毕业论文报告 万润哲

收敛率推导 结论 证明纲要

算法与实验 ^{算法推导} _{数值实验}

再生核空间中的函数型岭回归及其收敛率

万润哲

数学与应用数学 数学科学学院 复旦大学

December 24, 2016

- 1 函数型数据
- ② 函数型线性回归
 - 问题与模型
 - 方法综述
 - 再生核 Hilbert 空间及相关算子
 - 再生核空间中的函数型岭回归
- ③ 收敛率推导
 - 结论
 - 证明纲要
- 4 算法与实验
 - 算法推导
 - 数值实验

毕业论文报告

万润哲

函数型数据

函数型线 性回归 ^{问题与模型} 方法综述 再生核 Hilbert 空

相关算子 再生核空间中的函型岭间归

<mark>收敛率推导</mark> ^{结论} ^{证明纲要}

算法与实验 ^{算法推导}

1 函数型数据

- ② 函数型线性回归
 - 问题与模型
 - 方法综述
 - 再生核 Hilbert 空间及相关算子
 - ▶ 再生核空间中的函数型岭回归
- ③ 收敛率推导
 - 结论
 - 证明纲要
- 4 算法与实验
 - 算法推导
 - 数值实验

毕业论文报告

万润哲

函数型数据

门生四 y口 问题与模型 方法综述 再生核 Hilbert 空间及相关算子 再生核空间中的函数

收敛率推导 ^{结论}

算法与实验

● 来源: 信息化时代(空间统计, 医学图像)

● 特点:函数视为数据单位

● 思想:重复性+正则性

函数型数据

● 来源: 信息化时代(空间统计, 医学图像)

● 特点:函数视为数据单位

● 思想:重复性+正则性

毕业论文报告

万润哲

函数型数据

性回归 问题与模型 方法综述 再生核 Hilbert 空间 相关算子

再生核 Hilbert 空间 相关算子 再生核空间中的函数 型岭回归

收敛率推导

算法与实验 _{算法推导} ● 来源: 信息化时代(空间统计, 医学图像)

● 特点:函数视为数据单位

● 思想:重复性+正则性

毕业论文报告

万润哲

函数型数据

性回归 问题与模型 方法综述 再生核 Hilbert 空

再生核 Hilbert 空间》 相关算子 再生核空间中的函数 型岭回归

收敛率推导 ^{结论}

算法与实验

● 来源: 信息化时代(空间统计, 医学图像)

● 特点:函数视为数据单位

● 思想:重复性+正则性

Examples

毕业论文报告

万润哲

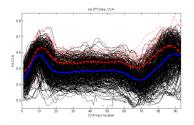
函数型数据

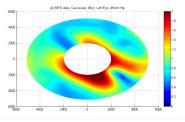
函数型线 性回归 问题与模型 方法综述 再生转 相关集变空间中的函数 型的短短

收敛率推导 ^{结论}

算法与实验

算法推导 数值实验





毕业论文报告

万润哲

函数型数据 函数型线

函数型线 性回归 问题与模型 方法综述

再生核 Hilbert 空间相关算子

收敛率推导 ^{结论}

算法与实验 ^{算法推导}

- 1 函数型数据
- ② 函数型线性回归
 - 问题与模型
 - 方法综述
 - 再生核 Hilbert 空间及相关算子
 - 再生核空间中的函数型岭回归
- ③ 收敛率推导
 - 结论
 - 证明纲要
- 4 算法与实验
 - 算法推長
 - 数值实验

毕业论文报告

万润哲

函数型数据

函数型线 性回归

问题与模型 方法综述

再生核 Hilbert 空间 相关算子 再生核空间中的函

收敛率推导 结论 证明纲要

算法与实验

- 1 函数型数据
- ② 函数型线性回归
 - 问题与模型
 - 方法综述
 - 再生核 Hilbert 空间及相关算子
 - 再生核空间中的函数型岭回归
- ③ 收敛率推导
 - 结论
 - 证明纲要
- 4 算法与实验
 - 算法推导
 - 数值实验

