

Numerical Analysis

欧阳尚可 3190102458

2022 年 5 月 26 日

Ex 11.9

对于 $i = 0$ 我们有 $\frac{r}{2}g_0(t_n) = \frac{r}{2}U_0^n; \frac{r}{2}g_0(t_{n+1}) = \frac{r}{2}U_0^{n+1}$, 因此有 $U_1^{n+1} - \frac{r}{2}(U_2^{n+1} - 2U_1^{n+1}) = U_1^n + \frac{r}{2}(U_2^n - 2U_1^n) + \frac{r}{2}(g_0(t_n) + g_0(t_{n+1})) \Rightarrow -rU_0^{n+1} + 2(1+r)U_1^{n+1} - rU_2^{n+1} = rU_0^n + 2(1-r)U_1^n + rU_2^n$ 这符合 Grank-Nicolson 方法, 同理可知 $i = m$ 时也是符合该方法。对于 $i \neq 0$ 且 $i \neq m$ 有 $U_i^{n+1} - \frac{r}{2}(U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}) = U_i^n + \frac{r}{2}(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n) \Rightarrow -rU_{i-1}^{n+1} + 2(1+r)U_i^{n+1} - rU_{i+1}^{n+1} = rU_{i-1}^n + 2(1-r)U_i^n + rU_{i+1}^n$ 。

Ex 11.24

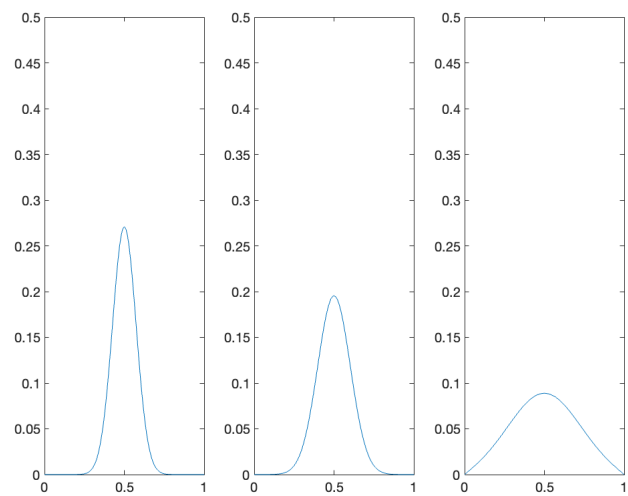
这里为了方便,我们暂时将记号放到下标,考虑 $u' = \lambda u$ 我们有 $\frac{U_{n+1}-U_n}{k} = \theta U'_n + (1-\theta)U'_{n+1} = \theta \lambda U_n + (1-\theta)\lambda U_{n+1} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{1+k\theta\lambda}{1+k(\theta-1)\lambda}U_n$ 。要使得其绝对收敛, 我们有 $|\frac{1+k\theta\lambda}{1+k(\theta-1)\lambda}| \leq 1$, 化简得到 $2k\lambda \leq (2\theta-1)k^2\lambda^2$ 。由 Lemma 11.19 我们知道特征值都是小于 0 的, 由此我们知道 $2\theta-1 \geq 0 \Rightarrow \theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ 时, 对于所有的 k , 不等式都成立。当 $\theta \in [0, \frac{1}{2})$ 时, 有 $k \leq \frac{h^2}{2(1-2\theta)\nu}$ 。

