text{Tr}_{V_P} [(-1)^{N_F}] = 0$ 。这就蕴含着玻色和费米自由度数相等。□

这些基本特征告诉了我们一个超对称理论中的粒子态需要满足什么样的性质, 什么样的粒子态可以被超对称联系起来。接下来, 我们就要求出一些超对称代数的无穷维幺正不可约表示, 从而对超对称理论中的粒子态有一个更加深刻的认识。

和求 Poincare 代数表示的时候一样, 为了求出超对称代数的不可约表示, 我们仍然利用小群的表示这一技巧。为此我们可以选择一个标准动量 k 。由于超对称没有改变任何时空的性质, 于是前面对 Poincare 群的讨论对超对称群依然成立, 仍然有:

$$U(\Lambda)|p, \sigma\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_{\sigma'} |\Lambda p, \sigma'\rangle D_{\sigma', \sigma} (L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p) \quad (\text{C.10})$$

其中 D 是小群的表示矩阵, L_p 是从 k 到 p 的 Lorentz 变换。从而只要知道了小群的表示, 就明白了超对称代数的表示。并且由于小群不改变动量本征值, 于是小群的任何表示的表示空间都具有确定的动量本征值 k 。按照前面对自由度的定义, 这个表示的维度就是这一表示中具有固定动量的量子态数, 也就是这个表示中自由度的数目。

⁵ 稍稍解释一下: 例如光子有 +1 和 -1 两个极化, 于是就具有两个自由度。

Massless Irreps of the SUSY Algebra

我们先考虑无质量粒子的情形。并且为了讨论的简便，我们先假设所有的中心荷 Z^{IJ} 为 0。对于无质量粒子，其标准动量可以被选择为：

$$k^\mu = E(1, 0, 0, 1) \quad (\text{C.11})$$

于是，小群的“李代数”就是 ISO(2) 代数的生成元 A, B, J_3 加上 $Q^I, Q^{\dagger I}$ 构成的 \mathbb{Z}_2 阶化李代数。由于我们仍然没有见到具有无穷自旋自由度的粒子，于是物理的表示中 A 和 B 仍然只能有零本征值。从而，我们只需要考虑 $\{J_3, Q^I, Q^{\dagger I}\}$ 构成的代数即可。在 Hilbert 空间的具有动量 k 的子空间 V_k 中，这些生成元的对易关系成为：

$$\{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} = 0, \quad \{Q_{\dot{\alpha}}^{\dagger I}, Q_{\dot{\beta}}^{\dagger J}\} = 0, \quad \{Q_\alpha^I, Q_{\dot{\alpha}}^{\dagger J}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4E \end{pmatrix}_{\alpha\dot{\alpha}} \delta^{IJ} \quad (\text{C.12})$$

$$[J_3, Q_\alpha^I] = \frac{1}{2} (\sigma_3)_\alpha^\beta Q_\beta^I, \quad [J_3, Q^{\dagger I\dot{\alpha}}] = \frac{1}{2} (\sigma_3)^{\dot{\alpha}}_\beta Q^{\dagger I\beta} \quad (\text{C.13})$$

根据对易关系，我们还能再简化一下我们的讨论。由于 $\{Q_1^I, Q_1^{\dagger J}\} = 0$ ，于是对于表示空间中的任何一个态 $|\Phi\rangle$ 而言，都有：

$$0 = \left\langle \Phi \left| \left\{ Q_1^I, Q_1^{\dagger J} \right\} \right| \Phi \right\rangle = \|Q_1^I |\Phi\rangle\|^2 + \left\| (Q_1^I)^\dagger |\Phi\rangle \right\|^2 \quad (\text{C.14})$$

从而，算符 $Q_1^I, Q_1^{\dagger J}$ 在这个子空间中只能具有零本征值。这意味着，我们只用考虑 $J_3, Q_2^I, Q_2^{\dagger I}$ 这 $2N+1$ 个生成元构成的代数。为了考虑这个代数的表示，可以定义以下的几个算符：

$$a_I := \frac{1}{2\sqrt{E}} Q_2^I, \quad a_I^\dagger := \frac{1}{2\sqrt{E}} Q_2^{\dagger I} \quad (\text{C.15})$$

从而，就有⁶：

$$\{a_I, a_J^\dagger\} = \delta_{IJ}, \quad \{a_I, a_J\} = \{a_I^\dagger, a_J^\dagger\} = 0, \quad [J_3, a_I] = -\frac{1}{2} a_I, \quad [J_3, a_I^\dagger] = -\frac{1}{2} a_I^\dagger \quad (\text{C.16})$$

我们发现：这类似全同费米子的产生湮灭算符。这就允许我们如下构造一系列超对称代数的表示：我们选定一个具有最低螺旋度 J_3 的“真空” λ_0 ，并且规定这个“真空态”被所有 a_I 湮灭。并且令小群表示的表示空间由这些“产生湮灭算符”所给出的“占有数基” $a_{I_1}^\dagger \dots a_{I_n}^\dagger |\lambda_0\rangle$ 张成。由于这些态在“产生湮灭算符”和 J_3 下封闭，于是这的确构成了一个超对称代数的表示。这个表示有以下的性质：

- 在表示空间中，态的螺旋度可以从 λ_0 取到 $\lambda_0 + N/2$ 。
- 如此构造出的无质量粒子给出的超对称代数的表示都具有 2^N 个自由度，其中玻色和费米子自由度各有 $2^{(N-1)}$ 个。
- 由于超对称代数的不变子空间要在所有“产生湮灭算符”下封闭，于是占有数基张成的空间就是最小的不变子空间，从而这样构造出的表示是不可约的。

⁶对于 a_I^\dagger ，注意我们定义的是具有下 dotted 指标的旋量。

仅仅求出这些超对称代数的不可约表示还不够。真实的超对称理论中，除去超对称之外还有其他的分立对称性，比如 CPT 定理告诉我们，所有的理论都应该在 CPT 下不变。容易发现：CPT 这一变换反转粒子的螺旋度，于是对于一个螺旋度不关于 0 对称的超对称表示而言，真实的粒子必须处于两个螺旋度相反的超对称表示的直和中。我们将这个直和表示称为一个超多重态。于是，如果粒子所在的超对称表示不满足 $\lambda_0 = -N/4$ ，那么这个粒子所在的超多重态就应该具有 $2^{(N+1)}$ 个自由度。

特殊考虑一下 $N=1$ 的情形。此时的超对称表示就是 2 维的，我们可以用一组数 $(\lambda_0, \lambda_0 + 1/2)$ 来标记。并且由于可重整性的原因，我们通常不考虑螺旋度 2 以上的粒子，从而有用的 $N=1$ 超多重态就是以下的四个：

- $(0, 1/2) \oplus (-1/2, 0)$ ：这对应两个自旋 1/2 的自由度和两个自旋 0 的自由度，它们可以对应一个 Weyl 费米子和一个复标量粒子。
- $(1/2, 1) \oplus (-1, -1/2)$ ：这对应一个 Weyl 费米子和一个无质量矢量粒子，这样的矢量粒子通常是一个规范玻色子。
- $(1, 3/2) \oplus (-3/2, -1)$ ：这对应一个无质量玻色子和一个螺旋度 3/2 的无质量费米子。
- $(3/2, 2) \oplus (-2, -3/2)$ ：这对应一个螺旋度 3/2 的无质量费米子和一个螺旋度 2 的无质量玻色子。事实上，可以证明：所有可能的具有这样的玻色子的理论只有广义相对论，于是这个玻色子粒子就是引力子，而这个无质量费米子通常被称为 **gravitino**。

Massive Irreps of the SUSY Algebra

接下来，我们考虑有质量粒子对应的超对称代数表示。对于有质量粒子而言，其标准动量可以取为：

$$k^\mu = m(1, 0, 0, 0) \quad (\text{C.17})$$

此时，小群的生成元就是 $\text{SO}(3)$ 的生成元 J_1, J_2, J_3 加上 $Q^I, Q^{\dagger I}$ 。在具有标准动量 k 的子空间 V_k 中，这些算符的对易关系是：

$$\begin{aligned} \left\{ Q_\alpha^I, (Q_\beta^J)^\dagger \right\} &= 2m\delta_{\alpha\beta}\delta^{IJ}, \quad \{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} = \varepsilon_{\alpha\beta}Z^{IJ}, \quad \left\{ (Q_\alpha^I)^\dagger, (Q_\beta^J)^\dagger \right\} = \varepsilon_{\alpha\beta}(Z^{IJ})^* \\ [J_i, Q_\alpha^I] &= \frac{1}{2}(\sigma_i)_\alpha^\beta Q_\beta^I, \quad \left[J_i, (Q_\alpha^I)^\dagger \right] = -\frac{1}{2}\left[(\sigma_i)_\alpha^\beta\right]^*(Q_\beta^I)^\dagger \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

矩阵 Z^{IJ} 是一个复线性空间中的反对称矩阵，线性代数告诉我们：经过适当的换基后，它具有标准形：

$$Z^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & 0 & 0 & & \\ -q_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & q_2 & & \\ 0 & 0 & -q_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix} \quad (\text{C.19})$$

首先考虑 N 是偶数的情形。此时，如果我们令⁷：

$$a_\alpha^r = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_\alpha^{2r-1} + \varepsilon_{\alpha\beta}(Q_\beta^{2r})^\dagger\right), \quad a_\alpha^{r\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((Q_\alpha^{2r-1})^\dagger + \varepsilon_{\alpha\beta}Q_\beta^{2r}\right) \quad (\text{C.20})$$

⁷这里定义的算符虽然有 α 这个看起来像旋量指标的东西，但是由于 Lorentz 群表示 (2,1) 和 (1,2) 不等价，从而这个算符不按照相应的旋量表示变换。

$$b_\alpha^r = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q_\alpha^{2r-1} - \varepsilon_{\alpha\beta} (Q_\beta^{2r})^\dagger \right), \quad b_\alpha^{r\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((Q_\alpha^{2r-1})^\dagger - \varepsilon_{\alpha\beta} Q_\beta^{2r} \right) \quad (\text{C.21})$$

那么, 所有这些算符的反对易子中, 不为 0 的就只有:

$$\left\{ a_\alpha^r, a_\beta^{s\dagger} \right\} = (2m - q_r) \delta^{rs} \delta_{\alpha\beta}, \quad \left\{ b_\alpha^r, b_\beta^{s\dagger} \right\} = (2m + q_r) \delta^{rs} \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{C.22})$$

这些算符和角动量算符的对易子也可以计算出:

$$[J_i, a_\alpha^r] = \frac{1}{2} (\sigma_i)_\alpha^\beta a_\beta^r, \quad [J_i, b_\alpha^r] = \frac{1}{2} (\sigma_i)_\alpha^\beta b_\beta^r \quad (\text{C.23})$$

可以看到, 算符 a_1^r, b_1^r 携带螺旋度量子数 $1/2$, 而 a_2^r, b_2^r 携带螺旋度量子数 $-1/2$ 。有了这些信息之后, 我们就可以出发构造一系列超对称代数的表示: 仍然选择一个最低螺旋度的态 λ_0 为“真空态”, 并令 $2N$ 个费米“产生算符” a_1^r, b_1^r 给出的占有数基张成表示空间。

显然这个空间在 $J_3, Q^I, Q^{\dagger I}$ 下不变, 但是 J_1, J_2 下的不变性还没有定论。事实上, 如果我们要求这个空间在 J_\pm, J_3 下不变, 那么将小群限制在其子群 $\text{SO}(3)$ 后, 这个表示一定可以分解为一系列 $\text{SO}(3)$ 不可约表示 $(2j+1)$ 的直和。从而这就要求这个空间的螺旋度关于 0 对称。

我们发现: 这其实和上面讨论的 CPT 对超多重态的限制是相同的。于是对于 $\lambda_0 + N/2 \neq 0$ 的情形, 我们也可以类似地直和上一个螺旋度相反的空间来保证这个限制仍然成立。不过不同的是, 由于 $\text{SO}(3)$ 不可约表示中一定含螺旋度为 0 的态, 从而我们要求上面的表示空间中包含螺旋度 0 的态。这其实也就在要求 $-N < \lambda_0 \leq 0$ 。

如果一个如此构造出的表示空间满足这些条件, 那么它给出的就是超对称代数的一个表示。进一步地, 由于不变子空间在产生湮灭算符下的封闭性, 于是这个表示是不可约的。

讨论完了 N 是偶数的情形, 接下来就来看看 N 是奇数的情形。此时, Z^{IJ} 除去成对的 2×2 反对称矩阵块之外, 还有一个落单的对角线上的 0。令这个 0 对应生成元 Q_α^N , 那么如果定义:

$$a_\alpha^0 = Q_1^N, \quad b_\alpha^0 = Q_2^N \quad (\text{C.24})$$

就会发现, a_α^0, b_α^0 及其共轭也都满足和上面那些 a_α^r, b_α^r 相同的对易/反对易关系。从而后面的一切讨论就都相同: 先构造一个真空态, 令这 $2N$ 个产生湮灭算符给出的占有数基张成一个空间。如果 $-N < \lambda_0 \neq 0$, 那么就可以给出一个超对称代数的不可约表示——这一切和 N 为偶数的情形没有任何差别。综合上面的两部分讨论, 我们就构造出了超对称代数的一系列质量非零的不可约表示。类似前面地, 我们也将这些表示定义为一个超多重态。关于这些不可约表示, 有以下的讨论:

- 在这个不可约表示中, 螺旋度可以从 λ_0 取到 $\lambda_0 + N$ 。如果 $\lambda_0 \neq -N/2$, 那么还要加上 $-\lambda_0$ 到 $-\lambda_0 - N$ 给出的螺旋度取值。
- 如果 $\lambda_0 \neq -N/2$, 那么这个不可约表示包含 2^{2N} 个自由度; 否则包含 2^{2N+1} 个自由度。
- 如果存在一个 $q_r > 2m$, 那么 $\left\{ a_\alpha^r, a_\beta^{r\dagger} \right\}$ 将会小于 0。这会导致 $a_\alpha^{r\dagger} |\lambda_0\rangle$ 具有负的模长, 从而是非物理的。于是中心荷还需要满足 $q_r \leq 2m$ 。另外, 如果存在 k 个 r 使得 $q_r = 2m$, 那么对应的 $\left\{ a_\alpha^r, a_\beta^{r\dagger} \right\}$ 将会是 0, 从而 $a_\alpha^{r\dagger} |\lambda_0\rangle$ 一定是 0。这也就意味着, 表示空间中将不再含有这些产生算符对应的占有数基, 对应的自由度数将会从 2^{2N} 减少到 $2^{2(N-k)}$ 。此时的超多重态被称为 **BPS 超多重态**。

最后, 让我们考虑一下 $N=1$ 的特殊情形。由于 $-N < 0 \leq 0$, 可能的超多重态只有两个:

- $(-1/2, 0, 0, 1/2)$: 这对应两个自旋 $1/2$ 的自由度和两个自旋 0 的自由度, 它们可以对应一个 Weyl 费米子和一个复标量粒子。
- $(0, 1/2, 1/2, 1) \oplus (-1, -1/2, -1/2, 0)$: 这对应一个重矢量粒子, 两个 Weyl 费米子和一个实标量粒子。

到此为止, 我们已经基本上完全明白了超对称代数及其表示的性质。这也就知道了超对称是如何联系不同自旋的粒子, 并且知道了什么样的粒子可以通过超对称联系在一起。当然, 要给出这些粒子的动力学, 我们还需要写出描述这些粒子的理论的 Lagrangian, 当然, 如果想让超对称起效, 这个 Lagrangian 也要在超对称变换下不变。在下一节中, 我们将会看到如何构造出这样的 Lagrangian。

C.2 Constructing Supersymmetric Actions

C.2.1 Superspace and Superfields

接下来, 我们就来尝试构造具有超对称性的 Lagrangian。这需要从考虑场在超对称下的变化性质开始。由于理论肯定具有局域性时空平移不变性, 于是我们其实只用考虑 Lagrange 密度在平移之外的变换下的不变性, 正如我们分析一个相对论性量子场论的 Poincare 群不变性时只需要考虑 Lagrange 密度的 Lorentz 不变性一样。

不过由于超对称生成元和时空平移直接通过对易子关联在一起, 于是我们不能直接从超对称群中分出一个独立的“Lorentz 变换 + 超对称”部分。这会导致场在超对称下的变化性质变得比较复杂。一个解决方法是: 定义一个超空间, 使得超对称生成元变为空间平移的一部分, 这样只要求理论有 Lorentz 不变性和超空间平移不变性, 理论的超对称性就可以保持。由于这些处理在 $N=1$ 的超对称中尤其简单, 于是在下面, 我们将主要考虑 $N=1$ 的情形。

如何构造这个超空间呢? 首先由于 $Q_\alpha, Q_\dot{\alpha}^\dagger$ 是费米的, 于是如果它们是某个空间平移的生成元, 那么对应的空间变量也应该是费米的。为此我们在 Minkowski 时空中加入两组互为复共轭的 Grassmann 变量坐标 $\theta_\alpha, \theta_{\dot{\alpha}}^*$, 使其成为一个超流形⁸。需要注意的是, 虽然这些坐标上看起来携带着旋量指标, 但是这指标仅仅只是为了和 Q_α 的旋量指标相对应而引入的, 这些坐标在 x^μ 的变换下并不发生改变。

为了将 $Q_\alpha, Q_\dot{\alpha}^\dagger$ 解释为超空间上的平移算符, 我们需要先考虑一下超空间的性质。为了讨论的简便, 先引入一个旋量指标的缩并记号: 当我写出两个左手旋量 ξ_L, ψ_L 的缩并 $\xi_L \psi_L$ 时, 指标结构默认为 $\xi_L^\alpha \psi_{L,\alpha}$; 而对于是右手旋量 ξ_R, ψ_R , 那么 $\xi \psi$ 就意味着 $\xi_{R,\dot{\alpha}} \psi_R^{\dot{\alpha}}$ 。

那么, 容易通过 Grassmann 变量的反对称性证明以下恒等式:

$$\begin{aligned} \theta^\alpha \theta^\beta &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \theta \theta, & \theta_\alpha \theta_\beta &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \theta \theta, & \theta^{*\dot{\alpha}} \theta^{*\dot{\beta}} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \theta^* \theta^*, & \theta_{\dot{\alpha}}^* \theta_{\dot{\beta}}^* &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \theta^* \theta^* \\ (\theta \sigma^\mu \theta^*) (\theta \sigma^\nu \theta^*) &= -\frac{1}{2} \theta \theta \theta^* \theta^* \eta^{\mu\nu}, & (\theta \psi) (\theta \chi) &= \frac{1}{2} (\theta \theta) (\psi \chi) \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

⁸由于一个复数的实部和虚部通常被我们视为两个不同的自由度, 从而这个超流形的维数仍然是 $4+2N$ 。

我们曾在第三章中看到，任何一个 Grassmann 变量 $_{1, \dots, n}$ 的函数都可以写成一个有限的“Taylor 展开”的形式。对于超空间中的函数也如此。利用前面这些等式，我们可以将一个超空间中的标量函数写为以下的标准型：

$$\begin{aligned} F(x, \theta, \theta^*) &= f(x) + \theta\psi(x) + \theta^*\chi^*(x) + \theta\theta m(x) + \theta^*\theta^*n(x) + \theta\sigma^\mu\theta^*v_\mu(x) + \theta\theta\theta^*\lambda^*(x) \\ &\quad + \theta^*\theta^*\theta\rho(x) + \theta\theta\theta^*\theta^*d(x) \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

超空间上的积分也就是 Grassmann 变量的积分。为了计算的简便，我们可以定义一个超空间上的积分测度：

$$d^2\theta := \frac{1}{2}d\theta^1d\theta^2, \quad d^2\theta^* := \frac{1}{2}d\theta^{*1}d\theta^{*2} \quad (\text{C.27})$$

这样定义的好处是它们满足 $\int d^2\theta(\theta\theta) = \int d^2\theta^*(\theta^*\theta^*) = 1$ 。由于 Grassmann 变量的积分就是导数，导数就是积分，于是这些积分也可以被写成导数算子的形式：

$$\int d^2\theta = \frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}, \quad \int d^2\theta^* = -\frac{1}{4}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\theta^{*\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\theta^{*\dot{\beta}}} \quad (\text{C.28})$$

最后，由于需要让 Q, Q^\dagger 互为 Hermitian 共轭，我们还需要知道 $\partial_\mu, \partial_{\theta,\alpha} := \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ 在函数空间上的 Hermitian 共轭是什么。经过一些复杂的计算，可以证明：

$$\int d^2\theta d^2\theta^* d^4x F(x, \theta, \theta^*) \partial_{\theta,\alpha} G(x, \theta, \theta^*) = \int d^2\theta d^2\theta^* d^4x (\partial_{\theta,\dot{\alpha}}^* F(x, \theta, \theta^*)) G(x, \theta, \theta^*) \quad (\text{C.29})$$

从而就有⁹：

$$(\partial_{\theta,\alpha})^\dagger = \partial_{\theta,\dot{\alpha}}^* \quad (\text{C.30})$$

明白了超空间的这些性质之后，我们就能试图将 Q, Q^\dagger 解释为某个超空间中的平移算符。于是接下来我们要寻找的就是什么样的平移算符满足超对称代数的对易关系。为此，我们考虑超对称群在超空间上标量函数构成的线性空间中的表示。既然 Q, Q^\dagger 这两个算符是平移算符，那么它们一定是 $\partial_\mu, \partial_{\theta,\alpha}$ 和 $\partial_{\theta,\dot{\alpha}}^*$ 的线性组合。我们先尝试一个可能的结构：

$$Q_\alpha = -i \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \theta^{*\dot{\alpha}} \partial_\mu \right) \quad (\text{C.31})$$

于是¹⁰：

$$Q_{\dot{\alpha}}^\dagger = i \left(\frac{\partial}{\partial\theta^{*\dot{\alpha}}} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu (\theta^{*\dot{\alpha}})^* \partial_\mu \right) = i \left(\frac{\partial}{\partial\theta^{*\dot{\alpha}}} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \theta^\alpha \partial_\mu \right) \quad (\text{C.32})$$

这样定义出的算符 Q, Q^\dagger 的反对易子是：

$$\{Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}^\dagger\} = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \theta^{*\dot{\alpha}} \partial_\mu \right), \left(\frac{\partial}{\partial\theta^{*\dot{\alpha}}} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \theta^\alpha \partial_\mu \right) \right\} = i(c + c^*) \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \quad (\text{C.33})$$

⁹复习一下，在这个空间上 $(\partial_\mu)^\dagger = -\partial_\mu$ 。

¹⁰第二个等号值得一些额外的讨论：由于 $(Q_\alpha)^\dagger = Q_{\dot{\alpha}}^\dagger$, $(\theta^{*\dot{\alpha}})^* = \theta^\alpha$, 我们其实相当于将两种指标交换了一下名字。又根据 Pauli 矩阵的 Hermiticity, 于是交换前有 $(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu)^* = \sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^\mu$, 从而交换后就有 $(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu)^* \rightarrow \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu$ 。这才有了这一步 $(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu)^* (\theta^{*\dot{\alpha}})^* = \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu$ 。

由于 $P^\mu = -i\partial^\mu$, 于是如果我们取 $\text{Re } c=1$, 就可以得出正确的反对易关系。于是直到此处, 我们构造出了一组满足超对称代数对易关系的平移生成元, 从而可以将超对称生成元和这个平移生成元相互对应起来。对于超空间上的算符 $\Phi(x, \theta, \theta^*)$, 有:

$$\begin{aligned} [\Phi(x, \theta, \theta^*), P^\mu] &= -i\partial^\mu\Phi(x, \theta, \theta^*) \\ [\Phi(x, \theta, \theta^*), Q_\alpha] &= -i\left(\partial_{\theta, \alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu\theta^{*\dot{\beta}}\partial_\mu\right)\Phi(x, \theta, \theta^*) \\ \left[\Phi(x, \theta, \theta^*), Q_{\dot{\alpha}}^\dagger\right] &= i\left(\partial_{\theta, \dot{\alpha}}^* + i\theta^{\beta}\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu\partial_\mu\right)\Phi(x, \theta, \theta^*) \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

由于我们希望理论具有超对称不变性。于是我们的作用量应该是超对称不变的。而类似 1.2 节中的讨论: 只在作用量要在超空间上有局域性, 也就是:

$$S = \int d^4x \int d^2\theta \int d^2\theta^* F(x, \theta, \theta^*) \quad (\text{C.35})$$

那么理论就自然是超空间平移不变的, 于是自然就是超对称不变的。这就引导我们用超空间上的场——**超场** $\Phi(x, \theta, \theta^*)$ 构造理论, 使得:

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta \int d^2\theta^* F(\Phi(x, \theta, \theta^*)) \quad (\text{C.36})$$

进一步地, 如果 F 是一个 Lorentz 标量函数, 那么理论的 Lorentz 不变性也自然满足, 从而理论就是超对称不变的。接下来, 我们就要尝试从超场出发构建这样一个超对称不变的 Lagrange 密度。

C.2.2 Chiral Superfields

正如我们前面见到的, 一个超场具有 $f(x), \psi(x), \chi^*(x), m(x), n(x), v_\mu(x), \lambda^*(x), \rho(x), d(x)$ 这八个不同的分量, 它们对应两个 Dirac 费米场, 一个矢量场和两个复标量场。而一般而言, 我们的理论中并不需要这么多质量相同的粒子。从而一个简化自由度的方式就是给超场加上一个超对称不变的约束, 这样用约束后的超场构造出的理论仍然是超对称不变的。为此, 我们定义一组协变导数:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu\theta^{*\dot{\beta}}\partial_\mu, \quad D_\alpha = -\frac{\partial}{\partial\theta^{*\dot{\alpha}}} + i\theta^{\beta}\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu\partial_\mu \quad (\text{C.37})$$

它们满足:

$$\left\{D_\alpha, D_{\dot{\alpha}}^\dagger\right\} = 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\partial_\mu, \quad \{D, D\} = \{D^\dagger, D^\dagger\} = \{D, Q\} = \{D, Q^\dagger\} = \{D^\dagger, Q\} = \{D^\dagger, Q^\dagger\} = 0 \quad (\text{C.38})$$

并且 $[D, \partial], [D^\dagger, \partial]$ 显然为 0, 于是这些协变导数算符的确是超对称不变的。从而, 我们可以给超场一个以下的约束:

$$D_{\dot{\alpha}}^\dagger\Phi(x, \theta, \theta^*) = 0 \quad (\text{C.39})$$

满足这个条件的超场就被称为**手征超场**。类似的, 我们也可以定义**反手征超场**为满足 $D_\alpha\Phi = 0$ 的超场。很容易就能证明: 一个手征超场的 Hermitian 共轭就是一个反手征超场。

别忘了，这些超对称不变约束条件是我们为了简化超场中的自由度而引入的。为了看到这些简化后的超场中含有什么自由度，可以定义：

$$y^\mu := x^\mu + i\theta\sigma^\mu\theta^*, \quad y^{*\mu} = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\theta^* \quad (\text{C.40})$$

那么 $D^\dagger y = Dy^* = 0$ ，并且我们又知道，除去 y 和 θ 之外，超空间中没有任何的坐标满足这个关系。从而手征超场中只能含有 y 和 θ 的依赖性。于是它可以被展开为：

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \theta^*) &= z(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta f(y) \\ &= \left(z(x) + i\theta\sigma^\mu\theta^*\partial_\mu z(x) - \frac{1}{2}(\theta\sigma^\mu\theta^*)(\theta\sigma^\nu\theta^*)\partial_\mu\partial_\nu z(x) \right) \\ &\quad + \left(\sqrt{2}\theta\psi(x) + \sqrt{2}i(\theta\sigma^\mu\theta^*)\theta\psi(x) \right) + \theta\theta f(x) \\ &= \left(z(x) + i\theta\sigma^\mu\theta^*\partial_\mu z(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\theta^*\theta^*\partial^2 z(x) \right) + \left(\sqrt{2}\theta\psi(x) + \sqrt{2}i(\theta\sigma^\mu\theta^*)\theta\psi(x) \right) - \theta\theta f(x) \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

在后面这个展开中，我们利用了，^{*} 在一项中最多出现一次的这个事实。从中就可以看到，一个手征超场中就含有两个复标量场，一个 Weyl 旋量场的自由度。事实上在后面就会发现，场 f 是不可能具有动力学的，从而它不是动力学自由度。于是手征超场中的物理自由度就只有 z 和 ψ 。它们的激发就刚好对应 $N=1$ 超多重态中的 $(-1/2, 0, 0, 1/2)$ 。

利用前文中给出的 Q, Q^\dagger 在函数空间上的表示，可以得出手征超场的这些分量在超对称变换 $(1 + i\epsilon Q + i\epsilon^* Q^\dagger)$ 下的变换关系：

$$\delta z(x) = \sqrt{2}\epsilon\psi(x), \quad \delta\psi(x) = \sqrt{2}i\partial_\mu z\sigma^\mu\epsilon^* - \sqrt{2}f\epsilon, \quad \delta f(x) = \sqrt{2}i\partial_\mu\psi\sigma^\mu\epsilon^* \quad (\text{C.42})$$

有了超场之后，我们能尝试利用超场构造超对称不变的作用量了。对于一般的超场而言，上面的讨论已经告诉了我们 $\int d^4x \int d^2\theta \int d^2\theta^* F(x, \theta, \theta^*)$ 自动是超空间平移不变的。事实上，对于手征超场而言，Lagrange 密度中还可以有另外一种可能的项，它是：

$$\int d^2\theta W(\Phi) \quad (\text{C.43})$$

我们可以十分直接地验证它是超对称变换不变的：

$$\begin{aligned} \delta W &= \left(\frac{\partial W}{\partial \Phi} \right)_\Phi \delta W = \left(\frac{\partial W}{\partial \Phi} \right)_\Phi \left[-\epsilon \left(\partial_{\theta,\alpha} + i\sigma_{\alpha\beta}^\mu \theta^{*\beta} \partial_\mu \right) + \epsilon^* \left(\partial_{\theta,\dot{\alpha}}^* + i\theta^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \right) \right] \Phi(x, \theta, \theta^*) \\ &= \left(\frac{\partial W}{\partial \Phi} \right)_\Phi \left[-\epsilon \left(\partial_{\theta,\alpha} + i\sigma_{\alpha\beta}^\mu \theta^{*\beta} \partial_\mu \right) + \epsilon^* \left(2i\theta^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu - D_\alpha^\dagger \right) \right] \Phi(x, \theta, \theta^*) \\ &= \left(\frac{\partial W}{\partial \Phi} \right)_\Phi \left[-\epsilon \left(\partial_{\theta,\alpha} + i\sigma_{\alpha\beta}^\mu \theta^{*\beta} \partial_\mu \right) + \epsilon^* \left(2i\theta^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \right) \right] \Phi(x, \theta, \theta^*) \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

在积分之后，对 Grassmann 变量的导数项就会消失，就有：

$$\int d^2\theta \delta W = \partial_\mu \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \Phi} \right)_\Phi \left[-\epsilon \left(i\sigma_{\alpha\beta}^\mu \theta^{*\beta} \right) + \epsilon^* \left(2ic\theta^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu \right) \right] \Phi(x, \theta, \theta^*) \right\} \quad (\text{C.45})$$

这是一个全导数,从而对作用量没有贡献。利用相似的过程,我们也可以证明 $\int d^2\theta^*[W(\Phi)]^\dagger$ 是超对称不变的。并且由于 Lagrangian 的 Hermiticity,这两项一定同时在 Langrangian 中出现。从而从手征超场中能构造出的一般 Lagrangian 可以写为:

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\theta^* F(x, \theta, \theta^*) + \int d^2\theta W(\Phi) + \int d^2\theta^*[W(\Phi)]^\dagger \quad (\text{C.46})$$

在这样一个作用量中,物理学家将函数 W 称为**超势**,而将函数 F 称为**Kahler 势**。出于 Hermiticity 的考量,我们需要使得后两项正好互为 Hermitian 共轭,并且要求 Kahler 势是 Hermitian 的。另外出于 Lorentz 不变性的考虑,超势和 Kahler 势就必须都是 Lorentz 标量函数。顺便说一下,由于超势中只能含有 Φ 而不能含有 Φ 的共轭,而复分析中的**全纯函数**也有类似的性质——Cauchy-Riemann 方程直接蕴含 $\partial f/\partial z^* = 0$ 。从而我们也将这种只含有 Φ 、不含有 Φ 的共轭的函数称为 Φ 的全纯函数。我们会在后面多次用到这个 terminology¹¹。

可重整性对这个一般的 Lagrangian 还有更多的限制。首先为了用 power counting 的方式讨论理论的可重整性,就需要知道我们引入的这些, * 和 \dagger 的量纲究竟是多少。根据 $D_\alpha = \partial_{\theta, \alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \theta^*{}^{\dot{\beta}} \partial_\mu$, 我们能看出:

$$-[\theta] = [\theta^*] + 1, \quad -[\theta^*] = [\theta] + 1 \quad (\text{C.47})$$

从而,我们可以看出:

$$[\theta] = [\theta^*] = -1/2, \quad [d^2\theta] = 2[\partial_\theta] = 1 \quad (\text{C.48})$$

于是 Kahler 势和超势的量纲就是:

$$[F(\Phi, \Phi^\dagger)] = 2, \quad [W(\Phi)] = 3 \quad (\text{C.49})$$

由于手征超场中含有一个标量场项 $z(x)$,于是其量纲应该和平常的标量场相同,为 $[\cdot] = 1$ ¹²。于是,一个可重整的、Hermitian 的 Kahler 势中就只能有如下的耦合:

$$F(\Phi, \Phi^\dagger) = \sum_{i,j} g_{ij} \Phi_i^\dagger \Phi_j \quad (\text{C.50})$$

并且 Lagrangian 的 Hermiticity 要求 g_{ij} 一定是一个 Hermitian 矩阵。根据谱定理,它总可以通过一个幺正变换来对角化。从而经过适当的场重定义, Kahler 势总能写成以下的标准型:

$$F(\Phi, \Phi^\dagger) = \Phi_i^\dagger \Phi_i \quad (\text{C.51})$$

这样一个 Kahler 势像就给出如下的 Lagrangian:

$$\mathcal{L}_{\text{Kahler}} = \int d^2\theta d^2\theta^* \Phi^{\dagger i} \Phi_i = -\partial_\mu z_i^\dagger \partial^\mu z_i + i\psi_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + f_i^\dagger f_i \quad (\text{C.52})$$

¹¹对,和你想的一样,虽然函数 XY/Z 在复分析的角度上显然是亚纯而非全纯的,但是在这里也把叫做 X, Y, Z 的全纯函数。至于为什么,只能说物理学家不太懂复分析吧。

¹²这是由于我们无论如何都会通过重定义来将其动力学项写为标准形式的原因。

而对于后面两项而言，由于我们需要在 $W(i)$ 中提取出 项，而能给出这一项的展开只有：

$$W(\Phi) \sim \theta\theta \left(\frac{\partial W}{\partial z_i} f_i - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial z_i \partial z_j} \psi_i \psi_j \right) \quad (C.53)$$

从而，一个一般的、仅由手征超场构造出的理论的 Lagrangian 就是：

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu z_i^\dagger \partial^\mu z_i + i\psi_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + f_i^\dagger f_i + \left(\frac{\partial W}{\partial z_i} f_i - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial z_i \partial z_j} \psi_i \psi_j \right) + \text{h.c.} \quad (C.54)$$

我们看到，场 f_i 本身没有任何动力学，并且在 Lagrange 密度中恰好是 Gaussian 的。于是我们可以直接将这个场积分掉，得到：

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu z_i^\dagger \partial^\mu z_i + i\psi_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \left| \frac{\partial W}{\partial z_i} \right|^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z_i \partial z_j} \psi_i \psi_j + \text{h.c.} \right) \quad (C.55)$$

这就完成了最一般的、仅由手征超场构造出的、超对称不变的理论的构造。

C.2.3 Vector Superfields

由于手征超场中含有一个 Weyl 费米子的自由度，于是我们可以用它来在超对称理论中添加（左手）费米子。除去费米子之外，我们还想要在超对称理论中添加规范场，这也就需要一种除了手征超场之外的超场。由于规范场是实的，我们可以试着定义以下的矢量超场：

$$V(x, \theta, \theta^*) = [V(x, \theta, \theta^*)]^\dagger \quad (C.56)$$

不失普遍性地，其分量可以写为：

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \theta^*) = & C + i\theta\chi - i\theta^*\chi^\dagger + \frac{i}{2}\theta\theta(M + iN) - \frac{i}{2}\theta^*\theta^*(M - iN) + \theta\sigma^\mu\theta^*v_\mu + i\theta\theta\theta^*\lambda^\dagger \\ & - i\theta^*\theta^*\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\theta^*\theta^*D \end{aligned} \quad (C.57)$$

这个超场中包含 C, D, M, N, v 这 8 个玻色自由度，以及，给出的 8 个费米自由度。这仍然包含了太多的自由度。而正好，规范场中也包含一些冗余的规范自由度，于是我们可以通过定义规范变换来消去这些冗余的自由度。定义一个矢量超场的规范变换为：

$$V \rightarrow V + \Xi + \Xi^\dagger \quad (C.58)$$

其中 Ξ 是一个手征超场。于是其分量的变换关系也就是：

$$\begin{aligned} V + \Xi + \Xi^\dagger = & (C + z_\Xi + z_\Xi^\dagger) + i\theta \left(\chi - \sqrt{2}i\psi_\Xi \right) - i\theta^* \left(\chi^\dagger + \sqrt{2}i\psi_\Xi^\dagger \right) + \frac{i}{2}\theta\theta(M + iN + 2if) \\ & - \frac{i}{2}\theta^*\theta^*(M - iN - 2if^\dagger) + \theta\sigma^\mu\theta^*(v_\mu + i\partial_\mu z_\Xi - i\partial_\mu z_\Xi) + i\theta\theta\theta^*\lambda^\dagger - i\theta^*\theta^*\theta\lambda \\ & + \frac{1}{2}\theta\theta\theta^*\theta^* \left(D + \frac{1}{2}\partial^2(z_\Xi + z_\Xi^\dagger) \right) \end{aligned} \quad (C.59)$$

那么在这个变换下，就有 $v_\mu \rightarrow v_\mu + \partial_\mu(2\text{Im } z_\Xi)$ 。可以看到，这类似一个 $U(1)$ 规范场在规范变换下的行为，于是这个超场的规范变换可以用来描述 $U(1)$ 规范场的规范变换。通过在理论中引入这样一个规范对称性，我们不但能够排除掉纯规范的自由度来减少理论的物理自由度数目，还可以将原来的规范理论扩展到超对称中。为了看到排除了规范不变性之后还剩下多少自由度，可以选取以下的规范：

$$\text{Re } z_\Xi = -\frac{1}{2}C, \quad \psi_\Xi = \frac{i}{\sqrt{2}}\chi, \quad f_\Xi = \frac{1}{2}i(M + iN) \quad (\text{C.60})$$

并且经过一些场的重新定义，可以得到以下的分量展开：

$$V_{\text{WZ}} = \theta\sigma^\mu\theta^*A_\mu + i\theta\theta^*\lambda^\dagger - i\theta^*\theta^*\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta^*\theta^*D \quad (\text{C.61})$$

这种规范选择被称为 **Wess-Zumino 规范**。可以看到，原本的 16 个非物理自由度减去 z, f 这 8 个规范负自由度之后，只留下了 A, D 给出的 8 个物理自由度。这八个物理自由度激发出的粒子构成 $N=1$ 超多重态 $(0, 1/2, 1/2, 1) \oplus (-1, -1/2, -1/2, 0)$ 。

知道了如何在超对称理论中描述规范场，接下来就来构造这些规范场的超对称不变 Lagrangian，它一定要同时满足规范不变性和超对称性。为此我们要思考从矢量超场中能得到什么规范不变的东西。首先，下面这个东西一定是规范不变的：

$$\int d^2\theta d^2\theta^* F(V(x, \theta, \theta^*)) \quad (\text{C.62})$$

不过这样的东西无法给出正确的规范场动力学项。为了构造出规范场动力学项，可以引入以下的两个东西：

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}D_{\dot{\alpha}}^\dagger D^{\dagger\dot{\alpha}} D_\alpha V, \quad W_{\dot{\alpha}}^\dagger = -\frac{1}{4}D^\alpha D_\alpha D_{\dot{\alpha}}^\dagger V \quad (\text{C.63})$$

由于 Grassmann 变量的反对易特性， $D_{\dot{\alpha}}^\dagger D_{\dot{\beta}}^\dagger D_{\dot{\gamma}}^\dagger = 0$ ，从而对 W_α 作用一个 D^\dagger 也会得到 0，故 W 是一个手征超场。并且可以验证， W, W^\dagger 也是规范不变的：

$$\delta W_\alpha = -\frac{1}{4}D_{\dot{\alpha}}^\dagger D^{\dagger\dot{\alpha}} D_\alpha (+\Xi^\dagger) = -\frac{1}{4}D_{\dot{\alpha}}^\dagger D^{\dagger\dot{\alpha}} D_\alpha \Xi = \frac{1}{4}D^{\dagger\dot{\alpha}} \{D_{\dot{\alpha}}^\dagger, D_\alpha\} \Xi = \frac{i}{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu D^{\dagger\dot{\alpha}} \Xi = 0 \quad (\text{C.64})$$

如果我们不利用 V ，而仅仅利用 W 构建矢量超场的 Lagrangian，那么根据前面的讨论，能够构造出的最一般的 Lagrangian 就是：

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\theta^* F(W, W^\dagger) + \int d^2\theta f(W) + \int d^2\theta^* [f(W)]^\dagger \quad (\text{C.65})$$

出于可重整性的考虑，最好考虑一下 W 的量纲。由于 $[D_\alpha] = 1/2$ ，而 $[V] = 2[\theta] + [A_\mu] = 0$ ，从而就有 $[W] = 3/2$ 。由于 $[F] = 2$ ，我们无法用 W 构造出一个可重整的 Kahler 势。并且由于 $[W] = 3$ ，对于单一的 W 而言，我们的唯一选择就是：

$$\int d^2\theta W_\alpha W^\alpha + \text{h.c.} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\lambda^\dagger + D^2 - \frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho} \quad (\text{C.66})$$

可以看到, 这就给出了正确的规范场 Lagrangian。通过选择 Lagrangian 前的因子, 最终就能得到:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^2\theta W_\alpha W^\alpha + \text{h.c.} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\lambda\sigma^\mu \partial_\mu \lambda^\dagger + \frac{1}{2} D^2 \quad (\text{C.67})$$

在超对称的规范理论中, A_μ 就是我们的规范场, 而 λ 就是通过超对称和规范场联系起来的费米子, 通常被称为 **gaugino**。当然, 这里的 Lagrangian 是完全通过 W_α 构造出的, 于是其中只有动力学项, 没有相互作用项。如果想要得到相互作用的话, 还需要用 V 和物质场 Φ 写出其他的耦合项。由于写出这种耦合还需要对物质场的规范变换做更多的讨论, 我们就将构造这样一个 Lagrangian 的过程留到下一节中去讨论。另外, 这里仅仅给出了一个 $U(1)$ 规范场的超对称描述, 而对非 Abelian 规范场的讨论也留到后面一小节再讨论了。

C.2.4 Supersymmetric Gauge Theories

有了上面这些讨论之后, 我们可以回到引入超对称最初的目的: 在标准模型中加入超对称性来解决 Higgs 的 Hierarchy 问题。为了看到这一点, 我们要先明白如何构造 $N=1$ 超对称不变的、非 Abelian 的规范理论。

既然我们要引入规范场, 那么理论中就自然要有矢量超场 V 。假设我们有一系列矢量超场 V_a , 它们处于规范群的伴随表示中。为了构造非 Abelian 的规范理论, 首先就要引入非 Abelian 规范场的规范变换关系。为了给出规范场的正确规范变换关系, V_a 的规范变换关系可以取:

$$e^V \rightarrow e^{i\Lambda^\dagger} e^V e^{-i\Lambda} \quad (\text{C.68})$$

其中 $V = V_a T^a$, 而 $\Lambda = \Lambda_a T^a$ 是一个手征超场¹³。当我们考虑 Abelian 的规范群, 并将 Λ 取做 $i\Xi$ 时, 这就回到了 $V \rightarrow V + \Xi + \Xi^\dagger$ 。可以证明, 这个规范变换也能消去 V 中的非物理自由度, 得到和上面完全相同的 Wess-Zumino 规范:

$$V_{WZ} = \theta\sigma^\mu\theta^* A_\mu + i\theta\theta^*\lambda^\dagger - i\theta^*\theta^*\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta^*\theta^*D \quad (\text{C.69})$$

为了还原出非 Abelian 规范场的动力学项, 我们也要从 V 中定义一些手征超场:

$$W_\alpha = -\frac{1}{8} D_{\dot{\alpha}}^\dagger D^{\dot{\alpha}\dot{\alpha}} (e^{-2V} D_\alpha e^{2V}), \quad W_{\dot{\alpha}}^\dagger = \frac{1}{8} D^\alpha D_\alpha (e^{2V} D_{\dot{\alpha}}^\dagger e^{-2V}) \quad (\text{C.70})$$

容易证明, 在规范变换下它们的变换关系是:

$$W_\alpha \rightarrow e^{i\Lambda} W_\alpha e^{-i\Lambda}, \quad W_{\dot{\alpha}} \rightarrow e^{i\Lambda^\dagger} W_{\dot{\alpha}} e^{-i\Lambda^\dagger} \quad (\text{C.71})$$

经过一些繁琐的计算, 可以计算出这个 W 的分量展开:

$$W_\alpha(x, \theta, \theta^*) = -i\lambda_\alpha(y) + \theta_\alpha D(y) + i(\sigma^{\mu\nu}\theta)_\alpha F_{\mu\nu}(y) + \theta\theta (\sigma^\mu D_\mu \lambda^\dagger(y))_\alpha \quad (\text{C.72})$$

¹³ 你可能会问: 这些 T^a 是哪个表示中的生成元? 答案是, 这个关系并不依赖于任何特定的表示, 仅仅与规范群生成元之间的对易关系有关。从 Baker-Campbell-Hausdorff 公式中可以轻易看出这一点。

其中 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$ 是通常的规范场强, $D_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda - ig[A_\mu, \lambda]$, 而 $\sigma^{\mu\nu}$ 被定义为:

$$\begin{aligned} (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta &= \frac{1}{2} (\sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}} \bar{\sigma}_\nu^{\dot{\alpha}\beta} - \sigma_{\nu\alpha\dot{\alpha}} \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta}) \\ (\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} &= \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_\mu^{\dot{\beta}\alpha} \sigma_{\nu\alpha\dot{\alpha}} - \bar{\sigma}_\nu^{\dot{\beta}\alpha} \sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}}) \end{aligned} \quad (\text{C.73})$$

由于在非 Abelian 的超对称规范理论中, gaugino 是一个在规范群伴随表示下的费米子, 这就正是它的规范协变导数。和前面一样, 如果仅仅利用这个 W , 我们可以构造出的可重整的、超对称不变的 Lagrangian 就是:

$$\mathcal{L} = (\text{Const.}) \int d^2\theta g_{ab} W^{a,\alpha} W_\alpha^b + (\text{h.c.}) \quad (\text{C.74})$$

除去超对称下的不变性, 我们还要求这个 Lagrangian 满足规范变换下的不变性。于是唯一的选择就是:

$$\mathcal{L} = (\text{Const.}) \int d^2\theta \text{Tr}(W^\alpha W_\alpha) + \text{h.c.} \quad (\text{C.75})$$

经过选择这一项前面的系数, 就可以得到以下的 Lagrangian:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= \int d^2\theta \frac{\tau}{8\pi i} \text{Tr}(W^\alpha W_\alpha) + \text{h.c.} \\ &= \text{Tr} \left[-\frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\Theta}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} - \frac{2i}{g^2} \lambda \sigma^\mu D_\mu \lambda^\dagger + \frac{1}{g^2} D^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.76})$$

其中, 我们将耦合常数 τ 选择为了:

$$\tau = \frac{\Theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2} \quad (\text{C.77})$$

到此为止, 我们就完全构造出了一个非 Abelian 规范场的超对称不变的 Lagrangian。处于一些显然的原因, 这个理论被称为 **N=1 Super Yang-Mills 理论**。

当然, SM 中并不只有规范场, 还有费米子构成的物质场。于是接下来要做的就是在上面这个“纯规范理论”中加入物质场。由于最简单的含有费米子的 $N=1$ 超多重态是 $(-1/2, 0, 0, 1/2)$, 于是如果我们想在理论中加入费米的物质场, 最简单的方式是对每一个费米子, 在理论中加入对应的手征超场。

如果费米子处于规范群的表示 R 中, 这个手征超场也应该处于表示 R 中。为了给出正确的费米子规范变换关系, 这个手征超场的规范变换就是:

$$\Phi_i \rightarrow (e^{i\Lambda})_i^j \Phi_j, \quad \Phi^{\dagger i} \rightarrow \Phi^{\dagger j} \left(e^{-i\Lambda^\dagger} \right)_j^i \quad (\text{C.78})$$

这里的 Λ 就是 $\Lambda = \Lambda_a T_R^a$ 。根据我们前面的讨论, 对于这些手征超场而言, 最一般的 Lagrangian 就是:

$$\mathcal{L}_{\text{matter}} = \int d^2\theta d^2\theta^* F(\Phi, \Phi^\dagger) + \int d^2\theta W(\Phi) + \int d^2\theta^* [W(\Phi)]^\dagger \quad (\text{C.79})$$

容易发现，原本的 Kahler 势 $\phi^\dagger \phi$ 不是规范不变的。为了保证规范不变性，我们可以将 Kahler 势取为：

$$\int d^2\theta d^2\theta^* \Phi^\dagger e^{2V} \Phi \quad (\text{C.80})$$

除去 Kahler 势外，Lagrangian 中还可以出现超势项。超势的选择有一定任意性，不过由于超势只能从 ϕ_i 中出发构造，并且需要满足规范不变性，于是可以选择的超势是比较少的。这里需要注意的是，由于 ϕ_i 中含有的基本自由度是一个左手 Weyl 旋量场 ψ ，于是在 SM 中添加右手 Fermion 的时候，需要用它们的共轭 e_R^* 对应的手征超场 E^* 构造超势。将这两项合在一起，就可以给出物质场的 Lagrangian：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{matter}} = & - (D_\mu z)^\dagger (D^\mu z) + i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi + f^\dagger f + i\sqrt{2}z^\dagger \lambda \psi - i\sqrt{2}\psi^\dagger \lambda^\dagger z + z^\dagger Dz \\ & + \left(f_i \frac{\partial W}{\partial z_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial z_i \partial z_j} \psi_i \psi_j + \text{h.c.} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.81})$$

可以看到，其中包含了费米子 ψ 及其超对称伴子 z 的运动学项以及它们和规范场的耦合项。由于前面我们写出的规范场动力学项中有一个额外的因子 $1/g^2$ ，从而我们需要做一个重定义 $V \rightarrow gV$ 来将它们放在标准的动力学项中。这里的 A, λ, D 在重定义后就要变成 $gA, g\lambda, gD$ 。

在纯规范场项、物质项之外，事实上还有一项可重整的 Lagrangian 是超对称性允许的：

$$\xi \int d^2\theta d^2\theta^* V \quad (\text{C.82})$$

可以证明，如果要求这一项是规范不变的，那么这个 V 一定是 Abelian 的规范场¹⁴。于是在规范群 G 中存在 $U(1)$ 因子的情形，以下的 **Fayet-Iliopoulos 项**也是被允许的：

$$\mathcal{L}_{\text{FI}} = \sum_{\substack{A \in U(1) \text{ Factors of} \\ \text{gauge group}}} \xi^A \int d^2\theta d^2\theta^* V^A = \sum_{\substack{A \in U(1) \text{ Factors of} \\ \text{gauge group}}} \xi^A D^A \quad (\text{C.83})$$

将这些项拼在一起，我们就能得到一个 $N=1$ 超对称不变的规范理论的 Lagrangian：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{matter}} + \mathcal{L}_{\text{FI}} \\ = & \int d^2\theta d^2\theta^* \Phi^\dagger e^{2V} \Phi + \sum_{U(1) \text{ Factor}} \xi^A \int d^2\theta d^2\theta^* V^A \\ & + \left[\int d^2\theta W(\Phi) + \int d^2\theta \frac{\tau}{8\pi i} \text{Tr} (W^\alpha W_\alpha) + \text{h.c.} \right] \\ = & \text{Tr} \left[-\frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\Theta}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} - \frac{2i}{g^2} \lambda \sigma^\mu D_\mu \lambda^\dagger + \frac{1}{g^2} D^2 \right] \\ & + \sum_A \xi^A D^A - (D_\mu z)^\dagger (D^\mu z) + i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi + f^\dagger f + i\sqrt{2}z^\dagger \lambda \psi - i\sqrt{2}\psi^\dagger \lambda^\dagger z + z^\dagger Dz \\ & + \left(f_i \frac{\partial W}{\partial z_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial z_i \partial z_j} \psi_i \psi_j + \text{h.c.} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.84})$$

¹⁴容易验证，由于 Abelian 规范场的 D 项的变换是一个全微分，不贡献作用量。

其中, 场 D 是没有任何动力学的。我们可以通过 Gaussian 积分来消除掉和它有关的项, 最终得到:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \text{Tr} & \left[-\frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\Theta}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} - \frac{2i}{g^2} \lambda \sigma^\mu D_\mu \lambda^\dagger \right] - (D_\mu z)^\dagger (D^\mu z) + i\psi_{\dot{\alpha}}^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} D_\mu \psi_\alpha \\ & + i\sqrt{2} z^\dagger \lambda^\alpha \psi_\alpha - i\sqrt{2} \psi_{\dot{\alpha}}^\dagger \lambda^{\dot{\alpha}} z - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z_i \partial z_j} \psi_i \psi_j + \text{h.c.} \right) - \left| \frac{\partial W}{\partial z_i} \right|^2 - \frac{g^2}{2} \sum_a |z^\dagger T_R^a z + \xi^a|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.85})$$

这就是一个一般的超对称规范理论的 Lagrangian。

有了这个结论之后, 我们就可以开始构造超对称版本的标准模型了。在标准模型中, 规范群是 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, 这要求我们引入三组矢量超场 V_G, V_W, V_B 。这些超场中包含通常的标准模型规范场 G^a, W^i, B 以及它们对应的 spin-1/2 gaugino $\tilde{G}^a, \tilde{W}^i, \tilde{B}$ 。而在 SM 中, 物质场包含三代费米子, 每一代中包含五个左手费米子多重态 $l_L, e_R^*, q_L, u_R, d_R^*$, 从而我们引入五组手征超场 L, E^*, Q, U^*, D^* , 它们处于和相应费米子相同的规范群表示, 包含这些费米子以及 spin-0 的超对称伴子——**sleptons** \tilde{l}, \tilde{e}^* 和 **squarks** $\tilde{q}, \tilde{u}^*, \tilde{d}^*$ 。注意, 这些场上面的 * 是这些场名字的一部分, 并不代表 E^* 是某个手征超场 E 的共轭。

除去这些粒子之外, SM 中还包含 Higgs Boson, 于是我们还需要加入一个手征超场 H_1 , 包含 Higgs Boson 及其 spin-1/2 伴子 Higgsino。如果我们仅仅利用这些场构建超对称模型, 那么由于上型夸克的质量项中包含 $\tilde{=} i_2^*$, 并且超势中不能包含手征超场的共轭, 从而我们将无法利用 Higgs 机制来给出上型夸克质量。解决这个问题的一个方案就是引入一个新的 Higgs 二重态 H_2 , 它处于规范群的表示 $(1,2,1/2)$ 。由于它具有正确的超荷, 我们就可以用这个新的 Higgs 来赋予上型夸克质量。

总结一下, 超对称版标准模型中的物质场包含以下的七个手征超场:

物质场 (手征超场)	$SU(3)$ irrep	$SU(2)$ irrep	$U(1)$ irrep
L	1	2	-1/2
E^*	1	1	1
Q	3	2	1/6
U^*	3	1	-2/3
D^*	3	1	1/3
H_1	1	2	-1/2
H_2	1	2	1/2

决定了规范场和物质场之后, 根据前面的讨论, Lagrangian 的规范部分和动力学部分已经确定了。唯一需要确定的就是超势部分。而在 SM 中, 除去规范部分和动力学部分之外, 还存在 Higgs-费米子相互作用和 Higgs 自相互作用的部分。于是超势就应该包含这些相互作用。为此引入以下的超势:

$$W = -(y_L)_{IJ} \varepsilon^{ij} (H_1)_i L_{jl} E_J^* - (y_D)_{IJ} (H_1)_i Q_{Ij\alpha} D_j^{*\alpha} - (y_U)_{IJ} (H_2)^i Q_{Ii\alpha} U_{J\alpha}^* - \mu \varepsilon^{ij} (H_1)_i (H_2)_j \quad (\text{C.86})$$

前三项中包含 SM 中的 Higgs-费米子相互作用, 而最后一项给出 Higgs 自相互作用。如果我们假设理论中存在一个 \mathbb{Z}_2 分立对称性——**R 宇称**, 它被定义为:

$$R := (-1)^{3(B-L)+2S} \quad (\text{C.87})$$

其中 B 和 L 是重子数和轻子数，而 S 是自旋。如此定义的 R 使得所有 SM 粒子都具有 R 宇称 1，而所有超对称伴子都具有 R 宇称-1。如果假设 R 宇称是理论的对称性，那么这个超势中存在的耦合就是所有可能的耦合。

R 宇称禁戒了所有可能出现的轻子数、重子数破坏的项。在此之外，它还确保了所有超对称伴子在每个顶点中成对产生，这使得最轻的超对称伴子 (LSP) 一定是稳定的，从而可以作为暗物质的可能候选者。

在写出这个超势后，我们就能写出这个超对称版标准模型的 Lagrangian 了。不过这并不是故事的全部——正如 9.5 节所述，如果超对称是一个未破缺的对称性，那么同一超多重态中的粒子一定具有相同的质量，而这显然和实验相违背——电子质量只有 0.5MeV ，而其超对称伴子 selectron 还没有在对撞机上发现，其质量至少在 TeV 数量级。这告诉我们，超对称一定是在某个高于电弱能标的能标上被破缺的。在下一节中，我们就将详细地考虑这个破缺是如何发生的。

C.2.5 SUSY Breaking

Spontaneous Breaking of SUSY

我们最初引入超对称的原因是解决标准模型中的 Hierarchy 问题，于是一切超对称破缺机制都不应该重新使得某个耦合常数中重新出现二次发散¹⁵。为了保证这一点，最自然的想法当然就是认为超对称并没有真正破缺，只是我们的真空在超对称下并非不变。这意味着超对称是自发破缺的。

在第六章中，为了在理论中看到对称性自发破缺，我们通常会考虑一个处于对称群非平凡表示下的算符的真空期待值。不过对超对称而言，我们有个更简单的判据来判断超对称是否被自发破缺：

Proposition 6. 如果超对称不自发破缺，那么真空态所具有的能量一定为 0。

Proof. 证明过程和我们在前面证明超对称理论中任意态一定具有正能量时类似。如果超对称不自发破缺，那么真空态一定满足 $Q|\Omega\rangle = Q^\dagger|\Omega\rangle = 0$ ，从而：

$$\begin{aligned} 0 &= \|Q_\alpha^I|\Omega\rangle\|^2 + \|(Q_\alpha^I)^\dagger|\Omega\rangle\|^2 = \left\langle\Omega \left| (Q_\alpha^I)^\dagger Q_\alpha^I + Q_\alpha^I (Q_\alpha^I)^\dagger \right| \Omega\right\rangle \\ &= \left\langle\Omega \left| \{Q_\alpha^I, \bar{Q}_\alpha^I\} \right| \Omega\right\rangle = -2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \langle\Omega|P_\mu|\Omega\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.88})$$

对这两个旋量指标取 trace 后，利用 $\text{Tr}\sigma^\mu = 2\delta_0^\mu$ 就能得知 $\langle\Omega|P^0|\Omega\rangle = 0$ ，从而命题得证。 \square

这也就是说：如果真空具有非零的能量，那么超对称一定是自发破缺的。接下来我们就将这个判据应用到超对称规范理论中。

在第六章中我们知道，在半经典近似的领头阶，真空能量也就是理论中势能的极小值。倘若不存在 Lorentz 对称性自发破缺，那么任何具有 Lorentz 指标的场都不应该具有真空期待值，于是理论中只有手征超场的 z 分量可能具有真空期望值。通过计算 Lagrangian 中和 z 有关的部分，就可以得到理论的标量势：

$$\mathcal{L}_z = -V(z, z^\dagger) = -\left|\frac{\partial W}{\partial z_i}\right|^2 - \frac{g^2}{2} \sum_a |z^\dagger T_R^a z + \xi^a|^2 \quad (\text{C.89})$$

¹⁵ 具体的发散相消会在下一节中验证。

利用我们先前积分掉的辅助场 f, D :

$$f_i^\dagger = \frac{\partial W(z)}{\partial z_i}, \quad D^a = -g(z^{\dagger i}(T^a)_i{}^j z_j + \xi^a) \quad (\text{C.90})$$

也可以将这个标量势写为:

$$V(z, z^\dagger) = f_i^\dagger f_i + \frac{1}{2} D^a D^a \quad (\text{C.91})$$

由于标量势的最小值就是真空能量, 从而前面的讨论告诉我们: 如果超对称不自发破缺, 那么一定有 $V(z, z^\dagger) = 0$, 也就是:

$$f^{\dagger i} = \frac{\partial W(z)}{\partial z_i} = 0, \quad D^a = -g(z^{\dagger i}(T^a)_i{}^j z_j + \xi^a) = 0 \quad (\text{C.92})$$

这两个方程分别被我们称为 F 方程和 D 方程。对于一个超对称规范理论而言, 为了看到其中是否存在超对称不破缺的真空, 就可以列出这个理论中的 F 方程和 D 方程, 考虑这两个方程可不可能同时满足。如果可以同时满足, 那么理论中就有可能存在超对称不破缺的真空¹⁶, 反之如果 F 方程和 D 方程不能同时满足, 那么理论中就必然存在超对称自发破缺。

这些讨论给了我们一个可能的超对称破缺机制: 如果我们想在一个超对称规范理论中引入超对称破缺, 就可以调整超势, 使其不能同时满足所有 F 方程和 D 方程。接下来, 我们就来看看这个超势应该如何引入。先考虑一个理论中有三个手征超场 Φ_1, Φ_2, Φ_3 的例子:

$$W = \mu^2 \Phi_1 + m \Phi_2 \Phi_3 + g \Phi_1 \Phi_2^2 \quad (\text{C.93})$$

此时的 F 方程是:

$$f^{\dagger 1} = \mu^2 + g z_2^2 = 0, \quad f^{\dagger 2} = m z_3 + 2 g z_1 z_2 = 0, \quad f^{\dagger 3} = m z_2 = 0 \quad (\text{C.94})$$

显然第一个方程和第三个方程无法同时满足, 从而这个理论一定是超对称自发破缺的。这种通过 F 方程无法被满足而破缺超对称的机制也被称为 **O'Raifeartaigh 机制**, 由于它完全来自于 F 方程无法满足, 于是也被称为 F 项超对称自发破缺。

除了 F 方程无法满足的模型之外, 我们还可以构造 D 方程无法满足的模型。例如当规范群中存在一个 U(1) 因子, 并且其 ξ 非零时, 这个子群对应的 D 方程就可以写为:

$$\sum_i q_i z^{\dagger i} z_i + \xi = 0 \quad (\text{C.95})$$

一个 naive 的想法当然是: 当所有的 q_i, ξ 都具有相同符号时, D 方程本身就无法被满足, 此时超对称也是自发破缺的。不过由于规范-引力反常相消蕴含 $\sum_i q_i = 0$, 从而这个情形是不可能出现的。为了通过 D 方程破缺超对称, 一个可能的想法就是令 F 方程只在 $z_i = 0$ 时满足, 此时如果有 $\xi \neq 0$ 的 U(1) 子群, 那么 D 方程将无法满足, 造成超对称自发破缺。

作为这种情形的例子, 考虑一个理论中有两个手征超场 Φ_1, Φ_2 的模型, 并且假设 $Q(\Phi_1) = -Q(\Phi_2) = 1$ 。如果理论具有如下的超势:

$$W = m \Phi_1 \Phi_2 \quad (\text{C.96})$$

那么 F 方程就对应 $z_1 = z_2 = 0$, 从而 U(1) 子群的 D 方程 $|z_1|^2 - |z_2|^2 + \xi = 0$ 无法被满足。这个破缺超对称的机制被称为 **Fayet-Iliopoulos 机制** 或 D 项超对称自发破缺。

¹⁶当然, 我们还不知道它是真真空还是假真空。为了判断这一点, 我们需要考虑更高阶的量子修正、计算每个真空对应的 Coleman-Weinberg 势。

The Mass Sum Rule

虽然上面这些自发破缺超对称的机制看起来十分合理，但是只有这些机制破缺超对称是不够的，我们还需要在理论中引入一个独立的超对称破缺 sector。这是由于在超对称自发破缺后，手征超场中的两个标量自由度将具有不同的质量，并且其中一个的质量一定小于手征超场中费米子的质量。这意味着：对于一个标准模型中的费米子而言，一定存在一个超对称伴子具有比它低的质量。而我们在实验上并没有找到这样的超对称伴子，从而仅有超对称自发破缺是无法描述现实世界的。

为了证明上面这件事情，我们需要知道超对称自发破缺之后粒子具有怎样的质量。首先对于矢量场而言，其质量来自于破缺前的 $-(D_\mu z_i)^\dagger (D^\mu z_i)$ ，其中包含 $-g^2 z^\dagger T^a T^b z A_\mu^a A^\mu b$ 这一质量项。如果我们定义：

$$D^{ai} := \frac{\partial D^a}{\partial z_i} = -g(z^\dagger T^a)^i, \quad D_i^a := \frac{\partial D^a}{\partial z^i} = -g(T^a z)_i \quad (\text{C.97})$$

那么矢量场的质量矩阵可以被写为：

$$(M_V^2)^{ab} = -2g^2 \langle z^\dagger T^a T^b z \rangle = 2 \langle D^{ai} \rangle \langle D_i^b \rangle \quad (\text{C.98})$$

对于费米场而言，它的质量来自于 Lagrangian 中的 $i\sqrt{2}g z^\dagger \lambda \psi - i\sqrt{2}\psi^\dagger \lambda^\dagger z - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial z_i \partial z_j} \psi_i \psi_j$ 。在超对称自发破缺之后，这变为：

$$-\frac{1}{2} (\psi_i \quad \lambda^a) M_F \begin{pmatrix} \psi_j \\ \lambda^b \end{pmatrix} + \text{h.c.}, \quad M_F = \begin{pmatrix} \langle f^{ij} \rangle & \sqrt{2}i \langle D^{bi} \rangle \\ \sqrt{2}i \langle D^{aj} \rangle & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.99})$$

和之前类似地，我们定义了

$$f^{ij} := \frac{\partial W(z)}{\partial z_i \partial z_j} \quad (\text{C.100})$$

后面的讨论中也会用到类似的定义，我们就不明确写出了。从费米子的这个质量矩阵中，我们还可以看出超对称破缺的另外一个性质——超对称破缺会带来无质量费米子。为了看到这一点，可以利用标量势 $V(z, z^\dagger)$ 在 $\langle z \rangle$ 附近稳定的这一条件¹⁷：

$$\left. \frac{\partial V}{\partial z_i} \right|_{z=\langle z \rangle} = \langle f^{ij} \rangle \langle f_j \rangle + \langle D^{ai} \rangle \langle D^a \rangle = 0 \quad (\text{C.101})$$

另外，由于标量势一定是规范不变的，从而：

$$\frac{\partial V}{\partial z_i} (T^a z)_i = 0 \quad (\text{C.102})$$

在 $z = \langle z \rangle$ 处，这也就意味着：

$$\langle f^i \rangle \langle D_i^a \rangle = 0 \quad (\text{C.103})$$

有了这些结果之后，我们可以验证 $(\sqrt{2}i \langle f_j \rangle, D^a)^T$ 是 M_F 的一个零本征值：

$$M_F \begin{pmatrix} \sqrt{2}i \langle f_j \rangle \\ \langle D^a \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}i \langle f^{ij} \rangle \langle f_j \rangle + \sqrt{2}i \langle D^{ai} \rangle \langle D^a \rangle \\ \sqrt{2}i \langle D^{aj} \rangle \langle f_j \rangle \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.104})$$

¹⁷ 由于 $f_i = \frac{\partial W(z^\dagger)}{\partial z^i}$ ，其 z 导数为 0，于是这里并没有 $\langle f_j^i \rangle$ 项。

这也就意味着，场 $\sqrt{2}i\langle f_j \rangle \psi_j + \langle D^a \rangle \lambda^a$ 对应一个无质量的费米子。从而我们可以说：如果超对称自发破缺，那么理论中一定会出现一个无质量费米子，这就是超对称版本的 Goldstone 定理，而这个无质量费米子也被称为 **Goldstino**。当然，这些讨论都是在树图阶进行的，没有考虑进一步的量子修正。虽然这里不会详细证明，但是利用和 6.6 节类似的谱函数方法，也可以证明考虑任意阶量子修正后这一结论仍然成立。

最后，对于标量而言，其质量项完全来自于标量势 $V(z, z^\dagger)$ 。通过对标量势求导，可以得到以下的质量项：

$$-\frac{1}{2} (z_i - z^{\dagger j}) M_S^2 \begin{pmatrix} z^{\dagger k} \\ z_l \end{pmatrix}, \quad M_S^2 = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial^2 V}{\partial z_i \partial z^{\dagger k}} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 V}{\partial z_i \partial z_l} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial^2 V}{\partial z^{\dagger j} \partial z^{\dagger k}} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 V}{\partial z^{\dagger j} \partial z_l} \right\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{C.105})$$

代入前面求得的标量势 $V(z, z^\dagger) = f^{\dagger i} f_i + D^a D^a / 2$ ，就可以得到：

$$M_S^2 = \begin{pmatrix} \langle f^{ip} \rangle \langle f_{kp} \rangle + \langle D_k^a \rangle \langle D^{ai} \rangle - g \langle D^a \rangle \langle T^a \rangle_k^i & \langle f_p \rangle \langle f^{ilp} \rangle + \langle D^{ai} \rangle \langle D^{al} \rangle \\ \langle f^{\dagger p} \rangle \langle f_{jkp} \rangle + \langle D_j^a \rangle \langle D_k^a \rangle & \langle f^{lp} \rangle \langle f_{jp} \rangle + \langle D_j^a \rangle \langle D^{al} \rangle - g \langle D^a \rangle \langle T^a \rangle_j^l \end{pmatrix} \quad (\text{C.106})$$

这就给出了树图阶中超对称规范理论中各个粒子的质量。为了证明对一个标准模型中的费米子，一定存在一个超对称伴子具有比它低的质量这一事实，我们可以考虑这些质量矩阵的 trace：

$$\begin{aligned} \text{tr } M_V^2 &= 2 \langle D_i^a \rangle \langle D^{ai} \rangle \\ \text{tr } M_F^\dagger M_F &= \langle f_{il} \rangle \langle f^{il} \rangle + 4 \langle D_i^a \rangle \langle D^{ai} \rangle \\ \text{tr } M_S^2 &= 2 \langle f_{ip} \rangle \langle f^{ip} \rangle + 2 \langle D_i^a \rangle \langle D^{ai} \rangle - 2g \langle D^a \rangle \text{tr } T^a \end{aligned} \quad (\text{C.107})$$

从中就能得到关系：

$$3 \text{tr } M_V^2 - 2 \text{tr } M_F^\dagger M_F + \text{tr } M_S^2 = -2g \langle D^a \rangle \text{tr } T^a \quad (\text{C.108})$$

这个关系被称为**质量求和规则**。由于非 U(1) 群的 T^a 总满足 $\text{tr } T^a = 0$ ，于是只有 U(1) 群贡献等式右边这一项。对于超对称版本的标准模型，由于所有手征超场的超荷相加为 0，于是对于所有手征超场所处的大表示而言，等式右边也就是 0。由于 $\text{tr } M^2$ 意味着所有质量本征态粒子的质量平方和，从而这个关系也可以被改写为：

$$2 \sum_{\text{Fermion}} m_F^2 = 3 \sum_{\text{Vector}} m_V^2 + \sum_{\text{Scalar}} m_S^2 \quad (\text{C.109})$$

由于电荷守恒、重子数和轻子数守恒在超对称标准模型中都没有被破坏，从而质量矩阵中也不应该有联系具有不同电荷、重子数和轻子数的矩阵元。从而如果我们只考虑具有特定这些量子数的场，那么质量求和规则也仍然成立。如果考虑具有电子轻子数 1、电荷-1 的场给出的质量求和规则，那么需要考虑的场仅仅是电子及其超对称伴子 selectron。此时的质量求和规则就是：

$$2m_e^2 = m_{\tilde{e}1}^2 + m_{\tilde{e}2}^2 \quad (\text{C.110})$$

从而，电子的两个超对称伴子中，一定有一个的质量小于电子质量。由于我们在自然界中并没有发现质量小于电子的标量粒子，于是超对称自发破缺的模型是无法用来描述自然世界的。为了描述这个世界，我们需要在超对称规范理论加入一个独立的超对称破缺 sector。

Soft Breaking of Supersymmetry

超对称自发破缺后，超对称仍然是理论的一个量子对称性；但是如果我们在超对称规范理论加入一个独立的超对称破缺 sector，那么超对称就不再是理论的对称性，这可能会使得 hierarchy 问题重新在理论中出现。为了避免这个问题，我们能够添加的超对称破缺项一定是所谓的**软破缺项**，也就是说其耦合系数必须具有正的质量量纲。

为什么具有正质量量纲的项不会重新引入 hierarchy 呢？答案十分简单：如果一个图中具有这些软破缺项对应的顶点，那么它对 Higgs 自能的贡献应该具有形式 $\Pi(k^2) = g\pi(k^2)$ ，其中 $\pi(k^2)$ 的质量量纲最多为 1，于是最多含有线性发散。并且 Lorentz 对称性会将可能出现的线性发散降为对数发散，从而不再贡献 hierarchy。于是如果理论中除去超对称允许的项之外仅含有软破缺项，那么这些项将不会给出新的二次发散，从而不重新引入 hierarchy。

在超对称标准模型中，所有满足规范不变、重子和轻子数守恒的软破缺项只有标量质量、gaugino 质量和双线性、三线性标量耦合：

$$\mathcal{L}_{\text{Soft Breaking}} = -\frac{1}{2}(m_\lambda^2)^\alpha \lambda^\alpha \lambda^\alpha - \frac{1}{2}(m_z^2)^{ij} z_i z_j - \frac{1}{2}B^{ij} z_i z_j - \frac{1}{6}A^{ijk} z_i z_j z_k + \text{h.c.} \quad (\text{C.111})$$

在超对称版本的标准模型中，这些耦合可能是：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Soft Breaking}} = & -\frac{1}{2} \left(M_3 \bar{G} \tilde{G} + M_2 \bar{W} \tilde{W} + M_1 \bar{B} \tilde{B} \right) - m_H^2 |\phi_1|^2 - m_{H^*}^2 |\phi_2|^2 - B\mu(\phi_1 \phi_2 + \text{h.c.}) \\ & - M_{\tilde{Q}}^2 (\tilde{u}_L^* \tilde{u}_L + \tilde{d}_L^* \tilde{d}_L) - M_{\tilde{u}}^2 \tilde{u}_R^* \tilde{u}_R - M_{\tilde{d}}^2 \tilde{d}_R^* \tilde{d}_R - M_{\tilde{L}}^2 (\tilde{e}_L^* \tilde{e}_L + \tilde{\nu}_R^* \tilde{\nu}_R) - M_{\tilde{e}}^2 \tilde{e}_R^* \tilde{e}_R \\ & - \frac{g}{\sqrt{2}M_W} \left(\frac{M_d}{\cos\beta} A_d \phi_1 \tilde{Q} \tilde{d}_R^* + \frac{M_u}{\cos\beta} A_d \phi_2 \tilde{Q} \tilde{u}_R^* + \frac{M_d}{\cos\beta} A_e \phi_1 \tilde{L} \tilde{e}_R^* \right) \end{aligned} \quad (\text{C.112})$$

其中 ϕ_1, ϕ_2 意味着两个 Higgs 标量场，而 \tilde{u} 意味着上夸克的超对称伴子。在加上这个软破缺 sector 之后，前面给出的超对称标准模型才能够用来我们的世界。不过我们所加的这些软破缺项实际上并不自然，它们的来源仍然需要构造 UV 端的其他模型去解释。在后面的讨论中，我们会给出一个可能的给出软破缺项的机制——反常中介的超对称破缺。不过鉴于篇幅原因，这里就不再深入讨论下去了。

C.3 Holomorphy and Non-Renormalization Theorem

C.3.1 The Non-Renormalization Theorem

在前面两节中，我们已经明白了什么是超对称，并且知道了如何将超对称应用到标准模型中去。不过别忘了：超对称的目标是通过消除 Higgs 自能中的二次发散来消除标准模型中的 hierarchy 问题，而直到现在我们还没有讨论这个二次发散究竟是如何消除的。事实上，超对称能做到的不只消除 Higgs 自能中的二次发散。**无重整定理**保证了超对称规范理论中只存在场强重整化。由于场强重整化总是和量纲为 4 的动力学项相联系，于是整个理论中也就只存在一个对数发散的量，这使得理论的 UV 行为能够被大大简化¹⁸。

这一节的第一个目标就是证明无重整定理。在此之前，我们需要给出这个定理的严格表述：

¹⁸这一节关于无重整定理的证明主要参考了 Weinberg 三卷本量子场论的第三部。

Theorem 9 (Non-Renormalization Theorem). 对于一个超对称规范理论而言, 如果我们将能标 Λ 以上的高能自由度积分掉, 那么通过微扰论得到的 Wilson 有效作用量一定有以下的形式:

$$\mathcal{L}_\Lambda = \int d^2\theta d^2\theta^* A_\Lambda(\Phi, \Phi^\dagger, V, D) + 2\text{Re} \left(\int d^2\theta W(\Phi) + \frac{1}{2g^2(\Lambda)} \int d^2\theta \text{Tr}(W^\alpha W_\alpha) \right) \quad (\text{C.113})$$

其中 $g^2(\Lambda)$ 是耦合常数的单圈重整化群跑动, A_Λ 宗量中的 D 意味着前面这些场的超对称协变导数。由于 Θ 项没有微扰效应, 这里可以将其忽略。

根据我们在第五章的讨论, 重整化的本质实际上是将一些高能自由度积分掉, 这样得到的 Wilson 有效作用量就是重整的作用量。而无重整定理告诉我们: Wilson 有效作用量中的超势项不会出现发散, 从而是不需要引入额外的重整化因子的。并且当我们考虑重整化时, 一般考虑的都是可重整算符的 Wilson 系数, 而 Kahler 势中唯一的可重整算符就是 $\Phi^\dagger \Phi$ 项, 从而 Wilson 有效作用量中的 $\int d^4\theta A_\Lambda$ 项在 Lagrangian 中只给出正比于 $\int d^4\theta \Phi^\dagger \Phi$ 的可重整耦合 $\int d^4\theta Z \Phi^\dagger \Phi$ 。而由于 $\int d^4\theta \Phi^\dagger \Phi$ 给出手征超场的动力学项, 于是这个耦合就是场强重整化。也就是说, 这个定理保证了微扰论中只存在场强重整化。

接下来就要证明这个定理。我们的思路是: 首先超对称规范理论中的对称性可以给 Wilson 有效作用量一些限制, 这事实上可以将超势项限制到只差一些 Φ 的多项式函数的程度。在此之后, 我们可以利用弱耦合极限确定出这些函数究竟是什么。和我们之前在讨论手征微扰论时用的一样, 为了更好地限制 Wilson 有效作用量, 我们可以将规范耦合和超势中的耦合提升为两个 spurion 手征超场 X, Y ¹⁹²⁰。这样一来, 我们便可以引入包含 X, Y 的变换的额外对称变换。当然, 这些对称变换下的不变性不是原本体系的真正对称性, 但是我们可以利用这些额外对称变换下的对称性来给有效作用量的形式更强的限制。加入这两个 spurion 后, Lagrangian 就变成²¹:

$$\mathcal{L}^\# = \int d^2\theta d^2\theta^* \Phi^\dagger e^{2V} \Phi + 2\text{Re} \left(\int d^2\theta Y W(\phi) \right) + 2\text{Re} \left(\frac{1}{2} \int d^2\theta X \text{Tr}(W^\alpha W_\alpha) \right) \quad (\text{C.114})$$

当我们取 $X = 1/g^2$, $Y = 1$ 时, 这个理论就回到了之前的超对称规范理论。同样, 如果我们将这个理论中的高能自由度积分掉, 得到一个 Wilson 有效作用量, 那么取 $X = 1/g^2$, $Y = 1$ 时也应该回到超对称规范理论的 Wilson 有效作用量。由于超对称性肯定是超对称规范理论的量子对称性, 于是 Wilson 有效作用量一定会继承超对称性和规范对称性, 这使得它一定有形式²²:

$$\mathcal{L}_\Lambda^\# = \int d^2\theta d^2\theta^* A_\Lambda(\Phi, \Phi^\dagger, V, X, X^\dagger, Y, Y^\dagger, D) + 2\text{Re} \left(\int d^2\theta B_\Lambda(\Phi, X, Y, W) \right) \quad (\text{C.115})$$

在这些对称性之外, 理论中还具有两个额外的对称性: 第一个是所谓的 $U(1)_R$ 对称性,

¹⁹物理上讲, 这可以被视作将 X 看作一个有极大质量的手征超场, 而我们看到的这些 X 值是其 VEV。

²⁰顺便说一下, 你有没有觉得 “spurion” 可以被翻译成 “假小子”?

²¹这里我们暂且先不考虑 Fayet-Iliopoulos 项。

²²利用 $\int d^4\theta V = \int d^2\theta \bar{D}_+ \bar{D}_- V$, 于是超势中出现的任何超对称协变导数项可以改写到 Kahler 势中, 于是我们总可以使超势项中不包含协变导数。

在其下各个场的 $U(1)_R$ 荷是：

$$R(\theta) = -1, \quad R(\theta^*) = 1, \quad R(\Phi) = R(X) = R(V) = 0, \quad R(Y) = 2, \quad R(W) = 1 \quad (\text{C.116})$$

这样一来，Lagrangian 本身也具有 $U(1)_R$ 下的对称性，并且由于 $U(1)_R$ 是线性的，它也应该是理论的量子对称性，应该被 Wilson 有效作用量继承。从而 Wilson 有效作用量中的两个函数 A, B 应该分别具有 $U(1)_R$ 荷 $R(A) = 0, R(B) = 2$ 。

事实上，一般的 **R-对称性**指的是超空间坐标 θ^\pm 随之变换的对称性，例如在这个 $U(1)_R$ 下超空间坐标就具有非平凡的荷 $R(\theta) = -1, R(\theta^*) = 1$ 。在这个 notes 的剩余部分中，我们也将大量用到这种 R-对称性。

另一方面，超对称保证了 B_Λ 是全纯的——它只和手征超场 Φ, X, Y, W 有关，和其共轭无关。我们知道，Wilson 有效作用量可以在微扰论中用 Feynman 图计算出，而每一项中的每个场都对应 Feynman 图的外线。由于没有外线为负的 Feynman 图，于是微扰论中的 Wilson 有效作用量不应该包含场的负幂次项²³。另外，如果我们将 Y 取为 0，由于 Wilson 作用量中不可能包含负幂次项，于是其中也不能含有 Y 的负幂次项。由于我们所有能用来构造 B_Λ 的量中只有 W 和 Y 带有 R 荷，而前面这些讨论告诉我们 B_Λ 中不能含有这些东西的负幂次，于是为了满足 $R(B) = 2$ ， B_Λ 只可能出现以下两项：

$$B_\Lambda = Y f_\Lambda(\Phi, X) + W^{a\alpha} W_\alpha^b h_\Lambda^{ab}(\Phi, X) \quad (\text{C.117})$$

第二个额外的对称性是 X 的平移对称性 $X \rightarrow X + i\xi$ 。Lagrangian 在其下的变化正比于 $\text{Im}(\text{Tr } W^\alpha W_\alpha) \propto F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$ ，而众所周知这是 Chern-Simons 流的全导数，从而在微扰论的意义上理论是 X 平移不变的。Wilson 有效作用量中，在 $X \rightarrow X + i\xi$ 下至多变化一个全导数的只有 $X \text{Tr}(W^\alpha W_\alpha)$ 项，其他地方不能出现 X 的依赖性。从而 B_Λ 一定有形式：

$$B_\Lambda = Y f_\Lambda(\Phi) + W^{a\alpha} W_\alpha^b (\delta^{ab} X c_\Lambda + l_\Lambda^{ab}(\Phi)) \quad (\text{C.118})$$

最后，当 $Y = 0$ 时，超势项不存在。我们可以给 Φ 赋予一个 $U(1)$ 荷 1，给 Φ^\dagger 赋予一个 $U(1)$ 荷-1，而给其他超场赋予 $U(1)$ 荷 0。此时这个 $U(1)$ 对称性也会传递到 Wilson 有效作用量中。对于 l_Λ^{ab} 中的任何含 Φ 的正幂次的项而言，它在这个对称性下不是不变的，从而应该不存在。同样由于 Wilson 作用量中不应该含有场的负幂次，于是 l_Λ 不应该含有任何 Φ 的负幂次，从而它应该是个常数：

$$B_\Lambda = Y f_\Lambda(\Phi) + W^{a\alpha} W_\alpha^b (\delta^{ab} X c_\Lambda + l_\Lambda^{ab}) \quad (\text{C.119})$$

由于 l_Λ^{ab} 是一个常数，并且携带两个伴随表示的指标，从而它应该是 $(A) \otimes (A) \rightarrow (\mathbf{1})$ 的投影张量。如果规范群是单纯的，那么可选的投影张量就只有 δ^{ab} 。不过如果规范群是半单的，那么规范群的每个单纯子群的 δ^{ab} 前面可以有不同的系数。为了讨论的简便，下面我们集中考虑规范群单纯的情形，此时的 B_Λ 就有形式：

$$B_\Lambda = Y f_\Lambda(\Phi) + W^{a\alpha} W_\alpha^a (X c_\Lambda + d_\Lambda) \quad (\text{C.120})$$

我们现在已经将 Wilson 有效作用量中的超势项限制到了和原本作用量差不多的形式。接下来的目标就是通过弱耦合极限得出函数 $f_\Lambda(\Phi)$ 和系数 c_Λ, d_Λ 的值。

²³注意：这一点只在微扰论中成立！在后面会看到的 ADS 超势中就含有场的负幂次，但是由于它是由瞬子等非微扰效应产生的，于是不和这里的讨论矛盾。

当我们取 $X \rightarrow \infty, Y \rightarrow 0$ 时, 规范耦合就会随着 $1/\sqrt{X}$ 趋于 0, 而超势带来的 Yukawa 耦合、标量势中的耦合等就会随着 Y 趋于 0。在这个极限下, 除去超势中耦合本身之外, 其他贡献 Φ^n 有效顶点的、正比于 Y 的 Feynman 图都将含有不止一个耦合顶点, 从而贡献可以忽略²⁴。这就意味着:

$$f_\Lambda(\Phi) = W(\Phi) \quad (\text{C.121})$$

而对于系数 c_Λ 和 d_Λ 而言, 它们对应只含有两个规范超场外线的有效顶点。如果我们在超图中直接将 V 看作一个整体, 那么 $V\Phi^2$ 的规范耦合将正比于 X^0 , 规范场传播子将正比于 $1/X$, 并且规范场自耦合正比于 X 。对于一个 Feynman 图, 如果其中含有 I_g 个规范场传播子和 V_g 和规范场自耦合顶点, 那么它应该正比于 X 的 $N_X = V_g - I_g$ 次方。由于手征超场自耦合正比于 Y , 不存在于贡献 c_Λ, l_Λ 的图中, 于是这些图中只能含有规范场自耦合和 $V\Phi^2, V^2\Phi^2$ 耦合。如果一个图中含有 V_g 个规范场自耦合、 I_g 个规范场传播子、 V_s 个 $V\Phi^2, V^2\Phi^2$ 耦合和 I_s 个规范场传播子, 那么这个图的圈数应该是:

$$L = I_s + I_g - V_s - V_g + 1 \quad (\text{C.122})$$

并且由于手征超场传播子的“端点守恒”, 对于一个不含手征超场外线的图, 有:

$$I_s = V_s \quad (\text{C.123})$$

综合上面这几个关系, 我们就得到了:

$$N_X = 1 - L \quad (\text{C.124})$$

在弱耦合极限下, X 的负幂次项都迅速趋于 0。上面的 B_Λ 告诉我们, 我们只关心 $N_X = 0, 1$ 的两项对 Wilson 有效作用量的贡献。 $N_X = 1$ 对应 $L = 0$, 也就是树图阶的结果, 而只有原本 Lagrangian 的 $\text{Tr}(W^\alpha W_\alpha)$ 耦合能给出树图阶的有效顶点, 于是:

$$c_\Lambda = \frac{1}{4} \quad (\text{C.125})$$

我们并不能用类似的手段限制 d_Λ 。从而最终, Wilson 有效作用量中的超势项就可以被写为²⁵:

$$B_\Lambda = YW(\Phi) + \frac{1}{2}\text{Tr}(W^\alpha W_\alpha)(X + d_\Lambda) \quad (\text{C.126})$$

在计算的最后, 为了回到之前的超对称规范理论, 我们只要取 $X = 1/g^2$, $Y = 1$ 即可。从而超对称规范理论的 Wilson 有效作用量就是:

$$\mathcal{L}_\Lambda = \int d^2\theta d^2\theta^* A_\Lambda(\Phi, \Phi^\dagger, V, D) + 2\text{Re} \left(\int d^2\theta W(\phi) \right) + 2\text{Re} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g^2} + d_\Lambda \right) \int d^2\theta \text{Tr}(W^\alpha W_\alpha) \right) \quad (\text{C.127})$$

根据 Wilson 有效作用量的物理意义, $\frac{1}{g^2} + d_\Lambda$ 实际上就是单圈跑动后的耦合常数 $\frac{1}{g^2(\Lambda)}$, 这就完成了我们对无重整定理的证明。

²⁴这里考虑的是所谓的超图, 也就是对超场本身做泛函导数而得的 Feynman 图。容易看到在其中传播子仍然反比于二次项系数的平方根, 顶点仍然正比于耦合常数。在此之外, 我们不需要超图的任何细节。

²⁵其中我们重新定义了 d_Λ 。

在给出这个定理之后，我们需要强调一下：无重整定理并不意味着质量和 Yukawa 耦合完全不随着能标跑动。事实上，它们是和场强重整化反向跑动的。例如对于一个只含有一个手征超场的理论，其 Lagrangian 有形式：

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \Phi^\dagger \Phi + \int d^2\theta \left(\frac{1}{2}m^2 \Phi^2 + \frac{1}{6}\lambda \Phi^3 \right) + \text{h.c.} \quad (\text{C.128})$$

无重整定理保证的是，低能下的 Wilson 有效作用量有如下的形式，也就是说无重整定理保证这个理论中只存在一个重整化常数——场强重整化。

$$\mathcal{L}_\Lambda = \int d^4\theta Z(\Lambda) \Phi^\dagger \Phi + \int d^2\theta \left(\frac{1}{2}m\Phi^2 + \frac{1}{6}\lambda\Phi^3 \right) + \text{h.c.} \quad (\text{C.129})$$

回忆我们在第五章中的讨论：在 Wilson 重整化群中，跑动耦合常数被定义为将场正确归一化后的耦合常数，从而当我们讨论跑动耦合常数时，讨论的都是：

$$m(\Lambda) = \frac{m}{Z(\Lambda)}, \quad \lambda(\Lambda) = \frac{\lambda}{Z^{3/2}(\Lambda)} \quad (\text{C.130})$$

于是耦合常数并非在重整化群下不跑动，而是和场强重整化反向跑动。我们也可以从连续重整化群的角度看这个结果：我们相当于将场和参数做了一个重定义以避免出现发散，而这个重定义是：

$$\Phi_0 = \sqrt{Z}\Phi, \quad m_0^2 \Phi_0^2 = m\Phi^2, \quad \lambda_0 \Phi_0^3 = \lambda\Phi^3 \quad (\text{C.131})$$

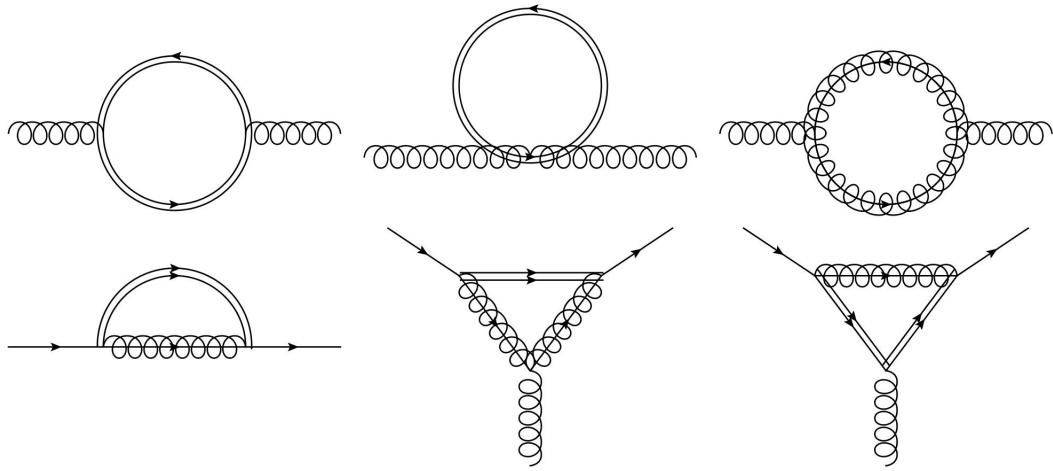
于是裸参数和重整的参数之间还具有关系 $m_0 = m/Z$, $\lambda_0 = \lambda/Z^3$ 。而裸量在重整化群下不变，从而 m, λ 在重整化群下是会变化的。

One-Loop Exactness of Beta Function

上面的推导同时告诉我们，规范场动力学项的系数只会受到单圈修正，从而超对称规范理论的单圈 beta 函数和计算到微扰论任意阶的结果都完全相同，换句话说，微扰论中的 beta 函数是 one-loop exact 的。

通过和 7.4 节完全类似的方法，可以直接算出超对称规范理论的这个 beta 函数。具体而言，除去 7.4 节中的那些图之外，还需要考虑含有超对称伴子的以下图²⁶：

²⁶ 另外一个需要注意的地方是，在那时我们计算的都是 Dirac 旋量场，而此时的旋量是 Weyl 旋量。这会给规范玻色子自能中费米子圈的贡献带来一个额外的 $1/2$ 因子。顺便说一下，最后的三个图实际上对重整化常数没有贡献。



其中双线对应 squark, 而内部含实线的胶子线对应 gaugino。计算这些 Feynman 图后, 便可以得到单圈 beta 函数:

$$\frac{dg}{d \log \mu} = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left(3C(A) - \sum_i T(R_i) \right) \quad (\text{C.132})$$

其中后面一项对所有的物质手征超场 Φ_i 求和, R_i 就是 Φ_i 所处的规范群表示。由于我们利用了 Wilson 有效作用量的全纯性来证明这个 beta 函数是 one-loop exact 的, 从而这个微扰论的 beta 函数也被称为**全纯 beta 函数**。

全纯 beta 函数的这个 one-loop exact 的性质还有另外一个解释方式。首先, 通过前面计算出的单圈 beta 函数, 可以解出单圈的跑动耦合常数:

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\Lambda)} - \frac{b_0}{8\pi^2} \log \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \quad (\text{C.133})$$

其中我们定义了 $b_0 = 3C(A) - \sum_i T(R_i)$ 。由于附录 B 的讨论告诉我们, Θ 角可以被认为是由对角化 Yang-Mills 理论中不同的真空而得到的, 而 Θ 真空定义为 $|\Theta\rangle = \sum_n e^{in\Theta} |n\rangle$ 。如果我们将 Θ 角平移 2π , 那么我们将回到同一个 Θ 真空, 于是一切物理效应都应该相似, 这也就告诉我们 Θ 角是周期的。并且由于 Θ 角不出现在任何微扰论的有限阶中, 于是它不应该随着能标变化而跑动。从而全纯规范耦合 τ 的跑动也就如下:

$$\tau(\mu) = \tau(\Lambda) - \frac{ib_0}{2\pi} \log \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \quad (\text{C.134})$$

从这个跑动耦合常数中, 我们可以定义以下的重整化群不变量²⁷:

$$\Lambda := \mu \exp \left(\frac{2\pi i \tau}{b_0} \right) \quad (\text{C.135})$$

利用这个 Λ , 可以将跑动耦合常数写为以下的形式:

$$\tau(\Lambda; \mu) = \frac{\beta_0}{2\pi i} \log \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \quad (\text{C.136})$$

²⁷ 虽然这看起来和 μ 有关, 不过仔细想想就知道实际上并没有关系。

从这个式子中可以看出: Λ 可以被理解为理论的一个**动力学标度**。当 μ 接近 Λ 的模长 $|\Lambda|$ 时, τ 的实部会成为 0, 这意味着 $g(\mu)$ 趋于无穷大。也就是说, $|\Lambda|$ 就是理论的“Landau 极点”, 标示着一个理论到达强耦合区域的能标。物理学家们将这种从动力学中产生一个标度的现象称为**量纲嬗变**²⁸。当然, 你可能会想: 明明 $|\Lambda|$ 也是重整化群不变的, 我们为什么不用 $|\Lambda|$ 来表示理论的动力学标度呢? 答案是由于 Λ 全纯地依赖于 τ , 于是 Λ 也将在超势中全纯地出现。前面的讨论已经告诉我们: 全纯性给我们讨论理论的性质带来极大的帮助, 于是我们自然希望利用这样一个具有全纯性的动力学标度。

利用这些东西, 如何解释 $\tau(\Lambda; \mu)$ 中只含有单圈修正呢? 如果 $\tau(\Lambda; \mu)$ 中存在超过单圈的修正项, 那么由于在弱耦合极限下 Λ 会成为 0, 而此时的这些修正项不应该发散, 从而这些修正项应该只包含 Λ 的非负幂次。同样, 由于 Θ 角是周期的, 那么 $\tau(\Lambda; \mu)$ 就不应该随变换 $\Theta \rightarrow \Theta + 2\pi$ 而变化。在这个变化下, 有 $\Lambda \rightarrow \Lambda e^{2\pi i/b_0}$, 而所有具有正幂次的、在上面这个变换下不变的修正项只可能有形式:

$$\tau(\Lambda; \mu) = \frac{\beta_0}{2\pi i} \log\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^{b_0 n} \quad (\text{C.137})$$

由于这些修正项一定是正比于 $e^{-8\pi^2 n/g^2}$ 的, 其贡献小于微扰论中任何一阶的贡献²⁹。这也就告诉我们, 如果我们将理论的跑动耦合常数计算到微扰论的任何一阶, 得到的只能是和单圈阶相同的结果, 从而全纯 beta 函数是 one-loop exact 的。

这些讨论看起来非常完美, 不过假如你真的利用 Feynman 图去计算了这个理论中的两圈 beta 函数, 就会惊愕地发现: beta 函数的二圈修正并不是 0! 事实上, 这是由于真正的 beta 函数——**物理 beta 函数**和全纯 beta 函数并不相同。在定义全纯 beta 函数时, 我们考虑的是 Lagrangian 中 $\frac{1}{g^2}$ 系数的跑动, 而在计算真正的 beta 函数时需要对场做一个 rescale。这个 rescale 相当于重新定义了物理的场和耦合常数, 而这个重定义正是导致真正的 beta 函数与全纯 beta 函数不同的元凶。不过全纯 beta 函数并非是没用的, 马上将会看到: 由于全纯 beta 函数是 one-loop exact 的, 我们也可以在微扰论任意阶求出超对称规范理论的物理 beta 函数。

C.3.2 The NSVZ Beta Function

接下来, 我们就来试着求出超对称规范理论的物理 beta 函数。上面的讨论告诉我们, Wilson 有效作用量中的可重整项只有以下的几项³⁰:

$$\mathcal{L}_\mu = \int d^4\theta \sum_i Z_i(\mu) \Phi_i^\dagger e^{2V} \Phi_i + \int d^2\theta \left(\frac{\tau(\mu)}{8\pi i} W^\alpha W_\alpha + W(\Phi_i) \right) + \text{h.c.} \quad (\text{C.138})$$

其中 $\tau(\mu)$ 的演化遵循的正是前面讨论的全纯 beta 函数。在这个 Lagrangian 中, 规范场的动力学项是形如 $-\frac{1}{4g^2(\mu)}FF$ 的, 而这不是我们平时使用的动力学项 $-\frac{1}{4}FF$ 。为了得到这个动力学项, 我们可以做一个 rescale:

$$V = g_{\text{ph}}(\mu) V_{\text{ph}} \quad (\text{C.139})$$

²⁸英文 dimensional transmutation, 据我所知这个词也没有标准的中文翻译

²⁹这个形式也说明它们应该是来自于瞬子的贡献的。

³⁰这里的讨论来自于 Nima Arkani-Hamed 和 Hitoshi Murayama 的论文 *Holomorphy, Rescaling Anomalies and Exact Beta Functions in Supersymmetric Gauge Theories*, arXiv:hep-th/9707133。

当然, 现在我们还不知道 g_{ph} 究竟是什么, 只知道它能使用 V_{ph} 写出的 Lagrangian 中 FF 的系数为正确的 $-1/4$ 。在后面的讨论中, 我们的目的就是通过这个条件定下 g_{ph} 。

另一方面, 由于 Wilson 重整化群中的跑动耦合常数被定义为动力学项正确归一化后的耦合常数, 于是为了得到 Φ_i 的正确动力学项, 我们还需要对它们进行一个重新定义:

$$\Phi_i = \frac{\Phi_{\text{ph},i}}{\sqrt{Z_i}} \quad (\text{C.140})$$

在这些重定义后, 此时的 Wilson 有效作用量就成为:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu = & \int d^4\theta \sum_i \Phi_{\text{ph},i}^\dagger e^{2g_{\text{ph}}(\mu)V_{\text{ph}}} \Phi_{\text{ph},i} \\ & + \frac{1}{2} \int d^2\theta \left[\left(\frac{\Theta g_{\text{ph}}^2(\mu)}{8\pi^2 i} + \frac{g_{\text{ph}}^2(\mu)}{g^2(\mu)} \right) \text{Tr}(W_{\text{ph}}^\alpha W_{\text{ph},\alpha}) + W(\Phi_{\text{ph}}/\sqrt{Z}) \right] + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (\text{C.141})$$

关键的一点是: 重新写出 Wilson 有效作用量并不是这个重新定义所带来的唯一后果。事实上, 它会使路径积分测度发生改变, 带来额外的 Jacobi 行列式。为了看到这一点, 可以考虑原本的、用 Φ_i, V 写出的理论中的路径积分:

$$Z = \int \mathcal{D}V \prod_i \mathcal{D}\Phi_i \mathcal{D}\Phi_i^\dagger e^{iS_\mu[\Phi, V]} \quad (\text{C.142})$$

其中 $\mathcal{D}\Phi = \mathcal{D}z \mathcal{D}\psi \mathcal{D}F$, $\mathcal{D}V = \prod_a \mathcal{D}A^a \mathcal{D}\lambda^a \mathcal{D}D^a$ 。如果我们对场做一个重定义 $\Phi_i = e^{\alpha_i} \Phi_{\text{ph},i}$, $V = e^{\alpha_V} V_{\text{ph}}$, 那么路径积分应该变为:

$$Z = \int \mathcal{D}(e^{\alpha_V} V_{\text{ph}}) \prod_i \mathcal{D}(e^{\alpha_i} \Phi_{\text{ph},i}) \mathcal{D}(e^{\alpha_i} \Phi_{\text{ph},i}^\dagger) e^{iS_\mu[\Phi_{\text{ph}}, V_{\text{ph}}]} \quad (\text{C.143})$$

乍一看来, $\mathcal{D}(e^{\alpha_i} \Phi_{\text{ph},i}) = (\det e^{\alpha_i}) \mathcal{D}z_{\text{ph}} \times (\det e^{\alpha_i})^{-2} \mathcal{D}\psi_{\text{ph}} \times (\det e^{\alpha_i}) \mathcal{D}F_{\text{ph}}$, 于是三个分量在这个变化下带来的泛函行列式应该互相抵消³¹。但是由于这三部分所处的表示空间不同, 它们在 Fujikawa 方法下得到的正规化也不同, 这导致这三部分泛函行列式无法抵消。这会给泛函积分测度带来一个整体的 Jacobi 因子 $\mathcal{D}(e^{\alpha_i} \Phi_{\text{ph},i}) = \mathcal{D}\Phi_{\text{ph},i} \times J[\alpha_i, V]$, 也就等效于在 Lagrangian 中加入额外的项。事实上, 不仅仅是手征超场的部分会给出这样一个 Jacobi 因子, 矢量超场的部分也会给出类似的因子。

在 Nima Arkani-Hamed 和 Hitoshi Murayama 的原始论文中, 他们直接使用 Fujikawa 方法计算了这些泛函行列式。不过在这里, 我们会用一个稍微有些取巧的办法得到它: 如果 α_i 和 α_V 是纯虚数, 那么这个重定义就相当于对这些场做了一个 $U(1)$ 转动。而 $U(1)$ 转动给测度带来的 Jacobi 因子正可以由再熟悉不过的手征反常给出。从而我们可以将 α_i 和 α_V 延拓到复平面上, 计算出虚数 $i\alpha_i$ 对应的 $J[i\alpha_i, V]$, 然后再把它延拓回实轴。

根据 8.3 节的讨论, 由于 Φ 中含有一个左手费米子, 于是在 $U(1)$ 转动 $\Phi \rightarrow e^{i\beta} \Phi$ 下路径积分中会多出以下的 Jacobi 因子:

$$J[\beta] = \exp \left[-\frac{ig_{\text{ph}}^2 \beta}{16\pi^2} T(\text{R}) \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) \right] \quad (\text{C.144})$$

³¹ 2 是因为 ψ 是个 Weyl 旋量, 有两个分量。

这个因子相当于对 Θ 角做了以下的平移：

$$\Theta \rightarrow \Theta - 2T(R)\beta \quad (C.145)$$

由于之前我们定义的全纯耦合常数 τ 的定义是 $\frac{\Theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2}$ ，于是这也就相当于对 τ 进行了以下的平移：

$$\tau \rightarrow \tau - \frac{\beta}{\pi}T(R) \quad (C.146)$$

接下来，我们就要将参数 β 延拓到复平面上。对变换 $\Phi \rightarrow e^\alpha \Phi$ 而言，它可以被视作一个 $\beta = -i\alpha$ 的、复化的 $U(1)$ 转动。于是在这个变化下 τ 的变化就应该是：

$$\tau \rightarrow \tau - \frac{\alpha}{\pi i}T(R) \quad (C.147)$$

这也就意味着：在场的重标度 $\Phi \rightarrow e^\alpha \Phi$ 下，耦合常数 $\frac{1}{g^2}$ 还需要如下改变：

$$\frac{1}{g^2} \rightarrow \frac{1}{g^2} - \frac{\alpha}{4\pi^2}T(R) \quad (C.148)$$

这种场的重定义导致路径积分测度改变的行为被称为 **Konishi 反常**。在前面的讨论中，我们将每个手征超场都做了重新定义 $\Phi_i = \Phi_{ph}/\sqrt{Z_i}$ ，并对规范超场做了重新定义 $V = g_{ph}(\mu)V_{ph}$ 。由于手征超场中含有一个处于表示 R 的左手费米子、规范超场中含有一个处于伴随表示的左手费米子，它们给出的手征反常等价于将 Θ 平移 $\sum_i 2T(R)\beta_i + 2T(A)\beta_V$ ，于是耦合常数在这个重定义下还需要变化：

$$\frac{1}{g^2} \rightarrow \frac{1}{g^2} + \frac{1}{4\pi^2} \left(\sum_i T(R)\alpha_i + T(A)\alpha_V \right) \quad (C.149)$$

其中：

$$\alpha_i = -\frac{1}{2} \log Z_i, \quad \alpha_V = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{g_{ph}^2} \right) \quad (C.150)$$

从而，在将变量从 Φ, V 换做 Φ_{ph}, V_{ph} 之后，体系的 Wilson 有效作用量应该变成：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu &= \int d^4\theta \sum_i \Phi_{ph,i}^\dagger e^{2g_{ph}(\mu)V_{ph}} \Phi_{ph,i} + \int d^2\theta W(\Phi_{ph}/\sqrt{Z}) + \text{h.c.} \\ &+ \frac{g_{ph}^2(\mu)}{2} \int d^2\theta \left[\left(\frac{\Theta}{8\pi^2 i} + \frac{1}{g^2(\mu)} - \frac{1}{8\pi^2} \left(\sum_i T(R) \log Z_i + T(A) \log \frac{1}{g_{ph}^2} \right) \right) \text{Tr}(W_{ph}^\alpha W_{ph,\alpha}) \right] + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (C.151)$$

正如前面所说：我们之所以要将规范超场重新定义，就是为了要让重新定义之后的动力学项具有正确的系数。这就要求：

$$\frac{1}{g_{ph}^2} = \frac{1}{g^2(\mu)} - \frac{1}{8\pi^2} \left(\sum_i T(R) \log Z_i + T(A) \log \frac{1}{g_{ph}^2} \right) \quad (C.152)$$

这就告诉了我们原本定义的耦合常数 $g(\mu)$ 和物理耦合常数 $g_{\text{ph}}(\mu)$ 之间的关系。在这一节中刚刚看到：耦合常数 $g(\mu)$ 的跑动可以用全纯 beta 函数来描述，它严格等于 $\frac{dg}{d \log \mu} = -\frac{g^3}{16\pi^2} (3C(A) - \sum_i T(R_i))$ 。只要对这个关系的两边求 $\log \mu$ 的导数，我们就能计算出物理耦合常数 $g_{\text{ph}}(\mu)$ 所满足的 beta 函数：

$$\mu \frac{dg_{\text{ph}}}{d \log \mu} = -\frac{g_{\text{ph}}^3}{8\pi^2} \frac{3C(A) - \sum_i T(R_i)(1 - \gamma_i)}{1 - C(A)g_{\text{ph}}^2/8\pi^2} \quad (\text{C.153})$$

其中反常量纲 γ_i 被定义为 $\gamma_i := -d \log Z_i / d \log \mu$ 。由于这个结果是由 Novikov, Shifman, Vainshtein 和 Zakharov 四位物理学家第一次计算出来的，于是这个结果被称为 **NSVZ beta 函数**。

由于手征反常可以被认为是瞬子的贡献³²，于是 NSVZ beta 函数可以被认为是在微扰的全纯 beta 函数上增加了瞬子的效应，从而它是非微扰的，即便在强耦合区间中也依然成立。通过 NSVZ beta 函数，体系在 UV 端的动力学可以被确定下来：从 UV 端开始，体系的耦合常数一路沿着 NSVZ beta 函数给出的重整化群流演化。根据我们熟悉的近似，每当能标小于一味夸克的质量，就需要在 beta 函数中去除这一味的贡献。当然，如果理论在 IR 端处于禁闭相，由于胶子会结合为胶球，此时的理论也就不能利用超对称规范场论来描述，NSVZ beta 函数也就无法帮助我们确定体系在 IR 端的动力学。对于一般的超对称规范理论而言，理论在 IR 端的性质还尚未明确，不过我们有一个特例——超对称 QCD。下一节的目标之一就是求出超对称 QCD 在 IR 端的 Wilson 有效作用量，从而得知超对称 QCD 在 IR 端的行为。

References

- [1] Steven Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol.3 Supersymmetry*
- [2] Nima Arkani-Hamed, Hitoshi Murayama, *Holomorphy, Rescaling Anomalies and Exact Beta Functions in Supersymmetric Gauge Theories*, arXiv:hep-th/9703133
- [3] Mikhail Shifman, *Advanced Topics in Quantum Field Theory*

C.4 IR Behavior of Supersymmetric QCD

在本节之前，我们对超对称的认识是纯粹现象学的——为了消除 Higgs 粒子自能中的二次发散，我们需要给每个粒子引入一个超对称伴子。而事实上，讨论超对称还有一个重要的目的：我们也许可以通过研究超对称 QCD (SQCD) 的行为来得到对原本 QCD 的许多认识。由于 SQCD 比起 QCD 有好得多的对称性，我们甚至能够在 SQCD 中对禁闭相、手征凝聚等现象有定量的了解。在这一节中，我们的目标就是着重研究超对称 QCD 的性质³³。

首先来给出超对称 QCD 的 Lagrangian。不用多说就能知道，SQCD 肯定是个规范理论，具有规范群 $SU(N_c)$ 。并且众所周知，QCD 是一个非手征的理论，其中同时含有左手和右手的夸克。而由于手征超场只能给出描述左手夸克，于是对于每一个夸克 Q_I ，我们需

³² 详情可以参阅附录 B 中关于瞬子背景下费米子零模的讨论。

³³ 这一节的讨论大部分来自于 David Tong 的超对称 lecture notes、John Terning 在 2002 年 TASI 中给出的 lecture notes: Non-perturbative Supersymmetry (arXiv:hep-th/0306119)、Nathan Seiberg 关于 Seiberg 对偶的原始文献 arXiv:hep-th/9411149 以及 Hitoshi Murayama 的论文 arXiv:hep-th/2104.01179。并且其中很多理解来自于笔者在 UC Berkeley 和 Hitoshi Murayama 教授的讨论。

要引入两个手征超场 $\Phi_I, \tilde{\Phi}_I$, 分别处于规范群的表示 (N) 和 (N), 其费米子部分分别是左手夸克和右手夸克的共轭³⁴。

明确了规范群和粒子组分之后, 剩下的就是确定超势了。我们希望超势中只含有夸克质量项 $W = m_J^I \tilde{\Phi}_I \Phi^J$, 从而 SQCD 的 Lagrangian 就是³⁵:

$$\mathcal{L}_{\text{SQCD}} = \int d^4\theta \left(\Phi^{\dagger I} e^V \Phi_I + \tilde{\Phi}^J e^{-V} \tilde{\Phi}_J^\dagger \right) + 2\text{Re} \int d^2\theta \left(m_J^I \tilde{\Phi}_I \Phi^J + \frac{1}{8\pi i} \tau \text{Tr}(W^\alpha W_\alpha) \right) \quad (\text{C.154})$$

接下来, 我们就要开始研究这个理论的动力学。前一节的讨论告诉我们: 理论在 UV 端的动力学几乎完全由 NSVZ beta 函数确定, 于是这一节讨论的重点就将是这些理论在 IR 端的性质。并且由于 $N_f \geq 3N_c$ 时 beta 函数大于 0, 理论处于 IR 自由相, 于是 IR 行为也很好预测。于是下面想要解决的核心问题就是 $N_f < 3N_c$ 时理论的 IR 性质——出现禁闭行为的临界 N_f 是多少? 是否还存在 Banks-Zaks 不动点, 如果存在, 那么共形窗口在哪里结束? 超对称理论中的手征对称破缺和禁闭有什么关系? 除了 IR 自由相、共形相、禁闭相之外, 是否存在全新的 IR 相?