问题与模型

$$\mathbf{Y}_{i} = \alpha_{0} + \int_{T} \mathbf{X}_{i}(t)\mathbf{b}(t)dt + \epsilon_{i}$$
 (1)

- 预测函数: $F_0(X(t)) = \alpha_0 + \int_{\tau} X_i(t)b(t)dt$
- 溢出风险: $\epsilon(\hat{F_0}) := E[F_0(X(t)) \hat{F_0}(X(t))]^2$
- 经验溢出风险: $\hat{\epsilon}(\hat{F}_0) := 1/n * \sum_{i=1}^n (y_i \hat{F}_0(x_i))^2$

毕业论文报告

函数型数据 函数型线 性回归 ^{问题与模型}

方法综述 再生核 Hilbert 空间及相关算子 再生核空间中的函数

收敛率推导 ^{结论} ^{证明纲要}

算法与实验 算法推导 数值实验

$$\mathbf{Y}_{i} = \alpha_{0} + \int_{T} \mathbf{X}_{i}(t)\mathbf{b}(t)dt + \epsilon_{i}$$
 (1)

- 预测函数: $F_0(X(t)) = \alpha_0 + \int_T X_i(t)b(t)dt$
- 溢出风险: $\epsilon(\hat{F_0}) := E[F_0(X(t)) \hat{F_0}(X(t))]^2$
- 经验溢出风险: $\hat{\epsilon}(\hat{F_0}) := 1/n * \sum_{i=1}^n (y_i \hat{F_0}(x_i))^2$

毕业论文报告

函数型数据 函数型线 性回归 ^{问题与模型}

万法綜还 再生核 Hilbert 空间及 相关算子 再生核空间中的函数 型岭回归

收敛率推导 结论 证明纲要

算法与实验 算法推导

数值实验

$$\mathbf{Y}_{i} = \alpha_{0} + \int_{T} \mathbf{X}_{i}(t)\mathbf{b}(t)dt + \epsilon_{i}$$
 (1)

- 预测函数: $F_0(X(t)) = \alpha_0 + \int_T X_i(t)b(t)dt$
- 溢出风险: $\epsilon(\hat{F_0}) := E[F_0(X(t)) \hat{F_0}(X(t))]^2$
- 经验溢出风险: $\hat{\epsilon}(\hat{F_0}) := 1/n * \sum_{i=1}^{n} (y_i \hat{F_0}(x_i))^2$

毕业论文报告

函数型数据

性回归

方法综述 再生核 Hilbert 3

再生核 Hilbert 空间系 相关算子 再生核空间中的函数 现岭向归

收敛率推导 结论
证明纲要

算法与实验 算法推导

数值实验

$$\mathbf{Y}_{i} = \alpha_{0} + \int_{T} \mathbf{X}_{i}(t)\mathbf{b}(t)dt + \epsilon_{i}$$
 (1)

- 预测函数: $F_0(X(t)) = \alpha_0 + \int_T X_i(t)b(t)dt$
- 溢出风险: $\epsilon(\hat{F_0}) := E[F_0(X(t)) \hat{F_0}(X(t))]^2$
- 经验溢出风险: $\hat{\epsilon}(\hat{F_0}) := 1/n * \sum_{i=1}^n (y_i \hat{F_0}(x_i))^2$

毕业论文报告

万润哲

函数型数据

函数型线 性回归 向題与模型 方法综基 再生核 Hilbert 空间》 相关算子

收敛率推导 ^{结论}

算法与实验 ^{算法推导}

- 1 函数型数据
- ② 函数型线性回归
 - 问题与模型
 - 方法综述
 - 再生核 Hilbert 空间及相关算子
 - 再生核空间中的函数型岭回归
- ③ 收敛率推导
 - 结论
 - 证明纲要
- 4 算法与实验
 - 算法推导
 - 数值实验

毕业论文报告

函数型数据

函数型线 性回归 问题与模型 方法综述

再生核 Hilbert 空间 相关算子 再生核空间中的函数 型岭回归

算法与实验 算法推导

数值实验 ● 正则性中的信息:x_i(t), b(t)

