Numerrical Analysis

欧阳尚可 3190102458

2022 年 3 月 17 日

Ex 8.16

从 (8.15a) 很容易得到

$$\mathbf{x}_* = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]\mathbf{x}^{(k)} + (D-\omega L)^{-1}\omega\mathbf{b};$$

从 (8.15b) 很容易得到

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (D-\omega U)^{-1}[(1-\omega)D+\omega L]\mathbf{x}_* + (D-\omega U)^{-1}\omega\mathbf{b};$$

代入并化简得

$$\mathbf{x}^{k+1} = (D-\omega U)^{-1}[(1-\omega)D+\omega L](D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)+\omega U]\mathbf{x}^{(k)}+\omega(2-\omega)(D-\omega U)^{-1}D(D-\omega L)^{-1}\mathbf{b}$$

Ex 8.22

若 $I-A$ 奇异，则 $\lambda=1$ 为 A 的一个特征值，这与 $\rho(A)<1$ 矛盾。

Ex 8.38

一方面，已知 $\mathscr{I}\cup\mathscr{J}=\mathscr{W}=\{1,2,...,n\}$ 并且 $\mathscr{I}\cap\mathscr{J}=\varnothing$，有 $\forall i\in\mathscr{I},\forall j\in\mathscr{J},a_{i,j}=0$。因此我们可以找到一系列的行对换 $P_1,P_2,...,P_{|\mathscr{I}|}$ 以及一系列的列变换 $P_1^{'},P_2^{'},...,P_{|\mathscr{J}|}^{'}$ 其中 P_1 为第 i_1 与第 1 行的对换等；$P_1^{'}$ 为第 j_1 与第 $i+1$ 列的对换等。使得

$$P_1P_2...P_{|\mathscr{I}|}AP_1^{'}P_2^{'}...P_{|\mathscr{J}|}^{'} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

易知 $P=P_1P_2...P_{|\mathscr{I}|}$ 以及 $P^{'}=P_1^{'}P_2^{'}...P_{|\mathscr{J}|}^{'}$ 为置换矩阵，下面我们证明 $PP^{'}=\mathbf{I}$。考虑特殊情况 $I=A$ 由于 $\mathscr{I}\cup\mathscr{J}=\mathscr{W}=\{1,2,...,n\}$ 并且 $\mathscr{I}\cap\mathscr{J}=\varnothing$，不难发现上述对换均是对零元素的交换，由此可知 A 为可约矩阵。

另一方面，对于任意的置换矩阵 P，我们可以找到一系列的对换矩阵 $P_1,P_2,...,P_r$ 使得 $P=P_1P_2...P_r$。由此可得

$$PAP^{'} = P_1...P_rAP_r^{'}...P_1^{'} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

而我们已经有了 $\mathscr{I}^{'}=1,2,...,r;\mathscr{J}^{'}=r+1,...,n$ 有 $\mathscr{I}^{'}\cup\mathscr{J}^{'}=\mathscr{W}=\{1,2,...,n\}$ 并且 $\mathscr{I}^{'}\cap\mathscr{J}^{'}=\varnothing$，再经过对称的变换得到的 $\mathscr{I},\mathscr{J}$ 仍然会有 $\mathscr{I}\cup\mathscr{J}=\mathscr{W}=\{1,2,...,n\}$ 并且 $\mathscr{I}\cap\mathscr{J}=\varnothing$。

Ex 8.44

由于 A 为严格对角元占优矩阵或者不可约对角占优矩阵可知 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的 Jacobi 迭代收敛，即 $\rho(T_J)<1$。有

$$T_{SOR}=I-\omega D^{-1}A=I-\omega D^{-1}(D-L-U)=(1-\omega)I+\omega D^{-1}(L+U)$$

设 λ 为 $D^{-1}(L+U)$ 的任意一个特征值，$\mathbf{x}$ 为其对应的特征向量，有 $|\lambda|<1$，因此

$$D^{-1}(L+U)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$$

化简得

$$[(1-\omega)I+\omega D^{-1}(L+U)]\mathbf{x}=(1-\omega)\mathbf{x}+\omega\lambda\mathbf{x}=(1-\omega+\lambda\omega)\mathbf{x}$$

因此有 $1-\omega+\lambda\omega$ 为 T_{SOR} 的一个特征值，由 $|\lambda|<1, 0<\omega<1$ 知 $|1-\omega+\lambda\omega|<1$，再由任意性知 $\rho(T_{SOR})<1$，因此 JOR 方法收敛。

Ex 8.47

假设 A 为上三角矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A^H=\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & & & \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