为了回答这些问题, 我们需要量子理论的真空结构是什么样的。知道了真空结构, 就明白了理论在 IR 端有多少无质量的物质粒子³⁶——如果理论中有无穷多个连续的简并真空, 那么这些真空将构成一个流形, 在超对称规范理论的语境下通常将其称为模空间。在这样的理论中, 所有沿着模空间方向的粒子激发都是无质量的, 而所有“跳出”模空间方向的粒子都是有质量的。事实上, 如果知道了量子理论的模空间, 就可以导出理论中是否存在禁闭³⁷——如果我们将 Wilson 有效作用量的能标一路积分到 $\mu \rightarrow 0$, 那么理论中的自由度应该只剩下了这些无质量激发。而由于 $\mu \rightarrow 0$ 意味着长程的物理, 于是这些无质量激发才是我们能够看见的自由度。如果所有无质量激发都是色单态, 那么理论就是禁闭的。

如果知道了理论中存在什么样的无质量粒子, 也可以明白理论中存在什么样的 IR 相——如果不存在无质量的玻色子, 那么一切规范荷将会被屏蔽。由于规范玻色子获得质量的机制不同, 理论可以处于禁闭相或者 Higgs 相。如果理论中存在无质量玻色子以传递相互作用, 那么根据理论中的费米子组分、是否存在共形对称性等因素也能确定理论的 IR 相, 我们会在后面更加明确地看到这一点。

于是, 在下面的讨论中, 我们的首要目标就是求出量子理论的真空结构, 从中得到理论的无质量粒子谱, 并从中得到 IR 相。在下面的讨论中, 这些就被我们称之为理论的“IR 行为”。

³⁴我们将用 I, J 代表味指标, i, j 代表 $SU(N)$ 基础表示指标, a, b 代表 $SU(N)$ 伴随表示指标, 以及 α, β 代表旋量指标。鉴于后面会很频繁的使用 $SU(N_f) \times SU(N_f)$ 手征对称性, 我们从现在开始区分味指标的上下标, 并且遵循之前的规定, 令基础表示携带下标、反基础表示携带上标。

³⁵由于反基础表示的生成元满足 $T_N = -(T_N)^* = -(T_N)^T$, 从而 Kahler 势的 $\tilde{\Phi}$ 部分可以写做 $\tilde{\Phi} e^{-V} \tilde{\Phi}^\dagger$ 的形式。

³⁶在一般的量子场论中, 由于 Lorentz 对称性不会自发破缺, 于是我们只能通过这些讨论知道理论中存在多少无质量标量粒子。但是在超对称场论中, 物理的标量粒子一定处于手征超场中, 这就对应无质量的物质场。不过对于规范超场而言, 真空结构并不能帮助我们明白规范粒子和 gaugino 的粒子谱。

³⁷狭义的“禁闭”是由线性势 $V \sim \sigma r$ 来定义的, 不过在这里, 我们将使用一个广义的对“禁闭”的定义, 如果理论在 IR 端不存在非色单态的自由度, 那么就说理论中存在禁闭。后文中所谓的“禁闭”或“广义的禁闭”若不特意强调则都指这个定义。事实上, 在规范群为 $SU(N_c)$ 的 SQCD 中, 除了 $N_f = 0$ 处是不存在狭义的禁闭、只存在广义的禁闭的。顺便说一下: 虽然这个 notes 中不会涉及, 但是狭义的禁闭在规范群为 $SO(N)$ 的超对称规范理论中存在。

C.4.1 Pure Supersymmetric Yang-Mills at $N_f = 0$

首先, 让我们考虑一个简单的情况—— $N_f = 0$, 也就是理论中不存在物质、只存在规范场的情形。我们将会看到: 虽然理论是渐近自由的, 在 IR 端微扰论会失效, 但由于理论的对称性实在太好, 我们可以直接从对称性中得到理论的 IR 行为。

为此, 先来看看理论中有什么对称性。除去超对称和规范对称性之外, 经典理论还具有一个 $U(1)_R$ 对称性。在其下各个物理量具有如下的 $U(1)_R$ 荷:

$$R(\theta) = -R(\theta^*) = -1, \quad R(V) = 0 \quad (\text{C.155})$$

由于 $R(V) = 0$, 其分量的 R 荷就是 $R(A) = 0, R(\lambda) = 1, R(D) = 2$, 并且用规范场构造出的手征超场 W_α 具有 $R(W_\alpha) = 1$ 。并且为了保持 Lagrangian 的 $U(1)_R$ 对称性, 任何超势一定会具有 $R(W) = 2^{38}$ 。

$U(1)_R$ 是一个经典的 Global 对称性。由于理论中存在 gaugino 这一手征费米子, 这会使 $U(1)_R$ 出现量子反常, 从而不再是量子理论的对称性。在一个 $U(1)_R$ 变换 $e^{i\alpha}$ 下, 路径积分中会出现以下的一个 Jacobi 因子:

$$\exp \left[-\frac{ig^2}{16\pi^2} C(A) \alpha \int d^4x \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) \right] \quad (\text{C.156})$$

这一 Jacobi 因子可以通过将 Θ 角平移为 $\Theta \rightarrow \Theta + 2N_c\alpha$ 来抵消。从而虽然 $U(1)_R$ 不再是量子理论的对称性, 但以下的对称性是量子理论的对称性:

$$\theta \rightarrow e^{i\alpha}\theta, \quad V \rightarrow V, \quad \Theta \rightarrow \Theta + 2N_c\alpha \quad (\text{C.157})$$

现在我们有了一个连续的对称性。当然, 由于它涉及到理论参数的变化, 它并不是理论所具有的真实对称性。不过由于 Θ 角是周期的, 从而当 $\alpha = k\pi/N_c$ 时, Θ 角将会变化 2π 的整数倍, 这没有任何的物理后果, 从而就算我们不平移 Θ 角也保持量子理论不变。也就是说, $U(1)_R$ 中还有残留的一部分分立的 \mathbb{Z}_{2N_c} 对称性仍然是理论真实具有的对称性, 它对应 $\alpha = k\pi/N_c$ 的规范变换。

回忆我们上面定义的全纯耦合 $\tau = \frac{\Theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2}$ 和动力学标度 $\Lambda = \mu \exp\left(\frac{2\pi i\tau}{b_0}\right)$, 它们在加入平移后的 $U(1)_R$ 中如下变换:

$$\tau \rightarrow \tau + \frac{N_c}{\pi}\alpha, \quad \Lambda \rightarrow \Lambda e^{\frac{2iN_c\alpha}{b_0}} \quad (\text{C.158})$$

从而, Λ 有效地具有 $U(1)_R$ 荷 $R(\Lambda) = 2N_c/b_0$ 。由于 $b_0 = 3C(A) - \sum_i T(R_i)$, 在没有物质的情形下就是 $3N_c$, 有效 R 荷就是 $R(\Lambda) = 2/3$ 。

明白了理论具有的对称性之后, 就可以用它来讨论理论在 IR 的动力学了。在上一节中, 我们计算出这一理论的单圈 beta 函数是 $\beta(g) = -\frac{3N_c g^3}{16\pi^2}$, 意味着理论是渐近自由的。并且由于理论中不存在物质, 我们相信理论应当处于禁闭相, 这些规范玻色子在 IR 将会组合成有质量的胶球³⁹。

³⁸ 呃, 我们也许给了超势 W 和用规范场定义的手征超场 W_α 同样的字母。为了区分它们, 在我们提及 W_α 时它将永远带着旋量指标。

³⁹ 回忆一下 7.5 节中讨论的 Yang-Mills 理论的 IR 相, 那时我们就发现在 N_f 很小时 QCD 应该处于禁闭相。你可能会觉得: 我们不是能够解析计算出 SQCD 的 IR 行为吗? 为什么这里还会做这种不严格的猜测呢? 事实上, 理论此时处于禁闭相这一事实可以从 $N = 2$ 的超 Yang-Mills 理论中得到——Seiberg 和 Witten 严格解出了 $N = 2$ 的、含物质的超 Yang-Mills 理论, 并且发现如果我们在理论中给物质一个质量项, 这个理论会退回 $N = 1$ 的超 Yang-Mills 理论, 由此可以证明胶子一定会组成有质量的胶球。于是在共形窗口以下的理论中, 我们将会默认胶子组成胶球这一事实。

由于禁闭会使得规范玻色子结合为质量约为 Λ 的胶球，于是理论中所有自由度的质量都是高于截断能标 Λ 的。为了考虑理论的 IR 性质，我们可以将体系的高能自由度一路积分掉，直到截断能标 μ 低于所有这些质量为止。此时这个有效理论的截断也应该处于 Λ 附近，并且由于我们积分掉了所有的自由度，有效作用量也不应该依赖于任何场，仅仅是 Λ 的函数。

由于 Wilson 有效作用量会继承超对称性，于是它也可以被分为 Kahler 势和超势项。对于有效超势而言，由于它具有 $U(1)_R$ 荷 2，并且只能由耦合常数 τ 的全纯函数给出，那么它只能有如下的可能：

$$W_{\text{eff}} = c\Lambda^3 \quad (\text{C.159})$$

通过这个有效超势，我们就能看出理论在 IR 端存在 **gaugino 凝聚** $\langle \lambda^a \lambda^a \rangle$ 。为了看到这一点，可以用路径积分写出这个量：

$$\langle \lambda^a \lambda^a \rangle = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\lambda^\dagger \lambda^a \lambda^a \exp \left[\frac{i}{32\pi} \text{Im} \left(\int d^4x d^2\theta \tau \text{Tr}(W^\alpha W_\alpha) \right) \right] \quad (\text{C.160})$$

我们的 trick 就是：将 τ 提升为一个 spurion 手征超场，这样作用量中就会含有一项：

$$\mathcal{L} \supset -\frac{ig^2}{4\pi} F_\tau \lambda^{a\alpha}(x) \lambda_\alpha^a(x) \quad (\text{C.161})$$

从而，我们就可以写出：

$$\langle \lambda^a \lambda^a \rangle = \frac{4\pi}{g^2} \frac{\delta}{\delta F_\tau} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\lambda^\dagger e^{iS} \Big|_{F_\tau=0} \quad (\text{C.162})$$

由于我们前面讨论的 Wilson 有效作用量实际上积分掉了理论中所有的自由度，于是上式后面这个积分就是 $e^{iS_{\text{eff}}}$ ！从而：

$$\langle \lambda^a \lambda^a \rangle = \frac{4\pi i}{g^2} \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta F_\tau} = \frac{4\pi i}{g^2} \frac{\partial W_{\text{eff}}}{\partial \tau} = -\frac{8\pi^2}{g^2 N_c} c \Lambda^3 \quad (\text{C.163})$$

仅仅依靠对称性是无法计算出常数 c 的，我们将在后面计算出 c 的值——它的确不是 0。也就是说，这样的一个纯超对称规范理论中是存在 gaugino 凝聚的。由于 $U(1)_R$ 剩余的 \mathbb{Z}_{2N_c} 对称性中只有 $e^{i\alpha} = \{1, -1\}$ 的 \mathbb{Z}_2 子群使算符 $\lambda^a \lambda^a$ 不变，于是 gaugino 凝聚会导致 \mathbb{Z}_{2N_c} 对称性自发破缺到 \mathbb{Z}_2 子群，产生 N_c 个简并真空。这 N_c 个简并真空可以用 gaugino 凝聚量 $\langle \lambda^a \lambda^a \rangle$ 来区分。到此为止，我们就完全明白了 $N_f = 0$ 时理论的 IR 行为：此时理论有 N_c 个简并真空，分别带有不同的 gaugino 凝聚量，在任何一个真空附近，理论都处于禁闭相。

C.4.2 Classical Moduli of Supersymmetric Theories

前面的讨论说明：当 $N_f = 0$ 时，理论的 IR 行为是可以直接从对称性中推导出的。那么当我们加入物质后，理论的 IR 行为是否也能类似地得出呢？答案是肯定的，不过在此之前需要做一些准备工作：我们的目标是求出量子理论的真空，而在所有量子修正之前，我们最好先得知理论的经典真空是什么。由于量子修正应该只是对经典效应的修正，于是如果经典理论中存在分立的真空，那么量子效应最多只是使这些分立真空有一些小的偏移；不过

如果我们的经典理论中存在一个非零维的真空流形（在后文中，我们会称之为模空间），那么量子效应可能就会在这个经典模空间上产生一个额外有效势，使得经典模空间上的某些经典真空不再是量子理论中的真空。于是为了得到理论的量子真空，我们首先想要做的就是求出经典真空，然后考虑这些经典真空附近的量子修正。

我们在讨论超对称自发破缺时已经看到：一个理论的超对称真空一定同时满足 F 方程和 D 方程，于是可以考虑 F 方程和 D 方程同时满足的那些解。由于 F 方程和 D 方程是体系的标量势取最小值 0 的点，那么这些解都是理论的经典真空。

对于无质量的 SQCD 而言，F 方程显然是满足的，从而理论的真空流形就是 $\{\phi|D(\phi) = 0\}$ 。由于 SQCD 是一个规范理论，从而可以用规范变换联系的真空具有同样的物理实质，于是理论中所有不等价的真空构成商流形 $\{\phi|D(\phi) = 0\}/G$ 。这个流形被我们称为理论的模空间：

$$\mathcal{M} = \{\phi|D(\phi) = 0\}/G \quad (\text{C.164})$$

根据代数几何中的几何不变量理论，理论的模空间还可以被表示为以下的代数形式：

$$\mathcal{M} = \text{span}\{\phi_i, \tilde{\phi}_i \text{ 的规范不变单项式}\}/\{\text{代数关系}\} \quad (\text{C.165})$$

其中，“单项式”意味着形如 $\prod_i (\phi_i)^{l_i} (\tilde{\phi}_i)^{\tilde{l}_i}$ 的东西，而“代数关系”意味着当这些单项式不独立时，需要模掉这些单项式所满足的代数关系。这个构造给了我们一种规范不变的参数化模空间的方式，它被数学家称为代数簇。由于代数几何对我们物理人而言实在是太难了，我们在这里不会给出任何关于模空间为什么能够表示为这种形式的证明。

知道了如何描述理论的模空间之后，我们就可以尝试求出无质量 SQCD 的模空间了。对于无质量的 SQCD 而言，其 D-方程是：

$$\phi^{\dagger I} T^a \phi_I - \tilde{\phi}^I T^a \tilde{\phi}_I^\dagger = 0 \quad (\text{C.166})$$

这给了我们 $\dim(\mathcal{A}) = N_c^2 - 1$ 个方程。由于两个场之间夹着的 T^a 有点难以处理，我们可以稍稍改写一下这个方程。由于 $SU(N_c)$ 的李代数张成所有 $N_c \times N_c$ 的 Hermitian 无迹矩阵的一组基，于是 D-方程也就意味着对任何 $N_c \times N_c$ 的 Hermitian 矩阵 A 而言，都有：

$$(\phi^{\dagger I})^i \left(A - \frac{1}{N} \text{Tr}(A) \mathbf{1}_{N \times N} \right)_i^j (\phi_I)_j - (\tilde{\phi}^I)^i \left(A - \frac{1}{N} \text{Tr}(A) \mathbf{1}_{N \times N} \right)_i^j (\tilde{\phi}_I^\dagger)_j = 0 \quad (\text{C.167})$$

如果我们将 $(\phi^{\dagger I})^i (\phi_I)_j - (\tilde{\phi}^I)^i (\tilde{\phi}_I^\dagger)_j$ 看成一个矩阵 B_{ij} ，那么这也可以被看作 $\text{Tr}(AB) - \frac{1}{N} \text{Tr}(A) \text{Tr}(B) = 0$ ，也就是说对任意的矩阵 A ，如果我们定义：

$$C = B - \frac{1}{N_c} \text{Tr}(B) \mathbf{1}_{N_c \times N_c} \quad (\text{C.168})$$

就都有 $\text{Tr}(AC) = 0$ ，这无疑蕴含了 $C = 0$ 。从而 D-方程可以被改写为：

$$(\phi^{\dagger I})^i (\phi_I)_j - (\tilde{\phi}^I)^i (\tilde{\phi}_I^\dagger)_j = \frac{1}{N} \left[(\phi^{\dagger I})^k (\phi_I)_k - (\tilde{\phi}^I)^k (\tilde{\phi}_I^\dagger)_k \right] \delta_j^i \quad (\text{C.169})$$

接下来就要求解这个方程以得到 SQCD 的模空间。我们马上就能看到：这个方程的解在 $N_f < N_c$ 和 $N_f \geq N_c$ 时会出现不同的行为，于是需要对这两个情形分情况讨论。

$$N_f < N_c$$

首先考虑 $N_f < N_c$ 的情形。我们总可以做一个 $SU(N_c)$ 规范转动和 $SU(N_f)$ 味转动的联合变换，将 $\phi_{Ii}, \tilde{\phi}_{Ii}^\dagger$ 的真空期待值写成如下的标准形式：

$$\langle \phi_{Ii} \rangle = \left(\begin{array}{ccc|c} v_1 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & v_{N_f} & 0 \end{array} \right), \quad \langle \tilde{\phi}_{Ii}^\dagger \rangle = \left(\begin{array}{ccc|c} v'_1 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & v'_{N_f} & 0 \end{array} \right) \quad (C.170)$$

其中矩阵的行代表 $SU(N_c)$ 基础表示指标 i ，而列代表味指标 I ，并且所有 v_I, v'_I 都是实数。将这个结果代入 D-方程，就有：

$$(|v_I|^2 - |v'_I|^2) - \frac{1}{N_c} \sum_J (|v_J|^2 - |v'_J|^2) = 0, \quad -\frac{1}{N} \sum_J (|v_J|^2 - |v'_J|^2) = 0 \quad (C.171)$$

这意味着 $|v_I|^2 = |v'_I|^2$ 对任意的 I 都成立。由于 v_I, v'_I 都是实的，从而 D 方程要求：

$$\langle \phi_{Ii} \rangle = \langle \tilde{\phi}_{Ii}^\dagger \rangle \quad (C.172)$$

由于真空期待值 v_1, \dots, v_{N_f} 的存在，于是 $\langle \phi_{Ii} \rangle$ 只在规范变换仅涉及到后面 $(N_c - N_f)$ 个指标时不变。这也就说明一个具有非零 v_1, \dots, v_{N_f} 的真空将规范对称性从 $SU(N_c)$ 破缺到了 $SU(N_c - N_f)$ 。

这个理论的模空间是多少维的呢？由于规范冗余的存在，直接回答这个问题也许不太方便，不过我们可以用一个 trick：考虑理论中还剩下多少无质量粒子——由于模空间方向上的激发肯定不会改变系统的能量，从而一个真空处无质量粒子的数目应该就是模空间维数。在获得真空期待值之前，体系中有 $2N_f N_c$ 个无质量粒子，而通过 Higgs 机制，会有 $\dim \mathfrak{su}(N_c) - \dim \mathfrak{su}(N_c - N_f) = 2N_c N_f - N_f^2$ 个 Goldstone 粒子被规范场吃掉，产生有质量的规范超多重态。于是剩下的无质量粒子数目就是 N_f^2 个，这也正是模空间的维数。

正如前面所见，我们还可以利用代数簇的语言描述这个模空间。由于 $SU(N)$ 群表示的所有投影张量都可以由 δ_j^i 和 $\epsilon_{i_1 \dots i_N}$ 中构造出来，于是 SQCD 中规范不变的全纯单项式可以有：

$$M_I^J = \phi_{Ii} \tilde{\phi}^{Ji}, \quad B_{I_1 \dots I_{N_c}} = \epsilon^{i_1 \dots i_N} \phi_{I_1 i_1} \dots \phi_{I_{N_c} i_{N_c}}, \quad \tilde{B}^{J_1 \dots J_{N_c}} = \epsilon_{i_1 \dots i_N} \tilde{\phi}^{J_1 i_1} \dots \tilde{\phi}^{J_{N_c} i_{N_c}} \quad (C.173)$$

这些全纯单项式实际上就对应着禁闭后的自由度——介子场和重子场： M 和介子具有同样的量子数、 B, \tilde{B} 也和重子和反重子具有同样的量子数，将场 M 作用在真空上得到的将是介子态和一系列具有相同量子数的激发态的线性组合。而介子、重子是具有同样量子数的能量最低的束缚态。如果我们考虑禁闭后的理论，那么用到的将会是如同手征微扰论的有效场论。此时由于激发态的能标大于禁闭能标，于是它们的贡献可以完全忽略。也就是说在手征微扰论中，这里定义的 M, B, \tilde{B} 在量子化后就是介子、重子和反重子场。于是上面这些讨论也就意味着：经典真空处介子、重子和反重子场的真空期待值满足和代数簇中相同的代数关系。

对于 $N_f < N_c$ 的情形而言，由于我们只有 N_f 个 $\phi, \tilde{\phi}$ ，于是后两个单项式一定为 0。并且不像前面的 SQED 情形，由于 M_{IJ} 中的场还具有规范指标，于是不能通过与反对称张量收缩来得到任何代数关系，从而这些 M_{IJ} 是独立的。从这个角度也可以直接看出理论的模空间是 $\dim \mathcal{M} = N_f^2$ 维的。

$$N_f \geq N_c$$

对于 $N_f \geq N_c$ 而言, 我们可以同样通过味旋转、色旋转来将 $\phi_{Ii}, \tilde{\phi}_{Ii}^\dagger$ 的真空中期待值写成如下的标准形:

$$\langle \phi_{Ii} \rangle = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & v_{N_c} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \tilde{\phi}_{Ii}^\dagger \rangle = \begin{pmatrix} v'_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & v'_{N_c} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (C.174)$$

不过此时, D 方程只给出:

$$(|v_I|^2 - |v'_I|^2) - \frac{1}{N_c} \sum_J (|v_J|^2 - |v'_J|^2) = 0 \quad (C.175)$$

和上面的情形不同, 此时 D 方程不再给出对 $\sum_J (|v_J|^2 - |v'_J|^2)$ 的约束, 这使得它可以取任何实数 $N_c \rho$ 。从而 D 方程此时要求:

$$|v_I|^2 - |v'_I|^2 = \rho \quad (C.176)$$

并且, 此时的 $SU(N_c)$ 规范对称性会被完全破缺, 于是通过数无质量粒子的个数可以发现, 此时理论模空间的维数将是 $\dim \mathcal{M} = 2N_c N_f - N_c^2 + 1$ 。

我们也可以用代数簇的语言来描述这个模空间。此时由于理论中包含了 $N_f \geq N_c$ 个场, 于是全纯单项式 $B_{I_1 \dots I_{N_c}}, \tilde{B}^{J_1 \dots J_{N_c}}$ 将不再是 0, 可以纳入我们的考虑。另外, $B_{I_1 \dots I_{N_c}}, \tilde{B}^{J_1 \dots J_{N_c}}$ 和 M_I^J 不是互相独立的, 它们之间存在关系:

$$B_{I_1 \dots I_{N_c}} \tilde{B}^{J_1 \dots J_{N_c}} = M_{[I_1}^{J_1} \dots M_{I_{N_c}]}^{J_{N_c}} \quad (C.177)$$

鉴于稍微有些复杂, 这里就不再分析这个关系中有多少是独立的了。总之直到此处, 我们已经稍稍了解了超对称 QCD 的经典真空是什么样的。这些讨论对于后面讨论超对称 QCD 的 IR 动力学而言已经足够了。

C.4.3 Vacuum Runaway at $N_f < N_c$

有了这些讨论之后, 我们就能正式开始讨论 SQCD 的 IR 行为了。为了得到理论的真空结构, 我们也可以将理论的能标一路积分到 $\mu \rightarrow \Lambda$, 得到一个有效作用量。由于超对称真空对应 $F = 0$, 于是它一定由超势项的最小值给出。于是下面要做的就是通过对称性来确定有效作用量中的超势项, 并试图通过这个超势得到体系的真空结构, 从而确定理论的 IR 行为。为此首先需要考虑的就是超对称 QCD 中有什么样的对称性。

我们知道, 除去 $SU(N_c)$ 的规范对称性之外, 由于所有费米子都是无质量的, 这会带来一个 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$ 的手征对称性。在此之外, 由于理论中没有超势, 从而如果令 θ 具有 $U(1)_R$ 荷 1, 所有手征超场具有 $U(1)_R$ 荷 0, 那么这个 $U(1)_{R'}$ 也是

理论的经典对称性⁴⁰。具体而言，场在这些对称性下的变换关系如下表所示：

	$SU(N_c)$	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_V$	$U(1)_A$	$U(1)_{R'}$	
ϕ	N	N	1	1	1	0	
$\tilde{\phi}$	\bar{N}	1	\bar{N}	-1	1	0	
ψ	N	N	1	1	1	-1	
$\tilde{\psi}$	\bar{N}	1	\bar{N}	-1	1	-1	
λ	A	1	1	0	0	1	

(C.178)

其中 N 代表基础表示， \bar{N} 代表反基础表示，而 A 代表伴随表示。在量子水平上， $U(1)_A$ 和 $U(1)_{R'}$ 都会被量子反常所破坏——一个 $U(1)_A$ 变换 $e^{i\alpha_A}$ 会给 Θ 角带来平移：

$$\Theta \rightarrow \Theta + 4N_f T(N) \alpha_A \quad (C.179)$$

而一个 $U(1)_{R'}$ 变换 $e^{i\alpha_{R'}}$ 会给 Θ 角带来平移：

$$\Theta \rightarrow \Theta + [-4N_f T(N) + 2C(A)] \alpha_{R'} \quad (C.180)$$

于是如果定义一个新的 $U(1)_R$ 对称性：

$$\exp(i\alpha_R) = \exp\left(i\alpha_{R'} + i\frac{N_f - N_c}{N_f} \alpha_A\right) \quad (C.181)$$

那么两部分平移将会抵消，从而这个新的 $U(1)_R$ 对称性仍然是体系的量子对称性。

在这些真实的对称性之外，我们还可以把参数提升为 spurion，定义这些参数的变换来获取更多的对称性。既然反常的 $U(1)_A \times U(1)_{R'}$ 对称性已经有一部分被纳入了 $U(1)_R$ 中，于是我们只需要将剩下的一部分定义为 spurious 的对称性即可。出于讨论的方便，我们将这部分选为 $U(1)_A$ 。在下面这个修正的 $U(1)_A$ 变换下，体系的路径积分是不变的：

$$\Phi \rightarrow e^{i\alpha_A} \Phi, \quad \tilde{\Phi} \rightarrow e^{i\alpha_A} \tilde{\Phi}, \quad \Theta \rightarrow \Theta - 4N_f T(N) \alpha_A \quad (C.182)$$

在这个变换下，动力学标度 Λ 也会发生变换 $\Lambda \rightarrow e^{\frac{2iN_f}{b_0} \alpha_A}$ 。总结一下上面这些讨论，体系中存在以下的量子对称性：

	$SU(N_c)$	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_V$	$U(1)_R$	$U(1)_A$ (spurious)	
ϕ	N	N	1	1	$\frac{N_f - N_c}{N_f}$	1	
$\tilde{\phi}$	\bar{N}	1	\bar{N}	-1	$\frac{N_f - N_c}{N_f}$	1	
ψ	N	N	1	1	$\frac{-N_c}{N_f}$	1	
$\tilde{\psi}$	\bar{N}	1	\bar{N}	-1	$\frac{-N_c}{N_f}$	1	
λ	A	1	1	0	1	0	
Λ	1	1	1	0	0	$\frac{2N_f}{b_0}$	

(C.183)

加上超对称，这些也就是 Wilson 有效作用量能够继承的所有对称性。

⁴⁰至于为什么要在 R 上加一撇，我们马上就能看到答案。

由于规范对称性不会被量子修正所破坏, 于是 Wilson 有效作用量一定是规范不变的, 于是 Wilson 有效作用量应该依赖于物质场的规范不变组合, 也就是介子场 M_I^J 、重子场 $B_{I_1 \dots I_{N_c}}$ 和反重子场 $\tilde{B}^{J_1 \dots J_N}$ ⁴¹。由于超对称性没有被破坏, 用来构造 Wilson 有效作用量的应该是它们对应的超场——例如对介子而言就是 $\Phi_I \tilde{\Phi}^J$ ⁴²。由于 $N_f < N_c$ 和 $N_f \geq N_c$ 时的重子、介子场完全不同, 于是我们需要对这两种情况分别讨论。

这一小节中, 我们详细考虑 $N_f < N_c$ 的情形。此时由于重子、反重子不存在, 从而规范不变的场只剩下了介子 M_I^J 。Wilson 有效作用量也只能通过这些介子场和动力学标度 Λ 来构造。它们在前面给出的量子对称群下的变换关系如下所示:

	$SU(N_c)$	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_V$	$U(1)_R$	$U(1)_A$ (spurious)
M_I^J	1	N	\bar{N}	0	$\frac{2(N_f - N_c)}{N_f}$	2
Λ	1	1	1	0	0	$\frac{2N_f}{b_0}$

(C.184)

为了保证 Wilson 有效作用量在 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ 的手征转动下不变, 它只能依赖于介子场的以下组合:

$$\det M = \epsilon^{I_1 \dots I_{N_f}} \epsilon_{J_1 \dots J_{N_f}} M_{I_1}^{J_1} \dots M_{I_{N_f}}^{J_{N_f}} \quad (C.185)$$

于是 Wilson 有效作用量只能依赖于 $\det M$ 和 Λ 。而利用它们能够组成的在 $U(1)_A$ 下不变、具有 R 荷 2 的量只有下面这一个, 于是有效超势必然正比于这个东西:

$$W_{\text{eff}} = C(N_f, N_c) \left(\frac{\Lambda^{b_0}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} = C(N_f, N_c) \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \quad (C.186)$$

在上面的讨论中, 这个有效超势是完全通过对称性求出来的。不过物理上, 它能被什么效应产生呢? 在 $N_f = N_c - 1$ 时, 如果我们将 Λ 的原始定义代入这个超势, 就会发现它正比于 $e^{-8\pi^2/g^2 + i\Theta}$, 而这样的因子正是单瞬子贡献的典型特征。另外一方面, 这个超势同时涉及到 $2N_f$ 个费米场 $\Phi, \tilde{\Phi}$, 这也很像瞬子背景下费米子零模带来的行为。从而可以合理地猜测: 在 $N_f = N_c - 1$ 时, 这个超势可以由单个瞬子的效应产生。而在 $N_f \neq N_c - 1$ 时, 这个有效超势中 Λ 的指数和瞬子贡献并不相同。事实上, 我们马上会看到: 除了瞬子效应之外, 此时我们必须要考虑 **gaugino 凝聚** 所带来的效应。

当然, 对称性还无法帮助我们确定系数 $C(N_f, N_c)$ 是多少, 我们在稍稍后面一点就会求出这个系数。这个超势的存在就意味着经典模空间的无穷多个真空不对应量子理论的基态, 真正的基态要通过这个超势决定。为了看到量子体系的真空在哪里, 让我们考虑一下这个理论中的标量势。由于理论中的标量只有 M_I^J 的标量分量 z_I^J , 于是标量势就是:

$$V(z) = \sum_{I,J} \left| \frac{\partial W(z)}{\partial z_I^J} \right|^2 = \sum_{I,J} \left| \frac{C(N_f, N_c)}{N_c - N_f} \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det z} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} (z^{-1})_J^I \right|^2 \quad (C.187)$$

⁴¹这还并不意味着理论的 IR 自由度就是介子、重子和反重子, 它们在这里仅仅是作为夸克场 $\Phi, \tilde{\Phi}$ 的规范不变组合而出现的。

⁴²由于下面讨论的都是这些超场而不是原本的标量部分 $\phi_I \tilde{\phi}^J$, 从而我们将会更改一下 M_I^J 这个符号的意义, 令其代表 $\Phi_I \tilde{\Phi}^J$ 而非 $\phi_I \tilde{\phi}^J$ 。当然, 由于 $\Phi_I \tilde{\Phi}^J$ 的标量分量就是 $\phi_I \tilde{\phi}^J$, 并且由于前面一小节专注于讨论理论的经典真空, 于是讨论的本质上都是场 M, B, \tilde{B} 的期待值, 于是上一小节的一切讨论在这两种意义上都没有区别。

在量子修正的领头阶上，标量势的最小值就对应量子理论的真空，对应这个极值的 M 取值也就应该是真空中场 $M_J^I = \Phi_I \tilde{\Phi}^J$ 的期望值 $\langle M \rangle_J^I$ ⁴³。并且根据前面的讨论，任何不破缺超对称的真空都有 $V(z) = 0$ ，但是没有任何的 z 能够使得 z^{-1} 这个矩阵的所有元素都是 0，从而根本不存在满足 $V(z) = 0$ 的场构型。也就是说——这是一个不存在基态的量子理论！由于 z 的本征值越接近无穷标量势越小，从而任何的状态都会“滑落”到期待值 $\langle M \rangle_J^I$ 的本征值都趋向无穷的状态。从而我们也将理论的这种行为称为**真空失控**⁴⁴。

你可能会问：理论的 IR 相是什么呢？答案非常直接：IR 相在此时的理论中没有意义！回到 IR 相的基本定义，就会发现它是用来分类两个试探色荷之间的相互作用势的。而在讨论两个试探色荷之间的相互作用势之前，我们应该首先选择一个真空，在这个真空附近才能确定一个理论，从而才能将试探色荷放进这个理论所描述的系统。而既然此时理论中连真空态都没有了，再探讨 IR 相也就没有意义了。同样，由于无质量粒子组分也要先确定一个真空后才能讨论，于是讨论此时的无质量粒子谱也没有意义。“真空失控”就是对这个理论 IR 行为的完全解答。

虽然我们明白了这个超势意味着什么，但是我们还没有把它完整计算出来。接下来的目标就是尝试求出 $C(N_f, N_c)$ 。我们的基本思路是：既然这个超势在 $N_f = N_c - 1$ 时可以由单瞬子效应产生，那么这个系数应该可以通过瞬子方法计算出来⁴⁵。当我们计算出 $N_f = N_c - 1$ 的系数之后，可以给 $N_f = N_c - 1$ 的理论中的 k 味夸克加上一个大于 Λ 的质量使其退耦。那么积分掉这 k 味夸克，就能得到 $N_f = N_c - (k + 1)$ 时的系数。

为了按照这个思路进行下去，首先要知道如何给 k 味夸克加上质量。在 UV 理论中，这只需要在理论的超势中加入以下的耦合：

$$W_{\text{mass}} = m_J^I \Phi_I \tilde{\Phi}^J = \text{Tr}(mM), \quad m_J^I = \text{diag}(0, \dots, 0, \underbrace{m, \dots, m}_{k \uparrow}) \quad (\text{C.188})$$

这个质量项同时破坏了手征对称性、 $U(1)_A$ 对称性和 $U(1)_R$ 对称性。为了继续用这些对称性来限制 Wilson 有效作用量，我们可以将 m_J^I 提升为一个 spurion。如果要保持上面的质量项在 spurious 的对称性下不变， m 的变换关系一定如下表所示：

	$SU(N_c)$	$SU(N_f)_L(\text{sp})$	$SU(N_f)_R(\text{sp})$	$U(1)_V$	$U(1)_R(\text{sp})$	$U(1)_A(\text{sp})$
m_J^I	1	N	N	0	$\frac{2N_c}{N_f}$	-2
M_J^I	1	N	\bar{N}	0	$\frac{2(N_f - N_c)}{N_f}$	2
Λ	1	1	1	0	0	$\frac{2N_f}{b_0}$

(C.189)

利用 m, M 和 Λ ，可以构造出以下的量，使其在所有对称群下都不变：

$$x = \text{Tr}(mM) \left(\frac{\det M}{\Lambda^{3N_c - N_f}} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \quad (\text{C.190})$$

从而加入质量后的有效超势一定有形式：

$$W_{\text{eff}} = \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} f(x) \quad (\text{C.191})$$

⁴³在这里，我们相当于完整地考虑了 $m \geq \Lambda$ 的重自由度的量子效应，而将轻自由度的量子效应考虑到了鞍点近似的领头阶。

⁴⁴英文 Runaway，这个词没有标准的中文翻译。

⁴⁵我们马上会给出一个比较直观的解释，能说明这个超势是如何通过瞬子效应产生出来的。具体的瞬子计算可见本节后面的附录。

为了确定函数 $f(x)$, 我们可以故技重施, 考虑弱耦合极限—— m 和 Λ 很小的情形, 其中后者对应耦合常数 $g \rightarrow 0$, 此时由于 UV 理论中不存在超势, 于是规范场和所有夸克完全脱耦。由于这个情形显然是物理中可能出现的, 于是 W_{eff} 不会在这个情形下发散, 也就要求 W_{eff} 中只能含有 m 和 Λ 的非负幂次。对于 m 而言, W_{eff} 中不含有 m 的负幂次意味着 $f(x)$ 中只能有 x 的非负幂次, 而不含 Λ 的负幂次意味着 $f(x)$ 中不能有 x 的二次及以上依赖。从而, $f(x)$ 的幂级数展开中只能有 x 的 0 次和 1 次项。为了在 $m \rightarrow 0$ 时回到前面给出的有效超势。零次项系数就应该是前面看到的系数 $C(N_c, N_f)$ 。又由于 $\Lambda \rightarrow 0$ 时规范场和所有夸克完全脱耦, 从而质量项的形式不应该被改变, 于是一次项系数也应该是 1。到此为止, 我们就确定了加入质量后的有效超势:

$$W_{\text{eff}} = C(N_c, N_f) \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} + \text{Tr}(mM) \quad (\text{C.192})$$

有了这个 N_f 味的、加入质量的有效超势, 只需要将获得质量的重自由度积分掉, 就可以得到 $N_f - k$ 味无质量粒子的有效超势。在树图阶, 这可以通过将轻场视为背景场, 利用经典运动方程解出这些重场的经典值, 再将其代回原作用量来完成。对于上面这个超势而言, 运动方程就是:

$$\frac{\partial W}{\partial M_I^J} = -\frac{C(N_f, N_c)}{N_c - N_f} \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} (M^{-1})_J^I + m_J^I = 0 \quad (\text{C.193})$$

由于 m_J^I 的形式为 $\text{diag}(0, \dots, 0, m, \dots, m)$, 于是矩阵 M 和 M^{-1} 也应该类似地只有对角元:

$$M = \text{diag}(\tilde{M}_1, \dots, \tilde{M}_{N_f - k}, Z_1, \dots, Z_k) \quad (\text{C.194})$$

于是 Z 满足的运动方程可以改写为:

$$mZ_a = \frac{C(N_f, N_c)}{N_c - N_f} \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det \tilde{M} \det Z} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \quad (\text{C.195})$$

从中便可以解出重场 Z 的经典值:

$$Z_a = \left(\frac{C(N_f, N_c)}{(N_c - N_f)m} \right)^{\frac{N_c - N_f}{N_c - N_f + k}} \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det \tilde{M}} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f + k}} \quad (\text{C.196})$$

代回原来的有效超势, 就得到了含有 $N_f - k$ 味无质量夸克的理论中的有效超势:

$$W_{\text{eff}}^{(N_f - k)} = \left(\frac{C(N_f, N_c)}{N_c - N_f} \right)^{\frac{N_c - N_f}{N_c - N_f + k}} m^{\frac{k}{N_c - N_f + k}} (N_c - N_f + k) \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det \tilde{M}} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f + k}} \quad (\text{C.197})$$

在这个表达式中, 虽然 $\det \tilde{M}$ 的系数和前面我们推导出的形式一致, 但是 Λ 的系数似乎并不一致。更加奇怪的是: W_{eff} 中似乎还有对 m 的依赖性, 而 decoupling theorem 告诉我们 IR 端的物理不应该敏感于 UV 端才对。这是为什么呢? 答案是我们还有一件事情没有考虑——在不同味的理论中, 动力学标度 Λ 也会发生变化。当我们把这部分变化考虑在内时, 这个有效超势才会具有正确的形式。

在能标高于 m 时, 体系的耦合常数按照有效味数为 N_f 的 beta 函数跑动, 而在能标低于 m 时, 耦合常数按照有效味数 $N_f - k$ 的 beta 函数跑动。在这两个不同的区域中, 动力学标度被分别定义为 $\Lambda = \mu \exp[-2\pi i \tau(\mu)/(3N_c - N_f)]$ 。由于能标 m 是两个区域的分界点, 我们可以利用 m 处的耦合常数分别表达出这两个区域中的 Λ ⁴⁶:

$$\Lambda_{\text{old}} = m \exp\left(-\frac{2\pi i \tau(m)}{3N_c - N_f}\right), \quad \Lambda_{\text{new}} = m \exp\left(-\frac{2\pi i \tau(m)}{3N_c - N_f + k}\right) \quad (\text{C.198})$$

从而新旧理论中的动力学标度之间满足以下的 **matching 条件**:

$$\left(\frac{\Lambda_{\text{old}}}{m}\right)^{3N_c - N_f} = \left(\frac{\Lambda_{\text{new}}}{m}\right)^{3N_c - N_f + k} \quad (\text{C.199})$$

上面我们写出的 $W_{\text{eff}}^{(N_f - k)}$ 中出现的 Λ 是 $E > m$ 时的 Λ_{old} , 如果我们利用这个 matching 条件将其改写为 Λ_{new} , 就能得到:

$$W_{\text{eff}}^{(N_f - k)} = \left(\frac{C(N_f, N_c)}{N_c - N_f}\right)^{\frac{N_c - N_f}{N_c - N_f + k}} (N_c - N_f + k) \left(\frac{\Lambda_{\text{new}}^{3N_c - N_f + k}}{\det \tilde{M}}\right)^{\frac{1}{N_c - N_f + k}} \quad (\text{C.200})$$

也就是说: $N_f - k$ 味的理论中系数 $C(N_f - k, N_c)$ 满足:

$$C(N_f - k, N_c) = \left(\frac{C(N_f, N_c)}{N_f - N_c}\right)^{\frac{N_c - N_f}{N_c - N_f + k}} (N_c - N_f + k) \quad (\text{C.201})$$

这也就告诉我们对于同一个 N_c 和不同的 N_f 而言, $[C(N_f, N_c)/(N_c - N_f)]^{N_c - N_f}$ 是一个常数。于是 $C(N_f, N_c)$ 一定是正比于 $N_c - N_f$ 的。经过详细的瞬子计算, 可以得到 $N_f = N_c - 1$ 处的结果是 $C(N_c - 1, N_c) = 1$, 从而这个比例系数就是 1:

$$C(N_f, N_c) = N_c - N_f \quad (\text{C.202})$$

从而, 我们最终得到了具有 $N_f < N_c$ 味无质量夸克的 SQCD 中的有效超势:

$$W_{\text{eff}} = (N_c - N_f) \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det M}\right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \quad (\text{C.203})$$

这个结果是由物理学家 Affleck, Dine 和 Seiberg 第一次计算出的⁴⁷, 当时他们没有使用我们这种从对称性开始分析的方式, 而是直接通过瞬子计算得到了这个结果。为了纪念这三位物理学家, 这个结果被称为 **ADS 超势**。在手征微扰论中, 我们假设了 Wilson 作用量的很多 Wilson 系数, 从而手征微扰论所做的是从实验预言新的实验。与此不同的是, ADS 超势是完全通过 UV 理论解析求解出的, 从中我们可以解析地知道 $N_f < N_c$ 时理论中存在真空失控, 并不需要假设任何的 Wilson 系数。从这个意义上讲, 在 $N_f < N_c$ 时 SQCD 的 IR 行为是可以完全被解析求解出来的。当然, 由于 Kahler 势的具体形式并不能从全纯性中得到, 于是我们此时并不能知道理论的动力学。

特殊地, 当 $N_f = 0$ 时, 理论就变回了纯粹的超 Yang-Mills 理论, 其有效超势是 $W_{\text{eff}} = N_c \Lambda^3$ ——这和我们在本节第一小节时看到的结果符合良好, 并且这里详细计算出了 Λ^3 前面的系数。

⁴⁶其中角标 old 指重夸克能标以上的理论, 而角标 new 指重夸克能标以下的理论。

⁴⁷原始论文是 I. Affleck, M. Dine 和 N. Seiberg 的文章 *Dynamical supersymmetry breaking in supersymmetric QCD*, Nucl. Phys. **B241** (1984) 493-534。

ADS Superpotential from Instanton Effects

读到这里，你一定会好奇：瞬子究竟是如何产生这个有效超势的呢？下面我们就来试图看到这一点。首先，由于瞬子背景下的费米子存在零模，这个零模会给出如下的't Hooft 有效相互作用：

$$\prod_i \psi_i^{2T(R_i)} \quad (C.204)$$

其中 ψ_i 是理论中所有的左手费米子，也就是手征超场对应的费米子，而 $2T(R_i)$ 是这个费米子具有的零模数量。由于这是一个瞬子效应，于是它应该正比于 $e^{-8\pi/g^2}$ 。利用前面定义的参数 Λ ，这也可以被写成 $\Lambda^{3N_c-N_f}$ 。也就是说，瞬子的效应可以囊括进以下的't Hooft 算符中：

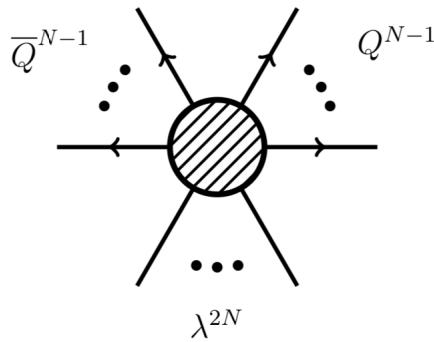
$$\mathcal{O}_{t \text{ Hooft}} = \Lambda^b \prod_i \psi_i^{2T(R_i)} \quad (C.205)$$

这个东西的量纲显然不太对。一个 Lagrangian 中的有效相互作用应该具有量纲 4，而这个东西的量纲不管怎么说看上去都不是 4。为了平衡它的量纲，我们唯一能够使用的参数就是瞬子大小 ρ 。由于 ρ 的依赖性也会在别的地方出现，为了讨论的简便，我们将在计算的最后一步补上这个量纲。

在我们考虑的情形： $N_f = N_c - 1$ 的 SQCD 中，存在零模的费米子除了夸克还有 gaugino。于是't Hooft 有效算符应该是：

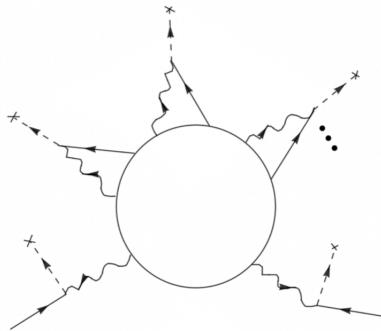
$$\mathcal{O}_{t \text{ Hooft}} = \Lambda^{2N_c+1} \lambda^{2N_c} \prod_i \psi_i \quad (C.206)$$

这可以给出如下的顶点⁴⁸：



这个有效相互作用对有效超势有什么贡献呢？首先由于 λ^{2N_c} 不是一个手征超场，它不能出现在超势中，于是我们需要用顶点 $i\sqrt{2}\phi^\dagger\lambda\psi$ 和 $-i\lambda\tilde{\psi}^\dagger\lambda\tilde{\psi}$ 来将其转换为 $\phi_I, \tilde{\phi}^I$ 的真空期待值。由于我们有 $2(N_c - 1)$ 个费米子，这能够帮我们处理掉 $2(N_c - 1)$ 个 gaugino 外腿。对于剩下的 2 个 gaugino 外腿，我们可以通过插入 squark 的真空期待值来将其转化为夸克外腿：

⁴⁸这个图和这一段的大部分讨论都来自 Philip 'Flip' Tanedo 的这个 notes: https://www.classe.cornell.edu/pt267/files/documents/A_instanton.pdf。这个 notes 中的 Q, \tilde{Q} 就是我们的 $\Phi, \tilde{\Phi}$ 。下一个图来自于北京大学陈斌老师的讲义。



我们在这里不会进行详细的瞬子计算，只希望看到 ADS 超势的这个形式是如何给出的，于是在下面的讨论中我将舍掉所有系数⁴⁹。假设 $\langle \phi \rangle = \langle \tilde{\phi} \rangle = v$ ，那么这个图给出顶点 $v^{2N_c} \psi \tilde{\psi} \Lambda^{2N_c+1}$ ，这对应超势中的 $v^{2N_c} \Phi \tilde{\Phi} \Lambda^{2N_c+1}$ 项。由于超势具有量纲 3，于是我们还需要补上以下的 ρ 依赖性：

$$W \sim v^{2N_c} \Phi \tilde{\Phi} \Lambda^{2N_c+1} \rho^{4N_c} \quad (\text{C.207})$$

对于一个在 Higgs 背景下的瞬子而言，通过量纲分析可以得到，其瞬子测度具有如下的形式：

$$d\mu_{\text{inst}} \sim \int d^4 x_0 \frac{d\rho}{\rho^5} \exp \left(-\frac{8\pi}{g^2(\rho)} - 2(2N_f)\pi^2 v^2 \rho^2 \right) \quad (\text{C.208})$$

其被积函数在以下的尺度上取极大值：

$$\rho^2 \sim \frac{1}{v^2} \quad (\text{C.209})$$

从而，瞬子给出的有效超势应该具有如下的形式：

$$W \sim v^{-2N_c} \Phi \tilde{\Phi} \Lambda^{2N_c+1} \sim \frac{\Lambda^{2N_c+1}}{(\Phi \tilde{\Phi})^{N_c-1}} \sim \frac{\Lambda^{2N_c+1}}{\det M} \quad (\text{C.210})$$

而这正是 ADS 超势！虽然我们没有详细地进行任何瞬子计算，仅仅使用了't Hooft 算符的形式和量纲分析，我们已经能够看到瞬子的确能够给出 ADS 超势了。当然，如果要进行详细的计算，就必须认真地考虑瞬子测度等复杂的细节，与此相关的讨论可以参见本节后面的附录。

ADS Superpotential from Gaugino Condensate

好了，现在你明白 $N_f = N_c - 1$ 时的 ADS 超势是如何通过瞬子产生的了。那么接下来的问题就是： $N_f < N_c - 1$ 时的 ADS 超势又是由什么效应产生的呢？答案是：此时，由于我们只有 N_f 个 Higgs boson，于是理论的 $SU(N)$ 规范对称性并不是完全破缺的，而是只会破缺到一个 $SU(N_c - N_f)$ 子群。

经典上，如果每一味 squark 的真空期待值都是 v ，那么 Higgs 机制将会使规范玻色子也获得一个约为 v 的质量。于是在这个能标以上，我们可以认为理论就是平常的 SQCD，有效味数为 N_f 。而在这个能标之下，我们可以认为 $SU(N_c - N_f)$ 之外的所有规范场分量

⁴⁹ 实不相瞒，我写 notes 的时候经常花许多时间改正系数问题，于是我最喜欢写这种不需要考虑详细系数的讨论了。

均获得了质量，而一部分物质超多重态也会被规范场以及 gaugino 吃掉而获得了质量，只剩规范单态的介子 M 作为无质量自由度。于是在 $\mu \sim v$ 以下，我们可以认为低能有效理论理论是两部分独立的理论：一部分是一个规范群为 $SU(N_c - N_f)$ 的超 Yang-Mills 理论，而另一部分是介子的有效理论，一切联系这两部分的相互作用都被藏到了无关算符之中。

事实上，这些无关算符中包含 $\det M$ 和 $SU(N_c - N_f)$ 的 gaugino 算符 $\lambda^a \lambda^a$ 之间的相互作用。而由于超 Yang-Mills 理论中存在 gaugino 凝聚，于是 $\lambda^a \lambda^a$ 存在真空期待值。我们马上会看到，这一项相互作用的效应使得如果我们积分掉规范场，只考虑介子部分的有效理论，那么 gaugino 凝聚就可以被转化为介子的 ADS 超势。于是在 $N_f < N_c - 1$ 时，我们可以说 gaugino 凝聚产生了 ADS 超势。

接下来，我们就来看看 gaugino 凝聚是如何产生 ADS 超势的。利用和上面讨论中类似的 matching 条件，我们可以看出：

$$\left(\frac{\Lambda_{\text{UV}}}{v}\right)^{3(N_c - N_f)} = \left(\frac{\Lambda_{\text{IR}}}{v}\right)^{3(N_c - N_f)} \quad (\text{C.211})$$

于是，UV 理论和 IR 理论中的动力学标度之间就有如下的关系：

$$\Lambda_{\text{IR}}^{3(N_c - N_f)} = \frac{1}{v^{2F}} \Lambda^{3N_c - N_f} \sim \frac{1}{\det M} \Lambda_{\text{UV}}^{3N_c - N_f} \quad (\text{C.212})$$

这个关系告诉我们：如果我们固定一个 Λ_{UV} ，那么在具有不同 $\det M$ 的真空中也会具有不同的 Λ_{IR} 。既然此时的 IR 理论是一个超 Yang-Mills 理论，其 Lagrangian 应该具有形式：

$$\frac{\tau_{\text{IR}}}{8\pi i} \int d^2\theta \text{tr}(W^\alpha W_\alpha) + \text{h.c.} \quad (\text{C.213})$$

从这个 Lagrangian 中，我们实际上能够看到 IR 有效理论中规范场和介子的有效相互作用。我们知道，在 IR 理论中，全纯耦合常数可以用动力学能标写为：

$$\tau_{\text{IR}}(\mu) = \frac{3(N_c - N_f)}{2\pi i} \log \left(\frac{\Lambda_{\text{IR}}}{\mu} \right) \quad (\text{C.214})$$

而如果我们利用上面这个关系将 Λ_{IR} 转化为 Λ_{UV} ，就能得到：

$$-\frac{1}{2\pi i} \log \det M + (\text{terms containing no } M) \quad (\text{C.215})$$

从而，我们就明确了低能有效理论中介子部分和 $SU(N_c - N_f)$ 规范场之间的相互作用：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Gauge-Meson}} &= \frac{1}{16\pi^2} \int d^2\theta (\log \det M) \text{tr}(W^\alpha W_\alpha) + \text{h.c.} \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \text{tr}(F_M M^{-1}) \lambda^a \lambda^a + \arg \det M F F \end{aligned} \quad (\text{C.216})$$

其中 $(F_M)_I^J$ 是 M_I^J 的 θ^2 分量。除了我们马上看到的正题——这一项相互作用可以将 gaugino 凝聚转化为 ADS 超势之外，这一项还有一个其他的重要意义：我们知道，在 $SU(N_f - N_c)$ 的超 Yang-Mills 理论中，R-对称性是反常的。而在我们的 UV 理论中， $U(1)_R'$

和 $U(1)_A$ 的线性组合构成了一个不反常的 R-对称性。于是如果不存在这一项，UV 理论和 IR 理论的 R-对称性将不同，而这一项正修好了这个问题。

那么 gaugino 凝聚是如何产生 ADS 超势的呢？让我们假设 M 场具有标准的 Kahler 势，那么 F_M 的运动方程就给出：

$$F_M = \frac{1}{32\pi^2} M^{-1} \langle \lambda^a \lambda^a \rangle \quad (\text{C.217})$$

而换一种观点，我们可以将所有的规范场积分掉，将这些所有相互作用的效应纳入一个介子的有效超势中。而前面的讨论告诉我们，唯一可能存在的有效超势就是：

$$W = C(N_c, N_f) \left(\frac{\Lambda_{\text{UV}}^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \quad (\text{C.218})$$

在此时的、只有介子的有效理论中，如果 $C(N_c, N_f) = 0$ ，那么 F_M 就一定是 0，而这和 gaugino 凝聚的事实不符。从而我们看到，由于 gaugino 凝聚的值不为 0，于是 ADS 超势的系数也一定不是 0，于是我们可以说：gaugino 凝聚产生了 ADS 超势。

在这些讨论之后，你可能会问：在前面的讨论中，我们是通过更高味数的理论中的 ADS 超势得知的 gaugino 凝聚，于是当我们在此处讨论 ADS 超势是如何产生的时，我们并不应该先验地知道 gaugino 凝聚的存在。那么，gaugino 凝聚是怎么来的呢？答案是：我们不知道。对于强耦合理论而言，人类目前对其所知甚少，唯一的理论工具可能就是瞬子测度这一套理论。而我们在谈论瞬子时，也仅仅能够在瞬子附近做鞍点近似，将路径积分按圈展开，做半经典近似。这虽然给出的是非微扰的效应，但是也只能在耦合常数不是那么大时成立。当瞬子附近高圈的效应远远压过了 Gaussian 阶的效应，瞬子测度这一套也将无法处理。在 $N_f = N_c - 1$ 的理论中，由于规范群被完全 Higgs 了，于是低能理论中不存在规范场，beta 函数被“冻结”在了 Higgs 能标，它还不至于跑到“真正的”强耦合区域中，而此时瞬子计算才是可以依赖的。而在 $N_f < N_c - 1$ 时，我们就将面对真正的强耦合理论，而我们看到的还只是漆黑的深渊。如果我们预先知道了理论中存在 gaugino 凝聚，那么它就能产生介子部分的 ADS 超势，告诉我们理论的真空结构。这已经是不幸中的万幸了。

C.4.4 Confinement with Chiral Symmetry Breaking at $N_f = N_c$

明白了 $N_f < N_c$ 时理论的 IR 行为，我们接下来就要考虑 $N_f \geq N_c$ 时会发生什么。和前面的讨论不同的是： $N_f = N_c$ 时 ADS 超势不能被良好地定义，而在 $N_f > N_c$ 时，由于在 $\Lambda \rightarrow 0$ 的极限下 Wilson 有效作用量不应该发散，但是此时的 ADS 超势中包含 Λ 的负幂次，从而 ADS 超势不能作为有效超势中的一项存在。

事实上不仅仅不存在 ADS 超势，在 $N_f \geq N_c$ 时理论中不可能出现任何一项同时满足对称性且具有良好的弱耦合极限的超势。首先由于超势只能通过规范不变的 M, B, \tilde{B} 以及参数 Λ 来构造，而它们在体系的量子对称性下如下变化：

	$SU(N_c)$	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_V$	$U(1)_R$	$U(1)_A(\text{sp})$
M	1	N	\bar{N}	0	$\frac{2(N_f - N_c)}{N_f}$	2
B	1	$\otimes^{N_c}(N)$	1	N_c	$\frac{N_c(N_f - N_c)}{N_f}$	N_c
\tilde{B}	1	1	$\otimes^{N_c}(\bar{N})$	$-N_c$	$\frac{N_c(N_f - N_c)}{N_f}$	N_c
Λ	1	1	1	0	0	$\frac{2N_f}{b_0}$

(C.219)

对于 $N_f = N_c$, 只需要看到此时不存在任何具有 R 荷的场和参数, 根本无法构造出超势项。而对 $N_f > N_c$ 而言, M, B, \tilde{B} 都具有正的 R 荷和正的 $U(1)_A$ 荷, 只有 Λ 具有负的 $U(1)_A$ 荷。从而如果我们希望构造出一个 R 荷为 2 且 $U(1)_A$ 不变的超势, 其中一定要有 Λ 的负幂次, 这和存在良好的弱耦合极限相违背。

由于有效超势的最小值对应理论的量子真空, 从而没有超势就意味着理论中存在一个由真空构成的模空间。为了得到这个量子模空间的性质, 我们还需要得到关于量子真空的一些信息。为此首先可以证明: 无论 N_f 如何, 如果在 UV 理论中给夸克加上质量项 $m_I^J \Phi_I \tilde{\Phi}^J$, 那么理论的量子真空仍然可以被解出:

$$\langle M_I^J \rangle = (m^{-1})_I^J (\Lambda^{3N_c - N_f} \det m)^{\frac{1}{N_c}} \quad (\text{C.220})$$

这是为什么呢? 首先这个解对应是加上质量的 ADS 超势的最小值, 于是在 $N_f < N_c$ 时它一定是量子真空⁵⁰。对于 $N_f \geq N_c$ 的情形, 如果我们给味指标为 N_c 到 N_f 的夸克以很大的质量 m_H , 使得:

$$m = \text{diag}(\underbrace{m_L, \dots, m_L}_{N_c-1 \text{ 个}}, \underbrace{m_H, \dots, m_H}_{N_f-N_c+1 \text{ 个}}) \quad (\text{C.221})$$

那么在积分掉这些重自由度后得到的理论将是一个 $N_f = N_c - 1$ 的理论, 其真空满足上面的真空解, 并且其中的 Λ 是低能理论对应的 Λ_{new} 。利用 matching 条件 $(\Lambda_{\text{old}}/m_H)^{3N_c - N_f} = (\Lambda_{\text{new}}/m_H)^{2N_c + 1}$, 这可以被改写为:

$$\langle M_I^J \rangle = (m_L^{-1})_I^J (\Lambda_{\text{new}}^{2N_c + 1} \det m_L)^{\frac{1}{N_c}} = (m_L^{-1})_I^J (\Lambda_{\text{old}}^{3N_c - N_f} \det m_L \det m_H)^{\frac{1}{N_c}} \quad (\text{C.222})$$

重点在于: 由于质量 m 全纯地出现在 UV 理论的超势中, 它也应该全纯地出现在 IR 理论的超势中, 从而真空解应该和 m 这个整体有关, 而不能依赖于它的某些特定分量。于是对于任何 N_f 而言, 理论的真空解仍然是 $\langle M \rangle = m^{-1} (\Lambda^{3N_c - N_f} \det m)^{\frac{1}{N_c}}$ 。

利用这个真空解, 我们可以一瞥 $N_f \geq N_c$ 时的真空结构。首先由于在 $N_f \geq N_c$ 的理论中, 回到 $m \rightarrow 0$ 的极限时 $\langle M \rangle$ 并不会趋于无穷大, 从而此时的理论并不会出现真空失控的行为。更有甚者, 由于我们可以令 m 以无穷多种不同的方式趋于 0, 在这些方式下 $\langle M \rangle$ 的极限各不相同, 于是量子理论中也会出现无穷多个简并的真空, 形成一个量子的模空间, 这和我们从不存在超势这一事实中得到的结果相同。为了弄清楚此时理论的 IR 行为, 需要仔细研究一下这个量子的模空间。特别地, 这一节我们特殊关注 $N_f = N_c$ 的情形。

前面的讨论告诉我们: 理论的经典模空间上, 介子、重子和反重子场的真空期望值 $\langle M \rangle, \langle B \rangle, \langle \tilde{B} \rangle$ 之间满足以下的关系:

$$\langle B_{I_1 \dots I_{N_c}} \rangle \langle \tilde{B}^{J_1 \dots J_{N_c}} \rangle = \langle M_{[I_1}^{J_1} \rangle \dots \langle M_{I_{N_c}]}^{J_{N_c}} \rangle \quad (\text{C.223})$$

在 $N_f = N_c$ 时, 如果我们定义:

$$B = \epsilon^{I_1 \dots I_{N_c}} B_{I_1 \dots I_{N_c}}, \quad \tilde{B} = \epsilon_{J_1 \dots J_{N_c}} \tilde{B}^{J_1 \dots J_{N_c}} \quad (\text{C.224})$$

那么上面这个经典真空所满足的关系就可以改写为:

$$\det \langle M \rangle - \langle B \rangle \langle \tilde{B} \rangle = 0 \quad (\text{C.225})$$

⁵⁰ 此时取 m 趋于 0 的极限, 我们也可以得到真空失控的行为。

在量子的模空间上介子、重子和反重子场的真空期望值还满不满足这个关系呢？答案是否定的。我们马上将会看到：量子修正会将这个关系修改为：

$$\det\langle M \rangle - \langle B \rangle \langle \tilde{B} \rangle = \Lambda^{2N_c} \quad (C.226)$$

这也被称为模空间的形变。我们仍然可以通过对称性和自洽性来得到这个关系，此时理论的量子对称性是：

	$SU(N_c)$	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_V$	$U(1)_R$	$U(1)_A$ (sp)	
M_I^J	1	N	\bar{N}	0	0	2	
B	1	1	1	N_c	0	N_c	
\tilde{B}	1	1	1	$-N_c$	0	N_c	
Λ	1	1	1	0	0	1	

(C.227)

由于 $\Lambda \rightarrow 0$ 时规范场和物质场完全退耦，于是量子模空间上的关系应该在 $\Lambda \rightarrow 0$ 时退回经典的 $\det M - B\tilde{B} = 0$ ，于是量子的关系应该有形式 $\det\langle M \rangle - \langle B \rangle \langle \tilde{B} \rangle = f(\Lambda)$ ，且等号后面这一项应该只具有 Λ 的正幂次项。而对称性允许的这种项只有：

$$\det\langle M \rangle - \langle B \rangle \langle \tilde{B} \rangle = C\Lambda^{2N_c} \left(1 + \sum_{p,q>0} C_{pq} \frac{(\Lambda^{2N_c})^p (\langle B \rangle \langle \tilde{B} \rangle)^q}{(\det\langle M \rangle)^{p+q}} \right) \quad (C.228)$$

其中 C 和 C_{pq} 是一些未定的系数。为了确定 C_{pq} ，可以继续考虑 Λ 极小的情形。此时如果有一个 C_{pq} 不为 0，那么上面这个约束除了经典解 $\det\langle M \rangle - \langle B \tilde{B} \rangle = 0$ 之外还存在另外的、形如 $\det\langle M \rangle \approx \langle B \tilde{B} \rangle^{(q-1)/(p+q)}$ 的解，而我们不应该在弱耦合极限下看到它们。从而，所有 C_{pq} 都应该是 0，量子模空间上的约束应该有以下的形式：

$$\det\langle M \rangle - \langle B \rangle \langle \tilde{B} \rangle = C\Lambda^{2N_c} \quad (C.229)$$

对称性只能帮我们到这里了，我们需要其他的手段来得到系数 C 。为此，我们可以积分掉一味重夸克，看看能不能给出正确的 ADS 超势。不过你肯定会想：理论中甚至没有超势，似乎没有办法再利用前面的方法积分掉重夸克了。为了解决这个问题，可以引入一个“Lagrange 乘子” X 作为辅助场，使超势中加入以下的这一项：

$$W_{\text{eff}} = X(\det M - B\tilde{B} - C\Lambda^{2N_c}) \quad (C.230)$$

积分掉 X 后，运动方程就会自动蕴含上面这个变形后的约束。类似前面的讨论，如果要给一味夸克加上质量，那么超势中就会多出以下的耦合：

$$W_{\text{eff}} = X(\det M - B\tilde{B} - C\Lambda^{2N_c}) + \text{Tr}(mM), \quad m = \text{diag}(0, \dots, 0, m) \quad (C.231)$$

同样，运动方程告诉我们 M 一定是对角的。将 M 的前 $(n-1)$ 个分量作为背景场 \tilde{M} ，并将最后一个分量称为 Z ，那么这个超势就可以写为：

$$W_{\text{eff}} = X(\det \tilde{M} - B\tilde{B} - C\Lambda^{2N_c}) + mZ \quad (C.232)$$

我们希望积分掉的自由度就是 X, Z, B 和 \tilde{B} 。如果我们对这些广义坐标求运动方程，就会得到：

$$Z \det \tilde{M} - \tilde{B}B = C\Lambda^{2N_c}, \quad X \det \tilde{M} + m = 0, \quad \tilde{B} = B = 0 \quad (C.233)$$

从而：

$$Z = C \frac{\Lambda^{2N_c}}{\det \tilde{M}}, \quad X = -\frac{m}{\det \tilde{M}} \quad (\text{C.234})$$

代入原来的超势，就能得到在树图阶积分掉这些自由度的超势：

$$W_{\text{eff}}^{(N_c-1)} = C \frac{\Lambda_{\text{old}}^{2N_c} m}{\det \tilde{M}} = C \frac{\Lambda_{\text{new}}^{2N_c+1}}{\det \tilde{M}} \quad (\text{C.235})$$

于是，如果积分掉重自由度后能够给出正确的 ADS 超势，那么必须要有 $C = 1$ 。到此为止，我们就得到了量子模空间上介子、重子和反重子场的期待值所满足的关系：

$$\det \langle M \rangle - \langle B \rangle \langle \tilde{B} \rangle = \Lambda^{2N_c} \quad (\text{C.236})$$

为了挖掘这个形变的物理意义，我们需要对模空间的性质有一个更深刻的理解。首先从模空间中，我们可以得到理论中有多少无质量自由度：沿着这个模空间的方向，所有激发都是无质量的，而如果某个激发“跳出”了模空间，例如在 $\langle B \rangle$ 不为 0 的真空附近激发一个反重子，那么这个激发就是有质量的。于是模空间的切空间维数意味着体系中可能激发出的无质量粒子数目⁵¹。

在量子修正之前，原来的模空间在 $M = B = \tilde{B} = 0$ 处是奇异的。为了看到这一点，可以考虑这一点处的切向量，它可以通过对 M, B, \tilde{B} 做小扰动得到：

$$-(\det M)(M^{-1})_J^I \delta M_I^J - B(\delta \tilde{B}) - (\delta B)\tilde{B} = 0 \quad (\text{C.237})$$

在 $M = B = \tilde{B} = 0$ 处，任何一个 $\delta M, \delta B, \delta \tilde{B}$ 都满足这样一个方程，从而在这一点处模空间的切空间是 $2 + N_f^2$ 维的，其维数大于模空间本身的维数。而这不可能发生在一个微分流形上，于是唯一的可能性就是这一点不能被微分流形描述，从而是奇异的。如果你还不理解，可以考虑一个简单的例子：两条相交的直线。直线上除去交点的部分可以用一个一维微分流形来描述，但是在交点处，两条直线的方向都是这一点的切向，从而这一点的切空间是二维的。而我们都知道：交点是奇异的——除非我们挖掉这个交点，否则这两条相交直线是无法利用微分流形描述的。

现在我们知道了 $M = B = \tilde{B} = 0$ 处经典模空间是奇异的，那么这又能告诉我们什么呢？前面说到，由于沿着模空间方向的激发不会改变系统的能量，从而这些激发一定是无质量的。在非奇异的点上，对应的真空附近会存在 $\dim \mathcal{M}$ 个无质量粒子，但是在奇异的点上，由于切空间的维数高于 $\dim \mathcal{M}$ ，于是在这一点对应的真空附近将会存在额外的无质量粒子。在经典的、 $N_f = N_c$ 的 SQCD 中，模空间中一个一般的点会将规范对称性完全破缺，使得规范玻色子获得质量。而 $M = B = \tilde{B} = 0$ 这一点对应所有的真空气望值 v_I 都为 0 的点，这一点处 $SU(N_c)$ 的规范对称性是完全没有被破缺的，于是规范玻色子仍然是无质量的。于是在经典上，这个奇异性就对应理论中存在额外的无质量粒子——规范玻色子。

但是量子水平上，真空气望值会稍稍偏离经典值。如果真空气望值所满足的关系被修改为 $\det \langle M \rangle - \langle B \rangle \langle \tilde{B} \rangle = \Lambda^{2N_c}$ ，那么 $M = B = \tilde{B} = 0$ 这一点就不再是模空间上的点。这有三个重要的物理后果：

- 此时，介子和重子、反重子之中一定至少有一个获得了真空气望值，由于这些东西都至少在一个 global 对称性的非平凡表示中，于是理论中的⁵²全局对称性 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V \times U(1)_R$ 一定被自发破缺到了某个子群上。

⁵¹在后面讨论't Hooft 反常匹配时，由于只有这些无质量粒子在 IR 具有传播自由度，于是只需要考虑这些无质量粒子对 IR 端反常的贡献，不需要考虑“跳出”模空间的这些有质量粒子贡献的反常。

⁵²别忘了：spurious 的对称性不是物理的对称性！

- 此时理论的模空间中也不存在奇异性，于是不存在多余的无质量自由度，所有自由度都可以被沿模空间方向的激发描述。由于沿模空间的激发可以用 M, \tilde{B} 和 B 完全描述，此时无质量自由度也就是 M, \tilde{B} 和 B 。这些无质量自由度并不是独立的，它们遵循和真空期望值相同的关系为 $\det(M) - \langle B \rangle \langle \tilde{B} \rangle = \Lambda^{2N_c}$ 。由于所有无质量的物质场都是色单态——我们纯粹地从理论中推导出了广义的“禁闭”！
- 没有奇异性也就不存在一个使规范玻色子保持无质量的真空。换句话说，无论在任何真空态附近做微扰论，规范玻色子一定通过某种机制获得质量——有可能是 Higgs 机制破缺了规范对称性，使得理论处于 Higgs 相，也有可能是禁闭使它们组成了有质量的胶球，使得理论处于禁闭相。

事实上，这个理论中的 Higgs 相和禁闭相就是同一个 IR 相，它们之间可以连续过渡。为了看到这一点，可以在两个特殊的真空附近考虑理论的行为：

- 第一个真空是 $M_I^J = \Lambda^2 \delta_I^J, B = \tilde{B} = 0$ 。此时理论的手征对称性从 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ 被自发破缺为了对角的子群 $SU(N_f)_V$ ，于是理论未破缺的全局对称性就是 $SU(N_f)_V \times U(1)_V \times U(1)_R$ 。由于 UV 理论中不存在任何标量场能够给出这样的对称性破缺行为，从而此时规范玻色子质量不来自 Higgs 机制，而应该来自于禁闭。这个真空附近的理论处于禁闭相。
- 第二个真空对应 $M = 0, B\tilde{B} = -\Lambda^{2N_c}$ 。此时的手征对称性并没有破缺，反而是 $U(1)_V$ 对称性自发破缺了，剩余的全局对称性是 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_R$ 。在 UV 理论中，这样的行为可以被理解为 squark 获得了真空期待值 $\langle \phi \rangle$ ，通过 Higgs 机制给了规范玻色子质量。这个真空附近的理论处于 Higgs 相⁵³。

重点来了：由于这个理论中存在一个光滑的模空间，于是我们可以在模空间上画一条路径，使真空沿着这条路径从一个真空到达另一个真空。也就是说，这两个真空之间是可以连续过渡到对方的。既然两个 IR 相之间可以连续过渡，那么 Higgs 相和禁闭相就是同一个 IR 相，我们也没必要区分究竟是 Higgs 机制还是禁闭使得规范玻色子获得了质量⁵⁴。

总结一下上面的讨论： $N_f = N_c$ 的 SQCD 处于禁闭相（也可以说是 Higgs 相，反正它们之间没有区别），无质量自由度是理论中介子 M 和重子、反重子 B, \tilde{B} ，但是这些无质量场并不是独立的，而是满足约束 $\det M - B\tilde{B} = \Lambda^{2N_c}$ 的。理论中存在无穷多个简并的真空。并且对于一个一般的真空而言，手征对称性和 $U(1)_V$ 对称性都是自发破缺的。这就明确了此时理论的 IR 行为。

最后，作为一个自洽性检验，我们可以看一看低能理论中的这些介子、重子是否满足't Hooft 反常匹配⁵⁵，它需要在任何真空附近都被满足。如果一个真空具有额外的、未自发破缺的全局对称性，那么由于我们需要考虑更多的't Hooft 反常，于是在这个真空附近的反常匹配条件应该比其他真空附近的更加严格。根据前面的讨论，在 $M_I^J = \Lambda^2 \delta_I^J, B = \tilde{B} = 0$ 处 $U(1)_V$ 没有破缺，而 $M = 0, B\tilde{B} = -\Lambda^{2N_c}$ 时 $SU(N_f)_A$ 没有破缺，于是在这两个真空处

⁵³ 你可能会想： $B\tilde{B} = -\Lambda^{2N_c}$ 也没有破缺规范对称性，为什么我们能说它是 Higgs 机制呢？答案是：不像之前我们可以将代数簇和 D-方程的解联系起来，从而看到规范对称性如何破缺；在变形的模空间上我们并不知道如何严格地看到规范对称性有没有破缺，于是只能通过考虑 UV 理论中有什么东西能够 generate 同样的对称性自发破缺来猜测。

⁵⁴ 如果你不能理解这件事情，可以思考一下 Van de Waals 气体——虽然 Van de Waals 的气相和液相也迥然不同，它们也是可以连续过渡的。

⁵⁵ 在考虑反常匹配时，只用考虑 IR 端的无质量粒子，其个数就是切空间维数，此时并不是所有的介子、重子、反重子都是独立的。

理论具有额外的、未自发破缺的全局对称性，于是在这两个真空处的约束是最严的。从而我们只需要在这两个真空附近验证 UV 和 IR 的自由度具有同样的反常即可。通过一些简单而无趣的计算，我们发现这些真空附近的低能、高能自由度的确满足 $A_{IR} = A_{UV}$ ，从而这些讨论的确是自洽的⁵⁶。

C.4.5 Confinement without Chiral Symmetry Breaking at $N_f = N_c + 1$

让我们继续看看 N_f 增长后会发生什么。在 $N_f = N_c$ 之后，下一个要讨论的是 $N_f = N_c + 1$ 。前面的讨论告诉我们，Wilson 有效作用量中并没有具有正确弱耦合极限的超势项。并且如果在理论中加入质量，那么量子理论的真空可以用 $\langle M_I^J \rangle = (m^{-1})_I^J (\Lambda^{3N_c - N_f} \det m)^{\frac{1}{N_c}}$ 来描述。通过取不同的 $m \rightarrow 0$ 极限，可以看出理论中仍然有无穷多个简并的真空态。

此时这些量子的真空态满不满足经典模空间的约束呢？为了讨论这一点，需要先看看 $N_f = N_c + 1$ 上经典模空间上的约束是什么。如果我们定义：

$$B^I = \epsilon^{II_1 \dots I_{N_c}} B_{I_1 \dots I_{N_c}}, \quad \tilde{B}_J = \epsilon_{JJ_1 \dots J_{N_c}} \tilde{B}^{J_1 \dots J_{N_c}} \quad (\text{C.238})$$

那么经典真空满足的关系 $B_{I_1 \dots I_{N_c}} \tilde{B}^{J_1 \dots J_{N_c}} = M_{[I_1}^{J_1} \dots M_{I_{N_c}]}^{J_{N_c}}$ 可以写为：

$$(M^{-1})_J^I \det M = B^I \tilde{B}_J, \quad M_I^J B^I = M_I^J \tilde{B}_J = 0 \quad (\text{C.239})$$

如果量子的真空态不满足这个约束，那么这个关系会被如何修改呢？我们可以尝试通过对称性写出所有可能的修正项。此时理论的量子对称性如下表：

	$SU(N_c)$	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_V$	$U(1)_R$	$U(1)_A$ (sp)	
M_I^J	1	N	N	0	$\frac{2}{N_f}$	2	
B^I	1	N	1	N_c	$\frac{N_c}{N_f}$	N_c	
\tilde{B}_J	1	1	N	$-N_c$	$\frac{N_c}{N_f}$	N_c	
Λ	1	1	1	0	0	$\frac{2N_f}{b_0}$	

(C.240)

容易看出，能够用这些场构造出来的、在所有的对称性下和 $M^{-1} \det M, B \tilde{B}$ 变换关系相同的量只有 $M^{-1} \det M$ 和 $B \tilde{B}$ 本身，而唯一在所有对称群下不变的量是 $x = \det M / B M \tilde{B}$ 。如果我们要修改第一个约束，那么唯一的可能是加入形如 $f(x)M^{-1} \det M + g(x)B \tilde{B}$ 的项。由于这两个函数都和 Λ 无关，通过要求在 $\Lambda \rightarrow 0$ 的弱耦合极限下量子约束回到经典约束，就能得到 $f(x) = g(x) = 1$ ，也就是量子约束和经典约束相同。对于第二个约束而言，讨论是类似的：和 MB 变换关系相同的量也只有 MB 自身，而对称群的不变量中也不含有 Λ ，从而弱耦合极限仍然保证了量子约束和经典约束相同。从而量子模空间上介子、重子和反重子的真空期望值满足的约束应该和经典约束完全一致：

$$\langle M^{-1} \rangle_J^I \det \langle M \rangle = \langle B^I \rangle \langle \tilde{B}_J \rangle, \quad \langle M_I^J \rangle \langle B^I \rangle = \langle M_I^J \rangle \langle \tilde{B}_J \rangle = 0 \quad (\text{C.241})$$

事实上，对于任何的 $N_f > N_c + 1$ 的理论而言，这些讨论同样成立，经典和量子的模空间完全一致。这件事情应该怎么解读呢？首先在 $M = B = \tilde{B} = 0$ 之外的真空附近，讨论

⁵⁶ 你一定在问：为什么前面在 $N_f = N_c$ 时的讨论不需要讨论这件事情呢？答案也非常简单——那时理论中出现了真空失控的现象，甚至不具有真空态，无法描述在某个真空附近对称性有没有自发破缺，更别考虑反常匹配了。

和前面一小节几乎完全一致：这些真空期望值会破缺手征对称性，理论中无质量粒子就是满足上面这几个约束的介子、重子和反重子。不过由于 $M = B = \tilde{B} = 0$ 仍然是模空间上的点，于是模空间上的确存在奇异性，而正如前文所讲，这个奇异性对应这个真空附近会出现额外的无质量粒子。那么这些无质量粒子是什么呢？

答案并不是规范玻色子。在经典理论中，由于介子、重子和反重子场满足的关系是一直成立的，于是介子、重子和反重子的总自由度数就是模空间的维数，如果我们想要找到多余的无质量粒子，就需要寻找介子、重子和反重子之外的粒子。但是在量子理论中，模空间上的关系仅仅意味着真空态之间的关系，如果某个激发打破了这个关系，只意味着这个激发增加了体系的能量，对应一个具有质量的模式。在模空间上的其他点，只有沿模空间方向的激发是无质量的。而在 $M = B = \tilde{B} = 0$ 这一点，所有的 $\delta M, \delta B$ 和 $\delta \tilde{B}$ 都不会让我们离开模空间，于是所有介子、重子和反重子都是无质量的！这些多余的无质量粒子正是介子、重子和反重子的其他自由度。

另外，在 $M = B = \tilde{B} = 0$ 对应的真空中，不存在任何场获得真空期待值，于是所有的全局对称性都没有被破缺。由于无质量自由度仍然是介子、重子和反重子这些色单态，于是此时的理论在 IR 处于禁闭相，但是不存在手征对称性破缺。由于没有手征对称性破缺，IR 理论中就没有任何标度能够给予禁闭后的自由度以质量，这也和我们上面看到的情形：介子、重子和反重子均不具有质量相符合。

这样的无手征对称性破缺的禁闭是一个 SQCD 中的全新现象，在 QCD 中是不可能存在的。为了检验这个讨论的自洽性，我们可以尝试在这一点做't Hooft 反常匹配，结果和我们预想的完全一致——此时 UV 的夸克、gluino 和 IR 的介子、重子、反重子给出的反常完全相同⁵⁷，这个极度 nontrivial 的结果更加有力地佐证了 $N_f = N_c + 1$ 时存在无手征对称性破缺的禁闭。

此时的量子模空间也可以通过引入一个有效超势来描述：

$$W_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{\Lambda^{2N_c-1}} (\det M - B M \tilde{B}) \quad (\text{C.242})$$

容易看到，无论 α 的值如何，它的运动方程都能给出正确的约束：

$$\frac{\partial W_{\text{eff}}}{\partial M} \propto M^{-1} \det M - B \tilde{B} = 0, \quad \frac{\partial W_{\text{eff}}}{\partial B} \propto M \tilde{B} = 0, \quad \frac{\partial W_{\text{eff}}}{\partial \tilde{B}} \propto B M = 0 \quad (\text{C.243})$$

在前一小节的开头说过：如果要在 $N_f > N_c$ 的理论中用 M, B, \tilde{B} 和 Λ 构造出有效超势，那么这个有效超势一定含有 Λ 的负幂次项。这一点在上面这个有效超势中也得到了很好的体现。看到这个负幂次之后，我们自然会问：为什么有效超势中能出现这样的项？答案是：这一项并不是物理的超势，它仅仅是为了引入这些对模空间的约束而存在的。由于 $\Lambda \rightarrow 0$ 处这个超势发散并不会给出错误的约束，于是单纯在引入约束的意义上，这个有效超势是合理的。

故技重施：通过积分掉一味重夸克，我们也可以得到待定系数 α 的值。在加入质量项之后， W_{eff} 变为：

$$W_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{\Lambda^{2N_c-1}} (\det M - B M \tilde{B}) + \text{Tr}(m M) \quad (\text{C.244})$$

⁵⁷ 我想有必要重申一下：在一个一般的真空中，反常匹配只用考虑 IR 端的无质量粒子，其个数就是切空间维数，此时并不是所有的介子、重子、反重子都是独立的。但是在这个真空中，由于所有介子、重子、反重子都是无质量的，于是在做反常匹配时可以将所有介子、重子、反重子都视为无质量的独立自由度。

通过和前面类似的计算，便可以得到：

$$M = \begin{pmatrix} \tilde{M} & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}, \quad B^I = \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_J = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{B} \end{pmatrix} \quad (\text{C.245})$$

通过运动方程，可以解出：

$$\det \tilde{M} - B\tilde{B} = \frac{1}{\alpha} m \Lambda_{\text{old}}^{2N_c-1} = \frac{1}{\alpha} \Lambda_{\text{new}}^{2N_c} \quad (\text{C.246})$$

为了给出 $N_f = N_c$ 时模空间上的正确约束，系数 α 就一定是 1，于是此时的有效超势可以被写为：

$$W_{\text{eff}} = -\frac{1}{\Lambda^{2N_c-1}} (\det M - B M \tilde{B}) \quad (\text{C.247})$$

总结一下上面的讨论：在 $N_f = N_c$ 时，理论仍然处于禁闭相。此时理论中也存在无穷多个简并的真空，构成一个量子的模空间。量子模空间上场 M, B, \tilde{B} 的期待值满足和经典模空间相同的关系。这使得理论中存在一个不破缺手征对称性的真空，理论在这个真空附近呈现出无手征对称性破缺的禁闭。

C.4.6 The Conformal Window at $\frac{3}{2}N_c \leq N_f < 3N_c$

到此为止，我们完全明白了 $N_f \leq N_c + 1$ 时的 IR 行为，是时候向更高的 N_f 迈进了。在更高的 N_f 处，量子和经典的模空间依然相同，对非奇点处的理论的讨论也和前面大同小异。但是在奇点处，如果我们仍然将这一点处的无质量自由度理解为独立的介子、重子和反重子，在 $M = B = \tilde{B}$ 处做't Hooft 反常匹配，就会发现 UV 的夸克和 IR 的介子、重子和反重子给出的反常并不一致！也就是说，奇点处的理论并不能被理解为一个自由度为独立的介子、重子和反重子的理论，而应该是其他的什么东西。问题就是：这东西是什么呢？

在 N_f 很高时，这个问题的答案十分显然：在 $M = B = \tilde{B}$ 的这一奇点上的理论就是我们熟悉的、红外自由的 SQCD，其无质量自由度是夸克和胶子。再往下，理论将会变得渐近自由，但是在红外可能存在 Banks-Zaks 不动点，使得理论在红外流向一个共形场论。具有这个性质的 N_f 区间就被称为**共形窗口**。这一小节中，我们的目标就是看一看理论的共形窗口处于什么地方。为此，首先需要对**共形对称性**有一些基本的了解⁵⁸。

为了引入共形对称性，可以先考虑理论在重标度变换下的不变性。如果我们考虑重标度变换在 \mathbb{R}^4 上的表示，它就对应以下的**伸缩**：

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu \quad (\text{C.248})$$

如果标度不变性是理论的量子对称性，这就意味着理论中不应该具有任何含量纲的参数，耦合常数也不应该在能标变化之下跑动。于是标度不变的量子理论中只能存在无质量粒子。虽然在四维中还没有严格的证明，但是物理学家们相信一个具有标度不变性的相对论性量子场论也应该在以下的**特殊共形变换**下不变：

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu - a^\mu x^2}{1 - 2a \cdot x + a^2 x^2} \quad (\text{C.249})$$

⁵⁸当然，由于这个 notes 并不偏重于讨论共形场论的性质，于是本节的某些讨论将会是不严格的。

Poincare 群、伸缩和特殊共形变换组成的群就被称为**共形群**，它更常见的定义是保持度规相差一个常数（也就是 $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \Omega \eta_{\mu\nu}$ ）的坐标变换构成的群。而一个具有量子的共形对称性的理论就被称为一个**共形场论/CFT**。按照惯例，我们可以定义变换的生成元，使得一个无穷小变换对应算符 $iD\lambda + iK_\mu a^\mu$ 。那么从前面这个变化的形式中就能得到这些生成元在 \mathbb{R}^4 上的表示：

$$D = -ix^\mu \partial_\mu, \quad K_\mu = -i(2x_\mu x_\nu \partial^\nu - x^2 \partial_\mu) \quad (\text{C.250})$$

根据这个 \mathbb{R}^4 上的表示，也可以轻易地得到共形代数的所有对易关系：

$$\begin{aligned} [D, K^\mu] &= -iK^\mu, \quad [D, P^\mu] = iP^\mu \\ [K^\mu, P^\nu] &= 2i(D\eta^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}) \\ [M^{\mu\nu}, K^\sigma] &= i(K^\nu \eta^{\mu\sigma} - K^\mu \eta^{\nu\sigma}) \end{aligned} \quad (\text{C.251})$$

可以证明：共形对称性实际上是一个具有非平凡关联函数的场论能够具有的最大对称性⁵⁹，其中的物理量理应最好计算，于是理论家们常常利用共形场论作为“平台”，在其上讨论更加深刻的物理，并期待能将 CFT 中的结论推广到一般的场论中。在共形场论中，我们关注的物理量仍然是关联函数。此时共形对称性会给关联函数一个很严格的限制。如果一个算符满足：

$$\mathcal{O}(\lambda x) = \lambda^{-\Delta} \mathcal{O}(x) \quad (\text{C.252})$$

那么我们称这个算符具有**标度量纲** Δ 。共形对称性告诉我们：如果算符 \mathcal{O} 具有标度量纲 Δ ，那么关联函数 $\langle \mathcal{O}^\dagger(x) \mathcal{O}(0) \rangle$ 就一定会有行为：

$$\langle \mathcal{O}^\dagger(x) \mathcal{O}(0) \rangle \sim \frac{1}{|x|^{2\Delta}} \quad (\text{C.253})$$

除去一个系数之外，这基本上完全确定了关联函数的行为！于是为了在共形场论中得到关联函数的行为，我们可以转而计算算符的标度量纲。例如对于一个无质量自由标量理论 $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2$ 而言，场 ϕ 的标度量纲就是 $\Delta[\phi] = (d-2)/2$ 。关于标度量纲，还有一个重要的结论需要给出：对于 d 维时空中的满足么正性、含有相互作用的共形场论而言，其中任何标量算符的标度量纲一定满足：

$$\Delta[\mathcal{O}] \geq \frac{d-2}{2} \quad (\text{C.254})$$

这也被称为标度量纲的**么正限**。这也就意味着：任何标量算符的量纲都应该大于一个自由标量场的量纲。事实上，如果一个标量场满足 $\Delta[\mathcal{O}] = \frac{d-2}{2}$ ，那么它一定和其他场之间完全脱耦，成为一个自由标量场。在我们关注的四维时空中，么正限就成为 $\Delta[\mathcal{O}] \geq 1$ ，而所有具有标度量纲 1 的标量场都一定是自由的。

现在我们基本明白了什么是一个共形场论。既然 SQCD 具有超对称性，那么在共形窗口中的 SQCD 就不但具有共形对称性，还具有超对称性，从而是一个**超对称共形场论**。可以证明：任何超对称共形场论除了具有超对称群和共形群下的对称性之外，并且其对称群一定还会额外具有三个生成元：费米的**超共形荷** $S_\alpha, S_{\dot{\alpha}}^\dagger$ 和我们熟悉的、玻色的 $U(1)_R$ 荷 R 。

⁵⁹详见 arXiv:hep-th/1112.1016。这里仅仅考虑了玻色的对称性，如果加上费米对称性的话，下面所考虑的超对称共形对称性才是最大的。

完整的超共形代数的对易关系相当于在上面的四组对易关系之上额外附加了：

$$\begin{aligned}
 [D, Q_\alpha] &= \frac{1}{2} Q_\alpha, & [D, S_\alpha] &= -\frac{1}{2} S_\alpha \\
 [R, Q_\alpha] &= Q_\alpha, & [R, S_\alpha] &= -S_\alpha \\
 [K^\mu, Q_\alpha] &= i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{S}^{\dot{\alpha}}, & [P^\mu, S_\alpha] &= i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \\
 \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P^\mu, & \{S_\alpha, \bar{S}_{\dot{\alpha}}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu K^\mu \\
 \{Q_\alpha, S_\beta\} &= M_{\mu\nu} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu (\sigma^\nu)^{\dot{\alpha}}{}_\beta - i \left(D - \frac{3}{2} R \right) \epsilon_{\alpha\beta}
 \end{aligned} \tag{C.255}$$

一个一般的超对称理论是可以没有 $U(1)_R$ 对称性的，但是在超对称共形场论中， $U(1)_R$ 对称性是一定存在的。在这里，我们将不会涉及到任何详细的超对称共形场论的讨论，而是仅仅给出其中对我们最重要的结论：对于一个任意的算符 \mathcal{O} 而言，其 R 荷及标度量纲之间一定满足关系：

$$\Delta[\mathcal{O}] \geq \frac{3}{2} |R[\mathcal{O}]| \tag{C.256}$$

对于手征超场而言，这个不等式成为等式：一个手征超场的标度量纲及其 R 荷之间存在以下的关系：

$$\Delta[\Phi] = \frac{3}{2} R[\Phi] \tag{C.257}$$

这个关系十分令人激动：在超对称共形场论中，我们丝毫不用费力去计算一个算符的标度量纲，而是可以直接从 R 荷中得到它！更加 nontrivial 的是，由于复合算符存在额外的重整化，于是在一般的 CFT 中关系 $\Delta[\Phi_1\Phi_2] = \Delta[\Phi_1] + \Delta[\Phi_2]$ 是不一定满足的。但是对于手征超场而言，这一定是正确的。

最后，我们还需要说明一点：这里的 $U(1)_R$ 对称性并不一定就是前面讨论中的 $U(1)_R$ 。如果理论中存在另一个不反常的 $U(1)_F$ 全局对称性，那么任意 α 对应的 $R + \alpha F$ 也将是满足超对称共形代数的 R 对称性。在超对称 QCD 中， $U(1)_R$ 就可能会和 $U(1)_V$ 存在混合。对于一个一般的理论而言，我们可以使用一套被称为 **a-maximization** 的步骤来确定究竟什么才是正确的 R 对称性，不过在 SQCD 中，由于下面讨论中涉及的算符都不具有 $U(1)_V$ 荷，于是我们并不需要知道什么是正确的 R 对称性。

有了这些准备工作之后，我们就能讨论理论的共形窗口究竟在哪里了。首先在共形窗口之上，理论都处于 IR 自由相，从而如果我们将所有自由度全部积分掉，让理论随重整化群跑动到 $\mu = 0$ ，那么此时理论应该是一个自由场论，具有 $\Delta[\Phi] = \Delta[\tilde{\Phi}] = 1$ ，于是这个 IR 相中的介子算符具有标度量纲 $\Delta[M] = 2$ 。

而我们知道：算符 M 具有 R 荷 $2(N_f - N_c)/N_f$ ，于是如果理论在红外处于共形窗口，那么 M 的标度量纲应该是：

$$\Delta[M] = \frac{3(N_f - N_c)}{N_f} \tag{C.258}$$

从而，共形窗口的上界应该同时满足 $\Delta[M] = 2$ 和 $\Delta[M] = \frac{3(N_f - N_c)}{N_f}$ ，也就是说这个上界位于 $N_f = 3N_c$ 的位置，这和我们从全纯 beta 函数中看到的结果是一致的。

在 $N_f = 3N_c$ 以下，理论应该一直处于共形窗口中，直到抵达共形窗口的下界、跨入禁闭相为止。由于共形场论要求 $\Delta[M] \geq 1$ ，这对应 $N_f = \frac{3}{2}N_c$ ，于是在这个 N_f 以下，理论便不可能是一个超对称共形场论。并且由于满足 $\Delta[\phi] = 1$ 的场一定是自由场，于是 $N_f = \frac{3}{2}N_c$

事实上描述了一个介子的自由场论，这也应该是具有共形对称性的。从而 $N_f = \frac{3}{2}N_c$ 就应该是共形窗口的下界。

到此为止，我们完全通过超对称共形场论的性质确定下了 SQCD 中共形窗口的位置：

$$\frac{3}{2}N_c \leq N_f < 3N_c \quad (\text{C.259})$$

在这个窗口中，理论在 IR 不动点上是一个相互作用的共形场论。

Field Strength Renormalization at Banks-Zaks Fixed Point

共形对称性不但让我们明白了这一区间中 SQCD 有什么样的 IR 行为，还可以通过计算标度量纲来确定 Kahler 势中的场强重整化因子，从而给出 Banks-Zaks 不动点上理论的动力学⁶⁰。为了看到这一点，我们可以考虑 SQCD 中各个场的标度量纲。对于 Q, \tilde{Q} 而言，由于其 R 荷是：

$$R[Q] = R[\tilde{Q}] = \frac{N_f - N_c}{N_f} \quad (\text{C.260})$$

于是其标度量纲也就是：

$$\Delta[Q] = \Delta[\tilde{Q}] = \frac{3}{2} \frac{N_f - N_c}{N_f} \quad (\text{C.261})$$

如果我们知道了一个场的场强重整化因子 Δ ，并且在能标 Λ 处将场归一化使得这个能标处理理论的重整化常数为 1，为了得到能标 μ 上的理论的行为，就可以做一个重标度变换， $x \rightarrow \frac{\Lambda}{\mu}x$ 。根据标度量纲的定义：

$$\int d^4x d^4\theta Q^\dagger Q \Big|_\mu = \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^{-\Delta} \int d^4x d^4\theta Q^\dagger Q \Big|_\Lambda \quad (\text{C.262})$$

由于作用量本身具有共形不变性，于是：

$$Z_Q(\mu, \Lambda) \int d^4x d^4\theta Q^\dagger Q \Big|_\mu = \int d^4x d^4\theta Q^\dagger Q \Big|_\Lambda \quad (\text{C.263})$$

联立上面两个方程，就可以看到 Q 的场强重整化因子是：

$$Z_Q(\mu, \Lambda) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^\Delta \quad (\text{C.264})$$

从而我们发现：如果想要计算出一个场的场强重整化因子，就只需要计算出算符 $\int d^4x d^4\theta Q^\dagger Q$ 的标度量纲。对于 SQCD 中的夸克超场 Q 而言， $\int d^4x d^4\theta Q^\dagger Q$ 的标度量纲可以被计算如下：

$$\Delta \left[\int d^4x d^4\theta Q^\dagger Q \right] = (-4) + 2 + 2\Delta[Q] = \frac{N_f - 3N_c}{N_f} \quad (\text{C.265})$$

⁶⁰下面的讨论来自 Andre de Gouvea, Alexander Friedland 和 Hitoshi Murayama 的文章 *Seiberg Duality and e^+e^- Experiments*, arXiv:hep-th/9810020.