● 基函数的选取:样条、主成分、小波、傅里叶、核函数等

● 惩罚项的添加方法: 截断、粗糙惩罚项和稀疏惩罚项

FPCR, PSR,FKRR 等

毕业论文报告

函数型数据

函数型线 性回归 ^{问题与模型} 方法综述

再生核 Hilbert 空间相关算子 再生核空间中的函数型岭回归

ク敛率推导 結论 证明纲要

算法与实验 算法推导

数值实验

- 正则性中的信息:x_i(t), b(t)
- 基函数的选取:样条、主成分、小波、傅里叶、核函数等
- 惩罚项的添加方法: 截断、粗糙惩罚项和稀疏惩罚项
- FPCR, PSR,FKRR 等

毕业论文报告

函数型数据

函数型线 性回归 问题与模型 方法综述 再生核 Hilbert 空

方法综述 再生核 Hilbert 空间 相关算子 再生核空间中的函数 刑於向归

炇敛率推导 ^{结论} ^{证明纲要}

算法与实验 ^{算法推导} 数值实验

- 正则性中的信息:x_i(t), b(t)
- 基函数的选取:样条、主成分、小波、傅里叶、核函数等
- 惩罚项的添加方法: 截断、粗糙惩罚项和稀疏惩罚项
- FPCR, PSR,FKRR 等

毕业论文报告

函数型数据

函数型线性回归 向题与模型 方法综述

再生核 Hilbert 空间 相关算子 再生核空间中的函数 型岭回归

收敛率推导 ^{结论}

算法与实验 算法推导

数值实验

- 正则性中的信息:x_i(t), b(t)
- 基函数的选取:样条、主成分、小波、傅里叶、核函数等
- 惩罚项的添加方法: 截断、粗糙惩罚项和稀疏惩罚项
- FPCR, PSR,FKRR 等

毕业论文报告

万润苕

函数型数据

函数型线 性回归 ^{问题与模型}

再生核 Hilbert 空间及相关算子

收敛率推导 ^{结论}

算法与实验

- 1 函数型数据
- ② 函数型线性回归
 - 问题与模型
 - 方法综述
 - 再生核 Hilbert 空间及相关算子
 - 再生核空间中的函数型岭回归
- ③ 收敛率推导
 - 结论
 - 证明纲要
- 4 算法与实验
 - 算法推导
 - 数值实验

One Definition

毕业论文报告

万润苕

函数型数据
函数型线
性回归

再生核 Hilbert 空间及相关算子

再生核空间中的函数 型岭回归

算法与实验 ^{算法推导}

Evaluation Functional

称 H 上的泛函 f 为 x 点处的取值泛函, 如果对于所有 $g \in H, f(g) = g(x)$, 记为 f_x

RKHS

称 \mathcal{X} 为 RKHS,如果 $\forall x, f_x$ 在 H 中连续。

Reproducing Kernel

 $\forall f_{x}, \exists g_{x} \in H, s.t. \forall g \in H, f_{x}(g) = \langle g_{x}, g \rangle_{H}$

从而 $g_x(y) = g_y(x)$. 我们诱导出了 X 上的一个对称二元函数 $K(x,y) := g_x(y)$, 称为 H 对应的再生核

One Definition

毕业论文报台

万润哲

函数型数据 函数型线 性回归 ^{问题与模型} 方法综述 再生核 Hilbert 空间及 相类算子

相关算子 再生核空间中的函数 型岭回归 收敛率推导

证明纲要 算法与实验 算法推导

Evaluation Functional

称 H 上的泛函 f 为 x 点处的取值泛函, 如果对于所有 $g \in H, f(g) = g(x)$, 记为 f_x

RKHS

称 \mathcal{X} 为 RKHS,如果 $\forall x, f_x$ 在 H 中连续。

Reproducing Kernel

$$\forall f_{x}, \exists g_{x} \in H, s.t. \forall g \in H, f_{x}(g) = \langle g_{x}, g \rangle_{H}$$