Ex 11.40

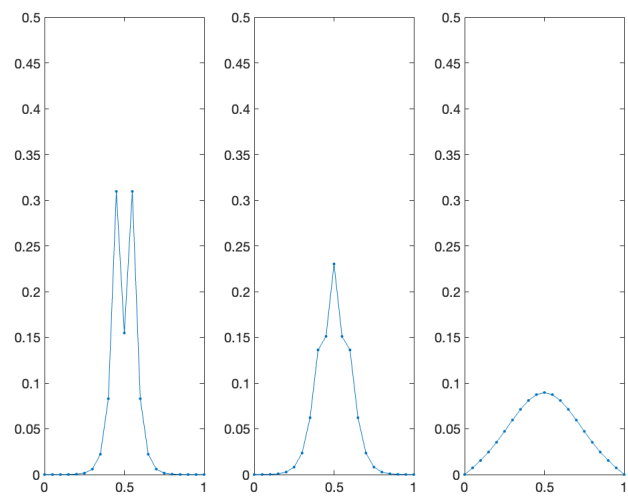
由 11.20 可以得到 $[-\theta rg(\xi)e^{-i\xi h} - \theta rg(\xi)e^{i\xi h} + (1+2\theta r)g(\xi)]U_i^n = [(1-\theta)re^{-i\xi h} + (1-\theta)re^{i\xi h} + (1-2(1-\theta)r)]U_i^n$ 因此有 $g(\xi) = \frac{1-4(1-\theta)r\sin^2(\frac{\xi h}{2})}{1+4\theta r\sin^2(\frac{\xi h}{2})}$, 我们有 $|g(\xi)| \leq 1$, 化简得 $r\sin^2(\frac{\xi h}{2}) \geq 2(1-2\theta)r^2\sin^4(\frac{\xi h}{2})$, 引入 r 的定义以及平方的非负性我们可以进一步得到 $1 \geq 2(1-2\theta)\frac{\nu k}{h^2}\sin^2(\frac{\xi h}{2})$ 由此我们得到当 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ 时, 对于所有的 k 都成立; 当 $\theta \in [0, \frac{1}{2})$ 时有 $k \leq \frac{h^2}{2(1-2\theta)\nu}$ 。令 $\xi = p\pi$ 在引入 (11.23) 中特征值的大小我们可以从 24 推到 40。