这也就蕴含：

$$Z_Q(\mu, \Lambda) = \left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^{\frac{3N_c - N_f}{N_f}} \quad (C.266)$$

知道了场强重整化因子之后，我们能得到什么呢？首先，如果 Banks-Zaks 不动点处理论是微扰的，我们能从这个重整化因子中计算出这个不动点上的耦合常数。为了看到这一点，可以考虑一个 $N_f = 3N_c(1 - \epsilon)$ 的 SQCD，此时的场强重整化常数可以被展开为：

$$Z_Q(\mu, \Lambda) = \left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^\epsilon = 1 + \epsilon \log \frac{\mu}{\Lambda} + O(\epsilon^2) \quad (C.267)$$

除去这么计算重整化常数之外，我们还可以在 Wilson scheme 下用微扰论将这个重整化常数计算到单圈阶：

$$Z_Q(\mu, M) = Z_{\tilde{Q}}(\mu, M) = 1 + \frac{g_*^2}{8\pi^2} \frac{N_c^2 - 1}{N_c} \log \frac{\mu}{M} + O(g^4) + O(g_*^4) \quad (C.268)$$

其中 g_* 是 Banks-Zaks 不动点上的耦合常数。将这两个结果稍稍对比，就会发现：

$$\frac{g_*^2}{8\pi^2} = \epsilon \frac{N_c}{N_c^2 - 1} + O(\epsilon^2) \quad (C.269)$$

这也就微扰地计算出了 Banks-Zaks 不动点上的耦合常数。

e^+e^- Crossection at Banks-Zaks Fixed Point

其次，知道了重整化因子之后，我们还可以严格计算出 Banks-Zaks 不动点上理论中的一些可观测量。由于渐进时刻可以被一个伸缩变换变为有限时刻，于是在共形场论中渐进态是无法被定义的，从而我们无法在共形场论中讨论 S-矩阵。不过退而求其次的，由于流算符的关联函数可以被严格定义，于是 e^+e^- 到任意末态的散射总截面 $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Anything})$ 是良定义的，可以作为理论中一个可观测量而存在。事实上，我们可以通过 NSVZ beta 函数来严格计算出 $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Anything})$ 。

为了描述 SQCD 中的电磁相互作用，我们需要将 global 的 $U(1)_V$ 对称性规范化，而这势必会破坏理论的共形对称性，使得场强重整化常数不再是上面得到的结果。好在如果 $U(1)_V$ 耦合常数 e 很小，那么场强重整化常数和上面结果的偏移至少是 $O(\alpha)$ 的，从而我们至少知道在 $O(\alpha)$ 的领头阶上的重整化常数，也就可以通过 NSVZ beta 函数得知 $U(1)_V$ 耦合常数 e 在 $O(\alpha)$ 领头阶上的跑动行为。

根据第五章的讨论，由于 Coulomb 势 $\tilde{V}(k^2) = \frac{e^2(\mu)}{k^2(1 - \Pi(k^2; \mu^2))}$ 是不随重整化群变化的⁶¹，于是我们有关系：

$$\frac{1}{e^2(\mu)} - \Pi(k^2, \mu^2) = \frac{1}{e^2(\Lambda)} - \Pi(k^2, \Lambda^2) \quad (C.270)$$

并且，由于自能之差是不随重整化方案变化的，从而 $\Pi(k^2, \mu^2) = \Pi(k^2, \mu^2) - \Pi(\mu^2, \mu^2) = \Pi(k^2) - \Pi(\mu^2)$ ，其中等号最右边的 $\Pi(k^2)$ 可以是任何重整化方案下的结果。于是上面这个关系也可以被改写为：

$$\frac{1}{e^2(\mu)} = \frac{1}{e^2(\Lambda)} + \Pi(\Lambda^2) - \Pi(\mu^2) \quad (C.271)$$

⁶¹如果令 $\Pi_{\mu\nu}(k^2; \mu^2)$ 代表在减除能标为 $M^2 = \mu^2$ 的固定能标减除方案下的光子自能，那么函数 $\Pi(k^2, \mu^2)$ 的定义就是 $\Pi_{\mu\nu}(k^2; \mu^2) = e^2(k^2 \eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi(k^2; \mu^2)$ 。

巧妙的是，根据光学定理， e^+e^- 散射截面又可以被写为：

$$\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Anything})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 16\pi^2 \frac{1}{2\pi i} (\Pi(-s + i\epsilon) - \Pi(-s - i\epsilon)) \quad (\text{C.272})$$

于是知道了 $U(1)$ 耦合的跑动行为之后，我们就能计算出两个能标上的光子自能函数之差。将其延拓到复平面上后，就能利用上面这个等式计算出 e^+e^- 散射截面。这就是我们的基本思路。

下面，就可以开始按照这个思路进行计算了。对于 $U(1)$ 耦合常数而言，其 $b_0 = 2N_c N_f$ ，于是 $U(1)$ 耦合常数的 NSVZ beta 函数就是：

$$\frac{de^2}{d \log \mu} = -e^4 \frac{2N_c N_f (1 + \gamma_Q)}{8\pi^2}, \quad \gamma_Q \equiv -\frac{d \log Z_Q}{d \log \mu} \quad (\text{C.273})$$

由此可以积分出：

$$\begin{aligned} \frac{8\pi^2}{e^2(\mu)} &= \frac{8\pi^2}{e^2(\Lambda)} - 2N_c N_f \log \frac{\mu}{M} - 2N_c N_f \log \left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^{(3N_c - N_f)/N_f} + O(\alpha) \\ &= \frac{8\pi^2}{e^2(M)} - 6N_c^2 \log \frac{\mu}{\Lambda} + O(\alpha) \end{aligned} \quad (\text{C.274})$$

这也就蕴含着：

$$16\pi^2 (\Pi(M^2) - \Pi(\mu^2)) = -6N_c^2 \log \frac{\mu^2}{M^2} + O(\alpha) \quad (\text{C.275})$$

将这个表达式代入前面得到的 e^+e^- 散射截面的表达式，便可以计算出：

$$\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Anything})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \frac{-6N_c^2}{2\pi i} \log \frac{-s + i\epsilon}{-s - i\epsilon} = 6N_c^2 + O(\alpha) \quad (\text{C.276})$$

到此为止，我们就计算出了直到 $O(\alpha)$ 领头阶的 e^+e^- 散射截面。由于我们并没有利用任何微扰论的技巧，于是只要理论在 IR 会流向 Banks-Zaks 不动点，这些讨论就依然成立。借助共形对称性和超对称，这也许是我们第一次严格计算出一个强耦合理论中的散射截面。

C.4.7 Seiberg Duality and Free Pion Gas at $N_c + 2 \leq N_f < \frac{3}{2}N_c$

到此为止，我们只剩下 $N_c + 2 \leq N_f < \frac{3}{2}N_c$ 时模空间奇点 $M = B = \tilde{B} = 0$ 附近的理论没有探索过了。前面的讨论告诉我们，这个奇点上的理论不是独立介子、重子和反重子的理论，也不是一个共形场论。那此时的理论到底是什么呢？Nathan Seiberg 通过将 SQCD 和另外一个理论对偶起来的方式回答了这个问题⁶²，这也就是所谓的 **Seiberg 对偶**⁶³：

⁶²Nathan Seiberg 的原始论文是 *Electric-Magnetic Duality in Supersymmetric Non-Abelian Gauge Theories*, arXiv:hep-th/9411149。

⁶³弦论等地方的许多对偶（例如 **AdS/CFT**，也就是**规范-引力对偶**）通常指两个理论在任何能标上都具有相同的性质，但是 Seiberg 对偶仅仅对理论的 IR 性质做了论述，于是“对偶”一词在这两种情形下是具有不同意义的。事实上，“对偶”并不是一个 well-defined 的概念，不同的语境下有着不同的意义。

Seiberg Duality: 当 $N_f \geq N_c + 2$ 时, 以下两个理论具有相同的 IR 行为:

- 规范群为 $SU(N_c)$, 物质组分为 N_f 味处于规范群基础表示的夸克手征超场 Φ_I 和 N_f 味处于反基础表示的反夸克手征超场 $\tilde{\Phi}^J$, 没有超势的 SQCD。
- 规范群为 $SU(N_f - N_c)$, 物质组分为 N_f 味处于基本表示的磁夸克手征超场 q^I 、 N_f 味处于反基础表示的反磁夸克手征超场 \tilde{q}_J 和 N_f^2 个处于规范群平凡表示的对偶介子手征超场 M_I^J , 并且存在超势项 $W = \lambda \tilde{q}_J M_I^J q^I$ 的 mSQCD。

看到这个结论, 你的第一反应该是疑惑: Seiberg 是怎么知道这两个理论一定具有同样的 IR 行为的? 答案也许是出人意料的:

最佳答案: 我不知道。

对, 我不知道, 大家也都不知道 Seiberg 对偶为什么是对的。直到现在为止, 物理学家并不能严格证明 Seiberg 对偶是正确的, 而是只能通过对称性、't Hooft 反常匹配等间接手段验证它的正确性⁶⁴。为了说服你相信 Seiberg 对偶, 接下来我们就尝试用这些方法验证一下它。

Why you should believe Seiberg duality: Matching Symmetry

基本的思路是: 如果两个理论具有同样的 IR 行为, 那么两个理论一定要具有同样的全局对称性⁶⁵, 并且这些全局对称性上的't Hooft 反常也必须匹配。如果这些条件都能满足, 那么 Seiberg 对偶才有可能是正确的, 否则它一定是错误的。你可能会问: 为什么我们不比较规范对称性? 两个理论的规范对称群显然不同, 这是否意味着 Seiberg 对偶错了? 答案是否定的, 由于规范对称性只是理论中冗余的自由度, 它并不对应任何的物理实在, 于是规范对称性不同并不意味着两个理论蕴含的物理不同。

对于 SQCD 而言, 理论中具有的、物理的全局对称性是 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V \times U(1)_R$, 在其下各个场的变化关系如下:

	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_V$	$U(1)_R$
Φ	N	1	1	$\frac{N_f - N_c}{N_f}$
$\tilde{\Phi}$	1	\bar{N}	-1	$\frac{N_f - N_c}{N_f}$

(C.277)

⁶⁴事实上在, 物理学中大多数“对偶”都是没有被严格证明的——严格证明这些对偶就需要严格计算出两个理论中的关联函数, 但是在绝大多数情况下, 对偶两边的理论总有至少一个是我们不知道如何求解的强耦合理论。不过也有一部分对偶是已经被严格证明的: 这包括 sine-Gordon 理论和 Thirring 理论的对偶(凝聚态物理学家更喜欢将这个对偶称为玻色化)。在这个 notes 的后面, 我们也会严格证明二维超对称理论中的一个对偶——镜像对称。

⁶⁵反常的 (spurious 的) 对称性不是物理的, 这里仅仅考虑物理的对称性。

而对于 mSQCD 而言, 理论中也具有如下的全局对称性⁶⁶:

	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_V$	$U(1)_R$
q	\bar{N}	1	$\frac{N_c}{N_f - N_c}$	$\frac{N_c}{N_f}$
\tilde{q}	1	\bar{N}	$-\frac{N_c}{N_f - N_c}$	$\frac{N_c}{N_f}$
M	N	\bar{N}	0	$2\frac{N_f - N_c}{N_f}$

(C.278)

可以看到, 两个理论具有相同的全局对称群。除了对称群之外, 两个理论也需要描述同样的物理, 从而场能够组成的规范不变量需要被认同起来:

- 首先, mSQCD 中的对偶介子 M 可以被认为是 SQCD 中的介子 $\Phi\tilde{\Phi}$, 它们在对称群下具有完全相同的变换行为。特别地, 由于它们都是手征超场, 且具有相同的 R 荷, 于是在共形窗口中它们的标度量纲也完全一致, 从而它们在共形窗口中具有完全一致的性质——在重整化群下具有类似的跑动, 关联函数也具有几乎相同的行为。这使得我们认为对偶介子和介子在 IR 描述的是完全相同的物理对象。
- 其次, mSQCD 中的对偶重子:

$$b_{I'_1 \dots I'_{N_c}} = \epsilon_{I'_1 \dots I'_{N_c} I_1 \dots I_{N_f - N_c}} q^{I_1} \dots q^{I_{N_f - N_c}}, \quad \tilde{b}^{J'_1 \dots J'_{N_c}} = \epsilon^{J'_1 \dots J'_{N_c} J_1 \dots J_{N_f - N_c}} \tilde{q}_{J_1} \dots \tilde{q}_{J_{N_f - N_c}} \quad (C.279)$$

和 SQCD 中的重子具有完全相同的变换行为, 于是我们也能将对偶重子和重子认同起来。

最后, 我们想要检验的是两个理论是否给出相同的't Hooft 反常——如果两个理论具有相同的 IR 行为, 那么 IR 自由度及其对称变换也就完全一致, 从而在 IR 端一定会给出相同的反常, 根据't Hooft 反常匹配, 这两个理论在 UV 端也一定具有相同的反常。在这两个理论中, 所有的't Hooft 反常被列举如表 1 所示⁶⁷。

从表中可以看到, 两个理论给出的所有't Hooft 反常都相同。这是一个极度 nontrivial 的结论——如果我们随便拿两个规范理论来, 它们应该不会给出相同反常。于是给出相同反常这件事情就说明了两个理论之间一定具有什么样的联系。这大大增强了我们对 Seiberg 对偶的信心。

Why you should believe Seiberg duality: Matching e^+e^- Crossection

我们也可以通过对比两个理论在共形窗口中的可观测量来试图检验 Seiberg 对偶。当我们进入 SQCD 的共形窗口后, mSQCD 也进入了区间 $\frac{3}{2}\tilde{N}_c \leq N_f \leq 3\tilde{N}_c$ 。如果 Seiberg 对偶成立, 那么两个理论在 IR 将会随重整化群流向相同的超对称共形场论。在前一小节中, 我们已经知道如何计算这个共形场论中的 e^+e^- 散射截面, 于是接下来我们想要做的就是在两个理论中分别计算出 e^+e^- 散射截面, 看看它们是否相同。

⁶⁶由于我们确定了 $R[\theta] = -1$, 于是 $U(1)_R$ 荷不可随意通过乘一个因子的方式改变。反之, $U(1)_V$ 对称性可以随意乘一个因子, 只要 q, \tilde{q} 具有相反的 $U(1)$ 荷即可。我们此时将磁夸克的 $U(1)_V$ 荷取为 $N_c/(N_f - N_c)$, 是由于观察到 SQCD 中的重子和 mSQCD 中的“对偶重子”具有相同的 $U(1)_R$ 荷, 为了将它们认同起来, 需要它们也具有相同的 $U(1)_V$ 荷。另外, mSQCD 中我们令磁夸克处于手征群的反基础表示而非基础表示, 这是由于我们希望对偶介子和介子有类似的手征变换而导致的。

⁶⁷注意: 费米子的 R 荷是手征超场的 R 荷-1, 在反常匹配中使用的 R 荷应该是费米子的 R 荷, 并非上表中的 R 荷。

Table C.1: 't Hooft Anomalies in SQCD and mSQCD

't Hooft Anomaly		Anomaly Coefficient $\frac{1}{2}\text{Tr}[T^a\{T^bT^c\}]$
$SU(N_f)_L^3$	SQCD	$N_c A(\bar{N}) = N_c$
	mSQCD	$(N_f - N_c) A(\bar{N}) + N_f A(\bar{N}) = N_c$
$U(1)_V - SU(N_f)_L^2$	SQCD	$N_c T(\bar{N}) = \frac{N_c}{2}$
	mSQCD	$\frac{N_c}{N_f - N_c} (N_f - N_c) T(\bar{N}) = \frac{N_c}{2}$
$U(1)_R - SU(N_f)_L^2$	SQCD	$N_c \left(\frac{N_f - N_c}{N_f} - 1 \right) T(\bar{N}) = \frac{N_c(N_f - N_c)}{2N_f} = -\frac{N_c^2}{2N_f}$
	mSQCD	$(N_f - N_c) \left(\frac{N_c}{N_f} - 1 \right) T(\bar{N}) + \left(2 \frac{N_f - N_c}{N_f} - 1 \right) T(\bar{N}) = -\frac{N_c^2}{2N_f}$
$U(1)_V - \text{Gravity}^2$	SQCD	0
	mSQCD	0
$U(1)_R - \text{Gravity}^2$	SQCD	$(N_c^2 - 1) + 2N_c N_f \left(-\frac{N_c}{N_f} \right) = -(N_c^2 + 1)$
	mSQCD	$((N_f - N_c)^2 - 1) + 2(N_f - N_c) N_f \left(\frac{N_c - N_f}{N_f} \right) + N_f^2 \left(\frac{N_f - 2N_c}{N_f} \right) = -(N_c^2 + 1)$
$U(1)_V^3$	SQCD	0
	mSQCD	0
$U(1)_R^3$	SQCD	$(N_c^2 - 1) + 2N_c N_f \left(-\frac{N_c}{N_f} \right)^3$
	mSQCD	$((N_f - N_c)^2 - 1) + 2(N_f - N_c) N_f \left(\frac{N_c - N_f}{N_f} \right)^3 + N_f^2 \left(\frac{N_f - 2N_c}{N_f} \right)$
$U(1)_V^2 - U(1)_R$	SQCD	$2N_f N_c \times \left(-\frac{N_c}{N_f} \right) = -2N_c^2$
	mSQCD	$2(N_f - N_c) N_f \left(\frac{N_c - N_f}{N_f - N_c} \right)^2 \times \left(\frac{N_c - N_f}{N_f} \right) = -2N_c^2$
$U(1)_V - U(1)_R^2$	SQCD	0
	mSQCD	0

上一小节中，我们已经计算出了 SQCD 中的 e^+e^- 散射截面，于是唯一需要计算的就是 mSQCD 中的 e^+e^- 散射截面了。在 mSQCD 中，由于 q, M 的 R 荷分别是 $\frac{N_f - \tilde{N}_c}{N_f}$ 和 $2\frac{\tilde{N}_c}{N_f}$ ，于是其标度量纲也就是：

$$\Delta[q] = \frac{3}{2} \frac{N_f - \tilde{N}_c}{N_f}, \quad \Delta[M] = \frac{3\tilde{N}_c}{N_f} \quad (\text{C.280})$$

通过计算 $\int d^4x d^2\theta q^\dagger q$ 等算符的标度量纲，可以计算出这些场的场强重整化常数：

$$Z_q(\mu, \Lambda) = Z_{\tilde{q}}(\mu, \Lambda) = \left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^{\frac{3\tilde{N}_c - N_f}{N_f}}, \quad Z_M(\mu, \Lambda) = \left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^{\frac{6\tilde{N}_c - 2N_f}{N_f}} \quad (\text{C.281})$$

将 $U(1)_V$ 规范化，并将这些重整化常数代入 NSVZ beta 函数，就可以得到以下的跑动关系：

$$\begin{aligned} \frac{8\pi^2}{e^2(\mu)} &= \frac{8\pi^2}{e^2(\Lambda)} - 2\tilde{N}_c N_f \left(\frac{N_c}{\tilde{N}_c}\right)^2 \log \frac{\mu}{\Lambda} - 2\tilde{N}_c N_f \left(\frac{N_c}{\tilde{N}_c}\right)^2 \log \left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^{(3\tilde{N}_c - N_f)/N_f} \\ &= \frac{8\pi^2}{e^2(\Lambda)} - 6N_c^2 \log \frac{\mu}{\Lambda} \end{aligned} \quad (\text{C.282})$$

和 SQCD 中的结果稍一对比就会发现：两个理论的跑动耦合常数相同，那么 e^+e^- 散射截面也就自然相同，我们再一次检验了 Seiberg 对偶！

不过不要高兴地太早—— e^+e^- 散射截面相同的这件事情事实上是完全被't Hooft 反常匹配条件所蕴含的。当我们规范化 $U(1)_V$ 对称性后，'t Hooft 反常匹配条件告诉我们两个理论会给出相同的 $U(1)_V^3$ 反常。相同的反常就意味着在重定义物理的规范耦合时两个理论中会出现相同的反常行列式，从而给出相同的 NSVZ beta 函数，这自然会给出相同的 e^+e^- 散射截面。从而't Hooft 反常匹配条件已经完全蕴含了 e^+e^- 散射截面相同。我们在这里只是 explicit 地验证了这一点而已。

Why you should believe Seiberg duality: Matching Modular Space

直到现在，我们验证了 mSQCD 和 SQCD 具有相同的全局对称性，其中的场也可以组成相同的规范不变量，并且两个理论能够给出相同的't Hooft 反常。这从对称性的角度上验证了 Seiberg 对偶。接下来，我们还会从另外一个方向验证 Seiberg 对偶——Seiberg 对偶并不仅仅对 $M = B = \tilde{B}$ 这一个奇点成立，事实上整个模空间都是对应的。于是可以通过说明这两个理论的量子模空间相同来验证这一点。

对于 SQCD 而言，前面的讨论已经告诉我们其量子模空间就是经典模空间。而对于 mSQCD 而言，由于理论中存在超势，于是除了 D-方程之外，还需要考虑 F-方程。由于 F 方程蕴含 $q\tilde{q} = 0, Mq = \tilde{q}M = 0$ ，从而如果我们用代数簇来描述 mSQCD 的经典模空间，那么能够使用的规范不变单项式就只有 M, b 和 \tilde{b} ，这和 SQCD 的规范不变单项式完全相同。又由于两个理论的 D-方程完全相同，于是这些规范不变单项式上的约束也完全相同。通过和前几小节类似的讨论，我们也能看出 mSQCD 的经典模空间和量子模空间完全相同，从而 mSQCD 和 SQCD 的确具有相同的量子模空间。

这意味着什么呢？首先两个理论具有相同的模空间也就意味着两个理论的真空一一对应。并且由于在模空间的非奇异处，模空间的切空间维数就是理论中无质量物质粒子的个

数, 于是在对应的 (非奇异的) 真空附近, 两个理论也具有完全相同的无质量粒子谱。这更进一步地加强了我们对 Seiberg 对偶的信心⁶⁸。

What happens if you believe Seiberg duality

直到这里, 你应该已经开始相信 Seiberg 对偶是正确的了, 于是可以用 Seiberg 对偶来看看 $N_c + 2 \leq N_f < \frac{3}{2}N_c$ 时 SQCD 在模空间奇点处有什么行为了⁶⁹:

首先, 在 $N_c + 2 \leq N_f < \frac{3}{2}N_c$ 时⁷⁰, 对偶理论满足 $3\tilde{N}_c < N_f$ 。由于对偶介子是规范单态, 不改变 beta 函数, 于是奇点上的对偶理论应该也处于 IR 自由相。也就是说, 奇点上的 mSQCD 在 IR 是一个自由理论, 其无质量的基本自由度是自由的磁夸克、对偶介子和对偶胶子。

Seiberg 对偶告诉我们, SQCD 和这个 mSQCD 具有相同的 IR 行为, 也就是说: 奇点上的 SQCD 在 IR 端也是一个自由理论, 无质量基本自由度除了介子之外, 还存在对应磁夸克和对偶胶子的东西。问题就是: 它们在 SQCD 中究竟对应什么呢?

由于两个理论的耦合常数 g, \tilde{g} 在重整化群下反向跑动, 于是 Seiberg 对偶总会联系一个强耦合理论和一个弱耦合理论。当我们要计算强耦合理论中的某些 IR 性质时, 也可以转而在弱耦合理论中计算。这样的对偶被物理学家称为**强-弱对偶**, 或者 **S-对偶**。而电动力学中的**电磁对偶**也具有类似的性质。电动力学中, 对偶理论中的电荷在原理论中对应磁单极子, 而在量子场论中最有可能出现的磁单极子就是 Polyakov-'t Hooft 单极子⁷¹。从而虽然不能严格证明, 但是我们猜测磁夸克在 SQCD 中的对应是某种孤子。并且, 对偶胶子在 SQCD 的对应也不是胶子的某些分量, 而是经由某种机制构成的复合粒子。由于此时的 IR 理论是介子、孤子和不知道什么东西的复合粒子的 IR 自由理论, 有些物理学家也将其不严格地冠以“**自由 π 介子气体**”之名。

接下来, 让我们看看奇点上的 SQCD 此时处于什么 IR 相下。我们知道, 对偶理论中两个试探色荷之间的相互作用势满足 $V(r) \sim \tilde{g}^2(r^{-1})/r$, 而如果在此时的 SQCD 中放入两个相距很远的试探“色”荷, Seiberg 对偶告诉我们它们之间的相互作用势也应该有行为 $\tilde{g}^2(r^{-1})/r$, 这很像 IR 自由相中理论的相互作用势。但是由于 IR 自由相中的试探粒子是携带 $SU(N_c)$ 荷的, 而此时的试探粒子携带的荷是通过动力学产生的、刻画低能下复合自由度之间相互作用的 $SU(N_f - N_c)$ 规范对称性下的荷, 于是理论此时也不处于平常的 IR 自由相中。事实上, 理论此时的 IR 行为是超对称理论独有的新 IR 相, 称为**自由磁相**。

前面说过, 除了奇点上的理论之外, 其他真空处的理论也应该是相互对偶的。在一个一般的真空中, SQCD 处于禁闭相, 而由于场 q, \tilde{q} 存在真空期待值, 于是 mSQCD 处于 Higgs 相中。这也就告诉我们: 一个弱耦合的、处于 Higgs 相的理论和一个处于强耦合的、禁闭相的理论具有相同的物理, 这在某种程度上也彰显了 Higgs 相和禁闭相的紧密关系。

明白了 $N_c + 2 \leq N_f < \frac{3}{2}N_c$ 时 Seiberg 对偶能告诉我们什么后, 我们可以尝试增大 N_f , 看看 Seiberg 对偶又能告诉我们什么。当我们进入 SQCD 的共形窗口后, mSQCD 也进入了区间 $\frac{3}{2}\tilde{N}_c \leq N_f \leq 3\tilde{N}_c$ 。此时奇点上的 SQCD 在 IR 会跑动到一个相互作用的共形场论中, 从而 Seiberg 对偶也告诉我们: 这一区间上 mSQCD 在 IR 也是同一个相互作用的共形场论。再增大 N_f 时, SQCD 将会进入 IR 自由相, 而 mSQCD 则进入区间 $N_f < \frac{3}{2}N_c$, 此

⁶⁸这并没有严格证明 Seiberg 对偶, 因为这确定了非奇异处的 IR 行为, 我们还是不知道奇异点处两个理论发生了什么。不过经过这些讨论, 你是不是也开始相信奇异点处两个理论也具有相同的行为呢?

⁶⁹心诚则灵。

⁷⁰这一区间存在本身就意味着 $N_c > 2$ 。对于 $N_c \leq 2$ 的理论, 前面的讨论已经完全明确了其 IR 行为。

⁷¹如果你不太明白这是怎么回事, 可以看看附录 B。

时 mSQCD 是强耦合的, 它在 IR 下会跑动到一个自由的 SQCD 中。到此为止, 我们就完全明确了 SQCD 在各个 N_f 处的 IR 行为。可以将其总结如下:

Phase Structure of SQCD

- 在 $N_f = 0$ 时, 理论具有 N_c 个不同的真空态, 每个真空附近的理论都处于禁闭相, 并且不存在无质量的自由度。
- 在 $0 < N_f < N_c$ 时, 理论中出现了真空失控的现象, 不存在任何真空态。此时讨论无质量自由度和 IR 相都是无意义的。
- 在 $N_f = N_c$ 时, 理论中有无穷多个真空态, 构成一个量子的模空间。这个量子的模空间和经典模空间相比存在变形, 这导致模空间上不存在奇异性。在所有真空中, 理论中的无质量自由度都是满足关系 $\det M - B\bar{B} = \Lambda^{2N_c}$ 的介子、重子和反重子, 并且此时至少有一个全局对称性会发生破缺, 呈现禁闭相或者 Higgs 相, 并且这两个 IR 相之间可以连续过渡。
- 在 $N_f = N_c + 1$ 时, 理论中也存在量子的模空间, 此时量子模空间和经典模空间完全相同, 于是存在奇点。对于不在奇点上的真空, 其附近的理论处于禁闭相, 无质量自由度是满足经典约束的介子、重子和反重子。而对于奇点上的真空, 其附近的理论处于无手征对称性破缺的禁闭中, 无质量自由度是独立的介子、重子和反重子。
- 在 $N_c + 2 \leq N_f < \frac{3}{2}N_c$ 时, 量子模空间和经典模空间相同, 非奇点上的理论也和 $N_f = N_c + 1$ 时类似。但是奇点上的理论处于自由磁相, 无质量自由度是磁夸克、对偶介子和对偶胶子。
- 在 $\frac{3}{2}N_c \leq N_f < 3N_c$ 时, 理论处于共形窗口。量子模空间和经典模空间相同, 非奇点上的理论依然禁闭, 但是奇点上的理论处于共形相, 是一个相互作用的共形场论。
- 在 $N_f \geq 3N_c$ 时, 量子模空间和经典模空间相同, 非奇点上的理论处于 Higgs 相, 而奇点上的理论处于 IR 自由相, 无质量自由度就是夸克和胶子本身。

References

- [1] David Tong, *Lecture Notes on Supersymmetry*, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/susy.html>
- [2] M. Rummel, *The Affleck-Dine-Seiberg Superpotential*, from workshop seminar "Vacuum Transitions"
- [3] I. Affleck, M. Dine, N. Seiberg, *Dynamical supersymmetry breaking in 4 dimensions and its phenomenological implications*, *Nucl. Phys.* **B256** (1985) 557-599
- [4] J. Terning, *TASI-2002 Lectures: Non-perturbative Supersymmetry*, arXiv:hep-th/0306119
- [5] Nathan Seiberg, *Electric-Magnetic Duality in Supersymmetric Non-Abelian Gauge Theories*, arXiv:hep-th/9411149

- [6] Andre de Gouvea, Alexander Friedland, Hitoshi Murayama, *Seiberg Duality and e^+e^- Experiments*, arXiv:hep-th/9810020
- [7] Juan Maldecena, Alexander Zhiboedov, *Constraining conformal field theories with a higher spin symmetry*, arXiv:hep-th/1112.1016
- [8] Kenneth Intriligator, Brian Wecht, *The Exact superconformal R symmetry maximizes a*, arXiv:hep-th/0304128
- [9] Kenneth Intriligator, Nathan Seiberg, David Shih, *Dynamical SUSY Breaking in Meta-Stable Vacua*, arXiv:hep-th/0602293

C.5 Exact Solution of $\mathcal{N} = 2$ Super Yang-Mills Theory

C.5.1 $\mathcal{N} = 2$ SYM and Seiberg-Witten Duality

为了讨论 $\mathcal{N} = 2$ 纯 $SU(2)$ 规范理论的严格解，我们首先需要明白如何构建具有 $\mathcal{N} = 2$ 超对称的理论。正如第一节所讲，在四维时空中， $\mathcal{N} = 2$ 的超对称代数总可以被写成如下的形式：

$$\{Q_\alpha^I, Q_\beta^{J\dagger}\} = -2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \delta^{IJ}, \quad \{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} = \epsilon^{IJ} \epsilon_{\alpha\beta} Z \quad (\text{C.283})$$

由于中心荷 Z 的缘故，我们不是很好将这些比 $\mathcal{N} = 1$ 多出的超对称生成元也实现为超空间上的平移，于是在讨论 $\mathcal{N} = 2$ 超对称时，我们通常会依然使用 $\mathcal{N} = 1$ 的超空间，将 $Q^1, Q^{1\dagger}$ 看作超空间上的平移，而 $Q^2, Q^{2\dagger}$ 则看作是理论的额外对称性。从这个角度看， $\mathcal{N} = 2$ 的超对称理论就是一个具有额外对称性的 $\mathcal{N} = 1$ 理论。

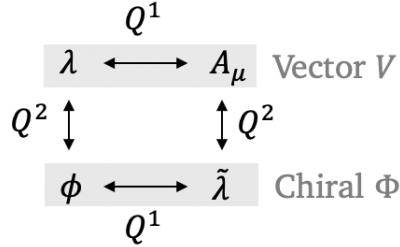
为了构造 $\mathcal{N} = 2$ 的规范理论，我们还需要知道这个规范理论中能够具有什么样的自由度。对于规范场而言，我们关注的是体系中的无质量超多重态。第一节的讨论告诉我们：一个无质量超多重态由以下的产生湮灭算符作用在“真空” $|\lambda_0\rangle$ 上生成的态及其 CPT 共轭给出：

$$a_I := \frac{1}{2\sqrt{E}} Q_2^I, \quad a_I^\dagger := \frac{1}{2\sqrt{E}} Q_2^{\dagger I} \quad (\text{C.284})$$

而这样产生的态具有从 λ_0 到 $\lambda_0 + \mathcal{N}/2$ 的螺旋度。于是在 $\mathcal{N} = 2$ 的理论中，螺旋度不超过 1 的无质量超多重态只有 $(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 。由于规范场一定处于这个超多重态中，于是这也被称为 $\mathcal{N} = 2$ 的规范超多重态。

对于有质量的超多重态而言，如果中心荷 Z 满足 $Z = m$ ，那么理论中就可能出现 BPS 超多重态，其螺旋度构成为 $(-\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ 。不过由于现在我们只关注纯规范理论，于是我们可以暂时放下对 BPS 超多重态的讨论。

上面的讨论告诉我们，规范场一定处于 $\mathcal{N} = 2$ 规范超多重态中。而这样的 $\mathcal{N} = 2$ 规范超多重态可以分为 $\mathcal{N} = 1$ 多重态 $(-1, -1/2, 1/2, 1)$ 和 $(-1/2, 0, 0, 1/2)$ 的直和，它们在超空间中分别对应规范超场 V 和手征超场 Φ 。也就是说，如果我们用 $\mathcal{N} = 1$ 超空间去描述一个 $\mathcal{N} = 2$ 的规范理论，那么其中一定存在一个处于规范群伴随表示中的手征超场 Φ ，它和规范场 V 一并组成一个 $\mathcal{N} = 2$ 超多重态。这两个超场也就是 $\mathcal{N} = 2$ 纯规范理论中的基本自由度。这两个超场的分量可以用以下的超对称变换联系起来：



知道了理论中能够有什么样的基本自由度之后，我们就需要试图写出这个理论的 Lagrangian。事实上，具有 R-对称性的 $\mathcal{N} = 2$ 理论十分易于构造。在 $\mathcal{N} = 2$ 情形中，一般的 R-对称性是 $U(2)_R$ 对称性，也就是对超对称生成元 $(Q^1, Q^2)^T$ 做一个 $U(2)$ 旋转。由于 $U(2)_R$ 对称性可以被拆成我们熟悉的、作用在 Q^1 上的 $U(1)_R$ 和一个 $SU(2)_R$ 对称性，于是一个具有 $U(2)_R$ 对称性的理论也就相当于一个添加了额外 $SU(2)_R$ 对称性的、具有 $U(1)_R$ 对称性的 $\mathcal{N} = 1$ 理论。

对于上面给出的超场 Φ, V 而言，这个 $SU(2)_R$ 变换实际上也就是对 $(\lambda, \tilde{\lambda})^T$ 做一个 $SU(2)$ 旋转。并且，倘若我们希望构造出一个 $\mathcal{N} = 2$ 的、 $SU(2)_R$ 不变的理论，我们实际上也只需要写出一个 Φ, V 不变的理论，并额外要求费米子 $\lambda, \tilde{\lambda}$ 具有 $SU(2)$ 不变性即可。此时 $\mathcal{N} = 1$ 不变性和 $SU(2)_R$ 不变性自动保证了这些超场满足正确的 $\mathcal{N} = 2$ 代数。通过对含有伴随表示物质场 Φ 的 $\mathcal{N} = 1$ 规范理论施加这个要求，我们就得到了 $\mathcal{N} = 2$ 纯规范理论的 Lagrangian：

$$\mathcal{L} = \frac{\text{Im } \tau}{4\pi} \int d^4\theta \text{tr}(\Phi^\dagger e^{2V} \Phi) + \frac{\tau}{8\pi i} \int d^2\theta \text{tr}(W^\alpha W_\alpha) + \text{h.c.} \quad (\text{C.285})$$

这就是下面我们将严格求解的理论。

$\mathcal{N} = 2$ Effective Field Theory

由于我们需要得到的是理论在 IR 下的有效作用量，于是在前面这个 Lagrangian 之外，我们还希望知道这个有效作用量有什么样的形式。首先，一个一般的满足规范不变性的 $\mathcal{N} = 1$ 有效作用量可以写为：

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{16\pi} \int d^4\theta K(\phi, \phi^\dagger e^{2V}) + \int d^2\theta W(\phi) - \frac{i}{8\pi} \int d^2\theta \tau_{ab}(\phi) W^{a\alpha} W_\alpha^b + \text{h.c.} \quad (\text{C.286})$$

其中规范不变性要求 W 满足 $\frac{\partial W}{\partial \phi_i} (T^a)_i^j \phi_j = 0$ 。在下面的讨论中，我们的规范对称性通常都是 $U(1)^N$ 对称性，此时满足这个要求的唯一可能就是 $W = 0$ 。从而在下面的讨论中，我们将认为物质场不具有超势项。另外，我们将认为不存在额外的物质超多重态，所有的超场都属于一个 $\mathcal{N} = 2$ 的规范超多重态。倘若我们要求理论具有 $\mathcal{N} = 2$ 的超对称性，那么 $SU(2)_R$ 将要求这个 Lagrangian 展开后 $\lambda \partial \lambda$ 和 $\tilde{\lambda} \partial \tilde{\lambda}$ 的系数一定相等，这给出了以下的约束：

$$\text{Im}(\tau_{ab}) = \frac{\tau_{ab}(\phi) - \tau_{ab}^\dagger(\phi^\dagger)}{2i} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial \phi^a \partial \phi^{b\dagger}} \quad (\text{C.287})$$

对这个约束的两边同时求 ϕ_k 的导数，这也就给出：

$$\frac{\partial \tau_{ab}(\phi)}{\partial \phi^c} = i \frac{\partial^3 K(\phi, \bar{\phi})}{\partial \phi^c \partial \phi^a \partial \phi^{b\dagger}} \quad (\text{C.288})$$

这也就是说, $\frac{\partial K}{\partial \phi^{b\dagger}}$ 是一个 ϕ 的全纯函数, 而 τ_{ab} 可以被写为这个函数的二次导数:

$$\tau_{ab}(\phi) = \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi^a \partial \phi^b}, \quad K(\phi, \phi^\dagger) = i \left(\frac{\partial F^\dagger}{\partial \phi^{a\dagger}} \phi^a - \phi^{a\dagger} \frac{\partial F}{\partial \phi^a} \right) \quad (\text{C.289})$$

这个函数 $F(\phi)$ 通常被我们称为 **prepotential**。利用 prepotential, 我们可以将一个一般的 $U(1)^N$ 规范理论的 Lagrangian 写为:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{i}{16\pi} \int d^4\theta \phi^{a\dagger} e^{2V} \frac{\partial F}{\partial \phi^a} - \frac{i}{8\pi} \int d^2\theta \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi^a \partial \phi^b} W^{a\alpha} W_\alpha^b + \text{h.c.} \quad (\text{C.290})$$

这就是一个一般的 $U(1)^N$ 规范理论的 Lagrangian。可以看到, 只要求解出了 prepotential 这一全纯函数, 我们就能同时得知这一理论的 IR 动力学。

Seiberg-Witten Duality

在下面的讨论中, 我们用到的情况实际上比前面讨论中的还要简单: 由于 $SU(2)$ 被 Higgs 机制破缺为了 $U(1)$, 于是我们只会考虑理论的规范对称性是 $U(1)$ 的情形, 并且我们的理论中只包含一个 $\mathcal{N} = 2$ 规范超多重态 (ϕ, V) 。此时这个有效理论的 Lagrangian 可以完全被一组 (ϕ, F) 刻画:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{i}{16\pi} \int d^4\theta \phi^\dagger e^{2V} F'(\phi) - \frac{i}{8\pi} \int d^2\theta F''(\phi) W^\alpha W_\alpha + \text{h.c.} \quad (\text{C.291})$$

此时, 有效理论的 Lagrangian 有一个很重要的性质——对于一组 (ϕ, F) 给出的理论, 还存在无穷多组不同的 (ϕ, F) 给出的理论描述相同的物理。也就是说, 存在无穷多个与这个理论相对偶的理论。这个性质就被称为 **Seiberg-Witten 对偶**。为了看到这一点, 可以考虑如下的对偶变换:

$$\phi_D := \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial F'_D(\phi_D)}{\partial \phi_D} := -\phi \quad (\text{C.292})$$

在这一组对偶变换下, Lagrangian 中的手征超场项如下变化:

$$\int d^4\theta \phi^\dagger e^{2V} F'(\phi) = - \int d^4\theta F'_D(\phi_D^\dagger) e^{2V} \phi_D = - \left[\int d^4\theta \phi_D^\dagger e^{2V} F'_D(\phi_D) \right]^\dagger \quad (\text{C.293})$$

也就是说, $i \int d^4\theta \phi^{a\dagger} e^{2V} \frac{\partial F}{\partial \phi^a} + \text{h.c.}$ 这一整体写成对偶场后仍然具有相同的形式。对于规范超场项而言, 讨论就稍稍复杂一些了。如果我们直接进行相应的替换, 由于:

$$F''(\phi) = \frac{d^2 F}{d\phi^2} = \frac{d\phi_D}{d\phi} = \left[\frac{d\phi}{d\phi_D} \right]^{-1} = -\frac{1}{F'_D(\phi_D)} \quad (\text{C.294})$$

于是直接得到的将会是正比于 $\frac{1}{F'_D} WW$ 的一项。这似乎并不是我们想要的结论, 不过别忘了: 这里的规范超场 V 和手征超场 ϕ 处于同一个 $\mathcal{N} = 2$ 超多重态, 而不是和 ϕ_D 处于同一个超多重态。从而这里的 W 并不是对偶理论中的规范场。

为了得到对偶理论中的规范场, 我们可以采用以下的 trick: 将 W , 而非 V 视为路径积分中被积分掉的场。此时由于 W 包含 $F_{\mu\nu}$, 于是 Bianchi 恒等式要求 W 满足约束

$\text{Im}(D_\alpha W^\alpha) = 0$, 在此之外它并不受任何约束。从而在路径积分中, 积分掉 V 等价于积分掉 W 和一个保证 W 满足这一约束的、实的 Lagrange 乘子场 V_D :

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}V \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{i}{8\pi} \int d^2\theta F''(\phi) WW + \text{h.c.} \right) \right] \\ & \sim \int \mathcal{D}W \mathcal{D}V_D \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{i}{8\pi} \int d^2\theta F''(\phi) W^\alpha W_\alpha - \frac{i}{16\pi} \int d^4\theta V_D D_\alpha W^\alpha + \text{h.c.} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.295})$$

Lagrangian 中多出来的这一项又能被改写为:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{16\pi} \int d^4\theta V_D D_\alpha W^\alpha &= \frac{i}{16\pi} \int d^4\theta D_\alpha V_D W^\alpha = -\frac{i}{16\pi} \int d^2\theta \bar{D}^2(D_\alpha V_D) W^\alpha \\ &= \frac{i}{4\pi} \int d^2\theta (W_D)_\alpha W^\alpha = -\frac{i}{4\pi} \int d^2\theta W_D^\alpha W_\alpha \end{aligned} \quad (\text{C.296})$$

其中在第一个等号处, 我们仅仅是做了个分部积分; 在第二个等号处, 我们利用了手征超场满足的关系 $\int d^4\theta \Phi = -\int d^2\theta \bar{D}^2\Phi$; 而第三个等号相当于用这个新的超场 V_D 定义了类似的 $(W_D)_\alpha := -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V_D$ 。从而上面这个路径积分也就变为了:

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}W \mathcal{D}V_D \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{i}{8\pi} \int d^2\theta (F''(\phi) W^\alpha W_\alpha + 2W_D^\alpha W_\alpha) + \text{h.c.} \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}V_D \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{i}{8\pi} \int d^2\theta \frac{1}{F''(\phi)} W_D^\alpha W_{D\alpha} + \text{h.c.} \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}V_D \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{i}{8\pi} \int d^2\theta F_D''(\phi) W_D^\alpha W_{D\alpha} + \text{h.c.} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.297})$$

也就是说, 规范场项在写成对偶场后也具有相同的形式。从而我们说明了: 对偶场 (ϕ_D, F_D) 给出的理论和原理论 (ϕ, F) 给出相同的路径积分, 从而蕴含相同的物理, 从而两个理论的的确是对偶的。从耦合常数满足的关系 $\tau = -1/\tau_D$ 中可以看出, 这个对偶联系了一个强耦合理论和一个弱耦合理论, 从而是一个 S-对偶。事实上, 我们在后面的讨论中将看到: 这个对偶会将 ϕ 的电荷和磁荷互换, 从而正是我们熟悉的电磁对偶。

这个对偶也可以被写为更加简洁的形式: 由于 Lagrangian 中只出现了 F 的导数, 所以一个理论也就可以被一组 $(F'(\phi), \phi)$ 所确定。这个对偶变换也就相当于对 $(F'(\phi), \phi)$ 做了以下的变换:

$$\begin{pmatrix} F'(\phi) \\ \phi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'(\phi) \\ \phi \end{pmatrix} \quad (\text{C.298})$$

在上面所给出的理论之外, 还存在其他理论与原本的理论对偶。让我们考虑以下的变换:

$$\begin{pmatrix} F'(\phi) \\ \phi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'(\phi) \\ \phi \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{Z} \quad (\text{C.299})$$

这个变换将 $F''(\phi)$ 平移了一个整数 b , 而这也就相当于将 Θ 角平移了 $2b\pi$ 。由于 Θ 角是周期的, 于是变换前后 $(F'(\phi), \phi)$ 当然描述相同的物理。由于矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

生成整个 $SL(2, \mathbb{Z})$ 群⁷²，于是任意如下的变换都给出与原理论对偶的理论：

$$\begin{pmatrix} F'(\phi) \\ \phi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'(\phi) \\ \phi \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \quad (C.300)$$

这个性质就被我们称为 **Seiberg-Witten 对偶**。在后面求解 $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ 规范理论时，这个对偶将起到至关重要的作用。

C.5.2 Dynamics of $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ SYM

Perturbative Approach

接下来，我们就正式开始试图求解这个 $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ 规范理论。和前面对 SQCD 的讨论一样，我们首先希望做的是看看这个理论的经典模空间是什么样的。由于不存在超势，于是 F-方程显然满足，我们只需要关注理论的 D-方程：

$$\phi^{\dagger a} (T_{\text{Adj}}^c)^{ab} \phi^b = -[\phi^{\dagger}, \phi]^c = 0 \quad (C.301)$$

其中 ϕ 是场 Φ 的标量分量。为了找到 D-方程对应什么样的真空解，我们可以将 ϕ 展开为：

$$\phi = (a^a + ib^a)T^a, \quad a^a, b^a \in \mathbb{R} \quad (C.302)$$

并且通过合适的 $SU(2)$ 旋转，我们总能将 a^1, a^2 取为 0。此时 D-方程便蕴含了 $b^1 = b^2 = 0$ 。如果我们定义 $a^3 + ib^3 \equiv a$ ，那么就得到：满足 D-方程的真空总可以通过 $SU(2)$ 转动化为以下的形式：

$$\langle \phi \rangle = aT^3 = \frac{1}{2}a\sigma^3 \quad (C.303)$$

其中 a 是一个任意的复数。这也就告诉我们，理论的经典模空间具有 \mathbb{C} 的拓扑。和前面对 SQCD 的讨论类似，我们也可以用规范不变的单项式参数化这个模空间。在这个理论中，唯一的规范不变的单项式就是：

$$u = \text{tr } \phi^2 \quad (C.304)$$

我们可以将其取为模空间上的坐标。在经典水平上，这个单项式也就是 $\frac{1}{2}a^2$ 。

如果上面讨论的模空间在量子情形下仍然保持，那么这个真空期望值会将 $SU(2)$ 规范对称性破缺到 T^3 对应的 $U(1)$ 子群，其他两个方向对应的“W 玻色子”会得到正比于 a 的质量 $m_W = \sqrt{2}g|a|$ 。从模空间中也可以看出，理论的 IR 自由度也就是 a 及其超对称伴子，其他方向的激发也会具有正比于 a 的质量。由于超对称并没有破缺，于是低能理论也应该具有 $\mathcal{N} = 2$ 的超对称性，这些剩余的 IR 自由度和剩余的规范场就一定组成一个 $U(1)$ 的 $\mathcal{N} = 2$ 超多重态。

当然，前面这些讨论都是完全经典的，并没有考虑到量子效应对模空间的影响。在量子理论中，如果我们仍然定义：

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{2}a\sigma_3, \quad u = \text{tr} \langle \phi^2 \rangle \quad (C.305)$$

那么 a 和 u 之间的关系就不仅仅是简单的 $u = \frac{1}{2}a^2$ ，而会受量子修正的影响。不过由于我们只有一个规范不变的全纯单项式，于是如果量子模空间存在，其上的坐标也一定是 u 。

⁷²这意味着这些矩阵互相进行任意次矩阵乘法后能够给出所有行列式为 1，且元素为整数的 2×2 矩阵。对于这件事情的一个证明可以参见讲义 [https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/SL\(2,Z\).pdf](https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/SL(2,Z).pdf)。

利用微扰论，我们也可以一瞥量子理论的性质。由于这个理论中只存在一个处于伴随表示中的手征超场，于是其单圈 beta 函数就是：

$$\frac{d\tau(\mu)}{d\log\mu} = \frac{i}{2\pi} \left(3C(A) - \sum_i T(R_i) \right) = \frac{2i}{\pi} \quad (C.306)$$

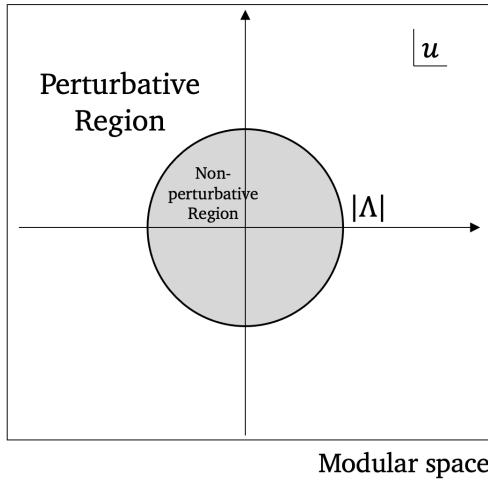
从这个 beta 函数中，我们也可以定义一个重整化群不变的标度：

$$\Lambda := \mu \exp \left(\frac{i\pi}{2} \tau(\mu) \right) \quad (C.307)$$

用这个新的标度参量，单圈跑动耦合常数就可以被写为：

$$\tau(\mu) = \frac{2i}{\pi} \log \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right) \quad (C.308)$$

在微扰论适用的范围内，量子修正比起经典阶的贡献小很多，于是 W 玻色子和垂直于模空间方向的激发的质量都约为 a 。如果我们将 a 以上的能标都积分掉，剩下的就只有模空间上的无质量自由度，得到的应该就是一个有效理论。倘若我们希望能够微扰地计算出这个有效理论的有效作用量，那么此时的 $\tau(a)$ 就需要远大于 0，这也就对应 $|a| \gg \Lambda$ 。利用前面定义的模空间坐标 u ，由于微扰区间中 $u = \frac{1}{2}a^2$ 还近似成立，于是这对应模空间中 $|u| \gg \Lambda^2$ 的区域：



接下来就让我们在 $|a| \gg \Lambda$ 这一区域中计算出这个有效作用量。在树图阶，如果我们想要计算出这个有效理论的 Lagrangian，就可以将原 Lagrangian 中和高能场有关的部分全部扔掉，仅仅留下低能自由度 $a = \phi^3$ 和 U(1) 规范场，后者可以被我们参数化为：

$$F_{\mu\nu}^{\text{SU}(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{diag}(F_{\mu\nu}^{\text{U}(1)}, -F_{\mu\nu}^{\text{U}(1)}) \quad (C.309)$$

将这个规范场代入原本的 Lagrangian，就得到了以下的动力学项：

$$\int d^2\theta \frac{\tau(a)}{8\pi i} \text{tr}(W_{\text{SU}(2)}^\alpha W_\alpha^{\text{SU}(2)}) = \int d^2\theta \frac{\tau(a)}{8\pi i} W_{\text{U}(1)}^\alpha W_\alpha^{\text{U}(1)} \quad (C.310)$$

根据前面一小节的讨论, $\mathcal{N} = 2$ 不变性要求 a 和 $U(1)$ 规范场同处一个 $\mathcal{N} = 2$ 超多重态, 描述它们的有效作用量一定具有以下的形式:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{i}{16\pi} \int d^4\theta a^\dagger e^{2V} F'(a) - \frac{i}{8\pi} \int d^2\theta F''(a) W^\alpha W_\alpha + \text{h.c.} \quad (\text{C.311})$$

匹配规范场动力学项的系数, 我们就得到了 $|a| \gg \Lambda$ 时的 prepotential⁷³:

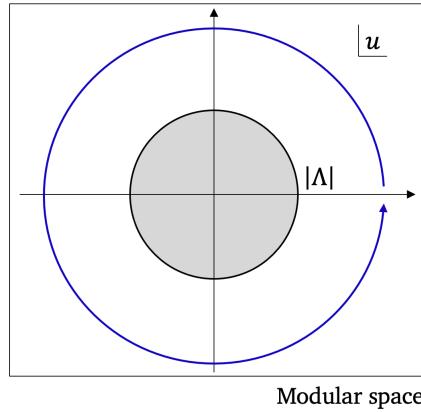
$$F(a) = \frac{i}{\pi} a^2 \log \frac{a}{\Lambda} \quad (\text{C.312})$$

知道了 prepotential 之后, 我们就完全确定了这个低能有效作用量。借助微扰论, 我们已经明白了模空间区域 $|u| \gg \Lambda^2$ 中任意真空附近的 IR 动力学。在下面的讨论中, 我们会看到: 通过理论在 $|u| \gg \Lambda^2$ 中的这些行为, 我们也可以得到非微扰区间中 IR 有效作用量的严格解。

Monodromy at Infinity

为了得到 IR 有效作用量的严格解, 我们只需要得知模空间上任意一点 u 处对应的 $(F'(u), a(u))$ 。为此, 我们的思路是: 根据前面给出的微扰 IR 作用量, 可以发现在绕模空间 $|u| \rightarrow \infty$ 的围道一周后, IR 有效理论 $(F'(a), a)$ 会从原本的理论变化到另一个与原理论对偶的理论。通过这个事实, 我们能够给出模空间上的奇点结构, 也能得知函数 $(F'(u), a(u))$ 满足什么样的性质。知道了这些性质之后, 我们便可以利用椭圆曲线的方法构造出满足这些性质的解 $(F'(u), a(u))$ 。

遵循这个思路, 让我们先考虑绕以下围道一周后 IR 有效理论会有什么样的变化:



在 $|u| \rightarrow \infty$ 时, 耦合常数无限趋近于 0, 于是微扰论是理论的精确描述, $(F'(u), a(u))$ 在 $|u| \rightarrow \infty$ 时就精确等于:

$$a(u) = \sqrt{2u}, \quad F'(u) = \frac{2i}{\pi} \sqrt{2u} \log \frac{\sqrt{2u}}{\Lambda} \quad (\text{C.313})$$

众所周知, $\sqrt{2u}$ 是一个多值函数。在 u 从 ue^{i0} 缓慢旋转到 $ue^{2i\pi}$ 的过程中, 我们实际上从一个单值分枝跨越到了另一个单值分枝, 这使得 a 和 F' 有如下的变化:

$$a \rightarrow \sqrt{2ue^{2i\pi}} = -a, \quad F' \rightarrow \frac{2i}{\pi}(-a) \log \frac{ae^{i\pi}}{\Lambda} = -F'(a) + 2a \quad (\text{C.314})$$

⁷³ 其中我们省略掉了不包含 a/Λ 的项, 它们相比这一项而言太小了。

这也就相当于做了一个如下的 Seiberg-Witten 对偶变换：

$$\begin{pmatrix} F'(a) \\ a \end{pmatrix} \rightarrow M_\infty \begin{pmatrix} F'(a) \\ a \end{pmatrix}, \quad M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (C.315)$$

这里定义的矩阵 M_∞ 将被我们称为无穷远处的 **monodromy**。倘若我们将无穷远点添加到复平面中，使得复平面变为复球面，那么前述的路径也就相当于绕着无穷远点移动了一圈。而函数 $a(u), F'(u)$ 的值在这个移动下发生变化意味着这些函数是多值的，并且无穷远点是一个枝点。从无穷远点出发，一定存在一条割线连接不同的单值分枝。由于这条割线一定会从无穷远点延伸到复平面上某个点为止，于是函数 $a(u), F'(u)$ 在复平面上应该至少还有一个奇点。由于在微扰区间中不存在这样的奇点，那么它一定处于非微扰区域中。在下面的讨论中，我们就可以用这个事实来揭示出理论在非微扰区间中的行为。

Monodromy of Singularities

既然非微扰区域中一定存在奇点，那么问题就是：存在多少个奇点呢？最简单的猜测当然是只存在一个奇点，不过我们接下来就要证明：这种情形是不物理的，非微扰区域中至少存在两个奇点。

为了证明这一点，我们首先注意到：除了 $SU(2)_R$ 对称性之外，理论在经典层面上还存在一个 $U(1)_R$ 对称性，在其下 ϕ 具有 R-荷 2， $\lambda, \tilde{\lambda}$ 具有 R-荷 1，而 A_μ 具有 R-荷 0。由于理论中存在两个具有 R-荷 1 的左手费米子，于是在量子层面上，这个 $U(1)_R$ 对称性是反常的。在一个 $U(1)_R$ 变换 $e^{i\alpha}$ 下，我们需要对 Θ 角做以下的平移才能抵消路径积分测度的变换⁷⁴：

$$\Theta \rightarrow \Theta - 2\alpha \times 2C(A) = \Theta - 8\alpha \quad (C.316)$$

由于 Θ 角是周期的，于是反常会将 $U(1)_R$ 对称性破缺为一个分立的 \mathbb{Z}_8 对称性，这个 \mathbb{Z}_8 对称性也应该被低能有效作用量所继承。由于 u 的定义是 $\text{tr}\phi^2$ ，从而一个 \mathbb{Z}_8 变换 $\phi \rightarrow e^{i\pi/2}\phi$ 会将 u 变为 $-u$ 。从而如果低能有效作用量继承这个对称性，那么模空间上点 u 的性质应该和 $-u$ 的性质完全相同。

于是，如果 u_0 是 $a(u), F'(u)$ 的一个奇点，那么 $-u_0$ 也应该是一个奇点。从而如果非微扰区域中只存在 1 个奇点，那么它一定处于 $u = 0$ 处。如果模空间上只有这两个奇点，那么我们可以将任何绕原点一周的围道变形到无穷远处的围道。由于这个变形不经过任何奇点，于是它给出的 monodromy 自然也不变。由于在无穷远处， $a^2(u)$ 并没有任何 monodromy，于是此时绕模空间上的任何围道一周， $a^2(u)$ 都会回到自身，这告诉我们 $a^2(u)$ 在整个 u 平面上是解析的。由于它在微扰区域中都是 $a^2 = 2u$ ，解析函数的唯一性告诉我们在微扰区域中 $a^2 = 2u$ 也成立。

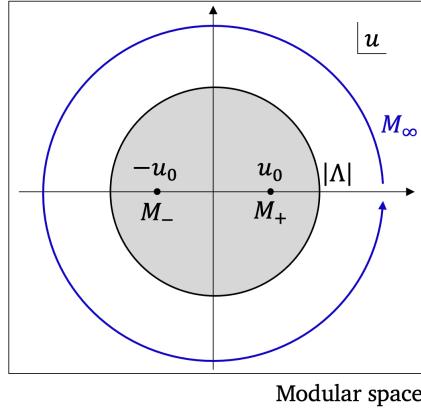
由于 $a^2 = 2u$ 在整个模空间上都成立，于是 $F'(a)$ 在整个 a 平面上也只在 $a = 0, a = \infty$ 两个点上有奇异性，这蕴含 $\tau = \frac{dF'(a)}{da}$ 是一个亚纯函数。而在数学上可以证明：对于一个亚纯函数而言，其虚部不能有下界，否则它将会是一个常数。这告诉我们， $\text{Im}\tau(a) = \frac{4\pi}{g^2}$ 不可能在整个 a 平面上总是正的。也就是说，总存在一个真空，其附近的理论中规范场的动力学项具有错误的符号，这会导致理论的能量不存在下界，从而理论整体是不稳定的！这显然不是物理上允许的情况，于是非微扰区域中不能只有一个奇点。

既然非微扰区域中不能只有一个奇点，我们的下一个猜测⁷⁵就是非微扰区域中存在两个

⁷⁴第一个 2 是因为理论中有两个左手费米子，而后面的因子 $2C(A)$ 来自于反常系数中的 $\text{Tr}[T_A^a T_A^b]$ 。

⁷⁵事实上，非微扰区间中很有可能只有两个奇点，我们马上就会看到这是为什么。

奇点 $u_0, -u_0$, 如果逆时针绕它们一圈, $(F'(a), a)$ 的变化可以用 monodromy 矩阵 M_+, M_- 刻画:



由于 u 回到同一个真空时, 理论需要回到一个与原理论对偶的理论, 从而 $M_{\pm} \in SL(2, \mathbb{Z})$ 。由于沿着无穷远的围道可以被分为先绕 $-u_0$ 转一周, 紧接着绕 u_0 转一周, 于是 M_{\pm} 需要满足:

$$M_{\infty} = M_+ M_- \quad (\text{C.317})$$

我们希望计算出这两个 monodromy 矩阵, 这样就能对 $a(u), F'(u)$ 这两个函数有更深刻的理解。为此, 我们需要思考一下这些奇点在物理上意味着什么。一个想法是: 当模空间本身存在奇点时, 这一点上所有函数都应该是不良定义的, 于是 $a(u), F'(u)$ 的这些奇点可能意味着模空间本身存在奇点。在前面的讨论中, 我们看到: 模空间上的奇点意味着理论中存在新的无质量自由度。由于理论中不可能出现任何新的基本激发, 我们需要将目光转向场的集体激发——孤子, 在规范理论中, 它们对应磁单极子。 $\pm u_0$ 上的奇点可能意味着此处的理论中存在无质量的磁单极子。为了从奇点处挖掘出更多信息, 我们需要得知这些无质量磁单极子究竟在什么时候才会出现。

Central Charge and Electromagnetic Charges

为了得知这些无质量磁单极子意味着什么, 我们需要注意一个关键的事实: 在 $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ 规范理论中, 一个超多重态的中心荷就是电荷和磁荷的线性叠加⁷⁶。如果我们得知了这一关系, 由于 BPS 超多重态的质量和中心荷满足关系 $|Z| = 2m$, 于是如果知道了一个 BPS 超多重态的中心荷, 我们就能得知这一超多重态的质量。反之, 我们也可以用这一关系确定无质量磁单极子所满足的性质。

为了看到这一点, 我们可以考虑超对称的守恒流: 既然超对称也是体系的一个连续对称性, 于是它也应该对应某个守恒流——超流 $S_{\alpha}^{I,\mu}$ 。由于守恒流对应的守恒荷应该就是相应对称性的生成元, 于是超流的空间积分应该满足 $\int d^3x S_{\alpha}^{I,0} = Q_{\alpha}^I$ 。利用这个关系, 我们就能得到:

$$\int d^3x \{Q_{\alpha}^I, S_{\beta}^{J,0}\} = \{Q_{\alpha}^I, Q_{\beta}^J\} = \epsilon^{IJ} \epsilon_{\alpha\beta} Z \quad (\text{C.318})$$

⁷⁶ 你可能会困惑: 中心荷似乎是一个 c -数, 为什么它能够成为电荷、磁荷这些算符的叠加呢? 这是由于我们实际上对超对称代数做了一个中心扩张, 也就是将超对称代数中的 c -数中心荷替换为了与所有其他生成元都对易的一个新生成元。

Noether 定理告诉我们, 如果场 ϕ_α 在超对称变换 $(1 + i\epsilon Q_I)$ 下的变化是 $\delta^I \phi_\alpha$, 且 Lagrangian 的变化是 $\epsilon(\partial_\mu K^{I,\mu})$, 那么超流就是⁷⁷:

$$\epsilon S^{I,\mu} = \delta^I \phi_\alpha \frac{\partial_L \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} - \epsilon K^{I,\mu} \quad (\text{C.319})$$

从而, 我们可以计算出某个理论的超流 $S_\alpha^{I,0}$ 是如何用场量表达的。知道了超流之后, 由于一个场在超对称变换下总满足 $[\epsilon Q^I, \phi_\alpha]_\pm = \delta^I \phi_\alpha$, 从而对易子 $\{Q_\alpha^I, S_\beta^{J,0}\}$ 也不难计算。得到这个对易子之后, 我们只需要对空间积分, 就可以计算出这个理论中的中心荷是如何用场量表达出的。经过一些复杂的计算⁷⁸, 我们可以最终得到: $\mathcal{N} = 2$ SU(2) 规范理论中的超流满足:

$$\{Q_\alpha^1, S_\beta^{2,\mu}\} = \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\nu \left[-2\sqrt{2}iF^{a\mu\nu}\phi^a + \sqrt{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}^a\phi^a + \dots \right] \quad (\text{C.320})$$

其中 \dots 代表与费米子相关的项, 这些项不会贡献对全空间的积分。有了这个结果之后, 我们就能计算出中心荷:

$$\epsilon_{\alpha\beta} Z = \int d^3x \{Q_\alpha^1, S_\beta^{2,0}\} = \epsilon_{\alpha\beta} \int dS_i \left[-2\sqrt{2}iF^{a0i}\phi^a + \sqrt{2}\epsilon^{0ijk}F_{jk}^a\phi^a \right] \quad (\text{C.321})$$

我们总可以做一个 SU(2) 转动, 使得标量场的真空期待值 $\langle\phi\rangle$ 只有生成元 $\sigma^3/2$ 方向的分量 $\langle\phi^3\rangle = a$ 。此时, SU(2) 对称性就被破缺到了 $\sigma^3/2$ 对应的 U(1) 子群, 而这个 U(1) 子群的电场和磁场就是:

$$aE_i = -F^{a0i}\phi^a, \quad aB_i = \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}F_{jk}^a\phi^a \quad (\text{C.322})$$

从而上面 Z 的表达式中的两个积分就分别给出这个 BPS 态的电荷 $q_e = \int dS_i E^i$ 和磁荷 $q_m = \int dS_i B^i$ 。

$$Z = 2\sqrt{2}a [iq_e - q_m] \quad (\text{C.323})$$

这就是我们最终想要得到的关系——在一个 ϕ^3 真空期待值为 a 的真空附近, 一个具有电荷 q_e 、磁荷 q_m 的超多重态一定具有中心荷 $Z = 2\sqrt{2}a [iq_e - q_m]$ 。当然, 我们比较熟悉的写法是将电荷、磁荷标记为单位电荷 e 和单位磁荷 $4\pi/e$ 的倍数⁷⁹, 也就是 $q_e = eQ_e, q_m = \frac{4\pi}{e}Q_m$ 。如此一来, 这个关系就可以被写为:

$$Z = 2\sqrt{2}iea \left[Q_e + \frac{4\pi i}{e^2} Q_m \right] \quad (\text{C.324})$$

不过, 这还不是我们最终想要看到的关系。别忘了, Witten 效应告诉我们: 在理论中存在 θ -项的时候, BPS 单极子 (及其激发态的 BPS 双荷子) 可不仅仅存在磁荷, 而是具有额外的电荷 $\theta e/2\pi$ 。于是对于双荷子所处的超多重态而言, 其中心荷应该是⁸⁰:

$$Z = 2\sqrt{2}iea \left[Q_e + \left(\frac{4\pi i}{e^2} + \frac{\theta}{2\pi} \right) Q_m \right] = 2\sqrt{2}iea(Q_e + \tau Q_m) \quad (\text{C.325})$$

⁷⁷免得产生误会, 这里也许需要特别指出 ∂_L 意味着左导数。

⁷⁸我在这里并不打算给出具体的细节, 有兴趣的读者可以参考 E. Witten 和 D. Olive 的原始文献 Phys. Lett. **78B** (1978) 97, 或者也可以参考 Weinberg 第三卷的 27.9 节。

⁷⁹如果你不熟悉这个, 可以看看我另一个 notes 中关于 Polyakov-'t Hooft 单极子的讨论。

⁸⁰这里的 Q_e, Q_m 分别是这个双荷子在无 θ 角时的电荷、磁荷。例如就算我们加入了 θ 角, 一个 BPS 单极子仍然被我们用 $Q_e = 0, Q_m = 1$ 来标记。

你一定在想：在量子理论中，耦合常数 τ 会随着重整化群跑动，那么这里的 τ 是在哪个能标上的 $\tau(\mu)$ 呢？答案其实是：哪个 μ 都不是。事实上，由于我们在前面直接用了 BPS 双荷子的经典磁荷，于是这个关系只在经典层面（也就是树图阶）上成立，于是这里的 τ 应该是未经重整化的经典值 τ_{cl} 。在量子理论中，双荷子的磁荷实际上会被量子修正所修改。由于在树图阶， $\mathcal{N} = 2$ 规范理论的耦合常数可以写为：

$$F''(a) = \frac{dF'(a)}{da} = \tau_{\text{cl}} \quad (\text{C.326})$$

于是树图阶的 τ_{cl} 就满足：

$$a\tau_{\text{cl}} = F'(a) \quad (\text{C.327})$$

看到这个结果之后，我们自然会想：在量子理论中，中心荷会不会也满足关系 $Z = 2\sqrt{2}i(aQ_e + F'(a)Q_m)$ 呢？答案是肯定的。为了看到这一点，我们也可以再次借助 Seiberg-Witten 对偶：由于我们的理论中一定包含基本场 ϕ ，它们具有电荷 1 和磁荷 0，于是其中心荷应该是 $Z = 2\sqrt{2}ia$ 。如果我们考虑 Seiberg-Witten 对偶后的理论，使得对偶理论中的 $\tilde{a}, \tilde{F}'(a)$ 分别是：

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}'(a) \\ \tilde{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'(a) \\ a \end{pmatrix}, \quad p, q, m, n \in \mathbb{Z} \quad (\text{C.328})$$

由于对偶的理论中也应该包含对偶的基本场，其中心荷应该是：

$$Z = 2\sqrt{2}i\tilde{a} = 2\sqrt{2}i[n a + m F'(a)] \quad (\text{C.329})$$

重点来了：由于对偶理论和原理论中包含相同的物理，于是在原理论中也应该包含一个中心荷为 $2\sqrt{2}i[n a + m F'(a)]$ 的超多重态。并且由于对偶理论中的基本场应该对应原理论中的双荷子。并且在经典极限下，这个中心荷就回到了 $2\sqrt{2}i[n a + m \tau_{\text{cl}} F'(a)]$ ，从而 m, n 就分别应该是双荷子的 Q_m, Q_e 。从而我们便得知：原理论中双荷子所处的超多重态应该具有中心荷：

$$Z = 2\sqrt{2}i[aQ_e + F'(a)Q_m] \quad (\text{C.330})$$

这就是我们最终需要的关系。到此为止，我们终于可以回收前文中埋下的一个伏笔。考虑以下矩阵给出的 Seiberg-Witten 对偶：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.331})$$

由于同一个超多重态的中心荷不在 Seiberg-Witten 对偶下变化，于是我们可以知道：在对偶的理论中，原理论中具有 Q_m, Q_e 的双荷子将会具有以下的中心荷：

$$Z = 2\sqrt{2}i[\tilde{a}Q_m - \tilde{F}'(\tilde{a})Q_e] \quad (\text{C.332})$$

从而，对偶理论和原理论中这个超多重态的电荷、磁荷满足如下的变换关系：

$$\tilde{Q}_m = -Q_e, \quad \tilde{Q}_e = Q_m \quad (\text{C.333})$$

由于这个电荷、磁荷之间的关系并不在经典层面成立，而是需要考虑量子修正后的磁荷、电荷，于是它并不能简单地通过经典层面上的讨论得到。直到此处，我们费尽千辛万苦，终于用量子修正后的磁荷、电荷证明了这一事实。这也回收了我们前文中埋下的伏笔——说明了这个矩阵给出的 Seiberg-Witten 对偶就是我们熟悉的电磁对偶！

Monodromy from Massless Monopole

有了这个关系之后，我们就能试图看到无质量的磁单极子意味着什么了。首先，由于超对称理论中一个态的能量一定是正的，于是无质量的磁单极子一定具有所有磁单极子中最低的质量，也就意味着它处于 BPS 超多重态。如果我们考虑真空 u 上的理论，那么对于 BPS 超多重态而言，其质量和中心荷有以下的关系：

$$2m = |Z| = 2\sqrt{2} |a(u)Q_e + F'(u)Q_m| \quad (C.334)$$

对于一个磁单极子而言，其 $Q_m = 1, Q_m = 0$ 。于是如果 u_0 处的奇点对应无质量的磁单极子，那么我们就有 $F'(u_0) = 0$ 。考虑一个距离 u_0 很近的真空，由于 IR 自由度中额外具有这些磁单极子，那么这个真空附近的理论应该额外具有一个几乎无质量的、具有磁荷 1 的 BPS 超多重态。为了描述这些具有磁单极子的理论，我们可以做一个电磁对偶，考虑 $a_D = F'(a), F'_D(a_D) = -a$ 的理论。此时的对偶理论就应该是一个 $\mathcal{N} = 2$ 的超对称 QED，由于原理论在此处是强耦合的，于是对偶理论在这个真空处弱耦合，我们可以利用微扰论求出对偶理论中的跑动耦合常数：

$$\frac{dg_D}{d \log \mu} = \frac{g_D^3}{8\pi^2} \quad (C.335)$$

由于 $F'(\pm u_0) = 0$ ，这在对偶理论中就意味着 $a_D = 0$ ，从而这个理论中的 W 玻色子和垂直于模空间方向的激发都具有约为 a_D 的质量。当我们积分掉 a_D 以上的所有能标后，我们就应该回到一个只包含无质量自由度 a_D, W_D 的有效理论，这个有效理论的耦合常数就是：

$$\tau_D = \frac{4\pi i}{g_D^2(a_D)} + \frac{\Theta_D}{2\pi} \quad (C.336)$$

利用 $g_D(\mu)$ 的 beta 函数，我们能计算出此时 τ_D 和 a_D 的关系：

$$\tau_D = -\frac{i}{\pi} \log \frac{a_D}{\Lambda_D} \quad (C.337)$$

其中 Λ_D 是为了平衡 a_D 的量纲而引入的一个具有量纲 1 的参数，其具体的值并不重要。有了这个结果之后，我们就能根据 $\tau_D = \frac{dF'_D(a_D)}{da_D}$ 得到此时有效理论中的 prepotential：

$$F'_D(a_D) = a_0 + \frac{i}{\pi} a_D \log a_D \quad (C.338)$$

别忘了，我们上面讨论的这个理论是在 u_0 邻域中的理论。并且由于 a_D 在 u_0 处为 0，于是这个理论中的 a_D 应该可以被展开为：

$$a_D = c_0(u - u_0) \quad (C.339)$$

在环绕 u_0 一圈之后， a_D 从 $c_0(u - u_0)$ 变为了 $c_0 e^{2i\pi}(u - u_0)$ ，从而 $F'_D(a_D)$ 也会改变为 $F'_D - 2a_D$ 。这就给出了 u_0 附近的 monodromy。切换到原理论对应的参量 (a, F') ，就能得知：环绕 u_0 一圈会使得 (a, F') 变换为：

$$\begin{pmatrix} F'(a) \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'(a) \\ a \end{pmatrix} \quad (C.340)$$

在上面的讨论中，我们通过研究 u_0 附近的理论，详细计算出了 u_0 附近的 monodromy M_+ 。根据关系 $M_\infty = M_+ M_-$ ，我们就又能得到 $-u_0$ 附近的 monodromy M_- ：

$$M_- = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.341})$$

如果你将前面讨论中的磁单极子改为具有电荷 Q_E 、磁荷 Q_M 的双荷子，那么我们需要做的就是先通过 Seiberg-Witten 对偶切换到这个双荷子只具有电荷的理论，然后通过类似的方法计算出 monodromy。通过这些过程，无质量双荷子产生的 monodromy 是：

$$M_{(Q_M, Q_E)} = \begin{pmatrix} 1 + 2Q_M Q_E & 2Q_E^2 \\ -2Q_M^2 & 1 - 2Q_M Q_E \end{pmatrix} \quad (\text{C.342})$$

从而， M_- 这个奇点实际上是由 $Q_E = -1, Q_M = 1$ 的无质量双荷子给出的。

现在，我们知道了 $a(u), a_D(u)$ 的一种可能的奇点结构。你可能会问：为什么我们不考虑更多奇点的情形？为什么 M_+ 处的奇点就一定是由 $Q_M = 1, Q_E = 0$ 的无质量粒子给出的？这些奇点可不可以由不同的双荷子给出？非微扰区域中有没有可能存在更多的奇点？由于我们已经计算出了一个双荷子给出的 monodromy 矩阵 $M_{(Q_M, Q_E)}$ ，于是这个问题实际上就是：存不存在另一组 $\{(Q_M^i, Q_E^i)\}$ ，使得矩阵 M_∞ 能被分解为 $M_{(Q_M^1, Q_E^1)} \dots M_{(Q_M^n, Q_E^n)}$ 。数学家虽然还没有完全解出这个问题，但是经过计算机的验证，这个问题的答案很可能是否定的。于是上面我们给出的很有可能是 M_∞ 的唯一分解方式。

到此为止，我们已经知道了函数 $a(u), F'(u)$ 所满足的足够多性质——它绕无穷远一周时改变 M_∞ ，绕奇点 $\pm u_0$ 一周时改变 M_\pm ，并且我们已经详细计算出了这些 monodromy 矩阵。下面要做的就是寻找满足这些性质的函数 $a(u), F'(u)$ 了。在下一小节中，我们将会利用椭圆曲线的方法给出对函数 $a(u), F'(u)$ 的构造。知道了这些函数之后，我们就得到了任意真空附近的 IR 有效理论，从而严格解出了 $\mathcal{N} = 2$ SU(2) 规范理论的 IR 动力学。

C.5.3 Seiberg-Witten Solution to $\mathcal{N} = 2$ SU(2) SYM

接下来，我们就开始构造函数 $a(u), F'(u)$ 。由于 u, a 具有量纲 $[u] = 2, [a] = 1$ ，为了更好地构造这些函数，我们可以将 u, a 无量纲化，定义 $\mu = u/\Lambda^2$ ，并将 $a, F'(a)$ 都重新定义为原本的 $a/\Lambda, F'/\Lambda$ 。同时，我们还假设两个奇点 $\pm u_0$ 所在的位置刚好是 $\pm \Lambda^2$ 。综合前面的讨论，此时的函数 $a(\mu), F'(\mu)$ 应该满足以下几条性质：

- 这些函数在 μ 复平面上有三个奇点 $\pm 1, \infty$ ，除此以外的地方都是解析的。
- 沿逆时针绕无穷远围道一圈， $(F'(\mu), a(\mu))$ 的 monodromy 是 $M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 。
- 沿逆时针绕 $\mu = 1$ 一圈， $(F'(\mu), a(\mu))$ 的 monodromy 是 $M_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ 。
- 沿逆时针绕 $\mu = -1$ 一圈， $(F'(\mu), a(\mu))$ 的 monodromy 是 $M_- = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ 。
- 最后，为了保证理论在每个真空附近都是物理的，还需要保证 $\tau = \frac{dF'/d\mu}{da/d\mu}$ 在整个 μ 复平面上都具有正的虚部。

在数学上，构造具有特定 monodromy 的多值函数的问题是一个很经典的问题，称为 **Riemann-Hilbert 问题**。构造这样的多值函数的标准工具就是椭圆曲线。由于这些数学知识对我们而言有点太高深了，于是在下面的讨论中将不会给出对数学结论的严格证明，许多陈述也并非严格的。

在数学上，我们可以用以下关系定义一条复曲线：

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c\} \quad (\text{C.343})$$

如果多项式 $x^3 + ax^2 + bx + c$ 有三个不同的根，那么这条复曲线就被称作一条 **椭圆曲线**。经过对坐标 x 的合适平移和重缩放，我们总能将这条椭圆曲线写成标准型 $y^2 = (x+1)(x-1)(x-\lambda)$ ，从而一条椭圆曲线就能用一个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 来代表。事实上，有些不同的 λ 对应的曲线可以通过重新定义 x, y 来相互联系，于是这些 λ 给出的曲线就是等价的。我们可以定义一个空间，使得其上的每一个点都对应一个椭圆曲线的等价类，这个空间被我们称为椭圆曲线的 **模空间**。

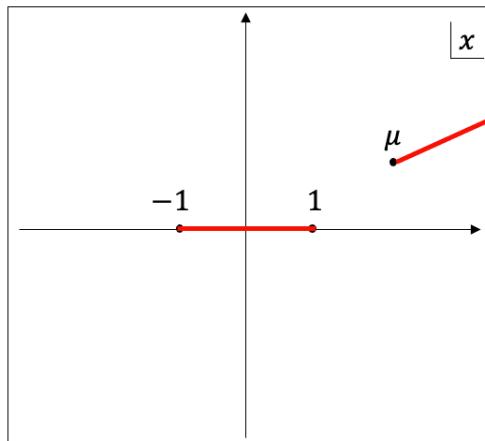
为了描述椭圆曲线的模空间，我们需要先定义一个 $SL(2, \mathbb{Z})$ 矩阵在上半平面 $H = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$ 上的作用：矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 将点 z 映射到 $\frac{az+b}{cz+d}$ 。然后，我们定义 $SL(2, \mathbb{Z})$ 群的以下子群：

$$\Gamma(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), \quad a, d \equiv 1 \pmod{2}, \quad b, c \equiv 0 \pmod{2} \right\} \quad (\text{C.344})$$

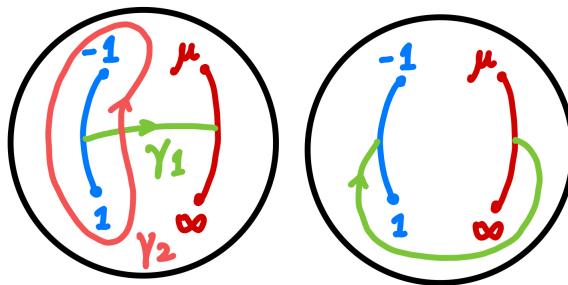
那么可以证明，椭圆曲线的模空间就是上半平面在 $\Gamma(2)$ 作用下的不同轨道构成的空间 $H/\Gamma(2)$ 。这事实上和我们在物理理论中看到的性质非常接近：容易看出，一个由 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 给出的 Seiberg-Witten 对偶将全纯耦合常数 τ 映射到 $\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ ，而 τ 恰恰应该处于 $\text{Im}(\tau) > 0$ 的上半平面中。在我们讨论的理论中，由于所有的 monodromy 矩阵 M_{\pm}, M_{∞} 都只在子群 $\Gamma(2)$ 中，于是物理上不等价的有效理论也构成空间 $H/\Gamma(2)$ 。Seiberg 和 Witten 的想法就是：既然物理上不等价的有效理论和椭圆曲线具有这样相似的性质，那么我们将 μ 视作椭圆曲线的参数，利用椭圆曲线 $y^2 = (x^2 - 1)(x - \mu)$ 来构造函数 $a(\mu), F'(\mu)$ 。

那么，如何用椭圆曲线得到我们想要的 monodromy 呢？这就需要了解一些椭圆曲线的拓扑性质。对于曲线 $y^2 = (x^2 - 1)(x - \mu)$ 而言，由于函数 \sqrt{z} 是多值的，于是这个曲线实际有两个单值分枝 $y = \sqrt{(x^2 - 1)(x - \mu)}$ 和 $y = -\sqrt{(x^2 - 1)(x - \mu)}$ 。从函数的形式中容易看出， $x = -1, 1, \mu$ 都是这个函数的枝点，绕这些枝点一圈就会切换到另一个单值分枝。我们可以在复平面上添加如下的割线，使得越过割线时切换到另一个单值分枝⁸¹：

⁸¹ 虽然说是椭圆曲线，不过由于它是一个一维的复流形，于是它的实维数是 2，看起来更像曲面一些。

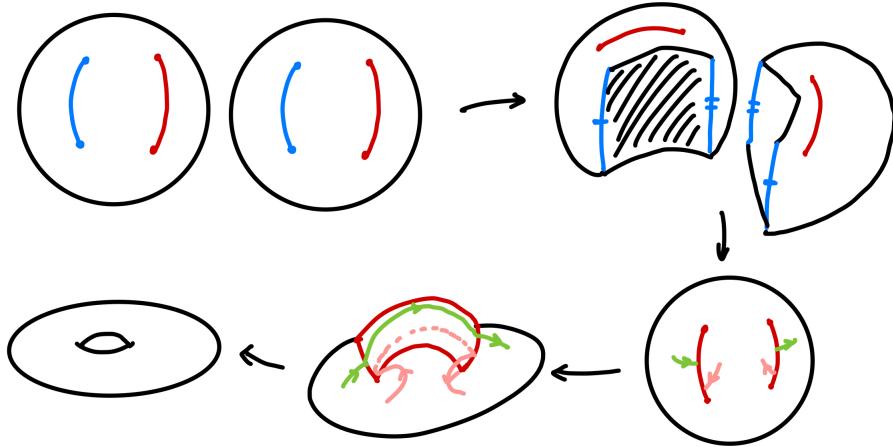


如果我们在复平面上添加一个无穷远点，使其变为复球面，那么这个椭圆曲线所描述的就是两个相同的球面，每个球面上都有两条割线，从 -1 延伸到 1 和从 μ 延伸到无穷远点 ∞ 。在越过这个割线时就会从一个球面到达另一个球面的相同位置。虽然可能有点难以想象，但这两个相互联系的球面的基本群 $\pi_1(X) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 是二维的，两个同伦不等价的非平凡圈 γ_1, γ_2 如图所示：



一个更有趣的想象方式是：认为这两个相互联系的球面可以通过以下的过程变换为一个环面⁸²：先将蓝色割线的左右两边“剪开”，然后把两个球面上对应的部分接在一起，这会让两个相互联系的球面变为一个大球面；然后来处理大球面上两个相互“传送”的红色割线，它可以被看作是在这两个割线的地方加上了一个具有两个面，但是两面之间不相通的“丝带”。最后，我们需要将“丝带”扩张成“把手”，而一个具有把手的球自然同胚于一个环面。

⁸²倒数第二步扩张成“丝带”和最后一步将“丝带”扩张成“把手”的操作并不是同胚，而是同伦等价——一个拓扑空间及其形变收缩是同伦等价的，而直观上讲，这里的形变收缩映射就是我们所做的“扩张”的逆过程。不过由于基本群是同伦不变量，于是这样的操作是合法的。



知道了 $\pi_1(X) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 之后, 根据 de Rham 定理, X 的第一 de Rham 上同调群也就同构于 X 的基本群。这意味着在这个曲面上存在两个独立的、满足 $d\omega_i = 0$, 而又不是某个函数的外微分的 1-形式。它们可以被取为:

$$\omega_1 = \frac{dx}{y}, \quad \omega_2 = \frac{xdx}{y} \quad (\text{C.345})$$

如果对这些 1-形式绕回路 γ_1, γ_2 积分, 那么 Stokes 定理保证了得到的积分值只和同伦类有关, 无关乎积分路径究竟是同伦类中的哪个道路。如果我们改变曲面的参数 μ , 使其绕着 μ 平面上某个枝点转了一圈后, 我们的曲面可能会经历某种扭曲, 导致 γ_1, γ_2 不再处于它们原本所在的同伦类中。不过由于这些变形后的回路肯定属于某个同伦类, 又根据 $\pi_1(X) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, 于是这些变形后的回路肯定可以写为:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.346})$$

其中 M 是一个整系数矩阵。又由于整个同伦群依然能够由这两个道路所属的同伦类生成, 从而 M 事实上需要在 $SL(2, \mathbb{Z})$ 中。于是对于如下定义的积分而言:

$$b_i := \oint_{\gamma_i} \omega \quad (\text{C.347})$$

其中 ω 是某个满足 $d\omega \neq 0$, 而又不是某个函数的外微分的 1-形式。当我们绕 μ 复平面上某个枝点转了一圈后, 其变换就是:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.348})$$

这正是 monodromy 矩阵! 在此之外, 数学上还可以证明如此定义的 b_1/b_2 具有正的虚部, 从而如果我们将函数 $F'(\mu), a(\mu)$ 取为 b_1, b_2 , 那么它们给出的理论也一定是物理的。于是我们可以将 $F'(\mu), a(\mu)$ 取为某个 $\omega(\mu)$ 生成的 $b_1(\mu), b_2(\mu)$ 。到此为止, 问题就只剩下了如何求出 $\omega(\mu)$, 使得 $F'(\mu), a(\mu)$ 具有正确的 monodromy 矩阵。

我们将不会详细讨论求出 $\omega(\mu)$ 的过程, 而只会给出一个最终的结果:

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} (\lambda_2 - \mu \lambda_1) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{\sqrt{x-\mu}}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad (\text{C.349})$$

这个 1-形式沿着 γ_1, γ_2 的积分就给出 $F'(\mu), a(\mu)$ 。对于 γ_1 而言，我们可以将它取为从割线上方从 -1 到 1 ，再从割线下方从 1 到 -1 的围道。显然两部分积分给出相同的值，于是：

$$F'(\mu) = \oint_{\gamma_1} \lambda = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sqrt{x-\mu}}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad (C.350)$$

对于 γ_2 而言，积分围道可以取为先从 1 积分到 μ ，再从另外一个单值分枝上沿反向围道积分：

$$a(\mu) = \oint_{\gamma_2} \lambda = \int_1^\mu \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sqrt{x-\mu}}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad (C.351)$$

为了验证这两个函数能够给出正确的 monodromy，我们需要讨论它们在奇点附近的行为。对于 $\mu \rightarrow \infty$ 的奇点而言，我们有：

$$a \approx \frac{\sqrt{2\mu}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{2\mu}, \quad F' = \frac{\sqrt{2\mu}}{\pi} \int_{1/\mu}^1 \frac{dz \sqrt{z-1}}{\sqrt{z^2-\mu^{-2}}} \approx \frac{i}{\pi} \sqrt{2\mu} \log \mu \quad (C.352)$$

在计算 F' 时，我们重新定义了 $x = \mu z$ 。这个结果和我们的微扰计算完全符合，于是当然给出正确的 monodromy。在 $\mu = 1$ 附近，我们有：

$$F' \approx \frac{1}{\pi} \int_{1/\mu}^1 \frac{dz \sqrt{z-1}}{\sqrt{z-\mu^{-1}}} \approx \frac{i(\mu-1)}{2} \quad (C.353)$$

对于 $a(\mu)$ 而言，虽然它在 $\mu = 1$ 处没有奇异性：

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{\pi} \quad (C.354)$$

但是在 $\mu = 1$ 附近， $da/d\mu$ 事实上是发散的：

$$\frac{da}{d\mu} = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x-1)(x-\mu)}} \approx -\frac{\log(\mu-1)}{2\pi} \quad (C.355)$$