从而 $g_x(y) = g_y(x)$. 我们诱导出了 X 上的一个对称二元函数 $K(x,y) := g_x(y)$, 称为 H 对应的再生核

Operators

毕业论文报告

万润苕

函数型数据

函数型线 性回归

再生核 Hilbert 空间及 相关算子

再生核空间中的函 型岭回归

收敛率推导 结论

算法与实验 ^{算法推导} 数值实验

直观理解

外延广泛,性质良好,再生性,结构性的 Hilbert 空间

Integral Operator

$$L_{K}: H \to H, g \mapsto \int_{X} g(x)K(x,*)d\rho x = \langle g, K_{x} \rangle_{2}$$

Properties

再生核 Hilbert 空间及

再生性及相关性质

 $< K(x,*), g>_{H} = g(x);$ $\forall f \in L_2, L_{\kappa}(f) \in H$;

 $\forall f, g \in H, \langle f, L_K(g) \rangle_2 = \langle f, g \rangle_H$

Representer Theorem

if $f := Argmin_{f \in H} E_f((x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)) + J(||f||_H)$ then $\exists \vec{l} \in R^n$, s.t. $\tilde{f} = \sum_{i=1}^n I_i K(*, x_i)$

毕业论文报告

万润哲

函数型数据

函数型线 性回归 ^{问题与模型} 方法综述 再生核 Hilbert 空间及

再生核空间中的函数 型岭回归

女敛率推导 结论 证明纲要

算法与实验

- 1 函数型数据
- ② 函数型线性回归
 - 问题与模型
 - 方法综述
 - 再生核 Hilbert 空间及相关算子
 - 再生核空间中的函数型岭回归
- ③ 收敛率推导
 - 结论
 - 证明纲要
- 4 算法与实验
 - 算法推导
 - 数值实验

Estimator

再生核空间中的函数 型岭回归

$$(\hat{\alpha_0}, \hat{b}(t)) := Argmin_{\alpha \in R, b \in H} \{ \hat{\epsilon}(\alpha, b) + \lambda * \|b\|_H^2 \}$$
 (2)

- 外延广泛:各种斜率函数和惩罚项
- 性质优良:无穷维, 非参数问题-> 有限维
- 岭惩罚项: 光滑性与可解释性

Estimator

再生核空间中的承数 型岭回归

$$(\hat{\alpha_0}, \hat{\textbf{b}}(\textbf{t})) := \textit{Argmin}_{\alpha \in \textbf{R}, \textbf{b} \in \textbf{H}} \{ \hat{\epsilon}(\alpha, \textbf{b}) + \lambda * \|\textbf{b}\|_H^2 \} \qquad \textbf{(2)}$$

- 外延广泛:各种斜率函数和惩罚项
- 性质优良:无穷维,非参数问题->有限维
- 岭惩罚项: 光滑性与可解释性

Estimator

毕业论文报告

万润哲

函数型数据

函数型线 性回归 问题与模型 方法综述 再生核 Hilbert 空间

再生核空间中的函数 型岭回归

收敛率推导 ^{结论}

算法与实验 ^{算法推导} 数值实验

$$(\hat{\alpha_0}, \hat{\mathbf{b}}(t)) := Argmin_{\alpha \in \mathbf{R}, \mathbf{b} \in \mathbf{H}} \{ \hat{\epsilon}(\alpha, \mathbf{b}) + \lambda * \|\mathbf{b}\|_H^2 \}$$
 (2)

- 外延广泛:各种斜率函数和惩罚项
- 性质优良:无穷维,非参数问题->有限维
- 岭惩罚项: 光滑性与可解释性

Properties

毕业论文报告

万润哲

函数型数技

函数型线 性回归 ^{问題与模型} 方法综述 再生核 Hilbert 空间:

相关算子 再生核空间中的函数

型岭回归 收敛率推导

结论 证明纲要

算法与实验

算法推导数值实验

目标函数约化

- $1: \hat{\alpha_0} = \bar{\mathbf{y}} \int_{\mathcal{T}} \bar{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{b}} dt$
- $2: \hat{b}(t) := Argmin_{b \in H} \{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\tilde{y}_i \int_{\mathcal{T}} \tilde{x}_i b dt]^2 + \lambda \|b\|_H^2 \}$

