矩阵构造方法

Fibonacci 数列：F(0)=1 , F(1)=1 , F(n)=F(n-1)+F(n-2)

我们以前快速求 Fibonacci 数列第 n 项的方法是 构造常系数矩阵

（一） Fibonacci 数列 f[n]=f[n-1]+f[n-2],f[1]=f[2]=1 的第 n 项快速求法（不考虑高精度）

解法：

考虑 1×2 的矩阵【f[n-2],f[n-1]】。根据 Fibonacci 数列的递推关系，我们可以通过乘以一个 2×2 的矩阵 A，得到矩阵：【f[n-1],f[n]】。

即：【f[n-2],f[n-1]】*A = 【f[n-1],f[n]】=【f[n-1],f[n-1]+f[n-2]】

很容易构造出这个 2×2 矩阵 A，即：

0 1

1 1

所以，有【f[1],f[2]】×A=【f[2],f[3]】

又因为矩阵乘法满足结合律，故有：

【f[1],f[2]】×A ^(n-1) =【f[n],f[n+1]】

这个矩阵的第一个元素 f[n]即为所求。

（二） 数列 f[n]=f[n-1]+f[n-2]+1,f[1]=f[2]=1 的第 n 项的快速求法（不考虑高精度）

解法：

仿照前例，考虑 1×3 的矩阵【f[n-2],f[n-1],1】，希望求得某 3×3 的矩阵 A，使得此 1×3 的矩阵乘以 A 得到矩阵：【f[n-1],f[n],1】

即：【f[n-2],f[n-1],1】* A ＝【f[n-1],f[n],1】=【f[n-1],f[n-1]+f[n-2]+1,1】

容易构造出这个 3×3 的矩阵 A，即：

0 1 0

1 1 0

0 1 1

故：【f[1],f[2],1】* A^(n-1) = 【f[n],f[n+1],1】

（三）数列 f[n]=f[n-1]+f[n-2]+n+1,f[1]=f[2]=1 的第 n 项的快速求法（不考虑高精度）.

解法：

仿照前例，考虑 1×4 的矩阵【f[n-2],f[n-1],n,1】，希望求得某 4×4 的矩阵 A，使得此 1×4 的矩阵乘以 A 得到矩阵：【f[n-1],f[n],n+1,1】

即：【f[n-2],f[n-1],n,1】* A = 【f[n-1],f[n],n+1,1】＝【f[n-1],f[n-1]+f[n-2]+n+1,n+1,1】

容易构造出这个 4×4 的矩阵 A，即：

0 1 0 0

1 1 0 0

0 1 1 0

0 1 1 1

故：【f[1],f[2],3,1】* A^(n-1) = 【f[n],f[n+1],n+2,1】

（四） 数列 f[n]=f[n-1]+f[n-2],f[1]=f[2]=1 的前 n 项和 s[n]=f[1]+f[2]+……+f[n]的快速求法（不考虑高精度）.

解法：

仿照之前的思路，考虑 1×3 的矩阵【f[n-2],f[n-1],s[n-2]】，我们希望通过乘以一个 3×3 的矩阵

A，得到 1×3 的矩阵：【f[n-1],f[n],s[n-1]】
即：【f[n-2],f[n-1],s[n-2]】 * A = 【f[n-1],f[n],s[n-1]】=【f[n-1],f[n-1]+f[n-2],s[n-2]+f[n-1]】
容易得到这个 3×3 的矩阵 A 是：

0 1 0
1 1 1
0 0 1

这种方法的矩阵规模是(r+1)*(r+1)
f(1)=f(2)=s(1)=1 ，所以，有
【f(1),f(2),s(1)】* A = 【f(2),f(3),s(2)】
故：【f(1),f(2),s(1)】* A^(n-1) = 【f(n),f(n+1),s(n)】

（五） 数列 f[n]=f[n-1]+f[n-2]+n+1,f[1]=f[2]=1 的前 n 项和 s[n]=f[1]+f[2]+……+f[n]的快速求法（不考虑高精度）.
解法：
考虑 1×5 的矩阵【f[n-2],f[n-1],s[n-2],n,1】,
我们需要找到一个 5×5 的矩阵 A，使得它乘以 A 得到如下 1×5 的矩阵【f[n-1],f[n],s[n-1],n+1,1】
即：【f[n-2],f[n-1],s[n-2],n,1】* A =【f[n-1],f[n],s[n-1],n+1,1】
=【f[n-1], f[n-1]+f[n-2]+n+1,s[n-2]+f[n-1],n+1,1】
容易构造出 A 为：

0 1 0 0 0
1 1 1 0 0
0 0 1 0 0
0 1 0 1 0
0 1 0 1 1

故：【f(1),f(2),s(1),3,1】* A^(n-1) = 【f(n),f(n+1),s(n),n+2,1】

一般地，如果有 f[n]=p*f[n-1]+q*f[n-2]+r*n+s
可以构造矩阵 A 为：

0 q 0 0 0
1 p 1 0 0
0 0 1 0 0
0 r 0 1 0
0 s 0 1 1

更一般的，对于 f[n]=Sigma(a[n-i]*f[n-i])+Poly(n)，其中 0<i<=某常数 c, Poly (n)表示 n 的多项式，我们依然可以构造类似的矩阵 A 来解决问题。
设 Degree(Poly(n))=d, 并规定 Poly(n)=0 时，d=-1，此时对应于常系数线性齐次递推关系。则本方法求前 n 项和的复杂度为：
((c+1)+(d+1))3*logns

例如：A(0) = 1 , A(1) = 1 , A(N) = X * A(N - 1) + Y * A(N - 2) (N >= 2)；给定三个值 N，X，Y 求 S(N):S(N) = A(0)2 +A(1)2+……+A(n)2。
解：
考虑 1*4 的矩阵【s[n-2],a[n-1]^2,a[n-2]^2,a[n-1]*a[n-2]】

我们需要找到一个 4×4 的矩阵 A，使得它乘以 A 得到 1×4 的矩阵

【s[n-1],a[n]^2,a[n-1]^2,a[n]*a[n-1]】

即：【s[n-2],a[n-1]^2,a[n-2]^2,a[n-1]*a[n-2]】* A = 【s[n-1],a[n]^2,a[n-1]^2,a[n]*a[n-1]】

= 【s[n-2]+a[n-1]^2 , x^2 * a[n-1]^2 + y^2 * a[n-2]^2 + 2*x*y*a[n-1]*a[n-2] ,

a[n-1]^2 , x*a[n-1]^2 + y*a[n-2]a[n-1]】

可以构造矩阵 A 为：

1　0　0　0

1　x^2　1　x

0　y^2　0　0

0　2xy　0　y

故：【S[0],a[1]^2,a[0]^2,a[1]*a[0]】 * A^(n-1) = 【s[n-1],a[n]^2,a[n-1]^2,a[n]*a[n-1]】

所以：【S[0],a[1]^2,a[0]^2,a[1]*a[0]】 * A^(n) = 【s[n],a[n+1]^2,a[n]^2,a[n+1]*a[n]】

若 A = (B * C ) 则 $A^T = ( B * C )^T = C^T * B^T$

故

$$\begin{pmatrix} S_n \\ a_{n+1}^2 \\ a_n^2 \\ a_{n+1}a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & y^2 & 2xy \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & y \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} S_0 \\ a_1^2 \\ a_0^2 \\ a_1a_0 \end{pmatrix}$$