令 $D=AA^H=diag(d_1,...,d_n), D^{'}=diag(d_1^{'},d_n^{'})$，有 $d_i=\sum_{j=i}^{n}|a_{ij}|^2, d_i^{'}=\sum_{j=1}^{i}|a_{ij}|^2$，再由 $A^HA=AA^H$ 得 $d_i=d_i^{'}$ 可知 $a_{ij}=0, i<j$。因此 A 为对角阵。

Ex 8.57

对于第一个不等式有设 $\rho(A) = \lambda_i$，对应的特征向量为 $\mathbf{x}_i$，有 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{C}^n, A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$。因此

$$\mu_A(\mathbf{x}_i) = \frac{< A\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i >}{< \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i >} = \lambda_i$$

因此 $\upsilon(A) \geq \lambda_i = \rho(A)$

对于第二个不等式有

$$\exists\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, s.t. \upsilon(A) = \mu_A(\mathbf{x}) = \frac{< A\mathbf{x}, \mathbf{x} >}{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >} \leq \frac{||A\mathbf{x}||_2}{||\mathbf{x}||_2} \leq ||A||_2$$

对于等式成立的条件有 $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ 为 A 的不同特征值对应的特征向量，有它们两两相互垂直，因此有它们构成了 $\mathbb{C}^n$ 中的一组基且 $< \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j >= 0$。对 $\forall\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$，能找到一组数使得 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{x}_i$，因此有

$$\frac{||A\mathbf{x}||_2}{||\mathbf{x}||_2} = \frac{|| \sum_{i=1}^n a_i\lambda_i\mathbf{x}_i||_2}{|| \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{x}_i||_2} = \frac{(\sum_{i=1}^n |a_i|^2|\lambda_i|^2||\mathbf{x}_i||_2^2)^{\frac{1}{2}}}{(\sum_{i=1}^n |a_i|^2||\mathbf{x}_i||_2^2)^{\frac{1}{2}}} \leq \rho(A)$$

因此等号成立。

Ex 8.58

正定性：显然有 $\upsilon(A) \geq 0$，当 $\upsilon(A) = 0$ 当且仅当 $\forall\mathbf{x} \in (C)^n, < A\mathbf{x}, \mathbf{x} >= 0$，因此 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$，所以 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$

其次性：$\upsilon(\alpha A) = \max_{x\in\mathbb{C}^n} |\frac{<\alpha A\mathbf{x},\mathbf{x}>}{<\mathbf{x},\mathbf{x}>}| = |\alpha| \max_{x\in\mathbb{C}^n} |\frac{<A\mathbf{x},\mathbf{x}>}{<\mathbf{x},\mathbf{x}>}| = |\alpha|\upsilon(A)$

三角不等式：$\upsilon(A + B) = \max_{x\in\mathbb{C}^n} |\frac{<(A+B)\mathbf{x},\mathbf{x}>}{<\mathbf{x},\mathbf{x}>}| = \max_{x\in\mathbb{C}^n} |\frac{<A\mathbf{x},\mathbf{x}>}{<\mathbf{x},\mathbf{x}>} + \frac{<B\mathbf{x},\mathbf{x}>}{<\mathbf{x},\mathbf{x}>}| \leq \max_{x\in\mathbb{C}^n} |\frac{<A\mathbf{x},\mathbf{x}>}{<\mathbf{x},\mathbf{x}>}| + \max_{x\in\mathbb{C}^n} |\frac{<B\mathbf{x},\mathbf{x}>}{<\mathbf{x},\mathbf{x}>}| = \upsilon(A) + \upsilon(B)$

相容性：$\upsilon(AB) = \max_{x\in\mathbb{C}^n} |\frac{<AB\mathbf{x},\mathbf{x}>}{<\mathbf{x},\mathbf{x}>}| = \max_{x\in\mathbb{C}^n} |\frac{||AB\mathbf{x}||_2}{||\mathbf{x}||_2}| \leq \upsilon(A)\frac{||B\mathbf{x}||_2}{||\mathbf{x}||_2} \leq \upsilon(A)\upsilon(B)$

综上是一个矩阵范数。

Ex 8.61

$< S\mathbf{x}, \mathbf{x} >= \sum_{i=1}^n (S\mathbf{x})_i\bar{x}_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n s_{ij}x_j)\bar{x}_i = -\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n \bar{s}_{ji}\bar{x}_i)x_j = -\overline{< Sx, x >}$，因此 $Re < S\mathbf{x}, \mathbf{x} >= 0$。

Ex 8.71

由 Thm 8.48 得 $A = U\Lambda U^H$，其中 $\mathbf{u}_i$ 为 U 的标准正交的特征向量，λ_i 为相应的特征值。定义 $R = span(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, ..., \mathbf{u}_n)$，S 为 $\mathbb{C}^n$ 的一个秩为 k 的空间，有 $dim(R \cap C) \geq 1$，易得

$$\min_{\mathbf{x}\in S\setminus\{\mathbf{0}\}} \upsilon_A(\mathbf{x}) \leq \min_{\mathbf{x}\in S\cap R\setminus\{\mathbf{0}\}} \upsilon_A(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{x}\in S\cap R\setminus\{\mathbf{0}\}} \upsilon_A(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{x}\in R\setminus\{\mathbf{0}\}} \upsilon_A(\mathbf{x}) = \lambda_k$$

