Graphical Enumeration

南京师范大学附属中学 顾昱洲
Sevenkplus

吐槽 & 回答

- Q：你是谁？我听都没听说过！
- A：我是南京师范大学附属中学顾昱洲，常用ID Sevenkplus。
- Q：你这么弱，讲的东西肯定很弱吧。
- A：对。本课件内容较弱，请各位神牛、教主（特指）选择性听讲或睡觉。
- Q：标题为啥是Graphical而不是Graph？
- A：恩，这是个有水平的吐槽。但是你肯定没听说过一本和标题同名的书。

Problem

- 求n个点的_______的个数。
- (某些题中不限点数，会特别说明)

Warmup

- 有标号无向图
- 所有点度都是偶数的有标号无向图
- 有标号有根树
- 有标号无根树
- 无标号二叉树
- 标号为k的点度为v_k的无根树
- 无标号毛毛虫

Warmup

- 有标号无向图 $2^{C_n^2}$
- 所有点度都是偶数的有标号无向图 $2^{C_{n-1}^2}$
- 有标号有根树 n^{n-1}
- 有标号无根树 n^{n-2}
- 无标号二叉树 $\dfrac{C_{2n}^n}{n+1}$
- 标号为k的点度为v_k的无根树 $\dfrac{(n-2)!}{\prod (v_k - 1)!}$
- 无标号毛毛虫 $2^{n-4} + 2^{\left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor}$

经典题

- 有标号DAG
- 要求$O(n^2)$算法

经典题 cont’d

- 考虑入度为0的点的个数
- F(n, m)表示n个点，恰好m个点入度为0的有标号DAG个数

$$F(n,m)=\sum_{k=1}^{n-m}(2^m-1)^k 2^{m(n-m-k)} C_n^m F(n-m,k)$$

- O(n^3)

经典题 cont’d

- 考虑枚举一个子集S
- F(n, S)为S中的顶点度为0的DAG个数
- G(n, S)为仅S中的点度为0的DAG个数
- F的递推式是显然的

$$F(n,S)=2^{|S|(n-|S|)}F(n-|S|,\varnothing)$$

- F与G的关系

$$F(n,S)=\sum_{T\supseteq S}G(n,T)$$

经典题 cont'd

- 反演(容斥原理) $G(n,S)=\sum_{T\supseteq S}(-1)^{|T|-|S|}F(n,T)$
- 结合以上式子

$$G(n,S)=\sum_{T\supseteq S}(-1)^{|T|-|S|}2^{|T|(n-|T|)}F(n-|T|,\varnothing)$$

- 设|S|=m，化简该式

$$G(n,S)=\sum_{m\le k\le n}(-1)^{k-m}C_{n-m}^{k-m}2^{k(n-k)}F(n-k,\varnothing)$$

经典题 cont’d

- 对|S|相同的式子求和
- 然后化简F (详见下一页)

- 有公式恐惧症者建议先休息一会儿

- (为了节省页面，先写复杂度)
- $O(n^2)$

$$
\begin{aligned}
F(n,\varnothing) &= \sum_{1\le m\le n} \sum_{|S|=m} G(n,S) \\
&= \sum_{1\le m\le n} \sum_{|S|=m} \sum_{m\le k\le n} (-1)^{k-m} C_{n-m}^{k-m} 2^{k(n-k)} F(n-k,\varnothing) \\
&= \sum_{1\le m\le n} C_n^m \sum_{m\le k\le n} (-1)^{k-m} C_{n-m}^{k-m} 2^{k(n-k)} F(n-k,\varnothing) \\
&= \sum_{1\le k\le n} 2^{k(n-k)} F(n-k,\varnothing) \sum_{1\le m\le k} (-1)^{k-m} C_n^m C_{n-m}^{k-m} \\
&= \sum_{1\le k\le n} 2^{k(n-k)} F(n-k,\varnothing) \sum_{1\le m\le k} (-1)^{k-m} C_n^k C_k^m \\
&= \sum_{1\le k\le n} (-1)^{k+1} 2^{k(n-k)} C_n^k F(n-k,\varnothing)
\end{aligned}
$$

SPOJ KPGRAPHS

- 有标号连通图
- 有标号欧拉图
- 有标号二分图
- 要求n=1~1000的所有答案
- 模10^9+7
- 代码长度限制7000B

SPOJ KPGRAPHS cont'd

- 已知n个点的满足P的图的个数S(P, n)
- 求连通的n个点的满足P的图的个数F(P, n)
- 令G(P, n) = S(P, n) - F(P, n)

$$G(P,n)=\sum_{i=1}^{n-1}C_{n-1}^{i-1}F(P,i)S(P,n-i)$$

- 时间复杂度 O(n²)

SPOJ KPGRAPHS cont’d

- 连通图　P=True
- 欧拉图　P=所有点的度都是偶数

- 二分图？？？

SPOJ KPGRAPHS cont’d

- 算两次 (Double Counting)
- 考虑对于每个二分图，点黑白染色，使得同色点之间无边的方案数的和S
- 一方面，考虑黑色的点的数目，有

$$S = \sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^{i(n-i)}$$

SPOJ KPGRAPHS cont’d

- 另一方面，令F(n, k)为n个点k个连通块的二分图的个数

  又有$S = \sum_{i=1}^{n} F(n,i)2^{i}$

- 若F(n, k) (k>1)求出，那么F(n, 1)也求出

SPOJ KPGRAPHS cont’d

- 对于k>1，有

$$F(n,k)=\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} F(i,1) F(n-i,k-1)$$