斜率函数估计量表示定理

对于以上估计量,存在 $c_i \in R, i = 1, ., n$ 使得

$$\hat{b}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i L_K(x_i)$$

毕业论文报告

万润哲

函数型数期

函数型线 性回归 ^{问题与模型} 方法综述 再生核 Hilbert 空间 相关算子

收敛率推导

结论 证明纲要

算法与实验

算法推导 数值实验

- ① 函数型数据
- 2 函数型线性回归
 - 问题与模型
 - 方法综述
 - 再生核 Hilbert 空间及相关算子
 - 再生核空间中的函数型岭回归
- ③ 收敛率推导
 - 结论
 - 证明纲要
- 4 算法与实验
 - 算法推导
 - 数值实验

毕业论文报告

万润苕

函数型数据

函数型线 性回归 问题与模型 方法综述 再生转子 图为核空间中的不是

收敛率推导 ^{结论}

算法与实验 ^{算法推导}

- 1 函数型数据
- ② 函数型线性回归
 - 问题与模型
 - 方法综述
 - 再生核 Hilbert 空间及相关算子
 - 再生核空间中的函数型岭回归
- ③ 收敛率推导
 - 结论
 - 证明纲要
- 4 算法与实验
 - 算法推导
 - 数值实验

Aim

毕业论文报告

万润哲

函数型数据

函数型线 性回归 问题与模型 方法综述 再生物系

收敛率推导 结论

算法与实验

算法推导数值实验

$$P(\epsilon(\hat{\mathbf{b}}) \le A[2\frac{Bln(2/\delta)[\frac{\mathbf{k}}{\sqrt{n\lambda}} + \sqrt{\Psi}]}{\sqrt{n}} + C]^2) \ge 1 - \delta$$
 (3)

$$A_n: (1 + \Lambda_n + \Lambda_n^2) \tag{4}$$

$$B := (\|\mathbf{Y}\|_{\infty} + \|\mathbf{f}_{\lambda}\|_{\infty}) \tag{5}$$

$$C := \sqrt{E(F_0^2)} \tag{6}$$

毕业论文报告

万润苕

函数型数据

函数型线 性回归 问题与模型 方法综述 再生核 Hilbert 空间 相关算字

收敛率推导 ^{结论} 证明纲要

算法与实验 ^{算法推导} _{数值实验}

- 1 函数型数据
- ② 函数型线性回归
 - 问题与模型
 - 方法综述
 - 再生核 Hilbert 空间及相关算子
 - 再生核空间中的函数型岭回归
- ③ 收敛率推导
 - 结论
 - 证明纲要
- 4 算法与实验
 - 算法推导
 - 数值实验

算子表示

毕业论文报告

万润苕

函数型数据

函数型线

性回归

问题与模型 方法综述

再生核 Hilbert 🕏

相关算子

再生核空间中的函数 现价间归

收敛率推导

结论

证明纲要

非法推导 算法推导 数値な除

$$\epsilon(\hat{\mathbf{b}}) = \|\mathbf{L}_{\mathbf{C}}^{\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}_0)\|_2^2$$
 (7)

$$b_{\lambda} = L_{k}^{\frac{1}{2}} (L_{k}^{\frac{1}{2}} L_{C} L_{k}^{\frac{1}{2}} + \lambda I)^{-1} L_{k}^{\frac{1}{2}} L_{C} b_{0}$$
 (8)

$$\hat{b}_{\lambda} = L_{k}^{\frac{1}{2}} (L_{k}^{\frac{1}{2}} L_{C_{n}} L_{k}^{\frac{1}{2}} + \lambda I)^{-1} L_{k}^{\frac{1}{2}} (\frac{\sum_{i=1}^{n} y_{i} x_{i}(t)}{n})$$
(9)

偏差与方差

证明纲要

$$\epsilon(\hat{\mathbf{b}}) \le (\|\mathbf{L}_{\mathbf{C}}^{\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}_{\lambda})\|_{2} + \|\mathbf{L}_{\mathbf{C}}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{b}_{0} - \mathbf{b}_{\lambda})\|_{2})^{2}$$
 (10)

