NumPDEs

欧阳尚可 3190102458

2022 年 4 月 7 日

Ex 9.5

依题意得 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 和 $A\mathbf{e}=\mathbf{r}$，因此有 $\frac{||\mathbf{r}||_2}{||\mathbf{b}||_2}\leq ||A||_2\frac{||\mathbf{e}||_2}{||\mathbf{b}||_2}$ 且 $\frac{||\mathbf{e}||_2}{||\mathbf{x}||_2}\geq \frac{1}{||A||_2}\frac{||\mathbf{e}||_2}{||\mathbf{b}||_2}$，联立即可得 $\frac{1}{cond(A)}\frac{||\mathbf{e}||_2}{||\mathbf{b}||_2}\leq\frac{||\mathbf{e}||_2}{||\mathbf{x}||_2}$，同理可证得另一个不等式。

Ex 9.8

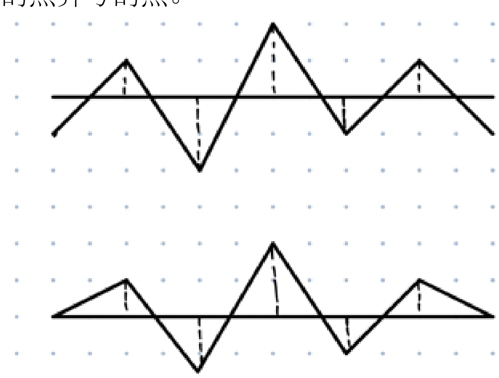
$cond(A)=||A||_2||A^{-1}||_2=\sqrt{\lambda_{max}A^TA}\sqrt{\lambda_{max}(A^{-1})^TA^{-1}}$，观察矩阵 A 不难得到其对称性，若 λ 是 A 的一个特征值，$\mathbf{x}$ 为相应的特征向量，有 $A^TA\mathbf{x}=\lambda A^T\mathbf{x}=\lambda^2\mathbf{x}$，由此得出要求 A 的二范数即求 A 的最大特征值。同时我们注意到 A^{-1} 的对称性以及 $A\mathbf{x}=A^{-1}AA\mathbf{x}=\lambda^2A^{-1}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$，得到 $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值。再由 lemma 7.24 知 $cond(A)=\frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}=\frac{sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}}{sin^2\frac{\pi}{2n}}$。

由 Matlab 计算得 ,$n=8, cond(A,2)=32.1634; n=1024, cond(A,1024)=4.2580*10^5$。

0.1 Ex 9.11

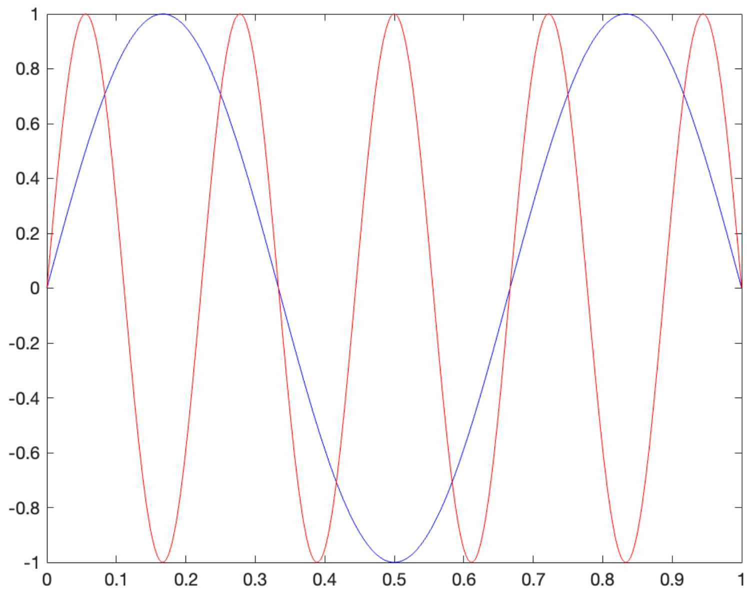
要使得波数最大，则需要保证在每一个取值点处所取的值与其相邻的点异号。

若要保证在边界上取值为零，本质上相当于减少了一个满足与其相邻的点异号的点。



Ex 9.14

由 Matlab 画图得如下所示图像，其中红色为高频波，蓝色为低频波。容易发现在上面均匀的取五个点会满足 $sin(x_jk\pi)=-sin(x_jk^{'}\pi)$