从而在环绕 $\mu = 1$ 一圈时，正确的环绕行为应该由以下的展开给出：

$$a \approx \frac{4}{\pi} - \frac{(\mu-1) \log(\mu-1)}{2\pi} \quad (C.356)$$

在 $(\mu-1)$ 从 $(\mu-1)$ 缓慢变化到 $(\mu-1)e^{2i\pi}$ 的过程中， F' 不变，而 a 则会平移为 $a - i(\mu-1) = a - 2F'$ 。从而这也给出 $\mu = 1$ 处正确的 monodromy。而对于 $\mu = -1$ 的奇点而言，其 monodromy 完全可以由 $M_+ M_- = M_\infty$ 确定，于是既然这个结果可以给出正确的 M_+, M_∞ ，那么 M_- 一定也是正确的。到此为止，我们就完成了对满足前文所述的 monodromy 的函数 $F'(\mu), a(\mu)$ 的构造，而种种迹象表明这很有可能是满足这些条件的唯一解。从而利用这些函数 $F'(\mu), a(\mu)$ ，我们能得知一个任意 u 的真空附近的 IR 有效理论，这就严格解出了 $\mathcal{N} = 2$ SU(2) 规范理论的 IR 动力学。

References

- [1] Nathan Seiberg, Edward Witten, *Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, arXiv:hep-th/9407087
- [2] Adel Bilal, *Duality in $N=2$ SUSY $SU(2)$ Yang-Mills Theory: A pedagogical introduction to the work of Seiberg and Witten*, arXiv:9601007
- [3] Yuji Tachikawa, $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric dynamics for pedestrians, arXiv:1312.2684
- [4] Steven Weinberg, *Quantum Theory of Fields, Vol.3 Supersymmetry*
- [5] Edward Witten, David Olive, *Supersymmetry algebras that include topological charges*, Phys. Lett. **78B** (1978) 97
- [6] C. Herbert Clemens, *A Scrapbook of Complex Curve Theory*

C.6 2D $\mathcal{N} = (2, 2)$ Supersymmetry and Mirror Symmetry

C.6.1 $\mathcal{N} = (2, 2)$ Supersymmetry

在前面的讨论中, 由于我们生活在四维时空中, 于是我们重点关注的都是四维时空中的超对称场论。不过我们也同时看到: 超对称的应用远不止消除标准模型中的 hierarchy 问题, 为了求解非超对称的场论, 我们也可以先将理论超对称化, 求解超对称理论, 然后通过破缺超对称的方式试图回到原本理论。而物理中用到的量子场论并不局限在四维中: 在弦论中, 我们需要处理卷曲起来的高维时空上的场论, 而在凝聚态体系中也会频繁用到低维时空中的场论。为了使用超对称去试图求解这些场论, 研究其他时空中的超对称当然是有必要的。在这一节中, 我们就将展开讨论二维时空中的超对称⁸³。

Supersymmetry Algebra

为了讨论二维时空的超对称, 我们首先需要了解的是二维时空中具有什么样的超对称代数。我们知道, d 维时空中 Lorentz 群的旋量表示可以用满足反对易关系 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}$ 的 **Clifford 代数** 来刻画: 如果我们有了这样一个 Clifford 代数, 那么用 $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ 定义的生成元 $S^{\mu\nu}$ 就自动满足 $\text{so}(d-1, 1)$ 代数的对易关系, 从而给出 $\text{so}(d-1, 1)$ 代数的旋量表示。

在二维时空中, 我们可以找到 Clifford 代数的以下表示:

$$\gamma^0 = \sigma^1, \quad \gamma^1 = i\sigma^2, \quad S^{01} = \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^1] = \text{diag}(-i/2, i/2) \quad (\text{C.357})$$

从生成元的形式可以看出, 二维时空中的 Dirac 旋量表示也是可约的, 它可以被分为 $S_L = -i/2$ 的左手旋量和 $S_R = i/2$ 的右手旋量的直和。和四维时空的情形不同, 由于 $-(S_L)^* = S_L, -(S_R)^* = S_R$, 于是二维时空中的左、右手旋量表示都是实的, 并不互为 Hermitian 共轭。从而当我们考虑二维时空中的超对称时, 就没有必要要求左手超对称生成元的 Hermitian 共轭是右手超对称生成元。这样一来, 二维时空中的超对称中可以有不

⁸³这一小节的内容大多数来自 Edward Witten 的论文 hep-th/9301042。

同数量的左手、右手超对称生成元。于是我们可以用两个数字 $\mathcal{N} = (\mathcal{N}_L, \mathcal{N}_R)$ 来标记二维时空中的超对称，它们分别代表左手和右手的超对称生成元数目。

在二维时空中，如果我们定义一组光锥坐标：

$$x^\pm := x^0 \pm x^1, \quad \partial_\pm := \frac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1) \quad (\text{C.358})$$

那么， x^\pm 在 boost $e^{i\theta_{01}S^{01}}$ 下的变化就是 $x^\pm \rightarrow e^{\mp\theta_{01}}x^\pm$ ， ∂_\pm 在 $e^{i\theta_{01}S^{01}}$ 下的变化就是 $x^\pm \rightarrow e^{\pm\theta_{01}}x^\pm$ 。于是 ∂_+ 和 $\psi_L^\dagger \psi_L$ 、 ∂_- 和 $\psi_R^\dagger \psi_R$ 处于二维 Lorentz 群的同一表示。利用这一性质，我们可以写出二维时空下的超对称代数：对于 $\mathcal{N} = (\mathcal{N}_L, \mathcal{N}_R)$ 超对称，我们可以引入 $\mathcal{N}_L/2$ 组互为共轭的左手生成元 Q_+^I, \bar{Q}_+^I 和 $\mathcal{N}_R/2$ 组互为共轭的右手生成元 Q_-^J, \bar{Q}_-^J ，使其在 Lorentz 群下分别处于左手和右手旋量表示，并且具有以下的反对易关系：

$$\{Q_+^I, \bar{Q}_+^{I'}\} = 2\delta^{II'}P_+, \quad \{Q_-^J, \bar{Q}_-^{J'}\} = 2\delta^{JJ'}P_- \quad (\text{C.359})$$

$$\{Q_\pm, Q_\pm\} = \{\bar{Q}_\pm, \bar{Q}_\pm\} = 0 \quad (\text{C.360})$$

$$\{\bar{Q}_+, \bar{Q}_-\} = Z, \quad \{Q_+, Q_-\} = Z^* \quad (\text{C.361})$$

$$\{Q_-, \bar{Q}_+\} = \tilde{Z}, \quad \{Q_+, \bar{Q}_-\} = \tilde{Z}^* \quad (\text{C.362})$$

其中， Z, \tilde{Z} 是这个超对称代数的两个中心荷，而 $P_\pm = \frac{1}{2}(P_0 \pm P_1) = \frac{1}{2}(-H \pm P)$ 是时空平移的生成元。在下面的讨论中，我们特殊考虑的是 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 的超对称，其超对称代数就是：

$$\{Q_\pm, \bar{Q}_\pm\} = 2P_\pm, \quad \{Q_\pm, Q_\pm\} = \{\bar{Q}_\pm, \bar{Q}_\pm\} = 0 \quad (\text{C.363})$$

$$\{\bar{Q}_+, \bar{Q}_-\} = Z, \quad \{Q_+, Q_-\} = Z^* \quad (\text{C.364})$$

$$\{Q_-, \bar{Q}_+\} = \tilde{Z}, \quad \{Q_+, \bar{Q}_-\} = \tilde{Z}^* \quad (\text{C.365})$$

在尝试着写出具有 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超对称性的 Lagrangian 之前，我们可以先看看这个超对称代数的性质。首先，除了超对称性之外，一个具有超对称的理论还有可能具有 R-对称性。和前面看到的四维情形不同的是，由于二维时空中的超空间坐标并不属于同一个 Lorentz 多重态，从而 θ_+, θ_- 在 R-对称性下可以相互独立地变换。这导致 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超对称理论中可以最多具有以下的两个 $U(1)_R$ 对称性：

$$U(1)_R^V: \quad R_V(\theta^\pm) = 1, \quad R_V(\bar{\theta}^\pm) = -1 \quad (\text{C.366})$$

$$U(1)_R^A: \quad R_A(\theta^\pm) = \pm 1, \quad R_V(\bar{\theta}^\pm) = \mp 1 \quad (\text{C.367})$$

在这些连续对称性之外， $\mathcal{N} = (2, 2)$ 的超对称理论还一定具有以下的分立对称性。首先，容易证明 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 的超对称代数在以下变换下不变：

$$Q_- \longleftrightarrow \bar{Q}_-, \quad Z \longleftrightarrow \tilde{Z}, \quad R_V \longleftrightarrow R_A \quad (\text{C.368})$$

这个变换被称为**镜像自同构**。我们马上就会看到：在镜像自同构下，一个手征超场会变为一个扭曲的手征超场。在后面的讨论中，我们会看到存在一系列 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超对称理论之间的对偶，并且对偶两边的理论的基本自由度分别为手征超场和扭曲的手征超场，这在某种程度上相当于对超对称代数做了一个镜像自同构，这样的对偶便被我们称为**镜像对称**。

Superspace and Chiral Superfield

为了写出超对称不变的 Lagrangian, 我们仍然可以定义一个超空间。在时空坐标 (x^0, x^1) 中添加四个 Grassmann 数坐标 $(\theta^\pm, \bar{\theta}^\pm)$, 并且将超对称生成元在超空间上的表示定义为:

$$Q_\pm = \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} + i\bar{\theta}^\pm \partial_\pm, \quad \bar{Q}_\pm = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\pm} - i\theta^\pm \partial_\pm \quad (\text{C.369})$$

根据 P_\pm 在超空间上的表示为 $P_\pm = -i\partial_\pm$, 容易验证这组超对称生成元满足前面给出的超对称代数。为了约束超场的自由度数, 我们也可以定义以下的超对称导数:

$$D_\pm = \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} - i\bar{\theta}^\pm \partial_\pm, \quad \bar{D}_\pm = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\pm} + i\theta^\pm \partial_\pm \quad (\text{C.370})$$

它们满足 $\{D_\pm, Q_\pm\} = \{\bar{D}_\pm, Q_\pm\} = 0$, 从而用这些超对称导数写出的约束都是超对称不变的。有了这些超对称导数之后, 我们就能定义手征超场为满足 $\bar{D}_\pm \Phi(x^\pm, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm) = 0$ 的超场。在二维时空中, 除了手征超场之外, 还存在二维时空所独有的超场——**扭曲的手征超场**, 它满足 $\bar{D}_+ \Sigma = D_- \Sigma = 0$ 。

对于手征超场而言, 我们可以找到一个独特的坐标组合:

$$y^\pm = x^\pm - i\theta^\pm \bar{\theta}^\pm \quad (\text{C.371})$$

使得 $\bar{D}_\pm y^\pm = \bar{D}_\pm y^\mp = 0$, 并且满足这种关系的坐标组合除了这个之外只有 θ^\pm , 从而一个手征超场一定是 y, θ^\pm 的函数, 可以被展开为:

$$\begin{aligned} \Phi(y, \theta^\pm) &= z(y) + \theta^+ \psi_+(y) + \theta^- \psi_-(y) + \theta^+ \theta^- F(y) \\ &= z(x) - i\theta^+ \bar{\theta}^+ \partial_+ z(x) - i\theta^- \bar{\theta}^- \partial_- z(x) - \theta^+ \bar{\theta}^+ \theta^- \bar{\theta}^- \partial_- \partial_+ z(x) + \theta^+ \theta^- F(x) \\ &\quad + \theta^+ \psi_+(x) - i\theta^+ \theta^- \bar{\theta}^- \partial_- \psi_+(x) + \theta^- \psi_-(y) - i\theta^- \theta^+ \bar{\theta}^+ \partial_+ \psi_-(x) \end{aligned} \quad (\text{C.372})$$

而对一个扭曲的手征超场而言, 我们找到的坐标组合是:

$$\tilde{y}^\pm = x^\pm \mp i\theta^\pm \bar{\theta}^\pm \quad (\text{C.373})$$

于是, 一个扭曲的手征超场可以被展开为:

$$\begin{aligned} \Sigma(\tilde{y}, \theta^+, \bar{\theta}^-) &= z(\tilde{y}) + \theta^+ \psi_+(\tilde{y}) + \bar{\theta}^- \psi_-(\tilde{y}) + \theta^+ \bar{\theta}^- F(\tilde{y}) \\ &= z(x) - i\theta^+ \bar{\theta}^+ \partial_+ z(x) + i\theta^- \bar{\theta}^- \partial_- z(x) + \theta^+ \bar{\theta}^+ \theta^- \bar{\theta}^- \partial_- \partial_+ z(x) + \theta^+ \bar{\theta}^- F(x) \\ &\quad + \theta^+ \psi_+(x) + i\theta^+ \theta^- \bar{\theta}^- \partial_- \psi_+(x) + \bar{\theta}^- \psi_-(y) - i\bar{\theta}^- \theta^+ \bar{\theta}^+ \partial_+ \psi_-(x) \end{aligned} \quad (\text{C.374})$$

Dimensional Reduction and Gauge Superfield

除了手征超场和扭曲的手征超场之外, 为了描述超对称规范理论, 我们还需要知道二维时空中的规范超场是什么样的。我们当然可以将规范超场仍然定义为一个实的超场, 然后对其分量做展开, 再选择 Wess-Zumino 规范。不过在这里, 我们将用另外一种方式来处理这个问题—— $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超对称的特殊性在于它和我们熟悉的四维时空中的 $\mathcal{N} = 1$ 超对称关系紧密: 我们可以通过**维数约化**将四维时空中的 $\mathcal{N} = 1$ 超对称转化为二维时空中的

$\mathcal{N} = (2, 2)$ 超对称。下面我们就将用维数约化的手段看到二维时空中的规范超场是什么样的。

在四维时空中, $\mathcal{N} = 1$ 的超对称代数是:

$$\{Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}^\dagger\} = -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \quad (\text{C.375})$$

这些超对称生成元在超空间上的表示是以下的微分算符:

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\text{C.376})$$

维数约化的基本思路就是: 认为所有的场都和时空坐标的 1 和 2 分量无关, 并将 0 和 3 分量分别认同为二维时空坐标的 0 和 1 分量。这样一来, 这个超对称代数就变为:

$$\{Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}^\dagger\} = -2i(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^0 \partial_0 + \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^3 \partial_1) = -2i \begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_0 - \partial_1 \end{pmatrix} = -4i \begin{pmatrix} \partial_+ & 0 \\ 0 & \partial_- \end{pmatrix} \quad (\text{C.377})$$

从而, 四维空间中的 $\mathcal{N} = 1$ 超对称生成元和二维空间中的 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超对称生成元有如下的对应关系:

$$Q_\alpha = \sqrt{2}(Q_+, Q_-), \quad Q_{\dot{\alpha}}^\dagger = \sqrt{2}(\bar{Q}_+, \bar{Q}_-) \quad (\text{C.378})$$

于是二维空间中的 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超对称生成元在四维 $\mathcal{N} = 1$ 超空间上有以下的表示:

$$Q_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial\theta^1} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\bar{\theta}^1 (\partial_0 + \partial_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial\theta^1} + \sqrt{2}i\bar{\theta}^1 \partial_+ \quad (\text{C.379})$$

由此也可以看出, 四维 $\mathcal{N} = 1$ 超空间和二维 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超空间之间有以下的关系:

$$\sqrt{2}(\theta^1, \theta^2) = (\theta^+, \theta^-), \quad \sqrt{2}(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2) = (\bar{\theta}^+, \bar{\theta}^-) \quad (\text{C.380})$$

这样一套记号的好处是: 四维超空间中的超空间积分将会有一个非常简洁的形式:

$$\int d^4\theta = \frac{1}{4} \int d\theta^1 d\theta^2 d\bar{\theta}^2 d\bar{\theta}^1 = \int d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^- d\bar{\theta}^+, \quad \int d^2\theta = \frac{1}{2} \int d\theta^1 d\theta^2 = \int d\theta^+ d\theta^- \quad (\text{C.381})$$

我们知道, 当取 Wess-Zumino 规范的时候, 四维时空中的规范超场可以被展开为:

$$V = -\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} A_\mu + i\theta^\alpha \theta_\alpha \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} - i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \theta^\alpha \lambda_\alpha - \frac{1}{2} \theta^\alpha \theta_\alpha \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} D \quad (\text{C.382})$$

如果我们定义 $\sigma = (A_1 - iA_2)/\sqrt{2}$, $\bar{\sigma} = (A_1 + iA_2)/\sqrt{2}$, 并且认为四维时空中的旋量 $(\psi_1, \psi_2) = (\psi_+, \psi_-)$, 那么就有:

$$\begin{aligned} V = & - \left(\theta^+ \bar{\theta}^+ A_+ + \theta^- \bar{\theta}^- A_- + \sqrt{2}\theta^+ \bar{\theta}^- \bar{\sigma} + \sqrt{2}\theta^- \bar{\theta}^+ \sigma \right) \\ & - \sqrt{2}i\theta^+ \theta^- (\bar{\theta}^+ \bar{\lambda}_+ + \bar{\theta}^- \bar{\lambda}_-) - \sqrt{2}i\bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- (\theta^+ \lambda_+ + \theta^- \lambda_-) - \frac{1}{2} \theta^+ \theta^- \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- D \end{aligned} \quad (\text{C.383})$$

可以看到, 二维时空 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超对称中的规范超场中除了矢量分量 A_μ 、旋量分量 $\lambda_\pm, \bar{\lambda}_\pm$ 和辅助分量 D 之外, 还存在两个标量分量 $\sigma, \bar{\sigma}$ 。利用这个规范超场的分量展开, 我们可以得知 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超对称中的物质项是:

$$\begin{aligned} \int d^4\theta \Phi e^{2V} \Phi = & -|D_\mu z|^2 + i\psi_+^\dagger (D_0 - D_1)\psi_+ + i\psi_-^\dagger (D_0 + D_1)\psi_- + F^\dagger F - 2z^\dagger z\sigma\bar{\sigma} - Dz^\dagger z \\ & - \sqrt{2}(\sigma\psi_+^\dagger\psi_- + \bar{\sigma}\psi_-^\dagger\psi_+) - i\sqrt{2}z^\dagger(\lambda_-\psi_+ - \lambda_+\psi_-) - i\sqrt{2}z^\dagger(\lambda_-^\dagger\psi_+^\dagger - \lambda_+^\dagger\psi_-^\dagger) \end{aligned} \quad (\text{C.384})$$

加上超势项 $\int d\theta^+ d\theta^- W(\Phi) + \text{h.c.}$ 之后, 如果我们再积分掉辅助场 F , 就可以得到以下的 Lagrangian:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -|D_\mu z|^2 + i\psi_+^\dagger (D_0 - D_1)\psi_+ + i\psi_-^\dagger (D_0 + D_1)\psi_- - 2z^\dagger z\sigma\bar{\sigma} - Dz^\dagger z \\ & - \sqrt{2}(\sigma\psi_+^\dagger\psi_- + \bar{\sigma}\psi_-^\dagger\psi_+) - i\sqrt{2}z^\dagger(\lambda_-\psi_+ - \lambda_+\psi_-) - i\sqrt{2}z^\dagger(\lambda_-^\dagger\psi_+^\dagger - \lambda_+^\dagger\psi_-^\dagger) \\ & - \left| \frac{\partial W}{\partial z} \right|^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \psi_- \psi_+ \end{aligned} \quad (\text{C.385})$$

除了规范场和物质场的相互作用之外, 我们还需要考虑如何给二维时空中的规范超场加上动力学项。为此, 我们可以引入以下的超场:

$$\Sigma := \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ \bar{\mathcal{D}}_+, \mathcal{D}_- \} \quad (\text{C.386})$$

其中 \mathcal{D}_\pm 就是将 D_\pm 中的 ∂_μ 改为 $\partial_\mu - iA_\mu$ 而得的规范协变导数。由于这些规范协变导数处于规范群的伴随表示, 于是如此定义的 Σ 当然也处于规范群的伴随表示。同样容易验证的是: 这个超场满足 $\bar{\mathcal{D}}_+ \Sigma = \mathcal{D}_- \Sigma = 0$, 从而按照上面的定义, 它是一个扭曲的手征超场。如果我们将 Wess-Zumino 规范中的规范超场代入这个定义, 就会得到:

$$\begin{aligned} \Sigma = & \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\mathcal{D}}_+ D_- V = \sigma - i\sqrt{2}\theta^+ \bar{\lambda}_+ - i\sqrt{2}\bar{\theta}^- \lambda_- + \sqrt{2}\theta^+ \bar{\theta}^- (D - iv_{01}) \\ & - i\bar{\theta}^- \theta^- (\partial_0 - \partial_1) \sigma - i\theta^+ \bar{\theta}^+ (\partial_0 + \partial_1) \sigma + \sqrt{2}\bar{\theta}^- \theta^+ \theta^- (\partial_0 - \partial_1) \bar{\lambda}_+ \\ & + \sqrt{2}\theta^+ \bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ (\partial_0 + \partial_1) \lambda_- - \theta^+ \bar{\theta}^- \theta^- \bar{\theta}^+ (\partial_0^2 - \partial_1^2) \sigma \end{aligned} \quad (\text{C.387})$$

利用这个扭曲的手征超场, 我们可以写出以下的项:

$$\frac{1}{e^2} \int d^4\theta \text{tr}(\bar{\Sigma}\Sigma) = \frac{1}{e^2} \text{tr} \left[\frac{1}{2} F_{01}^2 + \frac{1}{2} D^2 + i\bar{\lambda}_+ (\partial_0 - \partial_1) \lambda_+ + i\bar{\lambda}_- (\partial_0 + \partial_1) \lambda_- - |\partial_\mu \sigma|^2 \right] \quad (\text{C.388})$$

这也就正是规范场的动力学项。一个值得说道的地方是: 在二维时空中, F_{01}^2 仍然具有量纲 4, 从而耦合常数 g 的量纲应当是 1。如果我们将规范场做一个重定义 $A \rightarrow A/g$, 那么新的这个规范场就将是无量纲的, 而所有的规范耦合顶点都会带有量纲 1, 从而整个理论将会是超可重整的。

除了这个动力学项之外之外, 如果规范群是 Abelian 群, 我们还可以额外写出以下的规范不变且超对称不变的项:

$$\frac{it}{2\sqrt{2}} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \Sigma + \text{h.c.} = \xi D + \frac{\Theta}{2\pi} F_{01} \quad (\text{C.389})$$

其中 $t = i\xi + \frac{\Theta}{2\pi}$ 。我们发现：这不但给出和四维时空中相同的 Fayet-Iliopoulos 项，还能给出 Abelian 规范理论中的 Θ 项！更加有趣的是，FI 项的耦合常数 ξ 和 Θ 角也可以被写入一个“全纯耦合常数” t 中。

对于非 Abelian 的规范场，我们将无法写出给出 Fayet-Iliopoulos 项和 Θ -项的扭曲超势，于是这些项在非 Abelian 情形中并不存在。这件事情也可以从瞬子的角度看到：二维时空中的瞬子对应 $\pi_1(G)$ 中的同伦类，而对于任何一个非 $U(1)$ 的李群而言，这个同伦群都不是 \mathbb{Z} ，从而也就不存在 Θ -真空， Θ -项也就不存在。

C.6.2 Dynamics of $\mathcal{N} = (2, 2)$ Abelian Gauge Theories

A First Glimpse at $\mathcal{N} = (2, 2)$ Abelian Gauge Theory

在下面的讨论中，我们将会主要关注 Abelian 的规范理论。并且出于讨论的简便，我们先关注超势 W 为 0 的情形：考虑物质场为 N 个手征超场 Φ_i 的 Abelian 规范理论⁸⁴：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int d^4\theta \left(\sum_{i=1}^N \Phi_i^\dagger e^{2Q_i V} \Phi_i - \frac{1}{2e^2} \Sigma \bar{\Sigma} \right) + \frac{it}{2\sqrt{2}} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \Sigma + \text{h.c.} \\ &= -|D_\mu z_i|^2 + i\psi_{+,i}^\dagger (D_0 - D_1) \psi_{+,i} + i\psi_{-,i}^\dagger (D_0 + D_1) \psi_{-,i} - 2Q_i^2 z_i^\dagger z_i \sigma \bar{\sigma} - Q_i D z_i^\dagger z_i \\ &\quad - \sqrt{2} Q_i (\sigma \psi_{+,i}^\dagger \psi_{-,i} + \bar{\sigma} \psi_{-,i}^\dagger \psi_{+,i}) - i\sqrt{2} Q_i z_i^\dagger (\lambda_- \psi_{+,i} - \lambda_+ \psi_{-,i}) - i\sqrt{2} Q_i z_i (\lambda_-^\dagger \psi_{+,i}^\dagger - \lambda_+^\dagger \psi_{-,i}^\dagger) \\ &\quad - \frac{1}{2e^2} \left[\frac{1}{2} F_{01}^2 + \frac{1}{2} D^2 + i\bar{\lambda}_+ (\partial_0 - \partial_1) \lambda_+ + i\bar{\lambda}_- (\partial_0 + \partial_1) \lambda_- - |\partial_\mu \sigma|^2 \right] + \xi D + \frac{\Theta}{2\pi} F_{01} \end{aligned} \quad (\text{C.390})$$

这样一个理论可以被参数 e, ξ, Θ 来刻画。在下面，我们先来看看这个理论的基本性质：对称性和耦合常数的跑动行为：

Symmetry

从这个 Lagrangian 中，我们可以看到理论中具有三个全局对称性： $SU(N)$ 和两个 R-对称性 $U(1)_R^V, U(1)_R^A$ 。不同的场在这个对称性下如下表变化：

	$SU(N)$	$U(1)_R^V$	$U(1)_R^A$
θ^\pm	1	1	± 1
$\bar{\theta}^\pm$	1	-1	∓ 1
Φ, z	(N)	0	0
ψ_+	(N)	1	-1
ψ_-	(N)	1	1

这些对称性并不都是量子对称性，事实上 $U(1)_R^A$ 对称性中会存在量子反常。为了看到这一点，我们可以用 Fujikawa 方法计算出二维时空中的量子反常。由于这些计算和 8.3 节中的计算完全相似，这里仅仅给出一个最终的结果：如果理论中有若干个费米子 ψ_+ 和若干

⁸⁴这一节的讨论来自于两篇文章，第一篇是 Edward Witten 的文章 hep-th/9301042，第二篇是 Keitaro Hori 和 Cumrum Vafa 的文章 hep-th/0002222。

个费米子 ψ_- , 分别处于规范群的某些表示 R 中, 那么在一个由 θ^a 确定的变换 $\exp(i\theta^a T^a)$ 下, 路径积分测度会多出以下的 Jacobi 因子:

$$J[A] = \exp \left[\frac{i}{4\pi} \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} \theta^a F_{\mu\nu}^b \left(\sum_+ \text{Tr}(T_R^a T_R^b) - \sum_- \text{Tr}(T_R^a T_R^b) \right) \right] \quad (\text{C.391})$$

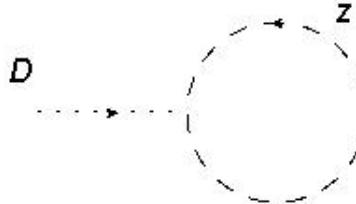
由于 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 的超对称中具有相等数量的 + 和 - 费米子, 于是它们对 $U(1)_j$ 和 $U(1)_R^V$ 反常的贡献完全抵消了。不过由于 + 和 - 费米子具有不同的 $U(1)_R^A$ 荷, 于是 $U(1)_R^A$ 对称性是反常的。对于一个 $U(1)_R^A$ 转动 $e^{i\alpha}$, 其效应可以通过对 Θ 角做如下的平移来抵消:

$$\Theta \rightarrow \Theta + 2 \sum_i Q_i \alpha, \quad t \rightarrow t + \frac{\sum_i Q_i}{\pi} \alpha \quad (\text{C.392})$$

由于 Θ 角是周期 2π 的, 于是这个反常并没有完全破坏 $U(1)_R^A$, 而是将其破坏到了 $\alpha = \pi n / \sum_i Q_i$ 的 $\mathbb{Z}_{2 \sum_i Q_i}$ 子群。

Running Coupling Constant

接下来, 让我们看看理论的跑动耦合常数。为此, 可以先试着微扰地计算一下这个理论的跑动耦合常数, 看看这个理论在 IR 端会有什么样的行为。首先由于耦合常数 e 是量纲 1 的, 于是规范场动力学项的贡献将会在 IR 端被压低, 在讨论 IR 性质的时候可以忽略。又由于 Θ 项没有微扰效应, 它在重整化群下也不跑动, 于是唯一可能跑动的参数就是 FI 项的耦合常数 ξ 。而在单圈阶, 贡献这一跑动耦合常数的 Feynman 图只有以下的图:



为了正规化红外发散, 我们可以给标量 z 引入一个质量 m 。此时为了使得这个图有限, FI 耦合对应的抵消项 $\delta\xi$ 需要满足:

$$i\delta\xi - \sum_i Q_i \int_0^{\Lambda_{\text{UV}}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon} = i\delta\xi - i \frac{\sum_i Q_i}{2\pi} \log \left(\frac{\Lambda_{\text{UV}}}{m} \right) = \text{finite} \quad (\text{C.393})$$

从而为了消去理论中的紫外发散, FI 耦合常数就要被重整化为 $\xi_0 = \xi(\mu) + \frac{\sum_i Q_i}{2\pi} \log \left(\frac{\Lambda_{\text{UV}}}{\mu} \right)$, 这也就意味着 $\xi(\mu)$ 会如下跑动:

$$\frac{d\xi(\mu)}{d \log \mu} = \frac{1}{2\pi} \sum_i Q_i \quad (\text{C.394})$$

由于 Θ 角不跑动, 于是复耦合常数 $t = i\xi + \Theta/2\pi$ 的跑动也可以被写为:

$$\frac{dt(\mu)}{d \log \mu} = \frac{i}{2\pi} \sum_i Q_i \quad (\text{C.395})$$

利用这个重整化群跑动，我们可以定义以下的重整化群不变量：

$$\Lambda := \mu e^{\frac{2\pi}{\sum_i Q_i} i t(\mu)} = \mu \exp \left[-\frac{2\pi}{\sum_i Q_i} \xi + i \frac{\Theta}{\sum_i Q_i} \right] \quad (\text{C.396})$$

从而一个任意能标处的复耦合常数 t 就可以被写为：

$$t(\mu) = \frac{i \sum_i Q_i}{2\pi} \log \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right) \quad (\text{C.397})$$

这意味着什么呢？由于规范场的动力学项正比于 $1/e^2$ ，是一个无关算符，于是在 $\mu \ll e$ 的 IR 端，我们可以忽略掉规范场的动力学项，此时这些规范场就将成为辅助场。在一个能标 μ 上，如果我们积分掉辅助场 D ，那么就将得到约束 $\sum_i Q_i |z_i|^2 = \xi$ 。如果再将 σ, λ 积分掉，得到的四费米子相互作用都会反比于这一组合，从而正比于 $1/\xi$ 。这样看来， $1/\xi$ 才是 IR 端的理论中真正的耦合常数。这个跑动关系实际上就意味着理论在 IR 端会成为强耦合的理论，用 $1/\xi$ 的幂级数给出的微扰论将会失效。

如果我们忽略掉规范场的动力学项，那么上面这个单圈图也就是唯一一个贡献 ξ 中紫外发散的 Feynman 图。这也十分容易证明：对于一个 Feynman 图而言，总有关系 $I - V + 1 = L$ ，其中 I, V, L 分别是内线数、顶点数和圈数。在这个理论中，不存在规范场传播子，并且理论中只有两种顶点——一种顶点 V_s 只连接两个物质场，另一种 V_g 只和规范场有关。根据物质传播子的端点守恒，在一个只有规范场外线的图中，内线数 I 就一定要与连接两个物质场的顶点数 V_s 相等，留下 $L = 1 - V_g$ 。也就是说，贡献任何只有规范场外线的正规顶点的 Feynman 图最多只能有单圈阶。于是倘若我们不考虑瞬子等非微扰贡献，这个 beta 函数在 IR 下就是 exact 的。

Vacuum Structure

接下来，让我们讨论一下这个理论的真空结构。在经典层面上，这个模型对应的标量势是：

$$U = \frac{e^2}{2} \left(\sum_i Q_i |z_i|^2 - \xi \right)^2 + 2|\sigma|^2 \sum_i Q_i^2 |z_i|^2 \quad (\text{C.398})$$

这个标量势的最小值就对应理论的经典真空。由于标量势的第一项为 0 蕴含 $\sum_i Q_i |z_i|^2 = \xi$ ，于是 $\xi > 0$ 时，总存在一个 $|z_i|^2$ 不为 0。为了最小化第二项，真空就一定满足 $\langle \sigma \rangle = 0$ 。从而此时的经典真空由以下真空期待值刻画：

$$\sum_i Q_i |z_i|^2 = \xi, \quad \sigma = 0 \quad (\text{C.399})$$

由于我们的理论是一个规范理论，于是我们还需要在这个结果中排除掉规范自由度，才能得到真正的经典模空间。从而经典模空间同构于以下的流形：

$$\sum_i Q_i |z_i|^2 = \xi, \quad z_i \sim z_i e^{i\alpha} \quad (\text{C.400})$$

也就是一个 N 维复圆锥曲面模掉等价关系 $z_i \sim z_i e^{i\alpha}$ 而得的流形，不妨称之为 M 。如果所有的 Q_i 都是 1，那么这就是 $N - 1$ 维的复射影空间 \mathbb{CP}^{N-1} ，从而此时的理论有时候被

我们称为超对称 $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$ 模型。既然理论的模空间是 M ，如果量子修正不会改变这个结果，那么体系的无质量自由度也就是 M 上的坐标，而规范场和垂直于 M 的自由度将会获得质量。在物理学中，一个场自由度为流形上的坐标的量子场论被我们称为这个流形上的**非线性 sigma 模型**，从而经典上讲，体系在 IR 就会成为 M 上的非线性 sigma 模型⁸⁵。

当然，在上面的讨论中，我们默认了 Q_i 是能使 $\sum_i Q_i |z_i|^2 = \xi$ 被满足的。不过事实可能并非如此。考虑一个 $\xi > 0$ 且所有 $Q_i < 0$ 的理论，那么很显然 $\sum_i Q_i |z_i|^2 = \xi$ 没有解，此时超对称就是被自发破缺的。

最后，我们还需要额外关注一下 $\xi = 0$ 的情形。此时除了 $\sum_i Q_i |z_i|^2 = 0, \sigma = 0$ 的经典真空之外，还存在一支 σ 为任意复数、 $z_i = 0$ 的真空。这一支真空仅在 $\xi = 0$ 的时候出现，由于每个 z_i 都没有真空期望值，此时的规范场是无质量的，如同标准模型中的电磁场。因为这个缘故，这一支真空有时也被称为 **Coulomb 支**。由于这些额外真空的出现，原本的模空间 M 在 z_i 的处将存在额外的自由度（对应 Coulomb 支切向的激发），于是此时 $z_i = 0$ 的点将体现为经典模空间 M 上的奇点。

上面我们讨论了理论的经典模空间，那么一个自然的问题就是：它会不会被量子修正改变呢？为了看到量子修正对真空结构的影响，我们可以将物质场积分掉，那么得到的就将是一个只和规范场有关的有效作用量⁸⁶。由于规范场不存在动力学，此时这个作用量的经典极值就给出量子真空上规范场各分量的真空期待值，于是我们可以利用这样一个作用量窥探理论的真空结构。

在 σ 的真空期望值很大的时候， $\langle \sigma \rangle$ 相当于给了标量 z_i 以质量 $m_{z_i}^2 = 2Q_i^2|\sigma|^2$ ，此时 σ 相对于物质场而言是轻的，从而积分掉标量给出的有效作用量将是局域的，从而我们可以通过这样的局域作用量的极值给出这个区间上的真空结构。通过和上面类似的标量圈，我们可以计算出 Wilson 有效作用量中的有效 FI 耦合常数⁸⁷：

$$\xi_{\text{eff}} = \xi(\mu) - \sum_i \frac{Q_i}{2\pi} \log \left(\frac{\mu}{Q_i |\sigma|} \right) \quad (\text{C.401})$$

由于我们积分掉了一整个超多重态，于是超对称在这个积分过程后也仍然保持。也就是说，这个有效的相互作用也可以用一个有效的扭曲超势给出。考虑以下的扭曲超势：

$$\int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \Sigma \log(p\Sigma) + \text{h.c.} = -\sqrt{2}(D - iF_{01})(\log(p|\sigma|) + 1) - \frac{2}{\sigma} \bar{\lambda}_+ \lambda_- + \text{h.c.} \quad (\text{C.402})$$

这个有效超势就会带来 FI 耦合的有效“平移” $\xi_{\text{eff}} = \xi - \sqrt{2} \log(p|\sigma|)$ ⁸⁸。也就是说，上面这个积分掉物质场而得的有效 FI 耦合常数可以被如下的有效扭曲超势给出：

$$- \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \sum_i \frac{Q_i}{2\sqrt{2}\pi} \Sigma \log \left(\frac{Q_i \Sigma}{\mu} \right) + \text{h.c.} \quad (\text{C.403})$$

⁸⁵由于超对称没有破缺，事实上除了 $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$ 上的坐标作为玻色自由度之外，理论中还会存在与之对应的费米自由度。于是严格地说，理论在 IR 是一个**超对称的非线性 sigma 模型**。

⁸⁶我们必须说明：这些规范场并不是理论的 IR 自由度，我们积分掉物质场只是因为想要得到理论的真空结构，而并不意味着这就是物理的 IR 有效作用量。

⁸⁷这里我们先用了 $\overline{\text{MS}}$ 方案来重整化这个结果中的紫外发散，再舍去了分母上的 $\sqrt{2}$ 。这个舍去的过程仅仅相当于切换了一个其他的重整化方案。在 Witten 的原始论文中，他使用了正规化子为 $2\mu^2$ 的 Pauli-Villars 方案做了类似的事情。

⁸⁸由于我们关注的是 σ 的有效超势，于是这里忽视掉了所有及其无关的部分。

由于超对称在积分掉物质场后仍然保持，于是积分掉物质场所给出的有效作用量中一定含有这样一项。事实上，无重整定理保证了 ξ 的这个修正正是扭曲超势项中唯一的紫外发散，除此之外有效的扭曲超势中就不含任何其他项。于是在积分掉物质场之后，得到的有效扭曲超势就是：

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \left(it(\mu)\Sigma - \sum_i \frac{Q_i}{2\pi} \Sigma \log \left(\frac{Q_i \Sigma}{\mu} \right) \right) + \text{h.c.} \quad (\text{C.404})$$

从这个结果中，我们能够一窥理论的真空结构。由于 Lorentz 对称性不会自发破缺，于是能够获得真空期望值的规范场分量只有 $\sigma, \bar{\sigma}$ 和 D 。又由于 D 分量是 Gaussian 的，我们可以直接将其积分掉，最后剩下的就是以下的 σ 的有效势：

$$U(\sigma) = \frac{e}{2} \left| it(\mu) - \sum_i \frac{Q_i}{2\pi} \left(\log \left(\frac{Q_i \sigma}{\mu} \right) + 1 \right) \right|^2 \quad (\text{C.405})$$

不过这还不是故事的全部。由于 Θ 角是周期 2π 的，于是 $t = i\xi + \frac{\Theta}{2\pi}$ 应该是周期 1 的。对于一个构型 σ 而言，其真正的有效势应该是所有 $U(\sigma, t + n), n \in \mathbb{Z}$ 中最小的那个。在下面的讨论中，我们会将这个最小化 $U(\sigma, t + n)$ 的 $t + n$ 记作 \hat{t} ，于是真正的有效势就是将上面这个 t 换成 \hat{t} 后的结果。最后，我需要提醒一下：这个有效势的导出是依赖于 $\langle \sigma \rangle$ 很大这一条件的，于是我们只能用它分析这个区域中的真空结构。

Example: Theory with $\sum_i Q_i = 0$

接下来，让我们考虑几个上面这套理论的具体例子。首先，让我们考虑一个 $\sum_i Q_i = 0$ 的理论。根据上面的讨论，此时 $U(1)_R^A$ 对称性没有破缺，并且 FI 耦合常数不跑动。从而此时 ξ 是一个真正的自由参数，不同的 ξ 对应完全不同的理论，我们需要分别考虑不同 ξ 的行为。

首先，由于 ξ 才是 IR 端理论真正的耦合常数，于是在 $\xi \gg 0$ 和 $\xi \ll 0$ 时，经典真空和量子真空差距不大，前面的分析仍然适用。量子效应真正的体现于：原本 $\xi = 0$, Θ 任意的这一条线⁸⁹ 上都具有额外的 Coulomb 支，于是理论的 IR 性质在越过这条线时可能会出现跃变，呈现不同的 IR 相。从这个意义上， t 复平面上的这条线都是某种“奇点”⁹⁰，越过这些奇点时理论可能会出现相变。而接下来我们会看到：量子效应保证了只有这条线上的一点会存在奇异性。

为了看到这一点，可以考虑 $\xi = 0$ 时的有效势，由于 $\sum_i Q_i = 0$ ，于是后面的 $\log(\sigma/\mu)$ 相互抵消，只剩下：

$$U(\sigma) = \frac{e}{2} \left| it(\mu) - \sum_i \frac{Q_i}{2\pi} \log(Q_i) \right|^2 \quad (\text{C.406})$$

由此可见，虽然所有 σ 的有效势完全相同，但是除去 $\Theta = 0$ 之外，其他的 Θ 的构型全部具有非 0 的有效势，从而大 σ 区域中不存在任何超对称真空，也就是不存在 Coulomb 支。于是 Coulomb 支只在 $\Theta = 0$ 时才会出现！这也就说明了：量子效应保证了在 $t \in \mathbb{R}$ 的

⁸⁹请想象一个 t 对应的复平面， $\xi = 0, \Theta$ 任意就对应实轴。

⁹⁰这里的奇点指的是相变意义上的奇点——一个简单的例子是：在越过相变点时热容等物理量可能发散。这并不是模空间上的奇点！

线上 $t = 0$ 的一点会存在奇异性。这告诉我们：虽然 $\xi >> 0$ 和 $\xi << 0$ 时的理论迥然不同（例如，它们可以对应不同的模空间、在 IR 上是不同流形上的非线性 sigma 模型），但是它们之间实际上是可以连续过渡的，对应同一个 IR 相！而这个过渡过程中的真空结构就可以从上面这个关系中得到。

Example: the $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ Model

我们的下一个例子是超对称 $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$ 模型，也就是所有 $Q_i = 1$ 的情形。此时，由于理论的跑动耦合常数是：

$$t(\mu) = \frac{iN}{2\pi} \log\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) \quad (\text{C.407})$$

从而无论如何，理论在 IR 都会跑动到 $\xi < 0$ 的情形，于是我们没有必要对不同的 ξ 初值分类讨论，它们都具有同样的 IR 行为。从有效势中可以看出， $\langle\sigma\rangle >> \mu$ 这一区间中的超对称真空对应有效势的极小值，也就是要满足以下的条件：

$$i\hat{t}(\mu) = \frac{N}{2\pi}(\log(\sigma/\mu) + 1) \quad (\text{C.408})$$

其中由于 $\sigma >> \mu$ ，我们可以舍去最后的那个 1。由此可见，对这一区间中中的每个真空而言， σ 的期待值一定满足：

$$\langle\sigma\rangle = \mu \exp\left(\frac{2\pi i\hat{t}(\mu)}{N}\right) = \Lambda e^{2\pi i n/N} \quad (\text{C.409})$$

也就是说， σ 有 N 个可能的取值，它们分别对应不同的 $\hat{t} = t + n$ 。这和上面的经典分析有很大差别：在经典模空间上， σ 并不会具有任何的真空期待值，而在量子真空中， σ 的期待值是非 0 的。当然，这些讨论仅仅在 σ 具有很大的真空期望值的区间上成立，在 σ 的真空期望值较小时，物质场和 σ 具有相若的质量，于是这样求出的有效作用量是非局域的。我们并不能从这样的非局域有效作用量中得到 σ 较小的区间中具有多少超对称真空。

不过我们接下来就要说明： σ 较小的区间中应该不具有任何的超对称真空。这可以通过数出超对称真空的总个数的方式看出。为此，我们可以引入 **Witten 指标**的概念，它被定义为：

$$\text{Tr}[(-1)^F e^{-\beta H}] \quad (\text{C.410})$$

其中 F 是费米子数算符。这样定义的 Witten 指标有一个极其重要的性质：

Proposition 7. Witten 指标和 β 无关，它只和理论的真空态数量有关。并且它满足：

$$\text{Tr}[(-1)^F e^{-\beta H}] = n_B - n_F \quad (\text{C.411})$$

其中 n_B, n_F 分别是体系中费米子数为偶和奇的真空数量。

Proof. 对于任何费米子数为偶的非零能量态 $|\phi\rangle$ 而言，总存在一个费米子数为奇的态与其具有相同的能量来看到这一点。让我们考虑超对称生成元的组合 $\mathbb{Q} := Q_+ + Q_-$ ，容易发现 $\{\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^\dagger\} = 4H$ ，从而对任何一个态 $|\phi\rangle$ 作用 \mathbb{Q} 不会改变其能量，而仅仅改变这个态的费米子数。这也就说明了对于任何费米子数为偶的非零能量态 $|\phi\rangle$ 而言，总存在一个费米子数为奇的态 $\mathbb{Q}|\phi\rangle$ 与其具有相同的能量。反之，对于任何费米子数为奇的态，只要作用 \mathbb{Q}^\dagger

就能得到一个费米子数为偶的、相同能量的态。这说明理论中非零能量的量子态一一对应，于是它们不对 Witten 指标有任何的贡献。

对于零能量的真空态而言，由于 \mathbb{Q} 作用在其上只会得到 0，于是真空态并不满足上面这种一一对应的关系。从而只有真空态贡献 Witten 指标，并且：

$$\mathrm{Tr}[(-1)^F e^{-\beta H}] = n_B - n_F \quad (\mathrm{C}.412)$$

□

从而，通过计算理论的 Witten 指标，我们就能得到理论的真空态数目的信息。虽然这里不会详细讨论，但是对于前面这个模型而言，可以计算出 Witten 指标是 N 。在一个 $\sigma \neq 0$ 的真空中，由于所有费米自由度都具有质量，从而不存在费米子数非 0 的真空，于是体系中应该只有 N 个超对称真空，由上面给出的 σ 的 N 个可能取值刻画。在下面，我们也会利用对偶理论更加明确地看到这一点。

总结一下上面的讨论，超对称 \mathbb{CP}^{N-1} 理论在不同能标下的相结构如下所示：

- 在 $\mu > e$ 时，规范场还没有退耦，此时理论的基本自由度是物质场 z, ψ_{\pm} 和规范场 $A_{\mu}, \lambda_{\pm}, \sigma$ 。理论的 $SU(N)$ 味对称性并没有自发破缺。
- 在 $\Lambda \ll \mu < e$ 时，规范场退耦，给我们带来约束 $\sum |z_i|^2 = \xi, z_i^{\dagger} \psi_{i,\pm} = 0$ 。此时，理论的耦合常数就是 $1/\xi$ ，而它在这个能标下可以认为是比较小的。于是理论此时仍然是半经典的，其基本自由度还是经典自由度 z, ψ_{\pm} ，只不过它们之间要满足前面所给出的这个约束。由于不存在任何满足 $\sum |z_i|^2 = \xi$ 而在 $SU(N)$ 味对称性下不变的构型，于是 $SU(N)$ 味对称性会自发破缺，导致垂直于 $\langle z \rangle$ 方向的场都成为无质量的 Goldstone 玻色子。当然，这些真空会被量子修正所改变，它们不是真正的真空。
- 在 $\mu \ll \Lambda$ 时，量子效应会给出一个有效超势，使得经典真空和量子真空并不相同。前面所看到的 \mathbb{CP}^{N-1} 模空间会由量子效应获得额外的质量，从而不再是超对称真空。相对的，量子效应也会产生 N 个分立的超对称真空。由于真空是分立的，于是 σ 具有非零的质量，并且由于 σ 具有非零期待值，于是场 $z_i, \psi_{i,\pm}$ 也会获得一个非零的质量，从而理论是 gapped 的，不存在 IR 自由度。由于 z_i 会获得一个非零的质量，于是它们的真空期待值应该是 0。从而一度“破缺”的 $SU(N)$ 对称性在 IR 下会被复原，理论中不再出现 Goldstone 粒子。这正是 **Mermin-Wagner 定理**告诉我们的：二维时空中不存在自发对称性破缺。事实上，对于任何二维时空中的理论，无论在半经典行为下会出现什么样的对称性自发破缺，这些破缺的对称性都会在 IR 中由强动力学复原。

C.6.3 Mirror Symmetry

Duality in a Toy Model

在上面的讨论中，我们通过积分掉物质场得以一瞥理论的真空结构，不过并没有看到理论的 IR 有效超势，也就并不能求出理论的 IR 动力学。事实上，我们（再一次）可以通过对偶的方式求出理论的 IR 动力学。为了说明我们的思路，可以考虑以下的一个简化的模型：

$$\mathcal{L} = -|D_{\mu}\phi|^2 = -(\partial_{\mu}\rho)^2 - \rho^2(\partial_{\mu}\varphi + QA_{\mu})^2 \quad (\mathrm{C}.413)$$

其中, 我们将复标量场 ϕ 参数化为了 $\phi = \rho e^{i\varphi}$ 。这样一个 Lagrangian 可以通过积分掉下面这个 Lagrangian 中的辅助场 B 来获得:

$$\mathcal{L} = -(\partial_\mu \rho)^2 - \frac{1}{4\rho^2} B_\mu B^\mu + \epsilon^{\mu\nu} B_\mu (\partial_\nu \varphi + Q A_\nu) \quad (\text{C.414})$$

从这个 Lagrangian 出发, 如果我们换一条路线, 积分掉 φ 而不是 B , 那么得到的理论显然和原本的理论对偶。不过在积分掉它之前, 我们还有一个问题不甚明了: φ 是以 2π 为周期的一个场, 我们还不是很明白如何积分掉这样一个周期的场。

为了得到这个问题的答案, 可以考虑一个一般的时空流形 M 。如果 M 具有亏格⁹¹, 那么它的第一同调群就具有维数 $\dim H_1(M) = 2g$ 。根据 de Rham 定理, 其第一 de Rham 上同调群也应该有 $\dim H^1(M) = 2g$ 。这意味着存在 $2g$ 个独立的 M 上的 1-形式 ω_i 满足 $d\omega_i = 0$ 而 ω_i 并不是某个函数的外微分 $\omega_i = d\xi_i$ 。

对于一个周期的函数 φ 而言, 当我们沿着一条 M 中非平凡的路径平移一圈时, 它可能会回到 $\varphi = \varphi + 2\pi n$ 而不是 φ 本身。根据 Stokes 定理, 这些额外的行为就和前述的 1-形式 ω_i 有关。如果我们对 ω_i 进行适当的归一化, 那么一个一般的周期函数 φ 就一定满足:

$$d\varphi = d\varphi_0 + \sum_i 2\pi n_i \omega_i \quad (\text{C.415})$$

其中 φ_0 是一个非周期的函数。而在路径积分中, 由于我们要对所有可能的 φ 求和, 于是对 φ 积分相当于先对 φ_0 积分, 再对 n_i 求和。在前面这个 Lagrangian 中, 这也就相当于:

$$\begin{aligned} & \sum_{\{n_i\}} \int \mathcal{D}\varphi_0 \exp \left(i \int d^2x B \wedge (d\varphi_0 + 2\pi n_i \omega_i + Q A) \right) \\ &= \sum_{\{n_i\}} \delta(dB) \exp \left(2\pi i \sum_{ij} a_i n_j J_{ij} \right) = \delta(dB) (2\pi)^{2g} \prod_i \sum_{m_i \in \mathbb{Z}} \delta(a_i - 2\pi m_i) \end{aligned} \quad (\text{C.416})$$

其中在第一个等号处, 由于 $dB = 0$, 于是它也可以被写为 $dB = d\theta + \sum_i a_i \omega_i$ 。在这一步, 我们还额外定义了 $J_{ij} := i \int_M \omega_i \wedge \omega_j$ 。在第二个等号处, 我们只是利用了关系 $\sum_n e^{ian} = 2\pi \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(a - 2\pi m)$ 而已。这告诉我们 a_i 只能是 2π 的整数倍, 于是有:

$$dB = d\theta + \sum_i 2\pi m_i \omega_i \quad (\text{C.417})$$

这也就意味着: B 也是一个周期为 2π 的场。于是积分掉 φ 不但给出了约束条件 $dB = 0$, 还使得 B 满足 $B = d\theta$, 其中 θ 是一个周期为 2π 的场。于是积分掉 φ 后的 Lagrangian 就变成:

$$\mathcal{L} = -(\partial_\mu \rho)^2 - \frac{1}{4\rho^2} (\partial_\mu \theta)^2 + Q\theta \epsilon^{\mu\nu} \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \quad (\text{C.418})$$

这就是我们最终得到的对偶理论。可以看到, 在对偶理论中, 这里的 θ 角相当于一个具有动力学的 Θ 角! 在后面的超对称情形中, 我们也会看到类似的效果。上面这个过程就是我们得到对偶理论的方法。

⁹¹这意味着它同胚于 g 个相粘连的环面。水顺便说一下, 这一节的讨论将会无可避免地使用同调群、de Rham 上同调、Stokes 定理等数学概念。如果你对此不熟悉, 也许可以看看 Mikio Nakahara 的 *Geometry, Topology and Physics*。

Duality in SUSY Theories

接下来，让我们看看这个对偶如何应用在超对称理论中。先从以下的 Lagrangian 开始，其中 B 是一个实的超场，而 Y 是一个扭曲的手征超场，并且 $\text{Im}Y$ 以 2π 为周期：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \int d^4\theta \left(e^{2QV+B} - \frac{1}{2}(Y + Y^\dagger)B \right) = \frac{1}{8\pi} \int d^4\theta e^{2QV+B} - \frac{1}{16\pi} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- (\bar{D}_+ D_- B) Y + \text{h.c.} \quad (\text{C.419})$$

首先可以尝试积分掉 Y 。后面这个扭曲超势项给出的约束就是 $\bar{D}_+ D_- B = 0$ ，并且由于 B 是实的，对 Y^\dagger 的积分也给出 $D_+ \bar{D}_- B = 0$ 。这样的 B 可以被表示为一个手征超场及其复共轭的和：

$$B = \Psi + \Psi^\dagger \quad (\text{C.420})$$

我们这里再次积分掉了一个周期的场，并且由于 $\bar{D}_+ D_- B$ 中包含 $\partial^2 B$ ，从而和上面的讨论类似地， $\text{Im}(B)$ 也会是一个周期为 2π 的场。利用 $B = \Psi + \Psi^\dagger$ ，我们可以看到 Lagrangian 在积分后变为 $\mathcal{L} = \int d^4\theta e^{2QV+\Psi+\Psi^\dagger}$ 。只要定义 $e^\Psi/\sqrt{8\pi} = \Phi$ ，这就回到了我们熟悉的 $\Phi^\dagger e^{2QV} \Phi$ 。于是这样一个 Lagrangian 是对偶于原本的物质场 Kahler 势的。

另外一侧，我们可以试着积分掉 B 。在微扰论中，我们可以试图通过 B 的运动方程积分掉 B 。由于 B 的运动方程是 $B = -2QV + \log(\frac{1}{2}(Y + Y^\dagger))$ ，于是积分后获得的有效 Lagrangian 就是：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{8\pi} \int d^4\theta \left[QV(Y + Y^\dagger) + \frac{1}{2}(Y + Y^\dagger) \log \left(\frac{1}{2}(Y + Y^\dagger) \right) \right] \\ &= \int d^4\theta \frac{1}{16\pi} (Y + Y^\dagger) \log \left(\frac{1}{2}(Y + Y^\dagger) \right) + \frac{1}{8\pi} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- QY (\bar{D}_+ D_- V) + \text{h.c.} \quad (\text{C.421}) \\ &= \int d^4\theta \frac{1}{16\pi} (Y + Y^\dagger) \log \left(\frac{1}{2}(Y + Y^\dagger) \right) + \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- QY \Sigma + \text{h.c.} \end{aligned}$$

可以看到， Y 的角色在对偶理论中依然类似于一个动力学的 Θ 角。这样得到的 Lagrangian 可以被看作是对偶理论的裸 Lagrangian 的一部分，加上其他项后，对偶理论的完整裸 Lagrangian 就是：

$$\int d^4\theta \left[-\frac{1}{2e^2} \Sigma^\dagger \Sigma + \frac{1}{16\pi} (Y_0 + Y_0^\dagger) \log \left(\frac{1}{2}(Y_0 + Y_0^\dagger) \right) \right] + \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- (QY_0 + 2\pi i t_0) \Sigma + \text{h.c.} \quad (\text{C.422})$$

接下来，我们可以对这个裸理论做重整化。我们知道耦合常数 t 要被重整化为：

$$t_0 = t + \frac{i}{2\pi} \log \left(\frac{\Lambda_{\text{UV}}}{\mu} \right) \quad (\text{C.423})$$

为了保证 $(QY + 2\pi i t)$ 这一项仍然有限，场 Y 也需要被如下地重整：

$$Y_0 = Y + \log \left(\frac{\Lambda_{\text{UV}}}{\mu} \right) \quad (\text{C.424})$$

于是在重整后，理论的 Kahler 势变为：

$$\begin{aligned}
& \int d^4\theta \frac{1}{16\pi} (Y_0 + Y_0^\dagger) \log \left(\frac{1}{2} (Y_0 + Y_0^\dagger) \right) \\
&= \int d^4\theta \frac{1}{16\pi} \left(Y + Y^\dagger + 2 \log \left(\frac{\Lambda_{\text{UV}}}{\mu} \right) \right) \log \left(\log \left(\frac{\Lambda_{\text{UV}}}{\mu} \right) + \frac{1}{2} (Y + Y^\dagger) \right) \\
&= \int d^4\theta \frac{1}{16\pi} \left(Y + Y^\dagger + 2 \log \left(\frac{\Lambda_{\text{UV}}}{\mu} \right) \right) \left[\log \left(\log \left(\frac{\Lambda_{\text{UV}}}{\mu} \right) \right) + \frac{Y + Y^\dagger}{2 \log \left(\frac{\Lambda_{\text{UV}}}{\mu} \right)} \right] \\
&= \int d^4\theta \frac{1}{16\pi} \frac{YY^\dagger}{\log \left(\frac{\Lambda_{\text{UV}}}{\mu} \right)} = \int d^4\theta \frac{YY^\dagger}{32\pi^2 \xi_0}
\end{aligned} \tag{C.425}$$

其中在第二行中， \log 中的高阶项总含有 $[\log(\Lambda_{\text{UV}}/\mu)]^{-1}$ 的高阶项，从而可以舍去。而在最后一行的第一个等号处，我们利用了除去 YY^\dagger 之外的项均不含 $\theta^+ \theta^- \bar{\theta}^- \bar{\theta}^+$ 分量的事实。

从这个对偶的 Kahler 势中，我们可以得到这个对偶中的两个重要性质：首先，如果我们的体系是定义在连续空间中的，那么 Λ_{UV} 理应是无穷大，从而 ξ_0 也是无穷大。也就是说，如果我们的体系是定义在连续空间中的，那么对偶理论的 Kahler 势就应该是 0！另外一点是，这个 Kahler 势很显然不是重整化群不变的： Y 会在重整化群下跑动，但 ξ_0 不会。这意味着 Y 实际上并不是一个物理的 object，我们不能谈论 Y 粒子的散射。

总结一下上面的讨论，我们得到了以下的两个（重整的）理论在树图阶互相对偶的这一结论：

这两个理论对偶（在树图阶）

$$\int d^4\theta \left(\Phi^\dagger e^{2QV} \Phi + \frac{1}{e^2} \text{tr}(\bar{\Sigma}\Sigma) \right) + \frac{it}{2\sqrt{2}} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \Sigma + \text{h.c.} \tag{C.426}$$

$$\int d^4\theta \left[-\frac{1}{2e^2} \Sigma^\dagger \Sigma + \frac{1}{32\pi^2 \xi_0} YY^\dagger \right] + \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- (QY + 2\pi it(\mu)) \Sigma + \text{h.c.} \tag{C.427}$$

这可以被轻易地推广到理论中具有多个物质场的情形：

这两个理论对偶（在树图阶）

$$\int d^4\theta \left(\sum_i \Phi_i^\dagger e^{2QV} \Phi_i + \frac{1}{e^2} \text{tr}(\bar{\Sigma}\Sigma) \right) + \frac{it}{2\sqrt{2}} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \Sigma + \text{h.c.} \tag{C.428}$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4\theta \left[-\frac{1}{2e^2} \Sigma^\dagger \Sigma + \sum_i \frac{1}{32\pi^2 \xi_0} Y_i Y_i^\dagger \right] \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \left(\sum_i Q_i Y_i + 2\pi it(\mu) \right) \Sigma + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{C.429}$$

Non-perturbative Correction from Instanton

接下来的问题就是：既然这仅仅是一个微扰的结果，那么高阶量子修正或瞬子等非微扰的贡献会不会改变这个关系？答案是肯定的。事实上，在对偶的理论中，如果我们对 Y 平移一个纯虚数 c_i ，那么只要 $\sum_i Q_i c_i = 0$ ，理论的作用量就不会改变。而在原本的理论中，我们并没有这样一个对称性，于是对偶两边的对称性并不相同，这怎么可能！这告诉我们，更高阶或非微扰的量子修正一定会改变这个关系来修好这件事情。

事实上，和前面几节中看到的结果类似地，我们可以通过对称性和弱耦合极限将修正后的关系直接猜出来。首先让我们考虑仅有一个手征超场的理论，这个理论的经典对称性只有两个 $U(1)_R$ 对称性。前面的讨论告诉我们， $U(1)_R^A$ 对称性是反常的。对于一个 $U(1)_R^A$ 转动 $e^{i\alpha}$ ，其效应可以通过对 Θ 角做如下的平移来抵消：

$$\Theta \rightarrow \Theta + 2 \sum_i Q_i \alpha = \Theta + 2\alpha, \quad t \rightarrow t + \frac{\sum_i Q_i}{\pi} \alpha = t + \frac{\alpha}{\pi} \quad (\text{C.430})$$

这也就告诉我们： $\Lambda = \mu e^{2\pi i t}$ 具有 R_A 荷 2。由于对偶理论和原本的理论应该具有完全相同的量子对称性，从而它也应该在 $U(1)_R^V$ 和 spurious 的 $U(1)_R^A$ 下不变。如果对偶理论的扭曲超势被量子修正所修改，那么这个修正项 $\Delta \tilde{W}$ 也应该具有 R_V 荷 0 和 R_A 荷 2。利用这一点，我们可以给 $\Delta \tilde{W}$ 一个很强的限制。

由于“全纯性”，在对偶理论中的这个扭曲超势只能依赖于“全纯”耦合 t, Σ, Y 这些手征超场以及参数 μ 。其中 t, μ 的依赖性又可以重新组合成 Λ, t 的依赖性，从而：

$$\Delta \tilde{W} = \Delta \tilde{W}(t, \Sigma, Y, \Lambda) \quad (\text{C.431})$$

为了用 $U(1)_R$ 对称性限制 $\Delta \tilde{W}$ ，我们需要知道对偶理论中的这些东西在 $U(1)_R$ 下如何变化。由于前面的对偶过程中 t, Σ, Λ 根本就和原理论中的这些量没有区别，它们当然和原理论中的变化规律完全一致。我们唯一需要了解的就是 Y 的变化规律。

在对偶理论中，由于不存在任何手征超场，于是不存在任何反常 Jacobi 因子。为了使作用量在 $\Theta \rightarrow \Theta + 2\alpha$ 下不变， $Y + 2\pi i t$ 这一组合一定不会在 $U(1)_R^A$ 下变化。从而在 $U(1)_R^A$ 下， Y 的变化一定是：

$$Y \rightarrow Y - 2i\alpha \quad (\text{C.432})$$

这告诉我们，为了使得 $\Delta \tilde{W}$ 在 $U(1)_R^A$ 下不变，它只能依赖于 $Y + 2\pi i t$ 这个组合。又由于 Y, t 虚部的周期性，对它们的依赖只能反映在 $e^{Y+2\pi i t}$ 中：

$$\Delta \tilde{W} = \Delta \tilde{W}(\Sigma, \Lambda, e^{Y+2\pi i t}) \quad (\text{C.433})$$

最后， $\Delta \tilde{W}$ 一定具有量纲 1。被这些条件限制后，这个 $\Delta \tilde{W}$ 只能具有以下的形式：

$$\Delta \tilde{W} = \Sigma f(\Lambda/\Sigma, e^{Y+2\pi i t}) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} c_{nm} \Sigma \left(\frac{\Lambda}{\Sigma} \right)^n e^{-m(Y+2\pi i t)} = \sum_{nm} c_{nm} \Sigma^{1-n} \mu^n e^{-mY + (n-m)2\pi i t} \quad (\text{C.434})$$

接下来，我们就试图利用弱耦合极限来限制这些系数 c_{nm} ：

- 当 $\xi \gg 1$ ，也就是弱耦合时，所有项都不能具有 e^ξ 的正幂次。这要求 $n < m$ 的所有系数 c_{nm} 均为 0，只留下 $n \geq m$ 的项。

- 当 Y 的真空期望值不为 0 时, 由于对偶关系 $\text{Re}(Y) = \Phi^\dagger e^{2QV} \Phi$, 从而 Φ 的真空期望值也不为 0, 这破坏了 $U(1)$ 规范对称性, 应该给 Σ 一个质量。从而如果固定 Y 为常数, 那么 $\Delta\tilde{W}$ 应该关于 Σ 解析。这要求 $1 - n \geq 0$, 从而只留下 $n \leq 1$ 的项。
- 当 Y 的真空期望值很大时, 此时规范场具有一个很大的质量, 理应和物质场脱耦, 于是此时的理论应该是弱耦合的。为了给出正确的弱耦合极限, 所有 e^Y 的正幂次项都应该为 0。这要求 $m \geq 0$ 。

这些分析下, 幸存的项只有 $1 \geq n \geq m \geq 0$ 的三项了:

$$\Delta\tilde{W} = c_{11}\mu e^{-Y} + c_{10}\mu e^{2\pi it} + c_{00}\Sigma \quad (\text{C.435})$$

其中, c_{00} 项和树图阶的结果同阶, 高阶量子修正中不应该出现这样的项。 c_{10} 项是个常数, 从而也可以被我们忽略。最终留下的项只有:

$$\Delta\tilde{W} = c\mu e^{-Y} = c\Lambda e^{-(Y+2\pi it)} \quad (\text{C.436})$$

为了得到修正后的对偶理论, 我们需要做的最后一件事情就是定下这个系数 c 。我们的思路是: 既然对偶理论和原理论描述相同的物理, 那么如果我们将 Y 积分掉, 得到的应该是和上一小节相同的有效扭曲超势:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \left(it(\mu)\Sigma - \frac{1}{2\pi} \Sigma \log\left(\frac{\Sigma}{\mu}\right) \right) + \text{h.c.} \quad (\text{C.437})$$

于是只需要将积分掉 Y 的结果和这个相对比, 就能得到 c 的值。在加入这一项后, 新理论的扭曲超势是⁹²:

$$\int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \left[\frac{\sqrt{2}}{8\pi} (Y + 2\pi it(\mu)) \Sigma + c\mu e^{-Y} \right] \quad (\text{C.438})$$

我们试图在树图阶积分掉 Y 。 Y 的运动方程是:

$$\frac{\sqrt{2}}{8\pi} \Sigma = c\mu e^{-Y} \quad (\text{C.439})$$

将这代入前面的有效超势, 在 Σ 远大于 μ 时, 就可以得到:

$$\int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \left[\frac{\sqrt{2}}{8\pi} \left(2\pi it(\mu) - \log\left(\frac{\Sigma}{\mu} \frac{8\pi c}{\sqrt{2}}\right) \right) \Sigma \right] \quad (\text{C.440})$$

从而, 只要取:

$$c = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \quad (\text{C.441})$$

我们就能得到和上一小节相同的有效扭曲超势, 这就定下了 c 的值。综合上面的所有讨论, 我们最终能够完全非微扰地得到对偶理论的 Lagrangian:

⁹²由于前面的这个结果对应重整场, 于是这里我们也切换为了重整场。

$$\int d^4\theta \left[-\frac{1}{2e^2}\Sigma^\dagger\Sigma + \frac{1}{32\pi^2\xi_0}YY^\dagger \right] + \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- (Y\Sigma + 2\pi it(\mu)\Sigma + \mu e^{-Y}) \quad (\text{C.442})$$

Extend to Multi-Flavor Case

直到此处，我们已经完全明白了只有一个手征超场的理论对偶于什么样的对偶理论。接下来要做的就是将这个结论推广到具有多个手征超场的情形。此时的 Lagrangian 是：

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \left(\sum_i \Phi_i^\dagger e^{2Q_i V} \Phi_i - \frac{1}{2e^2} \Sigma^\dagger \Sigma \right) + \frac{it}{2\sqrt{2}} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \Sigma + h.c. \quad (\text{C.443})$$

这个理论具有 N 个 $U(1)$ 对称性：在第 i 个对称变换下，只有 Φ_i 变换 $\Phi_i \rightarrow e^{i\alpha} \Phi_i$ 。这 N 个 $U(1)$ 对称性中的一个特定组合 $Q_1 + \dots + Q_N$ 对应理论的规范对称性，而其他部分都是全局对称性。为了给出利用前面给出的结果给出这个理论对应的对偶理论，我们可以做一个小 trick：通过引入对应所有这 N 个 $U(1)$ 对称性的规范场 V_i ，将这些全局对称性都变为规范对称性：

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \left(\sum_i \Phi_i^\dagger e^{2Q_i V_i} \Phi_i - \sum_i \frac{1}{2e_i^2} \Sigma_i^\dagger \Sigma_i \right) + \frac{i}{2\sqrt{2}} \sum_i \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- t_i \Sigma_i + h.c. \quad (\text{C.444})$$

在这样得到的理论中，不同的 Φ_i, V_i 是完全独立的，于是我们可以利用前面的结论给出对偶理论中的扭曲超势：

$$\tilde{W} = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \sum_i [(Q_i Y_i + 2\pi t_i(\mu)) \Sigma_i + \mu e^{-Y_i}] \quad (\text{C.445})$$

明白了这一点之后，我们就可以通过将全局对称性的耦合常数 e 取为无穷的方式将这个理论变回原本的、只有 1 个规范场的理论。不过由于真正的规范场是：

$$V = \frac{1}{N} \sum_i V_i \quad (\text{C.446})$$

于是我们似乎不能通过将特定的 e_i 取为 0 的方式使我们想要的规范对称性变回全局对称性。不过还好，超对称再次出手救了我们：对于一个一般的理论而言，规范场的动力学项可以写为 $\frac{1}{2e_{ij}^2} \Sigma_i^\dagger \Sigma_j$ 。由于参数 e_{ij} 是 Kahler 势中的参数，而扭曲超势 \tilde{W} 只能依赖于“全纯”的参数，从而扭曲超势是“看不见” e_{ij} 的任何变化的。换句话说：不同的 e_{ij} 应该给出相同的扭曲超势。既然如此，我们就可以将规范场的动力学项“变形”为：

$$\frac{1}{2e_{ij}^2} \Sigma_i^\dagger \Sigma_j = \frac{1}{2e^2} \left| \frac{1}{N} \sum_i \Sigma_i \right|^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2\epsilon e^2} |\Sigma_i - \Sigma_{i+1}|^2 \quad (\text{C.447})$$

这样，只要我们取 $\epsilon \rightarrow 0$ ，那么理论就自然回到了原本的、只有一个规范场的理论。而所有这些操作都不改变任何“全纯”的参数，从而也不改变 \tilde{W} 。从而可以得知：原本的这个理论对偶于具有以下扭曲超势的理论：

$$\tilde{W} = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \left[\left(\sum_i Q_i Y_i + 2\pi t(\mu) \right) \Sigma + \sum_i \mu e^{-Y_i} \right] \quad (C.448)$$

值得一提的是：由于前面这些操作会改变对偶理论的 Kahler 势，于是我们不能从这个过程中得到任何和对偶理论的 Kahler 势相关的信息。不过事实上，我们可以通过对称性来猜测理论的 Kahler 势。首先，如果我们的理论定义在连续空间中，那么“变形”前的 Kahler 势也应该是 0。那么一个合理的猜测就是：“变形”后的 Kahler 势是否也是 0 呢？

至少对于 $N = 2$ 的情形来说，其答案是肯定的：在原理论中，除了 R-对称性还有一个 $SU(N)$ 的全局对称性，而这个 $SU(N)$ 的全局对称性是无法从 Lagrangian 中直接看出来的。对于 $N = 2$ 的情形而言，我们的对偶理论等价于具有 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超对称的 sine-Gordon 理论，而这篇文章⁹³说明了：具有 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超对称的 sine-Gordon 理论中存在一系列额外的守恒荷，它们构成的代数是 **q-形变的 $su(2)$ 代数 $\widehat{su_q(2)}$** 。并且在 Kahler 势为 0 的极限下，这个 $\widehat{su_q(2)}$ 代数会退化为 $su(2)$ 代数。这意味着：在 Kahler 势不为 0 时，体系并不具有 $SU(2)$ 的全局对称性，而是具有 $\widehat{su_q(2)}$ 对应的量子群的对称性，而只有 Kahler 势为 0 时的体系才具有 $SU(2)$ 的全局对称性。由于对偶两端的理论一定具有相同的对称性，于是只有 Kahler 势为 0 时的体系才能和原理论对偶！

由于对偶理论的场满足 $Y_i \equiv Y_i + 2\pi it$ ，于是它可以被认为是 $(N - 1)$ 维复柱面上的坐标。由于对偶理论中的基本自由度是手征超场，于是它可以被看作是对一般的、 $(N - 1)$ 维复柱面上的超对称非线性 sigma 模型做了一个镜像自同构。由于这个对偶联系了两个不同靶空间上的理论，于是物理学家们将这种对偶称为 **T-对偶**⁹⁴。另外，由于我们需要对对偶另一侧的超对称非线性 sigma 模型做一个镜像自同构，从而这样的对偶也被我们称为**镜像对称**。

Mirror Symmetry of \mathbb{CP}^{N-1} Model

作为这套形式理论的例子，让我们和上一节一样，考虑超对称 \mathbb{CP}^{N-1} 模型。此时，对偶理论的扭曲超势是：

$$\tilde{W} = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \left[\left(\sum_i Y_i + 2\pi it(\mu) \right) \Sigma + \sum_i \mu e^{-Y_i} \right] \quad (C.449)$$

如果我们再考虑 $e \rightarrow \infty$ 的情形，此时的规范场将会失去动力学，成为辅助场。倘若我们积分掉 Σ ，那么它将会给出如下的约束：

$$\sum_i Y_i + 2\pi it(\mu) = 0 \quad (C.450)$$

这导致理论中的自由度只剩下 Y_1, \dots, Y_{N-1} 的 $N - 1$ 个。积分掉规范场后，剩下的扭曲

⁹³Ken-Ichiro Kobayashi, Tsuneo Uematsu, *Quantum Conserved Charges and S-matrices in $N=2$ Supersymmetric Sine-Gordon Theory*, arXiv:hep-th/9112043.

⁹⁴T for Target space。顺便说一下，除了 S-对偶和 T-对偶之外，物理学家们还将结合 S-对偶和 T-对偶的对偶变换称为 **U-对偶**。这是一个很妙趣的名字——U 既是字母表上紧接着 S 和 T 的字母，你也可以认为是 U for Unified。

超势是：

$$\tilde{W} = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \mu \sum_i e^{-Y_i} = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \mu \left(\sum_{i=1}^{N-1} e^{-Y_i} + e^{-t(\mu) + Y_1 + \dots + Y_{N-1}} \right) \quad (\text{C.451})$$

这便给出了超对称 \mathbb{CP}^{N-1} 模型的对偶理论。事实上，具有上面给出的这个扭曲超势的、 $(N-1)$ 维复柱面上的理论被物理学家们称为 **A_{N-1} 仿射 Toda 理论**。上面我们所做的就是证明了超对称 \mathbb{CP}^{N-1} 模型对偶于 A_{N-1} 仿射 Toda 理论。由此，物理学家们也称 A_{N-1} 仿射 Toda 理论为超对称 \mathbb{CP}^{N-1} 模型的**镜像理论**。

从这个镜像理论中，我们也可以看到超对称 \mathbb{CP}^{N-1} 模型的真空结构。在镜像理论中，扭曲超势的最小值由以下的构型给出：

$$e^{-Y_1} = \dots = e^{-Y_{N-1}} = e^{-2\pi i(t+n)/N}, \quad n = 1, \dots, N \quad (\text{C.452})$$

和上一节中看到的结果一样：理论中有 N 个分立的真空态。由于手征反常， $U(1)_R^A$ 被破缺到了 \mathbb{Z}_{2N} 的分立 R-对称性，而当你选择一个真空时，这个 R-对称群又进一步破缺到了 \mathbb{Z}_2 。这也和我们在前一节中用 $\langle \sigma \rangle$ 看到的结果完全一致。在没有积分掉规范场的理论中，利用 Y_i 的运动方程，我们可以看到 $\Sigma = \mu e^{-Y_i}$ ，从而这些真空上的 $\langle \sigma \rangle$ 也就是 $\mu e^{-2\pi i(t+n)/N} = \Lambda^{2\pi i n / N}$ ——这正是上一节中给出的 $\langle \sigma \rangle$ 的真空期待值。

References

- [1] Edward Witten, *Phases of $\mathcal{N} = 2$ Theories in Two Dimensions*, arXiv:hep-th/9301042
- [2] Kentaro Hori, Cumrun Vafa, *Mirror Symmetry*, arXiv:hep-th/0002222
- [3] Yuji Tachikawa, *Lectures on 4d $N=1$ dynamics and related topics*, arXiv:hep-th/1812.08946
- [4] Keitaro Hori, *Trieste lectures on mirror symmetry*, ICTP Lect.Notes Ser. 13 (2003) 109-202
- [5] Ken-Ichiro Kobayashi, Tsuneo Uematsu, *Quantum Conserved Charges and S-matrices in $N=2$ Supersymmetric Sine-Gordon Theory*, arXiv:hep-th/9112043.

Appendix D

Conformal Field Theory

D.1 Conformal Invariance

这个附录的目标是讨论**共形场论**¹。在开始我们的讨论之前，当然要问一个问题：为什么要研究共形场论？从应用的角度讲，共形场论在凝聚态物理、量子统计物理和弦论中都有广泛的应用——对于前两者来说，由于在连续相变的临界点附近理论可以用一个共形场论来刻画，于是共形场论可以被用来探索相变现象；而在弦论中，为了对弦做一次量子化，我们需要对弦世界面上的坐标做量子化，这也就相当于考虑弦世界面上的 sigma 模型。而事实上，这个 sigma 模型自然会是一个二维的共形场论。另外，在规范理论中存在着所谓的“共形窗口”，即在某些情况下，重整化群会使理论在 IR 流向一个共形场论。通过研究共形场论，我们也可以得到关于规范理论此时的行为的更多认识。从理论的角度讲，共形场论是理论家们的很不错的“实验场”：共形场论事实上是具有最大对称性的量子场论²，它理应是最容易求解的量子场论。当理论物理学家们做出有关量子场论的猜想时，也可以利用共形场论进行验证。在这一节中，我们就将首先给出共形群和共形场论的定义，并初步看到具有共形对称性的量子场论会具有什么样的性质。

D.1.1 The Conformal Group and its Representations

The Conformal Group

让我们首先给出共形场论的定义——**共形场论**就是具有量子的共形对称性的量子场论。当然，你可能现在并不知道这句话是什么意义。为了弄清楚它的意义，我们首先需要明白什么是**共形对称性**。对于一个具有度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的时空，其上的**共形变换**就被定义为保持度规相差一个因子的时空变换 $x \rightarrow x'$ ：

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x) \quad (\text{D.1})$$

可以看出，共形变换在局部上看上去就像一个 Poincare 变换加上一个伸缩变换。一个时空中所有共形变换构成的群就被称为这个时空上的**共形群**，理论在共形群下的对称性便是**共形对称性**。为什么我们要叫这种变换“共形变换”呢？这是由于在一点处，两条曲线

¹这一章的主要参考是 Philippe Di Francesco, Pierre Mathieu, David Senechal 的 *Conformal Field Theory*。

²这里并没有考虑费米的对称性，例如超对称。如果考虑了超对称，那么超对称共形场论才是具有最大对称性的量子场论。

的夹角是 $\cos \theta = U^\mu V_\mu / \|U\| \|V\|$ ，这显然在上述的变换下不变。也就是说，上述的这些变换保持角度不变，从而在局部的意义上保持几何形状不变，故被称之为“共形变换”。

有了这个定义之后，我们就可以思考：共形群中都有什么样的变换呢？对于一个一般的无穷小变换 $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ 而言，在其下度规的变化就是：

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} = (\delta_\mu^\alpha - \partial_\mu \epsilon^\alpha) (\delta_\nu^\beta - \partial_\nu \epsilon^\beta) g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \quad (D.2)$$

而如果这个变换是共形变换，它就一定要满足 $g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x)$ ，从而：

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = (\Lambda(x) - 1) g_{\mu\nu}(x) \quad (D.3)$$

我们接下来的目标就是找出满足这个关系的 $\epsilon(x)$ 。首先，对这个关系求 trace，我们就能得到 $\Lambda(x)$ 的表达式：

$$d(1 + \Lambda(x)) = 2\partial_\mu \epsilon^\mu \quad (D.4)$$

其中 d 是时空维数。将这个关系代入上式，就得到了：

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho g_{\mu\nu} \quad (D.5)$$

这就是无穷小共形变换需要满足的条件。在下面的讨论中，我们特殊关注的是度规为平直度规 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ 的情形³。此时，通过对这个关系作用一个 ∂_ρ ，再经过一些指标置换，我们就能得到：

$$2\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = \eta_{\mu\rho} \partial_\nu f + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu f - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho f \quad (D.6)$$

其中 $f(x) = \Lambda(x) - 1$ 。对这个关系中的 μ, ν 指标收缩，就可以得到 $2\partial^2 \epsilon_\mu = (2-d)\partial_\mu f$ 。对这个关系再作用 ∂_ν ，同时对前面推出的 $d(1 + \Lambda(x)) = 2\partial_\mu \epsilon^\mu$ 作用 ∂^2 ，在联立这两个关系消去 ϵ 后，我们就可以知道：

$$(2-d)\partial_\mu \partial_\nu f = \eta_{\mu\nu} \partial^2 f \quad (D.7)$$

对两个指标缩并后，我们可以得到 $(d-1)\partial^2 f = 0$ 。在 d 不为 1 时，这也就意味着 f 满足：

$$\partial_\mu \partial_\nu f = 0 \quad (D.8)$$

接下来，我们就利用这些关系来求出不同维数的平直时空中的共形群。首先，让我们考虑 $d = 1$ 的情形。此时由于 $(d-1)\partial^2 f = 0$ 自动满足，于是任意函数 f 都能给出共形变换。这也可以说从共形变换的定义中直接看出——由于只有一个坐标，于是无论变换是什么，我们都有 $g'_{11}(x') = \Lambda(x) g_{11}(x)$ ，也就是说所有坐标变换都是共形的。

由于 $d = 2$ 的共形群包含着更加丰富而有趣的结构，于是我们会在后面单独处理它，在这里就让我们先暂时跳过 $d = 2$ ，考虑二维以上的共形变换。此时关系 $\partial_\mu \partial_\nu f = 0$ 使得 $f(x)$ 只能取：

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu \quad (D.9)$$

将这个关系代入 $2\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = \eta_{\mu\rho} \partial_\nu f + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu f - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho f$ ，我们就发现，这要求 $\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho$ 是一个常数，从而：

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho \quad (D.10)$$

³这里的 $\eta_{\mu\nu}$ 既可以是 Euclidean 度规，也可以是 Minkowski 度规。只要它满足 $\partial\eta = 0$ 即可。

其中由于后面的 $x^\rho x^\nu$ 是置换对称的, 于是我们不妨假设 $c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}$ 。并且由于这个关系对所有的 x 都成立, 我们从而可以分别考虑三个系数满足的条件:

- 对于 a_μ , 由于最一般的条件 $\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho g_{\mu\nu}$ 中只包含 ϵ 的导数, 从而 a^μ 可以是任意的常数。众所周知, 这个无穷小变换对应的有限变换也就对应以下的平移:

$$x'_\mu = x_\mu + a_\mu \quad (\text{D.11})$$

- 对于系数 $b_{\mu\nu}$ 而言, 最一般的条件给出以下的约束:

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d} \eta_{\mu\nu} b_\rho^\rho \quad (\text{D.12})$$

从而, $b_{\mu\nu}$ 的反对称部分是不受约束的, 而对称部分一定正比于 $\eta_{\mu\nu}$:

$$b_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} + \alpha \eta_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (\text{D.13})$$

相信我们一定都很熟悉 $\omega_{\mu\nu}$ 这部分——它就是无穷小的旋转⁴; 而后面的 $\alpha \eta_{\mu\nu}$ 对应的无穷小变换是 $x' = (1 + \alpha)x$, 从而也就是一个伸缩。于是共形群中还包括以下两类有限变换:

$$x'_\mu = M_\mu^\nu x_\nu, \quad x'_\mu = \lambda x_\mu \quad (\text{D.14})$$

- 最后, 对于二次的系数 $c_{\mu\nu\rho}$ 而言, 它需要满足:

$$c_{\mu\nu\rho} = \eta_{\mu\rho} b_\nu + \eta_{\mu\nu} b_\rho - \eta_{\nu\rho} b_\mu \quad \text{where} \quad b_\mu \equiv \frac{1}{d} c_{\sigma\mu}^\sigma \quad (\text{D.15})$$

它对应的无穷小变换也就是:

$$x'^\mu = x^\mu + 2(x \cdot b)x^\mu - b^\mu x^2 \quad (\text{D.16})$$

这些变换被我们称为**特殊共形变换(SCT)**。当然, 直接求出其对应的有限变换是比较复杂的。为了做到这一点, 我们可以利用一个 trick, 考虑 x^μ/x^2 的变化。经过一些简单的计算, 我们可以得到:

$$\frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} - b^\mu \quad (\text{D.17})$$

也就是说, 特殊共形变换无非就是对 $\frac{x^\mu}{x^2}$ 的平移。在这组坐标下, 其有限变换也就和上面具有相同的形式, 只不过此时的 b_μ 从无穷小变量变为了一个任意的矢量。只要将这个结果变回 x' 的形式, 我们就得到了有限的特殊共形变换:

$$x'_\mu = \frac{x_\mu - b_\mu x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2} \quad (\text{D.18})$$

到此为止, 我们就明白了 $d > 2$ 的共形群中包含什么样的变换。通过前面给出的无穷小变换的表达式, 我们也可以求出共形群在函数空间上 form 的表示的生成元⁵:

⁴如果时空是 Minkowski 时空, 那么 0 分量和 i 分量之间的旋转就是 Lorentz boost。

⁵一个值得注意的细节是: 由于 $D^\dagger = -i(x^\mu \partial_\mu + d) \neq D$, 于是伸缩 D 并不是 Hermitian 的, 于是在共形代数的表示中它不具有实的本征值。

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i\partial_\mu & D &= -ix^\mu\partial_\mu \\ L_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) & K_\mu &= -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu) \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

它们分别对应平移、伸缩、旋转和 SCT。对于 d 维时空中的共形群而言，我们一共有 d 个平移、1 个伸缩、 $(d-1)d/2$ 个旋转和 d 个 SCT，从而 d 维的共形群中一共具有 $(d+1)(d+2)/2$ 个生成元。通过计算这些生成元的对易关系，我们也能求出共形群的李代数——共形代数：

$$\begin{aligned} [D, P_\mu] &= iP_\mu \\ [D, K_\mu] &= -iK_\mu \\ [K_\mu, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}) \\ [K_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu) \\ [P_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu) \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}) \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

事实上，这一组对易关系能被我们写成更加简单形式。为了看到这一点，可以定义一个反对称的 J_{ab} ：

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}, \quad J_{-2,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu), \quad J_{-1,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu), \quad J_{-2,-1} = D \quad (\text{D.21})$$

这样一来， J_{ab} 就满足以下的对易关系：

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(\eta_{ad}J_{bc} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}) \quad (\text{D.22})$$

其中 $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, \eta_{\mu\nu})$ 。这也就是说：如果我们的时空是 Euclidean 的，那么 $d > 2$ 维时空中的共形代数就同构于 $\mathfrak{so}(d+1, 1)$ ，而如果我们的时空是 Minkowski 的，那么 $d > 2$ 维时空中的共形代数就同构于 $\mathfrak{so}(d, 2)$ 。

Representations of the Conformal Group

既然共形场论是具有共形对称性的量子场论，那么为了研究共形场论，我们当然要描述其中的场在共形群下如何变化。当然，我们需要注意的是：我们在这里讨论的都是经典场在共形群下如何变化。由于量子场论总是需要正规化才能被严格定义，而正规化总是会在理论中引入一个额外的标度。这个标度的存在会破坏经典的共形对称性，使得它不再量子对称性。从而经典的共形对称性并不蕴含量子的共形对称性。

为了描述场在共形群下如何变化，我们可以试图求出共形群的有限维不可约表示。由于我们知道场是时空的函数，于是我们知道它们在时空平移下如何变换—— $P_\mu = -i\partial_\mu$ 。从而我们只用考虑使得 $x = 0$ 不变的子群的有限维不可约表示⁶。而我们知道，这个子群中包含

⁶这个策略和我们在面对 Poincare 群时完全类似。为了分类场的变化行为，我们只考虑了 Poincare 群中使得 $x = 0$ 不变的子群——Lorentz 群。

的生成元有伸缩、旋转和 SCT 下的生成元 $D, L_{\mu\nu}, K_\mu$ 。如果我们考虑的表示中它们分别对应表示矩阵 $\tilde{\Delta}, S_{\mu\nu}$ 和 κ_μ ，那么它们应该满足以下的对易关系：

$$\begin{aligned} [\tilde{\Delta}, S_{\mu\nu}] &= 0 \\ [\tilde{\Delta}, \kappa_\mu] &= -i\kappa_\mu \\ [\kappa_\nu, \kappa_\mu] &= 0 \\ [\kappa_\rho, S_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}\kappa_\nu - \eta_{\rho\nu}\kappa_\mu) \\ [S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}S_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}S_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}S_{\mu\rho}) \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

其中， $S_{\mu\nu}$ 自动构成了一个 Lorentz 群的表示。在物理中，我们的场通常要处于 Lorentz 群的不可约表示之中，于是我们还额外要求我们的共形群不可约表示限制在 Lorentz 群上也是一个不可约表示。那么根据 Schur 引理，所有和 $S_{\mu\nu}$ 对易的矩阵都应该正比于单位矩阵，从而 $\tilde{\Delta}$ 一定是一个 c-数，并且关系 $[\tilde{\Delta}, \kappa_\mu] = -i\kappa_\mu$ 告诉我们所有的 κ_μ 都应该是 0。容易验证：这样构造的表示的确是不可约的。这也就意味着：对于满足这一要求的共形群不可约表示而言，我们完全可以用一个 c-数⁷ $\Delta \equiv i\tilde{\Delta}$ 和一个 Lorentz 群表示 R 完整刻画这个不可约表示 (Δ, R) 。例如，在四维时空中，Lorentz 群表示可以用两个半整数 (j_1, j_2) 刻画，于是四维共形群的不可约表示也可以被标记为 (Δ, j_1, j_2) 。

知道了场在 $x = 0$ 不变的子群下如何变换后，我们便可以开始考虑场在整个共形群下如何变化了。对于场 $\phi(x)$ 而言，如果我们需要对它作用一个生成元 T ，那么我们可以先将其平移到 $x = 0$ ，作用共形变换，然后再平移到变换后的点上去：

$$T\phi(x) = Te^{-ix^\mu P_\mu}\phi(0)e^{ix^\mu P_\mu} = e^{-ix^\mu P_\mu}(e^{ix^\mu P_\mu}Te^{-ix^\mu P_\mu})\phi(0)e^{ix^\mu P_\mu} = [(e^{ix^\mu P_\mu}Te^{-ix^\mu P_\mu})\phi](x) \quad (\text{D.24})$$

其中最后一个等号处，我们利用了生成元作用在 $x = 0$ 的场上应该还是 $x = 0$ 的局域算符的这一事实。从而我们发现，共形群表示 (Δ, R) 的生成元应该是 $e^{ix^\mu P_\mu}Te^{-ix^\mu P_\mu}$ 。根据 Baker-Hausdorff 公式，我们可以计算出：

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i\partial_\mu \\ L_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + S_{\mu\nu} \\ D &= -i\Delta - ix^\mu\partial_\mu \\ K_\mu &= -2ix_\mu\Delta - x^\nu S_{\mu\nu} - 2ix_\mu x^\nu\partial_\nu + ix^2\partial_\mu \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

这便是共形群表示 (Δ, R) 中的生成元。知道了这个表示的生成元之后，我们还可以看看 Δ 这个数的物理意义。为此，可以考虑一个无自旋的场 ϕ 。如果我们对时空作用一个共形变换：

$$\exp\left(-i\alpha D - i\beta_\mu K^\mu - ia_\mu P^\mu - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\right) : x \rightarrow x' \quad (\text{D.26})$$

那么它应该可以被分解为纯时空变换的部分和与 Δ, R 有关的部分。作用在场 ϕ 上，前者的作用仅仅是将 $\phi(x)$ 变为 $\phi(x')$ ，而后者给出 $\phi'(x')$ 和 $\phi(x')$ 之间相差的因子。对于我们的场而言，由于 $S_{\mu\nu} = 0$ ，后者的贡献就只剩下了 Δ 的部分：

$$\phi'(x') = e^{-i\alpha(-i\Delta) - i\beta_\mu(-2ix_\mu\Delta)}\phi(x) \quad (\text{D.27})$$

⁷ 我们在这里定义了 $\Delta \equiv i\tilde{\Delta}$ ，我们马上就会看到为什么如此定义。

经过一些计算，我们也能发现变换 $x \rightarrow x'$ 的 Jacobi 行列式满足 $|\frac{\partial x'}{\partial x}| = e^{d(\alpha+2\beta \cdot x)}$ 。从而：

$$\phi'(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta/d} \phi(x) \quad (\text{D.28})$$

如果我们考虑一个只具有伸缩的变换 $x' = \lambda x$ ，那么这就告诉我们： $\phi(x)$ 在伸缩下的变换就是：

$$\phi'(x') = \lambda^{-\Delta} \phi(x) \quad (\text{D.29})$$

这意味着什么呢？考虑量纲为 $-n$ 的 x^n ，它在伸缩下变化为 $x^n \rightarrow \lambda^n x^n$ 。从而我们看到： Δ 比较像是这个场在伸缩变换下的“量纲”，于是我们称其为**标度量纲**。总结一下上面的讨论——对于物理中关心的场而言，它们所处的共形群不可约表示限制在 Lorentz 群上也是不可约的，从而它可以被标度量纲 Δ 和自旋 R 完全刻画。这个表示的生成元由上文中的 (D.25) 式给出。有了这些不可约表示，我们就能用它对场进行分类，从而明确地描述场在共形群下有怎样的变化行为。特殊地，物理学家们习惯将表示 (Δ, R) 中的场称为**准基本场**⁸。

D.1.2 Energy-Momentum Tensor as the Conformal Flow

明白了什么是共形对称性之后，我们就可以试图明白共性对称性会给量子场论带来什么了。在量子场论中，理论的连续对称性会反映为 Ward 恒等式，而如果我们想要写出共形对称性带来的 Ward 恒等式，就需要知道什么是共形对称性下的守恒流。在下面的讨论中，我们就来依次求出平移、旋转和伸缩下的守恒流。

首先来考虑平移。其无穷小变化是 $x'_\mu = x_\mu + a_\mu$ 。根据 Noether 定理，我们知道：这个平移变换对应的守恒流是以下的**正则能动张量**：

$$T_C^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial^\nu \phi_\alpha \quad (\text{D.30})$$

这个正则能动张量关于它的两个指标并不是对称的。而在后面的应用中，我们总是希望它关于两个指标的置换对称。为此，我们可以观察到，如果我们在能动张量中额外加上以下的 $\partial_\rho B^{\rho\mu\nu}$ 项，并且要求 $B^{\rho\mu\nu}$ 关于其前两个指标对称：

$$T_B^{\mu\nu} = T_C^{\mu\nu} + \partial_\rho B^{\rho\mu\nu} \quad (\text{D.31})$$

那么由于 $\partial_\mu \partial_\rho B^{\rho\mu\nu} = 0$ ，这一项的加入并不会影响守恒律，并且如果我们回去看看 Ward 恒等式的导出过程，就会发现这一项也不会影响 Ward 恒等式。于是我们可以通过加入这一项的方式来使得能动张量成为指标对称的。这样得到的能动张量就被我们称为**Belinfante 能动张量**。当然，满足这个要求 $B^{\rho\mu\nu}$ 并不是唯一的，于是 Belinfante 能动张量也不是唯一的。一个常用的 Belinfante 能动张量是所谓的**Hilbert 能动张量**，它被定义如下：

$$T_H^{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (\text{D.32})$$

⁸对于一个一般的量子场论，我们通常将 Lagrangian 中的自由度称为“场”。但是在讨论共形场论时，我们通常将任何算符都称为“场”。由此可以看出物理学家们其实并不是那么关心他们使用的术语是否严格。

其中 g 是度规的行列式。由于在一个无穷小变换 $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ 下, $\delta g_{\mu\nu} = -2\partial_{(\mu}\epsilon_{\nu)}$, 于是在平直时空中, Hilbert 能动张量也满足 $\delta S = -\int d^d x T_H^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu$ 。在后面的讨论中, 我们将一直使用对称的能动张量。

然后让我们来考虑旋转。在旋转下, 时空和场的变化就分别是 $\delta x_\mu = \omega_{\mu\nu} x^\nu, \delta\phi = \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \phi$ ⁹。从而它对应的守恒流是:

$$M^{\mu\nu\rho} = T_C^{\mu\nu} x^\rho - T_C^{\mu\rho} x^\nu + \frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} S^{\nu\rho} \phi \quad (\text{D.33})$$

我们还能通过类似的技巧——通过给能动张量加入一项 $B^{\rho\mu\nu}$ 项, 来将这个旋转的守恒流化为更加简单的形式。只要取:

$$B^{\mu\rho\nu} = \frac{i}{4} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} S^{\nu\rho} \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} S^{\mu\nu} \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} S^{\mu\rho} \phi \right] \quad (\text{D.34})$$

就能将这个守恒流写为:

$$M^{\mu\nu\rho} = T_B^{\mu\nu} x^\rho - T_B^{\mu\rho} x^\nu \quad (\text{D.35})$$

最后, 让我们来看看伸缩对应的守恒流。在伸缩变换下, 我们有 $\delta x^\mu = \alpha x^\mu, \delta\phi = -\Delta \alpha \phi$ 。从而其守恒流是:

$$J_D^\mu = T_C^{\mu\nu} x_\nu - \Delta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \phi \quad (\text{D.36})$$

我们仍然希望化简这个守恒流, 希望最后一项能够消失。事实上, 如果存在一个张量 $\sigma^{\mu\nu}$, 使得:

$$\partial_\rho \sigma^{\rho\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\rho \phi)} (\eta^{\mu\rho} \Delta + i S^{\mu\rho}) \phi \quad (\text{D.37})$$

那么我们就能做到这一点。事实上, 这个条件在很大一部分理论中都成立。为了消去伸缩的流, 我们只需要在前文的 Belinfante 能动张量后面再加上一项:

$$T^{\mu\nu} := T_B^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\lambda \partial_\rho X^{\lambda\rho\mu\nu} \quad (\text{D.38})$$

其中 $X^{\lambda\rho\mu\nu}$ 的定义如下, 并且 $\sigma_+^{\mu\nu}$ 被定义为 $(\sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\nu\mu})/2$:

$$X^{\lambda\rho\mu\nu} = \frac{2}{d-2} \left\{ \eta^{\lambda\rho} \sigma_+^{\mu\nu} - \eta^{\lambda\mu} \sigma_+^{\rho\nu} - \eta^{\lambda\mu} \sigma_+^{\nu\rho} + \eta^{\mu\nu} \sigma_+^{\lambda\rho} + \frac{1}{d-1} (\eta^{\lambda\rho} \eta^{\mu\nu} - \eta^{\lambda\mu} \eta^{\rho\nu}) \sigma_{+\alpha}^\alpha \right\} \quad (\text{D.39})$$

由于 $X^{\lambda\rho\mu\nu}$ 关于 ρ, μ 反对称, 于是它也不会破坏能动张量的守恒律; 进一步地, 虽然验证过程十分复杂, 不过我们最终可以验证: 新加入的这一项 $\frac{1}{2} \partial_\lambda \partial_\rho X^{\lambda\rho\mu\nu}$ 仍然是对称的, 并且能使得前文中旋转的守恒流 $M^{\mu\nu\rho}$ 和 $T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu$ 之间仅差一个不改变守恒律的全导数项。又由于这一项的 trace 可以写为:

$$\frac{1}{2} \partial_\lambda \partial_\rho X_\mu^{\lambda\rho\mu} = \partial_\lambda \partial_\rho \sigma_+^{\lambda\rho} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\rho \phi)} (\eta^{\mu\rho} \Delta + i S^{\mu\rho}) \phi \right) \quad (\text{D.40})$$

⁹这里的 $\delta\phi$ 定义为 $\phi'(x') - \phi(x)$, 于是不存在时空平移对应的项。

并且由于 $\partial_\rho B_\mu^{\rho\mu} = \frac{i}{2} \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} S^{\mu\rho} \phi \right)$, 从而新的能动张量 $T^{\mu\nu}$ 的 trace 就是:

$$T_\mu^\mu = T_{C\mu}^\mu + \Delta \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \phi \right) \quad (\text{D.41})$$