1 Programming

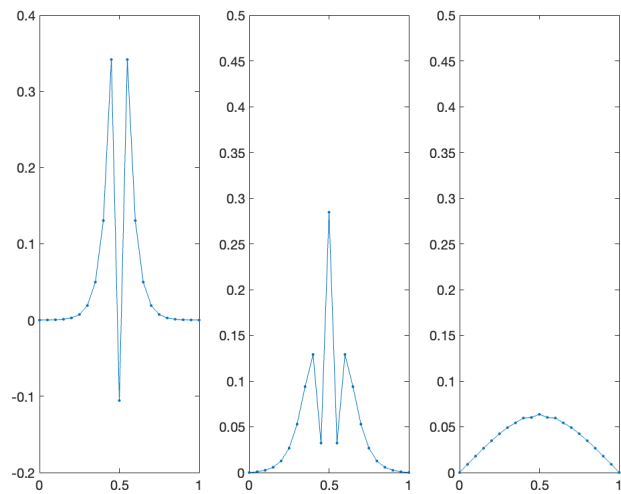
exact solution



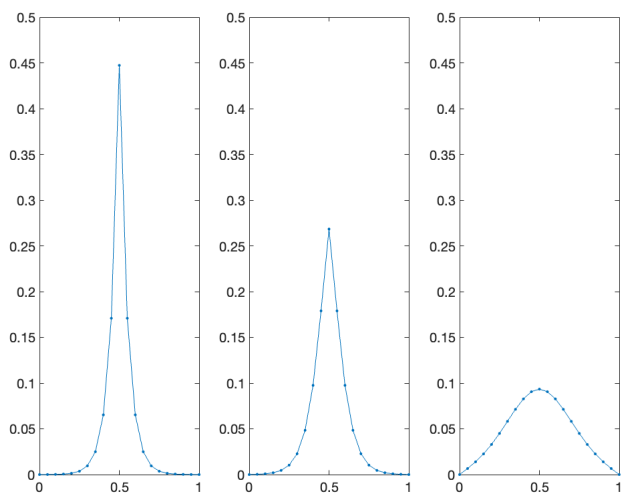
CN with $r=1$



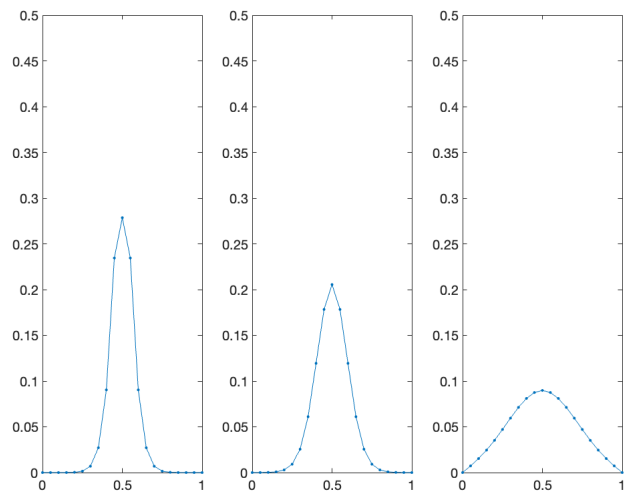
CN with $r=2$



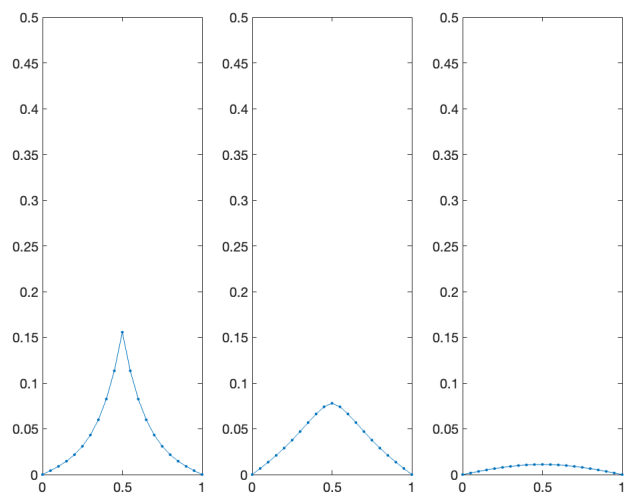
BTCS with $r=1$



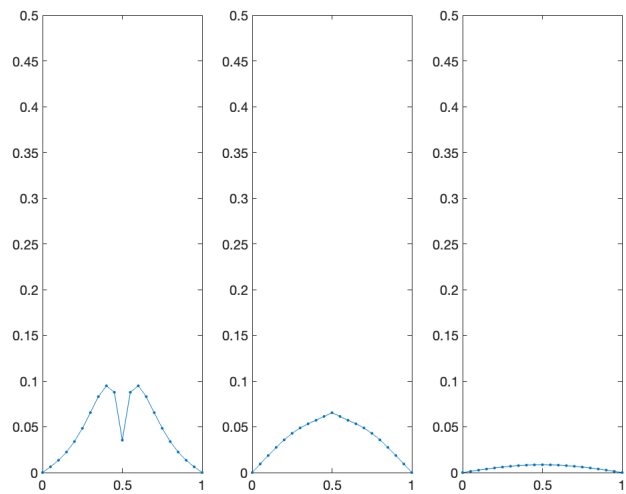
collocation with $r=1$



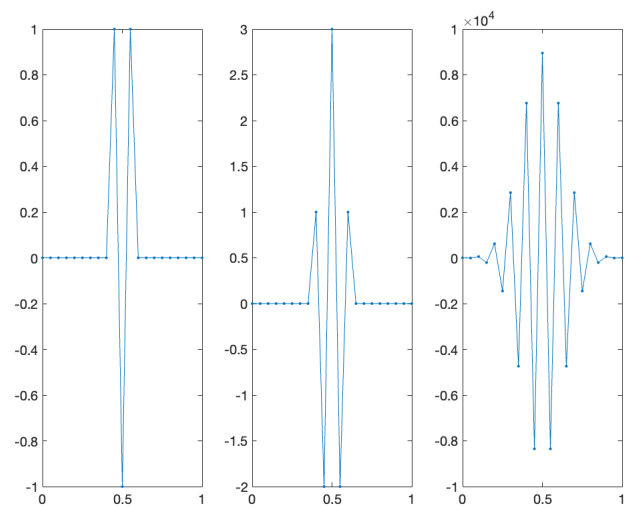
BTCS with $r = \frac{1}{2h}$



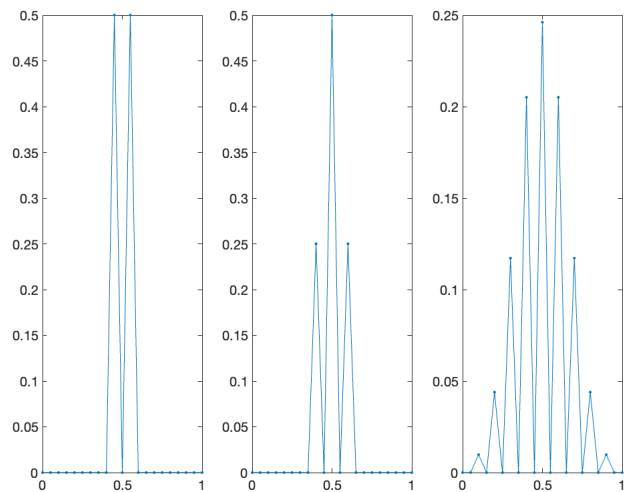
collocation with $r = \frac{1}{2h}$



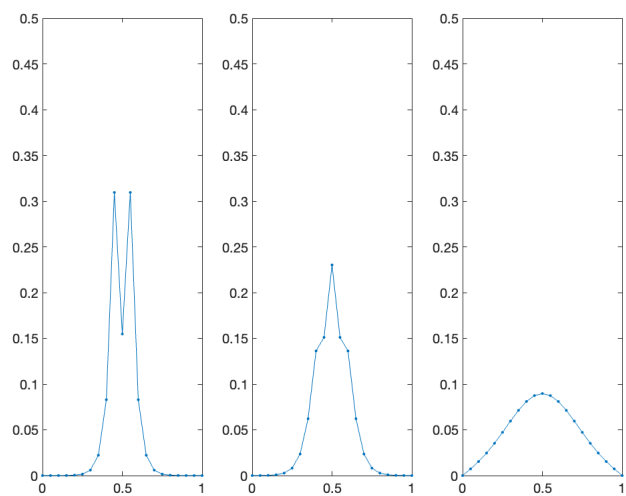
FTCS with $r=1$



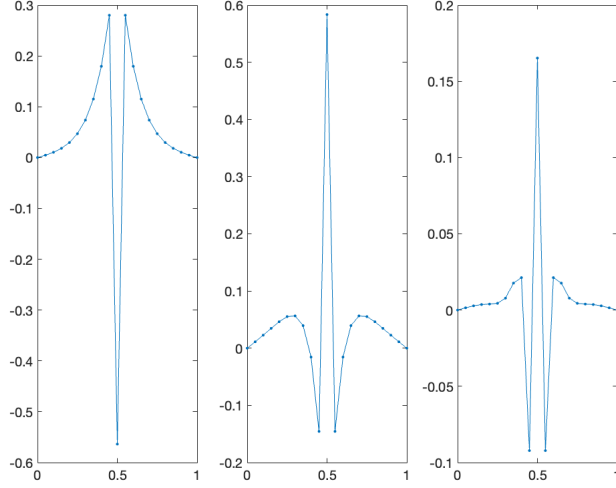
FTCS with $r = \frac{1}{2}$