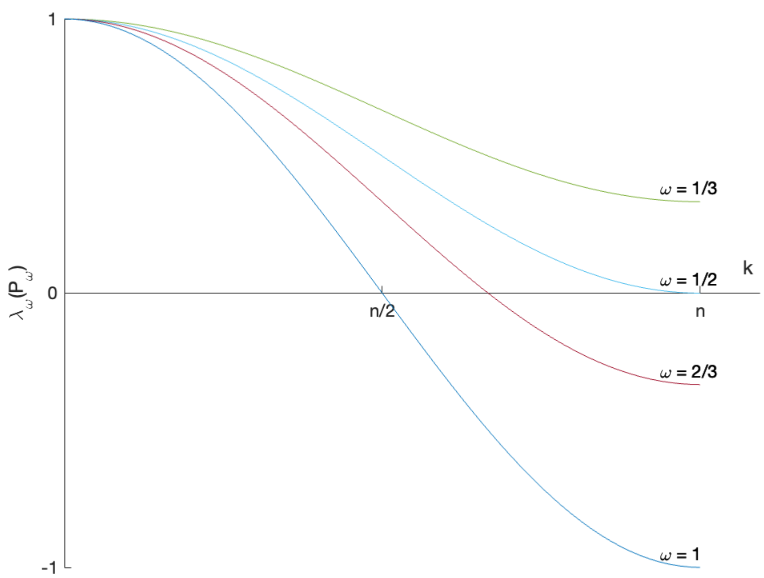


Ex 9.17

$$T_\omega = (1-\omega)I+\omega D^{-1}(L+U) = I-\omega D^{-1}(D-L-U) = I-\omega D^{-1}A = I-\frac{\omega h^2}{2}A$$

再由 lemma 7.24 知，A 的特征值为 $\lambda_k(A) = \frac{4}{h^2}sin^2\frac{k\pi}{2n}$，由此可知 $\lambda_k(T_\omega) = 1-2\omega sin^2\frac{k\pi}{2n}$。

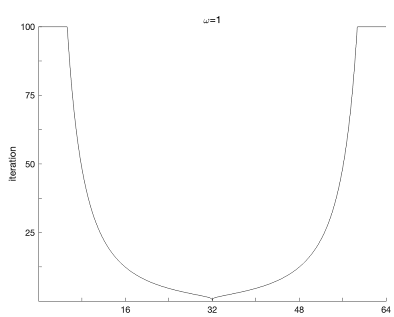
Ex 9.18

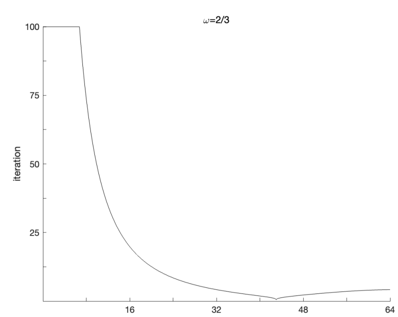


我们知道 $1-sin^2\frac{\pi}{2*64}=0.99875$，因此有 $\rho(T_\omega)\geq 0.9986$。因此其收敛速度很慢。

Ex 9.21

从图像中不难看出在 $\omega=1$ 时仅在 $16\leq k\leq 48$ 有较好的收敛速度。在 $\omega=1$ 时仅在 $16\leq k\leq 64$ 有较好的收敛速度。





Ex 9.35

由 lemma 9.32 以及 FMG 的算法流程不难得出其计算开销为

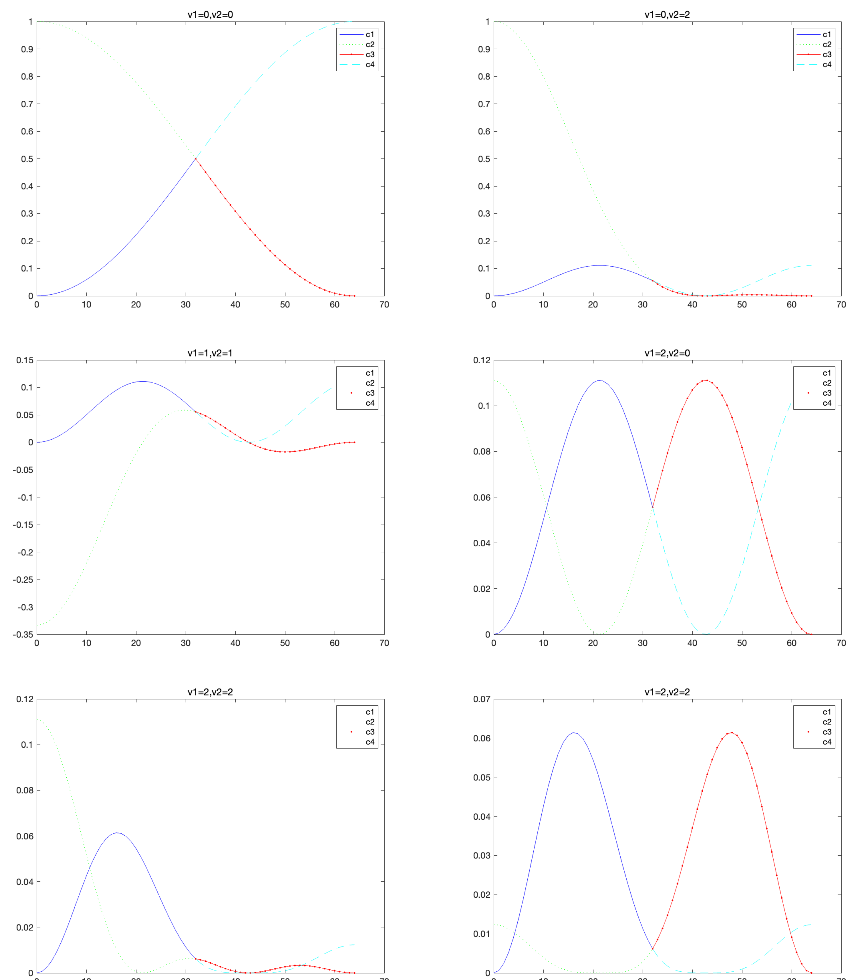
$$2WU(1+2^{-D}+2^{-2D}+...+2^{-mD})+2WU(2^{-D}+2^{-2D}+...+2^{-mD})+...+2WU(2^{-mD})$$