而这正是前面我们看到的 J_D^μ 的导数 $\partial_\mu J_D^\mu$ 。从而 J_D^μ 就可以用这个能动张量写为:

$$J_D^\mu = T^{\mu\nu} x_\nu \quad (\text{D.42})$$

不仅如此, 我们还能得到一个有趣的结论: 如果理论具有经典层面的共形对称性, 那么其伸缩流应该是守恒的, 从而其能动张量应该是无迹的。总结一下上面我们给出的三个守恒流, 它们都能用我们新定义的能动张量 $T^{\mu\nu}$ 写为:

$$\begin{aligned} \text{Translation : } & T^{\mu\nu} \\ \text{Rotation : } & M^{\mu\nu\rho} = T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu \\ \text{Dilation : } & J_D^\mu = T^{\mu\nu} x_\nu \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

当然, 我们也可以写出 SCT 对应的守恒流, 由于 SCT 不会给出任何的 $\delta\phi$, 于是它给出的守恒流仅仅是 $T^{\mu\nu}$ 乘上两个 x 。而这个流的守恒律实际上可以从这三个守恒律中直接推导出来, 从而 SCT 不会给我们带来任何全新的守恒律。在下面一小节中, 我们就会利用这些经典的守恒流写出 $d > 2$ 维共形场论中的 Ward 恒等式。

D.1.3 Conformal Invariance of Quantum Theory

明白了共形对称性对应的守恒流是什么之后, 我们就可以着手写出 $d > 2$ 维共形场论中的 Ward 恒等式了。回顾一下: 如果理论具有某一对称性下的量子对称性, 并且对于其生成元 G^a 而言, 它对应的守恒流是 J^a , 那么就有:

$$\partial_\mu \langle J^{a,\mu}(x) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle = -i \sum_{j=1}^n \langle \mathcal{O}_1 \dots G^a \mathcal{O}_j \dots \mathcal{O}_n \rangle \delta^d(x - x_j) \quad (\text{D.44})$$

接下来, 我们需要做的就不过是分别对平移、旋转和伸缩分别写出应用上式。对于一个无穷小平移 δx^μ 而言, 由于其生成元是 $P_\mu = -i\partial_\mu$, 将其代入这里的 Ward 恒等式, 我们就能看到:

$$\partial_\mu \langle T_\nu^\mu(x) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle = - \sum_{j=1}^n \delta^d(x - x_j) \frac{\partial}{\partial x_i^\nu} \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_j \dots \mathcal{O}_n \rangle \quad (\text{D.45})$$

对于旋转而言, 由于其生成元是 $\delta\mathcal{O}_i = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + S_{\mu\nu}$, 从而旋转对应的 Ward 恒等式也就是:

$$\partial_\mu \langle (T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle = \sum_{j=1}^n \delta^d(x - x_j) [(x_i^\nu \partial_i^\rho - x_i^\rho \partial_i^\nu) - i S_i^{\nu\rho}] \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_j \dots \mathcal{O}_n \rangle \quad (\text{D.46})$$

我们还可以进一步化简这一成果。只需要注意到：等式左边可以被写为 $\langle T^{\rho\nu} \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle + x^\rho \partial_\mu \langle T^{\mu\nu} \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle - (\nu \leftrightarrow \mu)$ 的形式，而等式右边的第一项可以利用平移的 Ward 恒等式改写为 $-x^\nu \partial_\mu \langle T^{\mu\rho}(x) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle + x^\rho \partial_\mu \langle T^{\mu\nu}(x) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle$ 的形式，这正好和等式左边化出的第二项相抵消。从而，这个 Ward 恒等式还可以被写为：

$$\langle (T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho}) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle = -i \sum_{j=1}^n \delta^d(x - x_j) S_i^{\nu\rho} \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_j \dots \mathcal{O}_n \rangle \quad (\text{D.47})$$

对于伸缩而言，我们也可以重复类似的步骤——先利用其守恒流及生成元写出 Ward 恒等式，然后再利用平移的 Ward 恒等式进行化简。最后我们得到的结果就是：

$$\langle T_\mu^\nu \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle = - \sum_{j=1}^n \Delta_j \delta^d(x - x_j) \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_j \dots \mathcal{O}_n \rangle \quad (\text{D.48})$$

这三个 Ward 恒等式告诉了我们：如果理论具有量子的共形对称性，那么其关联函数需要满足什么性质。不过这远不是共形对称性能做到最好的地方。对于两点、三点关联函数而言，我们甚至能直接确定出关联函数的形式，仅仅留下一个未知的常数需要计算。为了看到这一点，让我们考虑两个准基本场 ϕ_1, ϕ_2 ，它们的标度量纲分别是 Δ_1, Δ_2 。从关联函数的路径积分定义中可以看出：如果 Lagrangian 和测度都是共形不变的，那么关联函数 $\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle$ 的变换关系也应该是：

$$\langle \phi_1(x'_1) \phi_2(x'_2) \rangle = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_1}^{-\Delta_1/d} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_2}^{-\Delta_2/d} \langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle \quad (\text{D.49})$$

在一个纯粹的伸缩变换 $x \rightarrow \Lambda x$ 下，这便应该成为 $\langle \phi_1(x'_1) \phi_2(x'_2) \rangle = \Lambda^{-(\Delta_1 + \Delta_2)} \langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle$ 。并且由于理论具有平移和旋转对称性，于是这个关联函数只能有关于 $|x_1 - x_2|$ 。综合以上这几点，这个关联函数就只能取以下的形式：

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} \quad (\text{D.50})$$

别忘了，我们还没有利用理论在 SCT 下的不变性。如果我们对这个关联函数作用一个 SCT，那么它就将成为：

$$\langle \phi_1(x'_1) \phi_2(x'_2) \rangle = \frac{C_{12}}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2}} \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^{(\Delta_1 + \Delta_2)/2}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}, \quad \gamma_i \equiv 1 - 2b \cdot x_i + b^2 x_i^2 \quad (\text{D.51})$$

从此就可以看出：只有在 $\Delta_1 = \Delta_2$ 时，这个关联函数才有可能是 SCT 不变的！于是，对于两个具有不同标度量纲的场而言，它们之间的两点关联函数一定是 0，而只有具有相同标度量纲的场之间才可能具有相同的两点关联函数，并且这个关联函数的形式一定是：

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta}} \quad (\text{D.52})$$

通过类似的分析，对于三点关联函数而言，它也只能依赖于 $|x_i - x_j|$ 。通过标度量纲的分析， $|x_i - x_j|$ 的总幂次一定是 $-(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)$ 。最后通过 SCT 下的不变性，我们能够唯一确定下来三点函数的形式：

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} x_{23}^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} x_{13}^{\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2}} \quad (\text{D.53})$$

其中 $x_{ij} := |x_i - x_j|$ 。你可能会想：对于四点或更多点的关联函数而言，我们能不能也得到类似的结论呢？答案是不行的。这是由于：如果我们有了四个时空点，那么就可以构造出以下的共形不变量：

$$\frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}}, \quad \frac{x_{12}x_{34}}{x_{23}x_{14}} \quad (\text{D.54})$$

它们被称为**交比**。由于它们自身是共形不变、并且无量纲的，于是如果我们得到了一个四点函数的可能形式，对其乘上交比的任意函数后得到的也会满足对称性的所有要求，于是我们无法通过共形不变性确定下来更多的信息。

D.2 Conformal Invariance in 2 Dimensions

D.2.1 Global and Local Conformal Invariance

在前面的讨论中，我们略去了对二维的共形不变性的讨论。和其他维度不同，在二维时空中，存在着无穷多独立的坐标变换能够保证度规相差一个因子，也就是说：二维时空中存在着无穷多的共形变换。在这些变换中，只有 6 个是可逆、并且在时空的每一点上都是良定义的，它们同步变换时空的每一点，于是被称为**全局的共形变换**。全局的共形变换是我们通常在场论中考虑的时空变换，并且由于它们可逆，于是构成一个群，我们这个群为**特殊共形群**。而除了这 6 个之外的共形变换并不在时空的每一点都是良定义的，它们只是**局部的共形变换**。因为它们不可逆，于是并不构成一个群。事实上，正是由于二维中存在这些局部的共形变换，我们才能够精确求解许多二维时空中的共形场论。

为了看到这一点，让我们先看看二维时空中的共形映射需要满足什么条件。首先，让我们考虑一个具有 Euclidean 度规的二维时空，其上的坐标为 (z^0, z^1) 。在其上的一个坐标变换 $z^\alpha \rightarrow w^\mu$ 下，度规张量的变换如下：

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \left(\frac{\partial w^\mu}{\partial z^\alpha} \right) \left(\frac{\partial w^\nu}{\partial z^\beta} \right) g^{\alpha\beta} \quad (\text{D.55})$$

而如果要求 $g^{\mu\nu} = \Lambda(x)g^{\alpha\beta}$ ，那么新度规的 00 分量一定要等于 11 分量，而 01 分量一定是 0。这也就给了我们以下条件：

$$\left(\frac{\partial w^0}{\partial z^0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^0}{\partial z^1} \right)^2 = \left(\frac{\partial w^1}{\partial z^0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^1}{\partial z^1} \right)^2 \quad (\text{D.56})$$

$$\frac{\partial w^0}{\partial z^0} \frac{\partial w^1}{\partial z^0} + \frac{\partial w^0}{\partial z^1} \frac{\partial w^1}{\partial z^1} = 0 \quad (\text{D.57})$$

而这等价于： $w^\mu(z^\alpha)$ 需要满足以下两者之间的任意一个：

$$\frac{\partial w^1}{\partial z^0} = \frac{\partial w^0}{\partial z^1}, \quad \frac{\partial w^0}{\partial z^0} = -\frac{\partial w^1}{\partial z^1} \quad \text{or} \quad \frac{\partial w^1}{\partial z^0} = -\frac{\partial w^0}{\partial z^1}, \quad \frac{\partial w^0}{\partial z^0} = \frac{\partial w^1}{\partial z^1} \quad (\text{D.58})$$

为了更加方便地讨论二维时空中的理论，我们首先可以将二维时空中的点和复平面上的点一一对应起来，这样我们就可以用复分析的语言来处理二维时空：

$$z = z^0 + iz^1, \quad \bar{z} = z^0 - iz^1, \quad \partial := \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1), \quad \bar{\partial} := \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1) \quad (\text{D.59})$$

类似的,所有上指标都可以按照 z^μ 类似的方法定义其 z, \bar{z} 分量,而所有下指标都可以按照 ∂_μ 类似的方法定义 z, \bar{z} 分量。例如对于能-动张量 $T_{\mu\nu}$ 而言,就有 $T_{zz} = T_{(\frac{1}{2}0 - \frac{i}{2}1)(\frac{1}{2}0 - \frac{i}{2}1)} = \frac{1}{4}(T_{00} - 2iT_{01} - T_{11})$ 。

有了这一套语言之后,讨论二维时空中的共形映射就方便很多。在这套语言下,一个坐标变换无非就是一个从复平面到复平面的映射 $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 。如果我们用这个角度重新看看上面给出的共形映射需要满足的条件,就会发现:这些条件正是全纯/反全纯函数的 Cauchy-Riemann 条件:

$$\bar{\partial}w(z, \bar{z}) = 0 \quad \text{or} \quad \partial w(z, \bar{z}) = 0 \quad (\text{D.60})$$

于是,在二维时空中,所有全纯或反全纯的映射 $w = w(z), w = w(\bar{z})$ 都是共形映射,反之任何共形映射都应该是全纯或者反全纯的。当然,现在我们所讨论的都是局域的条件,还并没有要求这个映射 $w(z)$ 在复平面上处处有定义,于是现在所讨论的“共形映射”指的都是局域的共形映射,它们虽然不构成群,但是物理学家们仍然喜欢将其称为**局域共形群**¹⁰。于是这就告诉我们,二维时空的局域共形群由全纯、反全纯的映射构成。由于在复平面上存在无穷多个全纯函数,于是二维的局域共形群也是无穷维的。当然,我们知道:反全纯部分不可能通过单位映射连续变换而得到,它和全纯部分不处于相同的联通分支,于是在我们通过李代数性质研究局域共形群时,我们就只需要考虑全纯部分¹¹。

知道二维时空中的共形变换是什么样的之后,我们就可以试图求出这个局域共形群对应的李代数了。为此,我们可以先考虑这个共形群在函数空间 $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ 上的表示,求出这个表示中的生成元,并计算这些生成元的对易子,从中得到共形代数的对易关系。对于一个全纯映射 $w = w(z)$ 而言,其无穷小变换可以被如下地 Laurent 展开:

$$z \rightarrow w(z) = z + \epsilon(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^{n+1} \quad (\text{D.61})$$

别忘了,这个变换也会导致 \bar{z} 同步变化为 $\bar{w} = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})$ 。对于一个函数 $f(z, \bar{z})$ 而言,其变换就是:

$$\begin{aligned} \delta f(z, \bar{z}) &= f'(w, \bar{w}) - f(w, \bar{w}) = f(z, \bar{z}) - f(w, \bar{w}) \\ &= f(z, \bar{z}) - \epsilon(z)\partial f(z, \bar{z}) - \bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{\partial}f(z, \bar{z}) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-c_n z^{n+1} \partial - \bar{c}_n \bar{z}^{n+1} \bar{\partial}) f(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (\text{D.62})$$

也就是说,局域共形群在函数空间 $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ 上的表示的生成元就是:

$$l_n := -z^{n+1} \partial, \quad \bar{l}_n := -\bar{z}^{n+1} \bar{\partial} \quad (\text{D.63})$$

并且容易计算出这些生成元的对易关系是:

$$[l_m, l_n] = (m - n)l_{m+n}, \quad [\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m - n)\bar{l}_{m+n}, \quad [l_m, \bar{l}_n] = 0 \quad (\text{D.64})$$

我们称生成元 l_n 及对易关系 $[l_m, l_n] = (m - n)l_{m+n}$ 构成的李代数为 **Witt 代数**,于是局域共形群的李代数就是两个 Witt 代数的直和。由于量子态乘一个任意的相因子也描述相同的量子态,于是量子理论中的对称代数可以额外具有一项中心荷。我们在后面会看到,

¹⁰也许你会想起“重整化群”。物理学家在这方面的命名习惯可以说是狂野不羁。

¹¹李代数仅仅能够描述一个李群的局部性质,不关心这些元素是否全局有定义。于是虽然局域共形群不是李群,但是我们仍然可以通过李代数来研究局域共形群。

共形群在 Hilbert 空间上的表示的生成元 L_n 就不再满足 Witt 代数，而是满足加入中心荷后的 Virasoro 代数¹²。

这里需要额外说明一点：我们这里的讨论将 z, \bar{z} 视作了独立的坐标，而并没有将它们看作互相共轭的。这等价于将 z^0, z^1 解析延拓到了复平面上，而物理的时空对应这个延拓后的四维流形上的、由 $z^* = \bar{z}$ 确定的超曲面。物理的共形变换是局域共形群中保证这个超曲面不变的变换。反应在生成元上，就是 $l_n + \bar{l}_n, i(l_n - \bar{l}_n)$ 这两组生成元能够保持物理的时空不变。于是虽然前面的讨论中看上去 c_n 可以取任意复数，任意 $c_n l_n + \bar{c}_n \bar{l}_n$ 都能生成一个共形变换，但是物理的变换只能由 $l_n + \bar{l}_n, i(l_n - \bar{l}_n)$ 的实数倍生成。

现在我们知道了二维时空中的局域共形群是什么样的了。而接下来，我们要做的就是看看这些全纯函数中的哪些可逆、并且在全复平面¹³上都能够有定义，从而属于特殊共形群。首先，既然这个映射可逆，那么它一定是单值的，这说明它在复平面上不能有割线。这将其形式限制为了 $f(z) = P(z)/Q(z)$ ，其中 P 和 Q 都是 z 的多项式。另外，绕复平面上的任意一点 z_0 一圈时，像点不能绕 $f(z_0)$ 多圈，否则也会导致逆映射多值的问题。如果我们考虑 $z_0 = 0$ 的邻域，这就会要求 $P(z)$ 最多是一次的；而如果我们考虑 $z_0 = \infty$ ，这就会要求 $Q(z)$ 最多是一次的。综合这些讨论，我们能够确定： $f(z)$ 只能是以下的 **Mobius 变换**：

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1 \quad (\text{D.65})$$

其中要求 $ad - bc = 1$ 的引入是为了防止 double counting：由于我们等比例放大 a, b, c, d 不会导致 $f(z)$ 的变化，于是我们就加入了这个要求，使得这些变换能够唯一的由这四个复数所刻画。对于一个无穷小变换， $f(z)$ 可以被参数化为 $\frac{(1+\alpha)z+\beta}{\gamma z+(1-\alpha)}$ ，其中 α, β 和 γ 是无穷小的。从这个行驶中，就容易看出其中只包含 z^0, z^1 和 z^2 分量。同样的， $\bar{f}(\bar{z})$ 中也应该只含有 \bar{z}^0, \bar{z}^1 和 \bar{z}^2 分量。这也就意味着：特殊共形群的李代数由 l_{-1}, l_0, l_1 和 $\bar{l}_{-1}, \bar{l}_0, \bar{l}_1$ 张成。经过一些简单的对应，我们不难发现： l_{-1}, \bar{l}_{-1} 是平移的生成元、 l_1, \bar{l}_1 是 SCT 的生成元，而 $l_0 + \bar{l}_0, i(l_0 - \bar{l}_0)$ 分别是伸缩和旋转的生成元。

从 Mobius 变换的形式也可以看出，特殊共形群的元素和 $SL(2, \mathbb{C})$ 的元素之间有一一对应：

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (\text{D.66})$$

而我们也知道： $SL(2, \mathbb{C})$ 同构于 $SO(3, 1)$ ，这正具有前一节中所看到的 $SO(d, 1)$ 的形式。这也就说明：在上一节中得到的所有结论都可以原封不动地应用到二维的特殊共形群下。例如我们仍然可以用一个二维 Lorentz 群表示 (s) 及一个标度量纲 Δ 来刻画一个特殊共形群的表示。在二维时空中，我们也可以定义准基本场为一个处于特殊共形群表示 (Δ, s) 的场。如果我们如下定义一个准基本场的全纯共形权和反全纯共形权：

$$h = \frac{1}{2}(\Delta + s), \quad \bar{h} = \frac{1}{2}(\Delta - s) \quad (\text{D.67})$$

那么在一个全局共形映射 $z \rightarrow w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 下，其变换就是：

$$\phi'(w, \bar{w}) = \left(\frac{dw}{dz} \right)^{-h} \left(\frac{d\bar{w}}{dz} \right)^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z}) \quad (\text{D.68})$$

¹²李代数需要满足 Jacobi 恒等式这一条件将会限制 Witt 代数的中心扩张能具有的形式。可以说明，Witt 代数的任何中心扩张都必须是下文所看到的 Virasoro 代数。

¹³这里需要详细说明一下：这里的“复平面”是包含无穷远点的，从而其实是“复球面”。

进一步地，我们也可以拓展这个定义：如果一个场不仅仅在全局共形映射，并且在局域共形映射下的变换也由上式给出，那么我们就称之为一个**基本场**。不用说也知道：基本场处于一些特殊的局域共形群的表示，这些表示就可以用两个共形权 (h, \bar{h}) 来刻画。

D.2.2 Conformal Ward Identities and Operator Product Expansion

既然二维的共形场论不仅具有全局的共形对称性，还具有局域的共形对称性，那么这些额外的对称性就应该给我们更多比之前的 Ward 恒等式。在这一节中，我们的目标就是求出局域共形对称性对应的 Ward 恒等式，并且看看能从中得到什么结论。

为了求出局域共形对称性对应的 Ward 恒等式，我们首先需要求出局域共形对称性对应的流。对于局域对称性而言，我们并不能使用 Noether 定理，因此我们需要换一种方式：直接从 Lagrangian 在无穷小变换下的变化中读出守恒流。为此，让我们考虑一个无穷小的局域共形变换 $z \rightarrow z + \delta z, \bar{z} \rightarrow \bar{z} + \bar{\delta}(z)$ ，并且使 δz 仅在一个包含 x_1, \dots, x_n 的区域 M 中非零。在这样一个变换下，作用量的变化就是¹⁴：

$$\delta S = - \int_M d^2x T_{\mu\nu} \partial^\mu \epsilon^\nu = -2 \int_M d^2x (T_{zz} \bar{\partial} \delta z + T_{\bar{z}\bar{z}} \partial \delta \bar{z}) \quad (\text{D.69})$$

我们可以定义能动张量的全纯、反全纯分量为：

$$T(z) := -2\pi T_{zz}, \quad \bar{T}(z) := -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}} \quad (\text{D.70})$$

你可能注意到了：这里我们直接将 T 写为了一个 z 的全纯函数。这是由于流守恒定律 $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ 直接蕴含了 $\bar{\partial}T = \partial\bar{T} = 0$ 和 $T_{z\bar{z}} = 0$ ，于是 T, \bar{T} 在经典层面上就是全纯的。在量子理论中，如果共形对称性仍然是一个量子对称性，那么流守恒定律作为一个算符方程仍然成立。于是算符 $T(z), \bar{T}(z)$ 是全纯的。不过在路径积分中，由于其中的场不一定满足场方程，于是流守恒定律也不成立，此时的 T, \bar{T} 就不是全纯的。利用我们新定义的这些全纯、反全纯分量，Lagrangian 的变化量就能写为：

$$\delta S = \frac{1}{\pi} \int_M d^2x (T(z) \bar{\partial} \delta z + \bar{T}(\bar{z}) \partial \delta \bar{z}) \quad (\text{D.71})$$

为了提取出一个任意的变换 $\epsilon(z)$ 对应的守恒流。我们可以先考虑变换 $\delta z = \alpha(\bar{z})f(z), \delta \bar{z} = \bar{\alpha}(z)\bar{f}(\bar{z})$ 。在其下，作用量的改变就应该是：

$$\delta S = \frac{1}{\pi} \int_M d^2x (T(z) \epsilon(z) \bar{\partial} \alpha(\bar{z}) + \bar{T}(\bar{z}) \bar{\epsilon}(\bar{z}) \partial \bar{\alpha}(z)) \quad (\text{D.72})$$

而对于一个局域对称性而言，守恒流的定义就是：对于一个用无穷小参数 $\epsilon(x)$ 刻画的对称变换，其下 Lagrangian 的变化为：

$$\delta S = \int d^2x J^\mu \partial_\mu \epsilon(x) \quad (\text{D.73})$$

¹⁴这严格来说是 Hilbert 能动张量满足的关系。不过我们在前面已经看到了：不同的能动张量给出的这项的差异仅仅是一个全导数。

你可能会问：我们为什么要这么定义呢？答案就是：如此定义出的流满足守恒流的一切性质，例如经典的流守恒定律和量子的 Ward 恒等式。将上面我们得出的 δS 与这个标准形式一对比，我们马上就能看出：一个任意的变换 $\delta z = \alpha(\bar{z})f(z), \delta\bar{z} = \bar{\alpha}(z)\bar{f}(\bar{z})$ 对应的流就是：

$$J^z = \frac{1}{\pi} \bar{T}(\bar{z})\bar{f}(\bar{z}), \quad J^{\bar{z}} = \frac{1}{\pi} T(z)f(z) \quad (\text{D.74})$$

那么，只要我们将 $\alpha(\bar{z}), \bar{\alpha}(z)$ 都取为 1，并且令 $f(z) = \epsilon(z)$ ，那么变换 $\delta z = \alpha(\bar{z})f(z), \delta\bar{z} = \bar{\alpha}(z)\bar{f}(\bar{z})$ 就变回了 $\delta z = \epsilon(z), \delta\bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ 。由此可见，变换 $\delta z = \epsilon(z), \delta\bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ 对应的守恒流就是：

$$J^z = \frac{1}{\pi} \bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z}), \quad J^{\bar{z}} = \frac{1}{\pi} T(z)\epsilon(z) \quad (\text{D.75})$$

到此为止，我们就得到了任意局域共形变换对应的守恒流。按照我们之前的讨论，我们完全可以将 x^0, x^1 延拓到复平面上，此时就无需使得 $\epsilon, \bar{\epsilon}$ 互为复共轭。为了讨论的简便，下面我们将转而考虑 $\delta z = \epsilon(z), \delta\bar{z} = 0$ 的变换。此时，只需要将上式的 $\bar{\epsilon}$ 取为 0，就得到了这个变换对应的守恒流。只要将这个流代入前面得到的、一般的 Ward 恒等式，我们就能得知任意局域共形变换 $\epsilon(z)$ 对应的 Ward 恒等式¹⁵：

$$\frac{1}{\pi} \bar{\partial} \langle T(z)\epsilon(z)\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle = - \sum_{j=1}^n \langle \mathcal{O}_1 \dots (\delta_\epsilon \mathcal{O}_j) \dots \mathcal{O}_n \rangle \delta^2(x - x_j) \quad (\text{D.76})$$

由于 $\epsilon(z)$ 是任意的，我们可以将 $\delta\epsilon$ 限制在仅在一个包含 x_1, \dots, x_n 的区域 M 中非零，这并不会丧失任何的一般性。在此之后，我们可以对这个恒等式在这个区域 M 中积分：

$$\frac{1}{\pi} \int_M d^2x \bar{\partial} \langle T(z)\epsilon(z)\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle = - \sum_{j=1}^n \langle \mathcal{O}_1 \dots (\delta_\epsilon \mathcal{O}_j) \dots \mathcal{O}_n \rangle \quad (\text{D.77})$$

而对这个积分而言，我们可以使用 Stokes 定理：

$$\int_M d^2x \partial_\mu F^\mu = \oint_{\partial M} \epsilon_{\mu\nu} ds^\mu F^\mu = \frac{i}{2} \oint_{\partial M} (-dz F^{\bar{z}} + d\bar{z} F^z) \quad (\text{D.78})$$

其中围道 ∂M 沿逆时针。我们只要取 $F^{\bar{z}} = \langle T(z)\epsilon(z)\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle, F^z = 0$ ，就可以将这个积分化为以下的形式：

$$- \sum_{j=1}^n \langle \mathcal{O}_1 \dots (\delta_\epsilon \mathcal{O}_j) \dots \mathcal{O}_n \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial M} dz \epsilon(z) \langle T(z)\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \quad (\text{D.79})$$

类似地，如果我们再将 $\bar{\epsilon}$ 对应的部分考虑进来，就会得到以下的局域 Ward 恒等式：

¹⁵ 你可能会觉得这里少了个 i ，但是其实不是——我们现在在 Euclidean 时空中讨论问题，而原来的 Ward 恒等式是在 Minkowski 时空中导出的。这个 i 的差异来自于 Euclidean 和 Minkowski 空间中 delta 函数之间相差了一个 i 。

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \langle \mathcal{O}_1 \dots (\delta_\epsilon \mathcal{O}_j) \dots \mathcal{O}_n \rangle \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \epsilon(z) \langle T(z) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle + \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\bar{z} \bar{\epsilon}(\bar{z}) \langle \bar{T}(\bar{z}) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle
\end{aligned} \tag{D.80}$$

其中 C 是任意的一个包含 x_1, \dots, x_n 的围道。我们这样得到的局域 Ward 恒等式就是局域共形对称性对关联函数的限制。如果这些 \mathcal{O}_j 是基本场，那么这个局域 Ward 恒等式的形式也可以进一步地被简化。我们知道：基本场在 $\delta z = \epsilon(z), \delta \bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ 下的变化为：

$$\mathcal{O}'(z', \bar{z}') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z} \right)^{-h} \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right)^{-\bar{h}} \mathcal{O}(z, \bar{z}) = (1 - h\partial\epsilon - \bar{h}\bar{\partial}\bar{\epsilon}) \mathcal{O}(z, \bar{z}) \tag{D.81}$$

从而：

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon \mathcal{O} &= \mathcal{O}'(z', \bar{z}') - \mathcal{O}(z', \bar{z}') = (1 - h\partial\epsilon - \bar{h}\bar{\partial}\bar{\epsilon}) \mathcal{O}(z, \bar{z}) - (1 + \epsilon\partial + \bar{\epsilon}\bar{\partial}) \mathcal{O}(z, \bar{z}) \\
&= -(h\partial\epsilon + \epsilon\partial + \bar{h}\bar{\partial}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\bar{\partial}) \mathcal{O}(z, \bar{z})
\end{aligned} \tag{D.82}$$

于是如果这些 \mathcal{O}_j 都是基本场，局域 Ward 恒等式就能改写为：

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n (h_j \partial\epsilon(z_j) + \epsilon\partial_j + \bar{h}_j \bar{\partial}\bar{\epsilon}(\bar{z}_j) + \bar{\epsilon}\bar{\partial}_j) \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \epsilon(z) \langle T(z) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle - \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\bar{z} \bar{\epsilon}(\bar{z}) \langle \bar{T}(\bar{z}) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle
\end{aligned} \tag{D.83}$$

我们马上就会看到：利用这些 Ward 恒等式，我们可以得出含能-动量张量的关联函数在整个坐标平面上的奇异行为。这些奇异行为有什么用呢？后面我们会看到：利用这些奇异行为，我们可以直接计算出 $T(z)\mathcal{O}(w, \bar{w})$ 的算符乘积展开。我们之所以能做到这一点，都要归功于我们在幼儿园早已熟知的留数定理：

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz f(z) = \sum_{\text{poles } z_0 \text{ in } C} \text{Res}(f(z_0)) \tag{D.84}$$

从而，局域 Ward 恒等式实际上告诉我们：函数 $\epsilon(z) \langle T(z) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle$ 在 C 中有 n 个极点，并且在这些奇点上的留数分别是：

$$\text{Res}_{z=z_j} \epsilon(z) \langle T(z) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle = (h_j \partial\epsilon(z_j) + \epsilon\partial_j + \bar{h}_j \bar{\partial}\bar{\epsilon}(\bar{z}_j) + \bar{\epsilon}\bar{\partial}_j) \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \tag{D.85}$$

现在，只要我们将 $\epsilon(z)$ 取做 $(z - z_j)^n$ ，我们就能得到 $\langle T(z) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle$ 在 $z = z_j$ 处的各阶 Laurent 展开系数。例如，我们可以先令 $\epsilon(z) = 1$ ，此时我们能得到 $\langle T(z) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle$ 在 z_j 的留数，也就是 Laurent 展开的-1 阶系数：

$$\text{Res}_{z=z_j} \langle T(z) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle = \partial_j \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \tag{D.86}$$

再令 $\epsilon(z) = z - z_j$, 那么就能得到其-2 阶系数:

$$\text{Res}_{z=z_j} z \langle T(z) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle = h_j \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \quad (\text{D.87})$$

类似地, 如果我们继续令 $\epsilon(z) = (z - z_j)^n$, 就会发现: 除了-1, -2 阶系数之外, 这个 Laurent 展开的更低阶系数全部都是 0。也就是说, $\langle T(z) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle$ 在 $z = z_j$ 附近有以下的行为:

$$\langle T(z) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \underset{z \rightarrow z_j}{\sim} \left[\frac{h_j}{(z - z_j)^2} + \frac{\partial_j}{z - z_j} \right] \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle + \text{reg}(z - z_j) \quad (\text{D.88})$$

只要我们将所有的极点都考虑在内, 就能得到关联函数 $\langle T(z) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle$ 在整个 z 复平面上的奇异行为就如下所示。照猫画虎, 如果以类似的方式处理局域 Ward 恒等式中的反全纯部分, 我们也可以得到 $\langle \bar{T}(\bar{z}) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle$ 的奇异行为:

$$\begin{aligned} \langle T(z) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{z - z_i} \partial_{z_i} \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle + \frac{h_i}{(z - z_i)^2} \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \right] + \text{reg}(z) \\ \langle \bar{T}(\bar{z}) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_i} \partial_{\bar{z}_i} \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle + \frac{\bar{h}_i}{(\bar{z} - \bar{z}_i)^2} \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \right] + \text{reg}(\bar{z}) \end{aligned} \quad (\text{D.89})$$

其中 $\text{reg}(z)$ 意味着一个在 z_i 处没有任何奇异数的全纯函数。利用这个结果, 我们就可以计算出 $T(z) \mathcal{O}(w, \bar{w})$ 的算符乘积展开。不过需要额外注意的是: 我们这里的记号 $\langle \dots \rangle$ 实际上是真空间的编时关联函数 $\langle \Omega | T\{\dots\} | \Omega \rangle$ 的缩写, 所以从这个结果中能够计算出的实际上不是 $T(z) \mathcal{O}(w, \bar{w})$, 而是编时乘积 $T\{T(z) \mathcal{O}(w, \bar{w})\}$ 的展开。

由于我们是在 Euclidean 时空中进行的讨论, 而 Euclidean 时空并不像 Minkowski 时空一样, 有类时和类空的区别。事实上, 只要我们选定一系列不相交的超曲面, 使得时空中的任何一点都能处于这一簇超曲面中的一个, 那么我们就能将这些超曲面视为不同时刻的空间, 将其法向确立为时间方向, 将其切向确立为空间方向。在数学上, 这簇超曲面的选取被称为时空流形的一个分叶。事实上, 选定一个时空的分叶是量子化一个理论的必经之路。在量子化一个理论时, 我们首先将体系的 Hilbert 空间定义为同一个空间超曲面 σ 上所有场构型 $|\phi, \sigma\rangle$ 张成的线性空间, 然后再通过两个空间超曲面 σ_1, σ_2 之间的路径积分 $\langle \phi_2, \sigma_2 | \phi_1, \sigma_1 \rangle = \int_{\phi_1, \sigma_1}^{\phi_2, \sigma_2} \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi])$ 定义两个不同空间超曲面上的态的内积。

在共形场论中, 我们通常使用的时空分叶是所谓的径向量子化——也就是将二维时空中半径 $r = |z|$ 相同的点构成的超曲面视为空间, 而径向则被视为时间方向。当然, 你可能会想: 径向量子化的时间方向和一般的时间方向选择不同, 那么用径向量子化得到的结论, 例如径向排序的关联函数就不是我们通常关心的编时关联函数, 那么这些结论有什么用呢? 答案是: 我们可以考虑在一个无穷长的圆柱上定义的共形场论¹⁶, 其中柱面方向为时间方向, 角向为空间方向。如果圆柱的周长是 L , 那么这就会给场附加边界条件 $\phi(0, t) = \phi(L, t)$ 。如此定义好我们的理论后, 我们可以再用共形映射 $z = e^{2\pi(t-ix)/L}$ 将其映射为复平面上的共形场论。此时这个复平面的径向就是时间方向, 而角向就是空间方向, 和径向量子化选取的时间方向完全相同。这样一来, 圆柱上的编时关联函数就等价于相应的复平面上的径向关联函数。这个过程在弦理论中有很重要的地位: 在我们量子化弦论时, 弦世界面上的路径积分可以被约化为一个圆柱上的 CFT 的路径积分, 于是我们就可以利用径向量子化来计算那时的编时关联函数。

¹⁶ 如果我们定义 $x^\pm = it \pm x$, 此时的共形变换就被定义为 $x^+ \rightarrow f(x^+), x^- \rightarrow g(x^-)$ 的全纯变换。

稍稍回顾就能看到，前面这些讨论的得到的结果完全来自于路径积分，和选择什么样的分叶并无关系。于是我们只需要将编时乘积换成径向乘积：

$$R\{\mathcal{O}_1(z_1)\mathcal{O}_2(z_2)\} = \begin{cases} \mathcal{O}_1(z_1)\mathcal{O}_2(z_2), & |z_1| > |z_2| \\ \mathcal{O}_2(z_2)\mathcal{O}_1(z_1), & |z_1| < |z_2| \end{cases} \quad (D.90)$$

那么通过前面这个结果，我们就能计算出径向量子化中能-动量张量 $T(z)$ 和基本场 $\mathcal{O}(w, \bar{w})$ 的径向乘积 $R\{T(z)\mathcal{O}(w, \bar{w})\}$ 的 OPE¹⁷

$$R\{T(z)\mathcal{O}(w, \bar{w})\} = \frac{h\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w\mathcal{O}(w, \bar{w})}{z-w} + \text{reg}(z) \quad (D.91)$$

$$R\{\bar{T}(\bar{z})\mathcal{O}(w, \bar{w})\} = \frac{\bar{h}\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\partial_{\bar{w}}\mathcal{O}(w, \bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \text{reg}(\bar{z})$$

这些 OPE 实际上就是局域 Ward 恒等式的另一种表述方式，我们在后面的讨论中会频繁用到这一组关系。当然，我想有必要在这里重申一遍：这些讨论都是只对 \mathcal{O} 是基本场的情形成立的。如果算符 \mathcal{O} 是一个准基本场，前面给出的局域 Ward 恒等式并不对所有的 $\epsilon(z)$ 都成立，而是只对 l_{-1}, l_0, l_1 对应的 $\epsilon(z) = 1, z, z^2$ 成立。根据前面的讨论，这只能确定下来 $\langle T(z)\mathcal{O}(w, \bar{w}) \rangle$ 的 Laurent 展开中的-1, -2 和-3 阶系数。于是对于准基本场而言，这个 OPE 只能被确定到以下的程度：

$$R\{T(z)\mathcal{O}(w, \bar{w})\} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{c_n\mathcal{O}_n(w, \bar{w})}{(z-w)^n} + \frac{h\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w\mathcal{O}(w, \bar{w})}{z-w} + \text{reg}(z) \quad (D.92)$$

$$R\{\bar{T}(\bar{z})\mathcal{O}(w, \bar{w})\} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\bar{c}_n\mathcal{O}_n(w, \bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^n} + \frac{\bar{h}\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\partial_{\bar{w}}\mathcal{O}(w, \bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \text{reg}(\bar{z})$$

事实上，能-动张量 $T(z)$ 本身就是一个准基本场，而非基本场。首先在局域共形群下，我们已经很熟悉能-动张量 $T(z)$ 的性质了：它在旋转下具有自旋 2，并且由于它的物理意义是体系的能量密度，于是一定有标度量纲 2。从而其在局域共形群下具有共形权 $(2, 0)$ 。类似地，我们也可以得到 $\bar{T}(\bar{z})$ 在局域共形群下具有共形权 $(0, 2)$ 。正如下面会看到的例子所示：如果我们详细计算 $R\{T(z)T(w)\}$ 的算符乘积展开，就会发现它在 $z = w$ 处的奇点并不是二阶、而是四阶的。这说明 $T(z)$ 不是一个基本场。由于理论中不存在任何标度量纲为负的算符，于是从准基本场的 OPE 中可以看到： $R\{T(z)T(w)\}$ 的 OPE 只能具有以下的标准形式：

$$R\{T(z)T(w)\} = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \text{reg}(z) \quad (D.93)$$

$$R\{\bar{T}(\bar{z})\bar{T}(\bar{w})\} = \frac{\bar{c}/2}{(\bar{z}-\bar{w})^4} + \frac{2\bar{T}(\bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\partial_{\bar{w}}\bar{T}(\bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \text{reg}(\bar{z})$$

¹⁷事实上，我们在 OPE 中关心的部分只是其奇异部分，于是只要计算出了这个 OPE 中的奇异部分，我们就称计算出了这个 OPE。

而由于 $\bar{T}(\bar{w})$ 是反全纯的, $R\{T(z)\bar{T}(\bar{w})\}$ 的 OPE 中不能存在奇异性。我们在下一节就会看到: 由于这里出现的常数 c 正比于 Virasoro 代数中的中心荷, 于是 c 也就被我们称为 **中心荷**。

通过这个算符乘积展开, 我们也能得到 $T(z)$ 在局域共形变换下如何变化。利用局域 Ward 恒等式, 我们可以看到:

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon T(w) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \epsilon(z) \left[\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \right] \\ &= -\frac{1}{12} c \partial_z^3 \epsilon(z) - 2\partial_z \epsilon(z) T(z) - \epsilon(z) \partial T(z)\end{aligned}\quad (D.94)$$

这就是 $T(z)$ 的无穷小变换。对于有限变换而言, 我们需要对这个无穷小变换求指数。最终的结果就是:

$$T'(w) = \left(\frac{dw}{dz} \right)^{-2} T(z) + \frac{c}{12} \{z; w\} \quad (D.95)$$

其中 $\{z; w\}$ 是所谓的 **Schwarzian 导数**:

$$\{z; w\} := \frac{w^{(3)}(z)}{w'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{w^{(2)}(z)}{w'(z)} \right)^2 \quad (D.96)$$

从这个结果中也能看到, 能-动量张量确实不是基本场, 并且其变换关系中与基本场不同的部分由中心荷项提供。如果你将全局共形变换 $w(z) = (az + b)/(cz + d)$ 代入 Schwarzian 导数, 就可以发现其 $\{z; w\}$ 确实为 0, 于是我们确认了它确实是一个准基本场。

Example: Free Boson

接下来, 我们先看一些二维共形场论的例子, 并计算出它们的中心荷。一个最简单的例子就是自由标量场, 其 Lagrangian 是:

$$\mathcal{L} = \frac{g}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad (D.97)$$

由于理论中不存在相互作用, 也就没有跑动耦合常数, 从而这个理论的经典共形对称性也不会在量子理论中被破坏。接下来, 我们就尝试计算出这个理论中的 OPE。首先, 让我们考虑 $\partial\phi$ 和自身的 OPE。物理学家们在幼儿园里都学过, 这个理论中的两点关联函数 $G(x - y) = \langle \phi(x)\phi(y) \rangle$ 是 Green 方程 $-g\partial^2 G(x - y) = \delta^2(x - y)$ 的解:

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = -\frac{1}{2\pi g} \log |x - y| \quad (D.98)$$

写成复坐标的形式, 这也就是:

$$\langle \phi(z, \bar{z})\phi(w, \bar{w}) \rangle = -\frac{1}{4\pi g} (\log(z - w) + \log(\bar{z} - \bar{w})) \quad (D.99)$$

对这个关联函数求导数, 就能得到:

$$\langle \partial\phi(z)\partial\phi(w) \rangle = -\frac{1}{4\pi g} \frac{1}{(z-w)^2} \quad (D.100)$$

这里需要额外注意一点：一般而言，我们对这个关联函数求导数得到的应该是 $\partial_z \partial_w \langle \phi \phi \rangle$ ，而不是这里的 $\langle \partial \phi \partial \phi \rangle$ 。这两个之间应该相差了一些正比于 $\delta^2(z - w)$ 的接触项。不过由于这些接触项不是全纯的，于是它们一定在这个过程中和 $\log(\bar{z} - \bar{w})$ 的导数相抵消了。于是我们并不需要考虑这些接触项。利用这个结果，我们就可以得到 $\partial \phi$ 和自身的 OPE：

$$R\{\partial \phi(z) \partial \phi(w)\} = -\frac{1}{4\pi g} \frac{1}{(z-w)^2} + \text{reg}(z-w) \quad (\text{D.101})$$

然后，我们可以来看看和能-动张量相关的 OPE。这个理论的 Hilbert 能-动量张量是：

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^2x \sqrt{g} \mathcal{L} = g \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi \right) \quad (\text{D.102})$$

于是能-动张量的全纯分量就是：

$$T(z) = -2\pi g \partial \phi(z) \partial \phi(z) \quad (\text{D.103})$$

你可能会注意到，我们在这里利用了 $\partial^2 \phi = 0$ ，于是 $\partial \phi$ 应该是全纯的。在量子理论中，这个能动张量还需要一些修改。由于我们希望将真空的能量密度选取为 0，于是还需要可以对能-动张量做正规排序，也就是定义量子的能-动张量为：

$$T(z) = -2\pi g : \partial \phi(z) \partial \phi(z) : \equiv -2\pi g \lim_{z \rightarrow w} [R\{\partial \phi(z) \partial \phi(w)\} - \langle \partial \phi(z) \partial \phi(w) \rangle] \quad (\text{D.104})$$

其中，我们还做了一个 point-splitting 正规化来定义发散的算符乘积。有了这个定义之后，我们便可以利用 Wick 定理计算 $T(z) \partial \phi(w)$ 和 $T(z) T(w)$ 的 OPE 了：

$$\begin{aligned} R\{T(z) \partial \phi(w)\} &= -2\pi g : \partial \phi(z) \partial \phi(z) : \partial \phi(w) \\ &= -4\pi g : \partial \phi(z) \partial \overline{\phi(z)} : \partial \phi(w) + \text{reg}(z-w) \\ &= \frac{\partial \phi(z)}{(z-w)^2} + \text{reg}(z-w) \\ &= \frac{\partial \phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial \partial \phi(w)}{(z-w)} + \text{reg}(z-w) \end{aligned} \quad (\text{D.105})$$

在第二个等号处，我们利用了 Wick 定理 $R\{AB : C\} =: ABC : + : AB : C + : AB : C$ 。并且由于正规排序的算符中不会出现奇异性，于是贡献奇异性的只有后面这两项收缩。而这个收缩正是我们上面计算过的 $\langle \partial \phi \partial \phi \rangle$ 。这个 OPE 告诉我们： $\partial \phi(z)$ 是一个全纯共形权为 $h = 1$ 的基本场。类似地，我们也可以计算出 $T(z) T(w)$ 的 OPE：

$$\begin{aligned} R\{T(z) T(w)\} &= 4\pi^2 g^2 : \partial \phi(z) \partial \phi(z) : : \partial \phi(w) \partial \phi(w) : \\ &= 4\pi^2 g^2 (4 : \partial \overline{\phi(z)} \partial \phi(z) : : \partial \overline{\phi(w)} \partial \phi(w) : + 2 : \partial \overline{\phi(z)} \partial \overline{\phi(z)} : : \partial \phi(w) \partial \phi(w) :) \\ &= 4\pi^2 g^2 \left(-\frac{4}{4\pi g} \frac{\partial \phi(z) \partial \phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{1}{8\pi^2 g^2} \frac{1}{(z-w)^4} \right) + \text{reg}(z-w) \\ &= \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)} + \text{reg}(z-w) \end{aligned} \quad (\text{D.106})$$

从而，自由标量理论的能-动张量的确不是基本场，而是一个具有全纯共形权 $h = 2$ 的准基本场。这个理论的中心荷是 $1/4$ 。

Example: The bc CFT 我们的下一个例子是所谓的 bc CFT, 它具有以下的 Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} b \bar{\partial} c \quad (\text{D.107})$$

其中 b, c 各具有全纯共形权 $h_b = \lambda, h_c = 1 - \lambda$ 。对于任意 λ 的选择而言, 这个作用量都是共形不变的。很显然, b, c 之间的两点函数是:

$$\langle b(z)c(w) \rangle = \frac{1}{z-w} + \text{reg}(z-w) \quad (\text{D.108})$$

从而, b 和 c 之间的 OPE 就是:

$$R\{b(z)c(w)\} = \frac{1}{z-w} + \text{reg}(z-w) \quad (\text{D.109})$$

和上面类似地, 我们也可以定义 b 和 c 之间的 Wick 收缩是:

$$\overline{b(z)c(w)} = \frac{1}{z-w} \quad (\text{D.110})$$

并且通过这个 Wick 收缩, 我们就能和前面一样地定义所有 b, c 之间的正规乘积。接下来, 我们来看看这个理论中的能动张量。为了求出能动张量, 我们可以考虑一个无穷小的坐标变换 $\epsilon(z, \bar{z})$, 此时作用量的变化就是:

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{2\pi} \int d^2 z [(\lambda \partial \epsilon b + \epsilon \partial b) \partial c + b \bar{\partial} ((1 - \lambda) \partial \epsilon c + \epsilon \partial c)] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int d^2 z [(1 - \lambda) b \tilde{\partial} \partial \epsilon c + b \bar{\partial} \epsilon \partial c] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2 z \bar{\partial} \epsilon [(\partial b) c - \lambda \partial (bc)]. \end{aligned} \quad (\text{D.111})$$

从而经典上看, 理论的能动张量就是 $T(z) = (\partial b)c - \lambda \partial(bc)$, $\bar{T} = 0$ 。不过和上面的讨论类似地, 由于我们需要抵消掉这个复合算符中的奇异性, 于是我们还需要对它做正规排序:

$$T(z) =: (\partial b)c : -\lambda : \partial(bc) : , \quad \bar{T}(\bar{z}) = 0 \quad (\text{D.112})$$

有了这个表达式之后, 我们也可以开始利用 Wick 定理计算 $T(z)$ 和其他场的 OPE 了。首先对于场 b, c 而言, 我们有:

$$\begin{aligned} R\{T(z)b(w)\} &= R\{[: \partial b(z)c(z) : -\lambda : \partial(bc)(z) :] b(w)\} \\ &= [: \partial b(z) \overline{c(z) : -\lambda : \partial(bc)(z) :] b(w) + [\partial b(z)c(z) : -\lambda : \partial(bc)(z) :] b(w) + \text{reg}(z-w) \\ &= \frac{\lambda}{(z-w)^2} b(z) + \frac{1-\lambda}{z-w} \partial b(w) + \text{reg}(z-w) \\ &= \frac{\lambda}{(z-w)^2} b(w) + \frac{1}{z-w} \partial b(w) + \text{reg}(z-w) \end{aligned} \quad (\text{D.113})$$

$$\begin{aligned}
R\{T(z)c(w)\} &= R\{[: \partial b(z)c(z) : -\lambda : \partial(bc)(z) :]c(w)\} \\
&= [: \overline{\partial b(z)c(z) : -\lambda : \partial(bc)(z)} :]c(w) + [: \partial b(z)c(z) : -\lambda : \overline{\partial(bc)(z)} :]c(w) \\
&= \frac{(1-\lambda)}{(z-w)^2}c(w) + \frac{1}{z-w}\partial c(w) + \text{reg}(z-w)
\end{aligned} \tag{D.114}$$

这验证了：在 bc CFT 中， b, c 分别是具有共形权 $h_b = \lambda, h_c = 1 - \lambda$ 的基本场。除此之外，我们还可以通过计算 TT OPE 来计算理论的中心荷。具体的计算我们就在此略过，只给出一个最后的结果——bc CFT 的中心荷是：

$$c = -3(2\lambda - 1)^2 + 1 \tag{D.115}$$

事实上，这一节中所看到的自由 Boson CFT 和 bc CFT 在弦论中有非常重要的地位。事实上，它们实际上就是对玻色弦做 Faddeev-Popov 量子化后得到的弦世界面自由度。在我们计算弦论中的散射振幅时，就需要求出这些 CFT 中的关联函数。

Correlators on the Minkowskian Plane

最后，让我们说明一点：通过径向量子化的 Euclidean 平面上的关联函数，我们不但可以通过共形变换得到圆柱上的关联函数，还可以通过解析延拓得到 Minkowskian 平面上的关联函数。为了说明这是如何实现的，我们需要首先明白 Euclidean 关联函数和 Minkowski 关联函数之间的差别：由于 Euclidean 时空中没有任何类时和类空的差别，于是对于一个关联函数 $\langle \phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n) \rangle_E$ 而言，我们可以选择任意的分叶，使得 x_1, \dots, x_n 的时序可以是任意的排序。而由于关联函数对应的总是整个空间上的路径积分，于是这些不同排序的关联函数具有相同的值。这也就是说：Euclidean 时空的关联函数是与其算符顺序无关的¹⁸。而对于 Minkowski 空间而言，如果两个算符之间的距离是类时的，那么无论选择什么样的分叶，它们的时序都是不可交换的。这也就是说：Minkowski 时空中的关联函数是依赖于其算符顺序的。

那么，给定一个 Euclidean 时空中的关联函数 $\langle \phi_1(x_1, \tau_1) \dots \phi_n(x_n, \tau_n) \rangle_E$ ，并认为它是某个 Minkowski 关联函数延拓到 $t_j = i\tau_j$ 时的值，那么我们该如何得到 t 为实数时的关联函数呢？为了得知这一点，可以考虑一个 Minkowskian 两点函数 $\langle \Omega | \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) | \Omega \rangle$ ，我们可以在其中插入一组完备的态：

$$\langle \Omega | \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) | \Omega \rangle = \sum_{\alpha} \langle \Omega | \phi_1(x_1) | \alpha \rangle \langle \alpha | \phi_2(x_2) | \Omega \rangle = \sum_{\alpha} \langle \Omega | \phi_1(0) | \alpha \rangle e^{iP_{\alpha}x_{12}} \langle \alpha | \phi_2(0) | \Omega \rangle$$

而这个级数只在 $\text{Im } x_{12}^0 < 0$ 的时候收敛。这也就是说：我们只能将这个关联函数延拓到 $\text{Im } x_{12}^0 < 0$ 的地方。从而，我们得到 Minkowskian 关联函数 $\langle \Omega | \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) | \Omega \rangle$ 的步骤应该是如下的：首先，我们需要找到一个在下半 x_{12}^0 平面解析的函数 $G(x_{12}^0)$ ，并且它在虚轴上的值和 $\text{Im } x_{12}^0 < 0$ 时的 Euclidean 关联函数相同。然后，我们再取 $G(x_{12}^0)$ 在 $x_{12}^0 = t_{12} - i\epsilon$ 时的值，此时得到的就是 Minkowskian 关联函数 $\langle \Omega | \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) | \Omega \rangle$ 。类似地，如果我们需要求 $\langle \Omega | \phi_2(x_2) \phi_1(x_1) | \Omega \rangle$ ，那么就需要找到在上半平面上解析的、在虚轴上和 Euclidean 关联函数相同的函数，并取其在 $x_{12}^0 = t + i\epsilon$ 的值。对于多点函数而言，这些讨论也依然成立：如果我们想要得到排序为 $\langle \Omega | \phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n) | \Omega \rangle$ 的 Minkowskian 关联函数，那么就需要从

¹⁸ 这并不是说我们能够扔掉 OPE 中的 radial order。这件事情只对关联函数——也就是全空间的路径积分成立，并不是说这些算符可交换。

$\text{Im } x_{i,i+1}^0 < 0$ 的 Euclidean 关联函数出发, 找到在 $\text{Im } x_{i,i+1}^0 < 0$ 时与 Euclidean 关联函数相同的、在下半 x_{ij}^0 平面解析的函数, 再取其 $x_{i,i+1}^0 = t_{i,i+1} - i\epsilon$ 的值。

这听起来可能有点抽象, 我们不妨看一个例子。考虑 Euclidean 复平面中全纯算符 ϕ 的两点函数。在 Euclidean 时空中, 这个两点函数是 $\langle \phi(z_1)\phi(z_2) \rangle = 1/z_{12}^{2h}$, 所以如果我们想计算 $\langle \Omega | \phi(z_1)\phi(z_2) | \Omega \rangle$, 那么我们想找的函数 $G(x_{12}^0)$ 在负虚轴上应该就等于 $1/(ix_{12}^0 + ix_{12})^{2h}$ 。事实上, 如果我们将这个函数的割线选在实轴上, 那么它本身就在下半平面解析。于是我们只要取 $x_{12}^0 = t_{12} - i\epsilon$ 就能得到我们想要的 Minkowskian 关联函数:

$$\langle \Omega | \phi(z_1)\phi(z_2) | \Omega \rangle = \frac{1}{(it_{12} + ix_{12} + \epsilon)^{2h}}$$

事实上, $1/(ix_{12}^0 + ix_{12})^{2h}$ 在上半平面也是解析的, 于是时序相反的关联函数就是:

$$\langle \Omega | \phi(z_2)\phi(z_1) | \Omega \rangle = \frac{1}{(it_{12} + ix_{12} - \epsilon)^{2h}}$$

D.3 The Virasoro Algebra

D.3.1 The Virasoro Algebra

在这一节中, 我们的目标就是利用局域共形对称性来研究 CFT 的谱——也就是这个理论中的量子态具有什么性质。在量子场论的路径积分表述中, 我们实际上非常不好处理量子态。这是由于我们关心的态实际上不处于所有可能的场构型张成的大 Hilbert 空间, 而是出于它的一个可数维子空间中。这个子空间就是场算符的所有微分多项式作用在一个特殊的态——真空态 $|\Omega\rangle$ 上所得到的空间。为了描述这个空间中的量子态, 我们就必须切换到量子场论的算符表述中去。

我们可以继续思考: 如何通过理论的对称性看到理论中的态具有什么性质呢? 答案是: 这些态一定处于对称代数的某个不可约表示中。除此之外, 只需要知道理论中具有哪些不能互相通过对称变换互相变化的态, 就能够得到理论的整个谱。于是在这一节中, 我们的目标就是求出局域共形对称性在 Hilbert 空间上的生成元, 看到它们构成什么样的李代数, 并求出这个李代数的所有不可约表示。

既然我们在上面已经计算出了局域共形对称性的流, 那么计算出相应的生成元也就轻而易举。和上面一样, 我们仍然只关注全纯部分, 而反全纯部分可以用完全类似的方法求得。由于变换 $\epsilon(z)$ 对应的流是:

$$J^z = 0, \quad J^{\bar{z}} = \frac{1}{\pi} T(z)\epsilon(z) \quad (\text{D.116})$$

于是, 变换 $\epsilon(z)$ 对应的生成元就是:

$$Q_\epsilon = \oint_C r d\theta J^r = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz T(z)\epsilon(z) \quad (\text{D.117})$$

其中围道 C 就是我们选定的空间切片 $z\bar{z} = \text{Const}$ 。围道方向的选取是任意的, 为了和上面的选取相一致, 我们在这里选为逆时针。利用这个生成元, 我们也可以将局域 Ward 恒等式改写为:

$$\delta_\epsilon \mathcal{O}(z, \bar{z}) = -[Q_\epsilon, \mathcal{O}(z, \bar{z})] \quad (\text{D.118})$$

由此也可以看出, Q_ϵ 确实是量子理论中局域共形变换的生成元。在上一节关于 Witt 代数的讨论中, 我们看到在经典理论中, 变换 $\epsilon(z) = z^{n+1}$ 的生成元是 l_n , 于是在量子理论中, 我们也将 $\epsilon(z) = z^{n+1}$ 的生成元定义为 L_n , 而这样定义的 L_n 也就是 $T(z)$ 在 $z = 0$ 处 Laurent 展开的各个系数:

$$L_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{n+1} T(z), \quad T(z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}} \quad (\text{D.119})$$

在经典理论中, 生成元 l_n 构成的李代数是由 $[l_m, l_n] = (m - n)l_{m+n}$ 确定的 Witt 代数。而正如我们在前面所说, 在量子理论中, 由于量子态乘一个任意的相因子也描述相同的量子态, 于是理论的对称代数中还可以有一个额外的生成元 **1**, 作用在量子态上就给出量子态本身。这样一来, $e^{i\theta\mathbf{1}}$ 就是量子态的相位变换。于是在量子理论中, 两个对称变换生成元的对易子 $[T^a, T^b]$ 不一定是原李代数中的元素 $iC_c^{ab}T^c$, 还有可能是原李代数元素和 **1** 的线性组合 $iC_c^{ab}T^c + c\mathbf{1}$, 而这个新加人的 c 就被称为**中心荷**。这样一来, 原本的李代数和 **1** 就构成了一个新的李代数, 这个过程就被称为原李代数的一个**中心扩张**。也就是说: 量子理论中的对称代数有可能不再是 Witt 代数, 而是 Witt 代数的一个中心扩张, 其对易子中可能含有额外的中心荷项。

接下来, 我们就想要计算出量子理论中的这个中心扩张的对称代数。为此就需要计算对易子 $[L_m, L_n]$ 。而在径向量子化中, 我们可以直接从径向量子化中计算对易子。对于两个可以写成如下形式的算符:

$$A = \oint_C dz a(z), \quad B = \oint_C dz b(z) \quad (\text{D.120})$$

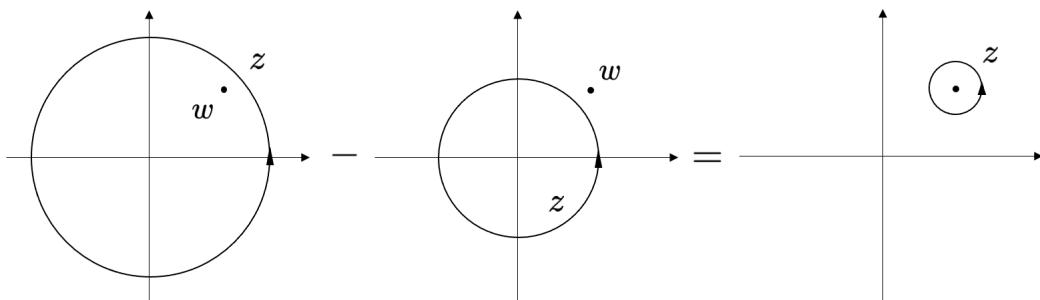
其中 C 是任意的空间切片 $z\bar{z} = \text{Const}$ 。那么 A 和 B 的对易子就是:

$$[A, B] = \oint_{C_1} dz \oint_{C_2} dw (a(z)b(w) - b(w)a(z)) \quad (\text{D.121})$$

在此时, C_1, C_2 的选取还是任意的。为了将这个切换为我们熟悉的径向乘积, 我们可以将第一项中的 C_1 选择为 $r = r_0 + \epsilon$, 将 C_2 选为 $r = r_0$ 。在第二项中, 我们将 C_1 选择为 $r = r_0 - \epsilon$, C_2 选择为 $r = r_0$ 。这样一来, 所有的算符就都是按照径向排序的:

$$[A, B] = \oint_{r_0} dw \left(\oint_{r_0+\epsilon} dz - \oint_{r_0-\epsilon} dz \right) R\{a(z)b(w)\} \quad (\text{D.122})$$

接下来, 我们的 trick 就是: 由于算符乘积 $R\{a(z)b(w)\}$ 只在 $z - w$ 有奇点, 于是这两个回路的差可以被变形为以下的回路:



也就是说：

$$[A, B] = \oint_{r_0} dw \oint_{z \rightarrow w} dz R\{a(z)b(w)\} \quad (D.123)$$

将这个结果用到生成元 L_m, L_n 的对易子 $[L_m, L_n]$ 中，就会得到：

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dw w^{n+1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{z \rightarrow w} dz z^{m+1} R\{T(z)T(w)\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dw w^{n+1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{z \rightarrow w} dz z^{m+1} \left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dw w^{n+1} \left[w^{m+n+2} \partial T(w) + 2(m+1)w^{m+n+1} T(w) + \frac{c}{12} m(m+1)(m-1)w^{m+n-1} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} (m-n) \oint_C dw w^{m+n+1} T(w) + \frac{c}{12} m(m+1)(m-1) \delta_{m,-n} \\ &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m+1)(m-1) \delta_{m,-n} \end{aligned} \quad (D.124)$$

这告诉我们：在量子理论中，局域共形变换的生成元 L_n 之间满足以下的对易关系：

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m+1)(m-1) \delta_{m,-n} \mathbf{1} \quad (D.125)$$

这个对易关系确定的李代数就被称为 **Virasoro 代数**。按照类似的步骤，我们也可以得到：反全纯部分的生成元 \bar{L}_m 也构成 Virasoro 代数，并且 \bar{L}_n 和 L_m 相互对易。从而，在量子理论中，局域共形对称性的对称代数就是两个 Virasoro 代数的直和 $\mathbf{Vir} \oplus \bar{\mathbf{Vir}}$ 。另外，我们可以观察到：对于全局共形对称性的生成元 L_1, L_0, L_{-1} 而言，中心荷项并不存在。从而经典的全局共形对称性并没有被量子修正改变。

在明确 Virasoro 生成元的对易关系之后，我们还需要再讨论一个问题：Virasoro 代数中的这些生成元的 Hermitian 共轭是什么？事实上，在径向量子化中，Hermitian 共轭是很 subtle 的一个事情。为了弄清楚 Hermitian 共轭意味着什么，我们最好回到最初的起点：在径向量子化的过程中，我们从一个圆柱上的 Minkowski 场论出发，做了一个 Wick 转动 $t = i\tau$ 得到圆柱上的 Euclidean 场论，通过定义复坐标 $w = x + i\tau = x + t, \bar{w} = x - i\tau = x - t$ ，这个 Euclidean 场论中的共形变换就能写为 w, \bar{w} 上的全纯变换 $w \rightarrow f(w)$ 。然后我们通过共形变换 $z = e^{-2\pi i w/L}$ 将这个场论变为了二维复平面上的 CFT。而我们知道，Hermitian 共轭不会变换 Minkowski 坐标 (t, x) 。接下来，我们要做的就是从这个事实出发，试图求出 L_n 的 Hermitian 共轭。

由于 Virasoro 生成元是由能-动量张量定义的，于是我们首先需要得到的就是能-动量张量在这个变换下的变化关系。利用我们之前得到的关系 $T'(w) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-2} T(z) + \frac{c}{12} \{z; w\}$ ，就有：

$$T(w) = \frac{4\pi^2}{L^2} \left(-T(z)z^2 + \frac{c}{24} \right) \quad (D.126)$$

而能-动张量的 Laurent 展开也变为：

$$T(z) = \sum_n \frac{L_n}{z^{n+2}} = \sum_n L_n e^{-2\pi i w(n+2)/L} \quad (D.127)$$

于是，我们就能将圆柱上的能-动张量用 Virasoro 生成元表达为：

$$T(w) = \frac{4\pi^2}{L^2} \left(-\sum_n L_n e^{-2\pi i n w / L} + \frac{c}{24} \right) \quad (\text{D.128})$$

由于 $w = x + t$ ，于是在 Hermitian 共轭下， w 是不会发生任何变化的。由于能-动张量 $T_{\mu\nu}$ 本身是 Hermitian 的，于是 T_{ww} ，从而 $T(w) = -2\pi T_{ww}$ 也不应该在 Hermitian 共轭下发生任何变化。从而，如果我们对上式做一次 Hermitian 共轭，就会得到：

$$T(w) = \frac{4\pi^2}{L^2} \left(-\sum_n L_n^\dagger e^{2\pi i n w / L} + \frac{c}{24} \right) \quad (\text{D.129})$$

对比这两个式子，我们就可以直接得出：

$$L_n^\dagger = L_{-n} \quad (\text{D.130})$$

我们会在下面的讨论中频繁用到这个关系。

D.3.2 Central Charge, Casimir Energy and the Weyl Anomaly

既然 Virasoro 代数中具有一项中心荷，那么我们自然就想知道：这个中心荷有什么样的物理含义？首先，让我们试图说明：中心荷实际上对应圆柱上理论的 *Casimir* 能量。为了看到这一点，我们可以试图用 Virasoro 生成元来表达出圆柱上的 Hamiltonian 和动量，它们的定义就是对空间切片积分 $T_{\tau\tau}$ 和 $T_{\tau x}$ ：

$$H = \int_0^{2\pi} dx T_{\tau\tau} = -2\pi \int_0^L dx (T(w) + \bar{T}(\bar{w})) = \frac{2\pi}{L} \left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \right)$$

$$P = \int_0^{2\pi} dx T_{\tau x} = -2\pi \int_0^L dx i (T(w) - \bar{T}(\bar{w})) = \frac{2\pi i}{L} (L_0 - \bar{L}_0)$$

而在复平面上，Hamiltonian 和动量分别是径向伸缩的生成元 $H = L_0 + \bar{L}_0$ 和旋转生成元 $P = i(L_0 - \bar{L}_0)$ 。容易看出，复平面和圆柱上的动量算符之间只差了一个来自于坐标轴缩放的因子，但是圆柱上的能量就比复平面上的能量额外多出一部分。这部分多出的能量意味着圆柱上的理论具有基态能量 $-\frac{2\pi}{L} \frac{c}{12}$ ，从而这部分能量就可以被认为是圆柱上的 **Casimir 能量**¹⁹。

这部分 Casimir 能量不仅可以从算符角度推导出来，它也当然会出现在路径积分形式理论中。事实上，这部分 Casimir 能量和一个 CFT 的重要性质——**Weyl 反常**相关联。Weyl 反常告诉我们：如果我们想要在弯曲的时空背景下定义这个 CFT，那么 $T_\mu^\mu = 0$ 将不再成立，并且能-动张量的迹会正比于时空的 Ricci 曲率：

$$T_\mu^\mu = -\frac{c}{24\pi} R$$

¹⁹回忆一下你熟悉的因子 $-1/12 = 1 + 2 + 3 + \dots$ ！

这也同时给了我们中心荷的第二部分物理含义——中心荷刻画了共形对称性在弯曲背景下会如何破坏。下面，我们就来试图证明这个关系。

Proof. (未完成) □

你可能会想：这里的中心荷 c 来自于理论的全纯部分，而事实上，如果我们将上面这些讨论的所有全纯部分换成反全纯部分，那么也会得到类似的 $T_\mu^\mu = -\frac{\bar{c}}{24}R$ 。为了保证理论的自洽性，我们发现：如果一个 *CFT* 能够在弯曲时空中被定义，那么它的全纯、反全纯中心荷一定相等！

从 Weyl 反常出发，我们实际上还能得知理论在 **Weyl 变换** 下如何变化。Weyl 变换是一类只对度规作用的变换，其效果就是将度规从 $g_{\mu\nu}$ 变为 $g'_{\mu\nu} = e^{2\omega(x)}g_{\mu\nu}$ 。为了得知理论的关联函数如何在 Weyl 变换下变化，可以先考虑一个无穷小的 Weyl 变换，从 $e^{2\Omega}\hat{g}$ 变化到 $e^{2\omega+2\Omega}\hat{g}$ 。在这个变换下，我们有：

$$\begin{aligned}
 \langle \dots \rangle [e^{2\omega+2\Omega}\hat{g}] &= \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[e^{2\omega+2\Omega}\hat{g}]) (\dots) \\
 &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-S[e^{2\Omega}\hat{g}] - \int d^2x \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} 2\omega g_{\mu\nu}\right) (\dots) \\
 &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-S[e^{2\Omega}\hat{g}] - \int d^2x \sqrt{\hat{g}} e^{2\Omega} \omega T^\mu\right) (\dots) \\
 &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-S[e^{2\Omega}\hat{g}] + \frac{c}{24\pi} \int d^2x \sqrt{\hat{g}} e^{2\Omega} \omega R[e^{2\Omega}\hat{g}]\right) (\dots) \\
 &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-S[e^{2\Omega}\hat{g}] + \frac{c}{24\pi} \int d^2x \sqrt{\hat{g}} \omega (R[\hat{g}] - 2\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Omega)\right) (\dots) \\
 &= \exp\left(\frac{c}{24\pi} \int d^2x \sqrt{\hat{g}} \omega (R[\hat{g}] - 2\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Omega)\right) \langle \dots \rangle [e^{2\Omega}\hat{g}]
 \end{aligned}$$

其中在第三行处，我们利用了能-动张量的定义 $T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}$ ；而在第五行处，我们利用了 Ricci 曲率满足的关系 $R[e^{2\Omega}\hat{g}] = e^{-2\Omega}R[\hat{g}] - 2e^{-2\Omega}\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\Omega$ 。这也就说明：

$$\frac{\delta \log(\dots) [e^{2\Omega}\hat{g}]}{\delta \Omega(x)} = \frac{c}{24\pi} \sqrt{\hat{g}} (R[\hat{g}] - 2\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Omega)$$

对这个关系积分，我们就最终能够得到 Weyl 变换前后关联函数之间的关系：

$$\langle \dots \rangle [e^{2\Omega}\hat{g}] = \exp\left[\frac{c}{24\pi} \int d^2x \sqrt{\hat{g}} (\Omega R[\hat{g}] + \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Omega \partial_\nu \Omega)\right] \langle \dots \rangle [\hat{g}]$$

这告诉我们：当我们试图在一个时空中定义理论时，还需要额外关心这个时空上的度规，不同的度规可能会带来不同的关联函数。当然，由于这个 Weyl 反常因子实际上是关联函数外面的一个常数因子，而我们在使用关联函数的时候通常会做一些归一化，从而 Weyl 反常因子一般不会导致两个度规相差 Weyl 变换的理论具有不同的物理。事实上，前面我们看到的 Casimir 能量也能通过 Weyl 反常的角度理解。当我们利用映射 $z = e^{-2\pi i w/L}$ 将圆柱映射到复平面的时候，复平面上的度规实际上是：

$$dz d\bar{z} = \frac{4\pi^2}{L^2} z \bar{z} dw d\bar{w}$$

从而, 从平直的复平面出发, 我们还需要作用一个 $\Omega = \frac{1}{2} \log(\frac{4\pi^2}{L^2} z\bar{z})$ 的 Weyl 变换来将平直度规变为能映射到平直圆柱的弯曲度规, 而这个 Weyl 变换给关联函数带来的因子就是:

$$\exp\left(\frac{c}{24\pi} \int 2\partial\Omega\bar{\partial}\Omega\right) = \exp\left(\frac{c}{48} \int d^2z \frac{1}{|z|^2}\right)$$

稍微看看就能知道: 这是无穷大的。不过事实上, 这个无穷大正是我们需要的行为之一: 如果理论中包含零点能 E_0 , 那么它将会给路径积分带来一个 $e^{-E_0 T}$ 的因子, 其中 T 是体系演化的总时间。如果我们像平常一样将 T 取为无穷大, 那么零点能带来的因子当然是发散的。如果我们做一个“红外正规化”, 将体系演化的总时间取为 T , 那么就有:

$$\exp\left(\frac{c}{24\pi} \int 2\partial\Omega\bar{\partial}\Omega\right) = \exp\left(\frac{\pi c}{24} \log \frac{|z|_{\max}}{|z|_{\min}}\right) = \exp\left(\frac{\pi c}{12L} T\right)$$

从而, 平直复平面和平直圆柱之间的配分函数 Z 之间就应该满足²⁰:

$$Z_{\text{flat plane}} = e^{\pi c T / 12L} Z_{\text{curved plane}} = e^{\pi c T / 12L} Z_{\text{cylinder}}$$

这也就意味着: 对于平直圆柱而言, 其中的路径积分总会比复平面上的路径积分多一个因子 $e^{\pi c T / 12L} = e^{-E_0 T}$, 这就对应圆柱上的理论具有零点能 E_0 。这也就从 Weyl 反常的角度理解了前面我们看到的圆柱上的 Casimir 能量。这就基本完成了我们对中心荷物理意义的讨论 (未完成: 两个方法计算出的 Casimir 能量相差一个系数 2...)。

D.3.3 Highest Weight Representations of Virasoro Algebra

知道了理论的对称代数之后, 我们就可以试图通过求出这个对称代数的不可约表示来看到这个理论中量子态的性质。由于:

$$[L_0, L_m] = -m L_m \tag{D.131}$$

于是和我们最熟悉的 $\text{su}(2)$ 代数类似, Virasoro 代数也可以被分解为一个“对角”算符 L_0 和一系列升降算符 L_m, L_{-m} 的形式。而我们求出 $\text{su}(2)$ 表示的策略就是: 先从一个具有最高 L_z 本征值的最高权态 $|j, j\rangle$ 开始, 依次作用下降算符 L_- 来得到各个 $|j, m\rangle$ 。这样得到的所有 $|j, m\rangle$ 就张成 $\text{su}(2)$ 不可约表示的表示空间。事实上, 这是一个十分普遍的策略: 在数学上, 将李代数分解为一些“对角”算符和一系列升降算符的这件事情被称为李代数的根子空间分解。对于任何能被根子空间分解的李代数, 我们都可以通过对最高权态依次作用降算符的方式构造出它的表示。

对于 Virasoro 代数而言, 我们也可以做类似的事情: 考虑一个具有 L_0 本征值 $L_0|h\rangle = h|h\rangle$ 的态, 并且令其为最高权态, 也就是让所有 $L_m|h\rangle = 0$ ($m > 0$)²¹。连续作用降算符, 我们就能得到以下的态:

$$L_{-m_1} L_{-m_2} \dots L_{-m_n} |h\rangle, \quad 1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n \tag{D.132}$$

其中, $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$ 的要求是为了防止重复计数而引入的。很显然, 这样的态具有 L_0 本征值 $h + \sum_i m_i$, 我们称它为一个 $\sum_i m_i$ 级的导出态。从一个 $|h\rangle$ 出发, $|h\rangle$

²⁰之所以考虑配分函数, 是因为我们不想处理其他算符在这个变换下的变化行为。

²¹其实在这里, 由于 L_m 会减小 L_0 的本征值, 于是我们考虑的实际上是最低权态, 而不是最高权态。

和所有如此构造出的导出态就张成了一个 Virasoro 代数的表示空间, 这些被构造出的表示也被数学家们称为 **Verma 模**。

在这个表示空间中, N 级导出态的个数就是满足约束 $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$ 和 $\sum_i m_i = N$ 的 m_1, m_2, \dots, m_n 数量, 我们可以将其记作 $P(N)$ 。通过直接对等式左边做 Taylor 展开可以证明: $P(N)$ 就是以下函数的 Taylor 展开系数:

$$\frac{1}{\varphi(q)} := \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)} = \sum_{N=0}^{\infty} P(N) q^N \quad (\text{D.133})$$

现在我们已经成功构造出了一系列 Virasoro 代数的表示, 它们可以用一个最高权 h 标记。看到这里你可能会问: 这样构造出的表示是不可约的么? 答案是: 不一定。在我们构造出的这个 Verma 模中, 可能存在一些导出态的线性组合 $|\chi\rangle$, 它们也满足 $L_m|\chi\rangle = 0, (\forall m > 0)$, 我们将这种态 $|\chi\rangle$ 称为 **奇异态**²²。例如: 可以验证, 如果 $c = 2h(5 - 8h)/(2h + 1)$, 那么以下态就是一个奇异态:

$$|\chi\rangle = \left(L_{-2} - \frac{3}{2(2h + 1)} L_{-1}^2 \right) |h\rangle \quad (\text{D.134})$$

由于在 Verma 模中的所有态都可以被写为 $L_{-m} \dots |h\rangle$, 于是奇异态和 Verma 模中的所有态的内积都为 0。这也同时意味着奇异态的模 $\langle \chi | \chi \rangle$ 也为 0。事实上, 如果奇异态存在, 那么这个表示就是可约的。这是由于: 奇异态也满足最高权态的条件, 于是我们也可以对奇异态作用一系列 L_{-m} , 也如上地构建一个 Verma 模, 这样得到的表示空间很显然是原表示空间的一个不变子空间。于是如果奇异态存在, 原表示空间中就一定存在一个非平凡的不变子空间, 从而这个表示是可约的。反之, 可以证明: 如果奇异态不存在, 那么用上述手段得到的 Verma 模就是不可约的。

对于这些表示而言, 我们还关心它们的幺正性: 如果一个 Verma 模中不包括 $\langle \psi | \psi \rangle < 0$ 的**鬼态**, 那么就称这个 Verma 模是幺正的。那么, 既然一个 Verma 模可以用 h, c 唯一刻画, 那么如何判断一个 Verma 模的幺正性呢? 一个简单的尝试是: 我们可以通过考虑 $L_{-n}|h\rangle$ 的模来得到一个幺正性判据:

$$\begin{aligned} \langle h | L_n L_{-n} | h \rangle &= \langle h | \left(L_{-n} L_n + 2n L_0 + \frac{1}{12} c n (n^2 - 1) \right) | h \rangle \\ &= \left[2nh + \frac{1}{12} c n (n^2 - 1) \right] \langle h | h \rangle \end{aligned} \quad (\text{D.135})$$

如果 $c < 0$, 那么在 n 足够大的时候, $L_{-n}|h\rangle$ 的模就会小于 0。如果我们考虑 $n = 1$, 也可以发现: 当 $h < 0$ 的时候, $L_{-1}|h\rangle$ 的模也会小于 0, 从而这两种情况下的 Verma 模就都是非幺正的。那么你自然会问: 对于 $c > 0, h > 0$ 的情形, 有没有一个更普遍的判据可以帮助我们判断一个 Verma 模是否是幺正的呢? 答案是肯定的。首先由于不同级的态之间内积为 0, 于是我们在判断是否存在鬼态的时候不需要讨论不同级的态之间的叠加态。对于 Verma 模中的一个 N 级的态 $|N, \alpha\rangle$, 它总能被 N 级导出态的一组基 $|N, i\rangle$ 展开为 $|\alpha\rangle = \alpha_i |N\rangle$ 。从而这个态的内积就是:

$$\langle N, \alpha | N, \alpha \rangle = \alpha_i^\dagger M_{ij}^{(N)} \alpha_j, \quad M_{ij}^{(N)} := \langle N, i | N, j \rangle \quad (\text{D.136})$$

²²英文 singular state, 在其他文献中还将这种态称为 null state。

如果我们选择 $|N, i\rangle$, 使得 $M_{ij}^{(N)}$ 在这一组基下是对角的, 那么这个内积就是 $\sum_i |\alpha_i|^2 M_{ii}$ 。由此就能轻易地看出: 如果 $M^{(N)}$ 具有至少一个负本征值, 那么第 N 级的子空间中一定存在鬼态。另外: 如果 $M^{(N)}$ 存在零本征值, 那么第 N 级的子空间中一定存在奇异态。从而: 我们只需要计算以下的 **Kac 行列式**:

$$\det M^{(N)} := \det \langle N, i | N, j \rangle \quad (\text{D.137})$$

就能够得到一个 Verma 模幺正性和可约性的判据: 对于任何一个 N 而言, 如果 $\det M^{(N)}$ 小于 0, 那么表示空间中一定存在鬼态, Verma 模不幺正; 如果 $\det M^{(N)}$ 等于 0, 那么表示空间中一定存在奇异态, Verma 模可约。当然, 所有 Kac 行列式大于 0 也仅仅是 Verma 模幺正且不可约的一个必要条件。如果一个 $M^{(N)}$ 中存在两个负本征值, 那么 Kac 行列式是无法反映出这一点的。

从而, 为了判断 Verma 模的幺正性和可约性, 就需要计算出所有 N 对应的的 Kac 行列式。在这里, 我们将不会给出计算过程, 而是仅仅给出一个最终的结果:

$$\begin{aligned} \det M^{(N)}(h, c) &= \alpha_N \prod_{\substack{pq \leq N \\ p, q > 0}} (h - h_{p,q}(c))^{P(N-pq)}, \\ h_{p,q}(c) &:= \frac{c-1}{24} + \frac{1}{4}(p\alpha_+ + q\alpha_-)^2, \\ \alpha_{\pm} &:= \frac{\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}} \end{aligned} \quad (\text{D.138})$$

其中 α_N 是一个和 h, c 无关的正的常数。这就能帮助我们判断一个表示是否是幺正、不可约的了。我们马上可以从其中得到一些幺正表示所满足的性质:

由于 $h_{1,1} = 0$, 于是如果 $h < 0$, 那么 $\det M^{(1)}(h, c)$ 一定小于 0, 从而表示空间中存在鬼态。这也就告诉我们: 一个幺正的 Verma 模一定满足 $h \geq 0$ 。对于一个 CFT 而言, 如果其 Hilbert 空间中不包含鬼态, 我们也称之为一个 **幺正 CFT**。我们后面会通过算符-态对应看到, CFT 的 Hilbert 空间可以所有基本场生成的 Verma 模的直和张成。于是幺正 CFT 中的所有 Verma 模都应该是幺正的, 其中所有的基本场都应该具有正的共形权。

明白了共形权对幺正性有什么影响之后, 让我们看看中心荷对幺正性有什么影响。首先, 我们有如下的结论:

Proposition 8. $c \geq 1, h \geq 0$ 的 Verma 模都是幺正的。

Proof. 为了说明这一点, 可以定义一个概念: 我们称在 (c, h) 平面上所有 $h = h_{p,q}(c)$ 的点构成的曲线为 $C_{p,q}$ 。我们证明的第一步就是说明在 $c > 1$ 时, 所有 $C_{p,q}$ 上的点都有 $h \leq 0$ 。如果 $1 < c < 25$, 那么 $h_{p,q}$ 只在 $p = q$ 的时候是负实数, 其余时候是复数; 如果 $c \geq 25$, 那么 $h_{p,q}$ 对于任何 p, q 而言都是负实数。于是 $c > 1$ 时所有 $C_{p,q}$ 上的点都有 $h \leq 0$ 。

然后, 让我们说明 $c > 1, h > 0$ 时所有的 Kac 行列式 $\det M^{(N)}(h, c)$ 都大于 0。这是由于 $\det M^{(N)}(h, c)$ 应该是 h 的连续函数, 并且在 $h > 0$ 的区域中没有零点, 于是这个区域中所有的 $\det M^{(N)}(h, c)$ 都应该和 $h \gg \max_{1 \leq pq \leq N} (|h_{p,q}|)$ 的 Kac 行列式同号。由于显然 $\det M^{(N)}(h, c)$ 大于 0, 于是 $c > 1, h > 0$ 时就有 $\det M^{(N)}(h, c) > 0$ 。

但是就如同上面我们所说: Kac 行列式大于 0 只是 Verma 模幺正的必要条件。要证明 Verma 模幺正, 我们还需要说明矩阵 $M^{(N)}$ 正定。由于 Kac 行列式大于 0, 于是 $M^{(N)}$ 的负本征值只能是偶数个。由于本征值也是 h 的连续函数, 于是负本征值的数目只能在 h 经

过曲线 $C_{p,q}$ 时改变。同样，由于 $C_{p,q}$ 不经过区域 $c > 1, h > 0$ ，从而负本征值的数目也在这个区域中不变。

从而，让我们考虑 h 足够大时的 $M^{(N)}$ 。此时，如果我们取 level N 子空间的基为 $L_{-k_1} \dots L_{-k_n} |h\rangle$, $k_1 \geq k_2 \dots \geq k_n$ ，并且定义 $n(\alpha)$ 为基矢量 $|\alpha\rangle$ 中 L_{-k} 的个数，那么可以证明：

$$\begin{aligned}\langle \alpha | \alpha \rangle &= c_\alpha h^{n(\alpha)} \quad (c_\alpha > 0) \\ \langle \alpha | \beta \rangle &= O(h^{(n(\alpha)+n(\beta))/2-1})\end{aligned}\tag{D.139}$$

考虑长度为 n 的基张成的子空间。在这个子空间上， $M^{(N)}$ 的子矩阵 $M_n^{(N)}$ 将会基本是对角的，从而其本征值也应该全都是正的。并且在 h 足够大时，由于长度比 n 更高的子空间中已经能够产生相应数量的本征值，于是在求出其他本征值时可以只考虑这个子空间的补空间。在这个补空间上， $M_n^{(N)}$ 中的对角元素远大于其他的矩阵元，从而 $M_n^{(N)}$ 的本征值、本征矢量就将近似是 $M^{(N)}$ 的本征值。重复这些讨论，我们就会发现： $M^{(N)}$ 的本征值就是所有 $M_n^{(N)}$ 的本征值，而它们都是正的。从而在 $c > 1, h > 0$ 时，矩阵 $M^{(N)}$ 确实都是正定的。

这些讨论也可以延伸到 $c = 1$ 的情形。此时曲线 $C_{p,q}$ 可能经过 $h = 0$ ，但是由于负本征值的数目只会在跨越这个曲线后改变，于是此时的矩阵 $M^{(N)}$ 虽然可能具有 0 行列式，但是不包含任何负本征值。于是此时的 Verma 模中虽然可能有奇异态，但是仍然么正。这就完成了我们的证明。 \square

对于 $c < 1$ 的情形而言，由于 $h_{p,q}$ 是正的，并且总会随着 p, q 的增长变大，从而对于一般的 h ，总会存在一个 N 使得 $\det M^{(N)} < 0$ ，从而 Verma 模不么正。但是如果 h 等于其中的一个 $h_{p,q}$ ，那么在 $N \geq pq$ 时所有的 Kac 行列式都会是 0，从而 Verma 模还有可能是么正的。我们将不加证明地指出这对应以下的 h, c 选择：

$$\begin{aligned}c &= 1 - \frac{6}{m(m+1)} \\ h = h_{p,q}(m) &= \frac{[(m+1)p - mq]^2 - 1}{4m(m+1)} \quad (1 \leq p < m, 1 \leq q < p)\end{aligned}\tag{D.140}$$

其中 $m = 2, 3, \dots$ 。

D.3.4 The Operator-State Correspondence

现在我们已经求出了 Virasoro 代数的一系列表示，但是这对于我们分析 CFT 中 Hilbert 空间的结构还完全不够。我们还没有回答许多重要的问题，例如是否 Hilbert 空间中所有的态都处于如上构造的 Verma 模中，而不是处于其他的表示中？如果是的，那么 Hilbert 空间中能够含有什么样的最高权表示？在这一节中，我们就将利用二维 CFT 中一个十分重要的性质——算符-态对应来解答这些问题，从而更深层次地了解 CFT 中 Hilbert 空间的结构。

算符-态对应意味着这样一件事情：

对于任何 $z = 0$ 处的局域算符 $\mathcal{O}(z = 0)$ ，都存在一个态 $|\mathcal{O}\rangle$ 与其对应，反之亦然。

为了看到这一点，我们需要回到圆柱上的 Minkowski 时空。在那时，复平面上的 $z = 0$ 对应时间为 $t \rightarrow -\infty$ 的空间切片，于是 $\mathcal{O}(z = 0)$ 实际上是无穷远过去的算符。对于一个

算符 $\mathcal{O}(z=0)$ 而言, 它对应的态就是 $\mathcal{O}(z=0)|1\rangle$, 其中 $|1\rangle$ 就是单位算符对应的状态。从路径积分的角度上看, 这相当于用以下关系定义了态 $|\mathcal{O}\rangle$ ²³:

$$\langle \phi_0, t | \mathcal{O} \rangle = \int^{\phi(t)=\phi_0} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \mathcal{O}(0) \quad (\text{D.141})$$

由于量子场论的 Hilbert 空间是同一个时间切片 t 上所有场本征态 $|\phi, t\rangle$ 张成的空间的一个子空间, 于是这个关系确实确定下来了 $|\mathcal{O}\rangle$ 的所有信息。事实上, 由于:

$$\langle \phi_0, t | \mathcal{O} \rangle = \int^{\phi(t)=\phi_0} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \mathcal{O}(0) = \int (\mathcal{D}\phi_i)_{t=-\infty} \int_{\phi(-\infty)=\phi_i}^{\phi(t)=\phi_0} \mathcal{D}\phi_i e^{-S[\phi]} \mathcal{O}(\phi_i) \quad (\text{D.142})$$

从而这个态 $|\mathcal{O}\rangle$ 还可以写为:

$$|\mathcal{O}\rangle = \int (\mathcal{D}\phi_i)_{t=-\infty} \mathcal{O}(\phi_i) |\phi, -\infty\rangle \quad (\text{D.143})$$

于是这个定义还可以被理解为: 态 $|\mathcal{O}\rangle$ 相当于用 $\mathcal{O}(\phi)$ 作为权重因子地加权混合了 $t = -\infty$ 的时空切片上的场本征态 $|\phi, -\infty\rangle$ 。反而言之, 如果我们拿来一个 $t = -\infty$ 的 Hilbert 空间中的态 $|\Psi\rangle$, 由于 $t = -\infty$ 的场本征态是完备的, 于是它总能被 $t = -\infty$ 场本征态展开成某种:

$$|\Psi\rangle = \int (\mathcal{D}\phi)_{t=-\infty} \Psi[\phi] |\phi, -\infty\rangle \quad (\text{D.144})$$

其中 $\Psi[\phi]$ 就是这个态对应的**波泛函**。并且由于 $|\Psi\rangle$ 属于 $t = -\infty$ 的 Hilbert 空间, 那么波泛函 $\Psi[\phi]$ 应该只依赖于 $\phi(0)$, 从而它理应退化成函数 $\Psi(\phi(0))$ 。而这个态 $|\Psi\rangle$ 对应的算符也就是局域算符 $\Psi(\phi)$ 。从上面这个过程中可以轻易地看出: 我们之所以可以有算符和态之间的映射, 是因为 $t = -\infty$ 的时空切片在径向量子化中直接被缩成了一个点。这样的对应是径向量子化的一个特殊性质, 我们只能在二维共形场论中定义这样的 $|\mathcal{O}\rangle$, 而不能在任何时空中都如此操作。

知道了算符-态对应之后, 我们立马能够从中得出一些重要的推论:

Corollary 1. 基本场 \mathcal{O} 对应的态是 Verma 模中的最高权态 $|h\rangle$, 并且 \mathcal{O} 的共形权 h 就是 $|h\rangle$ 的 L_0 本征值; 反之 Verma 模中的最高权态也对应基本场。

Corollary 2. $L_{-1}|\mathcal{O}\rangle = |\partial\mathcal{O}\rangle$

Proof. 要证明基本场对应最高权态, 我们只需要对 $|\mathcal{O}\rangle$ 作用 L_n , 并证明所有 $n > 0$ 都得到 0 即可:

$$\begin{aligned} L_n |\mathcal{O}\rangle &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n+1} T(z) \mathcal{O}(0) |1\rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n+1} \text{R}\{T(z) \mathcal{O}(0)\} |1\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n+1} \left(\frac{h\mathcal{O}(0)}{z^2} + \frac{\partial\mathcal{O}(0)}{z} \right) |1\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.145})$$

²³根据第三章中的讨论, 你可能会感觉这个态 $|1\rangle$ 就是真空态, 但实际上不然: 对无穷过去的初态也求和的路径积分对应真空这一事实依赖于我们的 $i\epsilon$ trick, 而在 2D CFT 中我们并不会使用这个 trick。事实上, 在下面讨论的 *bc* CFT 中, 态 $|1\rangle$ 就不是真空态。

利用你在幼儿园学到的复变函数知识，我们可以马上发现：对于任何 $n > 0$ 而言，这都只能给出 0，从而 $|\mathcal{O}\rangle$ 确实是最高权态。而对于 $n = 0$ 而言，它给出的结果就是 $h|\Omega\rangle$ 。这就证明了基本场对应最高权态，它们的权也相互对应²⁴。出于这个原因，有些物理学家也将 Verma 模中的最高权态称为**基本态**。当然，如果我们在上式中将 n 取为-1，就可以证明第二个推论。

事实上，由于这个关系和 $L_0|\mathcal{O}\rangle = h|\mathcal{O}\rangle$ 都不仅仅对基本场成立。由于 L_{-1} 就是平移的生成元，于是 $L_{-1}|\mathcal{O}\rangle = |\partial\mathcal{O}\rangle$ 显然是对所有算符都成立的；而对于准基本场而言，由于 $R\{T(z)\mathcal{O}(0)\}$ 的 OPE 中-2 阶项也仍然是 $h\mathcal{O}(0)$ ，于是 $L_0|\mathcal{O}\rangle = h|\mathcal{O}\rangle$ 也对准基本场成立。

反而言之，对于一个最高权态而言，由于算符-态对应是个双射，于是它对应的算符一定也满足上式中的第一行。利用 L_0, L_n 在 $|h\rangle$ 上的作用和 L_{-1} 是平移生成元的这个事实，我们也能还原出 $R\{T(z)\Psi(\phi(0))\}$ 这个 OPE 中的所有奇异项，并从这个 OPE 中容易看出 $\Psi(\phi)$ 是个基本场。这就完成了我们的证明。□

有了这两个推论之后，我们就能对理论的 Hilbert 空间的结构有所了解了：由于我们关心的 Hilbert 空间是场算符的任意微分多项式作用在真空态上产生的空间 $\mathcal{A}(\phi)|\Omega\rangle$ ，于是如果我们所有的广义坐标都是基本场²⁵，那么 Hilbert 空间中就只会包含这些基本场对应的 Verma 模，而不存在其他的表示。

此时，如果我们知道了理论中所有基本场 \mathcal{O} 及它们的共形权 h, \bar{h} ，那么我们就能得知 Hilbert 空间中所有的最高权态，从而也能得知整个 Hilbert 空间中包含的所有 Verma 模。不仅如此，由于我们知道 Verma 模中所有态的全纯、反全纯共形权，而这些共形权又是 Hamiltonian²⁶ D 和角动量 L 的线性组合，于是我们还能得知这些 Verma 模中所有态的能量、角动量本征值，从而解出理论的能量、角动量谱²⁷。

Example: Free Boson Again

现在，让我们试图将前面讨论的这些东西——Virasoro 代数、最高权表示和算符-态对应应用到一些具体的 CFT 中。我们考虑的了例子当然就是大家都很熟悉的自由玻色子：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial\phi\bar{\partial}\phi \quad (\text{D.146})$$

这个理论的场方程是 $\partial\bar{\partial}\phi = 0$ ，从而 $\partial\phi, \bar{\partial}\phi$ 分别是全纯、反全纯的场。为了更好地讨论理论的 Virasoro 生成元和量子态，我们可以对这两个场做 Laurent 展开：

$$\partial\phi = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_m}{z^{m+1}}, \quad \bar{\partial}\phi = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{\alpha}_m}{\bar{z}^{m+1}} \quad (\text{D.147})$$

利用这个模式展开，我们也可以将 ϕ 的模式展开写为：

$$\phi = x - i\frac{\alpha'}{2}p \ln|z|^2 + i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\alpha_m}{z^m} + \frac{\bar{\alpha}_m}{\bar{z}^m} \right) \quad (\text{D.148})$$

²⁴你现在知道为什么要将算符的 h 称为“共形权”了吗？

²⁵其实你已经知道什么东西不满足这个要求了：在前面的讨论中，我们看到自由 Boson 的 ϕ 不是基本场，而 $\partial\phi$ 才是基本场。此时 Hilbert 空间中除了 $\partial\phi$ 及其导出场对应的 Verma 模之外，还有一些别的、对应 ϕ 本身的态，它们不在任何 Verma 模中。我们会在这一节的最后回到自由 Boson 并详细讨论这一点。

²⁶由于 Hamiltonian 就是时间平移的生成元，于是径向量子化中的 Hamiltonian 就是伸缩生成元。

²⁷当然，我们这里看到的是复平面上理论的能量、角动量谱。如果最终想要得到圆柱上理论的这些谱，就需要再次利用 $T(w)$ 和 $T(z)$ 的变换关系。

由于 ϕ 一定是单值的, 这会给我们以限制 $\alpha_0 = \bar{\alpha}_0$ 。并且在这里, 我们定义了 $p = \sqrt{2/\alpha'}\alpha_0$ 。后面在我们讨论弦论的时候将会看到: 这个 p 将会具有弦总动量的物理意义, 不过由于我们现在在讨论 CFT, 就让我们暂且忽略这些细节。通过我们已经司空见惯的正则量子化步骤, 我们可以得到这些算符之间的对易关系:

$$[\alpha_m, \alpha_n] = [\bar{\alpha}_m, \bar{\alpha}_n] = m\delta_{m,-n}, \quad [x, p] = i \quad (\text{D.149})$$

从而, 如果我们从一个具有 p 本征值 k 的真空态 $|0, k\rangle$ 出发, 要求它被所有的湮灭算符 $\alpha_n, (n > 0)$ 湮灭, 那么从这个态中就能创造出一整个 Hilbert 空间, 其中的基是 $\alpha_{-n_1}^{N_1} \dots \alpha_{-n_m}^{N_m} |0, k\rangle$ 。马上我们就会看到, 这些态在算符-态对应下会对应什么样的局域算符。

知道了这个理论的基本性质之后, 让我们先计算出这个理论中的 Virasoro 生成元。首先, 我们已经很熟悉这个理论中的能动张量是 $T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial\phi\partial\phi :$ 了。为了计算出 Virasoro 生成元, 我们就需要对能动张量做相应的围道积分:

$$L_m = \frac{i}{2\pi\alpha} \oint_C dz z^{n+1} : \partial\phi(z)\partial\phi(z) := \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} : \alpha_{m-n} \alpha_n : \quad (\text{D.150})$$

现在, 我们就遇到了一个问题: 我们并不知道该如何计算出两个产生湮灭算符间的正规乘积。但是在自由场论中, 我们还熟悉另外一种正规乘积: 将所有产生算符放在湮灭算符左边所得到的产生-湮灭正规乘积。为了表示区分, 在下面的讨论中, 我们将会将这种正规乘积记为 $\circ AB \circ$, 而将之前我们定义的、用在两点函数中移去奇异部分定义的正规乘积记为 $: AB :$ 。对于一般的 CFT 而言, 这种正规乘积和我们在前面定义的并不相同。但是在这个自由玻色子理论中, 如果你计算 $: \phi(x)\phi(y) :$ 和 $\circ \phi(x)\phi(y) \circ$, 就会发现它们是相同的。由于两种正规乘积都满足 Wick 定理, 于是这就保证了这个理论中任何多点函数的两种正规乘积也相同。从而, 我们可以将这个结果改写为:

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \circ \alpha_{m-n} \alpha_n \circ \quad (\text{D.151})$$

现在我们大家都会计算这个了。对于 $m \neq 0$ 而言, 由于所有的 $\alpha_{m-n} \alpha_n$ 对易, 于是我们甚至可以扔掉这个结果中的产生-湮灭正规乘积; 不过对于 $m = 0$ 而言, 这个结果告诉我们:

$$L_0 = \frac{\alpha' p^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n \quad (\text{D.152})$$

现在我们已经计算出了这个理论中的 Virasoro 生成元。如果你肯动动手的话, 可以验证它们确实满足正确的 Virasoro 代数 $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{cm(m^2-1)}{12}\mathbf{1}$ 。

下面, 我们要做的就是计算出这个理论中的态 $\alpha_{-n_1}^{N_1} \dots \alpha_{-n_m}^{N_m} |0, k\rangle$ 对应什么样的局域算符。在此之前, 我们可能需要将这个问题叙述地更精确一些。回忆径向量子化所做的事实上是将一个圆柱上的理论映射到复平面上, 其中圆柱的无穷过去被映射到复平面的原点。我们希望考虑的问题事实上是: 一个圆柱上的、无穷过去的态 $|\psi\rangle$ 在复平面上对应什么样的局域算符 $\mathcal{V}_\psi(0)$? 这样的算符就被我们称为态 $|\psi\rangle$ 对应的顶点算符。

对于一个局域算符 \mathcal{O} , 它对应的态就是 $\mathcal{O}(0)|1\rangle$, 其中 $|1\rangle$ 是对应单位算符 $\mathbf{1}$ 的态。如果我们对这个态 $|1\rangle$ 作用 α_m , 那么就会有:

$$\alpha_m |1\rangle = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi} z^m \partial\phi(z) |1\rangle \quad (\text{D.153})$$