- 时间复杂度O(n^3) TLE
- 如何解决？不属于这里讨论的内容 :)

SGU 481

- n个点n条边的有标号连通图
- 不取模
- n<=5000

SGU 481 cont'd

- 所求图=基环+树
- 考虑去掉这个基环
- 令F(n, k)=n个结点k个连通块的有标号有根森林的个数
- 那么答案 $= \sum_{i=3}^{n} F(n,i)(i-1)!/2$
- 如何求F(n, k)？

SGU 481 cont’d

- 算两次
- 考虑每个森林，所有边的排列数的和S
- 显然 $S = F(n,k)(n-k)!$

SGU 481 cont’d

- 另一方面，考虑每次加一条边
- 假设当前还剩j个连通块
- 那么有n(j-1)种选择
- (选择n个点中一个点A作为新加的边的起点，再选择一个它不在的连通块(有根树)，将这棵树的根作为A的一个儿子)

$$S = n^{n-k} P_{n-1}^{k-1}$$

- 不考虑高精度，时间复杂度O(n)

SPOJ PT07D

- ~~有标号无根树~~ Solved
- ~~有标号有根树~~ Solved
- 无标号有根树
- 无标号无根树
- n<=1000 很多询问 每个询问模质数p(p>n)

SPOJ PT07D cont'd

- 先求有根树，设答案为a_n
- 考虑一个暴力过程，枚举根的每个大小的子树的个数，设大小为k的子树有c_k个。

$$a_n = \sum_{c_1+2c_2+3c_3+\ldots=n-1} \prod_{k>0} C_{a_k+c_k-1}^{c_k}$$

- 考虑母函数 $A(z) = \sum_{k>0} a_k z^k$

SPOJ PT07D cont'd

- 根据暴力的递推式化简A(z)，得到

$$A(z) = z\exp\left(\sum_{k>0}\frac{A(z^k)}{k}\right)$$

- 然后再根据这个式子进行一些推导，得到

$$a_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i a_i \sum_{0<j\le\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor} a_{n+1-ij}$$

- 这是个O(n² log n)的DP。通过部分和优化可以优化到O(n²)。

SPOJ PT07D cont’d

- 无根树
- 设答案为b_n
- ……
- 这里需要用到下一题中用到的技巧，因此我们先讲下一题。

范浩强 Alkane

- 无根无标号每个点度不超过4的树(烷烃)
- 不取模
- $n<=300$

范浩强 Alkane cont’d

- 先计算1~n的烷基(有根)个数
- 采用DP+最小表示(当然你也可以称之为容斥原理或暴力乱搞或其他什么东西)可以很容易地计算。
- 不考虑高精度，时间复杂度$O(n^2)$

范浩强 Alkane cont’d

- 计算烷烃个数的难点：重复计算
- 唯一性

- 树的质心
- (关于这里的翻译，英文中centroid是质心，而重心是centre of gravity，因此我认为应该翻译成质心)
- 以该点为根，最大的子树最小

范浩强 Alkane cont’d

- 也可以说，以其为根，每个子树大小都不超过n/2
- 于是可以继续使用最小表示(…)求。
- 特殊情况：双质心　[n/2-1]-A-B-[n/2-1]
- 容斥掉

- 不考虑高精度，时间复杂度O(n^2)

SPOJ PT07D cont'd

- 回来讲这题。
- 同样使用树的质心进行计算。
- 由于我们计算的是所有有根树，所以我们在根非质心时删除掉那些有根树。
- 如果某个点X不是质心，那么必然存在一棵子树大小超过n/2。（定义，反之亦然）

$$b_n = a_n - \sum_{0<i\le\lfloor n/2\rfloor} a_i a_{n-i}$$

SPOJ PT07D cont'd

- 当然，n为偶数的时候会有双质心。容斥掉就好了。
- 求b在求出a之后是线性的。
- 总时间复杂度$O(n^2)$

SPOJ PT07D cont’d

- Some Notes
  - 如果你看不懂母函数，建议去看《具体数学》(别看中文版)。
  - 之前由于篇幅所限没法写推导过程，建议大家自己去推一下，还是很有意思的。
  - 如果实在推不出来，去看华东师大一附中赵爽写的《树的计数》。

经典题

- 无标号最长链为n的二叉树
- 取模
- 要求线性算法

- (这题点数无限制)

经典题 cont’d

- 点的个数可能特别多
- 考虑求最长链过程
  - Ans=max(Ans, Height[Left[i]]+Height[Right[i]]+1)
- 有用量只有Height
- F[i]为深度为i，最长链为n的二叉树的个数；
- G[i]为深度为i，最长链小于n的二叉树个数。

经典题 cont’d

- 深度为i的二叉树至少有一棵子树深度为i-1
- 可以写出DP方程（好长的，一行写不下）
- 维护F和G的部分和
- O(n)

解决图计数问题的一般思路

- oeis.org
- 唯一性
- 算两次
- 一定的数学基础

习题

- 证明n个点的无标号毛毛虫的个数为

$$2^{n-4}+2^{\left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor}$$

- 思考为什么无标号图计数一般比有标号图计数难做，并对于n非常小的情况给出一种通用的解法(不要枚举所有图)
- 阅读有标号平面图计数的论文，体会其精妙之处。(“这东西也能做？！”)

Thanks For Listening

- Questions are welcome.