因此我们得到了

$$\lambda_k \geq \min_{dim(S)=k} \upsilon_A(\mathbf{x})$$

再令 $S = span(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k)$ 即可得到等号。

Ex 8.77

不妨设 $\mathbf{x} = (1, 0, ..., 0)$，有 $< A\mathbf{x}, \mathbf{x} >= a_{11}$，故 $a_{11} \in \mathbb{R}$；同理可得 $a_{ii} \in \mathbb{R}$。再令 $\mathbf{x} = (1, 1, 0, ..., 0)$，有 $< A\mathbf{x}, \mathbf{x} >= a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$，而 $a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}$，故 $Im(a_{12}) + Im(a_{21}) = 0$；再令 $\mathbf{x} = (1, i, 0, ..., 0)$，有 $< A\mathbf{x}, \mathbf{x} >= a_{11} + ia_{12} - ia_{21} - a_{22}$，故 $Re(a_{12}) = Re(a_{21})$，综上得 $a_{12} = \bar{a}_{21}$。同理易证得 $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$。故 A 为 Hermit 矩阵。

Ex 8.88

$\upsilon(A) \leq ||A||_2$ 已证，下证 $\upsilon(A) \geq \frac{1}{2}||A||_2$。我们不失一般性的假设 $||\mathbf{x}||_2 = 1$。由 Def 8.82 我们可以得到 $A = H + iS$，其中 H 为 Hermite 矩阵，S 为反 Hermite 矩阵。我们有 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ $||\mathbf{x}||_2 = 1$ 满足

$$| < A\mathbf{x}, \mathbf{x} > | = | < (H + iS)\mathbf{x}, \mathbf{x} > | = | < H\mathbf{x}, \mathbf{x} > +i < S\mathbf{x}, \mathbf{x} > |$$

$$= \sqrt{< H\mathbf{x}, \mathbf{x} >^2 + < S\mathbf{x}, \mathbf{x} >^2} \geq \sqrt{(\frac{< H\mathbf{x}, \mathbf{x} > + < S\mathbf{x}, \mathbf{x} >}{2})^2}$$

$$\geq \frac{1}{2}(||H\mathbf{x}||_2 + ||S\mathbf{x}||_2) \geq \frac{1}{2}(||(H + iS)\mathbf{x}||_2) = \frac{1}{2}||A\mathbf{x}||_2$$

其中第二个三个等式由 Hermite 矩阵和反 Hermite 矩阵关于内积的性质得到，第一个不等号由二次函数 $f(x) = x^2$ 的凸性得到，第二个不等式由绝对值的性质得到，第三个不等式由范数的定义得到。其他的关系都是简单的。由此我们得到 $\upsilon(A) = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n} \frac{<A\mathbf{x},\mathbf{x}>}{\mathbf{x},\mathbf{x}} \geq \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n} \frac{1}{2}\frac{||A\mathbf{x}||_2}{||\mathbf{x}||_2} = \frac{1}{2}||A||_2$

Ex 8.97

对于 AC 中的任意一个元素 $(AC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \leq \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj} = (BC)_{ij}$。因此 $AC \leq BC$；同理可证得 $CA \leq CB$。

考虑采用数学归纳法。当 $n = 1$ 时，等式显然成立，先假设当 $n = k$ 时等式成立，即 $A^k \leq B^k$。则当 $n = k+1$ 时有 $(A^{k+1})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} \leq \sum_{k=1}^{n} b_{ik}b_{kj} = (B^{k+1})_{ij}$。有数学归纳法知不等式成立。

Ex 8.109

依题意得

$$D = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & & \\ & \ddots & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

$$L = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{G,S} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N = U = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

对于 (RSM-1) 和 (RSM-4) 这都是很容易得到的。$det(M) = (\frac{2}{h^2})^n \neq 0$，由此 (RSM-2) 得证；通过观察上述矩阵不难发现主对角元的伴随矩阵的行列式均为正数，次对角元的行列式均为 0，由此得到 $M^{-1} \geq 0$，(RSM-3) 得证。由此可知 $M_{G,S}$ 和 N 是 A 的一个正则分裂。再由 Example 8.102 知 A 是一个 M-矩阵，故 A 可逆且 $A^{-1} \geq 0$，由 Lemma 8.3 和 The 8.107 知 $\rho(T_{G,S}) < 1$。