由于 $|1\rangle$ 这个态不包含任何算符，于是它不应当在原点处给出任何奇异性，从而这个围道积分自然是 0。于是， $|1\rangle$ 这个态应该被所有的 $\alpha_m (m > 0)$ 湮灭，从而应该是某个 $|0; k\rangle$ 。又由于 $L_0|1\rangle$ 也是 0，而 $L_0|0; k\rangle = \alpha' k^2/4$ ，而算符乘积展开要求它们相等，从而单位算符就只能对应到 $k = 0$ 的这个真空：

$$|0; 0\rangle \sim \mathbf{1} \quad (\text{D.154})$$

接下来，让我们集中关注 $|0; 0\rangle$ 所产生的 Hilbert 空间。对于态 $\alpha_{-m}|0; 0\rangle$ 而言，如果我们展开 α_{-m} ，它就可以被写成：

$$\alpha_{-m}|0; 0\rangle = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi} z^{-m} \partial\phi(z)|0; 0\rangle = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{i}{(m-1)!} \partial^m \phi(0)|0; 0\rangle \quad (\text{D.155})$$

其中最后一个等号处利用了留数定理。这也就告诉我们， $\alpha_{-m}|0; 0\rangle$ 对应的算符应该是：

$$\alpha_{-m}|0; 0\rangle \sim \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{i}{(m-1)!} \partial^m \phi(0) \quad (\text{D.156})$$

如果 α_{-m_i} 作用在一个由正规排序的算符 $:\mathcal{O}(0, 0):$ 产生的 $:\mathcal{O}(0, 0):|0; 0\rangle$ 上，我们可以推导出以下的结果：

Lemma 2. 对于 $m > 0$ ，有 $\alpha_{-m} :\mathcal{O}(0, 0): =: \alpha_{-m} \mathcal{O}(0, 0) :$ 。

Proof. 根据 Wick 定理，等式两边相差：

$$\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi} z^{-m} \times (\text{all contractions of } \partial\phi(z), \mathcal{O}(0, 0)) \quad (\text{D.157})$$

而 $\partial\phi$ 和其他场的收缩中至少会包含 $1/z$ 的一次幂，并且剩余的部分中只包含 $z = 0$ 处的场，从而这个围道积分中的所有奇点都无法给出非零的留数。从而等式左右两边一定相等。□

有了这个结果之后，我们就能得到：如果我们想要在一个态上连续作用多个 α_{-m} ，我们就可以将每个 α_{-m} 做以下的替换：

$$\alpha_{-m} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{i}{(m-1)!} \partial^m \phi(0) \quad (\text{D.158})$$

然后对最后的结果做正规排序就好。到此为止，我们就已经明白了 $|0, 0\rangle$ 生成的 Hilbert 空间中的态都对应什么样的顶点算符。

那么， $|0; k\rangle$ 对应什么样的顶点算符呢？为了回答这个问题，我们可以考虑 $|0; k\rangle$ 在变换 $\phi \rightarrow \phi + a$ 下如何变换。通过 Noether 定理，我们可以计算出这个变换的守恒流就是 $j_\mu = i\partial_\mu\phi/\alpha'$ ，从而对应的守恒荷就是：

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint (dz j^z - d\bar{z} j^{\bar{z}}) = p \quad (\text{D.159})$$

而这也应该是这个变换对应的生成元。从而，对 $|0; k\rangle$ 做一个有限的平移变换 e^{iaP} ，得到的结果就应该是 $e^{ika}|0; k\rangle$ 。于是我们可以认为，态 $|0; k\rangle$ 对应的算符就应该是：

$$|0; k\rangle \sim :e^{ik\phi(0)}: \quad (\text{D.160})$$

我知道你可能不太相信这一点，毕竟这到现在还只是一个猜测。于是为了让你更加相信这个，我们可以试图找出更多证据。首先， $|0; k\rangle$ 是一个最高权态，于是根据前面的讨论，它应该对应一个基本场。而我们也可以通过计算 $T(z) : e^{ik\phi(0)} :$ 的 OPE 来验证 $: e^{ik\phi(0)} :$ 是一个基本场：

$$\begin{aligned}
T(z) : e^{ik\phi(0)} : &= -\frac{1}{\alpha'} : \partial\phi(z)\partial\phi(z) : : e^{ik\phi(0)} : \\
&= -\frac{1}{\alpha'} \left(2 : \partial\phi(z)\overline{\partial\phi(z)} : : e^{ik\phi(0)} : + : \overline{\partial\phi(z)\partial\phi(z)} : : e^{ik\phi(0)} : \right) + \text{reg}(z) \\
&= \frac{\alpha' k^2}{4z^2} : e^{ik\phi(0)} : - \frac{ik}{z} : \partial\phi(0)e^{ik\phi(0)} : + \text{reg}(z) \\
&= \frac{\alpha' k^2}{4z^2} : e^{ik\phi(0)} : + \frac{1}{z} \partial : e^{ik\phi(0)} : + \text{reg}(z)
\end{aligned} \tag{D.161}$$

从而，算符 $: e^{ik\phi(0)} :$ 是一个具有全纯共形权 $\alpha' k^2/4$ 的基本场，而 $|0; k\rangle$ 的 L_0 本征值也正是 $\alpha' k^2/4$ ，这给了我们更大的信心。同样，由于 $: e^{ik\phi(0)} :$ 是一个正规排序的算符，于是根据前面的讨论，我们还有以下的对应关系：

$$\alpha_{-m_1} \dots \alpha_{-m_N} |0; k\rangle \sim : \left(\prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{i}{(m_i - 1)!} \partial^{m_i} \phi(0) \right) e^{ik\phi(0)} : \tag{D.162}$$

到此为止，我们就知道了这个自由玻色子理论中所有的态对应的顶点算符都是什么。

Example: The bc CFT Again

接下来，我们考虑的一个例子还是所谓的 bc CFT。其 Lagrangian 是：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} b\bar{\partial}c \tag{D.163}$$

由于其运动方程是 $\bar{\partial}c = \bar{\partial}b = 0$ ，于是我们仍然可以对其做 Laurent 展开²⁸：

$$b(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_m}{z^{m+\lambda}}, \quad c(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{c_m}{z^{m+1-\lambda}} \tag{D.164}$$

利用前面计算出的 bc OPE $b(z)c(0) \sim 1/z$ ，我们可以得到这些展开系数之间的反对易关系：

$$\{b_m, c_n\} = \delta_{m+n,0} \tag{D.165}$$

于是，我们实际上有无穷多组费米的产生-湮灭算符。让我们将所有的 $b_n, c_n (n > 0)$ 视为湮灭算符，那么我们将会有一组真空态 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ ：

$$\begin{aligned}
b_0 |\downarrow\rangle &= 0, \quad b_0 |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle, \\
c_0 |\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle, \quad c_0 |\uparrow\rangle = 0, \\
b_n |\downarrow\rangle &= b_n |\uparrow\rangle = c_n |\downarrow\rangle = c_n |\uparrow\rangle = 0, \quad n > 0.
\end{aligned} \tag{D.166}$$

²⁸在这里，我们将会假设 λ 是一个整数，这样这个 Laurent 展开才是单值的。

由于我们下面要定义产生-湮灭正规乘积, 于是我们还需要人为地将 b_0, c_0 其中之一选为产生算符。在这里, 我们的选择就是 b_0 为湮灭算符, c_0 为产生算符。有了这两个真空, 我们就可以通过在其上作用任意的 c_{-m}, b_{-m} 来产生理论的整个 Hilbert 空间。由于我们知道这个理论的能-动张量是 $T(z) =: (\partial b)c : -\lambda : \partial(bc) :$, 可以计算出这个理论的 Virasoro 生成元:

$$L_m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\lambda - n) : b_n c_{m-n} : \quad (\text{D.167})$$

在 bc CFT 中, 我们用排除奇异部分定义的正规乘积: AB : 实际上不等于产生-湮灭正规乘积 $\circ AB \circ^{29}$ 。我们下面就通过一个很巧妙的方法确定它们之间的差别。对于 $m \neq 0$ 而言, 由于 b, c 这两个算符互相反对易, 从而怎么排列它们其实不太重要, 这两个正规乘积应该相等; 但是对于 L_0 而言, 由于 b_0, c_0 的反对易子不是 0, 于是在两个正规乘积的转换过程中会出现一个额外的项:

$$L_m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\lambda - n) \circ b_n c_{m-n} \circ + a\delta_{m,0} \quad (\text{D.168})$$

为了确定这个额外的常数是多少, 我们可以利用 Virasoro 代数将 $L_0|\downarrow\rangle$ 改写为:

$$\begin{aligned} 2L_0|\downarrow\rangle &= (L_1 L_{-1} - L_{-1} L_1) |\downarrow\rangle \\ &= (\lambda b_0 c_1) [(1 - \lambda) b_{-1} c_0] |\downarrow\rangle = \lambda(1 - \lambda) |\downarrow\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.169})$$

从而, 这个额外的因子应该是 $\lambda(1 - \lambda)/2$ 。于是我们最终可以得到这个理论的 Virasoro 生成元是:

$$L_m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\lambda - n) \circ b_n c_{m-n} \circ + \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \delta_{m,0} \quad (\text{D.170})$$

和前面一样, 在这一小节剩下的部分中, 我们的目标就是求出 bc CFT 中任意态对应的顶点算符。不过由于顶点算符的讨论比较依赖于特定的 λ , 于是在下面的部分中, 我们都将假设 $\lambda = 2$, 从而全纯共形权 $h_b = 2, h_c = -1$, 体系的中心荷为 $c = -26$ 。

根据和前面一样的围道积分, 我们可以得知: bc CFT 的单位算符对应的状态 $|1\rangle$ 满足:

$$b_m|1\rangle = 0, \quad m \geq -1, \quad c_m|1\rangle = 0, \quad m \geq 2 \quad (\text{D.171})$$

从而, 这个态只可能是:

$$b_{-1}|\downarrow\rangle \sim \mathbf{1} \quad (\text{D.172})$$

而经过和上面类似的讨论, 我们可以得知 b_{-m}, c_{-m} 各对应如下的算符:

$$\begin{aligned} b_{-m} &\rightarrow \frac{1}{(m-2)!} \partial^{m-2} b(0), \quad m \geq 2, \\ c_{-m} &\rightarrow \frac{1}{(m+1)!} \partial^{m+1} c(0), \quad m \geq -1 \end{aligned} \quad (\text{D.173})$$

而多个产生算符的作用也和上面一样, 需要对替代后的算符乘积做正规排序。从而, 对于 bc CFT 而言, 我们也明白了任何一个态对应什么样的顶点算符。作为例子, 我们可以关注态 $|\downarrow\rangle$ 对应什么样的算符。由于 $c_1 b_{-1}|\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle$, 于是这个态可以被表示为 $c_1|1\rangle$, 对应的顶点算符也就是:

$$|\downarrow\rangle \sim c(0) \quad (\text{D.174})$$

²⁹ 别忘了对于费米子而言, 产生-正规乘积的定义中需要加上交换所得的负号。

D.3.5 Conformal Families and Operator Algebra

Conformal Families

直到现在为止，我们已经明确了：只要知道了理论中所有基本场及它们的共形权，我们就能得知体系 Hilbert 空间的结构，并且解出理论的能量、角动量谱。不过如果我们想要完整求解一个量子场论，除了得知这些谱之外，我们还想知道任意 n 个算符之间的关联函数 $\langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle$ 。在这一节中，我们的目标就是求解出这些关联函数。

我们仍然考虑所有的广义坐标都是基本场的情形。根据算符-态对应，理论中所有的局域算符都对应某些 Verma 模中的态的线性叠加，于是它们都能写成某个基本场 \mathcal{O} 的、对应 $L_{-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_N} |\mathcal{O}\rangle$ 的导出场 $\mathcal{O}^{(-n_1, \dots, -n_N)}$ 的线性叠加。我们称一个基本场 \mathcal{O} 及其所有导出场 $\mathcal{O}^{(-n_1, \dots, -n_N)}$ 为一个共形族，这也就是一个 Verma 模中的所有态对应的算符。由于 Verma 模中的态经过共形变换只能变换为同一个 Verma 模中的其他态，于是一个算符经过共形变换后也只能变换为同一个共形族中的算符。这也就意味着： $T(z)$ 和共形族中的任意算符的 OPE 只能包含同一种共形族的算符。

既然理论中所有算符都能被分解为基本场和导出场的线性叠加，于是当我们求解这样一个理论中的关联函数时，我们需要求解的也就是所有基本场和导出场的关联函数。而事实上，只要知道了基本场的 n 点关联函数，我们就可以得到所有导出场的关联函数。为了看到这是如何做到的，让我们以 $L_{-n} |\mathcal{O}\rangle$ 对应的导出场为例。

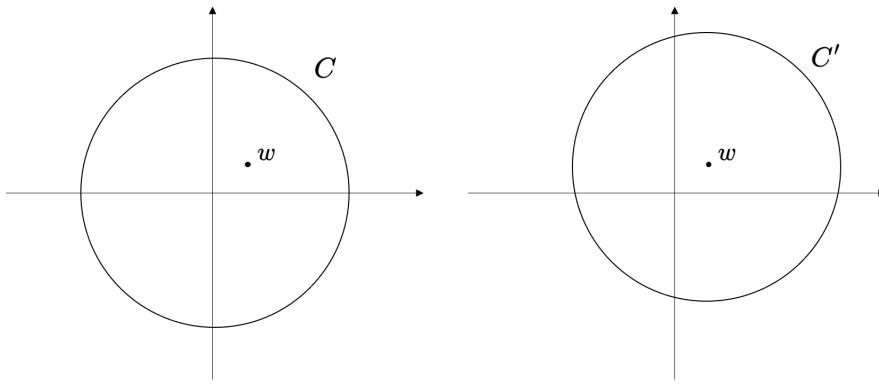
首先，我们需要知道 $L_{-n} |\mathcal{O}\rangle$ 对应什么样的算符。通过前面给出的 L_n 表达式，容易看出 $L_{-n} |\mathcal{O}\rangle$ 对应的局域算符就是：

$$\mathcal{O}^{(-n)}(0) = L_{-n} \mathcal{O}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{1-n} R\{T(z) \mathcal{O}(0)\} \quad (D.175)$$

如果我们想要得到任意 w 处的 $\mathcal{O}^{(-n)}(w)$ ，要做的其实就是将这个算符平移到 $z = w$ ，也就是 $\mathcal{O}^{(-n)}(w) = e^{-iwL_{-1}} \mathcal{O}^{(-n)}(0) e^{iwL_{-1}}$ 。这无非就是把两个局域算符的空间位置各平移 w ：

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{(-n)}(w) &= e^{-iwL_{-1}} L_{-n} e^{iwL_{-1}} e^{-iwL_{-1}} \mathcal{O}^{(n)}(0) e^{iwL_{-1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{1-n} R\{T(z+w) \mathcal{O}(w)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} dz (z-w)^{1-n} R\{T(z) \mathcal{O}(w)\} \end{aligned} \quad (D.176)$$

其中， C 和前面一样，都是一个 $z\bar{z}$ 为恒定值的围道。在第二行第二个等号处，我们做了一个积分变量的替换，使得这个围道 C 平移到了以 $z = w$ 为中心的围道 C' 。注意到：这个积分中唯一的奇异性来自 $z = w$ ，于是我们可以随意变形这个围道 C' ，只要它包裹 w 就行。



这样一来，我们就有：

$$\mathcal{O}^{(-n)}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz (z-w)^{1-n} R\{T(z)\mathcal{O}(w)\} \quad (D.177)$$

知道了导出场和基本场的关系之后，我们就可以试图看到导出场的关联函数和基本场的关联函数有什么关系了：

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{O}^{(-n)}(w) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz (z-w)^{1-n} \langle T(z) \mathcal{O}(w) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{(w_i)} dz (z-w)^{1-n} \sum_i \left\{ \frac{1}{z-w_i} \partial_{w_i} \langle \mathcal{O}(w) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle + \frac{h_i}{(z-w_i)^2} \langle \mathcal{O}(w) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \right\} \\ &\equiv \mathcal{L}_{-n} \langle \mathcal{O}(w) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \end{aligned} \quad (D.178)$$

其中在第二个等号处，由于被积函数在无穷远没有奇点，于是沿无穷远围道的积分为 0，从而一个奇点附近的积分就等于所有其他奇点附近积分之和的相反数。在这之后，我们利用了 $R\{T(z)\mathcal{O}_i\}$ 的 OPE³⁰³¹。并且在最后一行处，我们定义了一个导数算符：

$$\mathcal{L}_{-n} := \sum_i \left\{ \frac{(n-1)h_i}{(w_i-w)^n} - \frac{1}{(w_i-w)^{n-1}} \partial_{w_i} \right\} \quad (D.179)$$

到此为止，我们已经看到了如何将导出场 $\mathcal{O}^{(-n)}$ 的关联函数转化为基本场的关联函数了。对于 $L_{-n_1} \dots L_{-n_N} |\mathcal{O}\rangle$ 对应的场而言，我们也可以类似的求出其对应的算符：

$$L_{-m} L_{-n} |\mathcal{O}\rangle \sim \mathcal{O}^{(-m, -n)}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz (z-w)^{1-m} R\{T(z)\mathcal{O}^{(-n)}(w)\} \quad (D.180)$$

而更多 N 的 $L_{-n_1} \dots L_{-n_N} |\mathcal{O}\rangle$ 对应的算符的定义也是类似的。通过类似的方法，我们也能得到：

$$\langle \mathcal{O}^{(-n_1, \dots, -n_N)}(w) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle = \mathcal{L}_{-n_1} \dots \mathcal{L}_{-n_N} \langle \mathcal{O}(w) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \quad (D.181)$$

³⁰ 你可能会想：我们为什么要如此大费周章地将积分转换为其他奇点的积分呢？答案是：如果我们直接展开 $T(z)\mathcal{O}(w)$ 的 OPE，那么由于前面的 $(z-w)^{1-n}$ 因子，我们就必须考虑这个 OPE 中的正幂次项，而这是不能从 Ward 恒等式中得到的。

³¹ 就算别的算符不是基本场，它们的留数也是 L_0 本征值，于是你不用担心 h_i 不良定义的问题。

这就完全将导出场的关联函数转化为了基本场的关联函数。根据前面的讨论，如果理论的广义坐标都是基本场，那么理论中的局域算符一定能分解为某些基本场和导出场的线性组合，于是只要我们求出了基本场的 n 点关联函数，我们就能得知理论中所有的关联函数，从而求解出整个理论。

The Operator Algebra

那么，我们该如何求出基本场的 n 点关联函数呢？事实上，在共形场论中，只要我们得知了理论的中心荷、所有的共形权和所有三点关联函数 $\langle \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j \mathcal{O}_k \rangle$ ，我们就能得知所有基本场之间的 OPE，从而也就能得知所有多点关联函数的值。在这一段中，我们首先尝试看到这个思路中的第一步，也就是如何得知所有基本场之间的 OPE。

让我们先假设理论中的所有基本场是 $\mathcal{O}_i(z, \bar{z})$ 。为了讨论的方便，我们可以选取一组基本场的基，使得它们满足：

$$\langle \mathcal{O}_i(z_i, \bar{z}_i) \mathcal{O}_j(z_j, \bar{z}_j) \rangle = \frac{\delta_{ij}}{(z_i - z_j)^{2h} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^{2\bar{h}}} \quad (\text{D.182})$$

由于理论中所有算符都属于 \mathcal{O}_i 生成的共形族，于是 $\mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(0, 0)$ 的 OPE 中只能包含算符 $\mathcal{O}_k^{\{n, \bar{n}\}}(0, 0)$ ³²。并且由于标度变换下的不变性，这个 OPE 一定具有以下的形式：

$$R\{\mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(0, 0)\} = \sum_{k, \{n, \bar{n}\}} C_{ij}^{k, \{n, \bar{n}\}} z^{h_k - h_i - h_j + n} \bar{z}^{\bar{h}_k - \bar{h}_i - \bar{h}_j + \bar{n}} \mathcal{O}_k^{\{n, \bar{n}\}}(0, 0) \quad (\text{D.183})$$

于是为了确定这个 OPE，我们要做的就是确定下来这些系数 $C_{ij}^{k, \{n, \bar{n}\}}$ 。首先，为了确定 $C_{ij}^{k, \{0, 0\}}$ ，我们可以试图考虑三点关联函数 $\langle \mathcal{O}_k(w, \bar{w}) \mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(0, 0) \rangle$ 。根据前面得到的三点函数的标准形，它可以写为：

$$\langle \mathcal{O}_k(w, \bar{w}) \mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(0, 0) \rangle = \frac{C_{ijk}}{z^{h_i + h_j - h_k} w^{h_j + h_k - h_i} (w - z)^{h_k + h_i - h_j}} \times (\text{anti-holomorphic part}) \quad (\text{D.184})$$

在我们可以将 w 取到无穷，并令 z 接近 0。此时这就变为：

$$\langle \mathcal{O}_k(w, \bar{w}) \mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(0, 0) \rangle = \frac{C_{ijk}}{z^{h_i + h_j - h_k} w^{2h_k}} \times (\text{anti-holomorphic part}) \quad (\text{D.185})$$

另一方面，在这个极限下，我们能用前面这个 OPE 展开这个关联函数中的算符乘积：

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_k(w, \bar{w}) \mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(0, 0) \rangle &= \sum_{k', \{n, \bar{n}\}} C_{ij}^{k', \{n, \bar{n}\}} z^{h_k - h_i - h_j + n} \bar{z}^{\bar{h}_k - \bar{h}_i - \bar{h}_j + \bar{n}} \langle \mathcal{O}_k(w, \bar{w}) \mathcal{O}_{k'}^{\{n, \bar{n}\}}(0, 0) \rangle \\ &= \sum_{\{n, \bar{n}\}} C_{ij}^{k, \{n, \bar{n}\}} z^{h_k - h_i - h_j + n} \bar{z}^{\bar{h}_k - \bar{h}_i - \bar{h}_j + \bar{n}} \prod_a \mathcal{L}_{-n_a} \prod_b \bar{\mathcal{L}}_{-\bar{n}_b} \frac{1}{w^{2h_k} \bar{w}^{2\bar{h}_k}} \\ &= C_{ij}^{k, \{0, 0\}} z^{h_k - h_i - h_j} \bar{z}^{\bar{h}_k - \bar{h}_i - \bar{h}_j} \frac{1}{w^{2h_k} \bar{w}^{2\bar{h}_k}} + (\text{higher order in } z/w) \end{aligned} \quad (\text{D.186})$$

³²这里的 $\{n, \bar{n}\}$ 指的是一组 $(-n_1, \dots, -n_N, -\bar{n}_1, \dots, -\bar{n}_N)$ 的简写。并且为了简单起见，我们令 $n = \sum_i n_i$ 。并且在后面涉及到对 $\{n, \bar{n}\}$ 求和时，我们指的都是对所有可能的 $(-n_1, \dots, -n_N, -\bar{n}_1, \dots, -\bar{n}_N)$ 求和。

匹配 $1/z^{h_i+h_j-h_k}w^{2h_k}$ 的系数, 我们就会发现:

$$C_{ijk} = C_{ij}^{k\{0,0\}} \quad (\text{D.187})$$

现在我们已经确定了这个 OPE 中的一组系数。剩下要做的就是确定其他的系数 $C_{ij}^{k\{n,\bar{n}\}}$ 。为此, 我们首先需要一个假设, 就是 $C_{ij}^{k\{n,\bar{n}\}}$ 中的全纯、反全纯部分是独立因子化的:

$$C_{ij}^{k\{n,\bar{n}\}} = C_{ijk}\beta_{ij}^{k\{n\}}\bar{\beta}_{ij}^{k\{\bar{n}\}} \quad (\text{D.188})$$

有了这个假设之后, 我们只要求出系数 $\beta_{ij}^{k\{n\}}, \bar{\beta}_{ij}^{k\{\bar{n}\}}$, 就能得到整个 OPE。为了得到这两个系数, 我们可以将这个 OPE 作用在真空态上, 得到:

$$\mathcal{O}_i(z, \bar{z})|h_j, \bar{h}_j\rangle = \sum_{k, \{n, \bar{n}\}} C_{ijk}\beta_{ij}^{k\{n\}}\bar{\beta}_{ij}^{k\{\bar{n}\}}z^{h_k-h_i-h_j+n}\bar{z}^{\bar{h}_k-\bar{h}_i-\bar{h}_j+\bar{n}} \prod_a L_{-n_a} \prod_b \bar{L}_{-\bar{n}_b} |h_k, \bar{h}_k\rangle \quad (\text{D.189})$$

如果我们定义:

$$|n, h_k\rangle := \sum_{\{n\}, \sum_i n_i = n} \beta_{ij}^{k\{n\}} \prod_a L_{-n_a} |h_k\rangle \quad (\text{D.190})$$

反全纯部分中我们也可以类似地定义。很显然, 这个态是一个 n 级的导出态, 而 $\beta_{ij}^{k\{n\}}$ 正是这个态用基 $\{L_{-n_1} \dots L_{-n_N} |h_p\rangle\}$ 展开的展开系数。从而求出 $\beta_{ij}^{k\{n\}}$ 的任务就被转化为了求出这个态的任务。利用这个定义, 上式又可以被写为:

$$\mathcal{O}_i(z, \bar{z})|h_j\rangle|\bar{h}_j\rangle = \sum_{k, n, \bar{n}} C_{ijk}z^{h_k-h_i-h_j+n}\bar{z}^{\bar{h}_k-\bar{h}_i-\bar{h}_j+\bar{n}}|n, h_k\rangle|\bar{n}, \bar{h}_k\rangle \quad (\text{D.191})$$

为了求出态 $|n, h_k\rangle$, 我们可以在等式两边同时作用 L_m 。对于等式左边而言, 由于:

$$L_m \mathcal{O}_i(z)|h_j\rangle = [L_m, \mathcal{O}_i(z)]|h_j\rangle = \delta_{\epsilon=z^{m+1}} \mathcal{O}_i(z)|h_j\rangle = (h_i(m+1)z^m + z^{m+1}\partial) \mathcal{O}_i(z)|h_j\rangle \quad (\text{D.192})$$

从而等式左边就等于:

$$\text{LHS} = \sum_{k, n, \bar{n}} C_{ijk}(h_i m + h_k - h_j + n)z^{h_k-h_i-h_j+n+m}\bar{z}^{\bar{h}_k-\bar{h}_i-\bar{h}_j+\bar{n}}|n, h_k\rangle|\bar{n}, \bar{h}_k\rangle \quad (\text{D.193})$$

而等式右边就是简单的:

$$\text{RHS} = \sum_{k, n, \bar{n}} C_{ijk}z^{h_k-h_i-h_j+n}\bar{z}^{\bar{h}_k-\bar{h}_i-\bar{h}_j+\bar{n}}L_m|n, h_k\rangle|\bar{n}, \bar{h}_k\rangle \quad (\text{D.194})$$

对比等式左右两端, 我们就可以得到以下的递推关系:

$$L_n|n+m, h_p\rangle = (h_i m + h_k - h_j + n)|n, h_p\rangle \quad (\text{D.195})$$

为了求出 $|n, h_p\rangle$, 我们只需要定下其中 $p(n)$ 个未知的系数 $\beta_{ij}^{k\{n\}}$ ³³。并且如果我们从 $|n, h_k\rangle$ 中依次作用 L_{m_i} , 直到这些 m_i 的和为 n , 那么我们也可以得到一个只关于系数 $\beta_{ij}^{k\{n\}}$

³³ 提醒你一下, 如果你忘了, $p(N)$ 就是将 N 分为正整数的分割方式数。

的方程，而所有的这种方程的数量也正是 $p(n)$ 个。通过求解这个方程组，我们就能得到所有的系数 $\beta_{ij}^{k\{n\}}$ ，从而完整计算出 $\mathcal{O}_i(z, \bar{z})\mathcal{O}_j(0, 0)$ 的 OPE。在这个过程中，我们需要的输入仅仅是中心荷 c ，共形权 h_i 和三点函数的系数 C_{ijk} 。

这么说来可能有点抽象。作为例子，我们可以试着求出 2 级的 $|2, h_k\rangle$ 。首先，它可以被分解为：

$$|2, h_k\rangle = \beta_{ij}^{k\{1,1\}} L_{-1}^2 |h_k\rangle + \beta_{ij}^{k\{2\}} L_{-2} |h_k\rangle \quad (\text{D.196})$$

而分别对 $|2, h_k\rangle$ 作用 L_1^2 和 L_2 ，我们可以得到以下的两个方程：

$$\begin{aligned} (h_i + h_k - h_j)(h_i + h_k - h_j + 1) |h_k\rangle &= \beta_{ij}^{k\{1,1\}} L_1^2 L_{-1}^2 |h_k\rangle + \beta_{ij}^{k\{2\}} L_1^2 L_{-2} |h_k\rangle \\ (2h_i + h_k - h_j) |h_k\rangle &= \beta_{ij}^{k\{1,1\}} L_2 L_{-1}^2 |h_k\rangle + \beta_{ij}^{k\{2\}} L_2 L_{-2} |h_k\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.197})$$

而通过 Virasoro 代数，我们可以计算出 $L_1^2 L_{-1}^2 |h_k\rangle$, $L_1^2 L_{-2} |h_k\rangle$, $L_2 L_{-1}^2 |h_k\rangle$ 和 $L_2 L_{-2} |h_k\rangle$ 分别是 $|h_k\rangle$ 的多少倍，从而得到一个关于系数 $\beta_{ij}^{k\{1,1\}}$, $\beta_{ij}^{k\{2\}}$ 的线性方程组。通过求解这个方程，我们就能够计算出 $\beta_{ij}^{k\{1,1\}}$, $\beta_{ij}^{k\{2\}}$ 都是多少。

Correlation Functions and The Conformal Bootstrap

直到此处，我们已经明白如何计算任何两个基本场之间的 OPE 了，接下来的一步就是通过这个 OPE 计算出这个理论中所有的 n 点关联函数。让我们以四点函数为例，看看这是如何实现的。

考虑四点函数 $\langle \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1)\mathcal{O}_2(z_2, \bar{z}_2)\mathcal{O}_3(z_3, \bar{z}_3)\mathcal{O}_4(z_4, \bar{z}_4) \rangle$ 。为了简化讨论，我们可以利用一个全局共形变换 $z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$ 将 z_1 变到 ∞ , z_2 变到 1 , z_4 变到 0 。由于交比 $x = z_{12}z_{34}/z_{13}z_{24}$, $\bar{x} = \bar{z}_{12}\bar{z}_{34}/\bar{z}_{13}\bar{z}_{24}$ 是全局共形不变的，于是这样的变换一定将 z_3, \bar{z}_3 变为 x, \bar{x} 。当然，这会使得关联函数前面出现一个类似 $(dw/dz)^{-h_1} \dots (dw/dz)^{-h_4}$ 的因子。不过只要明确了变换后的关联函数 $\langle \mathcal{O}_1(\infty, \infty)\mathcal{O}_2(1, 1)\mathcal{O}_3(x, \bar{x})\mathcal{O}_4(0, 0) \rangle$ ，任何 z_i 处的关联函数都能被我们求得。而出于某种惯例，我们可以定义以下的函数：

$$G_{34}^{21}(x, \bar{x}) := \langle h_1, \bar{h}_1 | \mathcal{O}_2(1, 1)\mathcal{O}_3(x, \bar{x}) | h_4, \bar{h}_4 \rangle = \lim_{z_1, \bar{z}_1 \rightarrow \infty} z^{2h_1} \bar{z}^{2\bar{h}_1} \langle \mathcal{O}_1(z, \bar{z})\mathcal{O}_2(1, 1)\mathcal{O}_3(x, \bar{x})\mathcal{O}_4(0, 0) \rangle \quad (\text{D.198})$$

其中我们利用了 $\phi^\dagger(z, \bar{z}) = \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \phi(1/\bar{z}, 1/z)$ 。显然，求出了 G_{34}^{21} 就相当于求出了所有的四点函数。为了求出这个关联函数，我们可以将算符乘积 $\mathcal{O}_3(x, \bar{x})\mathcal{O}_4(0, 0)$ 做 OPE：

$$R\{\mathcal{O}_3(x, \bar{x})\mathcal{O}_4(0, 0)\} = \sum_p C_{p34} x^{h_p - h_3 - h_4} \bar{x}^{\bar{h}_p - \bar{h}_3 - \bar{h}_4} \sum_{\{n, \bar{n}\}} \beta_{34}^{p\{n\}} \bar{\beta}_{34}^{p\{\bar{n}\}} x^n \bar{x}^{\bar{n}} \mathcal{O}_p^{\{n, \bar{n}\}}(0, 0) \quad (\text{D.199})$$

剩下的就是将这个 OPE 代入关联函数 $G_{34}^{21}(x, \bar{x})$ 了。经过一番简单的计算，我们会发现，如果我们定义以下的共形块：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{34}^{21}(p|x) &:= (C_{p12})^{-1} x^{h_p - h_3 - h_4} \sum_{\{n\}} \beta_{34}^{p\{n\}} \langle h_1 | \mathcal{O}_2(1) \mathcal{O}_p^{\{n\}} | 0 \rangle \\ &= x^{h_p - h_3 - h_4} \sum_{\{n\}} \beta_{34}^{p\{n\}} x^n \frac{\langle h_1 | \mathcal{O}_2(1) \prod_{a \in \{n\}} L_{-a} | h_p \rangle}{\langle h_1 | \mathcal{O}_2(1) | h_p \rangle} \end{aligned} \quad (\text{D.200})$$

那么整个关联函数就可以被写为：

$$G_{34}^{21}(x, \bar{x}) = \sum_p C_{p34} C_{p12} \mathcal{F}_{34}^{21}(p|x) \bar{\mathcal{F}}_{34}^{21}(p|\bar{x}) \quad (\text{D.201})$$

而这些共形块完全可以通过 Virasoro 代数和基本场的变换关系求出。而显然它们只是中心荷 c 、场 $1, 2, 3, 4, p$ 的共形权 h_i 的函数，和理论的一切其他细节都没有关系。有了这些共形块后，我们就完成了我们对关联函数 $G_{34}^{21}(x, \bar{x})$ 的计算。对于更高点的关联函数而言，我们所做的也是类似的事情：将关联函数中的场依次做 OPE，来将这个关联函数化为更低点的关联函数。最终它们都能被化为一系列结构常数 C_{ijk} 和共形块 $\mathcal{F}_{kl}^{ji}(p|x)$ 的形式。

总结一下我们在这一节中的讨论：如果我们已知理论的中心荷 c 、所有基本场 \mathcal{O}_i 及它们的共形权 h_i, \bar{h}_i 和理论中所有的三点函数 C_{ijk} ，就能求得理论中任意两个基本场之间的 OPE，进而精确地求出理论中所有的关联函数。这也就相当于非微扰地完全求解了这个量子场论！从而当我们说到“求解一个 CFT”时，通常就意味着求出这个理论的中心荷、所有基本场及其 OPE。我们之所以能做到这一点，都是拜二维的共形场论具有无穷多的对称性 L_n 所赐。

D.4 Modular Invariance

D.4.1 Defining Properties of 2D CFTs

在明白了 2D CFT 的基本框架之后，让我们来进一步地讨论 2D CFT 的性质，并且讨论一种只从自洽性条件出发求解 2D CFT 的方法——Conformal Bootstrap³⁴。不过在我们开始之前，我们需要回头思考一个问题：什么定义了一个 2D CFT？这个 2D CFT 需要满足什么样的自洽性条件？在之前的讨论中，我们似乎默认了理论中存在 Lagrangian，并且从这些东西出发构建出了整个理论。但是事实上，这些东西在 CFT 并不是必要的。例如在很多描述 RG 不动点的 CFT 中，理论并没有一个明确的 Lagrangian。事实上，Lagrangian 和路径积分、Hamiltonian 和 UV 正规化、算符代数是完全独立的三种建立量子场论的方式。在下面的讨论中，我们将会首先从算符代数中重新建立起 CFT 的框架。

在定义一个 CFT 时，我们有以下的基本假设：

- 存在一个局域算符构成的 Hilbert 空间 \mathcal{H} 。根据算符-态对应，这也就是所有量子态构成的 Hilbert 空间。我们将假设我们的 CFT 是紧致的，也就是 \mathcal{H} 中包含单位算符 1 ，并且算符的谱是分立的。
- 这个 Hilbert 空间上装备了一个称为算符乘积展开/OPE 的运算 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}(z)$ ，其中 $\mathcal{H}(z)$ 是所有系数为 \mathcal{H} 中元素的 Laurent 级数构成的空间。它满足结合性，也就是 $((\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2) \mathcal{O}_3) = (\mathcal{O}_1 (\mathcal{O}_2 \mathcal{O}_3))$ 。
- \mathcal{H} 中存在一个守恒、无迹的能-动张量 $T_{\mu\nu} \in \mathcal{H}$ ，它和自身的 OPE 是 $T(z)T(0) \sim \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0)$ 。它的 Laurent 展开定义了 Virasoro 生成元 L_n ，并且这个

³⁴这个 notes 的大部分内容来自于 Xi Yin 在 2017 年 Tasi 的 lecture *Aspects of Two-Dimensional Conformal Field Theories*，并且这里所有没有特殊标注来源的图都来自于这份 lecture note（除了有些图是我手绘的，它们能被很显然地看出来）。除此之外，很多讨论来自于 Polchinski 的两卷本弦论和 Di Francesco 的 Conformal Field Theory，我不会特意标明来自于这三份材料中的讨论。

OPE 确保了 L_n 之间满足 Virasoro 代数的对易关系。我们的 Hilbert 空间 \mathcal{H} 可以被分解为若干 Virasoro 代数的 Verma 模的直和，这些 Verma 模的最高权态被称为**基本场**。

从这些假设出发，我们就能重新导出之前我们看到过的所有结论，而不需要引入 Lagrangian 等任何的额外信息。事实上，当我们确定了一个 CFT 的中心荷 c 、所有基本场的共形权 (h_i, \bar{h}_i) 和结构常数 C_{ijk} 后，这个 CFT 就可以通过上面的这些公理完全确定下来。从而这些 c, h_i, C_{ijk} 又被合并称为 **CFT data**。

不过在这些基本假设之外，我们还希望我们的 CFT 满足一些额外的的自治性条件——首先，为了保证 CFT 能够和引力耦合，全纯部分和反全纯部分的中心荷 c, \bar{c} 需要相等。其次，我们想让 CFT 具有**模不变性**。直观而言，这个条件是为了能保证我们将这个 CFT 定义在任意的 Riemann 面上而引入的。我们在下一节中就会详细地看到我们该如何将 CFT 定义在任意 Riemann 面上，并且给出这组重要的自治性条件。

D.4.2 CFT on the Torus

首先我们要明白：为什么需要把 CFT 定义在任意 Riemann 面上？这最大的 motivation 来自于弦论。当我们计算弦的散射振幅时，我们需要对任意世界面上的路径积分求和。首先由于弦论具有微分同胚的规范不变性，于是排除这部分规范冗余之后我们只需要对所有不同的 Riemann 流形求和。又由于弦论具有 Weyl 变换下的规范不变性，而模掉 Weyl 变换的二维 Riemann 流形就等价于 Riemann 面³⁵，于是我们最终需要考虑的是所有 Riemann 面上路径积分的和。如果我们在规范固定时选择世界面上的标准度规为共形规范 $g_{ab} = e^{2\omega(z, \bar{z})} \delta_{ab}$ ，那么规范固定后的理论就是一个 Riemann 面上的 CFT。

Moduli of the Torus

为了明白如何将 CFT 定义在任意的 Riemann 面上，我们最好先看一个例子：如何将 CFT 定义在第二简单的 Riemann 面——**环面上**。由于环面具有 $S^1 \times S^1$ 的拓扑，我们可以将其参数化为 (σ^1, σ^2) ， $0 \leq \sigma^{1,2} \leq 2\pi$ ，并将 $\sigma^1 = 0$ 和 $\sigma^1 = 2\pi$ 、 $\sigma^2 = 0$ 和 $\sigma^2 = 2\pi$ 认同起来。这也就等价于认同了 $(\sigma^1, \sigma^2) \sim (\sigma^1 + 2\pi m, \sigma^2 + 2\pi n)$ 的 σ 平面。

直到此处，我们仅仅给定了环面的拓扑，而并没有给定环面上的度规。虽然由于 Riemann 面是在微分同胚和 Weyl 变换下不变的，于是我们能够通过对环面做 Weyl 变换和微分同胚变换来切换其参数化和度规，但是确定了前面这个参数化之后，并不是所有度规都能通过微分同胚和 Weyl 变换联系起来。这也就是说：环面并不是单一的一个 Riemann 面，而是存在一系列互相不等价的、拓扑相同的 Riemann 面。在这些不等价的 Riemann 面上定义的 CFT 也是不等价的³⁶。

为了看到这一点，我们试图将一个如上参数化的、具有任意度规的环面。由于 Ricci 曲率在 Weyl 变换 $g'_{ab} = e^{2\omega(\sigma)} g_{ab}$ 下的变换关系是 $\sqrt{g'} R' = \sqrt{g} (R - 2\nabla^2 \omega)$ ，于是在局域上选

³⁵这也就是在说。Riemann 面就是 Riemann 流形在微分同胚和 Weyl 变换下的等价类。如果你对这些东西不是很熟悉，可以看看我的弦论 notes。

³⁶当然，这里必须要说明一下：由于 CFT 中存在 Weyl 反常，于是在 Weyl 变换下 CFT 的关联函数并不是不变的。不过由于 Weyl 反常带来的因子只不过会给关联函数乘一个常系数，而我们在使用关联函数时总会对其做必要的归一化，于是 Weyl 变换前后的理论在物理上是等价的。我们会在下一节中详细看到这个 Weyl 反常因子会如何影响关联函数，不过在这一节中，我们将会主要关注环面上度规为平直度规的情形，于是暂时还不需要考虑这个问题。

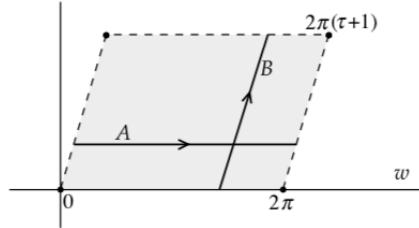
择 $\nabla^2\omega = R/2$ 就可以消去这个度规的 Ricci 曲率³⁷。在这之后，我们在局域上通过一个微分同胚变换将这个 Ricci 平坦的度规变为了 Euclidean 度规。事实上，问题出在这一步：和点粒子的情形类似，并不是所有的微分同胚变换都能保证坐标区域 $\sigma_1, \sigma_2 \in [0, 2\pi]$ 不变。由于在微分同胚变换后，环面在两个方向的周期平移对称性仍然存在，于是它将会变为将以下点认同起来的 σ' 平面：

$$\sigma'^a \sim \sigma'^a + 2\pi(mu^a + nv^a), \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (\text{D.202})$$

此时，在这组坐标下的度规就是 $g_{ab} = \delta_{ab}$ 。经过适当的坐标轴的旋转、缩放和全局 Weyl 变换，我们总可以将 u^a 取做 $(1, 0)$ ，并且使度规仍然是 δ_{ab} 。此时，如果我们定义 $w = \sigma'^1 + i\sigma'^2$ ，并且令 $\tau = v^1 + iv^2$ ，那么这个周期性条件就会变为：

$$w \sim w + 2\pi(m + n\tau) \quad (\text{D.203})$$

而此时的度规就是 $ds^2 = dwd\bar{w}$ 。到此为止，我们就将环面的度规化为了标准的 Euclidean 度规，但是这个变换会使得坐标区域变为下图所示的区域。对于一个任意的度规而言，它总能化为某个 τ 对应的区域上的平坦度规，于是如果两个度规具有相同的 τ ，那么它们之间肯定能通过微分同胚和 Weyl 变换联系起来，从而具有相同模量的环面就对应同一个 Riemann 面。这个模量 τ 就刻画了具有环面拓扑的 Riemann 面的等价类，这些等价类构成的空间就被我们称为环面的模空间。



虽然 τ 可以是任意的复数，不过先别急着说环面的模空间就是 \mathbb{C} 。事实上，存在一些不同的 τ ，它们会给出相同的规范等价类。为了看到这一点，可以考虑以下两种不同的变换：

- $\tau \rightarrow \tau + 1$ 。这意味着周期性条件变为了 $w \sim w + 2\pi(m + n + n\tau)$ 。显然，这仅仅是给出了同一周期性条件的另一种描述，从而在化为标准形式后对应这两个 τ 的度规肯定是规范等价的。
- $\tau \rightarrow -1/\tau$ 。这意味着周期性条件变为了 $w \sim w + 2\pi(m - n/\tau)$ 。如果我们做微分同胚变换 $w' = \tau w$ ，那么这个新坐标上的周期性条件就是 $w' \sim w' + 2\pi(\tau m - n)$ 。由于 m, n 是任意的整数，于是这也等价于原本的周期性条件。至于度规，我们只需要再做一个全局的 Weyl 变换就能将其变为标准的 Euclidean 度规。从而对应这个变换前后的 τ 的度规也是规范等价的。

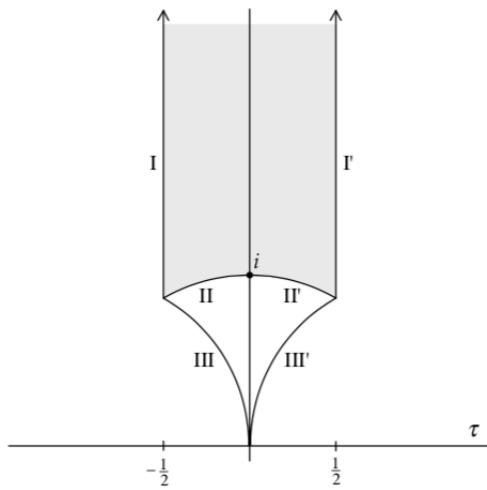
这两种操作生成了 $SL(2, \mathbb{Z})$ 群。换句话说，连续进行这两种操作，最终能将 τ 变为任意满足 $ad - bc = 1$ 的整数 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ 给出的：

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (\text{D.204})$$

³⁷ 在环面上，这一步是一定可以做到的：根据 Gauss-Bonnet 定理，我们有 $\int_{T^2} d^2\sigma \sqrt{g} R = 4\pi(2 - 2g) = 0$ ，从而原度规和全局 Ricci 平坦的度规给出相同的 Euler 示性数，从而这一步不会改变环面的拓扑。

而这样的 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ 刚好对应于群 $SL(2, \mathbb{Z})$ 的元素 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 。而如果我们连续作用两个矩阵 $M_1, M_2 \in SL(2, \mathbb{Z})$ 的变换，得到的总结果和作用 $M_1 M_2$ 对应的变换得到的结果相同。这就意味着：上面这个 τ 的变换实际上就是 $SL(2, \mathbb{Z})$ 在复平面上的一个群作用 $SL(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 。这里的 $SL(2, \mathbb{Z})$ 就被我们称为模群。如果两个 τ 能被这样的 $SL(2, \mathbb{Z})$ 变换互相联系，那么它们就对应相同的规范等价类。从而环面的模空间就是 $\mathbb{C}/SL(2, \mathbb{Z})$ 。我们知道，一个群作用实际上是原本的群到一个变换群的同态。在这个情形下，由于同时反转 a, b, c, d 的符号不改变 τ ，于是 τ 平面上的变换群实际上是 $PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$ 。

在数学上，我们可以证明：除了边界上的点之外，下图阴影区域 $\text{Re } \tau \in [-1/2, 1/2], |\tau| \geq 1$ 中的点都不能通过 $SL(2, \mathbb{Z})$ 变换联系起来，并且该区域外的任意点都可以通过该区域中的点通过 $SL(2, \mathbb{Z})$ 变换联系起来。我们将这个区域称为基本区域 F ，如果我们将其边界 I, I' 和 II, II' 互相认同，那么其中的点就一一对应于模空间上的点。



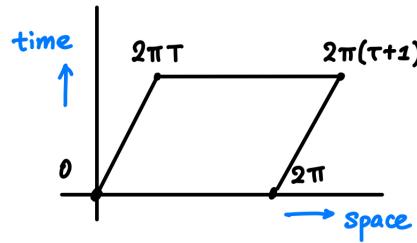
这些讨论事实上也对其他的 Riemann 面适用。对于一个一般的拓扑 r 而言，令其上可能具有的所有度规构成空间 \mathcal{G}_r ，那么这个拓扑对应的模空间就被定义为度规在微分同胚和 Weyl 变换的等价类构成的空间：

$$\mathcal{M}_r := \frac{\mathcal{G}_r}{(\text{diff} \times \text{Weyl})_r} \quad (\text{D.205})$$

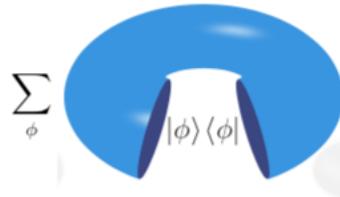
可以证明，对于亏格 g 大于 0 的 Riemann 面而言，其模空间的维数就是 $\dim \mathcal{M}_g = 6g - 6$ 。我们在下面一节中就会看到一个任意 Riemann 面上的这些模量都是什么。

CFT on the Torus

有了这些讨论之后，我们就可以开始正式地在环面上定义 CFT 了。让我们考虑一个具有模量 τ 的环面，并且将其参数化为 $w \sim w + 2\pi \sim w + 2\pi\tau$ ，且将这个区域中的度规取为平直的 $dw d\bar{w}$ 。为了量子化这个环面上的理论，我们需要选择一个环面上的时间方向。在这里，我们选择虚轴方向为时间，实轴方向为空间方向，如下图所示：



由于 Virasoro 生成元只能在复平面及圆柱上定义，于是为了用我们熟悉的算符形式理论处理环面上的 CFT，我们最好将环面想成首尾相连的环面，如下图所示³⁸。这个“首尾相连”的过程也就相当于先将圆柱首尾的量子态设置为相同的中间态，在对这些中间态求和的过程。



对于上图中的环面而言，既然实轴对应空间方向，于是这个方向应该也就对应圆柱的角向。由于我们的参数化中空间切片的长度是 2π ，于是圆柱的周长 L 也应该是 $L = 2\pi$ 。对于时间方向而言，由于仅仅沿着虚轴平移无法将 0 映射到 $2\pi\tau$ ，于是我们“首尾相连”的过程实际上并不是直接将圆柱的两端接在一起，而是“扭曲”地接在一起。圆柱上的一点经过时间演化 $2\pi \text{Im } \tau$ 后，还需要经过空间平移 $2\pi \text{Re } \tau$ 才能回到这一点本身。

明白了如何将这个环面和圆柱联系起来之后，我们就能使用算符形式理论研究环面上的 CFT 了。在环面上，我们主要关注的物理量是环面上的配分函数 $Z(\tau, \bar{\tau})$ 。根据上面的讨论，其定义就是：

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{\phi} \langle \phi | e^{-H(2\pi \text{Im } \tau) - iP(2\pi \text{Re } \tau)} | \phi \rangle = \text{Tr } e^{-H(2\pi \text{Im } \tau) - iP(2\pi \text{Re } \tau)}$$

其中 H, P 就是圆柱上的能量和动量。它们可以用 Virasoro 生成元表达为：

$$H = L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12}, \quad P = i(L_0 - \bar{L}_0)$$

从而，如果我们定义：

$$q = e^{2\pi i \tau}, \quad \bar{q} = e^{-2\pi i \bar{\tau}}$$

那么将所有这些定义环面上的配分函数就可以被写为：

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \text{Tr} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} \right)$$

³⁸这个图来自雅典大学的 D. Manolopoulos 和 K. Sfetsos 的 CFT 讲义。

也就是说：我们可以通过复平面上定义的理论直接计算出环面上的配分函数。如果理论的所有基本场的 (h, \bar{h}) 构成集合 \mathcal{I} ，并且共形权为 (h_i, \bar{h}_j) 的基本场有 $M_{i\bar{j}}$ 个，那么理论的 Hilbert 空间就是：

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{(h_i, \bar{h}_j) \in \mathcal{I}} (R_i \otimes \bar{R}_{\bar{j}})^{\otimes M_{i\bar{j}}}$$

其中 R_i 是具有最高权 h_i 的 Verma 模。在这样一个理论中，环面配分函数就可以被分解为：

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{(h_i, \bar{h}_j) \in \mathcal{I}} M_{i\bar{j}} \text{Tr}_{R_i}(q^{L_0 - \frac{c}{24}}) \text{Tr}_{\bar{R}_{\bar{j}}}(\bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}}) \equiv \sum_{(h_i, \bar{h}_j) \in \mathcal{I}} M_{i\bar{j}} \chi_i(\tau) \bar{\chi}_{\bar{j}}(\bar{\tau})$$

其中， $\chi_i(\tau) := \text{Tr}_{R_i}(q^{L_0 - \frac{c}{24}})$ 就是算符 $q^{L_0 - \frac{c}{24}}$ 在 Verma 模 R_i 上的 trace。它也被称为 Verma 模的 **Virasoro 特征标**。由于在通常的基 $L_{-N}\phi$ 下算符 L_0 是对角的，于是它可以被简单地计算如下：

$$\chi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{h+n-\frac{c}{24}} p(n) = \frac{q^{h-\frac{c}{24}}}{\varphi(q)} = \frac{q^{h+\frac{1-c}{24}}}{\eta(\tau)}$$

在第一个等号处，我们利用了配分数 $p(n)$ 和 Euler 函数之间的关系 $\sum_n p(n)q^n = 1/\varphi(q)$ ，而在第二个等号处，我们利用了 Dedekind η 函数和 Euler 函数之间的关系 $\varphi(q) = q^{-1/24}\eta(\tau)$ 。从而环面配分函数就可以最终被计算出来：

$$Z(\tau) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{(h_i, \bar{h}_j) \in \mathcal{I}} M_{i\bar{j}} \chi_i(\tau) \bar{\chi}_{\bar{j}}(\bar{\tau})$$

在前面的讨论中，我们看到：存在一系列不同的 τ ，它们对应的环面是相同的。从而如果我们的理论是良定义的，那么这些等价的 τ 也应该给出等价的环面配分函数，也就是：

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = Z(\tau + 1, \bar{\tau} + 1), \quad Z(-1/\tau, -1/\bar{\tau}) = Z(-1/\tau, -1/\bar{\tau})$$

这就 CFT 给出了两个自洽性条件，称为配分函数的 **模不变性**，只有满足这两个自洽性条件的 CFT 才能被良好地定义在环面上。在下一节中，我们会看到：配分函数的模不变性并不是模不变性给出的所有自洽性条件，事实上，我们还需要要求环面上的单点函数在 $SL(2, \mathbb{Z})$ 群下满足一定的变换关系。有了这些变换关系，我们才能保证 CFT 在所有 Riemann 面上都能定义。这两个条件会给 $M_{i\bar{j}}$ 一些约束，从而可以对 2D CFT 的基本场的谱作出一定限制。我们在这个 notes 的后面会利用这些模不变性来尝试完全刻画出所有 2D CFT 构成的空间。

Example: Toroidal Partition Function of Free Boson

接下来，让我们考虑一个例子，计算自由玻色子理论中的环面配分函数。你可能会想：自由玻色子理论中的基本场就是 $\partial\phi, \bar{\partial}\phi$ 和 $:e^{ik\phi}:$ ，于是直接代入上面的公式即可。不过事实上，由于确定了理论的作用量并没有完全确定理论，我们还不知道理论的 Hilbert 空间是什么，而环面配分函数显然会因 Hilbert 空间不同而不同。如果我们直接将这三组基本场代入上面的公式，得到的 Hilbert 空间就会是这些 Verma 模的直和，这不一定等同于我们平时量子化自由玻色子时选择的 Fock 空间。从而我们应该直接从 Fock 空间开始讨论。

另外，在理论中有多个味道的时候，理论中还会出现额外的基本场。例如如果 $k_i e^i = 0$ ，那么 $e^i : \partial_i \phi e^{ik \cdot \phi} :$ 就也是一个基本场³⁹。从而此时，我们就更不能只考虑这三组基本场的直和。不过，这些额外的 subtlet 也可以通过考虑 Fock 空间的方式消除：考虑 Fock 空间意味着考虑具有形式 $:(\partial\phi)^n e^{ik\phi}:$ 的所有基本场，从而自然包括了这些额外基本场的贡献。

在通常量子化自由玻色子时，我们会选择一个真空态 $|0; k\rangle$ ，并且考虑在其上作用 α_{-n} 而得的 Fock 空间。而在弦论中，如果我们计算弦的单圈配分函数，那么还需要对所有的 k 进行求和，从而我们真正考虑的 Hilbert 空间应该是所有 k 给出的 Fock 空间的直和——在单味情形中，这只包含 $:e^{ik\phi}:$ 给出的 Verma 模，而不包括基本场 $\partial\phi, \bar{\partial}\phi$ 给出的 Verma 模。

对于 $|0; k\rangle$ 给出的 Fock 空间，由于 $:e^{ik\phi}:$ 的共形权是 $(k^2/8\pi g, k^2/8\pi g)$ ，而 α_{-n} 会使得 L_0 升高 n ，于是它对配分函数的贡献是：

$$\begin{aligned} Z_k(\tau, \bar{\tau}) &= \text{Tr}(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}}) = (q\bar{q})^{\frac{k^2}{8\pi g} - \frac{c}{24}} \sum_{N_1, N_2, \dots} q^{N_1 + 2N_2 + \dots} \sum_{\bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots} \bar{q}^{\bar{N}_1 + 2\bar{N}_2 + \dots} \\ &= (q\bar{q})^{\frac{k^2}{8\pi g} - \frac{c}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} \prod_{\bar{n}=1}^{\infty} (1 - \bar{q}^{\bar{n}})^{-1} \\ &= \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} (q\bar{q})^{\frac{k^2}{8\pi g}} = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \exp\left(-\frac{k^2}{2g} \text{Im } \tau\right) \end{aligned}$$

其中在第二行处，我们利用了几何级数 $(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 。而在第三行处，我们利用了 Dedekind eta 函数的定义 $\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ ，并且代入了这个理论的中心荷 $c = 1$ 。看到这个配分函数的形式就能得知： $|0; k\rangle$ 给出的 Fock 空间中确实只具有 $:e^{ik\phi}:$ 生成的 Verma 模。

而为了计算整个理论的环面配分函数，我们还需要对不同 k 的贡献求和。由于 k 是一个连续谱，于是我们应该将 \sum_k 替换为 $\int dk$ 。由于配分函数中的常数因子不重要，于是这个测度的归一化因子也不重要。从而整个理论的环面配分函数就是：

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left(-\frac{k^2}{2g} \text{Im } \tau\right) = \frac{\sqrt{4\pi g}}{\sqrt{\text{Im } \tau} |\eta(\tau)|^2}$$

容易通过 Dedekind η 函数的以下变换性质验证，这个环面配分函数确实在 $SL(2, \mathbb{Z})$ 变换下不变。

$$\eta(\tau + 1) = e^{i\pi/12} \eta(\tau), \quad \eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau)$$

讨论完了单个自由玻色子的情形，让我们再看看 d 个自由玻色子的情形，其 Lagrangian 为 $\mathcal{L} = \frac{g}{2} \partial_{\mu} \phi_i \partial^{\mu} \phi^i$ 。此时，理论的 Fock 空间仍然由真空 $|0; k\rangle$ 给出，只不过此时的 k 是一个 d 维矢量，其 α_0^i 本征值为 k^i 。通过类似的讨论也能得知，这个真空态对应的顶点算符是 $:e^{ik \cdot \phi} := :e^{ik_i \phi^i}:$ 。正如前面所说的，由于此时产生湮灭算符 α_{-n} 作用在真空上会产生新的基本场，于是 $|0; k\rangle$ 产生的 Fock 空间对配分函数的贡献就不应该具有 $(q\bar{q})^{k^2/8\pi g} / |\eta(\tau)|^2$ 的形式。为了看到这一点，我们可以用类似的方法计算出这个 Fock 空间上的配分函数：

$$\begin{aligned} Z_k(\tau, \bar{\tau}) &= \text{Tr}(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}}) = (q\bar{q})^{\frac{k^2}{8\pi g} - \frac{c}{24}} \sum_{N_1^i, N_2^i, \dots} q^{\sum_{i,n} n N_n^i} \sum_{\bar{N}_1^i, \bar{N}_2^i, \dots} \bar{q}^{\sum_{i,n} n \bar{N}_n^i} \\ &= \frac{1}{|\eta(\tau)|^{2d}} (q\bar{q})^{\frac{k^2}{8\pi g}} = \frac{1}{|\eta(\tau)|^{2d}} \exp\left(-\frac{k^2}{2g} \text{Im } \tau\right) \end{aligned}$$

³⁹在弦论中，如果我们用 OCQ 量子化玻色弦，那么这些额外的基本场就对应更高 level 上的物理态。

由于这不具有 $(q\bar{q})^{k^2/8\pi g}/|\eta(\tau)|^2$ 的形式, 这确实验证了这个 Fock 空间中还存在其他的基本场。此时, 整个理论的环面配分函数就是:

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \int d^d k Z_k(\tau, \bar{\tau}) = \left(\frac{\sqrt{4\pi g}}{\sqrt{\text{Im } \tau} |\eta(\tau)|^2} \right)^d$$

这个结果实际上非常自然: 由于我们的 d 个玻色子之间没有相互作用, 从而配分函数自然会是单一味道情形的 d 次方。

Example: Toroidal Partition Function of Compactified Boson

我们考虑的第二个例子是所谓的**紧化玻色子**: 考虑一个取值在 S^1 上的玻色场, 也就是具有周期性 $\phi \sim \phi + 2\pi R$ 的玻色场 ϕ 。在弦论中, 这对应将时空的一个维度紧致化为 S^1 之后的理论, 从而我们将这个理论称为“紧化玻色子”。在圆柱上, 这个周期性允许 $\phi(x + L)$ 不再等于 $\phi(x)$, 而可以是任何的 $\phi(x) + 2\pi mR$ 。从而其模式展开是:

$$\phi(z, \bar{z}) = \phi_0 - \frac{i}{4\pi g} (p_L \log z + p_R \log \bar{z}) + \frac{i}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (a_n z^{-n} + \bar{a}_n \bar{z}^{-n})$$

其中 p_L, p_R 不再是相等的, 而是满足关系 $p_L - p_R = 4\pi g m R$ 。另外, 变换 $\phi \rightarrow \phi + a$ 的生成元是 $(p_L + p_R)/2$, 为了保证平移 $2\pi R$ 后物理态不变, 于是总动量⁴⁰ $(p_L + p_R)/2$ 一定是 $1/R$ 的整数倍。从而, 理论中的所有真空态可以用两个数 $|n, m\rangle$ 标记, 其中 $n = Rk$ 是其总动量, 而 m 给出场在环绕 $z = 0$ 一圈后的变化行为, 称为**绕数**, 而绕数不为 0 的态被我们称为 **winding mode**, 在弦论中, 这就对应绕着卷曲的维度缠绕 m 圈的弦构型。这样一个态的 p_L, p_R 就是:

$$p_L = \frac{n}{R} + 2\pi g m R, \quad p_R = \frac{n}{R} - 2\pi g m R$$

计算这个理论的 Virasoro 生成元可知,

$$L_0 = \sum_{n>0} a_{-n} a_n + \frac{p_L^2}{8\pi g}, \quad \bar{L}_0 = \sum_{n>0} \bar{a}_{-n} \bar{a}_n + \frac{p_R^2}{8\pi g}$$

从而, 态 $|n, m\rangle$ 就具有共形权 $(p_L^2/8\pi g, p_R^2/8\pi g)$ 。从而它对应的顶点算符就应该是 $:e^{ip_L \phi_L + ip_R \phi_R}:$, 和上一节一样, ϕ_L, ϕ_R 分别就是场 ϕ 的全纯、反全纯部分。上面这些讨论就告诉我们: (p_L, p_R) 作为一个二维矢量一定处于 $(1/R, 1/R)$ 和 $(2\pi g R, -2\pi g R)$ 张成的格点上。在后面的讨论中会看到: 这实际上是 **Narain 格子**的一个例子。

接下来, 让我们看看这个紧化玻色子理论中的环面配分函数。由于理论的 Hilbert 空间中包含所有 $|n, m\rangle$ 生成的 Verma 模⁴¹, 于是:

$$\begin{aligned} Z(\tau, \bar{\tau}) &= \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} q^{p_L^2/8\pi g} \bar{q}^{p_R^2/8\pi g} \\ &= \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \exp \left[-\frac{1}{2g} \left(\frac{n^2}{R^2} + (2\pi g R)^2 m^2 \right) \text{Im } \tau + 2\pi i n m \text{Re } \tau \right] \end{aligned}$$

为了计算这个求和, 我们可以使用如下的 **Poisson 重求和公式**:

⁴⁰之所以称之为总动量, 是因为这在弦论中就是时空卷曲方向上的动量算符。

⁴¹在前面我们已经看到了: 在只有一个玻色子的情形, 一个真空生成的 Fock 空间中只包含一个 Verma 模。

Lemma 3 (Poisson Resummation Formula).

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(-\pi a m^2 + 2\pi i b m) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\pi}{a}(m-b)^2\right)$$

Proof. 为了证明这个公式, 我们可以使用 delta 函数的离散 Fourier 变换:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(m-n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(-2\pi i m n)$$

在左手边的求和中插入一个 $1 = \int dn \delta(m-n)$, 就有:

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(-\pi a m^2 + 2\pi i b m) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int dn \delta(m-n) \exp(-\pi a n^2 + 2\pi i b n) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int dn \exp(-\pi a n^2 + 2\pi i(b-m)n) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\pi}{a}(m-b)^2\right) \end{aligned}$$

其中在第二行的第二个等号处, 我们直接积出了这个对 n 的 Gaussian 积分。这就完成了 Poisson 重求和公式的证明。 \square

利用 Poisson 重求和公式, 我们可以将紧化玻色子的环面配分函数改写为:

$$\begin{aligned} Z(\tau, \bar{\tau}) &= \frac{\sqrt{2\pi g}R}{\sqrt{\text{Im } \tau} |\eta(\tau)|^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{2g\pi^2 R^2}{\text{Im } \tau} (n - m \text{Re } \tau)^2 - 2g\pi^2 R^2 \text{Im } \tau\right] \\ &= \frac{R}{\sqrt{2}} Z_{\text{bos}}(\tau, \bar{\tau}) \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \exp\left(\frac{2g\pi^2 R^2}{\text{Im } \tau} |n - m\tau|^2\right) \end{aligned}$$

经过简单的计算, 我们就能发现指数上的 $|n - m\tau|/\text{Im}(\tau)$ 在 $SL(2, \mathbb{Z})$ 变换下只会变为其他 n, m 对应的这一项, 从而整个求和是模不变的。又由于自由玻色子的配分函数 Z_{bos} 也是模不变的, 从而这个理论的环面配分函数也是模不变的。

关于这个配分函数, 还有一个有趣的事情: 如果我们将理论的紧化半径 R 变为 $R \rightarrow 1/(2\pi gR)$, 那么其效果就相当于将 n, m 互换。由于配分函数需要对所有 n, m 求和, 从而理论的配分函数应该是在这个变换下不变的。事实上, 这就是 **T-对偶**的一个例子: 半径为 R 的紧化玻色子理论和半径为 $1/(2\pi gR)$ 的紧化玻色子理论是对偶的。在弦论中, 由于 n 对应的是一个弦在卷曲方向的总动量, 而 m 是这个态的卷绕数, 从而在这个对偶下, 沿着卷曲方向平动的态会被对偶到 winding mode 上, 反之亦然。

D.4.3 CFT on Riemann Surfaces

明白了如何在环面上定义 CFT 之后, 我们可以讨论该怎么将一个 CFT 定义在任意的 Riemann 面上了⁴²。由于算符形式理论比较依赖于径向量子化, 例如在前面讨论环面上的算符形式理论时, 我们需要将其视为粘合两端的圆柱, 这样才能定义环面的 Virasoro 生成

⁴²这一节的讨论基本来自于 Polchinski I 的 Chapter 9 和 Ashoke Sen 的这篇文章 <https://www.ias.ac.in/public/Volumes/pram/035/03/0205-0286.pdf>。

元。而在一般的 Riemann 面上，我们没有办法找到类似的方式将其和圆柱联系起来，于是算符形式理论比较难以推广到在一般的 Riemann 面上。为了在一般 Riemann 面上定义理论，我们其实最好还是回到路径积分形式理论⁴³，通过定义其所有关联函数的方式定义理论。在路径积分理论中，一个任意 Riemann 面 Σ 上的 n 点关联函数可以被 naive 地定义为：

$$\langle \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \mathcal{O}_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle_{\Sigma} = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(- \int_{\Sigma} d^2 z \sqrt{g} \mathcal{L}(\phi, g) \right) \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \mathcal{O}_n(z_n, \bar{z}_n)$$

由于我们现在考虑的空间并不是 Euclidean 的，于是我们还需要将我们的理论和背景度规相耦合。不过这还不是讨论的全部！由于存在 Weyl 反常，这个关联函数实际上并不是良定义的。详细地讲，就是如果我们将背景度规做一个 Weyl 变换 $g_{ab} \rightarrow e^{2\Omega} g_{ab}$ ，变换后的关联函数会成为：

$$\langle \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \mathcal{O}_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle_{\Sigma, e^{2\Omega g}} = \exp \left(\frac{c}{24\pi} \int_{\Sigma} d^2 z (2\partial_z \Omega \partial_{\bar{z}} \Omega + R g_{z\bar{z}} \Omega) \right) \langle \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \mathcal{O}_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle_{\Sigma, g}$$

从 Riemann 面等价于模掉 Weyl 变换的二维 Riemann 流形的角度看，这就意味着同一个等价类中的不同 Riemann 流形会给出不同的关联函数。从复流形本身的角度上看，这就对应取不同的坐标卡会导致不同得到的关联函数不同。为了修好这个问题，我们需要注意：Weyl 变换带来的这个额外因子只依赖于时空背景 g 和 Weyl 变换 Ω ，和具体的理论无关。于是我们可以引入一个“参考”的自由玻色子理论，定义：

$$Z_B(g) = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^2 z \sqrt{g} g^{ab} \partial_a \varphi \partial_b \varphi \right)$$

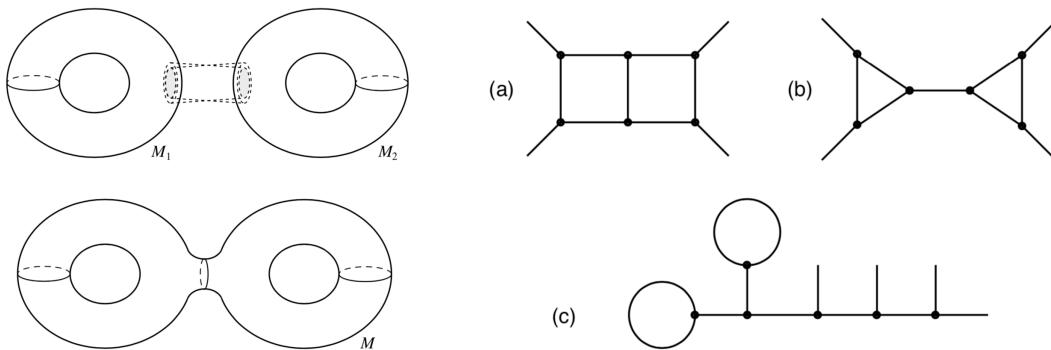
那么，如下定义的关联函数就是在 Weyl 变换下不变的：

$$\langle \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \mathcal{O}_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle_{\Sigma} := Z_B(g)^{-c} \int \mathcal{D}\phi \exp \left(- \int_{\Sigma} d^2 z \sqrt{g} \mathcal{L}(\phi, g) \right) \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \mathcal{O}_n(z_n, \bar{z}_n)$$

于是，我们就将这个式子作为 Riemann 面上关联函数的定义。由于前面的讨论只对复平面上的 CFT 成立，于是就算有了这个定义，我们还是不会计算这个关联函数。事实上，我们马上会说明：任何一个 Riemann 面上的关联函数可以化为球面上的三点关联函数，而由于球面可以通过一个共形变换变化为复平面，于是我们就能将计算 Riemann 面上关联函数的问题转化为我们熟悉的计算复平面上关联函数的问题。

为了做到这一点，我们的思路是将球面互相粘接在一起。让我们详细地看一看这个粘接过程：首先，让我们将需要粘接的两个孔的中心分别取为坐标 z_1, z_2 的原点，然后分别在 $|z_1| = 1, |z_2| = |q|$ 的两个环上将满足 $z_1 z_2 = q$ 的点认同起来。这个过程可以用图表现如下：

⁴³对于没有 Lagrangian 的 CFT 而言，我们的策略是：假设它存在路径积分，然后将一般 Riemann 上路径积分的结果翻译到算符形式理论中，并以此作为一般 Riemann 面上 CFT 定义的一部分。



复几何的结论告诉我们：无边界、可定向的 Riemann 面可以用亏格 g 来完全分类。并且可以证明，任何一个亏格 $g > 1$ 的 Riemann 面都可以通过将若干开了三个孔的球面的孔互相粘接组成，这个粘接过程可以用类似 Feynman 图的形式表达出来——每一个顶点连接三条线，代表一个开了三个孔的球面，而每一条线对应一个如上的粘接过程。当我们计算一个 Riemann 面上的关联函数时，需要在 Riemann 面的响应地方插入一个算符。这些插入的算符也可以被描写为图上的外线。对于一个给定的、插入了任意数量算符的 Riemann 面而言，通过粘接得到它的方式并不唯一。例如右上图就给出了三种通过粘接来构造亏格 2、插入了 4 个外算符的 Riemann 面的方法。

让我们看看构造出一个 $g > 1$ 的、插入 E 个算符的 Riemann 面需要粘接多少三孔球面。让我们将图中的顶点数记为 V ，连线数记为 I 。那么由于“顶点守恒”，于是 $2I - 3V + E = 0$ 。并且由于这个图的 Euler 示性数应该是 $V - I + (g + 1) = 2^{44}$ ，从而就可以得到 $V = 2g - 2 + E, I = 3g - 3$ 。也就是说，我们此时需要 $3g - 3$ 次粘接操作来将 $2g - 2 + E$ 个三孔球面粘合为需要的 Riemann 面。

知道了如何通过三孔球面的粘接构造任意 Riemann 面之后，我们就可以试图将 Riemann 面上的关联函数化为球面上的关联函数了。为此，让我们考虑一个最简单的情形：Riemann 面 M_1, M_2 上分别插入了一些算符 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ ，并且它们通过前面给出的粘接操作粘接为了 Riemann 面 M 。为了讨论简便，我们还额外取 $q = 1$ 。为了计算 M 上的关联函数 $\langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \rangle_M$ ，我们就应该计算整个 M 上的路径积分。根据我们前面的构造，这个路径积分可以分三部分进行：第一部分对应 M_1 中 $|z_1| > 1$ 部分的路径积分，第二部分对应 M_2 中 $|z_2| > 1$ 部分的路径积分，而最后一部分是被认同的环 σ 上的路径积分⁴⁵：

$$\int (\mathcal{D}\phi)_M e^{-S} \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 = \int (\mathcal{D}\phi)_\sigma \int_{\phi(|z_1|=1, \theta_1)=\phi_0(\theta_1)} (\mathcal{D}\phi)_{M_1} e^{-S_1} \mathcal{O}_1 \int_{\phi(|z_2|=1, \theta_2)=\phi_0(-\theta_2)} (\mathcal{D}\phi)_{M_2} e^{-S_2} \mathcal{O}_2$$

其中 $\phi_0(\theta)$ 对应 $|z_1| = 1$ 上的场构型。由于映射 $z_2 = 1/z_1$ 会将 z_1 中角度 θ 的点反射到 z_2 中角度为 $-\theta$ 的点，我们在 $|z_2| = 1$ 上考虑的边界条件也应该是转动并反射后的边界条件。

这个操作实际上相当于在 σ 这个空间切片上插入了一组完备的量子态。为了看到这一点，我们可以如下定义量子态 $|M_1\rangle, |M_2\rangle$ ：

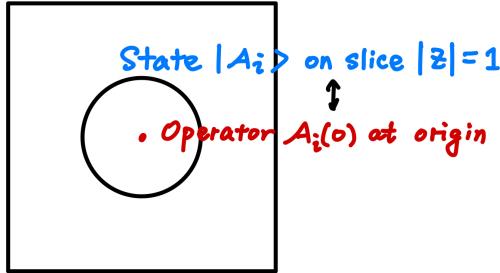
$$\langle \phi_0, \sigma | M_1 \rangle := \int_{\phi(|z_1|=1, \theta_1)=\phi_0(\theta_1)} (\mathcal{D}\phi)_{M_1} e^{-S_1} \mathcal{O}_1$$

⁴⁴对于一个亏格 g 的 Riemann 面而言，其对应的图的面数应该为 g 个内面加上一个外面。由于我们的图可以画为平面图，于是图本身的亏格是 0。

⁴⁵这里没有考虑我们之前引入的 $Z_B(g)$ 因子。事实上，由于这些因子仅仅是常数，所以我们通常不会太在意它们。

$$\langle M_2 | \phi_0, \sigma \rangle := \int_{\phi(|z_2|=1, \theta_2)=\phi_0(-\theta_2)} (\mathcal{D}\phi)_{M_2} e^{-S_2} \mathcal{O}_2$$

有了这个定义后，路径积分就能被写为 $\langle M_2 | M_1 \rangle$ ，而上面这个操作就是插入了一个单位算符 $\int (\mathcal{D}\phi)_\sigma | \phi_0, \sigma \rangle \langle \phi_0, \sigma |$ 。由于我们考虑的理论是一个 2D CFT，于是一个方便的选择是将插入的这组量子态切换到基本场及其导出场对应的态 $\{ | \mathcal{A}_i \rangle \}$ 。具体而言，我们插入的态满足下图的关系：



也就是说：对于用路径积分 $\langle \phi_0, \sigma | \Phi \rangle = \int_{\phi(\sigma)=\phi_0} (\mathcal{D}\phi)_{|z|>1} (\dots)$ 定义的态 $|\Phi\rangle$ 而言，有 $\langle \mathcal{A}_i | \Phi \rangle = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{A}_i(0) (\dots)$ ⁴⁶。值得注意的是，由于我们考虑的并不是 $|z| = 0$ 上的态，而是 $|z| = 1$ 上的态，于是这样引入的态 $|\mathcal{A}_i\rangle$ 并不是算符 \mathcal{A}_i 在通常的算符-态对应中的态，而是经过径向“演化”后的这一态。通过插入一个单位算符 $\sum_{ij} |\mathcal{A}_i\rangle G^{ij} \langle \mathcal{A}_j|$ (其中 $G^{ij} = \langle \mathcal{A}_i | \mathcal{A}_j \rangle$)，这个路径积分就能化为：

$$\int (\mathcal{D}\phi)_M (\dots) = \sum_{i,j} G^{ji} \langle M_2 | \mathcal{A}_j \rangle \langle \mathcal{A}_i | M_1 \rangle$$

按照路径积分的语言，接下来，我们要做的就是将这些 $\langle \mathcal{A}_i | M_1 \rangle$ 写成顶点算符的形式。对于 M_1 这部分，这实际上已经完成了——由于 \mathcal{A}_i 的定义， M_1 上的这个边界条件就等价于路径积分中加入一个算符 $\mathcal{A}_i(z_1 = 0)$ ，并考虑在整个的、未开孔的 M_1 上的路径积分：

$$\langle \mathcal{A}_i | M_1 \rangle = \int (\mathcal{D}\phi)_{M_1} e^{-S_1} \mathcal{O}_1 \mathcal{A}_i(0) = \langle \mathcal{A}_i(0) \mathcal{O}_1 \rangle_{M_1}$$

对于 M_2 部分而言，由于边界条件被扭曲的原因，这比起 M_1 部分稍微有些复杂。为了计算这部分，我们插入一组 $|z_2| = 1$ 上的场本征态，得到：

$$\langle M_2 | \mathcal{A}_j \rangle = \int (\mathcal{D}\phi_0)_{|z_2|=1} \langle M_2 | \phi_0, \sigma \rangle \langle \phi_0, \sigma | \mathcal{A}_j \rangle$$

其中， $\langle M_2 | \phi_0, \sigma \rangle$ 根据定义就能计算，但是对于后一项 $\langle \phi_0, \sigma | \mathcal{A}_j \rangle$ 而言，我们需要以下的结论来计算它：

Proposition 9. 对于空间切片 $\sigma : |z| = 1$ ，如果其上一个 L_0, \bar{L}_0 本征态的波泛函是 $\langle \phi_0, \sigma | \Phi \rangle = F_\Phi[\phi_0(\theta)]$ ，那么有 $\langle \Phi | \phi_0, \sigma \rangle = F_\Phi[\phi_0(\pi - \theta)]$ 。

⁴⁶ 如果你不熟悉这一套语言，可以看看我 CFT notes 中关于算符-态对应的讨论。

Proof. 根据算符-态对应, 我们总能将 $|\Phi\rangle$ 写为 $\Phi(0)|\Omega\rangle$ 。让我们考虑两点函数 $\langle\Phi(z_0, \bar{z}_0)\Phi(0)\rangle$, 其中 $z_0, \bar{z}_0 \rightarrow \infty$ 。经过合适的归一化, 共形对称性总使得它满足 $\langle\Phi(z_0, \bar{z}_0)\Phi(0)\rangle = (z_0)^{-2h}(\bar{z}_0)^{-2\bar{h}}$ 。而我们也可以通过路径积分计算这个两点函数, 并且它可以分成 $|z| < 1, |z| = 1$ 和 $|z| > 1$ 区域的积分分别计算。也就是:

$$\begin{aligned} & \langle\Phi(z_0, \bar{z}_0)\Phi(0)\rangle \\ &= \int (\mathcal{D}\phi_0)_{|z|=1} \int_{\phi(|z_1|=1, \theta)=\phi_0(\theta)} (\mathcal{D}\phi)_{|z|<1} e^{-S} \Phi(0) \int_{\phi(|z_1|=1, \theta)=\phi_0(\theta)} (\mathcal{D}\phi)_{|z|>1} e^{-S} \Phi(z_0, \bar{z}_0) \end{aligned}$$

其中, 第二部分的积分就给出 $\langle\phi_0, \sigma|\Phi\rangle = F_\Phi[\phi_0(\theta)]$ 。对于第三项而言, 我们可以对它做一个共形变换 $z \rightarrow 1/z, \bar{z} \rightarrow 1/\bar{z}$ 。这样一来, 就有:

$$\begin{aligned} \int_{\phi(|z_1|=1, \theta)=\phi_0(\theta)} (\mathcal{D}\phi)_{|z|>1} e^{-S} \Phi(z_0, \bar{z}_0) &= (z_0)^{-2h}(\bar{z}_0)^{-2\bar{h}} \int_{\phi(|z_1|=1, \theta)=\phi_0(-\theta)} (\mathcal{D}\phi)_{|z|<1} e^{-S} \Phi(0) \\ &= (z_0)^{-2h}(\bar{z}_0)^{-2\bar{h}} F_\Phi[\phi_0(-\theta)] \end{aligned}$$

将这个关系带入上面的两点函数, 消去等式两边的 $(z_0)^{-2h}(\bar{z}_0)^{-2\bar{h}}$, 就有:

$$\int (\mathcal{D}\phi_0)_{|z|=1} F_\Phi[\phi_0(\theta)] F_\Phi[\phi_0(-\theta)] = 1$$

由于积分中第一项就是 $\langle\phi_0, \sigma|\Phi\rangle$, 从而第二项自然就是 $\langle\Phi|\phi_0, \sigma\rangle$ 。于是我们就有 $\langle\Phi|\phi_0, \sigma\rangle = F_\Phi[\phi_0(-\theta)]$ 。 \square

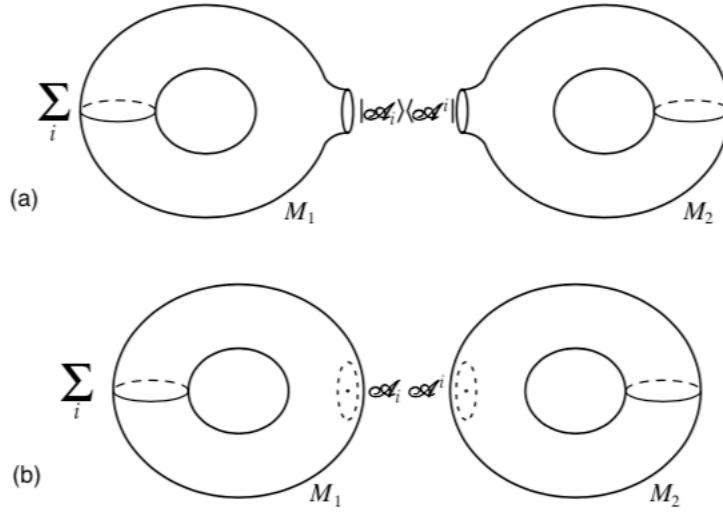
有了这个结论之后, 我们就能计算出 $\langle\phi_0, \sigma|\mathcal{A}_j\rangle$, 进而得到整个 $\langle M_2|\mathcal{A}_j\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle M_2|\mathcal{A}_j\rangle &= \int (\mathcal{D}\phi_0)_{|z_2|=1} \langle M_2|\phi_0, \sigma\rangle \langle\phi_0, \sigma|\mathcal{A}_j\rangle \\ &= \int (\mathcal{D}\phi_0)_{|z_2|=1} \int_{\phi(|z_2|=1, \theta_2)=\phi_0(-\theta_2)} (\mathcal{D}\phi)_{|z_2|>1} e^{-S_2} \mathcal{O}_2 \int_{\phi(|z_2|=1, \theta_2)=\phi_0(-\theta_2)} (\mathcal{D}\phi)_{|z_2|<1} \mathcal{A}_j(0) \\ &= \langle\mathcal{A}_j(0)\mathcal{O}_2\rangle_{M_2} \end{aligned}$$

将所有这些东西代入最初的、 M 上的路径积分, 我们就最终将 M 上的关联函数化为了 M_1, M_2 上的关联函数:

$$\langle\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\rangle_M = \sum_{ij} G^{ji} \langle\mathcal{A}_i(0)\mathcal{O}_1\rangle_{M_1} \langle\mathcal{A}_j(0)\mathcal{O}_2\rangle_{M_2}$$

也就是说, 我们可以在被粘接的两个环上插入一组完备的量子态, 并将其转化为对应的顶点算符。这样一来, M_1, M_2 的连接就会“断开”, 整个 M 上的关联函数就可以写为 M_1, M_2 上各自的、插入顶点算符的关联函数。这整个过程可以用图表示为:



对于 $q \neq 1$ 的情形而言，我们只需要在 M_2 上做个坐标变换，定义 $z'_2 = z_2/q$ 。这样一来， z_1, z'_2 之间的关系就满足 $z_1 z'_2 = 1$ ，从而上面的一切讨论就都适用。 M 上的关联函数就可以表示为：

$$\langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \rangle_M = \sum_{ij} G^{ji} \langle \mathcal{A}_i(0) \mathcal{O}_1 \rangle_{M_1} \langle \mathcal{A}'_j(0) \mathcal{O}_2 \rangle_{M_2}$$

不过注意，在坐标变换下，算符 \mathcal{A}_j 也会发生变化，于是上式中在 M_2 上插入的是在 z'_2 坐标上定义的 \mathcal{A}'_j 。由于它是准基本场，从而有：

$$\mathcal{A}'_j = q^{h_j} \bar{q}^{\bar{h}_j} \mathcal{A}_j$$

也就是说，对于用 q 粘连的两个 Riemann 面而言，其上的关联函数可以被分解为：

$$\langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \rangle_M = \sum_{ij} q^{h_j} \bar{q}^{\bar{h}_j} G^{ji} \langle \mathcal{A}_i(0) \mathcal{O}_1 \rangle_{M_1} \langle \mathcal{A}_j(0) \mathcal{O}_2 \rangle_{M_2}$$

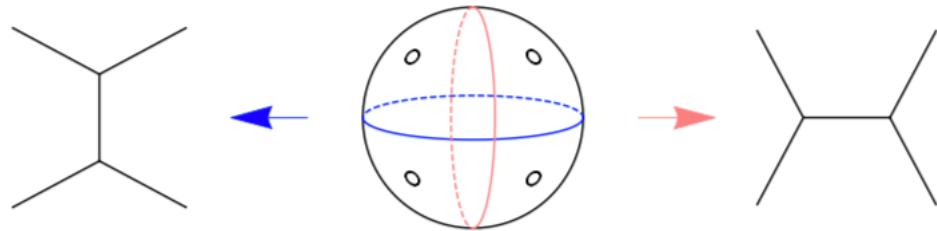
根据前面的讨论，既然所有 Riemann 面都能用三孔球面粘连而成，于是如果我们持续应用这个关系，就能最终将任意 Riemann 面上的关联函数转换为球面上的三点关联函数。而由于球面可以经过共形变换变为复平面，于是这个问题就可以直接用复平面上的 CFT 计算。于是到此为止，我们就明白了如何计算出任意亏格 $g > 1$ 的 Riemann 面上 CFT 中的关联函数。这个构造任意 Riemann 面上关联函数的方式就被称为 **Plumbing construction**。当然，这个结果是用路径积分形式理论推导出来的。如果我们希望用算符形式理论来构建任意 Riemann 面上的 CFT，那么这个关系就是此时 Riemann 面上关联函数的定义。

你可能会疑问：为什么我们如此定义出的 Riemann 面上的关联函数 $\langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \rangle_M$ 是依赖于每个粘贴映射对应的 q, \bar{q} 的呢？这是由于：不同的粘贴映射给出的 Riemann 面是无法通过微分同胚和 Weyl 变换互相联系起来的，从而它们对应模空间上的不同点，是不等价的 Riemann 面。既然不同的 q 对应不同的 Riemann 面，关联函数自然可以不同。进一步地，在我们的 plumbing construction 中，由于我们需要粘贴 $3g - 3$ 次得到亏格 g 的 Riemann 面，于是这个操作刚好有 $6g - 6$ 个参数 q, \bar{q} 。并且可以证明：如果不考虑插入的额外算符，

那么对于亏格 $g > 1$ 的 Riemann 面而言，其模空间应该具有实维数 $6g - 6$ ⁴⁷，刚好对应粘接带来的 $6g - 6$ 个参数。

但是我们的讨论并没有就此结束。前面也看到，对于同一个 Riemann 面而言，我们有许多不同的方式能够将其粘贴起来。那么一个自然的自洽性条件就是：如果最终得到的 Riemann 面对应模空间上的同一点，那么这些不同的粘贴方式应该可以给出相同的关联函数。可以证明：所有不同的粘接方式都可以通过以下两种的操作互相变换：

- **交叉对称性**：如下图，这对应将一个四孔球面分割为两个三孔球面的不同方法。在上面给出的三种 $g = 2, E = 4$ 的 Riemann 面的粘贴方式中，这个操作就对应将 (a) 变为 (b) 的一步，它不应该改变 Riemann 面上的关联函数。在 CFT 的视角看来，这个自洽性条件就对应着 OPE 的结合性。



为了看到这一点，假设这四个点分别处于 $z_1 = 0, z_2, z_3, z_4$ ，并且假设 $|z_2| < |z_3| < |z_4|$ 。那么四点函数 $\langle \phi_1(z_1) \dots \phi_4(z_4) \rangle$ 就可以被写为 $\langle \Omega | \phi_4(z_4) \phi_3(z_3) \phi_2(z_2) | \phi_1 \rangle$ 。为了计算这个四点函数，我们有两种方案：先对 $\phi_3 \phi_2$ 做 OPE，然后剩下的部分对应一个三点函数，这在 plumbing construction 中就对应将 z_2, z_3 所在的半球面分离开来；另一种方式就是先对 $\phi_4 \phi_3$ 做 OPE，对应将 z_3, z_4 所在的半球面分离开来。如果这两种分割方式给出同样的关联函数，那么就应该有 $(\phi_4 \phi_3) \phi_2 = \phi_4 (\phi_3 \phi_2)$ ，也就是 OPE 的结合性。

- **模不变性**：在上面对 $g = 2, E = 4$ 的 Riemann 面的构造 (c) 中，存在着“蝌蚪图”。这些蝌蚪图对应环面 T^2 上的单点关联函数 $\langle \mathcal{A}_i(z, \bar{z}) \rangle_{T^2}$ 。而这个环面本身是将一个三孔球面中的两个孔互相粘合而成的。和上面的讨论类似地，变换 q ，这个粘贴过程也会得到不同的环面。根据上一节的讨论，这些不同的环面可以用模量 τ 来刻画。但我们又知道， τ 在模群 $SL(2, \mathbb{Z})$ 作用下会给出等价的环面，于是也存在一些不同的粘贴 q ，它们给出的环面是等价的。前文所说的第二种操作就对应这些 $SL(2, \mathbb{Z})$ 作用，反映在 plumbing construction 中就是在等价的 q 之间相互变换。接下来，我们就试图得到这部分不变性对应的自洽性条件。

前面的讨论已经说过，要使得环面上的 CFT 良定义，其上的 0 点函数——也就是环面配分函数 $Z(\tau, \bar{\tau}) = \langle 1 \rangle_{T^2(\tau, \bar{\tau})}$ 应该对等价的 $\tau, \bar{\tau}$ 给出相同的结果，也就是⁴⁸：

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = Z(\tau + 1, \bar{\tau} + 1), \quad Z(\tau, \bar{\tau}) = Z(-1/\tau, -1/\bar{\tau})$$

为了保证 Riemann 面上的关联函数良定义，除了 0 点函数需要具有模不变性之外，单点函数 $f_i(\tau, \bar{\tau}) = \langle \mathcal{A}_i(z, \bar{z}) \rangle_{T^2(\tau, \bar{\tau})}$ 还需要满足以下的关系：

$$f_i(\tau + 1, \bar{\tau} + 1) = f_k(\tau, \bar{\tau}), \quad f_i(-1/\tau, -1/\bar{\tau}) = (-i\tau)^{h_k} (i\bar{\tau})^{h_i} f_i(\tau, \bar{\tau})$$

⁴⁷具体的证明过程可以参见我的弦论 notes，或者 Polchinski I 的 Chap.5。

⁴⁸由于我们只关心物理的配分函数如何变化，于是这个关系只需要在“物理超曲面” $\bar{\tau} = \tau$ 上成立。这也就是说，我们只需要求配分函数在 $\tau, \bar{\tau}$ 的同步变换下不变

这些自洽条件就被称为 CFT 的 **模不变性**。在数学上，这意味着这个单点函数是具有权 (h_i, \bar{h}_i) 的 **模形式**。对于导出场而言，它们的单点函数可以被直接化为基本场的单点函数。利用这个事实就可以证明：我们只需要让所有基本场的单点函数满足这个关系，这就自动对所有场都成立。

你可能会想：这是否保证了环面上更高点的关联函数具有模不变性？答案是肯定的：这些高点关联函数都可以用 plumbing construction 化为单点关联函数，于是我们只需要明确 0 点和 1 点关联函数的模不变性。有了这些模不变性之后，plumbing 过程中给出的等价“蝌蚪”就会对关联函数贡献相同的结果，这就保证了高亏格 Riemann 面上关联函数的良定义性。

这就完成了我们对 CFT 需要满足的自洽性条件的讨论。总结一下，就是一个 CFT 需要满足 OPE 的结合性、环面上配分函数和基本场单点函数的模不变性。有了这些条件之后，我们就能将 CFT 定义在任意的 Riemann 面上。在后面的讨论中，我们将会看到：这些自洽性条件会给 CFT data 一些很强的限制，而 **Bootstrap** 方法的基本思路就是从这些自洽性条件出发，试图给出对 CFT data 的限制。

D.5 Conformal Bootstrap

D.5.1 Virasoro Conformal Blocks and Crossing Equation

在这一节中，我们首先讨论 OPE 的结合性这一自洽性条件会给 CFT 什么样的限制。根据前面的讨论，我们发现 OPE 的结合性对应四点函数的两种不同计算方式。于是为了讨论这一限制，我们可以先对 2D CFT 中的四点函数的结构有一个一般的了解。通过共形变换，可以将任意四点函数 $\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle$ 的四个算符分别放在 $z_1 = 0, z_2 = z, z_3 = 1, z_4 = \infty$ 的位置，并且假设 $|z_2| < 1$ 。并且为了使得四点函数有限，我们对 ϕ_4 做一个重定义，使得：

$$\phi'_4(\infty) = \lim_{z_4, \bar{z}_4 \rightarrow \infty} z_4^{2h_4} \bar{z}_4^{2\bar{h}_4} \phi_4(z_4, \bar{z}_4)$$

这也就相当于用 $\phi'_4(\infty) = \phi_4(w=0)$ 重新定义了 ϕ_4 ，其中 $w = 1/z$ 是无穷远处的坐标卡。这个重定义使得 $\langle \Omega | \phi'_4(\infty) \rangle = \langle \phi_4 \rangle$ ，其中 $|\phi_4\rangle$ 是局域算符 $\phi_4(0)$ 在算符-态对应中对应的态。我们想要计算的就是以下的关联函数：

$$\langle \phi_1(0) \phi_2(z, \bar{z}) \phi_3(1) \phi'_4(\infty) \rangle = \langle \phi_4 | \phi_3(1) \phi_2(z, \bar{z}) | \phi_1 \rangle$$

为了计算这个关联函数，我们可以先取其中一种策略——先对 $\phi_3 \phi_4$ 做 OPE。这等价于在 ϕ_2 和 ϕ_3 之间插入以下的一组完备基：

$$1 = \sum_k \sum_{|M|=|N|, |\bar{M}|=|\bar{N}|} L_{-N} \bar{L}_{-\bar{N}} |\phi_k\rangle G^{NM}(c, h_k) G^{\bar{N}\bar{M}}(c, \bar{h}_k) \langle \phi_k | L_{-M}^\dagger \bar{L}_{-\bar{M}}^\dagger$$

其中， M, N 代表着一个整数序列 $\{n_1, \dots, n_k\}$ ，我们要求它满足 $n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1$ ，并且记 $|N| = \sum_i n_i$ 。 L_{-N} 就被定义为 $L_{-n_1} \dots L_{-n_k}$ 。 G^{MN} 是如下的 Gram 矩阵 G_{MN} 的逆，而 G_{MN} 的行列式就是 Kac 行列式：

$$G_{MN}(c, h_k) = \langle \phi_k | L_{-M}^\dagger L_{-N} | \phi_k \rangle$$

在插入这一组完备基之后，就能将四点函数改写为：

$$\begin{aligned} & \langle \phi_4 | \phi_3(1) \phi_2(z, \bar{z}) | \phi_1 \rangle \\ &= \sum_k \sum_{|N|=|M|, |\bar{N}|=|\bar{M}|} \langle \phi_4 | \phi_3(1) L_{-N} \bar{L}_{-N} | \phi_k \rangle G^{NM}(c, h_k) G^{\bar{N}\bar{M}}(c, \bar{h}_k) \langle \phi_k | L_{-M}^\dagger \bar{L}_{-\bar{M}}^\dagger \phi_2(z, \bar{z}) | \phi_1 \rangle \end{aligned}$$

对于后面一部分 $\langle \phi_k | L_{-M}^\dagger \bar{L}_{-\bar{M}}^\dagger \phi_2(z, \bar{z}) | \phi_1 \rangle$ 而言，我们可以对这个关联函数中的所有场做一个伸缩变换，使得 z, \bar{z} 被伸缩到 1：

$$\langle \phi_k | L_{-M}^\dagger \bar{L}_{-\bar{M}}^\dagger \phi_2(z, \bar{z}) | \phi_1 \rangle = z^{-h_1-h_2+h_k+|M|} \bar{z}^{-\bar{h}_1-\bar{h}_2+\bar{h}_k+|\bar{M}|} \langle \phi_k | L_{-M}^\dagger \bar{L}_{-\bar{M}}^\dagger \phi_2(1) | \phi_1 \rangle$$

如果我们假设这个关联函数中的全纯和反全纯部分可以被因子化，那么这个三点函数就可以被分解为如下的形式：

$$\langle \phi_4 | \phi_3(1) L_{-N} \bar{L}_{-N} | \phi_k \rangle = C_{43k} \rho(\nu_4, \nu_3, L_{-N} \nu_k) \rho(\bar{\nu}_4, \bar{\nu}_3, \bar{L}_{-\bar{N}} \bar{\nu}_k)$$

$$\langle \phi_k | L_{-M}^\dagger \bar{L}_{-\bar{M}}^\dagger \phi_2(1) | \phi_1 \rangle = C_{k21} \rho(L_{-M} \nu_k, \nu_2, \nu_1) \rho(\bar{L}_{-\bar{M}} \bar{\nu}_k, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_1)$$

其中 ν_i 代表具有共形权 h_k 的基本场。对于任意的基本场或导出场而言，函数 $\rho(\xi_3, \xi_2, \xi_1)$ 的定义就是除去结构常数 C_{321} 后的 $\langle \xi'_3(\infty) \xi_2(1) \xi_1(0) \rangle$ 。由于基本场的三点函数就是 C_{321} ，于是对于基本场而言， $\rho(\nu_3, \nu_2, \nu_1)$ 就是 1。有了这些讨论之后，我们就能最终将四点函数写为：

$$\langle \phi_4 | \phi_3(1) \phi_2(z, \bar{z}) | \phi_1 \rangle = \sum C_{43k} C_{k21} \mathcal{F}_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h_k; z) \bar{\mathcal{F}}_c(\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4, \bar{h}_k; \bar{z})$$

其中 $\mathcal{F}_c(h_1, \dots, h_k; z)$ 就被称为 **Virasoro conformal block**，其定义就是：

$$\mathcal{F}_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h_k; z) := \sum_{|N|=|M|} z^{-h_1-h_2+h_k+|N|} \rho(\nu_4, \nu_3, L_{-N} \nu_k) G^{MN}(c, h_k) \rho(L_{-M} \nu_k, \nu_2, \nu_1)$$

这些 conformal block 就可以被认为除去所有结构常数 C_{ijk} 之后中间态 ϕ_k 对四点函数的贡献。如果我们将 conformal block 看成 z 的函数，那么这就相当于用 Laurent 展开的展开系数定义了这个函数。不过注意，直到此处的这些定义只在 $|z| < 1$ 的区域中适用：由于 $z = 1$ 处算符 ϕ_2, ϕ_3 会交汇到一点，这会给 conformal block 带来奇点，从而这个 Laurent 展开的收敛半径就是 $|z| = 1$ 。如果我们需要 $|z| > 1$ 时 conformal block 的性质，就需要将其解析延拓到整个复平面上。我们在后面会就此详细讨论。