$$=\frac{WU}{1-2^{-D}}(1+2^{-D}+2^{-2D}+...+2^{-mD}-(m+1)2^{-(m+1)D})\le\frac{2}{(1-2^{-D})^2}WU$$

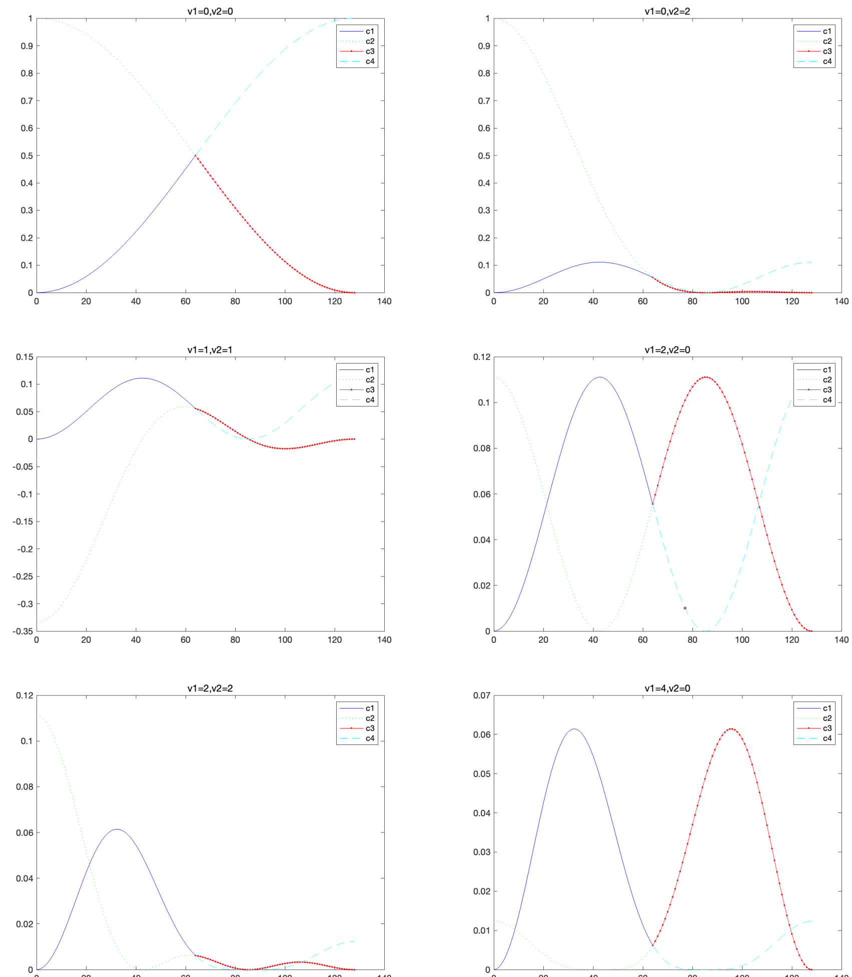
$D=1,8WUs$，$D=2,\frac{32}{9}WUs$，$D=3,\frac{128}{49}WUs$。

Ex 9.41

以下是 $n=64,\omega=\frac{2}{3}$



以下是 $n = 128, \omega = \frac{2}{3}$



从图像中不难直观看出 c_i 都很小，其原因是 c_i 是 T_ω 和三角函数的乘积，而它们的绝对值都小于 1。具体来看，低频波部分会使得 s_k 和 $\lambda_{k'}$ 很小，高频波部分会使得 c_k 和 λ_k 很小，所以导致了它们都很小。同样的通过画图发现其图像的形状与 n 没有关系，所以仅仅对前六张图进行分析很容易得出 $\rho(TG) \approx 0.1$。

Ex 9.45

容易看出 I_h^{2h} 的偶数列的列向量是线形无关的，且其个数恰好为 $\frac{n}{2}-1$，为矩阵的行数，因此有 $dim\mathscr{R}(I_h^{2h})$，$dim\mathscr{N}(I_h^{2h})=\frac{n}{2}$。