Theorem (偏差部分的上界)

$$\|L_{C}^{\frac{1}{2}}(b_{0}-b_{\lambda})\|_{2} \leq \sqrt{E(F_{0}^{2})}$$
 (11)

符号与方差部分变形

毕业论文报告

万润哲

函数型数据

四数空线 性回归 问题与模型 方法综述 再生核 Hilbert 空间及 相类算子

收敛率推导

结论 证明纲要

当 一 一 一

デムラスで 算法推导 数値な除

符号

$$S_n := L_K L_{C_n}$$

$$S := L_K L_C \,$$

$$\xi_{\lambda}(\mathbf{z}_i) := (\mathbf{y}_i - \mathbf{f}_{\lambda}(\mathbf{x}_i)) \mathbf{L}_{K}(\mathbf{x}_i)$$

$$\bar{\xi}_{\lambda} := \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_{\lambda}(\mathbf{z}_{i})}{n}$$

方差部分变形

$$\|L_{C}^{\frac{1}{2}}(\hat{b}-b_{\lambda})\|_{2} = \|S_{n}^{\frac{1}{2}}\{(S_{n}+\lambda I)^{-1}[\bar{\xi}_{\lambda}-E(\xi_{\lambda})]\}\|_{H}$$

一些引理

毕业论文报告

万润苕

函数型数据

函数型线 性回归 问题与模型 方法综述 再生核 Hilbert 空间: 相关算子 再生核空间中的函数

收敛率推导

结论 证明纲要

算法与实验

算法推导 数值实验

算子二阶分解

$$\begin{split} (\mathcal{S}_n + \lambda \mathit{I})^{-1} - (\mathcal{S} + \lambda \mathit{I})^{-1} &= (\mathcal{S} + \lambda \mathit{I})^{-1} (\mathcal{S} - \mathcal{S}_n) (\mathcal{S} + \lambda \mathit{I})^{-1} + \\ (\mathcal{S} + \lambda \mathit{I})^{-1} (\mathcal{S} - \mathcal{S}_n) (\mathcal{S}_n + \lambda \mathit{I})^{-1} (\mathcal{S} - \mathcal{S}_n) (\mathcal{S} + \lambda \mathit{I})^{-1} \end{split}$$

算子范数不等式

$$\begin{aligned} \| \mathcal{L}_{K}^{\frac{1}{2}} (\mathcal{L}_{K} + \lambda I)^{-\frac{1}{2}} \| &\leq 1 \\ \| (\mathcal{L}_{K} + \lambda I)^{-1} \| &\leq \frac{1}{\lambda} \\ \| (\mathcal{L}_{K} + \lambda I)^{-\frac{1}{2}} \| &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

概率不等式

$$P(\|ar{\xi} - E(\xi)\| \le \frac{2M\ln(2/\delta)}{n} + \sqrt{\frac{2c\ln(2/\delta)}{n}}) \ge 1 - \delta$$