利用这些 conformal block，我们可以给出 OPE 的结合性给 CFT data 的限制。对于四点函数而言，前面给出的 conformal block 相当于先将 $\phi_1 \phi_2$ 做了 OPE；我们也可以换一种方式，先做 $\phi_2 \phi_3$ 的 OPE。这可以通过作用一个共形变换，使得四个点处的径向排列顺序从 1234 变为 3214 来实现。为此，让我们考虑变换 $z' = 1 - z$ ，此时关联函数 $\langle \phi_1(0) \phi_2(z) \phi_3(1) \phi'_4(\infty) \rangle$ 就会变为：

$$\langle \phi_1(0) \phi_2(z) \phi_3(1) \phi'_4(\infty) \rangle = \langle \phi_3(0) \phi_2(1-z) \phi_1(1) \phi'_4(\infty) \rangle$$

将等式两边用 conformal block 展开，就可以得到如下的 **Crossing equation**：

$$\begin{aligned}
& \sum_k C_{12k} C_{34k} \mathcal{F}_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h_k; z) \bar{\mathcal{F}}_c(\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4, \bar{h}_k; \bar{z}) \\
&= \sum_k C_{23k} C_{14k} \mathcal{F}_c(h_3, h_2, h_1, h_4, h_k; 1-z) \bar{\mathcal{F}}_c(\bar{h}_3, \bar{h}_2, \bar{h}_1, \bar{h}_4, \bar{h}_k; 1-\bar{z})
\end{aligned}$$

这很类似 Feynman 图中 s, t 两道之间的交叉对称性。当然，我们还可以通过映射 $z' = 1/z$ 将 1, 4 互换，得到 s, u 道之间的 crossing equation。不过事实上这些 crossing equation 和将外场取做 1324 所得的 s, t 道 crossing equation 是等价的，从而我们只需要考虑上面这些 s, t 道 crossing equation 即可。虽然还没有完整证明，但是如果我们将计算出了这个理论中所有的 conformal block，那么通过这些 crossing equation，就可以在已知中心荷和所有共形权的情况下求解出理论中所有的结构常数 C_{ijk} ，从而求解出整个 CFT。这个从中心荷、共形权出发求解 C_{ijk} 的 approach 就被称为 **conformal bootstrap**。

D.5.2 Recursive Representation of the Conformal Block

为了求解这些 crossing equation，我们首先需要做的就是试图计算出 conformal block。事实上，上面定义的这些 conformal block 可以用递推关系计算出来。利用下面的这些关系，我们可以将 $\rho(\xi_3, \xi_2, \xi_1)$ 中的每个 L_{-n} 换成 L_n 。于是连续作用这些关系，我们终究能够将这些导出场 ξ_i 化为基本场 ν_i ，再利用边界条件 $\rho(\nu_3, \nu_2, \nu_1) = 1$ 确定整个 $\rho(\xi_3, \xi_2, \xi_1)$ 。

Proposition 10. 对于任意整数 n ，有：

$$\rho(L_{-n}\xi_3, \xi_2, \xi_1) = \rho(\xi_3, \xi_2, L_n\xi_1) + \sum_{m=-1}^{l(n)} \binom{n+1}{m+1} \rho(\xi_3, L_m\xi_2, \xi_1)$$

其中对于 $n \geq -1$ 而言， $l(n) = n$ ，而对于其他的 n 而言 $l(n) = \infty$ 。

Proof. 对于左手边这个三点函数而言，我们可以先用围道积分写出这个 Virasoro 生成元（为了得到这个式子，可以先做一个共形变换 $w = 1/z$ ，写出 $w = 0$ 附近的 Virasoro 生成元后再变回来）：

$$\rho(L_{-n}\xi_3, \xi_2, \xi_1) = - \oint_{C_\infty} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \langle \nu'_k(\infty) T(z) \nu_2(1) \nu_1(0) \rangle$$

其中 C_∞ 是沿着无穷大圆的顺时针围道。由于被积函数只在 $z = 1, z = 0, z = \infty$ 三个地方存在奇点，于是我们可以将这个大围道 C_∞ 变形为绕着 0,1 的无穷小逆时针围道 C_0, C_1 ：

$$\rho(L_{-n}\xi_3, \xi_2, \xi_1) = \left(\oint_{C_0} + \oint_{C_1} \right) \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \langle \nu'_k(\infty) T(z) \nu_2(1) \nu_1(0) \rangle$$

其中，由于我们有关系：

$$(L_n \mathcal{O})(w) = \oint_{C_w} \frac{dz}{2\pi i} (z-w)^{n+1} \text{R}\{T(z) \mathcal{O}(w)\}$$

从而沿着 C_0 的围道的这一项就直接给出 $\rho(\xi_3, \xi_2, L_n \xi_1)$ ；而对于第二项而言，它可以写为：

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \langle \nu'_k(\infty) T(z) \nu_2(1) \nu_1(0) \rangle &= \sum_m \binom{n+1}{m+1} \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} (z-1)^{m+1} \langle \nu'_k(\infty) T(z) \nu_2(1) \nu_1(0) \rangle \\ &= \sum_m \binom{n+1}{m+1} \langle \nu'_k(\infty) (L_m \nu_2)(1) \nu_1(0) \rangle = \sum_m \binom{n+1}{m+1} \rho(\xi_3, L_m \xi_2, \xi_1) \end{aligned}$$

其中，如果 $n \geq -1$ ，那么这个是 $(1+x)^{n+1}$ 的二项式展开，项数有限，求和上限就是 $l(n) = n$ ；否则会给出 $(1+x)^{n+1}$ 的 Taylor 级数，项数无限，求和上限为 $l(n) = \infty$ 。将这两项拼在一起，就完成了证明。 \square

上面这个递推关系允许我们将 ξ_1, ξ_3 上的 L_{-n} 转换为其余两个算符上的 L_m ，而接下来一个递推关系允许我们处理 ξ_2 上的 L_{-n} ：

Proposition 11.

$$\begin{aligned} \rho(\xi_3, L_{-1} \xi_2, \xi_1) &= (h_3 - h_2 - h_1) \rho(\xi_3, \xi_2, \xi_1), \\ \rho(\xi_3, L_{-n} \xi_2, \xi_1) &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n-2+m}{m} [\rho(L_{n+m} \xi_3, \xi_2, \xi_1) + (-)^n \rho(\xi_3, \xi_2, L_{m-1} \xi_1)], \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Proof. 对于第二个关系，其推导方式和上面完全类似——将 Virasoro 生成元写为围道积分，再将围道变形，这里就不再推导了。对于第一个关系而言，其推导也十分简单：

$$\begin{aligned} \rho(\xi_3, L_{-1} \xi_2, \xi_1) &= \langle \xi'_3(\infty) (\partial \xi_2)(1) \xi_1(0) \rangle = \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{(z-1)^2} \langle \xi'_3(\infty) \xi_2(z) \xi_1(0) \rangle \\ &= \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{(z-1)^2} z^{-h_1-h_2+h_3} \langle \xi'_3(\infty) \xi_2(1) \xi_1(0) \rangle \\ &= (h_3 - h_2 - h_1) \langle \xi'_3(\infty) \xi_2(1) \xi_1(0) \rangle \quad \square \end{aligned}$$

有了这些递推关系之后，我们已经可以计算出任意的 $\rho(\xi_3, \xi_2, \xi_1)$ ，进而计算出任意的 conformal block 了。但事实上，由于这个算法涉及到了太多项之间的递推关系，并且还需要计算矩阵元 G^{MN} 才能完整计算出 conformal block，于是其计算量是巨大的。从而接下来，我们就介绍一个比这些递推关系更有效率的计算 conformal block 的方式。其基本思路是：考虑将中心荷 c 延拓到整个复平面上的 conformal block，而这样一个复变函数可以通过它在 $c \rightarrow \infty$ 时的行为及其极点处的奇异性完全确定下来。详细说来，就是：

$$\mathcal{F}(c) = f(c) + \sum_{\text{zeroes } c_i} \sum_n \frac{a_{i,n}}{(c - c_i)^n}$$

其中 $f(c)$ 是一个全纯函数，它可以通过 \mathcal{F} 在无穷的行为得到；而后面这些项就是 $\mathcal{F}(c)$ 的 Laurent 展开中的负幂次项。

按照这个思路，我们首先考虑 conformal block 在 $c \rightarrow \infty$ 时的行为。此时，除了 $L_{\pm 1}, L_0$ 之外的 Virasoro 生成元的对易子都是无穷大的。由于 Gram 矩阵 G_{MN} 的矩阵元是 $\langle \nu | L_{n_k} \dots L_{n_1} L_{-m_1} \dots L_{-m_l} | \nu \rangle$ ，从而如果存在 $n_i, m_i \neq 1$ ，那么这个矩阵元将会是无穷大的。这也就意味着，其逆 G^{NM} 中只有 $N = M = \{1, \dots, 1\}$ 的矩阵元非零。换句话说，就是只有用 L_{-1} 生成的中间态会贡献此时的 conformal block：

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \mathcal{F}_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h_k; z) = \sum_n z^{-h_1-h_2+h_k+n} \frac{\rho(\nu_4, \nu_3, L_{-1}^n \nu_k) \rho(L_{-1}^n \nu_k, \nu_2, \nu_1)}{\langle \nu_k | L_1^n L_{-1}^n | \nu_k \rangle}$$

根据 Virasoro 代数和前面给出的递推关系，我们可以直接计算出此时 conformal block 的解析表达式：

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \mathcal{F}_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h_k; z) &= z^{-h_1-h_2+h_k} \sum_n z^n \frac{(h_k + h_3 - h_4)_n (h_k + h_2 - h_1)_n}{(2h_k)_n n!} \\ &= z^{-h_1-h_2+h_k} {}_2F_1(h_k + h_2 - h_1, h_k + h_3 - h_4; 2h_k; z) \end{aligned}$$

其中 $a_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$ ，而 ${}_2F_1(a, b; c; z)$ 是超几何函数，第二个等号处用到的无非是超几何函数的级数展开。这实际上就是前面展开中的 $f(c)$ 。有了 conformal block 在无穷远的性质之后，剩下需要确定的就是其极点 c_i 和极点处的奇异性 $a_{i,n}$ 了。

首先，由于 $\mathcal{F}_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h_k; z)$ 中唯一的 c 依赖性来自于矩阵 G^{NM} ，而矩阵元 G^{NM} 的极点出现的位置就应该是 Kac 行列式 $\det G^{(N)}(c, h)$ 零点的位置。根据 Kac 行列式的表达式：

$$\begin{aligned} \det G^{(N)}(h, c) &= \alpha_N \prod_{\substack{rs \leq N \\ r, s > 0}} (h - h_{r,s}(c))^{P(N-rs)}, \\ h_{r,s}(c) &:= \frac{c-1}{24} + \frac{1}{4}(r\alpha_+ + s\alpha_-)^2, \\ \alpha_{\pm} &:= \frac{\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}} \end{aligned}$$

其零点就对应 $h_{r,s}(c) = h$ 的位置：

$$c_{r,s}(h) = 1 + 6(b_{r,s}(h) + b_{r,s}(h)^{-1})^2, \quad b_{r,s}(h) = \left[\frac{rs-1+2h+\sqrt{(r-s)^2+4(rs-1)h+4h^2}}{1-r^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

可以看到，在 $r = 1$ 时 b_{rs} 会趋于无穷。从而没有 c 的选择能使 $h = h_{11}$ 。从而 conformal 的所有极点就对应 $r \geq 2, s \geq 1$ 的 $c_{r,s}$ 。

下面要做的就是确定这些极点处 conformal block 的奇异性了。由于确定 $h \rightarrow h_{r,s}$ 时的奇异性比确定 $c \rightarrow c_{r,s}$ 时的奇异性简单很多，于是我们可以首先求出 $h \rightarrow h_{r,s}$ 时的奇异性，然后从中间接推导出 $c \rightarrow c_{r,s}$ 时的奇异性。我们接下来就要证明，在 $h \rightarrow h_{r,s}$ 时， $G^{MN}(h, c)$ 中只包含 $h - h_{r,s}$ 的一阶极点。于是 \mathcal{F} 也应该只有 $h - h_{r,s}$ 的一阶极点。根据：

$$\lim_{h \rightarrow h_{r,s}} \frac{c - c_{r,s}(h)}{h - h_{r,s}} = -\frac{\partial c_{r,s}}{\partial h} = \text{finite}$$

从而 \mathcal{F} 也应该只有 $c - c_{r,s}$ 的一阶极点，并且其留数是：

$$\text{Res}_{c \rightarrow c_{r,s}} \mathcal{F}_c(h) = -\frac{\partial c_{r,s}}{\partial h} \text{Res}_{h \rightarrow h_{r,s}} \mathcal{F}_{c_{r,s}}(h)$$

也就是说, 确定了 \mathcal{F} 在 $h \rightarrow h_{r,s}$ 的留数后, 就完整确定了它在 $c \rightarrow c_{r,s}$ 时的奇异性。

那么, 为什么 $h \rightarrow h_{r,s}$ 时 $G^{MN}(h, c)$ 中只包含 $h - h_{r,s}$ 的一阶极点呢? 从 Kac 行列式的表达式中可以看出, 如果某个基本场 ν_h 的 h 等于某个 $h_{r,s}$, 那么这个基本场会在 $|N| = rs$ 阶导出一个奇异态 χ_{rs} , 它总可以被 rs 阶态的基 $\{L_{-N}\nu_h\}$ 展开为 $\chi_{rs} = \sum_{|N|=rs} \chi_{rs}^N L_{-N}\nu_{h_{rs}}$ 。而在更高阶, 贡献 Kac 行列式的零点的都是这个奇异态的导出态, 它们之间的矩阵元正比于 $\langle \chi_{rs} | \chi_{rs} \rangle$, 从而是 0。于是当 $h \rightarrow h_{r,s}$ 时, 趋于 0 的 G_{MN} 矩阵元应该都正比于 $\langle \chi_{rs}^h | \chi_{rs}^h \rangle$, 其中 $\chi_{rs}^h := \sum_{|N|=rs} \chi_{rs}^N L_{-N}\nu_h$ 。虽然我们在这里不会详细计算, 不过可以证明: 这个矩阵元在 $h \rightarrow h_{r,s}$ 时正比于 $h - h_{r,s}$, 并且:

$$\lim_{h \rightarrow h_{r,s}} \frac{\langle \chi_{rs}^h | \chi_{rs}^h \rangle}{h - h_{r,s}} = (A_{rs}^c)^{-1} \equiv \left[\frac{1}{2} \prod_{m=1}^r \prod_{n=1-s}^s (mb_{r,s} + nb_{r,s}^{-1}) \right]^{-1}$$

从而, 所有趋于 0 的矩阵元 G_{MN} 中就只含有 $h - h_{r,s}$ 的一阶零点, 进而 G^{MN} 中就只含有 $h - h_{r,s}$ 的一阶极点。

通过这个关系, 我们也可以计算出 $h \rightarrow h_{r,s}$ 时 conformal block 的奇异性。根据上面的讨论, 这些奇异性只由中间态为 χ_{rs} 及其导出态的项贡献, 并且由于 $|\chi_{rs}\rangle$ 可以被视为具有共形权 $h_{r,s} + rs$ 的基本场, 于是 $\langle \chi_{rs} | L_{-N}^\dagger L_M | \chi_{rs} \rangle$ 就是:

$$\langle \chi_{rs} | L_{-N}^\dagger L_M | \chi_{rs} \rangle = G_{NM}(c, h_{r,s} + rs) \langle \chi_{rs} | \chi_{rs} \rangle$$

这也就意味着, 这些态之间的 G^{NM} 矩阵元就是 $G^{NM}(c, h_{r,s} + rs)$ 乘上因子 $[\langle \chi_{rs} | \chi_{rs} \rangle]^{-1}$ 。利用这些关系, 我们就可以得到 conformal block 在 $h \rightarrow h_{r,s}$ 时的留数:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow h_{r,s}} (h - h_{r,s}) \mathcal{F}_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h; z) \\ &= A_{rs}^c \sum_{|N|=|M|} z^{-h_1-h_2+h_{rs}+rs+|N|} \rho(v_4, v_3, L_{-N}\chi_{rs}) G^{NM}(c, h_{r,s} + rs) \rho(L_{-M}\chi_{rs}, v_2, v_1) \end{aligned}$$

在这个表达式中, 我们唯一不会计算的就是三点函数 $\rho(v_4, v_3, L_{-N}\chi_{rs})$ 和 $\rho(L_{-M}\chi_{rs}, v_2, v_1)$ 。事实上, 由于 $\rho(L_{-M}\chi_{rs}, v_2, v_1)$ 和 $\rho(L_{-M}\nu_{h_{r,s}+rs}, v_2, v_1)$ 具有相同的递推关系, 于是:

$$\rho(L_{-M}\chi_{rs}, v_2, v_1) = \rho(L_{-M}\nu_{h_{r,s}+rs}, v_2, v_1) \rho(\chi_{rs}, v_2, v_1)$$

从而我们只需要 $\rho(v_4, v_3, \chi_{rs})$ 和 $\rho(\chi_{rs}, v_2, v_1)$ 就能得到所有的这些三点函数。而可以证明, 这两个三点函数可以由如下的 **fusion polynomial** 给出:

$$\begin{aligned} \rho(v_1, v_2, \chi_{rs}) &= \rho(\chi_{rs}, v_2, v_1) = P_c^{rs} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\ &\equiv \prod_{p=1-r \text{ step } 2}^{r-1} \prod_{q=1-s \text{ step } 2}^{s-1} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + pb + qb^{-1}}{2} \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + pb + qb^{-1}}{2} \end{aligned}$$

将所有这些结果代入上面求出的留数, 就可以得到:

$$\lim_{h \rightarrow h_{r,s}} (h - h_{r,s}) \mathcal{F}_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h; z) = A_{rs}^c P_c^{rs} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} P_c^{rs} \begin{bmatrix} h_4 \\ h_3 \end{bmatrix} \mathcal{F}_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h_{r,s} + rs; z)$$

从而, \mathcal{F}_c 在 $c \rightarrow c_{r,s}$ 的留数就是:

$$\text{Res}_{c \rightarrow c_{r,s}} \mathcal{F}_c (h_1, h_2, h_3, h_4, h; z) = A_{rs}^c P_c^{rs} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} P_c^{rs} \begin{bmatrix} h_4 \\ h_3 \end{bmatrix} \mathcal{F}_{c_{rs}} (h_1, h_2, h_3, h_4, h_{r,s} + rs; z)$$

直到现在, 我们就已经明确了解析延拓后的 conformal block 在 $c \rightarrow \infty$ 处的行为, 也明确了它在每个极点 $c = c_{r,s}$ 附近的奇异行为——每个 $r \geq 2, s \geq 1$ 的 c_{rs} 都是 \mathcal{F}_c 的一阶极点, 其留数由上面的这个公式给出。根据我们前面的讨论, 这足以让我们重构出整个 conformal block:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c (h_1, h_2, h_3, h_4, h; z) &= z^{-h_1-h_2+h} {}_2F_1 (h + h_2 - h_1, h + h_3 - h_4; 2h; z) \\ &+ \sum_{r \geq 2, s \geq 1} \frac{1}{c - c_{r,s}(h)} \left[-\frac{\partial c_{r,s}(h)}{\partial h} \right] A_{rs}^{c_{rs}} P_{c_{rs}}^{rs} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} P_{c_{rs}}^{rs} \begin{bmatrix} h_4 \\ h_3 \end{bmatrix} \mathcal{F}_{c_{rs}} (h_1, h_2, h_3, h_4, h + rs; z) \end{aligned}$$

这就是我们最终想要得到的递推关系。如果我们记 conformal block 中 $z^{-h_1-h_2+h+n}$ 的系数为 $f_n(c, h)$, 那么代入这个递推关系, 就可以得到:

$$\begin{aligned} f_n(c, h) &= \frac{(h + h_3 - h_4)_n (h + h_2 - h_1)_n}{(2h)_n n!} \\ &+ \sum_{r \geq 2, s \geq 1} \frac{1}{c - c_{r,s}(h)} \left[-\frac{\partial c_{r,s}(h)}{\partial h} \right] A_{rs}^{c_{rs}} P_{c_{rs}}^{rs} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} P_{c_{rs}}^{rs} \begin{bmatrix} h_4 \\ h_3 \end{bmatrix} f_{n-rs}(c_{r,s}, h + rs) \end{aligned}$$

利用这个关系, 我们就能从 f_{n-2} 及以下的所有系数中递推得到 f_n , 从而能用一种较为有效的方法逐级计算出 conformal block 的 z 展开。不过在下面的一节中, 我们会通过将 conformal block 延拓到整个复平面的方式给出一个更加有效的计算 conformal block 的方法。

Questions about this section:

- (1) 有没有关于计算 *fusion polynomial* 和 $\langle \chi_{rs}^h | \chi_{rs}^h \rangle$ 奇异性的详细文献?

D.5.3 The Pillow Geometry and Analytic Continuation of the Conformal Block

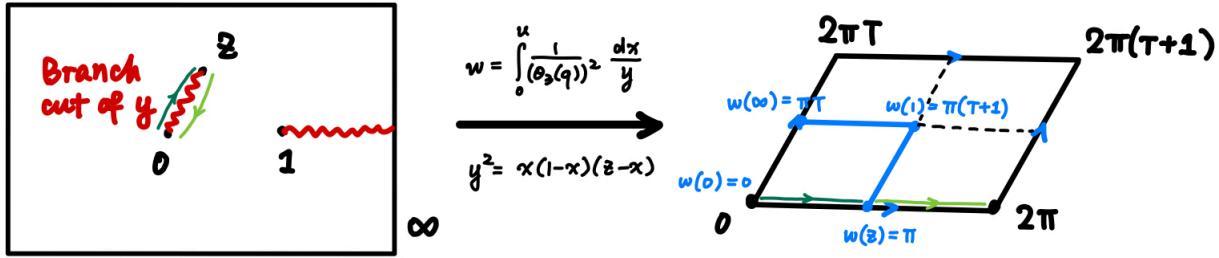
为了将 conformal block 延拓到整个复平面上, 我们可以通过一个共形映射将复球面变形到一个“枕头”上。具体而言, 就是对复球面做一个共形变换, 使得 $u = 0, z, 1, \infty$ 四个点分别映射到环面 $w \sim w + 2\pi(m + n\tau)$ 的 $w = 0, \pi, \pi(\tau + 1), \pi\tau$ 上。其中环面的模量 τ 可以用 z 计算出来:

$$\tau = i \frac{K(1-z)}{K(z)}, \quad K(z) = {}_2F_1(1/2, 1/2; 1; z)$$

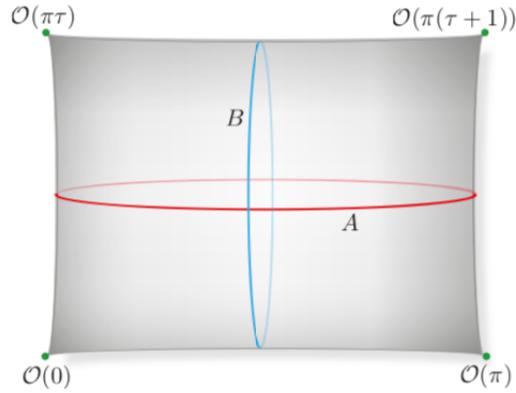
这样一个共形变换可以选为以下的变换：

$$w = \frac{1}{(\theta_3(\tau))^2} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(z-x)}}$$

其中 u 是复球面上的坐标，而 w 是“枕头”上的坐标；而 $\theta_3(\tau)$ 是 Jacobi θ -函数，定义为 $\theta_3(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$ ，其中 q 被定义为 $e^{i\pi\tau}$ 。在上面这个式子中，由于我们涉及到多值函数 $\sqrt{x(1-x)(z-x)}$ ，于是在定义这个变换时，还需要选择割线的位置，使得整个复平面处于一个单值分枝中。在这里，我们选择的割线如下图所示，是从 0 到 z ，从 1 到 ∞ 的两条。



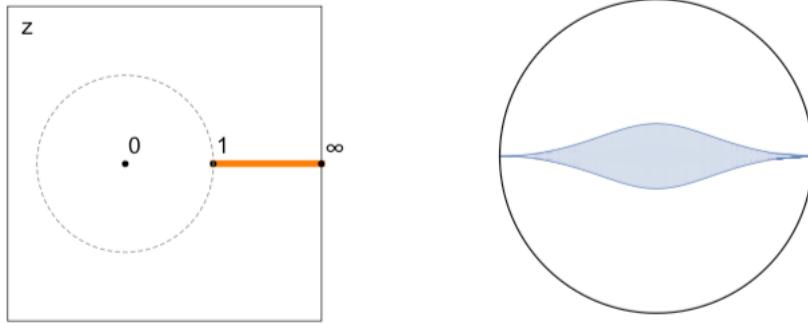
虽然验证起来比较复杂，但是在这个变换下， $u = 0, z, 1, \infty$ 确实被分别映射到了 $w = 0, \pi, \pi(\tau+1), \pi\tau$ 上。不过事实上，由于球面和环面具有不同的拓扑，于是虽然变换后的坐标具有周期性 $w \sim w + 2\pi(m+n\tau)$ ，但是映射后的时空不可能是环面。事实上，如果我们考虑沿着 0 到 z 的割线上沿和下沿的两条路径，会发现它们被分别映射到了 0 到 π 和 π 到 2π 这两条路径上（在上图中分别对应深绿和浅绿两条线）。但是由于真正的时空上本没有割线，于是这两条路径实际上是相同的，从而环面上 $t, 2\pi - t$ ($t \in (0, \pi)$) 的点被认同起来；对于另一条割线，我们也可以得到类似的结论： $\pi\tau + t$ 和 $\pi\tau + 2\pi - t$ ($t \in (0, \pi)$) 需要被认同起来。这两部分认同可以一并通过将 $w, -w$ 认同起来完成。也就是说，真正的时空是被映射到 T^2/\mathbb{Z}_2 上的，这个 \mathbb{Z}_2 的作用就是将 w 和 $-w$ 认同起来。如下图，如此认同的环面 T^2/\mathbb{Z}_2 看起来就像一个“枕头”⁴⁹。非常显然地，这个枕头 $\mathbb{P}^1 = T^2/\mathbb{Z}_2$ 和球面具有相同的拓扑。



我们为什么要将球面变为枕头呢？这是由于枕头上四点关联函数 $\langle \phi_1(0)\phi_2(\pi)\phi_3(\pi(1+\tau))\phi_4(\pi\tau) \rangle_{\text{Pillow}}$ 可以被看作 $q = e^{\pi i \tau}$ 的函数，而我们之后会看到，这

⁴⁹这个图来自 D. Das, S. Datta, S. Pal, *Modular crossings, OPE coefficients and black holes*, arXiv:hep-th/1712.01842。

一个四点函数的 q -展开的收敛半径是 $|q| = 1$ 。而如下图所示，整个（具有一条从 1 到 ∞ 的割线的） z 平面在映射 $q = \exp(-\pi K(1-z)/K(z))$ 后处于图中浅蓝色的区域中，也就全部处在 $|q| = 1$ 之内。从而我们可以反过来用枕头上的四点函数将球面上的四点函数延拓到整个 z 平面上。为了做到这一点，我们首先要明白枕头上四点函数和球面上的四点函数之间的关系。



不过，这两个四点函数之间并不能通过简单地将所有场按照基本场的变换关系做变换的方式联系起来，有两个困难阻止我们这么做：

- 由于 $u = 0, z, 1, \infty$ 连接着割线，于是我们的共形变换在这四个点上是奇异的。从而变换后的算符在这四个点处实际上也是奇异的。
- 在变换后，曲面的度规会发生变化，而我们通常计算的都是平直“枕头”上的关联函数。为了将映射后的“枕头”变为平直“枕头”，我们还需要额外做一个 Weyl 变换。这个 Weyl 变换并不是共形变换，从而会引入一个额外的共形反常。

接下来，我们就需要逐个修好这些问题⁵⁰。

Correlation Function on the Pillow

首先，第一个问题是简单的：虽然变换后 $w = 0$ 的算符没有定义，但是在其附近的 $w = \epsilon$ 的算符都是良定义的。我们只需要取 $\epsilon \rightarrow 0$ 的极限就能将这个问题“修补”好。由于基本场的变换关系只能看到局域的共形映射，而我们的共形映射在局域上看起来像是一个平方根加一个 rescale，于是我们只要明白了共形映射 $w = 2a\sqrt{u}$ 下如何定义 $w = 0$ 处的场，就能明白所有四个点的场在“枕头”上如何定义：

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(u=0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{O}(u=\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{a}{\sqrt{\epsilon}} \right)^h \mathcal{O}(w=2a\sqrt{\epsilon}) \\ &= a^{2h} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[\left(\frac{2}{\sigma} \right)^h \mathcal{O}(w=\sigma) \right] \end{aligned}$$

由此可以看到另一个问题：如果我们直接将 $\lim_{w \rightarrow 0} \mathcal{O}(w=\sigma)$ 定义为 $\mathcal{O}(w=0)$ ，那么它和良定义的 $\mathcal{O}(u=0)$ 之间的变换关系中将会包含一个紫外发散，这仍然会导致 $\mathcal{O}(w=0)$

⁵⁰ 这部分讨论来自于 J. Maldacena, D. Simmons-Duffin, A. Zhiboedov 的文章 *Looking for a bulk point*, arXiv:hep-th/1509.03612 的 Section 7 和附录 D。

不良定义。为了消除掉这个紫外发散，我们可以定义 w 平面上的算符为：

$$\mathcal{O}^{(*)}(w=0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[\left(\frac{2}{\sigma} \right)^h \mathcal{O}(w=\sigma) \right]$$

那么这个 $\mathcal{O}^{(*)}(w=0)$ 就是良定义的，并且它和 $\mathcal{O}(u=0)$ 之间满足的关系就是：

$$\mathcal{O}(u=0) = a^{2h} \mathcal{O}^{(*)}(w=0)$$

有了这些讨论，我们就能明白如何在枕头上定义 ϕ_1, \dots, ϕ_4 对应的算符了。以 $\phi_2(z)$ 为例，由于 $u = z$ 附近有 $dw/dz = \theta_3(\tau)^{-2}(z(1-z))^{-1/2}(z-u)^{-1/2}$ ，从而在这附近，从 u 到 w 的映射在局部上就是 $w = 2(\theta_3(\tau)^{-2})(z(1-z))^{-1/2}\sqrt{z-u}$ ，根据前面的讨论，就有：

$$\phi_2(z) = \theta_3(\tau)^{-4h_2}(z(1-z))^{-h_2} \phi_2^{(*)}(u=\pi)$$

对于其他三个点而言，讨论是完全类似的。只不过对 $u = \infty$ 的点而言，我们还需要额外做一个变换 $z' = 1/z$ ，并额外考虑 $\phi_4'(z=\infty) = \phi_4(z'=0)$ 。经过类似的过程，就可以得到：

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= \theta_3(\tau)^{-4h_1} z^{-h_1} \phi_1^{(*)}(u=0) \\ \phi_2(z) &= \theta_3(\tau)^{-4h_2} (z(1-z))^{-h_2} \phi_2^{(*)}(u=\pi) \\ \phi_3(1) &= \theta_3(\tau)^{-4h_3} (1-z)^{-h_3} \phi_2^{(*)}(u=\pi(\tau+1)) \\ \phi_4'(\infty) &= \theta_3(\tau)^{-4h_4} \phi_4^{(*)}(u=\pi\tau) \end{aligned}$$

直到此处，我们就修好了第一个问题——定义了“枕头”上的算符，并且找到了它们和球面上算符之间的关系。利用这些算符，我们就能知道⁵¹：

$$\begin{aligned} \langle \phi_1(0) \phi_2(z) \phi_3(1) \phi_4'(\infty) \rangle_{\text{Sphere}} \\ = \theta_3(\tau)^{-4(h_1+h_2+h_3+h_4)} z^{-h_1-h_2} (1-z)^{-h_2-h_3} \langle \phi_1^{(*)}(0) \phi_2^{(*)}(\pi) \phi_3^{(*)}(\pi\tau+\pi) \phi_4^{(*)}(\pi\tau) \rangle_{\text{Curved Pillow}} \end{aligned}$$

其中，角标为 Curved Pillow 的关联函数意味着在弯曲枕头上的关联函数。接下来，我们就要继续处理第二个问题，试图将弯曲的枕头映射为平直的枕头。根据 Weyl 反常 $T_\mu^\mu = -\frac{c}{24\pi} R$ ，如果我们将背景度规从 δ_{ab} 变换为了 $e^{2\Omega} \delta_{ab}$ ，那么关联函数会变为：

$$\langle \dots \rangle_{e^{2\Omega}\delta} = \exp \left(\frac{c}{12\pi} \int d^2z \partial_z \Omega \partial_{\bar{z}} \Omega \right) \langle \dots \rangle_\delta$$

对于我们直接映射得到的弯曲枕头而言，其上的度规是：

$$dwd\bar{w} = \frac{dw}{du} \frac{d\bar{w}}{d\bar{u}} dud\bar{u} = \frac{1}{|\theta_3(\tau)|^4} \frac{dud\bar{u}}{\sqrt{|u(1-u)(z-u)|}}$$

于是从平直枕头出发，做一个如下的 Weyl 变换就能得到弯曲枕头：

$$\Omega = -\log |\theta_3(\tau)|^2 - \frac{1}{2} \log |u(1-u)(z-u)|$$

⁵¹这里为了讨论的简便，我们没有明确写出这个式子的反全纯部分。

从而弯曲枕头和平直枕头之间的关联函数之间就应该满足（在这里，我们令角标为 Pillow 的量代表平直枕头上的关联函数）：

$$\langle \dots \rangle_{\text{Curved Pillow}} = \exp \left(\frac{c}{12\pi} \int d^2 u \partial \Omega \bar{\partial} \Omega \right) \langle \dots \rangle_{\text{Pillow}}$$

不过这还并没有完全解决我们的问题。当我们计算这个 Weyl 反常因子时，会发现这个因子实际上是紫外发散的。为了看到这一点，我们可以试图计算 $u = 0$ 附近这个被积函数的值：

$$\partial \Omega \bar{\partial} \Omega|_{u=0} \sim \frac{1}{|u|^2}$$

从而， $z = 0$ 附近的这个积分是发散的。事实上，所有的四个奇点 $u = 0, z, 1, \infty$ 都会贡献这个紫外发散。为了得到一个有限的结果，我们还需要对平直时空上的关联函数做额外的重整化。为了看到如何在所有奇点上消去这个紫外发散，让我们继续考虑共形映射 $w = 2a\sqrt{u}$ 。此时映射后的度规需要一个 Weyl 变换 $\Omega = \frac{1}{2} \log \frac{|a|^2}{|u|}$ 来变为平直度规。为了规避 Weyl 反常因子中的紫外发散，我们可以做如下的正规化：

$$\Omega = \begin{cases} \frac{1}{2} \log \frac{|a|^2}{|u|} & \text{if } |w| > \epsilon \\ \frac{1}{2} \log \frac{|a|^2}{|\epsilon/2a|^2} & \text{if } |w| \leq \epsilon \end{cases}$$

其中，由于 $|w| = \epsilon$ 对应 $|u| = |\epsilon/2a|^2$ ，从而这样正规化后的 Ω 是连续的。利用这个正规化后的 Ω ，就能计算出 $u = 0$ 这个奇点对 Weyl 反常因子贡献的紫外发散：

$$\frac{c}{12\pi} \int_{(\epsilon/2a)^2} \frac{d^2 u}{16|u|^2} = -\frac{c}{24} \log \epsilon + \text{finite}$$

由于这和 a 无关，于是对于球面到枕头的映射而言，奇点 $u = 0, z, 1$ 对 Weyl 反常因子贡献的紫外发散应该都是 $-\frac{c}{24} \log \epsilon$ 。对于奇点 $u = \infty$ 而言，根据类似的正规化方案，我们也能计算出其贡献的紫外发散是 $-\frac{9c}{24} \log \epsilon$ ⁵²。从而，如果我们定义重整化后的关联函数为：

$$\langle \dots \rangle_{\text{Pillow}}^{(*)} = \exp \left(\frac{c}{2} \log \epsilon \right) \langle \dots \rangle_{\text{Pillow}}$$

那么 $\langle \dots \rangle_{\text{Pillow}}^{(*)}$ 和 $\langle \dots \rangle_{\text{Curved Pillow}}$ 之间的关系中就不会出现任何的发散。最后，为了计算出这个关系，我们就需要对正规化后的 Ω 计算 $\frac{c}{12\pi} \int d^2 u \partial \Omega \bar{\partial} \Omega$ 。这就相当于在挖去每个奇点上半径为 $(\epsilon/2a)^2$ 的圆的 \mathbb{R}^2 上积分这个东西。经过一些简单的计算，就可以得到：

$$\frac{c}{12\pi} \int d^2 u \partial \Omega \bar{\partial} \Omega + \frac{c}{2} \log \epsilon = -c \log |\theta_3(\tau)| - \frac{c}{12} \log |z(1-z)|$$

从而，正规化后的平直枕头关联函数 $\langle \dots \rangle_{\text{Pillow}}^{(*)}$ 和弯曲枕头关联函数 $\langle \dots \rangle_{\text{Curved Pillow}}$ 之间就有如下的关系：

$$\langle \dots \rangle_{\text{Curved Pillow}} = (\theta_3(\tau))^{c/2} z^{c/24} (1-z)^{c/24} \langle \dots \rangle_{\text{Pillow}}^{(*)}$$

⁵² 在这里的计算中，我们要求了四个奇点对应的 w 坐标正规化半径 ϵ 都相同。事实上，如果我们选取一个不满足这个条件的正规化方案，那么正规化后的“枕头”将会失去 $\text{Re}(\tau) = 0$ 时沿 $\text{Im}(w)$ 轴的反射对称性。由于我们不希望正规化破坏任何对称性，于是只能选择所有的 ϵ 都相同。

同样，出于简单期间，我们在这里省略了反全纯部分对应的因子。将前面所有的讨论拼起来，就能得到球面四点关联函数和正规化后的平直枕头关联函数之间的关系：

$$\begin{aligned} & \langle \phi_1(0)\phi_2(z)\phi_3(1)\phi_4'(\infty) \rangle_{\text{Sphere}} \\ &= \theta_3(\tau)^{-4(h_1+h_2+h_3+h_4)} z^{-h_1-h_2} (1-z)^{-h_2-h_3} \langle \phi_1^{(*)}(0)\phi_2^{(*)}(\pi)\phi_3^{(*)}(\pi\tau+\pi)\phi_4^{(*)}(\pi\tau) \rangle_{\text{Curved Pillow}} \\ &= \theta_3(\tau)^{\frac{c}{2}-4(h_1+h_2+h_3+h_4)} z^{\frac{c}{24}-h_1-h_2} (1-z)^{\frac{c}{24}-h_2-h_3} \langle \phi_1^{(*)}(0)\phi_2^{(*)}(\pi)\phi_3^{(*)}(\pi\tau+\pi)\phi_4^{(*)}(\pi\tau) \rangle_{\text{Pillow}}^{(*)} \end{aligned}$$

Analytic Continuation of the Conformal Block

明白了这个关系之后，我们就可以试图通过枕头上的四点函数来定义球面四点函数的解析延拓了。和之前我们对环面的讨论类似地，我们也可以在量子化时将 w 平面的实轴方向选为空间方向，将虚轴方向选为时间方向⁵³。这样一来，算符 ϕ_1, ϕ_2 和 ϕ_3, ϕ_4 就分别在同一个时间切片上，从而枕头上的四点函数可以被写为：

$$\langle \phi_1^{(*)}(0)\phi_2^{(*)}(\pi)\phi_3^{(*)}(\pi\tau+\pi)\phi_4^{(*)}(\pi\tau) \rangle_{\text{Pillow}}^{(*)} = \langle \psi_{43} | e^{-H(\pi \text{Im } \tau) - iP(\pi \text{Re } \tau)} | \psi_{12} \rangle = \langle \psi_{43} | q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} | \psi_{12} \rangle$$

其中态 $|\psi_{12}\rangle, |\psi_{43}\rangle$ 的定义分别是 $|\psi_{12}\rangle = \phi_1^{(*)}(0)\phi_2^{(*)}(\pi)|\Omega\rangle, |\psi_{43}\rangle = \phi_4^{(*)}(0)\phi_3^{(*)}(\pi)|\Omega\rangle$ 。演化算符 $q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}}$ 的作用可以认为是将 $|\psi_{43}\rangle$ 中的两个场平移到了 $\pi\tau$ 和 $\pi(\tau+1)$ 。

为了将这个东西和 conformal block 联系起来，我们可以在两个态之间插入一组投影算符 \hat{P}_k ，其作用就是将整个 Hilbert 空间投影到基本场 ϕ_k 生成的 Verma 模中。由于 CFT 的 Hilbert 空间是所有基本场 Verma 模的直和，从而我们可以插入 $1 = \sum_k \hat{P}_k$ 。如果我们继续假设理论的全纯、反全纯部分可以被因子化，就有：

$$\langle \psi_{43} | q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} | \psi_{12} \rangle = \sum_k C_{43k} C_{k12} \langle \psi_{43} | q^{L_0 - \frac{c}{24}} P_k | \psi_{12} \rangle \langle \psi_{43} | \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} P_k | \psi_{12} \rangle$$

这里相当于对 P_k 做了一个重定义 $P_k = (C_{43k} C_{k12})^{-1} \hat{P}_k$ ，其效果就是将结构常数 $C_{43k} C_{k12}$ 排除了这个矩阵元。将这个式子中的枕头上的关联函数切换为球面上的四点关联函数，就能得到 conformal block 和 $\langle \psi_{43} | q^{L_0 - \frac{c}{24}} P_k | \psi_{12} \rangle$ 的关系：

$$\mathcal{F}_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h; z) = \theta_3(\tau)^{\frac{c}{2}-4(h_1+h_2+h_3+h_4)} z^{\frac{c}{24}-h_1-h_2} (1-z)^{\frac{c}{24}-h_2-h_3} \langle \psi_{43} | q^{L_0 - \frac{c}{24}} P_k | \psi_{12} \rangle$$

而对于矩阵元 $\langle \psi_{43} | q^{L_0 - \frac{c}{24}} P_k | \psi_{12} \rangle$ 而言，由于 $P_k | \psi_{12} \rangle$ 应该是 $|\phi_k\rangle$ 及其导出态的线性组合，于是这个矩阵元总可以被展开为：

$$\langle \psi_{43} | q^{L_0 - \frac{c}{24}} P_k | \psi_{12} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{h+n - \frac{c}{24}}$$

其中 a_n 是 h_i, h 和中心荷 c 的函数。并且如果我们取 $\phi_4 = \phi_1, \phi_3 = \phi_2$ ，那么这个展开中的每一个 a_n 就都是 $P_k | \psi_{12} \rangle$ 中 level- n 分量的模方，从而 $a_n(h_1, h_2, h_1, h_2, h, c)$ 一定是正的。最重要的是，由于四点函数 $\langle \phi_1(0)\phi_2(z)\phi_3(1)\phi_4'(\infty) \rangle$ 在 $z \in (0, 1)$ 上是解析的，并且 $z \in (0, 1)$ 也对应 $q \in (0, 1)$ 于是这个级数在 $q \in (0, 1)$ 上一定收敛。根据 Abel 定理，这个展开的收敛半径就是 1。从而等式右边在整个 $|q| = 1$ 之内都是良定义，并且在奇点 $q = 0$

⁵³由于这个分叶方式和复平面上的径向量子化不同，于是你可能会想：当我们选择不同的分叶时，得到的关联函数是否一致？答案是肯定的——它们对应的路径积分是完全一致的。

之外都是解析的。根据前面的讨论，由于整个 z 平面都会被映射到 $|q| = 1$ 之内，从而除去 $(1 - z)^{c/24 - h_2 - h_3}$ 给出的 $z = 1$ 到无穷的割线外，右边这个函数在整个 z 平面上也是良定义且解析的。从而利用枕头上的四点函数，我们就成功地将 conformal block 延拓到了复平面上。

利用延拓后的 conformal block，我们可以发展出一个比之前讨论更有效的递推求解 conformal block 的方法。前面的推导告诉我们，conformal block 在整个 h 的复平面上只有 $h = h_{r,s}$ 的一阶奇点，并且这些奇点处的留数满足一定的递推关系。于是得知其 $h \rightarrow \infty$ 时的行为就可以得知 conformal block 间的递推关系。我们将复平面变换为枕头的另一个原因就是：枕头上的四点关联函数在 $h \rightarrow \infty$ 极限下有十分简单形式——可以证明：在 $h \rightarrow \infty$ 时，枕头上的四点函数 $\langle \psi_{43} | q^{L_0 - \frac{c}{24}} P_k | \psi_{12} \rangle$ 有如下的极限行为：

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \langle \psi_{43} | q^{L_0 - \frac{c}{24}} P_k | \psi_{12} \rangle = (16q)^{h - \frac{c}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{-\frac{1}{2}}$$

从而，如果我们定义：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h; z) &= \theta_3(\tau)^{\frac{c}{2} - 4(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)} z^{\frac{c}{24} - h_1 - h_2} (1 - z)^{\frac{c}{24} - h_2 - h_3} \\ &\times (16q)^{h - \frac{c}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{-\frac{1}{2}} H_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h; q) \end{aligned}$$

那么 H_c 在 $h \rightarrow \infty$ 处就为 1。由于 conformal block 在整个 h 的复平面上只有 $h = h_{r,s}$ 的一阶奇点，而其所有的奇异性都只能来自于 H_c ，于是 H_c 在整个 h 的复平面上也只有 $h = h_{r,s}$ 的一阶奇点。并且根据我们前面得到的留数关系：

$$\lim_{h \rightarrow h_{r,s}} (h - h_{r,s}) \mathcal{F}_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h; z) = A_{rs}^c P_c^{rs} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} P_c^{rs} \begin{bmatrix} h_4 \\ h_3 \end{bmatrix} \mathcal{F}_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h_{r,s} + rs; z)$$

从而 H_c 在 $h \rightarrow h_{r,s}$ 的留数就是：

$$\lim_{h \rightarrow h_{r,s}} (h - h_{r,s}) H_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h; z) = q^{rs} A_{rs}^c P_c^{rs} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} P_c^{rs} \begin{bmatrix} h_4 \\ h_3 \end{bmatrix} H_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h_{r,s} + rs; z)$$

有了这些关系之后，我们就能完全地确定下来 H_c 这个 h 的解析函数：

$$H_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h; q) = 1 + \sum_{r,s \geq 1} \frac{q^{rs}}{h - h_{r,s}} A_{rs}^c P_c^{rs} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} P_c^{rs} \begin{bmatrix} h_4 \\ h_3 \end{bmatrix} H_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h_{r,s} + rs; z)$$

在这个递推关系中，我们只需要考虑同一个 c 对应的函数 H_c ，而上一节中给出的递推关系需要同时考虑不同的 c 的 conformal block，从而这个递推关系显然是比前面得到的递推关系更加高效的。在实际计算中，我们可以先对 $rs \leq n$ 的所有 r, s 的 $H_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h + rs; q)$ 写出这个递推关系，并作为一个线性方程组求解，从而得到所有 $H_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h + rs; q)$ 的 q^n 以下系数。然后再次通过这个递推关系来计算出 $H_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h; q)$ 的 q^n 以下系数。

Questions about this section:

(1) 有什么简便的方法计算出 $\langle \psi_{43} | q^{L_0 - \frac{c}{24}} P_k | \psi_{12} \rangle$ 在 $h \rightarrow \infty$ 时的极限行为？在 Zamolodchikov 的原始文献中，他的方法没有用到 pillow geometry。Pillow geometry 是否能提供更简便的办法？

D.5.4 Solution to Crossing Equation: Minimal Model

现在我们知道了如何计算一个理论中的 conformal block $\mathcal{F}_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h; z)$ ，从而知道了一个理论的中心荷和所有共形权后，可以试图用 crossing equation 求解结构常数 C_{ijk} 了。在这一节中，我们就来看一个利用 crossing equation 求解结构常数的例子—— $c = 1/2$ 极小模型，在物理上它也对应 2D 临界 Ising 模型。在这个理论中，只有以下的三个基本场：

$$\begin{aligned} 1 : h &= \bar{h} = h_{1,1} = 0 \\ \sigma : h &= \bar{h} = h_{1,2} = \frac{1}{16} \\ \varepsilon : h &= \bar{h} = h_{2,1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

为了求解结构常数，我们的第一步当然是计算 conformal block。让我们先考虑四点函数 $\langle \sigma(0)\sigma(z)\sigma(1)\sigma'(\infty) \rangle$ 。在这个理论中，由于 σ 具有 $h = h_{1,2}$ ，从而它生成的 Verma 模的 $N = 2$ 阶会出现一个奇异态，并且它具有形式：

$$|\chi\rangle = \left(L_{-2} - \frac{3}{4} L_{-1}^2 \right) |\sigma\rangle$$

利用这个事实，我们可以比较简单地求出这个理论中的 conformal block。如果我们有这样一个奇异态在关联函数 $\langle \chi \phi_1 \dots \phi_n \rangle$ 中，那么我们可以将 χ 变换到无穷，并利用 OPE 将场 $\phi_1 \dots \phi_n$ 的乘积写为一系列场 $\phi(0)$ 的和，于是这个关联函数最终可以写为 $\sum_\phi \langle \chi | \phi \rangle$ 。由于这些场 ϕ 一定处于某个 Verma 模中，而 χ 和任意 Verma 模中的态的内积都是 0，从而这个关联函数也一定是 0。于是利用这个关系，我们可以得到 $\langle \sigma(0)\sigma(z)\sigma(1)\sigma'(\infty) \rangle$ 满足的以下方程：

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \sigma(0) \left(L_{-2} - \frac{3}{4} L_{-1}^2 \right) \sigma(z) \sigma(1) \sigma'(\infty) \rangle \\ &= \mathcal{L}_{-2} \langle \sigma(0) \sigma(z) \sigma(1) \sigma'(\infty) \rangle - \frac{3}{4} \langle \sigma(0) (\partial^2 \sigma)(z) \sigma(1) \sigma'(\infty) \rangle \end{aligned}$$

其中在第二个等号处，我们利用了 $L_{-1} = \partial$ 和之前得到的结论：关联函数 $\langle (L_{-n} \mathcal{O})(w) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle$ 中的 Virasoro 生成元可以转化为作用于关联函数上的导数算符 $\mathcal{L}_{-n} \langle \mathcal{O}(w) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle$ ，其中 \mathcal{L}_{-n} 的定义就是 $\sum_i \left\{ \frac{(n-1)h_i}{(w_i - w)^n} - \frac{1}{(w_i - w)^{n-1}} \partial_{w_i} \right\}$ 。利用定义将 \mathcal{L}_{-2} 展开，就能得到：

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{3}{4} \langle \sigma(0) (\partial^2 \sigma)(z) \sigma(1) \sigma'(\infty) \rangle + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(1-z)^2} \right) \langle \sigma(0) \sigma(z) \sigma(1) \sigma'(\infty) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{z} \langle (\partial \sigma)(0) \sigma(z) \sigma(1) \sigma'(\infty) \rangle - \frac{1}{1-z} \langle \sigma(0) \sigma(z) (\partial \sigma)(1) \sigma'(\infty) \rangle \end{aligned}$$

为了得到关联函数满足的微分方程，我们还需要处理这些算符上的导数。为此，我们可以利用四点函数的一般形式：

$$\langle \sigma(z_1, \bar{z}_1) \sigma(z_2, \bar{z}_2) \sigma(z_3, \bar{z}_3) \sigma'(\infty) \rangle = \frac{1}{|z_{31}|^{4h_\sigma}} f\left(\frac{z_{21}}{z_{31}}, \frac{\bar{z}_{21}}{\bar{z}_{31}}\right)$$

由于将作用在算符上的导数提出关联函数只会引入接触项，而此时我们考虑的关联函数的四个点都不同，于是我们可以安全地将导数提出关联函数。例如对于 $\langle \sigma(0) \sigma(z) (\partial\sigma)(1) \sigma'(\infty) \rangle$ 而言，就有：

$$\begin{aligned} \langle \sigma(0) \sigma(z) (\partial\sigma)(1) \sigma'(\infty) \rangle &= \partial_3 [\langle \sigma(z_1) \sigma(z_2) \sigma(z_3) \sigma'(\infty) \rangle]_{z_1=0, z_2=z, z_3=1} \\ &= \partial_3 \left[\frac{1}{|z_{31}|^{4h_\sigma}} f\left(\frac{z_{21}}{z_{31}}, \frac{\bar{z}_{21}}{\bar{z}_{31}}\right) \right]_{z_1=0, z_2=z, z_3=1} = \left(-z\partial - \frac{1}{8} \right) f(z, \bar{z}) \end{aligned}$$

按照这个流程约化完算符中的所有导数之后，我们就能得知 $f(z, \bar{z})$ 满足的微分方程：

$$\left[\partial^2 + \frac{3(1-2z)}{4z(1-z)} \partial - \frac{3}{64z^2(1-z)^2} \right] f(z, \bar{z}) = 0$$

当然，这个方程仅仅考虑了奇异态对全纯部分的约束，而对于反全纯部分，函数 $f(z, \bar{z})$ 应该也满足将 z, ∂ 分别替换为 $\bar{z}, \bar{\partial}$ 的方程。为了求解这个方程，我们可以将 $f(z, \bar{z})$ 分离变量为 $f(z)\bar{f}(\bar{z})$ ，这样 $f(z), \bar{f}(\bar{z})$ 就应该满足对应的常微分方程。我们可以找到这个二阶常微分方程的两个特解：

$$f_\pm(z) = \frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{z}}}{z^{1/8}(1-z)^{1/8}}$$

从而，四点函数可以写为 $\langle \sigma(0) \sigma(z) \sigma(1) \sigma'(\infty) \rangle = (c_+ f_+ + c_- f_-)(\bar{c}_+ \bar{f}_+ + \bar{c}_- \bar{f}_-)$ 。从而全纯部分的 conformal block 也一定是 f_+, f_- 的线性组合。接下来的问题就是：由于理论中可能有三个不同的基本场，于是这个四点函数应该对应三个不同的 conformal block $\mathcal{F}(h=0), \mathcal{F}(h=\frac{1}{16})$ 和 $\mathcal{F}(h=\frac{1}{2})$ 。如何看出它们对应 f_+, f_- 的哪个线性组合呢？为了解答这个问题，我们可以回到 conformal block 的定义：

$$\mathcal{F}_c(h_1, h_2, h_3, h_4, h_k; z) := \sum_{|N|=|M|} z^{-h_1-h_2+h_k+|N|} \rho(\nu_4, \nu_3, L_{-N}\nu_k) G^{MN}(c, h_k) \rho(L_{-M}\nu_k, \nu_2, \nu_1)$$

由此就可以看出：conformal block 中应该只有 z 的 $-h_1 - h_2 + h_k + |N|$ 次幂，并且其 $-h_1 - h_2 + h_k$ 次幂的系数一定是 1。通过在 $z=0$ 附近展开 f_\pm ，我们就能看到它们能怎样组合出 conformal block。在这个理论中，就有：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(h=0, z) &= \frac{f_+(z) + f_-(z)}{2} = z^{-\frac{1}{8}} \left(1 + \frac{1}{64} z^2 + \frac{1}{64} z^3 + \frac{117}{8192} z^4 + \dots \right) \\ \mathcal{F}(h=1/2, z) &= f_+(z) - f_-(z) = z^{\frac{3}{8}} \left(1 + \frac{1}{4} z + \frac{9}{64} z^2 + \frac{25}{256} z^3 + \frac{613}{8192} z^4 + \dots \right) \end{aligned}$$

由于 f_\pm 中都没有 z 的 $-1/16$ 次幂，于是不存在中间态为 σ 的 conformal block。这也就是说， $\sigma(z)\sigma(0)$ 的 OPE 中应该只有场 $1, \varepsilon$ 及其导出场。这件事情也可以被形式化地写为如下的 fusion rule：

$$\sigma \times \sigma = 1 + \varepsilon$$

由于我们的理论是个极小模型，换句话说就是其中只有有限个基本场，于是 $\sigma(z)\sigma(0)$ 的 OPE 中才只有有限个 Verma 模，而一般而言这件事情是并不成立的。

现在，我们已经计算出了两个不同的 conformal block，事实上已经可以从 crossing equation 里得到对结构常数的一些限制了。对于场 1, 2, 3, 4 都是 σ 的情形，crossing equation 就是：

$$|\mathcal{F}(h=0, z)|^2 + C_{\sigma\sigma\varepsilon}^2 |\mathcal{F}(h=1/2, z)|^2 = |\mathcal{F}(h=0, 1-z)|^2 + C_{\sigma\sigma\varepsilon}^2 |\mathcal{F}(h=1/2, 1-z)|^2$$

其中我们已经利用了 $C_{\sigma\sigma 1} = 1$ 的事实。由于 f_{\pm} 满足：

$$f_+(1-z) = \frac{f_+(z) + f_-(z)}{\sqrt{2}}, \quad f_-(1-z) = \frac{f_+(z) - f_-(z)}{\sqrt{2}}$$

从而等式右边可以被改写为：

$$\text{RHS} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{F}(h=0, z) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathcal{F}(h=1/2, z) \right|^2 + C_{\sigma\sigma\varepsilon}^2 \left| \sqrt{2} \mathcal{F}(h=0, z) - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{F}(h=1/2, z) \right|^2$$

从这个等式中，我们就能确定 $C_{\sigma\sigma\varepsilon}$ 的值：

$$C_{\sigma\sigma\varepsilon} = \frac{1}{2}$$

并且从 fusion rule $\sigma \times \sigma = 1 + \epsilon$ 中也可以看出 $C_{\sigma\sigma\sigma} = 0$ 。类似地，我们也可以求出这个理论中所有其他的 fusion rules 和结构常数。这个理论中剩下全部的 fusion rules 就是：

$$\sigma \times \varepsilon = \sigma, \quad \varepsilon \times \varepsilon = 1$$

于是， $C_{\varepsilon\varepsilon\sigma}$ 和 $C_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}$ 都是 0。 $C_{\sigma\sigma\varepsilon}$ 实际上是理论中唯一 nontrivial 的结构常数。到此为止，我们就从中心荷和共形权的信息中求出了这个理论中所有的结构常数，从而也就解出了这整个 CFT。事实上，不仅仅是这个模型，对于任意的极小模型而言，conformal bootstrap 都能完整地求解出结构常数。

D.5.5 Solution to Crossing Equation: Liouville Theory

在这一节中，我们继续给出另一个 crossing equation 的 nontrivial 解——**Liouville 理论**。我们将会从一个简单的假设出发：所考虑的理论是一个中心荷 $c > 1$ 的么正 CFT，并且所有基本场都是标量，这意味着的全纯、反全纯共形权相等。事实上，所有基本场都是标量这一假设对理论有极强的约束，甚至可以将整个理论完全确定下来。

让我们先从配分函数的模不变性出发约束理论。根据前面的讨论，理论的环面配分函数具有以下的形式：

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{h, \bar{h}} M_{h, \bar{h}} \chi_h(\tau) \bar{\chi}_{\bar{h}}(\bar{\tau}) = \sum_h M_h \chi_h(\tau) \bar{\chi}_h(\bar{\tau})$$

其中 Virasoro 特征标就是 $\chi_h(\tau) = q^{h+(1-c)/24} / \eta(\tau)$ 。为了理论能够在环面上有良好定义，配分函数需要在 $SL(2, \mathbb{Z})$ 变换 $\tau \rightarrow \tau + 1, \tau \rightarrow -1/\tau$ 下不变。对于 $\tau \rightarrow \tau + 1$ 而言， $\chi_h(\tau)$ 的变换行为是 $\chi_h(\tau + 1) = e^{2\pi i (h - \frac{c}{24})} \chi_h(\tau)$ ，于是一个一般的配分函数的变换行为是：

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{h, \bar{h}} M_{h, \bar{h}} e^{2\pi i (h - \bar{h})} \chi_h(\tau) \bar{\chi}_{\bar{h}}(\bar{\tau})$$

从而只要所有基本场的 $h - \bar{h} \in \mathbb{Z}$, 配分函数就有 $\tau \rightarrow \tau + 1$ 下的不变性。既然我们的理论中所有基本场都有 $h = \bar{h}$, 于是这部分模不变性是自然被保证的。

接下来需要考虑的就是 $\tau \rightarrow -1/\tau$ 下的不变性。由于 Dedekind η 函数具有变换性质 $\eta(-1/\tau) = \sqrt{i\tau}\eta(\tau)$, 于是配分函数的不变性就蕴含:

$$\sum_h M_h \frac{\exp[2\pi i(h + \frac{1-c}{24})(\tau - \bar{\tau})]}{|\eta(\tau)|^2} = \frac{1}{|\tau|^2} \sum_h M_h \frac{\exp[2\pi i(h + \frac{1-c}{24})(-1/\tau + 1/\bar{\tau})]}{|\eta(\tau)|^2}$$

如果我们定义 $x = \text{Im}(\tau), y = \text{Im}(\tau)/|\tau|^2$, 那么这个条件又能被改写为:

$$\sqrt{x} \sum_h M_h \exp \left[-4\pi x \left(h + \frac{1-c}{24} \right) \right] = (x \rightarrow y)$$

由于这个关系对于任何 τ 都成立, 于是我们可以将 x, y 视为独立的变量。由于这个等式的两边分别只依赖于 x, y , 从而它们应该等于一个常数。也就是:

$$\sum_h \exp \left[-4\pi x \left(h + \frac{1-c}{24} \right) \right] \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

这就给出了基本场的谱 M_h 上的约束。如果基本场的谱是离散的, 那么理论中就一定会存在一个具有最低的共形权 h_0 , 并且它距离次低的共形权一定有一定的间隔。这导致 $x \rightarrow \infty$ 极限下的等式左边一定有行为 $e^{-\alpha x}$, 而不是 $x^{-1/2}$ 。从而这个关系是不可能出现在离散谱情形中的, 这个理论中基本场的谱一定是连续谱。此时, 我们可以引入一个谱密度函数 $\rho(h)$, 将求和 $\sum_h M_h$ 替换为积分 $\int_{(c-1)/24}^{\infty} dh \rho(h)$ 。此时的谱密度函数需要满足以下关系:

$$\int_{\frac{c-1}{24}}^{\infty} dh \rho(h) \exp \left[-4\pi x \left(h + \frac{1-c}{24} \right) \right] \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

这相当于确定了谱密度函数 $\rho(h)$ 的 Laplace 变换, 于是通过逆 Laplace 变换, $\rho(h)$ 也可以唯一 (相差一个因子) 地确定下来:

$$\rho(h) \propto \frac{1}{\sqrt{h + \frac{1-c}{24}}}$$

如果我们定义 $c = 1 + 6Q^2, h = Q^2/4 + P^2$, 那么利用参数 P , 基本场的谱可以写为 $\int_{\frac{c-1}{24}}^{\infty} dh \rho(h) \propto \int_0^{\infty} dP$, 并且 P, h 一一对应。从而用 P 来参数化基本场的谱是更方便的。于是到此为止, 我们只从中心荷 c 和所有基本场都是标量的假设出发, 利用配分函数的模不变性确定下了理论中基本场的谱。我们想要做的下一步就是: 通过 crossing equation 确定下理论中的所有结构常数。

和之前的讨论类似, 如果我们令基本场 V_P 具有归一化 $\langle V_P(1)V'_P(0) \rangle = \delta(P - P')$, 那么结构常数 $C(P_1, P_2, P_3)$ 就是对称的, 并且 OPE 具有以下的形式:

$$V_{P_1}(z, \bar{z})V_{P_2}(0) \sim \int_0^{\infty} dP_3 C(P_1, P_2, P_3) |z|^{-\frac{Q^2}{2} - 2P_1^2 - 2P_2^2 + 2P_3^2} V_{P_3}(0) + \text{Virasoro descendants.}$$

而理论的 crossing equation 也就是：

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dP C(P_1, P_2, P) C(P_3, P_4, P) \left| \mathcal{F}_c \left(h_1, h_2, h_3, h_4, h = \frac{Q^2}{4} + P^2; z \right) \right|^2 \\ &= \int_0^\infty dP C(P_3, P_2, P) C(P_1, P_4, P) \left| \mathcal{F}_c \left(h_3, h_2, h_1, h_4, h = \frac{Q^2}{4} + P^2; 1-z \right) \right|^2 \end{aligned}$$

我们并不会详细讨论如何求解这个 crossing equation，而是仅仅给出一个最终的结果。事实上，满足这个方程的 $C(P_1, P_2, P_3)$ 在相差一个常数因子的意义下是唯一的，它就是以下的 **Dorn-Otto-Zamolodchikov-Zamolodchikov (DOZZ) 结构常数**：

$$C(P_1, P_2, P_3) = \frac{\Upsilon'_b(0)}{\Upsilon_b\left(\frac{Q}{2} + i(P_1 + P_2 + P_3)\right)} \prod_{j=1}^3 \frac{\sqrt{\Upsilon_b(2iP_j)\Upsilon_b(-2iP_j)}}{\Upsilon_b\left(\frac{Q}{2} + i(P_1 + P_2 + P_3 - 2P_j)\right)}$$

其中 $\Upsilon_b(x)$ 是 Barnes 双 gamma 函数。在这组结构常数下，我们也可以证明理论满足单点函数的模不变性。从而直到此处，我们就从简单的基本假设出发，找到了唯一满足这些基本假设和自洽条件的理论。这个由前述的谱和 DOZZ 结构常数确定下的 CFT 就被称为 **Liouville CFT**。

D.6 A Brief Survey of Known 2D CFTs

D.6.1 Narain Lattice

在接下来的讨论中，我们会给出一系列 2D CFT 的例子。我们考虑的第一个例子是自由玻色子 CFT 的某种推广，它的基本场可以用自由玻色子的全纯、反全纯部分 X_L, X_R 构造出来。这些全纯、反全纯部分可以用以下的 OPE 定义⁵⁴：

$$X_L^i(z)X_L^j(0) \sim -\delta^{ij} \log z, \quad X_R^i(\bar{z})X_L^j(0) \sim -\delta^{ij} \log \bar{z}$$

注意，这些全纯、反全纯自由度可以具有不同的数量，此时的理论在弦论中就对应左、右行自由度不同的杂化弦。显然地，如果理论中有 n_L 个左行玻色子和 n_R 个右行玻色子，那么理论的中心荷就是 $c = n_L, \bar{c} = n_R$ 。当然，这些场并不是单值的，如果它们存在于理论的 Hilbert 空间中，Hilbert 空间就不再是一系列 Verma 模的直和，从而我们之前的很多讨论都不会成立。事实上，我们想要做的是从这些场中构造出一系列单值的基本场，并且令理论的 Hilbert 空间中只有这些单值的场，从而定义出我们考虑的 CFT。利用这些自由玻色子算符，我们可以构造出的所有基本场就是其导数 $\partial X_L^i(z), \bar{\partial} X_R(\bar{z})$ 和以下的 **流代数基本场**：

$$V_{k_L, k_R} =: e^{ik_L \cdot X_L + ik_R \cdot X_R} :$$

接下来，我们考虑的理论就是基本场谱为 $\partial X_L^i(z), \bar{\partial} X_R(\bar{z}), V_{k_L, k_R}$ 的理论。稍微计算 $T(z)$ 和它们的 OPE 就能知道，这些基本场分别具有共形权 $(h, \bar{h}) = (1, 0), (0, 1)$ 和 $(k_L^2/2, k_R^2/2)$ 。事实上，并不是所有的 V_{k_L, k_R} 都是良定义的。如果我们计算 $V_{k_L, k_R}(z)V_{k'_L, k'_R}(0)$ 的 OPE，会得到：

$$V_{k_L, k_R}(z)V_{k'_L, k'_R}(0) \sim z^{k_L \cdot k'_L} \bar{z}^{k_R \cdot k'_R} V_{k_L + k'_L, k_R + k'_R}(0) + \dots$$

⁵⁴为了讨论简单，这里相当于取了耦合常数 $g = 1/4\pi$ 。

于是, 为了使得这个 OPE 是单值的, 因子 $z^{k_L \cdot k'_L} \bar{z}^{k_R \cdot k'_R}$ 必须在 $z' = e^{2\pi i} z$ 下不变。从而任何两个 $k = (k_L, k_R), k' = (k'_L, k'_R)$ 之间都要满足以下的关系:

$$k \circ k' \equiv k_L \cdot k'_L - k_R \cdot k'_R \in \mathbb{Z}$$

如果理论中有 n_L 个左行玻色子和 n_R 个右行玻色子, 那么这个关系实际上定义了 \mathbb{R}^{n_L, n_R} 中的一个格子 $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n_L, n_R}$, 称为 **Narain 格子**。对于一个格子 Γ 而言, 我们可以定义其对偶格子为 $\Gamma^* := \{v \in \mathbb{R}^{n_L, n_R} \mid \forall w \in \Gamma, v \circ w \in \mathbb{Z}\}$ 。并且如果一个格子 Γ 而言, 如果 $\forall v \in \Gamma, v \circ v \in 2\mathbb{Z}$, 那么我们称 Γ 为偶的。在下面的讨论中, 除了 OPE 的单值性之外, 我们还需要考虑模不变性对理论的约束。我们将会看到: 模不变性将会要求 Narain 格子一定是自对偶且偶的。

为了看到这一点, 我们首先需要计算出这个理论中的环面配分函数。和之前的讨论类似, 让我们考虑顶点算符 V_{k_L, k_R} 生成的 Fock 空间上的配分函数:

$$\begin{aligned} Z_{k_L, k_R}(\tau, \bar{\tau}) &= \text{Tr}(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}}) = q^{k_L^2/2 - c/24} \bar{q}^{k_R^2/2 - c/24} \sum_{N_1^i, N_2^i, \dots} q^{\sum_{i,n} n N_n^i} \sum_{\bar{N}_1^i, \bar{N}_2^i, \dots} \bar{q}^{\sum_{i,n} n \bar{N}_n^i} \\ &= \frac{1}{\eta(\tau)^{n_L} \bar{\eta}(\tau)^{n_R}} q^{k_L^2/2} \bar{q}^{k_R^2/2} = \frac{1}{\eta(\tau)^{n_L} \bar{\eta}(\tau)^{n_R}} \exp[i\pi(k_L^2 \tau - k_R^2 \bar{\tau})] \end{aligned}$$

和之前的讨论类似, 由于整个理论的 Hilbert 空间是各真空生成的 Fock 空间的直和, 于是整个理论的环面配分函数就是:

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{\eta(\tau)^{n_L} \bar{\eta}(\tau)^{n_R}} \sum_{(k_L, k_R) \in \Gamma} \exp[i\pi(k_L^2 \tau - k_R^2 \bar{\tau})]$$

在变换 $\tau \rightarrow \tau + 1$ 下, 分母不会改变, 而每个 (k_L, k_R) 对应的指数会变化 $e^{i\pi(k_L^2 - k_R^2)}$ 。于是如果配分函数具有模不变性, 那么就一定有 $k \circ k = k_L^2 - k_R^2 = 0$, 从而 Γ 是偶的。而在变换 $\tau \rightarrow -1/\tau$ 下, 环面配分函数会变为:

$$Z(-1/\tau, -1/\bar{\tau}) = \frac{1}{(-i\tau)^{n_L/2} (i\bar{\tau})^{n_R/2}} \frac{1}{\eta(\tau)^{n_L} \bar{\eta}(\tau)^{n_R}} \sum_{(k_L, k_R) \in \Gamma} \exp[-i\pi(k_L^2/\tau - k_R^2/\bar{\tau})]$$

为了将指数上的 $1/\tau$ 化为 τ , 我们需要使用 delta 函数的如下离散 Fourier 变换:

$$\sum_{k \in \Gamma} \delta(k - p) = \frac{1}{\text{Vol}(\Gamma)} \sum_{k' \in \Gamma^*} \exp(2\pi i k' \circ p)$$

其中 $\text{Vol}(\Gamma)$ 是 Γ 的原胞体积。我们可以在每一项求和内插入一个 $1 = \int d^{n_L + n_R} l \delta(k - l)$, 从而有:

$$\begin{aligned} Z(-1/\tau, -1/\bar{\tau}) &= \frac{1}{(-i\tau)^{n_L/2} (i\bar{\tau})^{n_R/2}} \frac{1}{\eta(\tau)^{n_L} \bar{\eta}(\tau)^{n_R}} \sum_{(k_L, k_R) \in \Gamma} \int d^{n_L + n_R} l \delta(k - l) \exp[-i\pi(l_L^2/\tau - l_R^2/\bar{\tau})] \\ &= \frac{1}{\text{Vol}(\Gamma)} \frac{1}{(-i\tau)^{n_L/2} (i\bar{\tau})^{n_R/2}} \frac{1}{\eta(\tau)^{n_L} \bar{\eta}(\tau)^{n_R}} \sum_{k' \in \Gamma^*} \int d^{n_L + n_R} l \exp[2\pi i k' \circ l - i\pi(l_L^2/\tau - l_R^2/\bar{\tau})] \\ &= \frac{1}{\text{Vol}(\Gamma)} \frac{1}{\eta(\tau)^{n_L} \bar{\eta}(\tau)^{n_R}} \sum_{k'_L \in \Gamma} \exp[i\pi(k_L'^2 \tau - k_R'^2 \bar{\tau})] \end{aligned}$$

其中在第二行处，我们对 $\delta(k - l)$ 做了离散 Fourier 变换，而在第三行处我们计算了这个 Gaussian 积分。可以看到，如果要想让配分函数在这部分变换下不变，那么 Narain 格子 Γ 一定需要是自对偶的，也就是 $\Gamma = \Gamma^*$ 。此时，由于 $\text{Vol}(\Gamma) = 1/\text{Vol}(\Gamma^*)$ ，于是 $\text{Vol}(\Gamma) = 1$ ，从而 $Z(\tau, \bar{\tau}) = Z(-1/\tau, -1/\bar{\tau})$ 。

直到此处，我们看到了：模不变性要求 Narain 格子一定是自对偶的，并且是偶的。由于 $\text{Vol}(\Gamma) = 1$ ，于是如果这个格子的基矢是 e_a ，那么 $A_{ab} := e_a \circ e_b$ 的行列式一定是 1，并且其矩阵元一定都是偶数。可以证明，这样的格子一定满足 $n - m = 8k, k \in \mathbb{Z}$ ，从而可以分类讨论如下：

- 不妨设 $n \geq m$ 。如果 $m \neq 0$ ，例如 $n - m = 8k (k, m \geq 1)$ ，那么 Γ 就一定同构于 $\Gamma_8^{\oplus k} \oplus \Gamma_{1,1}^{\oplus m}$ ，其中 Γ_8 是 E_8 的 root lattice⁵⁵，而 $\Gamma_{1,1}$ 是 $\mathbb{R}^{1,1}$ 中具有矩阵 $A_{ab} = \sigma_1$ 的格子。
- 如果 $m = 0$ ，此时一定有 $n = 8k$ 。对于 $k = 1$ 的情形， \mathbb{R}^8 中只存在 Γ_8 一个满足条件的格子；而对于 $k = 2$ 的情形， \mathbb{R}^{16} 中存在两个满足条件的格子： $\Gamma_8 \oplus \Gamma_8$ 和 Γ_{16} 。

可以看到，模不变性对理论的约束是很紧的。对于 $m \neq 0$ 的情形，它甚至唯一确定下了 Γ ，从而就唯一确定下了这个理论。

D.6.2 Orbifolds

我们考虑的第二种 CFT 是所谓的 **Orbifold**。它与其说是一种 CFT，更像是一种从已知的 CFT 中构造新 CFT 的方式。具体而言，如果一个 CFT 中具有分立对称性 G ，并且 G 不存在任何't Hooft 反常，那么我们可以将 G 提升为一个规范对称性，也就是将通过 G 互相变换的态认同起来。如此构造出的理论就称为一个 orbifold。

Example: The S^1/\mathbb{Z}_2 Orbifold

Hilbert Space 为了更加清楚地知道这是如何运作的，让我们先考虑一个例子：考虑 S^1 上的紧化玻色子，这个理论具有 $Z : \phi \rightarrow -\phi$ 下的 \mathbb{Z}_2 对称性，我们想要做的就是 gauge 这个 \mathbb{Z}_2 对称性，从而构造出所谓的 S^1/\mathbb{Z}_2 Orbifold。前面的讨论告诉我们，紧化玻色子的 Hilbert 空间是真空 $|n, m\rangle$ 生成的 Fock 空间的直和，而这个真空对应顶点算符： $e^{ip_L\phi_L + ip_R\phi_R}$ 。可以简单地看出： g 作用于 $|n, m\rangle$ 下应该给出 $| -n, -m\rangle$ ，从而当我们 gauge 这个 \mathbb{Z}_2 对称性后， $|n, m\rangle$ 和 $| -n, -m\rangle$ 应该被认同起来。

除了这部分从原 Hilbert 空间中得到的空间之外，orbifold 的 Hilbert 空间中还可能具有额外的 **twisted sector**。这是由于在认同 $\phi \rightarrow -\phi$ 后，除了原来的边界条件 $\phi(x + L) = \phi(x) + 2\pi Rk$ 之外，玻色场的边界条件还可以是：

$$\phi(x + L) = -\phi(x) + 2\pi Rm$$

⁵⁵ 我们都很熟悉：由根子空间分解，每个单纯李代数都会给出一个 root system，其中的元素是所有“能一次升降的 Cartan 子代数本征值”。对于这样一个 root system Δ ，我们可以定义其 root lattice 为 $Q = \mathbb{Z}\Delta$ 。另外，我们还能将 E_8 定义为 $E_8 = \left\{ \sum_{i=1}^8 a_i \epsilon_i \mid \text{either all } a_i \in \mathbb{Z} \text{ or all } a_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \text{ and } \sum_{i=1}^8 a_i \in 2\mathbb{Z} \right\}$ 。这个定义可以被推广到更高的维度（虽然这不再是一个单纯李代数的根系），例如下面我们看到的 E_{16} 。

此时，玻色场具有以下的模式展开：

$$\phi = \pi R m + \frac{i}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha_{n+1/2}}{z^{n+1/2}} + \frac{\bar{\alpha}_{n+1/2}}{\bar{z}^{n+1/2}} \right)$$

值得注意的是，由于边界条件是反周期的，于是这个展开中没有通常的零模，从而 twisted sector 中不会如同 untwisted sector 一样有动量不同的无穷多个真空，而是只有不同的 m 对应的真空。并且由于 $\phi \sim \phi + 2\pi R$ ，从而不等价的真空只有 $m = 0, 1$ 对应的两个。在弦论中，由于 ϕ 的物理意义是卷曲维度上的空间坐标，从而这两个真空态分别对应局域在 $0, \pi R$ 处的扭曲弦。和之前的讨论类似的，这些产生-湮灭算符之间满足关系 $[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{0,m+n}$ ($n \in \mathbb{Z} + 1/2$)。从而理论的 Hilbert 空间就是真空 $|m=0\rangle, |m=1\rangle$ 给出的 Fock 空间的直和。

为了知道这两个真空态的共形权，我们需要知道这个 twisted sector 中的 Virasoro 生成元。将这个模式展开代入 $T = -2\pi g : \partial\phi\partial\phi :$ 后就能得到：

$$L_0 = \sum_{r \in \mathbb{N} + 1/2} \alpha_{-r} \alpha_r + \frac{1}{16}, \quad \bar{L}_0 = \sum_{r \in \mathbb{N} + 1/2} \bar{\alpha}_{-r} \bar{\alpha}_r + \frac{1}{16}$$

当然，根据算符-态对应，态 $|m\rangle$ 也应该对应某些顶点算符 σ_m ，这些算符被我们称为 **twist field**。显然它们应该具有共形权 $(h, \bar{h}) = (1/16, 1/16)$ 。根据态 $|m\rangle$ 的边界条件，我们有 $\phi(e^{2\pi i}z)\sigma_m(0)|\mathbf{1}\rangle = -\phi(z)\sigma_m(0)|\mathbf{1}\rangle$ ，从而也就有 $\partial\phi(e^{2\pi i}z)\sigma_m(0) = -\phi(z)\sigma_m(0)$ 。这蕴含如下的 OPE 关系：

$$\partial\phi(z)\sigma_m(0) \sim z^{-1/2}\tau_m(0), \quad \bar{\partial}\phi(\bar{z})\sigma_m(0) \sim \bar{z}^{-1/2}\bar{\tau}_m(0)$$

其中我们已经利用了 $\alpha_r|m\rangle = 0$ ($r \geq 1/2$) 这一事实，这保证了这个 OPE 中不存在 $z^{-3/2}$ 及更低幂次项。事实上，在这个 OPE 中出现的 $\tau_m(0)$ 就正比于态 $\alpha_{-1/2}|m\rangle$ 对应的顶点算符，这可以通过以下的计算看出：

$$\frac{i}{\sqrt{4\pi g}}\alpha_{-1/2}|m\rangle = - \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{-1/2} \partial\phi(z)\sigma_m(0)|\mathbf{1}\rangle = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z} \tau_m(0)|\mathbf{1}\rangle = -\tau_m(0)|\mathbf{1}\rangle$$

Partition Function 既然我们已经知道了 orbifold 的 Hilbert 空间是 twisted 和 untwisted sector 的直和，我们就可以开始考虑这个 orbifold 的环面配分函数了。由于态 $|\psi\rangle$ 和 $Z|\psi\rangle$ 需要被认同起来，于是在求 trace 时只需要计算其中一个的贡献。这可以通过在 trace 中插入一个投影算符 $(1 + Z)/2$ ，将未认同的 Hilbert 空间中的态投影到 \mathbb{Z}_2 不变的态来实现。于是理论的配分函数就是⁵⁶：

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \text{Tr}_{\mathbf{1}} \left(\frac{1+Z}{2} q^{L_0 - \frac{1}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{1}{24}} \right) + \text{Tr}_Z \left(\frac{1+Z}{2} q^{L_0 - \frac{1}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{1}{24}} \right)$$

如果记 $Z_g^h = \text{Tr}_g(hq^{L_0 - 1/24}\bar{q}^{\bar{L}_0 - 1/24})$ ，那么整个配分函数就可以写为 $Z_g = \frac{1}{2} \sum_{g,h \in \mathbb{Z}_2} Z_g^h$ 。接下来我们要做的就是逐个计算出 Z_1^1, Z_1^Z, Z_Z^1 和 Z_Z^Z 这四项。很显然， Z_1^1 就是之前我们计算过的紧化玻色子的配分函数，而对于后面三项，可以计算如下：

⁵⁶ 其中，trace 的角标 $\mathbf{1}, Z$ 分别代表对边界条件为 $\phi(e^{2\pi i}z) = \phi(z) + 2\pi Rk$, $\phi(e^{2\pi i}z) = Z\phi(z) + 2\pi Rk$ 的空间求和。

- Z_1^Z : 对于非 $|0,0\rangle$ 的态而言, 由于 $\alpha_{-N}|n,m\rangle, \alpha_{-N}|n,-m\rangle$ 通过 Z 互相变换, 于是它们可以组合为两个具有同样共形权且 Z 本征值相反的态, 这两个态对这个求和的贡献总会相互抵消。从而 Z_1^Z 中只有 $|0,0\rangle$ 及其对应的 Fock 空间的贡献。由于 Z 作用于 α_{-n} 上会给出 $-\alpha_{-n}$, 从而态 $\alpha_{-1}^{n_1}\alpha_{-2}^{n_2}\dots|0,0\rangle$ 的贡献就是其 $q^{L_0-1/24}\bar{q}^{\bar{L}_0-1/24}$ 乘上因子 $(-1)^{n_1+n_2+\dots}$, 于是这个求和可以写为⁵⁷:

$$\begin{aligned} Z_1^Z &= q^{-1/24} \sum_{\{n_1, n_2, \dots\}} (-1)^{n_1+n_2+\dots} q^{n_1+2n_2+\dots} \times (\text{anti-holo}) \\ &= q^{-1/24} \prod_{N=1}^{\infty} \sum_{n_N=0}^{\infty} (-1)^{n_N} q^{Nn_N} \times (\text{anti-holo}) \\ &= (q\bar{q})^{-1/24} \prod_{N=1}^{\infty} \frac{1}{|1+q^N|^2} = 4 \left| \frac{\eta(\tau)}{\theta_2(\tau)} \right| \end{aligned}$$

- Z_Z^1 : 由于 twisted sector 中只有两个真空态, 于是在求 twisted sector 中的 trace 时就只需要考虑这两个 Fock 空间, 并且显然它们对配分函数的贡献是相等的。从而:

$$Z_Z^Z = 2q^{1/48} \prod_{r \in \mathbb{N}+1/2} \sum_{n_N=0}^{\infty} q^{rn_r} \times (\text{anti-holo}) = 2(q\bar{q})^{1/48} \prod_{r \in \mathbb{N}+1/2} \frac{1}{|1-q^r|^2} = 4 \left| \frac{\eta(\tau)}{\theta_4(\tau)} \right|$$

其中 q 的指数 $1/48$ 来自于 Virasoro 生成元 L_0 中的 $1/16$ 。

- Z_Z^Z 的计算和前面 Z_1^Z 完全类似, 只不过多了一个 Z 带来的 $(-1)^{rn_r}$ 因子:

$$Z_Z^Z = 2q^{1/48} \prod_{r \in \mathbb{N}+1/2} \sum_{n_N=0}^{\infty} (-1)^{n_r} q^{rn_r} \times (\text{anti-holo}) = 2(q\bar{q})^{1/48} \prod_{r \in \mathbb{N}+1/2} \frac{1}{|1+q^r|^2} = 4 \left| \frac{\eta(\tau)}{\theta_3(\tau)} \right|$$

将所有这些部分合起来, 我们就得到了这个 S^1/\mathbb{Z}_2 orbifold 的环面配分函数:

$$Z_{\text{orb}}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{R}{2\sqrt{2}} Z_{\text{bos}}(\tau, \bar{\tau}) \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \exp \left(\frac{2g\pi^2 R^2}{\text{Im } \tau} |n - m\tau|^2 \right) + 2 \left(\left| \frac{\eta(\tau)}{\theta_2(\tau)} \right| + \left| \frac{\eta(\tau)}{\theta_3(\tau)} \right| + \left| \frac{\eta(\tau)}{\theta_4(\tau)} \right| \right)$$

根据 Jacobi θ 函数在模变换下的变化关系, 我们可以发现: 在 $\tau \rightarrow \tau + 1$ 下, Z_1^Z 不变, 而 Z_Z^1 和 Z_Z^Z 将互换。而在 $\tau \rightarrow -1/\tau$ 下, Z_1^Z 不变, 而 Z_1^Z 和 Z_Z^1 将互换。这些互换显然不会改变总的配分函数, 于是我们构造出的 S^1/\mathbb{Z}_2 orbifold 也具有配分函数的模不变性。事实上, 我们在下面会看到, 在 $\tau \rightarrow -1/\tau$ 下 Z_1^Z 和 Z_Z^1 下互换是一个 Orbifold 具有的一般性质, 对于任何一个规范群为 G 的 orbifold 而言, 这个变换都会将 Z_1^g, Z_g^1 ($\forall g \in G$) 互换。

Boot Camp: Jacobi θ 函数

⁵⁷为了讨论简便, 我们这里仅仅写出了全纯部分的贡献。顺便, 如果你对这里用到的 Jacobi θ 函数的性质不是很熟悉, 可以下翻一页。

你可能会对上面这些求和中出现的 $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ 感到一筹莫展。于是我耐心又亲切地将这些 Jacobi θ 函数满足的性质总结在了这里。首先，四个 Jacobi θ 函数的定义分别是：

$$\begin{aligned}\theta_1(z|\tau) &= -i \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} (-1)^{r-1/2} y^r q^{r^2/2}, & \theta_2(z|\tau) &= \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} y^r q^{r^2/2} \\ \theta_3(z|\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} y^n q^{n^2/2}, & \theta_4(z|\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n y^n q^{n^2/2}\end{aligned}$$

其中 $y = e^{2\pi iz}$ ，而在上面讨论中出现的 $\theta_i(\tau)$ 的定义就是 $\theta_i(z=0|\tau)$ 。利用如下的 **Jacobi 三重积公式**，

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) (1 + q^{n-1/2}t) (1 + q^{n-1/2}/t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2/2} t^n$$

我们还能将这些 θ 函数改写为：

$$\begin{aligned}\theta_1(z|\tau) &= -iy^{1/2} q^{1/8} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \prod_{n=0}^{\infty} (1 - yq^{n+1}) (1 - y^{-1}q^n) \\ \theta_2(z|\tau) &= y^{1/2} q^{1/8} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \prod_{n=0}^{\infty} (1 + yq^{n+1}) (1 + y^{-1}q^n) \\ \theta_3(z|\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \prod_{r \in \mathbb{N}+1/2}^{\infty} (1 + yq^r) (1 + y^{-1}q^r) \\ \theta_4(z|\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \prod_{r \in \mathbb{N}+1/2}^{\infty} (1 - yq^r) (1 - y^{-1}q^r)\end{aligned}$$

取 $y = 0$ ，就得到了 θ 函数的如下表达式：

$$\begin{aligned}\theta_1(\tau) &= 0, & \theta_2(\tau) &= 2q^{1/8} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) (1 + q^n)^2 \\ \theta_3(\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) (1 + q^{n-1/2})^2, & \theta_4(\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) (1 - q^{n-1/2})^2\end{aligned}$$

配合 Dedekind η 函数的定义 $\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ ，我们就能将前面讨论中的连乘积用这些函数表达出来。

关于 θ 函数，我们还关心其在模变换下的性质。可以证明，有：

$$\begin{aligned}\theta_2(\tau + 1) &= e^{i\pi/4} \theta_2(\tau) & \theta_2(-1/\tau) &= \sqrt{-i\tau} \theta_4(\tau) \\ \theta_3(\tau + 1) &= \theta_4(\tau) & \theta_3(-1/\tau) &= \sqrt{-i\tau} \theta_3(\tau) \\ \theta_4(\tau + 1) &= \theta_3(\tau) & \theta_4(-1/\tau) &= \sqrt{-i\tau} \theta_2(\tau)\end{aligned}$$

利用这些性质，我们就可以得到前文中关于模不变性的一系列结果。

Example: The Monster CFT

我们再来看一个 orbifold 的例子——**Monster CFT**。它是由基于 Leech 格子 L_{24} 的 Narain 格子 CFT 出发，模掉 $X_L^i \rightarrow -X_L^i$ 的 \mathbb{Z}_2 对称性得到的 orbifold。Leech 格子 L_{24} 是一个偶的、自对偶的、具有号差 (24, 0) 的格子，并且额外具有性质：其中不存在任何长度为 2 的格矢。可以证明，满足这些性质的格子是唯一的，它可以被构造如下：

$$L_{24} = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}}(a_1, \dots, a_{24}) : a_i \in \mathbb{Z}, a_1 + \dots + a_{24} \equiv 4a_1 \equiv \dots \equiv 4a_{24} \pmod{8} \right\}$$

由于其号差是 (24, 0)，于是这个 Narain 格子 CFT 中只包含左手自由度。我们将不加证明地给出其环面配分函数：

$$Z(\tau) = j(\tau) - 720 = q^{-1} + 24 + 196884q + 21493760q^2 + \dots$$

其中 $j(\tau)$ 是 **elliptic j -invariant**。接下来，我们就希望将 $X_L^i \rightarrow -X_L^i$ 的 \mathbb{Z}_2 对称性 gauge 掉，从而得到一个 orbifold。根据前面的讨论，这个 orbifold 的环面配分函数也可以写为 $Z(\tau) = \frac{1}{2}(Z_1^1 + Z_1^2 + Z_2^1 + Z_2^2)$ ，其中 $Z_1^1 = Z(\tau)$ 。按照和前面类似的方法，我们也可以计算出后面这几部分的配分函数。例如：

$$Z_1^2(\tau) = q^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+q^n)^{24}} = 2^{12} \left(\frac{\eta(\tau)}{\theta_2(\tau)} \right)$$

对剩下的两部分配分函数做类似的计算，就可以得到：

$$Z_{L_{24}/\mathbb{Z}_2}(\tau) = \frac{1}{2}j(\tau) - 360 + 2^{11}(\eta(\tau))^{12} \left[\frac{1}{(\theta_2(\tau))^{12}} + \frac{1}{(\theta_4(\tau))^{12}} - \frac{1}{(\theta_3(\tau))^{12}} \right] = j(\tau) - 744$$

可以看到，这个 orbifold 的配分函数中不包含任何 q^0 项。在这个理论中，由于 q^0 项的系数对应共形权为 (1, 0) 的基本场个数，而量子理论中的所有守恒流都是基本场⁵⁸，于是这意味着理论中不存在任何自旋为 1 的守恒流。事实上，这个 L_{24}/\mathbb{Z}_2 orbifold 具有一个巨大的分立对称群，它同构于最大的散在单群——魔群。从而这个 L_{24}/\mathbb{Z}_2 orbifold 又被称为 monster CFT，它在证明 monstrous moonshine 猜想的过程中发挥了很重要的作用。

More General Orbifolds

Construction of Orbifold 上面给出的这些讨论当然可以被推广到更加普遍的情形。如果我们有一个 CFT，其具有分立对称群 G ，并且它不存在任何't Hooft 反常，那么可以通过如下的方式 gauge G ，从而构建 orbifold：首先，在 CFT 的 Hilbert 空间中加入 twisted sector。对于玻色场而言，这就相当于在理论的 Hilbert 空间中加入边界条件为 $\phi(e^{2\pi i z}) = g\phi(z)$ 的部分⁵⁹。

一个自然的问题就是：如果给定了对称群 G ，那么理论中需要加入什么样的 twisted sector 呢？如果我们认同了 $\forall g \in G, \phi \sim g\phi$ ，那么 $\phi(e^{2\pi i})$ 就可以是任意的 $g\phi(z)$ 。不过事

⁵⁸如果守恒流不是基本场，那么对应的对称性中将会出现它和引力的混合反常。我们会在后面讨论 WZW 模型的时候更加详细地看到这点。

⁵⁹如果我们的理论是通过算符 formalism 构建出的，其中没有“场”，那么这里的讨论将会失效。在那时，我们可以用 defect line operator 来实现边界条件的作用，从而构造出 twisted sector。

实上，并不是所有不同的 g 给出的 twisted sector 都是独立的。在变换 $\phi \rightarrow h\phi$ 下，场的边界条件会被改写为 $h\phi(e^{2\pi i}) \sim (hgh^{-1})h\phi(z)$ 。也就是说，变换 $\phi \rightarrow h\phi$ 会将 g 给出的 twisted sector 变为 hgh^{-1} 给出的 twisted sector。从而群 G 的同一共轭类中元素 g_1, g_2 给出的 twisted sector 并不是独立的，它们应该被认同起来。理论中独立的 twisted sector 应该一一对应于群 G 的共轭类。

加入了 twisted sector 之后，我们还需要在每个 sector 中将通过 G -变换互相变化的态认同起来。和前面类似，这相当于将每个 sector 的 Hilbert space 投影到 G -不变的子空间。这个投影算符就是：

$$P_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1}$$

于是，如果我们记 $\mathcal{H}_{[g]}$ 为具有共轭类 $[g]$ 中任意元素给出的边界条件的 Hilbert 空间，orbifold 的 Hilbert 空间就应该是：

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\text{conjugacy class } [g]} P_G \mathcal{H}_{[g]}$$

而 orbifold 的环面配分函数就自然是：

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{|G|} \sum_{[g]} \sum_{h \in G} \text{Tr}_g \left(h^{-1} q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} \right) \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{[g]} \sum_{h \in G} Z_g^h$$

上面这一套构造对 Abelian 的群 G 运作良好，但是对于非 Abelian 的群 G 而言，这实际上会有额外的问题。根据 Z_g^h 的定义，它可以写为 $\sum_{|\phi\rangle \in \mathcal{H}_g} \langle h\phi | q^{h-c/24} \bar{q}^{h-c/24} | \phi \rangle$ ，也就可以认为是对所有具有空间边界条件 $\phi(z+1) = g\phi(z)$ 和时间边界条件 $\phi(z+\tau) = h\phi(z)$ 的态求 $q^{h-c/24} \bar{q}^{h-c/24}$ 的和。但是如果 $hg \neq gh$ ，那么对于这些态而言， $\phi(z+\tau+1)$ 就可以是 $hg\phi$ ，又可以是 $gh\phi$ ，从而是不良定义的。为了解决这个问题，我们需要将在 twisted sector $[g]$ 中将投影算符改为：

$$P_{G,g} = \frac{1}{|C_g|} \sum_{h \in C_g} h^{-1}$$

其中 C_g 是元素 g 的 **中心化子**，其定义为 $C_g = \{h \in G | gh = hg\}$ 。从而我们在投影算符中只对和 g 对易的元素求和⁶⁰。于是非 Abelian orbifold 的 Hilbert 空间就应该是 $\mathcal{H} = \bigoplus_{[g]} P_{G,g} \mathcal{H}_{[g]}$ ，理论的环面配分函数也应该改写为：

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{[g]} \frac{1}{|C_g|} \sum_{h \in C_g} Z_g^h$$

Spectrum of Twisted Sectors 对于能够用自由玻色场、费米场构造出的 CFT 而言，知道了这些场的边界条件就能得到 twisted sector 的谱。但是对于一个一般的 CFT 而言，我们只能知道 Hilbert 空间中存在这些 twisted sector，但是还不能完全定下来 orbifold 的

⁶⁰ 你可能会问：如果我们只对和 g 对易的元素求和，那么得到的理论是否还具有 gauge 掉分立对称性 G 的物理意义？答案是否定的。在这个层面上，非 Abelian orbifold 只是对 Abelian orbifold 的一种推广，其重点在于：我们可以从这个过程中构建出自洽的 CFT。

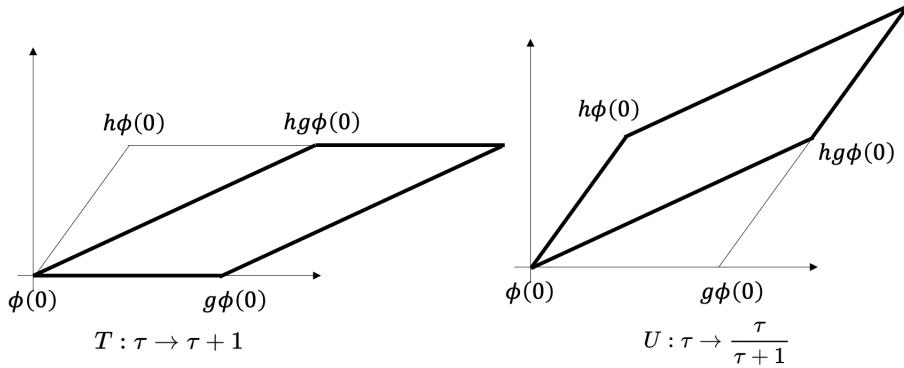
CFT data。我们还需要知道 twister sector 的谱以及涉及它们的三点函数 C_{ijk} 。不过由于三点函数的讨论比谱的讨论复杂很多，我们在这里将会专注于讨论 orbifold 的谱⁶¹。

我们的基本思路是：可以证明 twisted sector 和 untwisted sector 的配分函数之间满足关系 $Z_1^g(\tau) = Z_g^1(-1/\tau)$ ，而我们已知 untwisted sector 的谱，从而可以计算出 $Z_g^1(\tau)$ ，通过其形式就能得到这一 twisted sector 的谱。按照这个思路，我们就先考察 Z_g^h 在模变换下的变化关系：

Proposition 12. 对于满足 $gh = hg$ 的群元素 $g, h \in G$ 而言，有：

$$Z_g^h(\tau) = Z_g^{hg}(\tau + 1), \quad Z_g^h(\tau) = Z_h^{g^{-1}}(-1/\tau)$$

Proof. 根据上面的讨论，在计算 Z_g^h 时，我们是实际上在考虑空间边界条件为 $\phi \rightarrow g\phi$ ，时间边界条件为 $\phi \rightarrow h\phi$ 的态。而如左下图所示，在变换 $T : \tau \rightarrow \tau + 1$ 下，环面的两个周期会变为 $(1, \tau + 1)$ ，从而对于同样一个构型而言，其时间方向的边界条件会变为 $\phi \rightarrow hg\phi$ 。原本的求和在变换后就成为了 Z_g^{hg} ，于是 $Z_g^h(\tau + 1) = Z_g^{hg}(\tau + 1)$ 。



对于 $S : \tau \rightarrow -1/\tau$ 而言，我们可以将其拆分为 $S = T^{-1}UT^{-1}$ ，其中 U 就是右上图所示的变换 $U : \tau \rightarrow \tau / (\tau + 1)$ 。在 U 变换下，原本的两个周期会变为 $(\tau, \tau + 1)$ ，并且在量子化变换后的理论时， τ 会变为空间方向，而 $\tau + 1$ 会变为时间方向。从而新的时间边界条件将会是 $\phi \rightarrow hg\phi$ ，空间边界条件将会是 $\phi \rightarrow h\phi$ 。从而 U 变换下就有 $Z_g^h(\tau) = Z_h^{hg}(\tau / (\tau + 1))$ 。连续作用 $S = T^{-1}UT^{-1}$ ，最终就能得到 $Z_g^h(\tau) = Z_h^{hg^{-1}h^{-1}}(-1/\tau)$ 。对于可以交换的 g, h 而言，这就意味着 $Z_g^h(\tau) = Z_h^{g^{-1}}(-1/\tau)$ 。□

有了这个结果之后，我们就能通过 $Z_g^1(\tau) = Z_1^g(-1/\tau)$ 计算出 twisted sector 中的 $Z_g^1(\tau)$ ，从而得到 twisted sector 的谱。从这个结果中看，模变换只不过相当于对群元素做了一次重排，从而前面给出的配分函数 $Z = \frac{1}{|G|} \sum_{[g], h \in G} Z_g^h$ 自然是模不变的。另外，如果 g 的阶为 n ，那么由于 Z_g^1 在 $\tau \rightarrow \tau^n$ 下会变为 $Z_g^{g^n}$ ，从而 $Z_g^1(\tau)$ 应该在这个变化下不变。如果 g 不能满足这一要求，那么 g 所生成的 \mathbb{Z}_n 子群实际上就出现了't Hooft 反常，不能用于构造 orbifold。在上面讨论的 monster CFT 中，由于 monster group 的 194 个共轭类中的 56 个不满足这个条件，从而这些共轭类对应的子群是不能被 gauge 掉的。

⁶¹关于 orbifold 三点函数的讨论可以参阅 L. Dixon, D. Friedan, E. Martinec, S. Shenker, *The conformal field theory of orbifolds*, Nucl. Phys. **B282** (1987) 13。不过这篇文章中也仅仅给出了如何计算自由场论的 \mathbb{Z}_n orbifold 的三点函数，似乎并没有对一般 orbifold 的讨论。

D.6.3 Minimal Models

在前面的讨论中，我们明白了如何用自由玻色场构建 CFT——我们可以将多个玻色场结合起来形成 Narain 格子 CFT，还可以 gauge 如此产生的 CFT 中的离散对称性，得到各种各样的 orbifold。而在下面的讨论中，我们将会看到一些并非自由场论的模型，其中一个重要的例子就是这一节讨论的**极小模型**。在极小模型中，只存在有限个 Verma 模，并且这些 Verma 模都是奇异的。进一步地，这些 Verma 模在 OPE 下是封闭的，于是理论中只存在有限个基本场。

为了看到这是如何做到的，可以先来看看奇异 Verma 模的基本场会给出什么样的 OPE。根据 Kac 行列式的表达式：

$$\det G^{(N)}(h, c) = \alpha_N \prod_{\substack{rs \leq N \\ r, s > 0}} (h - h_{r,s}(c))^{P(N-rs)},$$

$$h_{r,s}(c) := \frac{c-1}{24} + \frac{1}{4}(r\alpha_+ + s\alpha_-)^2,$$

$$\alpha_{\pm} := \frac{\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}}$$

对于奇异 Verma 模而言，如果它在阶 N 有一个奇异态 $|\chi\rangle$ ，那么对应的 Kac 行列式 $\det G^{(N)}(h, c)$ 就一定为 0，从而其基本场 ϕ 的共形权 h 一定等于某个 $h_{r,s}$ ，并且 $rs = N$ 。对于这个奇异态而言，由于它和所有态的内积都是 0，于是包含 $\chi(x)$ 的任何关联函数 $\langle \chi(x)\phi_1(x_1)\dots\phi_n(x_n) \rangle$ 都是 0。由于 χ 是 ϕ 的导出场，这就会给出一个关于 ϕ 的关联函数的微分方程。这个方程就会给出对 OPE 的约束。

为了更好地说明这件事情，让我们考虑一个例子——基本场的共形权 $h = h_{2,1}$ 的情形。出于显然的原因，我们将会将这个基本场记为 $\phi_{2,1}$ 。它给出的奇异态具有如下的形式：

$$|\chi\rangle = \left(L_{-2} - \frac{3}{2(2h+1)} L_{-1}^2 \right) |\phi_{2,1}\rangle$$

从而， $\phi_{2,1}$ 的关联函数就应该满足：

$$\left(\mathcal{L}_{-2} - \frac{3}{2(2h+1)} \mathcal{L}_{-1}^2 \right) \langle \phi_{2,1}(z)\phi_1(z_1)\dots\phi_n(z_n) \rangle = 0$$

展开 $\mathcal{L}_{-2}, \mathcal{L}_{-1}$ 的定义，这个微分方程就又能写为：

$$\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{z-z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{h_i}{(z-z_i)^2} \right) - \frac{3}{2(2h+1)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \langle \phi_{2,1}(z)\phi_1(z_1)\dots\phi_n(z_n) \rangle = 0$$

将标准的两点函数 $\langle \phi_i(z)\phi_j(w) \rangle = \delta_{ij}(z-w)^{-2h}$ 代入上式后容易发现：这个两点函数是自然满足这个微分方程的。从而奇异态的存在不会对两点函数产生任何限制。不过对于三点函数而言，事情就变得有趣许多：奇异态的出现会限制非零三点函数中出现的基本场，从而对 OPE 产生限制。为了看到这一点，让我们将以下的标准三点函数代入这个微分方程：

$$\langle \phi_{2,1}(z)\phi_1(z_1)\phi_2(z_2) \rangle = \frac{C(h, h_1, h_2)}{(z-z_1)^{h_2-h-h_1}(z-z_2)^{h_1-h-h_2}(z_1-z_2)^{h-h_1-h_2}}$$

就会得到： h, h_1, h_2 之间一定要满足以下的关系：

$$\alpha_2 = \alpha_1 \pm \alpha_+$$

其中 α 被定义为 $h(\alpha) \equiv \frac{1}{24}(c-1) + \frac{1}{4}\alpha^2$ 。这就说明： $\phi_{2,1}$ 和任意场 ϕ 的 OPE 中只能出现两个 conformal family，它们的基本场分别具有 $\alpha \pm \alpha_+$ 给出的两个共形权。这件事情可以用 fusion rules 表达为：

$$\phi_{2,1} \times \phi_\alpha = \phi_{\alpha-\alpha_+} + \phi_{\alpha+\alpha_+}$$

对任意 $h = h_{r,s}$ 的情形，我们实际上都有类似的结果。一个更简单的例子可能是 $h = h_{1,1} = 0$ 的情形。此时 $\phi_{1,1}$ 对应的奇异态就是 $L_{-1}|\phi_{1,1}\rangle$ ，从而 $\phi_{1,1}$ 任何三点函数都需要满足 $\partial\langle\phi_{1,1}\phi_1\phi_2\rangle = 0$ 。从三点函数的标准形式中容易看出，这要求 $h_1 = h_2$ 。从而 $\phi_{1,1}$ 和任意场 ϕ 的 OPE 中只能包含 ϕ 本身的 conformal family 中的算符。写作 fusion rule 也就是：

$$\phi_{1,1} \times \phi_\alpha = \phi_\alpha$$

对于更普遍的情形，我们在这里不会给出完整证明，而只是给出一个最终结果：如果 $\phi_{r,s}$ 具有 $h = h_{r,s}$ ，那么就将会有如下的 fusion rule：

$$\phi_{r,s} \times \phi_\alpha = \sum_{\substack{k=1-r, \\ k+r \equiv 1 \pmod{2}}}^{k=r-1} \sum_{\substack{l=1-s, \\ l+s \equiv 1 \pmod{2}}}^{k=s-1} \phi_{\alpha+k\alpha_++l\alpha_-}$$

一个很重要的观察就是：根据 $h_{r,s}$ 的定义，如果 ϕ_α 也是一个奇异 Verma 模的基本场，那么就会有：

$$\phi_{r_1,s_1} \times \phi_{r_2,s_2} = \sum_{\substack{k=1-r_1, \\ k+r_1 \equiv 1 \pmod{2}}}^{k=r-1} \sum_{\substack{l=1-s_1, \\ l+s_1 \equiv 1 \pmod{2}}}^{k=s-1} \phi_{r_2+k,s_2+l}$$

不过这还不是我们能够得到的最好结果。事实上，由于 fusion 操作是可交换的，从而等式右边的很多 conformal family 也不会出现在 OPE 中。作为一个简单的例子，根据上面这个 fusion rule，我们可以得到 $\phi_{2,1} \times \phi_{1,2} = \phi_{0,2} + \phi_{2,2}$ ，并且如果我们切换 fusion 的顺序，就会得到 $\phi_{1,2} \times \phi_{2,1} = \phi_{2,0} + \phi_{2,2}$ 。对比这两个 fusion rule 就会发现， $\phi_{0,2}, \phi_{2,0}$ 这两个 conformal family 根本就不会出现在 OPE 中，最终能得到的 fusion rule 实际上是 $\phi_{2,1} \times \phi_{1,2} = \phi_{2,2}$ 。这个消去 conformal family 的操作被我们称为 **truncation**。对于一般的 $\phi_{r_1,s_1}, \phi_{r_2,s_2}$ 而言，上式给出的 $\phi_{r_1,s_1} \times \phi_{r_2,s_2}$ 从 $1+r_2-r_1$ 开始，而 $\phi_{r_2,s_2} \times \phi_{r_1,s_1}$ 从 $1-r_2+r_1$ 开始。这也就是说，所有 r 小于 $1+|r_1-r_2|$ 的 $\phi_{r,s}$ 将不会出现在等式右侧。从而我们就能得到以下的 **truncated operator algebra**：

$$\phi_{r_1,s_1} \times \phi_{r_2,s_2} = \sum_{\substack{k=1+|r_1-r_2|, \\ k+r_1+r_2=1 \pmod{2}}}^{r_1+r_2-1} \sum_{\substack{l=1+|s_1-s_2|, \\ l+s_1+s_2=1 \pmod{2}}}^{s_1+s_2-1} \phi_{k,l}$$

这个结果告诉我们：奇异 Verma 模构成的集合 $\{\phi_{r,s} | r, s \in \mathbb{Z}_+\}$ 在 fusion 下构成一个交换环，其单位元是 $\phi_{1,1}$ 这被我们称为 **fusion ring**。由于 fusion ring 的封闭性，于是我们可以写出一个只包含这些奇异 Verma 模的 CFT。对于一个一般的中心荷 c 而言，我们需要将 fusion ring 中所有 Verma 模都纳入理论的 Hilbert 空间中，从而理论中仍然具有无穷多个基本场。不过如果对于一些特殊的 c ，它们给出的 α_\pm 满足：

$$p\alpha_- + p'\alpha_+ = 0, \quad p, p' \in \mathbb{Z}$$

也就是说其中心荷为：

$$c = 1 - \frac{6(p-p')^2}{pp'}$$

那么根据 $h_{r,s}$ 的定义, $h_{r,s}$ 就会等于 $h_{r+p',s+p}$, 从而整个集合 $\{\phi_{r,s} | r, s \in \mathbb{Z}_+\}$ 中只有 $1 \leq r < p', 1 \leq s < p$ 的部分是独立的, 从而理论中只会存在有限多个不同的基本场, 并且它们在 fusion 下封闭。由于我们还知道关系 $h_{r,s} = h_{p'-r,p'-s}$, 从而这 $(p-1)(p'-1)$ 个基本场中只有一半是不同的。总的来说, 这样一个理论中就只包含 $(p-1)(p'-1)/2$ 个基本场。这样一个理论就被我们称为一个 **minimal model**。

当然, 前面的讨论是仅仅限于理论的全纯部分的。为了保证理论在 $\tau \rightarrow \tau + 1$ 下的不变性, 我们希望所有基本场的 $h - \bar{h}$ 都是整数。但是又由于我们希望理论中只包含有限个基本场, 于是唯一的选择就是 $h = \bar{h}$ 。从而在 minimal model 中, 每个基本场应该具有相同的全纯、反全纯共形权。总结一下上面的讨论: minimal model $\mathcal{M}(p, p')$ 具有中心荷 $c = 1 - \frac{6(p-p')^2}{pp'}$, 其基本场的谱就是所有 $1 \leq r < p', 1 \leq s < p$ 对应的 $\phi_{r,s}$, 其共形权为 $(h_{r,s}, h_{r,s})$ 。

由于 minimal model 中所有 Verma 模都是奇异的, 于是我们可以比较轻易地写出 minimal model 中关联函数满足的微分方程。通过求解这些微分方程, 我们最终能得到理论中所有的四点函数和 conformal block。除此之外, 我们还可以用 **Coulomb gas formalism** 来计算 minimal model 中的关联函数, 其基本思路就是用自由场论的顶点算符来构建 minimal model 中的这些基本场。通过这些手段, 我们可以计算出 minimal model 中的所有关联函数, 从而这系列理论是可以解析解的。另外, 我们在上面的讨论中仅仅涉及到了 minimal model 在 $\tau \rightarrow \tau + 1$ 下的不变性, 而并没有进一步讨论 $\tau \rightarrow -1/\tau$ 下的不变性。事实上, 考虑这些不变性会给出对 p, p' 的限制, 最终能够得到对 minimal model 的完全分类。由于这个分类涉及到 Dynkin 图均为单线的五类李代数 A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 , 从而这个对 minimal model 的分类被称为 **ADE classification**。出于篇幅原因, 我们在这里将不会讨论求解、分类这些 minimal model 的细节。

D.6.4 Wess-Zumino-Witten and Coset Models

我们接下来考虑的一类模型是所谓的 **Wess-Zumino-Witten 模型**, 这是一类具有额外连续对称性的 CFT。The WZW model on Lie group G is defined by the following action⁶²:

$$S_{\text{WZW}} = \frac{k}{16\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \text{Tr}(\partial_a g^{-1} \partial^a g) + k\Gamma_{\text{WZ}}, \quad \Gamma_{\text{WZ}} := \frac{1}{24\pi} \int_B d^3x \text{Tr}(g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg)$$

For simplicity, we will only discuss about WZW models on semi-simple Lie groups, but the generalization to other Lie groups is straightforward. In the WZW action, the first term is nothing but the action of nonlinear sigma model on G , and the second term, called the **Wess-Zumino term**, is written as a integral over a 3-dimensional surface B whose boundary is the string worldsheet Σ . Although this action appears to be nonlocal in 2 dimensions, but since its infinitesimal variation of the term is a total derivative:

$$\delta\Gamma_{\text{WZ}} = \frac{k}{8\pi} \int_B d^3x \epsilon^{abc} \partial_c \text{Tr}(g^{-1} \partial_a g g^{-1} \partial_b g g^{-1} \delta g) = \frac{k}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \epsilon^{ab} \text{Tr}(g^{-1} \partial_a g g^{-1} \partial_b g g^{-1} \delta g)$$

⁶²Here's a comment about the normalization: We are using the representation-independent normalization with $\text{Tr}(T^a T^b) = 2\delta_{ab}$ for the Lie algebra basis T^a . Note that this is only possible for semi-simple Lie algebras. If we use the Cartan-Weyl basis of the Lie algebra and apply this normalization to the adjoint representation, it will be equivalent to setting the length of the long roots to be $\psi^2 = 2$.