1-stage Gauss-Legendre RK method with $r=1$



1-stage Gauss-Legendre RK method with $r = \frac{1}{2h}$



对于 BTCS 和 collocation method 方法在 $r = \frac{1}{2h}$ 而言，能够明显的发现其图像变化的更快了，特别是可以发现它们在第二步的时候得到的结果与 $r = 1$ 时在第十步得到的结构一致，这是因为对于同一个方法的 r 的改变在 h 不变的情况下实际上是对 k 的改变，在 $r = 1$ 时， $k = h^2 = \frac{1}{400}$ ，在 $r = 2$ 时， $k = \frac{h}{2} = \frac{1}{40}$ ，因此会导致前一种情况经过了 10 步之后在达到后一种情况 2 步的情况。

对于 FTCS 方法而言，将其视为一种 $\theta - method$ 有 $\theta = 0$ ，因此在 $r = 1$ 时不满足 11.36 的条件，得到不 11.36 的结论，最终导致震荡，而在 $r = \frac{1}{2}$ 时可以满足相应的条件从而得到相应的结论。

对于 1-stage Gauss-Legendre RK method，由于其本身不是 L-stable 的，因此会导致它的震荡。并且随着时间尺度的减小从某种意义上来说它的 L-stable 越弱，震荡在一定的步数内还存在