主定理符号与思路

毕业论文报告

万润哲

函数型数据

函数型线 性回归 问题与模型 方法综述 再生核 Hilbert 空间及相关算子

收敛率推导 ^{结论}

证明纲要 算法与实验

算法推导 数值实验

符号

$$\begin{split} \xi_{0}(\textbf{\textit{z}}_{\textit{i}}) &:= (\textbf{\textit{y}}_{\textit{i}} - \textbf{\textit{f}}_{0}(\textbf{\textit{x}}_{\textit{i}})) \textbf{\textit{L}}_{\textit{K}}(\textbf{\textit{x}}_{\textit{i}}) \\ \Delta_{\lambda} &:= \bar{\xi}_{\lambda} - \textbf{\textit{E}}(\xi_{\lambda}); \quad \Delta_{0} := \bar{\xi}_{0} - \textbf{\textit{E}}(\xi_{0}) = \bar{\xi}_{0}; \quad \Delta := \Delta_{\lambda} - \Delta_{0} \\ \theta_{\textit{n}} &:= \| (\textbf{\textit{S}} + \lambda \textbf{\textit{I}})^{-1/2} (\textbf{\textit{S}} - \textbf{\textit{S}}_{\textit{n}}) \|; \quad \Theta_{\textit{n}} := 1 + \frac{\theta_{\textit{n}}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\theta_{\textit{n}}^{2}}{\lambda} \\ \Psi(\lambda) &:= \textit{Tr}((\textbf{\textit{L}}_{\textit{K}} \textbf{\textit{L}}_{\textit{C}} + \lambda \textbf{\textit{I}})^{-1} \textbf{\textit{L}}_{\textit{K}} \textbf{\textit{L}}_{\textit{C}}); \qquad \Omega_{\textit{n}} := \frac{2k^{2}}{\textit{n}\sqrt{\lambda}} + \frac{2k\sqrt{\Psi}}{\sqrt{\lambda}} \\ \textbf{\textit{Q}}_{1} &:= (\textbf{\textit{S}}_{\textit{n}} + \lambda \textbf{\textit{I}})^{-1} - (\textbf{\textit{S}} + \lambda \textbf{\textit{I}})^{-1}; \qquad \textbf{\textit{Q}}_{2} := \textbf{\textit{S}} - \textbf{\textit{S}}_{\textit{n}} \\ \textbf{\textit{S}}_{\lambda} &:= \textbf{\textit{S}} + \lambda \textbf{\textit{I}}; \qquad \textbf{\textit{S}}_{\textit{n}\lambda} := \textbf{\textit{S}}_{\textit{n}} + \lambda \textbf{\textit{I}} \end{split}$$

主定理证明思路

对算子进行二阶分解后,利用放缩进行简化,处理至算子差 和随机变量差两部分,分别运用引理估计概率界。

毕业论文报告

万润苕

函数型数期

函数型线 性回归 问题与模型 方法综述 再生核 Hilbert 空间 相关算子

收敛率推导 ^{结论}

算法与实验

算法推导 故值实验

- 1 函数型数据
- ② 函数型线性回归
 - 问题与模型
 - 方法综述
 - 再生核 Hilbert 空间及相关算子
 - 再生核空间中的函数型岭回归
- ③ 收敛率推导
 - 结论
 - 证明纲要
- 4 算法与实验
 - 算法推导
 - 数值实验

毕业论文报告

万润苕

函数型数期

函数型线 性回归 问题与模型 方法综述 再生转分词中的不是

收敛率推导 结论

算法与实验 ^{算法推导}

- 1 函数型数据
- ② 函数型线性回归
 - 问题与模型
 - 方法综述
 - 再生核 Hilbert 空间及相关算子
 - 再生核空间中的函数型岭回归
- ③ 收敛率推导
 - 结论
 - 证明纲要
- 4 算法与实验
 - 算法推导
 - 数值实验

Transform Optimization Problem

毕业论文报告

万润哲

函数型数据
函数型线
性回归

问题与模型
方法综述

问题与模型 方法综述 再生核 Hilbert 空间 相关算子 再生核空间中的函数 型岭回归

收敛率推导 结论 证明纲要

异 法 司 头 独 算法推导

回顾

$$\begin{array}{l} \hat{b}(t) := Argmin_{b \in H} \{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\tilde{y}_i - \int_{\mathcal{T}} \tilde{x}_i b dt]^2 + \lambda \|b\|_H^2 \} \\ \hat{b}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i L_K(x_i) \end{array}$$

$$\vec{c} = Argmin_{\vec{l} \in \mathcal{R}^n} \{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\tilde{y}_i - \int_{\mathcal{T}} \tilde{x}_i (\sum_{j=1}^n I_j L_{\mathcal{K}}(\tilde{x}_j)) dt]^2 + \lambda \| \sum_{i=1}^n I_i L_{\mathcal{K}}(\tilde{x}_i) \|_{\mathcal{L}^{\infty}}$$

= ...

$$= Argmin_{\vec{l} \in \mathbb{R}^n} \{ \frac{\|\vec{y}\|_2}{n} - \frac{2\vec{y}^T \Phi}{n} \vec{l} + \vec{l}^T (\frac{\Phi^T \Phi}{n} + \lambda \Gamma) \vec{l} \}$$

(12)