Therefore we still have a 2-dimensional local field equation.

Note that in order to write down the WZ term, we need to extend the field $g(x)$ to 3-dimensions. In order to make what we've written down make sense, we should ensure that every extension of g gives the same WZ term. Since the variation of WZ term is a total derivative, if we fix g on the boundary Σ and take arbitrary variation of g in the bulk B , the WZ term should be invariant under such variation, therefore it survives the sanity check.

However, for an arbitrary group G , the coefficient k can't take arbitrary value. The sanity check above only ensures that WZ term is invariant under continuous variations of g . But under a variation that's not connected to the identity⁶³, we also need the path integral to be invariant, which implies that the variation of the WZ term should be $2n\pi$. We know that the 'large gauge transformations' are classified by the homotopy group $\pi_3(G)$. For any compact, connected simple Lie group, the homotopy group $\pi_3(G) = \mathbb{Z}$, and the WZ term $\frac{1}{24\pi^2} \int_B \text{tr}(g^{-1}dg)^3$ is actually the Cartan-Maurer invariant. It can be proved that $\frac{1}{24\pi^2} \int_B \text{tr}(g^{-1}dg)^3$ can only take integral value, and the value characterizes the homotopy class in $\pi_3(G)$. Therefore, the coefficient k in the WZW action can only take integral value for compact, connected simple Lie group G .

The most important property of WZW model is that it is a 2-dimensional conformal field theory. To see that, we can start from the $G(z) \times \bar{G}(\bar{z})$ symmetry of the model. The WZW model is invariant under the following transformation (now we've switched to the Euclidean theory, and defined the complex coordinates $z = \sigma^0 + \sigma^1$, $\bar{z} = \sigma^1 - \sigma^0$ as usual):

$$g(z, \bar{z}) \rightarrow \Omega(z)g(z, \bar{z})\bar{\Omega}^{-1}(\bar{z})$$

To verify this, we take the infinitesimal version of this, letting $\Omega(z) = 1 + \omega(z)$ and $\bar{\Omega}(\bar{z}) = 1 + \bar{\omega}(\bar{z})$. The variation of g will be simply $\delta g = \omega g - g\bar{\omega}$, and the variation of the action will be (For simplicity, we've only written down the holomorphic ω part):

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{WZW}} &= \frac{k}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \text{ Tr} [\omega(z)\partial_a(\partial^a gg^{-1}) + \omega(z)\epsilon^{ab}\partial_b(\partial_a gg^{-1})] \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \text{ Tr} [\omega(z)\bar{\partial}(\partial gg^{-1})] \end{aligned}$$

which vanishes after integration by parts. From this expression, one can also find the current associated with this $G(z) \times \bar{G}(\bar{z})$ symmetry:

$$J(z) = -k\partial gg^{-1}, \quad \bar{J}(\bar{z}) = kg^{-1}\bar{\partial}g$$

Using these currents, one can rewrite the action variation as:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{i}{4\pi} \oint dz \text{Tr}[\omega(z)J(z)] - \frac{i}{4\pi} \oint d\bar{z} \text{Tr}[\bar{\omega}(\bar{z})\bar{J}(\bar{z})] \\ &= - \oint \frac{dz}{2\pi i} \omega^a J^a + \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{\omega}^a \bar{J}^a \end{aligned}$$

⁶³You have probably heard the term 'large gauge transformation' in gauge theory, that's basically the same thing here.

In the second line, we've expanded Lie algebra-valued quantities ω, J with respect to T^a . Using these currents, one can also find the classical energy-momentum tensor of the theory:

$$T(z) = \frac{1}{2k} J^a J^a$$

therefore, the quantum energy-momentum tensor should also have the form $T(z) = \gamma : J^a J^a :$, where the normal order is defined by $:AB:(0) = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{-1} A(z) B(0)$. To verify the theory is conformal in 2D, we can first find the OPE between $J(z) J(0)$, then find the OPE of $T(z) T(0)$ using the $J(z) J(0)$ OPE. If the $T(z) T(0)$ OPE has the form $c/2z^4 + 2T/z^2 + \partial T/z$, the theory will be indeed conformal.

Following this logic, we should first find the $J(z) J(0)$ OPE using the Ward identity of $G(z)$ symmetry:

$$\delta_\omega \langle X \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz \omega^a \langle J^a X \rangle$$

Take $\omega^a = z^{n-1}$ and set $X = X(0)$, the right hand side is nothing but the OPE coefficients of $J^a(z) X(0)$. Take the operator X to be $J^a(0)$, then we can obtain its transformation law by its definition $J = -k\partial gg^{-1}$ and $\delta g = \omega g$:

$$\delta_\omega J = [\omega, J] - k\partial\omega, \quad \delta_\omega J^a = i f_{abc} \omega^b J^c - k\partial\omega^a$$

where f_{abc} is the structure constant of the Lie algebra⁶⁴. Therefore, we can extract the following $J^a J^b$ OPE:

$$J^a(z) J^b(0) \sim \frac{k\delta^{ab}}{z^2} + i f_{abc} \frac{J^c(0)}{z}$$

This particular OPE is called \hat{G}_k **current algebra**, and k is called the **level** of the current algebra. If we Laurent expand $J^a = \sum_n J_n^a/z^{n+1}$, we can then obtain the commutation relations of J_n^a from the OPE:

$$[J_n^a, J_m^b] = i f^{abc} J_{n+m}^c + k n \delta^{ab} \delta_{n+m,0}$$

This is so-called \hat{G}_k **affine Kac-Moody algebra**.

From the $J(z) J(0)$ OPE, we can find the following energy-momentum tensor, called the **Sugawara energy-momentum tensor**, satisfies $T(z) T(0) \sim c/2z^4 + 2T/z^2 + \partial T/z$ ⁶⁵:

$$T(z) = \frac{1}{2(k+h)} : J^a J^a : (z)$$

where h is the **dual Coxeter number** of group G , defined as $-f_{acd} f_{bdc} = 2h\delta_{ab}$. The central charge turns out to be:

$$c = \frac{k \dim G}{k+h}$$

⁶⁴Since we've normalized the Killing form to be δ^{ab} , we can no longer keep tracking of upper and lower Lie algebra indices.

⁶⁵由于这里考虑的不是自由场论, 我们无法通过自由场的两点函数定义两个算符的正规乘积。于是为了消去算符乘积中的发散, 我们仍然需要一种正规乘积来减除 AB 中的发散。我们采用就是如下的定义:

$$:AB:(z) = \int_{w \rightarrow z} \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^{-1} A(w) B(z)$$

很显然, 其中只包含 $A(w) B(z)$ OPE 中的 0 阶项, 从而不包含发散。

Using this energy-momentum tensor, we can also find that $J^a(z)$ is a primary field with conformal weight 1. Now, we've proved that the WZW model is indeed a conformal field theory, and its symmetry algebra is actually two copies of the following extension of Virasoro algebra:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n+1)(n-1)\delta_{n+m,0} \\ [L_n, J_m^a] &= -mJ_{n+m}^a \\ [J_n^a, J_m^b] &= if_{abc}J_{n+m}^c + kn\delta_{ab}\delta_{n+m,0} \end{aligned}$$

Spectrum of WZW Model

We are also interested in the spectrum of WZW models. Parallel to what we did for general CFTs, we need to first find the irreducible representations of the symmetry algebra, and then use consistency conditions like modular invariance to constraint the irreps that appear in the spectrum. Although it seems that we need to deal with the full algebra including L_n and J_n^a 's, but since the Sugawara energy-momentum tensor itself is constructed using currents, we can then express L_n 's using J_n 's, and only focusing on the representation theory of the affine Kac-Moody algebra. From the definition of the Sugawara energy-momentum tensor, we can find:

$$L_n = \frac{1}{2(k+h)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} :J_m^a J_{n-m}^a:$$

Now, we can focus only on the affine Kac-Moody algebra formed by J_n^a . Clearly, the algebra above can be decomposed into zero modes J_0^a and ladder operators, therefore we can use the highest weight representation technique. Since J_0^a 's span the original Lie algebra \mathfrak{g} of G , the highest weight states (we will call them **WZW primaries** for obvious reason) should form a representation of \mathfrak{g} . Let's label the representation by (r) . Then, the WZW primaries should satisfy⁶⁶:

$$J_0^a |(r)\rangle = T_{(r)}^a |(r)\rangle, \quad J_n^a |(r)\rangle = 0 \quad (n > 0)$$

Translating these relations into the OPE language, one can find the OPE between $J^a(z)$ and the WZW primary fields $\Phi_{(r)}$ corresponding to $|(r)\rangle$:

$$J^a(z)\Phi_{(r)}(0) \sim \frac{T_{(r)}^a \Phi_{(r)}(0)}{z}$$

With those primaries, one can construct the full representation space by acting J_{-n} on them.

For semi-simple Lie algebras (which correspond to compact Lie groups), not all representations of Lie algebra \mathfrak{g} can be used to construct WZW primaries. There's actually an unitary bound for the representations. To see it, we can work in the Cartan-Weyl basis $\{H^i, E^{\pm\alpha}\}$ of \mathfrak{g} , and label the longest root by ψ . Define:

$$\tilde{I}^{\pm} = E_{\pm 1}^{\mp\psi}, \quad \tilde{I}^3 = \frac{1}{2}(k - \psi \cdot H_0)$$

⁶⁶Similar things works also in the anti-holomorphic sector. One can define the WZW primaries in anti-holomorphic sectors as $\bar{J}_0|(\bar{r})\rangle = -|(\bar{r})\rangle T_{(r)}^a$. The reason that we pick this particular form is that we want $g(z, \bar{z})$ itself, which transforms like $\Omega(z)g(z, \bar{z})\bar{\Omega}^{-1}(\bar{z})$, to be a WZW primary in both holomorphic and anti-holomorphic sector.

then those generators form a $\mathfrak{su}(2)$ subalgebra of the affine Kac-Moody algebra, which implies⁶⁷ $[\tilde{I}^+, \tilde{I}^-] = 2\tilde{I}^3$. From the fact that $J^a(z)$ is Hermitian, we can learn that $(J_n^a)^\dagger = J_{-n}^a$, and therefore $\tilde{I}^+ = (\tilde{I}^-)^\dagger$. By sandwiching $[\tilde{I}^+, \tilde{I}^-] = 2\tilde{I}^3$ with the highest weight primary state $|(r), \lambda\rangle$, one can find:

$$2\|\tilde{I}^-|(r), \lambda\rangle\|^2 = \langle(r), \lambda|[\tilde{I}^+, \tilde{I}^-]|(r), \lambda\rangle = k - \psi \cdot \lambda \geq 0$$

That is, each WZW primary $|(r)\rangle$ that appears in the WZW model Hilbert space should satisfies $\psi \cdot \lambda \leq k$, where λ is the highest weight of (r) and ψ is the longest root of \mathfrak{g} . Moreover, from the $\mathfrak{su}(2)$ subalgebra, we can know that the \tilde{I}^3 eigenvalue should be half-integer, which implies that $k - \psi \cdot H_0$ should be an integer. That's another way to see the level k is quantized for WZW model on compact Lie groups.

An important feature of WZW models is that WZW primaries are also Virasoro primaries. From the relation between L_n and J_n^a , it's obvious that $L_n|(r)\rangle = 0$ for $n > 0$, and its conformal weight is given by:

$$L_0|(r)\rangle = \frac{C(r)}{2(k+h)}|(r)\rangle$$

where $C(r)$ is the quadratic Casimir of representation (r) , defined by $T_{(r)}^a T_{(r)}^a = C(r)\mathbf{1}$. On the other hand, not all Virasoro primaries of WZW model are WZW primaries. But since the Hilbert space should be decomposed into representations of affine Kac-Moody algebra, all Virasoro primaries are either WZW primaries or its descendants.

Another important feature of WZW models is that there's always a null state at Level 1. One can easily check the following state is a null state:

$$\left(L_{-1} - \frac{\sum_a J_{-1}^a t_{(r)}^a}{\tilde{k} + C_A/2} \right) |(r)\rangle = 0$$

This fact implies the correlations of WZW primaries satisfies a set of first-order differential equations. Using the Ward identities, one can translate this relation into:

$$\left[(k+h) \frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j \neq k} \frac{T_{(r_j)}^a T_{(r_k)}^a}{z_j - z_k} \right] \langle \Phi_{(r_1)}(z_1) \dots \Phi_{(r_n)}(z_n) \rangle = 0$$

These equations are called **Knizhnik-Zamolodchikov equations**. For a n -point function, we have n different equations, therefore the correlation functions can be pinned down by these functions in principle. However, they are rather difficult to solve directly.

D.6.5 Superconformal Field Theory

另一类具有额外对称性的 CFT 是具有超对称的 CFT，也就是 **SCFT**。和前面的讨论类似地，通常的 Poincare 超对称和 Virasoro 对称性也不对易，并且它们也并不构成一个封闭的代数，从而我们也需要在 Poincare 超对称加入额外的无穷多个生成元，使其形成一个流代数。在 2D 中，和共形对称性相容的超对称代数只有四种： $\mathcal{N} = 1, 2, 4$ 的超共形代数，它们分别具有相应个数的、自旋 $\frac{3}{2}$ 的费米流算符 $G(z)$ 。

⁶⁷When deriving this, remember we are working in the normalization of $\psi^2 = 2$ for long roots!

加入这些费米流算符实际上会产生一些问题：由于 $G(z)$ 的自旋是半整数的，于是它对应的 Verma 模给出的环面特征标将不会在模变换 $\tau \rightarrow \tau + 1$ 下不变，从而整个理论将不会是模不变的。为了修好这个问题，我们可以利用 **GSO 投影** 将半整数自旋的场排除出理论的谱。具体而言，由于半整数自旋的场具有奇的费米子数，于是我们可以将理论投影到 $(-1)^F$ 不变的态上。不过正如我们在讨论 orbifold 时看到的：为了保持理论的模不变性，在这一步投影之前，我们还需要在理论中加入 $(-1)^F$ 的 twisted sector。作为结果，就是除了具有正常边界条件的 untwisted sector 之外，我们还需要考虑一部分额外的 Hilbert 空间，在其中所有费米算符的边界条件为 $\psi(e^{2\pi i}z) = -\psi(z)$ 。借用弦论中的名词，我们称这部分算符处于 **R sector**，而 untwisted sector 中的、具有正常边界条件的算符处于 **NS sector**。当然，这些讨论是局限于全纯部分的。如果加上反全纯部分的话，我们需要考虑理论中 (NS, NS), (NS, R), (R, NS) 和 (R, R) 这全部四个 sector。

$\mathcal{N} = 1$

下面，我们就来看几个超共形代数的例子。首先是 $\mathcal{N} = 1$ 的超共形代数，其中除了能动张量 $T(z)$ 之外，还存在一个自旋 $\frac{3}{2}$ 的、费米的 Virasoro 基本场 $G(z)$ ，它具有如下的 OPE：

$$G(z)G(0) \sim \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z}T(0)$$

我们也可以对 $G(z)$ 做 Laurent 展开，得到 $G(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{G_\nu}{z^{r+3/2}}$ 。在 NS sector 中，由于费米算符 $G(z)$ 边界条件是 $G(e^{2\pi i}z) = G(z)$ ，于是这要求 $\nu = \frac{1}{2}$ ；而在 R sector 中，其边界是反周期的，从而 $\nu = 0$ 。利用这些展开系数，我们也能将这个 OPE 形式的流代数改写为：

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m+1)(m-1)\delta_{n+m,0} \\ \{G_r, G_s\} &= 2L_{r+s} + \frac{c}{12}(4r^2 - 1)\delta_{r+s,0} \\ [L_m, G_r] &= \frac{1}{2}(m - 2r)G_{m+r} \end{aligned}$$

这就是 $\mathcal{N} = 1$ 的超共形代数。可以看到，NS sector 的 $\{G_{1/2}, G_{-1/2}\}$ 部分就给出加入中心荷后的 $\{Q, \bar{Q}\} = 2H$ ，从而超共形代数确实是拓展后的 Poincare 超对称代数。

$\mathcal{N} = 2$

The next superconformal algebra we consider is the $\mathcal{N} = 2$ SCA. It has a pair of spin- $\frac{3}{2}$ fermionic currents $G^\pm(z)$ and a spin-1 $U(1)_R$ current $J(z)$, and $G^\pm(z)$ carry $U(1)_R$ charge ± 1 . Their current algebra takes the form:

$$\begin{aligned} G^+(z)G^-(0) &\sim \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z^2}J(0) + \frac{2}{z}T(0) + \frac{1}{z}\partial J(0) \\ J(z)G^\pm(0) &\sim \pm \frac{1}{z}G^\pm(0), \quad J(z)J(0) \sim \frac{c}{3z^2} \end{aligned}$$

Together with the current algebra of the energy-momentum tensor, and by taking the Laurent expansion $J(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n z^{-n-1}$, $G^\pm(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} G_r^\pm z^{-r-3/2}$, one can obtain the

commutation relations of the $\mathcal{N} = 2$ SCA:

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} \\
[L_m, G_r^\pm] &= \left(\frac{m}{2} - r\right) G_{m+r}^\pm, \quad [L_m, J_n] = -n J_{m+n}, \\
[J_m, G_r^\pm] &= \pm G_{m+r}^\pm, \quad [J_m, J_n] = \frac{c}{3} m \delta_{m+n,0} \\
\{G_r^+, G_s^+\} &= 0, \quad \{G_r^-, G_s^-\} = 0 \\
\{G_r^+, G_s^-\} &= 2L_{r+s} - (r - s)J_{r+s} + \frac{c}{3} \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) \delta_{r+s,0}
\end{aligned}$$

The $\mathcal{N} = 2$ SCA is invariant under the following outer automorphism called **spectral flow** for integer η :

$$G_r^\pm \rightarrow G_{r \pm \eta}^\pm, \quad J_n \rightarrow J_n + \eta \frac{c}{3} \delta_{n,0}, \quad L_n \rightarrow L_n + \eta J_n + \eta^2 \frac{c}{6} \delta_{n,0}$$

The spectral flow is not a part of the SCA, thus $\mathcal{N} = 2$ SCFTs need not be invariant under it, while certain 'nice' $\mathcal{N} = 2$ SCFTs do admit such symmetry. One can also extend the spectral flow to half-integer η , which connects the NS and R sectors.

$\mathcal{N} = 4$

There exists two different $\mathcal{N} = 4$ superconformal algebras, called the small $\mathcal{N} = 4$ SCA and the big $\mathcal{N} = 4$ SCA respectively. In this section, we will only focus on the small one. The small $\mathcal{N} = 4$ SCA contains 4 spin-3/2 fermionic currents $G^{\alpha A}(z)$ and a set of $\widehat{SU(2)}_k$ R-currents $J_i(z)$ with $c = 6k'$. The index α is the doublet index with respect to the $\widehat{SU(2)}_k$ R-current, and the index A is an extra doublet index that transforms under an outer automorphism $SU(2)_{\text{out}}$. The OPE of those fermionic currents is given by:

$$G^{\alpha A}(z)G^{\beta B}(0) \sim \varepsilon^{AB} \left[\frac{2c}{3z^3} \varepsilon^{\alpha\beta} + \sigma_i^{\alpha\beta} \frac{2}{z^2} J_i(0) + \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{2}{z} T(0) + \sigma_i^{\alpha\beta} \frac{1}{z} \partial J_i(0) \right]$$

Where $(\sigma_i)^\alpha_\beta$ are the Pauli matrices and $\sigma_i^{\alpha\beta} = (\sigma_i)^\alpha_\gamma \epsilon^{\gamma\beta}$. Together with 'trivial' OPEs from the setting forms the $\mathcal{N} = 4$ SCA:

$$\begin{aligned}
T(z)T(0) &\sim \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2} T(0) + \frac{1}{z} \partial T(0) \\
J_i(z)J_j(0) &\sim \frac{k' \delta_{ij}}{z^2} + \frac{i \epsilon_{ijk}}{z} J_k(0) \\
T(z)G^{\alpha A}(0) &\sim \frac{3}{2z^2} G^{\alpha A}(0) + \frac{1}{z} \partial G^{\alpha A}(0) \\
T(z)J_i(0) &\sim \frac{1}{z^2} J_i(0) + \frac{1}{z} \partial J_i(0) \\
J_i(z)G^{\alpha A}(0) &\sim -\frac{(\sigma_i)^\alpha_\beta}{2z} G^{\beta A}(0)
\end{aligned}$$

From the Laurent expansion $T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$, $G(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} G_r z^{-r-3/2}$ and $J_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n^i z^{-r-1}$, one can obtain the commutation relations of the $\mathcal{N} = 4$ SCA:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{k'}{2} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} \\ [L_m, G_r^{\alpha A}] &= \left(\frac{m}{2} - r\right) G_{m+r}^{\alpha A}, \quad [L_m, J_n^i] = -n J_{m+n}^i, \\ \{G_r^{\alpha A}, G_s^{\beta B}\} &= 2\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{AB}L_{r+s} - 2(r-s)\epsilon^{AB}\sigma_i^{\alpha\beta}J_{r+s}^i + \frac{k'}{2} (4r^2 - 1) \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{AB}\delta_{r+s,0} \\ [J_m^i, G_r^{\alpha A}] &= -\frac{1}{2} (\sigma_i)^\alpha{}_\beta G_{m+r}^{\beta A}, \quad [J_m^i, J_n^j] = i\epsilon^{ijk}J_{m+n}^k + m\frac{k'}{2}\delta^{ij}\delta_{m+n,0} \end{aligned}$$

The $\mathcal{N} = 4$ SCA is invariant under the following spectral flow:

$$\begin{aligned} J_n^3 &\rightarrow J_n^3 + \eta k' \delta_{n,0}, \quad J_n^\pm \rightarrow J_{n \pm 2\eta}^\pm \\ L_n &\rightarrow L_n + 2\eta J_n^3 + \eta^2 k' \delta_{n,0}, \quad G_r^{\pm A} \rightarrow G_{r \pm \eta}^{\pm A} \end{aligned}$$

where $\eta \in \mathbb{Z}/2$. The spectral flow with half-integer η again connects the R and NS sectors.

Representation Theory

Now, let's consider representations of the superconformal algebra, and we will take the $\mathcal{N} = 2$ algebra for example. It is easy to find out that the $\mathcal{N} = 2$ algebra can be decomposed into L_0 and ladder operators, therefore we can start with a highest weight state and construct the whole representation using lowering operators. In the NS sector, there are no zero modes and the 'ground' level can be taken as the **superconformal primary** $|h, q\rangle$, satisfying:

$$L_{m>0}|h, q\rangle = J_{m>0}|h, q\rangle = G_{r>0}^\pm|h, q\rangle = 0, \quad L_0|h, q\rangle = h|h, q\rangle, \quad J_0|h, q\rangle = r|h, q\rangle$$

In the R sector, since we have two zero modes G_0^\pm , the ground level states should form a representation of a bigger zero mode algebra spanned by J_0, G_0^\pm with commutation relation $[J_0, G_0^\pm] = \pm G_0^\pm, \{G_0^+, G_0^-\} = 2h - \frac{c}{12}$. Start with a highest weight state q of J_0 , lowering it once with G_0^- completes the irrep. Therefore, R sector ground level should contain two superconformal primaries $|h, q\rangle$ and $G_0^-|h, q\rangle$, having R-charge $q, q-1$ respectively. Given the superconformal primaries, one can construct the superconformal multiplet using lowering operators L_{-n}, G_{-r}^\pm and J_{-n} .

There's also a BPS bound for these multiplets. By taking hermitian conjugate of the SCA while imposing $L_n^\dagger = L_{-n}$, one can easily find:

$$L_n^\dagger = L_{-n}, \quad J_m^\dagger = J_{-m}, \quad (G_r^\pm)^\dagger = G_{-r}^\mp$$

Therefore, in the NS sector, if we sandwich $\{G_{1/2}^\pm, G_{-1/2}^\mp\} = 2L_0 \mp J_0$ between $|h, q\rangle$ and $\langle h, q|$, what we get is the norm of the state $G_{-1/2}^\mp|h, q\rangle$, which should be nonnegative. Therefore, the BPS bound for the NS sector is $h \geq |q|/2$. In the R sector, the BPS bound is given by sandwiching $\{G_0^\pm, G_0^\mp\}$, which reads $h \geq c/24$. If the BPS bound is saturated, the corresponding $G|h, q\rangle$ will vanish, and the superconformal multiplet will be shortened. In NS sector, such shortened multiplet is called a BPS multiplet or a **chiral supermultiplet**,

and a field that's annihilated by $G_{-1/2}^+$ or $G_{-1/2}^-$ is called chiral or anti-chiral respectively. In $\mathcal{N} = (2, 2)$ SCFTs, we can have (c, c) , (a, a) , (c, a) and (a, c) supermultiplets, the (c, a) supermultiplet is also known as twisted chiral supermultiplet.

Furthermore, we can sandwich $\{G_{3/2}^-, G_{-3/2}^+\} = 2L_0 - 3J_0 + \frac{2}{3}c$ between a chiral superconformal primary. This would give us the bound $h \leq c/6$. Proceeding to higher r , one can find that the bound given by sandwiching $\{G_r^-, G_{-r}^+\}$ is automatically satisfied given the chiral condition $h = q/2$ and $h \leq c/6$.

Consider the OPE of two chiral fields ϕ_1, ϕ_2 :

$$\phi_1(z)\phi_2(0) \sim \sum_i z^{h_3-h_2-h_1} \phi_3(0)$$

from R-conservation, one can find the R-charge of ϕ_3 is simply the sum of $R[\phi_1], R[\phi_2]$, thus $h_3 \geq h_2 + h_1$ from the BPS bound. Therefore, the OPE will be nonsingular, and the only ϕ_3 that survives when $z \rightarrow 0$ will also be chiral. Namely, chiral fields in $\mathcal{N} = 2$ SCFT form a closed ring under OPE, which is called the **chiral ring**. Now you know what means by a (a, c) or a (c, c) ring.

Superspace Formulation

The $\mathcal{N} = (2, 2)$ SCA in NS sector can be formulated using global $\mathcal{N} = 2$ superspace, in which a superfield encapsulates the whole global $\mathcal{N} = 2$ supermultiplet. The operator $G_{-1/2}^\pm$ and $\bar{G}_{-1/2}^\pm$ are realized via⁶⁸:

$$\mathcal{D}_\pm = \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} + \theta^\mp \frac{\partial}{\partial z}, \quad \bar{\mathcal{D}}_\pm = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\pm} + \bar{\theta}^\mp \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

It is not hard to check $\{\mathcal{D}_+, \mathcal{D}_-\} = 2\partial = 2L_{-1}$, which fits the commutation relations between $G_{-1/2}^+$ and $G_{-1/2}^-$. It's obvious that θ carries conformal weight $h = -1/2$, and since G^\pm carries R charge ± 1 , the superspace coordinates θ^\pm should carry holomorphic R charge ∓ 1 , while $\bar{\theta}^\pm$ carries anti-holomorphic R charge ∓ 1 .

A (c, c) supermultiplet corresponds to a superfield that satisfies $\mathcal{D}_+ \Phi = \bar{\mathcal{D}}_+ \Phi = 0$, while a (a, c) supermultiplet corresponds to superfield with $\mathcal{D}_- \Phi = \bar{\mathcal{D}}_+ \Phi = 0$. Somewhat confusingly, the (c, c) and (a, c) superfields are sometime called **chiral and twisted chiral superfield** respectively.

A (c, c) global supermultiplet will only contains 4 fields, corresponding to $|h, r\rangle, G_{-1/2}^-|h, r\rangle, \bar{G}_{-1/2}^-|h, r\rangle$ and $G_{-1/2}^-\bar{G}_{-1/2}^-|h, r\rangle$. On the other side, since the chiral superfield satisfies $\mathcal{D}_+ \Phi = \bar{\mathcal{D}}_+ \Phi = 0$, it's can only be function of $\theta^-, \bar{\theta}^-$ and the unique coordinate combination $y = z - \theta^+ \theta^-, \bar{y} = \bar{z} - \bar{\theta}^+ \bar{\theta}^-$ that is annihilated by both \mathcal{D}_+ and $\bar{\mathcal{D}}_+$. Therefore it can be expanded as:

$$\Phi(y, \bar{y}, \theta^\pm) = \phi(y, \bar{y}) + \theta^- \lambda(y, \bar{y}) + \bar{\theta}^- \psi(y, \bar{y}) + \theta^- \theta^- F(y, \bar{y})$$

⁶⁸Be careful that the Hermitian conjugate of θ^- is actually θ^+ rather than $\bar{\theta}^-$ in our convention, since the hermitian conjugate of $G_{-1/2}^+$ is $G_{1/2}^-$. Also, since the $z = i(x - t)$, the complex conjugate of ∂ is $-\partial$.

The four component fields correspond exactly to the four states in the (c, c) global supermultiplet. Using the superspace formulation, one can easily impose results like holomorphy and non-renormalization theorems to $\mathcal{N} = (2, 2)$ SCFTs.

Spectral Flow and The $U(1)$ Projection

Let's dip further into discussions about spectral flow. We've already know how does it changes the superconformal generators, and we want to know about how does it act on a state $|f\rangle$. Let the unitary representation of spectral flow be U_η , then the transformed state and operator will be $|f_\eta\rangle = U_\eta|f\rangle$ and $L'_0 = U_\eta L_0 U_\eta^{-1}$. Therefore, $L'_0|f_\eta\rangle = U_\eta L_0 U_\eta^{-1} U_\eta|f\rangle = h|f_\eta\rangle$. From this relation, one can easily find their eigenvalue on the transformed state $|f_\eta\rangle$:

$$h_\eta = h - \eta q + \frac{c}{6}\eta^2, \quad q_\eta = q - \frac{c}{3}\eta$$

We can actually construct the explicit form of U_η . To see this, let's first note that the $U(1)$ current $J(z)$ can be bosonized into:

$$J(z) = i\sqrt{\frac{c}{3}}\partial\phi$$

where ϕ is a free boson with $g = 1/4\pi$. From the current algebra, we can know that ϕ is a primary field with $h = 0$. Using the bosonized field, one can construct an explicit unitary representation of the spectral flow, which is:

$$U_\eta =: e^{-i\sqrt{\frac{c}{3}}\eta\phi} :$$

It's not hard to verify this does carry the correct R-charge. To see it carries the correct conformal weight, we need the fact that every field f with R-charge r can be written as $f = \hat{f} : e^{i\sqrt{\frac{3}{c}}r\phi} :$. Acting U_η on this operator simply adds $-\sqrt{\frac{c}{3}}\eta$ to the vertex operator momentum, and the correct h_η can be found using $L_0[: e^{ik\phi} :] = k^2/2$.

There's actually a subtlety connected with G^\pm . Since the spectral flow shifts the level of G_r^\pm , it will actually shifts the OPE between $G^\pm(z)$ and $f(0)$. To be precise, $G_r^\pm|f\rangle$ gives the $z^{-r-3/2}$ coefficient of $G^\pm(z)f(0)$ OPE. Since $G_{r\pm\eta}^\pm|f_\eta\rangle = G_r^\pm|f\rangle$. We call operators with shifted $G^\pm(z)f(0)$ OPE as operators in η -twisted sector. By checking the OPE of $G^\pm(z)$ with U_η , one can check that $f_\eta = U_\eta f$ is indeed in the correct twisted sector.

The spectral flow plays an important role in $\mathcal{N} = 2$ theories. In order to maintain the modular invariance, one should act GSO projection and include both R and NS sectors in the theory. The spectral flow with $\eta = 1/2$ connects these two sectors, and thus if we obtained a result in NS sector, we can easily transfer it to R sector using such spectral flow. As an example, if we act $\eta = 1/2$ spectral flow on a NS sector chiral primary, the resulting state will be annihilated by both G_0^+ and G_0^- , therefore it's a R sector BPS primary. Moreover, everything we've discussed correspond to worldsheet quantities in string theory. NS and R sectors in the worldsheet theory correspond to bosons and fermions in spacetime. Therefore, the spectral flow by $\eta = 1/2$ is actually the spacetime supercharge, giving us spacetime (but not worldsheet) supersymmetry.

We actually need more constraint on the theory to get a well-defined spacetime supersymmetry. If $U_{1/2}$ is indeed the spacetime supercharge, it should create a square root branch cut on the worldsheet thereby exchanging spacetime bosons and fermions. Namely, the OPE between $U_\eta f(z)$ and $f'(0)$ should only contain half-integer powers of z . It can be checked directly by calculating the OPE between $:e^{i\sqrt{\frac{3}{c}}(r-\frac{c}{3}\eta)\phi}(z):$ and $:e^{i\sqrt{\frac{3}{c}}r\phi}(0):$ that if the $U(1)_R$ charge is odd for every state in the theory, this requirement will be fulfilled automatically. Therefore, to create a spacetime SUSY theory, one can project the theory onto odd R-charge by orbifolding the theory with respect to the operator $e^{2\pi i J_0}$. This particular operation is called **the $U(1)$ projection**. It's a well-defined procedure for building spacetime SUSY from $\mathcal{N} = 2$ worldsheet SCFTs.

D.6.6 Boot Camp: Complex, Kähler and Calabi-Yau Manifolds

Our next example of 2D CFT will be the supersymmetric nonlinear sigma models on Calabi-Yau manifolds⁶⁹. Before we start, we need at least know something about the mathematical background, namely complex geometry and some algebraic geometry. The goal of this section is to introduce such backgrounds. Since we are not mathematicians, the discussions in this section won't be rigorous.

Complex Manifolds

Let's briefly review what's a complex manifold. Just like the construction of a differential manifold, a **complex manifold** is defined using an atlas containing all complex charts $\phi_i : X \rightarrow \mathbb{C}^{n/2}$, and each transition function $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \mathbb{C}^{n/2} \rightarrow \mathbb{C}^{n/2}$ is holomorphic. A invertible map between two complex manifolds $f : X \rightarrow Y$ is said to be a **biholomorphism** if $\phi_X \circ f \circ \phi_Y^{-1}$ and $\phi_Y \circ f^{-1} \circ \phi_X^{-1}$ are both holomorphic for each chart ϕ_X, ϕ_Y on X, Y , and two complex manifolds that's connected with a biholomorphism is considered equivalent.

For a complex manifold X with complex dimension $d = n/2$, we can talk about its tangent space $T_p X$ which is a $2d$ -dimensional vector space with basis $\{\partial_1, \dots, \partial_{2d}\}$. One can introduce the notion of **complexified tangent space** $T_p X^\mathbb{C}$ by allowing the coefficients of scalar multiplication on $T_p X$ to be complex. The complexified tangent space will have real dimension $4d$ and complex dimension $2d$. As a complex vector space, its basis could be taken as $\{\partial_{z_1}, \dots, \partial_{z_d}, \partial_{\bar{z}_1}, \dots, \partial_{\bar{z}_d}\}$. Obviously, one can pull apart the holomorphic and anti-holomorphic part of $T_p X^\mathbb{C}$, resulting in $T_p X^\mathbb{C} = T_p X^{(1,0)} \oplus T_p X^{(0,1)}$, each spanned by ∂ 's and $\bar{\partial}$'s. In exact analogy with the real case, one can define the **complexified cotangent space** $T_p^* X^\mathbb{C}$ spanned by $\{dz_1, \dots, dz_d, d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_d\}$. It's obvious to see $T_p^* X^\mathbb{C}$ can be decomposed into $T_p^* X^{(1,0)} \oplus T_p^* X^{(0,1)}$, each spanned by dz 's and $d\bar{z}$'s. By taking wedge product of q copies of $T_p^* X^\mathbb{C}$, one can also define **complex differential forms** in $\wedge^q T_p^* X^\mathbb{C}$. The space of differential forms with r holomorphic indices and s anti-holomorphic indices is called $\Omega^{r,s}(X) = \wedge^r T_p^* X^{(1,0)} \otimes \wedge^s T_p^* X^{(0,1)}$.

On a differential manifold, the q -th de Rham cohomology group is defined by the quotient

⁶⁹The following 2 sections are based on the lecture notes '*String Theory on Calabi-Yau Manifolds*' by Brian Greene, arXiv:hep-th/9702155.

space of closed forms over exact forms:

$$H^q(X, \mathbb{R}) = \frac{\{\omega \in \Omega^q | d\omega = 0\}}{\{\alpha \in \Omega^q | \exists \beta \in \Omega^{q-1}, \alpha = d\beta\}}$$

The exterior derivative $d = \frac{\partial}{\partial x^i} dx^i \wedge$ can also be decomposed into $d = \partial + \bar{\partial}$ on complex manifold, where the **Dolbeault operators** defined by $\partial = \frac{\partial}{\partial z^i} dz^i \wedge$. Using $\bar{\partial}$, we can refine the same idea on complex manifolds, resulting in **Dolbeault cohomology**:

$$H_{\bar{\partial}}^{r,s}(X, \mathbb{C}) = \frac{\omega \in \Omega^{r,s} | \bar{\partial}\omega = 0}{\{\alpha \in \Omega^{r,s} | \exists \beta \in \Omega^{r,s-1}, \alpha = \bar{\partial}\beta\}}$$

Needless to say, we can define $H_{\partial}^{r,s}(X, \mathbb{C})$ similarly. Those cohomology groups contains important topological information of our manifold X .

Kähler Manifolds

Now, we can try to add metric structures on our complex manifold. As an natural extension of the real case, the metric on a complex manifold is a symmetric 2-tensor $g : T_p X^{\mathbb{C}} \times T_p X^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$. As usual, its components are defined as $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, $g_{i\bar{j}} = g(\partial_i, \bar{\partial}_j)$. Since we want the complex metric is also a Riemannian metric, we further demand $g_{ij} = g_{ji}$, $g_{i\bar{j}} = g_{\bar{j}i}$ and $\bar{g}_{ij} = g_{i\bar{j}}$, $\bar{g}_{i\bar{j}} = g_{\bar{i}j}$.

A metric is called **Hermitian** if $g_{ij} = g_{i\bar{j}} = 0$. In this case, the metric tensor can be written as:

$$g = g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j + g_{i\bar{j}} d\bar{z}^i \otimes dz^j$$

A **Kähler metric** is a special Hermitian metric. Given a hermitian metric on X , one can define the following **Kähler form**:

$$J = i g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

and if the Kähler form is closed, i.e. $dJ = 0$, the metric g is then called a Kähler metric. A complex manifold equipped with a Kähler metric is called a **Kähler manifold**.

Riemannian geometry simplifies a lot on Kähler manifolds. The Kähler condition $dJ = 0$ implies:

$$\partial_{\bar{k}} g_{i\bar{j}} = \partial_i g_{k\bar{j}}, \quad \bar{\partial}_k g_{i\bar{j}} = \bar{\partial}_{\bar{j}} g_{i\bar{k}}$$

Therefore, $g_{i\bar{j}}$ can be written as:

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 K}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$$

This function K is called the **Kähler potential**, and we have $J = i \partial \bar{\partial} K$ in this notation. If you are familiar with supersymmetric theories, you will remind that in the superspace formalism, the θ^4 part of the Lagrangian is also called Kähler potential, and we will see in next section that they are basically the same thing on a nonlinear sigma model.

The Christoffel symbols $\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk})$ can be greatly simplifies too on Kahler manifolds. In fact, the only nonzero Christoffel symbol are those with only holomorphic or anti-holomorphic indices, i.e. Γ_{jk}^i , $\Gamma_{j\bar{k}}^{\bar{i}}$, and they have the following simple form:

$$\Gamma_{jk}^i = g^{i\bar{l}} \partial_j g_{k\bar{l}}, \quad \Gamma_{j\bar{k}}^{\bar{i}} = g^{\bar{i}\bar{l}} \bar{\partial}_k g_{j\bar{l}}$$

And the only nonzero component of the Riemann tensor is $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ up to permutations, and we have:

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = g_{i\bar{s}} \partial_k \Gamma_{\bar{j}\bar{l}}^{\bar{s}}, \quad R_{i\bar{j}} = R_{i\bar{k}\bar{j}}^{\bar{k}} = -\partial_j \Gamma_{i\bar{k}}^{\bar{k}}$$

With the knowledge of what's a Kähler manifold, we can start to look at some examples:

- The first example is \mathbb{C}^m with Euclidean metric tensor $g = \sum_i dz^i \otimes d\bar{z}_i$. The Kähler form is $J = \frac{i}{2} dz^i \wedge d\bar{z}^j$. It's obvious that $dJ = 0$ and therefore \mathbb{C}^m is a Kähler manifold.
- The second example of Kähler manifold is **Riemann surfaces**, namely 1-(complex) dimensional complex manifolds. Since every 2-form on such manifold is closed, any metric tensor on it is automatically Kähler.
- Perhaps the most useful example of Kähler manifold is **complex projective space** $\mathbb{C}P^n$. It is defined as $\mathbb{C}^{n+1}/\{0\}$ with (z_1, \dots, z_{n+1}) identified with $(\lambda z_1, \dots, \lambda z_{n+1})$ for any $\lambda \in \mathbb{C}$. The resulting manifold is n -complex dimensional. The coordinates $[z_1, \dots, z_{n+1}]$ are called **homogeneous coordinates**. On j -th patch, we can define the **local affine coordinates** to be $(\xi_{(j)}^1, \dots, \xi_{(j)}^n) = \left(\frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_j}\right)$.

We can define a metric called **Fubini-Study metric** on $\mathbb{C}P^n$ by constructing a Kähler potential patch by patch. On the j -th patch K_j is defined by $K_j = \log(\sum_i |z_i/z_j|^2) = \log(1 + \sum_i \xi_{(j)}^i \bar{\xi}_{(j)}^i)$. The resulting metric on the j -th patch is therefore:

$$g_{i\bar{k}} = \frac{(1 + |\xi_{(j)}|^2) \delta_{i\bar{k}} - \bar{\xi}_{(j)}^i \xi_{(j)}^k}{(1 + |\xi_{(j)}|^2)^2}$$

To make sure the metric is globally defined, we need to check the Kähler form is the same for different patches. This is true since $\partial\bar{\partial}(K_i - K_j) = 0$ can be verified easily. We now have a globally defined closed Kähler form on $\mathbb{C}P^n$, and it is therefore a Kähler manifold.

There are other useful choices coordinates on $\mathbb{C}P^n$. We can also choose representative of $[z_1, \dots, z_{n+1}]$ to satisfy $\sum_i |z_i|^2 = r$ (i.e. restricted them on S^{2n+1}), and identifying $(z_1, \dots, z_{n+1}) \sim e^{i\theta} (z_1, \dots, z_{n+1})$. In other words, $\mathbb{C}P^n$ can be realized as a quotient $S^{2n+1}/U(1)$.

If we generalize the definition of $\mathbb{C}P^n$ slightly by changing the identification to $(z_1, \dots, z_{n+1}) \sim (\lambda^{\omega_1} z_1, \dots, \lambda^{\omega_{n+1}} z_{n+1})$, we then get the **weighted complex projective space** $W\mathbb{C}P^n$. It's not hard to generalize the Kähler structure on $\mathbb{C}P^n$ to $W\mathbb{C}P^n$.

- The last examples we consider are compact hypersurfaces on larger complex manifolds M . We can define such hypersurfaces N by a set of *analytic* equations $N = \{p \sim z^i \in M, f^\alpha(z^i) = 0\}$. To ensure the resulting set is indeed a submanifold, f^α should satisfies that $\text{rank}(\partial f^\alpha / \partial z^i)$ is independent of p . In other words, the number of tangent directions on N should be the same everywhere. If $\text{rank}(\partial f^\alpha / \partial z^i) = m$, then the dimension of N is $n - m$. A submanifold constructed this way is called a **analytic submanifold** of M , and when f^α 's are polynomials it is called an **algebraic variety** in M .

Coordinates on N can be constructed by the following: let $w^\alpha(p) = f^\alpha(p)$, $w^{i+m}(p) = z^{i+m}(p)$ to be the new coordinate on M , and N is therefore defined by $w^1 = \dots = w^m(p) = 0$. We can take the coordinates on N to be $\zeta^i = z^{i+m}$ ($i = 1, \dots, n-m$). If M is a Kähler manifold, it is easy to verify that the metric restricted on N is also Kähler. That is, every complex submanifold of a Kähler manifold is Kähler.

We are particularly interested in compact analytic submanifolds. For the case that $M = \mathbb{C}^n$, any compact analytic submanifold of it has to be a point. And for the case of $M = \mathbb{C}P^n$, since $\mathbb{C}P^n$ itself is compact, all of its submanifolds are compact. **Chow's theorem** ensures that every submanifold in $\mathbb{C}P^n$ can be realized as algebraic variety defined by homogeneous polynomials.

Hodge Theory: Cohomology Groups and Harmonic Forms

With a metric equipped on a n -dimensional differential manifold, we are able to define the **Hodge star operator** $\star : \Omega^p \rightarrow \Omega^{n-p}$:

$$\star\omega = \frac{1}{(n-p)!p!} \epsilon_{i_1, \dots, i_n} \sqrt{|g|} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

And this allows us to define an inner product on Ω^p by:

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \int_X \omega \wedge \star\omega'$$

with an inner product, one can define adjoint for several operators. For $d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$, its adjoint $d^\dagger : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p-1}$ can be defined by $\langle \omega, d\omega' \rangle = \langle d^\dagger\omega, \omega' \rangle$. One can check that the following operator does works as the adjoint of d :

$$d^\dagger = (-1)^{np+n+1} \star d \star, \quad d^\dagger\omega = -\frac{1}{(p-1)!} \nabla_\mu \omega^\mu_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p-1}}$$

There's an important theorem called **the Hodge decomposition theorem**, which states that any p -form can be uniquely decomposed into $\omega = d\beta + d^\dagger\gamma + \omega'$, where ω' is a **harmonic p -form**, namely it satisfies $\Delta\omega' = 0$, where the **Laplacian** Δ is defined by $\Delta = dd^\dagger + d^\dagger d$. On a compact Riemannian manifold, it can be proved that the inner product we defined above is positive semi-definite. Therefore $\langle \omega, \Delta\omega' \rangle = \langle d\omega, d\omega' \rangle + \langle d^\dagger\omega, d^\dagger\omega' \rangle = 0$ implies $d\omega = d^\dagger\omega = 0$. Therefore on a compact Riemannian manifold, ω is a harmonic form iff it's closed and **coclosed**, i.e. $d\omega = d^\dagger\omega = 0$.

Harmonic forms have an important connection to cohomology groups. To see this, we can try to act Hodge decomposition on a closed form ω . Since $d\omega' = 0$, we have $dd^\dagger\gamma = 0$, which implies $\gamma = 0$. Therefore, the Hodge decomposition of ω is simply $\omega = d\beta + \omega'$. One can easily notice that $\omega' = \omega - d\beta$ lies in the cohomology class of $[\omega]$. Therefore, there's an unique harmonic p -form in each cohomology class of $H^p(X, \mathbb{R})$. Conversely, given a harmonic form ω , since it's closed, we can also find a cohomology class that contains it. Therefore, the canonical map between cohomology classes and harmonic forms is a bijection. What we just proved is the **Hodge's theorem**, which states that $H^p(X, \mathbb{R}) \sim \text{Harm}^p(X)$, where the latter is the linear space of Harmonic p -forms on X .

All the discussions above can be transferred to the complex case. In the complex case, we also have the complex Hodge decomposition $\omega = \bar{\partial}\alpha + \bar{\partial}^\dagger\beta + \omega'$, where ω' is a harmonic form with respect to $\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial}$. We also have the complex Hodge's theorem, which states that $H_{\bar{\partial}}^p(X, \mathbb{C}) \sim \text{Harm}_{\bar{\partial}}^p(M, \mathbb{C})$. This implies the number of independent (r, s) -harmonic forms is equal to the **Hodge number** $h_X^{r,s} = \dim_{\mathbb{C}}(H_{\bar{\partial}}^{r,s}(X, \mathbb{C}))$.

Since the Hodge star preserves the harmonic nature, the number of independent harmonic (r, s) -form is the same with that of $(d-r, d-s)$ forms. This ensures $h_X^{r,s} = h_X^{d-r, d-s}$. Moreover, on a Kähler manifold, the hodge number also satisfies $h_X^{r,s} = h_X^{s,r}$. Kählerity also ensures that $\Delta = 2\Delta_{\partial} = 2\Delta_{\bar{\partial}}$, therefore the harmonic forms with respect to each operator are the same. This fact leads to the following relation between d and $\bar{\partial}$ cohomology:

$$H_d^p(X) = \bigoplus_{r+s=p} H_{\bar{\partial}}^{r,s}(X)$$

Holonomy

With metric equipped on our manifold X , we can also define parallel transport of tangent vectors. When a vector v is parallel transported around a closed curve C , it won't remains the same in general. Since the parallel transport equation is linear, the transported matrix should be a linear transformation of the original vector, i.e. $v' = A_C v$. Linearity also ensures the matrix A_C is universal for all vectors. Clearly, given all possible closed paths which pass through a given point $p \in X$, the matrices A_C will form a group, called the **holonomy group** at p . Moreover, if the manifold is path connected, it is easy to prove the holonomy group at any two points are the same, therefore it's called the holonomy group of X .

Since we are using Levi-Civita connection, parallel transporting a vector preserves its length. This ensures the holonomy group on any n -(real) dimensional manifold to be a subgroup of $SO(n)$. If the manifold is Kähler, since its Levi-Civita symbol only has pure holomorphic or anti-holomorphic components, the holomorphic and anti-holomorphic sector of a tangent vector won't mix under parallel transportation. This ensures the holonomy group to lie in the "diagonal" subgroup of $SO(2d)$, which is $U(d)$. To see this explicitly, we can let $v'_z = A v_z$, and the holonomy matrix in the anti-holomorphic sector is simply A^* since $\Gamma_{jk}^i = (\Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^i)^*$. Transform into real coordinates, one can get $v'_i = \text{Re}(A_{ij})v_j - \text{Im}(A_{ij})v_{j+d}$, $v'_{i+d} = \text{Im}(A_{ij})v_j + \text{Re}(A_{ij})v_{j+d}$. From the condition that this real matrix lies in $SO(2d)$, one can easily prove $A \in U(n)$.

Moreover, if the metric on the Kähler metric is Ricci-flat, i.e. $R_{i\bar{j}} = 0$, the holonomy group will simplify to $SU(d)$. A way to see this is considering parallel transporting a vector along an infinitesimal parallelogram spanned by vectors $\epsilon, \bar{\delta}$ which are holomorphic and anti-holomorphic respectively. From the definition of Riemann tensor, the holonomy matrix of an holomorphic vector is simply $\delta_j^i + R_{jkl}^i \epsilon^k \bar{\delta}^l$. This $R_{jkl}^i \epsilon^k \bar{\delta}^l$ can be viewed as a Lie algebra element of $u(d)$. Its $u(1)$ part is nothing but its trace $R_{ikl}^i \epsilon^k \bar{\delta}^l = R_{kl}^i \epsilon^k \bar{\delta}^l$. Therefore if a metric is Ricci-flat, then the $u(1)$ generator of the holonomy group is 0, therefore the holonomy group will reduce to $SU(d)$. The converse is also true: a Kähler manifold with $SU(d)$ holonomy is Ricci-flat.

Calabi-Yau Manifolds

With all those prerequisites, we can finally define what's a Calabi-Yau manifold. A **Calabi-Yau manifold** is a compact Kähler manifold with $SU(d)$ holonomy. From our discussion above, an equivalent definition for Calabi-Yau manifold would be a compact and Ricci-flat Kähler manifold.

There's a famous and important theorem, the **Yau's theorem**. To state it, we should first introduce the concept of Chern classes. In a nutshell, the k -th **Chern class** is the $2k$ -form component of $\det(1+\mathcal{R})$, where \mathcal{R} is the curvature 2-form, defined by $\mathcal{R} = R^k_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$. From the definition, the 1st Chern class is just the 2-form $\text{tr}\mathcal{R}$. The Yau's theorem states that, for any Kähler manifold (X, g) with a vanishing 1st Chern class, then there exists a unique Ricci-flat Kähler metric g' on X such that the Kähler form J, J' given by g, g' are in the same cohomology class.

We now state some properties of Calabi-Yau manifolds. First, the Hodge numbers $h^{r,s}$ of Calabi-Yau manifold satisfies $h^{0,s} = h^{s,0}$ for $1 < s < d$ and $h^{0,d} = h^{d,0} = 1$. The unique holomorphic d -form in $H_{\bar{\partial}}^{d,0}(X, \mathbb{C})$ is nowhere vanishing, and is usually referred as Ω . Since X is connected, a function f satisfying $\bar{\partial}f = 0$ implies f is a constant on X , therefore $h^{0,0} = 0$. There is a unique 2-dimensional Calabi-Yau manifold called **K3 surface**, defined as an algebraic variety in $\mathbb{C}P^3$ given by a degree-4 polynomial P . For the $K3$ surface, its only nontrivial Hodge number is given by $h^{1,1} = 20$. These Hodge numbers are usually presented in the so-called Hodge diamond:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & h^{0,0} & & & 1 & \\
 & h^{1,0} & & h^{0,1} & & 0 & 0 \\
 h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} & = & 1 & 20 & 1 \\
 & h^{2,1} & & h^{1,2} & & 0 & 0 \\
 & & h^{2,2} & & & & 1
 \end{array}$$

Since the superstring theory is only consistent in 10 dimensions and we live in 4 extended dimensions, superstrings should be compactified on some 6-dimension internal space. The compactified worldsheet theory would be a nonlinear sigma model on the compactification space. Since we don't want to spoil the $\text{Diff} \times \text{Weyl}$ gauge symmetry of string theory, we need the beta function of this NLSM to vanish in order to avoid dimensional transmutation and thus preserve the conformal symmetry. It can be calculated that the beta function is proportional to the Ricci tensor of the target space, so we need a Ricci-flat space to compactify the string. Moreover, supersymmetry requires that the target space should be Kähler. That's precisely why we need Calabi-Yau manifolds in string theory. Therefore, the most important Calabi-Yau manifolds in string theory are the 3-dimensional ones. An important example of 3-dimensional Calabi-Yau manifold is the **quintic 3-fold**, defined as an algebraic variety in $\mathbb{C}P^4$ given by a degree 5 polynomial. Its nontrivial Hodge numbers are given by $h^{1,1} = 1$ and $h^{2,1} = 101$.

Moduli Spaces

In the discussions above, we have only stated that the quintic 3-fold is the vanishing locus of a degree 5 polynomial in $\mathbb{C}P^4$, but we've never specified the details of this polynomial.

Actually, the Calabi-Yau manifold we constructed is a part of a continuous family of CY manifolds. Given a CY manifold, we can deform its metric g to a new metric $g + \delta g$. If the metric remains Ricci-flat and Kähler, then we arrived at another CY manifold. The space of all CY manifolds that can be achieved by deformation is called the **moduli space** of such CY manifold. There are two basic types of perturbations δg : δg_{ij} and $\delta g_{i\bar{j}}$.

$$\delta g = \delta g_{ij} dz^i dz^j + \delta g_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^j + \text{c.c.}$$

It can be proved that the moduli space \mathcal{M} can be decomposed as $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{Kähler}} \times \mathcal{M}_{\text{Complex}}$, the two parts correspond to deformations $\delta g_{i\bar{j}}$ and δg_{ij} respectively. If you are familiar with supersymmetry, you may find those ideas somehow familiar. We will see later that the two types of deformation actually correspond to deformation of NLSM Lagrangian by chiral and twisted chiral superfields. It turns out that if the perturbed metric remains Ricci-flat, $\delta g_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ must be harmonic and hence is uniquely associated to $H_{\bar{\partial}}^{1,1}(X, \mathbb{C})$. For δg_{ij} on a 3-dimensional CY manifold, one can show that $\Omega_{ijk} g^{k\bar{k}} \delta g_{\bar{k}\bar{l}} dz^i \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^l$ is an element of $H_{\bar{\partial}}^{2,1}(X, \mathbb{C})$, and two metric perturbations giving same cohomology class can be related by a coordinate redefinition, therefore the Hodge number $h^{1,1}, h^{2,1}$ gives the dimension of moduli space $\mathcal{M}_{\text{Kähler}}$ and $\mathcal{M}_{\text{Complex}}$ for a 3-dimensional CY manifold.

The two types of deformations have different interpretations. $\delta g_{i\bar{j}}$ is simply modifying the metric, therefore deforming the Kähler structure. For δg_{ij} , the new metric is Ricci-flat but not Hermitian. However, Yau's theorem guarantees that there's a unique Ricci-flat Kähler metric. The two metrics are connected with a change of variable, but this change of variable is not holomorphic or anti-holomorphic since it changes the index structure of g , hence the new metric is Hermitian with respect to a new complex structure, i.e. a new set of complex coordinate that can't be related by holomorphic transformations. Therefore, δg_{ij} correspond to deformations of the complex structure. That's precisely why we label the two part of moduli space as $\mathcal{M}_{\text{Kähler}}$ and $\mathcal{M}_{\text{Complex}}$.

Both the complex structure and Kähler structure moduli are complex Kähler manifolds on their own. The Kähler potential on $\mathcal{M}_{\text{Complex}}$ turns out to be $-\log(i \int_M \Omega \wedge \bar{\Omega})$, and the Kähler potential on $\mathcal{M}_{\text{Kähler}}$ is $\int_M J \wedge J \wedge J$, where M is the CY manifold corresponding to this particular point on moduli and J its Kähler form. Moreover, it turns out that those moduli space are special Kähler manifolds, on which exists a holomorphic function $\mathcal{F}(w)$ called **prepotential**, and the Kähler potential is determined by $K = i(\bar{w}^j \partial_j \mathcal{F} - w^j \bar{\partial}_j \bar{\mathcal{F}})$.

D.6.7 Nonlinear Sigma Models on Calabi-Yau Manifolds

Our next example of 2D CFT is the **$\mathcal{N} = 2$ nonlinear sigma model (NLSM)**. The degrees of freedom in this model are coordinates $X^i, X^{\bar{j}}$ on a manifold M called the **target space** and its superpartners ψ, λ . In the superspace formalism, the action of the NLSM on a Kähler manifold is simply:

$$S = \frac{1}{8\pi\alpha'} \int d^2z \int d^4\theta K(X^i, X^{\bar{j}})$$

Where K is the Kähler potential on the target space, and $X^i, X^{\bar{j}}$ here are chiral and anti-chiral superfields whose lowest components are the coordinates. In term of components,

the action can be written as:

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \left[g_{i\bar{j}}(X) \partial X^i \bar{\partial} X^{\bar{j}} + \frac{1}{4} g_{i\bar{j}} \left(\psi^i \bar{D}\psi^{\bar{j}} + \psi^{\bar{j}} \bar{D}\psi^i + \lambda^i D\lambda^{\bar{j}} + \lambda^{\bar{j}} D\lambda^i \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} R_{i\bar{j}k\bar{l}} \lambda^i \lambda^{\bar{j}} \psi^k \psi^{\bar{l}} + \frac{1}{4} g_{i\bar{j}} (F^i - \Gamma_{jk}^i \lambda^k \psi^l) (F^{\bar{j}} - \Gamma_{\bar{m}\bar{n}}^{\bar{j}} \lambda^{\bar{m}} \psi^{\bar{n}}) \right]$$

where $D\psi^i = \partial\psi^i + \Gamma_{jk}^i \partial X^j \psi^k$, $\bar{D}\psi^i = \bar{\partial}\psi^i + \Gamma_{jk}^i \bar{\partial} X^j \psi^k$. Covariant derivatives in the anti-holomorphic sector can be defined by analogy. The metric is defined by:

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 K}{\partial X^i \partial X^{\bar{j}}}$$

In the expression above, we've written down the terms with F^i explicitly. Since there's no superpotential term in the NLSM, EOM of F^i just eliminates the last term.

For a non-Kähler manifold, one can also define the $\mathcal{N} = 2$ nonlinear sigma model on the manifold by the action above, with $g_{i\bar{j}}$ its metric tensor. However, it won't be $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetric since the action can't be written in superspace.

Now we only constructed a supersymmetric theory but not yet a superconformal theory. To let the theory conformal invariant, its beta function should be zero. If you calculate the beta function to first order, it will turn out to be proportional to the Ricci tensor of M . Therefore, to make the theory conformal invariant, the target space should be Ricci-flat. Therefore, to construct a $\mathcal{N} = (2, 2)$ SCFT, the target space should be a Calabi-Yau manifold. We will find out what's the central charge for this theory later on, the final answer will be $c = 3d$, where d is the complex dimension of M .

The (c, c) and (a, c) rings of $\mathcal{N} = 2$ NLSM is closely related with the cohomology groups of the target space. To see this, we can notice that a chiral primary $|\Phi\rangle$ in holomorphic sector satisfies $G_{-1/2}^+ |\Phi\rangle = G_{1/2}^- |\Phi\rangle = 0$. Therefore it will give a R sector ground state satisfying $G_0^+ |\Phi_\eta\rangle = G_0^- |\Phi_\eta\rangle = 0$ after acting $\eta = 1/2$ spectral flow. Similarly, an anti-chiral primary will give a similar R sector ground state after acting $\eta = -1/2$ spectral flow. Therefore, we can first try to find all the R sector ground states in the theory, and then obtain the (c, c) , (a, c) ring using the $\eta = \pm 1/2$ spectral flow.

To find the R sector ground states, one can only focus on the zero modes of the fields, i.e. the components that have no spacial dependence, since all the momentum modes will have positive energy. The theory is therefore reduced to a supersymmetric quantum mechanics. In the resulting theory, the conjugate momentum of zero mode $\psi^i, \bar{\psi}^{\bar{j}}$ is $g_{i\bar{j}}\psi^{\bar{j}}$ and $g_{\bar{j}i}\psi^i$. Therefore, those zero modes have the following anti-commutation relations:

$$\{\psi^i, \psi^j\} = \{\psi^{\bar{i}}, \psi^{\bar{j}}\} = 0; \quad \{\psi^i, \psi^{\bar{j}}\} = g^{i\bar{j}}$$

Therefore, we can treat ψ^i as creation operators and $\psi^{\bar{j}}$ as annihilation operators. Same discussions apply also for λ . The zero mode Hilbert space can be constructed using these creation and annihilation operators. Using those operators, one can construct two different sectors of states. The first sector is built upon a vacuum state that's annihilated by ψ^i and $\lambda^{\bar{i}}$: $\psi^i|0\rangle = \lambda^{\bar{i}}|0\rangle = 0$, while the second sector is built upon $\psi^i|0'\rangle = \lambda^{\bar{i}}|0'\rangle = 0$. Let's first

focus on the first sector. Since all the operators we can use is the zero mode of X, ψ, λ , an arbitrary state in this sector can be written as:

$$|\Phi\rangle = \sum_{r,s} b_{i_1 \dots i_r \bar{j}_1 \dots \bar{j}_s}(X) \lambda^{i_1} \dots \lambda^{i_r} \psi^{\bar{j}_1} \dots \psi^{\bar{j}_s} |0\rangle$$

Where $b_{i_1 \dots i_r \bar{j}_1 \dots \bar{j}_s}(X)$ is completely antisymmetric under interchange of any two holomorphic or antiholomorphic indices. Therefore, a state with fixed (r, s) in this zero mode Hilbert space corresponds to a (r, s) -form b on M .

Now, we would like to apply the constraint $G_0^+|\Phi\rangle = G_0^-|\Phi\rangle = 0$ on the zero mode Hilbert space to find R sector ground states. In our model, the operator G_0^\pm, \bar{G}_0^\pm is given by:

$$G_0^+ = g_{i\bar{j}} \psi^i \partial X^{\bar{j}}, \quad G_0^- = g_{i\bar{j}} \psi^{\bar{j}} \partial X^i, \quad \bar{G}_0^+ = g_{i\bar{j}} \lambda^i \bar{\partial} X^{\bar{j}}, \quad \bar{G}_0^- = g_{i\bar{j}} \lambda^{\bar{j}} \bar{\partial} X^i$$

In the zero mode subspace, the operator ∂X^i is nothing but the 'momentum operator' $g^{i\bar{j}} \frac{\partial}{\partial X^{\bar{j}}} \equiv g^{i\bar{j}} P_{\bar{j}}$. Then $G_0^+ = \psi^i P_i, G_0^- = \psi^{\bar{i}} P_{\bar{i}}$. It's not hard to verify that acting G_0^+ on $|\Phi\rangle$ is equivalent to acting the Doubeault operator $\bar{\partial}$ to the (r, s) -form b , and acting G_0^- is equivalent to acting $\bar{\partial}^\dagger$. Therefore, requiring $G_0^+|\Phi\rangle = G_0^-|\Phi\rangle = 0$ is equivalent to requiring b to be a harmonic (r, s) -form. From Hodge's theorem, harmonic (r, s) -forms have a one-to-one correspondent with cohomology classes in $H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M, \mathbb{C})$. We've finally arrived at the result that R-sector ground states are in one-to-one correspondence with cohomology classes of M .

You may wonder that we've only constrained the state in holomorphic sector, do we need to further constrain it in the anti-holomorphic sector? Actually, similar analysis in anti-holomorphic sector shows that b should be a harmonic (r, s) -form with respect to ∂ instead of $\bar{\partial}$. Since our manifold is Kähler, the Laplacian Δ_∂ and $\Delta_{\bar{\partial}}$ are the same, thus constraining b in the holomorphic sector automatically lets it satisfy the constraint in the anti-holomorphic sector.

Same analysis can be carried on in the $|0'\rangle$ sector. An arbitrary state in $|0'\rangle$ sector can be written as:

$$|\Phi\rangle = \sum_{rs} b_{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_s}^{i_1 \dots i_r}(X) \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r} \psi^{\bar{j}_1} \dots \psi^{\bar{j}_s} |0\rangle$$

It can be viewed as a $\wedge^r T$ -valued $(0, s)$ -form b , where T is a short-hand notation for $TM^{(1,0)}$. Still, acting G_0^\pm on this state is equivalent with acting $\bar{\partial}$ or $\bar{\partial}^\dagger$ on b , and R sector ground states correspond to harmonic forms in $H_{\bar{\partial}}^{(0,s)}(M, \wedge^r T)$. To make things symmetric, the cohomology group $H_{\bar{\partial}}^{(r,s)}(M, \mathbb{C})$ can also be viewed as $H_{\bar{\partial}}^{(0,s)}(M, \wedge^r T^*)$. On a d -dimensional Calabi-Yau manifold, one can relate $H_{\bar{\partial}}^{(0,s)}(M, \wedge^r T)$ with $H_{\bar{\partial}}^{(d-r,s)}(M, \mathbb{C})$ by contracting $b_{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_s}^{i_1 \dots i_r}$ with the holomorphic $(d, 0)$ -form $\Omega_{i_1 \dots i_d}$. Therefore, the dimension of $H_{\bar{\partial}}^{(0,s)}(M, \wedge^r T)$ is the Hodge number $h^{d-r,s}$.

After finding all the R sector ground states, we can act spectral flow to get the (a, c) and (c, c) rings. In the following discussions, we will be interested in those fields whose holomorphic and anti-holomorphic R-charges have the same absolute value. Since a (r, s) -form in $|0\rangle$ sector have R-charge $(-r, s)$, and a (r, s) -form in $|0'\rangle$ sector have R-charge (r, s) . Since the spectral flow shifts the R-value by $\eta c/3$, therefore a (c, c) primary obtained this way will have R-charge $(-r - \frac{c}{6}, s - \frac{c}{6})$ or $(r - \frac{c}{6}, s - \frac{c}{6})$, and a (a, c) primary will have $(-r + \frac{c}{6}, s - \frac{c}{6})$ or $(r + \frac{c}{6}, s - \frac{c}{6})$. Therefore in a general theory, the (c, c) primaries with $q = \bar{q}$ will given by

$H_{\bar{\partial}}^{(0,s)}(M, \wedge^r T)$ with $r = s$ and (a, c) primaries with $q = -\bar{q}$ will give by $H_{\bar{\partial}}^{(0,s)}(M, \wedge^r T^*)$ with $r = s$. As a remark, we should point out that although we can obtain the full BPS spectrum in the $\mathcal{N} = (2, 2)$ NLSM, we still know little about the non-BPS spectrum. In this sense, the $\mathcal{N} = (2, 2)$ NLSM is far behind being solved yet.

D.6.8 Exactly Marginal Deformations and CFT Moduli Spaces

Exactly Marginal Deformations

If a CFT has a primary field \mathcal{O} with weight $h = \bar{h} = 1$ (from the language of Wilsonian EFT, these operators are called **marginal**), then at least classically the action $\lambda \int d^2 z \mathcal{O}(z, \bar{z})$ is also conformally invariant. Therefore, we can deform the theory by add this term to the action. From the perspective of path integral, this can be achieved by inserting $\exp(-\lambda \int d^2 z \mathcal{O}(z, \bar{z}))$ into correlation functions.

However, not every marginal operator could be used to deform the theory while preserving the conformal invariance. We need to further ensure that the operator \mathcal{O} remains marginal after the deformation. Consider the two-point function $\langle \mathcal{O}(z) \mathcal{O}(0) \rangle$ in the deformed theory:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(z, \bar{z}) \mathcal{O}(0) \rangle_{\text{Deformed}} &= \left\langle \exp \left(-\lambda \int d^2 w \mathcal{O}(w, \bar{w}) \right) \mathcal{O}(z, \bar{z}) \mathcal{O}(0) \right\rangle \\ &= \frac{1}{z \bar{z}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \left\langle \left[\prod_{i=1}^n \int d^2 z_i \mathcal{O}(z_i, \bar{z}_i) \right] \mathcal{O}(z, \bar{z}) \mathcal{O}(0) \right\rangle \end{aligned}$$

Therefore, to ensure the two-point function is not perturbed under deformation, we require all the perturbation terms to be zero. Namely, the following n-point function should vanish for any n :

$$\left\langle \left[\prod_{i=1}^n \int d^2 z_i \mathcal{O}(z_i, \bar{z}_i) \right] \mathcal{O}(z, \bar{z}) \mathcal{O}(0) \right\rangle = 0$$

An operator satisfying this condition is called **exactly marginal**. Such operator could generate a one-parameter family of CFTs. If we add several marginal operators \mathcal{O}_a in the theory, all n-point functions of the form $\langle \left[\prod_{i=1}^n \int d^2 z_i \mathcal{O}_{a_i}(z_i, \bar{z}_i) \right] \mathcal{O}_b(z, \bar{z}) \mathcal{O}_c(0) \rangle$ between those operators should vanish. All possible deformations generated by such operators would form a moduli space known as the **conformal manifold**.

An important feature of exactly marginal deformations is that it doesn't change the central charge of the theory. To see this, one can relate the central charge with the OPE $T(z)T(0)$. After the deformation, the correlation function $\langle T(z)T(0) \rangle \sim c/2z^4 + \dots$ receives corrections of the form $\int_{z_1, \dots, z_n} \langle T(z)T(0) \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle$. But we can use the conformal Ward identity to get rid of the $T(z)$ and $T(0)$, remaining correlation functions of the form $\int_{z_1, \dots, z_n} \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle$ and its derivatives. This correlation function is guaranteed to be zero by the exactly marginal condition given above. Therefore, the central charge doesn't change under such deformations.

Exactly Marginal Operators in $\mathcal{N} = (2, 2)$ SCFT

While it's generally hard to verify whether a marginal operator is exactly marginal, but in certain special theories such as SCFTs, this can be done thanks to holomorphy and non-renormalization theorems provided by SUSY, therefore the conformal manifold of such theories could be found. To be more precise, we can consider marginal operators in a $\mathcal{N} = (2, 2)$ SCFT. We are going to prove that all marginal operators are exactly marginal in such theories.

Firstly, let's notice that if a deformation preserves supersymmetry, it should be able to be written in superspace, and it can be written as either a Kähler potential or a superpotential. And if it can be written as a Kähler potential $\int d^4\theta\Phi$, the field Φ as well as its lowest component should have conformal dimension $(0, 0)$ and the only operator possible is the identity. Therefore, we can't obtain a deformation from the Kähler potential, all the marginal deformations came from superpotentials. A marginal deformation from superpotential takes the form:

$$\mathcal{O}(z) = \lambda \int d\theta^- d\bar{\theta}^- \Phi^{+,+}(z, \theta) + \text{c.c.} = \lambda G_{-1/2}^- \bar{G}_{-1/2}^- \phi^{+,+}(z) + \bar{\lambda} G_{-1/2}^+ \bar{G}_{-1/2}^+ \phi^{-,-}(z)$$

where $\Phi^{+,+}$ is a chiral superfield and $\phi^{+,+}$ is a (c, c) primary. In order to have $(h, \bar{h}) = (1, 1)$ and neutral R for \mathcal{O} , the superfield $\Phi^{+,+}$ should have $(h, \bar{h}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ and R-charge $(1, 1)$.

From the perspective of preserving conformal invariance, we can see that after the deformation, if the term $\lambda \int d^2z \mathcal{O}$ in our Lagrangian is not renormalized, then the operator \mathcal{O} will be exactly marginal. Therefore we can try to use non-renormalization theorems for superpotential to prove that such operators are exactly marginal. First, we can promote λ to a spurion, from this we can see that all the term containing λ in the Wilsonian effective action should be holomorphic in the combination $\lambda \Phi^{+,+}$. All those combinations will take the form $\int d^2\theta^- (\lambda \Phi^{+,+})^n$. Moreover, from the non-singular OPE between $\Phi^{+,+}(z) \Phi^{+,+}(0)$, none of the terms beyond $n = 1$ have the correct conformal weight to appear in the effective action, and the weak-coupling limit ensures that the coefficient of $\lambda \Phi^{+,+}$ is simply 1. We've now proved that the \mathcal{O} term is not renormalized and therefore an exactly marginal operator.

The same discussion works too for (a, c) superfields, which gives deformation from a twisted superpotential as follows:

$$\tilde{\mathcal{O}}(z) = \lambda \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- \Phi^{-,+}(z, \theta) + \text{c.c.}$$

Follows the same reasoning, one can also prove that $\tilde{\mathcal{O}}$ is also an exactly marginal operator. We've now proved that all the marginal operators should come from chiral or twisted chiral superfields, and they are exactly marginal.

These exactly marginal operators have a geometrical interpretation (at classical level). From the discussions before, the (a, c) field can be written as $\phi^{-,+} = b_{i\bar{j}} \lambda^i \psi^{\bar{j}}$, where $b_{i\bar{j}}$ is the harmonic form in $H_{\partial}^{1,1}(M, \mathbb{C})$. It will give an exactly marginal operator $b_{i\bar{j}} \partial X^i \bar{\partial} X^{\bar{j}}$ to the lowest order. From the discussions about the moduli of Calabi-Yau manifolds, this corresponds to deforming the Kähler structure of the Calabi-Yau target space. Similarly, the (c, c) field gives an exactly marginal operator $b_{i\bar{j}} \lambda^i \psi^{\bar{j}}$, corresponding to deforming the complex

structure of target space. In this picture, deforming the CFT by adding exactly marginal operators is equivalent to deforming the Calabi-Yau target space.

Knowing the correspondence between deformations of the Calabi-Yau target space and exactly marginal deformations of the NLSM, we can finally obtain the central charge for those NLSMs. We can take the size of our CY manifold to be arbitrarily large, in this limit the metric approaches the flat metric, and the NLSM is reduced to the free theory with $2d$ bosons and $2d$ fermions. Since such a free theory has central charge $3d$ while exactly marginal deformations doesn't change the central charge, we've thus obtained that all NLSM on Calabi-Yau manifolds have $c = 3d$.

However, this picture receives quantum correction (the result about central charges is still valid quantum mechanically, though) and therefore isn't the final result. Eventually, the Kähler moduli is altered by such corrections. The full story, invoking things like **mirror symmetry**, is too long and complicated to be contained in this notes. Another thing you may notice is that we haven't constructed the conformal manifold (even at classical level) explicitly. This is again a long story called **special geometry**, which we also won't discuss in this notes.

D.6.9 RG Flows and Conformal Perturbation Theory

Our last example of CFTs are the fixed points under RG flow. To introduce such CFTs, let's investigate the RG flow more carefully. Assuming there's no integrating out of degrees of freedom, let's consider a scale transformation $\delta_S z = \epsilon z$ on a flat plane with $g_{ab} = \delta_{ab}$. This transformation is then equivalent to fix the coordinate and take a Weyl transformation $\delta_S g_{ab} = 2\epsilon g_{ab}$. Under such transformation, the net change in the action will be (since we are considering theories on flat space, there's no Weyl anomaly.) :

$$\delta S = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int d^2 z \, T^a{}_a(z, \bar{z}) = \epsilon \sum_i \int d^2 z \, \beta^i(g) \mathcal{O}_i(z, \bar{z})$$

where we've expanded the local operator $T^a{}_a$ using the complete operator basis $\{\mathcal{O}_i\}$ and defined the beta function $\beta^i(g)$ at the second equal sign. Actually, if the original action S_0 only contains renormalizable operators, we can only focus on relevant operators in this expansion since the dimension of $T^a{}_a$ is 2, and the function $\beta^i(g)$ should have positive dimension to get the weak-coupling limit. That's being said, under RG transformation, the coefficient of operator \mathcal{O}_i in Lagrangian 'flows', and the flow is governed by the beta function.

Since RG flow describes how theories vary under scale transformation, the RG fixed points should be scale invariant. Moreover, it is proved that any scale invariant unitary theory must be conformal invariant in 2 dimensions and vice versa. For dimensions greater than 2, scale invariance implying conformal invariance is still a conjecture although most physicists do believe that it should be true. Therefore, if we take any QFT and let it evolve under RG flow, we should eventually get a CFT in the IR.

Actually, RG flow is an important tool for exploring the relations between CFTs as well as constructing potentially new CFTs. To be precise, we can take a CFT and perturb it by a relevant operator. Under RG flow, the perturbed theory will flow to another CFT. The

Zamolodchikov c-theorem ensures that the resulting CFT will have less central charge compared with the unperturbed one.

An important tool to study this kind of situation is **conformal perturbation theory**. Consider the following situation: We've deformed a CFT with action S_0 with a small non-conformal term $\lambda^i \int d^2z \mathcal{O}_i$.⁷⁰ We are then interested in how the theory will flow under the renormalization group. To do so, we want to know about $T_{z\bar{z}}$ in the perturbed theory, and way to investigate this quantity is by exploiting the conservation law:

$$\bar{\partial}T_{zz} + \partial T_{\bar{z}z} = 0$$

Therefore, in order to compute $T_{z\bar{z}}$, we can try to compute $\bar{\partial}T_{zz}$ in the deformed theory by consider its correlators:

$$\langle \bar{\partial}T_{zz}(\dots) \rangle_{\text{Deformed}} = -\bar{\partial} \left\langle T_{zz}(z, \bar{z}) \lambda^i \int d^2w \mathcal{O}_i(w, \bar{w})(\dots) \right\rangle_{\text{Original}}$$

Using the following operator product expansion

$$\begin{aligned} \bar{\partial}T_{zz}(z, \bar{z})\mathcal{O}_i(w, \bar{w}) &= \bar{\partial} \left[\frac{h_i}{(z-w)^2} \mathcal{O}_i(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w} \partial \mathcal{O}_i(w, \bar{w}) \right] \\ &= -2\pi h_i \partial \delta^2(z-w) \mathcal{O}_i(w, \bar{w}) + 2\pi \delta^2(z-w) \partial \mathcal{O}_i(w, \bar{w}) \end{aligned}$$

One can then obtain that in the deformed theory:

$$\bar{\partial}T_{zz} = 2\pi \lambda_i (h_i - 1) \partial \mathcal{O}_i(z, \bar{z})$$

Therefore, using the conservation law, one can find $T_{z\bar{z}} = 2\pi \lambda_i (h_i - 1) \mathcal{O}_i(z, \bar{z})$. Referring back to the RG flow, we can then find the beta function:

$$\beta^i = 2(h_i - 1)\lambda^i$$

The procedure we used above is the so-called conformal perturbation theory.

D.7 Topological Defect Lines and Generalized Symmetries

I have a separated hand-written notes about topological defects and generalized symmetries (based on 1802.04445). It's expected that they will be added to the appendices of this notes, and the expected contents are listed below:

⁷⁰For convenience we focus on the case that the perturbations are primary fields, but the results are easily generalized.

Defining Properties of Topological Defect Lines

Invertible Symmetries

Topological Defects in Rational CFTs

Constraints on RG Flow

Appendix E

Integrable Quantum Field Theories

I have a separated hand-written notes about integrable theories. It's expected that they will be added to the appendices of this notes, and the expected contents are listed below:

Integrability and Yang-Baxter Equation

Properties of S-Matrices

Bound States and Bootstrap Equations

Example: Sine-Gordon Model

Example: Critical Ising in Magnetic Field

Example: Flows Between Minimal Models

Thermal Bethe Ansatz

Bibliography

- [1] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*
- [2] M. D. Schwarz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*
- [3] S. Weinberg, *Quantum Theory of Fields, Volume I: Foundations*
- [4] M. E. Peskin & D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*
- [5] 刘川, 《量子场论》
- [6] F. Dyson, *Advanced Quantum Mechanics, Second Editon*
- [7] J. D. Bjorken, *Relativistic Quantum Fields*
- [8] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics, Second Editon*
- [9] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*
- [10] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*
- [11] 王正行, 《简明量子场论》
- [12] 李灵峰, 《量子场论》
- [13] S. Weinberg, *Quantum Theory of Fields, Volume II: Modern Applications*
- [14] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*
- [15] T. Lancaster, S. J. Blundell, *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*
- [16] A. A. Slavnov. *Theoretical and Mathematical Physics*, **10**(2), 99–104.
- [17] Fradkin, E.; Tyutin, Phys. Rev. **D2** (12), 2841–2857
- [18] J.C.Collins, D. E. Soper, Nucl. Phys. **B194**, 445-492 (1982)
- [19] M, Dine, *Supersymmetry and String Theory: Beyond the Standard Model*
- [20] 梁灿彬, 周彬, 《微分几何与广义相对论》
- [21] F. Gelis, *A Stroll Through Quantum Fields*
- [22] J.C.Collins, *Foundations of Perturbative QCD*
- [23] A. Das, *Finite Temperature Field Theory*
- [24] C. P. Burgess, *Introduction to Effective Field Theory*
- [25] J. Polchinski, *Effective Field Theory and the Fermi Surface*, arXiv:hep-th/9210046
- [26] A. Bilal, *Introduction to Supersymmetry*, arXiv:hep-th/0101055
- [27] R. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*
- [28] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*
- [29] K. S. Lam, *Topics in Contemporary Mathematical Physics*

- [30] M. Shifman, *Advanced Topics in Quantum Field Theory: A Lecture Course*
- [31] G. H. Derrick, *J. Math. Phys.* **5**, 1252 (1964).
- [32] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B79**, 276 (1974).
- [33] C. Bernard, N. Christ, A. Guth, E. Weinberg, *Phys. Rev.* **D16** (1977) 2967.
- [34] G. 't Hooft, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 3432
- [35] S. Vandoren, P. van Nieuwenhuizen, *Lectures on instantons*. arXiv:hep-th/0802.1862
- [36] G. 't Hooft, *Monopoles, Instantons and Confinement*, arXiv:hep-th/0010225
- [37] S. Coleman, J. Wess, B. Zumino, *Phys. Rev.* **177**, 2239 (1969), S. Coleman, C. Callan, J. Wess, B. Zumino, *Phys. Rev.* **177**, 2247 (1969)
- [38] A. Hook, *TASI Lectures on the Strong CP Problem and Axions*, arXiv:hep-ph/1807.08749
- [39] D. Tong, *Lecture Notes on Gauge Theory*, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gaugetheory.html>
- [40] S. Weinberg, *Quantum Theory of Fields, Volume III: Supersymmetry*
- [41] D. Tong, *Lecture Notes on Supersymmetry*, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/susy.html>
- [42] M. Bianchi, S. Kovacs, G. Rossi, *Instantons and Supersymmetry*, arXiv:0703142
- [43] M. Rummel, *The Affleck-Dine-Seiberg Superpotential*, from workshop seminar "Vacuum Transitions"
- [44] N. Arkani-Hamed, H. Murayama, *Holomorphy, Rescaling Anomalies and Exact Beta Functions in Supersymmetric Gauge Theories*, arXiv:9707133
- [45] I. Affleck, M. Dine, N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B256** (1985) 557-599
- [46] J. Terning, *TASI-2002 Lectures: Non-perturbative Supersymmetry*, arXiv:hep-th/0306119
- [47] Nathan Seiberg, Edward Witten, *Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, arXiv:hep-th/9407087
- [48] Adel Bilal, *Duality in $N=2$ SUSY $SU(2)$ Yang-Mills Theory: A pedagogical introduction to the work of Seiberg and Witten*, arXiv:9601007
- [49] Yuji Tachikawa, $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric dynamics for pedestrians, arXiv:1312.2684
- [50] Steven Weinberg, *Quantum Theory of Fields, Vol.3 Supersymmetry*
- [51] Edward Witten, David Olive, *Supersymmetry algebras that include topological charges*, *Phys. Lett.* **78B** (1978) 97
- [52] C. Herbert Clemens, *A Scrapbook of Complex Curve Theory*
- [53] Edward Witten, *Phases of $\mathcal{N} = 2$ Theories in Two Dimensions*, arXiv:hep-th/9301042
- [54] Kentaro Hori, Cumrun Vafa, *Mirror Symmetry*, arXiv:hep-th/0002222
- [55] Yuji Tachikawa, *Lectures on 4d $N=1$ dynamics and related topics*, arXiv:hep-th/1812.08946
- [56] Keitaro Hori, *Trieste lectures on mirror symmetry*, *ICTP Lect.Notes Ser.* **13** (2003) 109-202
- [57] Ken-Ichiro Kobayashi, Tsuneo Uematsu, *Quantum Conserved Charges and S-matrices in $N=2$ Supersymmetric Sine-Gordon Theory*, arXiv:hep-th/9112043.
- [58] Philippe Di Francesco, Pierre Mathieu, David Senechal, *Conformal Field Theory*
- [59] Dimitris Manolopoulos, Konstantinos Sfetsos, *Conformal Field Theory Lecture Notes*,

- [60] David Tong, *Lecture Notes on String Theory*, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string.html>
- [61] David Simmons-Duffin, *TASI Lectures on the Conformal Bootstrap*, arXiv:1602.07982
- [62] Joseph Polchinski, *String Theory Vol. I Fundamentals*.
- [63] 陈斌, 《量子场论专题》, Unpublished.
- [64] Xi Yin, *Aspects of Two-Dimensional Conformal Field Theories*, TASI 2017
- [65] Ashoke Sen, *Some Aspects of Conformal Field Theories on the Plane and Higher Genus Riemann Surfaces* <https://www.ias.ac.in/public/Volumes/pram/035/03/0205-0286.pdf>
- [66] D. Das, S. Datta, S. Pal, *Modular crossings, OPE coefficients and black holes*, arXiv:hep-th/1712.01842
- [67] J. Maldacena, D. Simmons-Duffin, A. Zhiboedov, *Looking for a bulk point*, arXiv:hep-th/1509.03612
- [68] Brian Greene, *String Theory on Calabi-Yau Manifolds*, arXiv:hep-th/9702155.
- [69] Paul Ginsparg, *Applied Conformal Field Theory*, arXiv:hep-th/9108028
- [70] Xi Yin, *Elements of String Theory*, Unpublished.
- [71] A. Amoretti, N. Magnoli, *On Conformal Perturbation Theory*, arXiv:hep-th/1705.03512
- [72] Joseph Polchinski, *String Theory Vol. II Superstring Theory and Beyond*.
- [73] L. Dixon, D. Friedan, E. Martinec, S. Shenker, *The conformal field theory of orbifolds*, Nucl. Phys. **B282** (1987) 13

除去这些参考文献之外, 还参考了北京大学物理学院的曹庆宏教授、马滟青教授和陈斌教授在《粒子物理》、《量子场论》、《量子规范场论》和《量子场论专题》这四门课程上所讲授的内容, 超对称部分关于 SQCD 的很多内容来自于笔者在 UC Berkeley 与 Hitoshi Murayama 教授的讨论; 关于 2D CFT 的一些内容来自于笔者在 Harvard 与 Xi Yin 教授的讨论。