无约束二次优化问题。成熟的算法。类似样条光滑。



Algorithm

毕业论文报告

万润哲

问题与模型 方法综述 再生核 Hilbert 空间及相关算子 再生核空间中的函数 型岭回归

女敛率推导
^{结论}
^{证明纲要}
章法与实验

算法与实验 算法推导 step0 (预处理): 对 $X_i(t)$ 的离散测量值 $X_i(t_j)$,选取基进行 光滑化,得到 $X_i(t)$

step1 (中心化): 计算样本平均 $\bar{x}_i(t)$ 和 \bar{y}_i ,对数据中心化 $\tilde{x}_i(t)=x_i(t)-\bar{x}_i(t), \tilde{y}_i$ 同理

step2(积分算子变换):通过数值积分,计算 $L_K(\tilde{x}_i(t))$,向量化 step3(计算矩阵):利用数值积分,即 H 上具体的内积定义,计算 Φ 和 Γ

step4(整理): 利用矩阵乘法, 计算

$$oldsymbol{a}_1 = rac{\|ec{y}\|_2}{n}, oldsymbol{a}_2 = rac{2ec{y}^T\Phi}{n}, oldsymbol{A} = rac{\Phi^T\Phi}{n} + \lambda\Gamma$$

step5(求解无约束二次优化):利用现有算法,求解

$$Argmin_{\vec{l} \in R^n} \{ a_1 - \vec{a_2}^T \vec{l} + \vec{l}^T A \vec{l} \}$$

step6(回带): 分别回带,得到 $\hat{\alpha_0}$, $\hat{b}(t)$ 与 $\hat{F_0}(X(t))$

毕业论文报告

万润苕

函数型数据

函数型线 性回归 ^{问题与模型} 方法综述 再生核 Hilbert 空间 相关算子

收敛率推导 ^{结论} ^{证明纲要}

算法与实验 ^{算法推导} 数值实验

- 1 函数型数据
- ② 函数型线性回归
 - 问题与模型
 - 方法综述
 - 再生核 Hilbert 空间及相关算子
 - 再生核空间中的函数型岭回归
- ③ 收敛率推导
 - 结论
 - 证明纲要
- 4 算法与实验
 - 算法推导
 - 数值实验

TTI Data Set

毕业论文报告

万润苕

函数型数据

四 性 回 阿 阿 原 題 与 様型 方法综述 再生核 Hilbert 空间: 相关 算子 再生核空间中的 函表

收敛率推导 结论

算法与实验 ^{算法推导} 数值实验

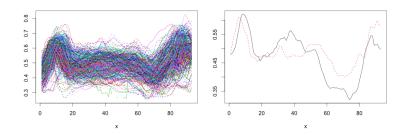


Figure 1: Functional Data

Choose RKHS

毕业论文报告

函数型数据 函数型线 性回归

问题与模型 方法综述 再生核 Hilbert 空间及相关算子 再生核空间中的函数型岭回归

算法与头验 算法推导 数值实验 由于没有特定的周期性,我们利用 DTI 自身具有的光滑性,采用以下的 RKHS。 $\hat{H}=\mathcal{W}_2^2$ 为二阶 Sobolev 空间,赋以常见的范 $\forall f\in \hat{H}: \|f\|=\|f'\|_2^2$ 记 \hat{H} 商去使 $\|f\|=0$ 的子空间 H1,得到 RKHS H,范数保持。记 $B_m(t)$ 为第 m 个 Bernoulli 多项式,则其对应的再生核为

$$K(s,t) = \frac{1}{4}B_2(s)B_2(t) - \frac{1}{24}B_4(|s-t|)$$
 (13)

Result

毕业论文报告

万润哲

函数型数据

四 性回归 问题与模型 方法综述 再生核 Hilbert 空间 相关算子

收敛率推导 结论 证明纲要

算法与实验 ^{算法推导} 数值实验

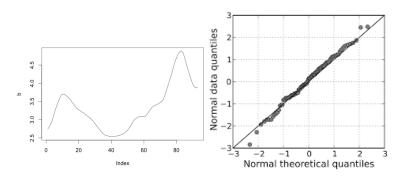


Figure 2: Estimate and Test

Thanks for your attention!