Numerrical Analysis

欧阳尚可 3190102458

2021 年 12 月 14 日

1 Assignments

Problem 1

$477 = 256+128+64+16+8+4+1 = 2^8+2^7+2^6+2^4+2^3+2^2+2^0$，
所以 $477 = (111011101)_2 = (1.11011101)_2 * 2^8$。

Problem 2

$\frac{3}{5} = (0.100110011...)_2 = (1.00110011...)_2 * 2^{-1}$。

Problem 3

由于 $x = \beta^e$，因此有 $x_R = (1+\frac{1}{\beta^{p-1}}) * \beta^e; x_L = [(\beta-1)+\frac{\beta-1}{\beta}+...+\frac{\beta-1}{\beta^{p-1}}] * \beta^{e-1}$。因此有 $x_R - x = \frac{1}{\beta^{1-p}} * \beta^e; x - x_L = \frac{1}{\beta^{1-p}} * \beta^{e-1}$，由此得出 $x_R - x = \beta(x - x_L)$。

Problem 4

有第二题易得,第一位为 0,指数位为 01111110。因此 $\frac{3}{5} = 00111111000110011001100110011010$。
因此 $x_L = 00111111000110011001100110011001, x = x_R = 00111111000110011001100110011010$。
所以 $x - x_L = \frac{3}{5} * 2^{-24}$。因此 $x_R - x = \frac{2}{5} * 2^{-24}$。所以相对误差为 $\frac{2}{3} * 2^{-24}$。

Problem 5

仿照 Theorem 2.27 的推导过程，我们有 $fl(x) = x_L; x - x_l \leq x_R - x_l = \beta^{1-p} = \epsilon_M$。

Problem 6

将 $x = \frac{1}{4}$ 代入计算很容易得到 $2^{-6} < 1 - cos(\frac{1}{4}) < 2^{-5}$，由 Theorem 2.49 由最小损失精度为 5 个比特。

Problem 7

方法一：仿照 Example 2.51 进行 Taylor 展开。$1 - cosx = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - ....$。方法二：采用二倍角公式，$1 - cosx = 2(sin\frac{x}{2})^2$。

Problem 8

当 $\alpha = 0$ 时，函数为常数函数，条件数为 0。当 $\alpha \neq 0$ 时，$C_f = |\frac{x*\aleph(x-1)^{\aleph-1}}{(x-1)^{\aleph}}| = |\frac{\aleph x}{x-1}|$。条件数在 $x=1$ 附近是病态的。

$C_f(x) = |\frac{x*\frac{1}{x}}{lnx}| = |\frac{1}{|lnx|}|$。条件数在 $x=1$ 附近是病态的。

$C_f(x) = |\frac{x*e^x}{e^x}| = |x|$。在 x 很大时是病态的。

$C_f(x) = |\frac{x*(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})}{arccosx}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}}arccosx}$。条件数在 $x=1,-1$ 附近是病态的。

Problem 9

$C_f(x) = |\frac{x*e^{-x}}{1-e^{-x}}| = \frac{x}{e^x-1}, x \in [0,1]$。

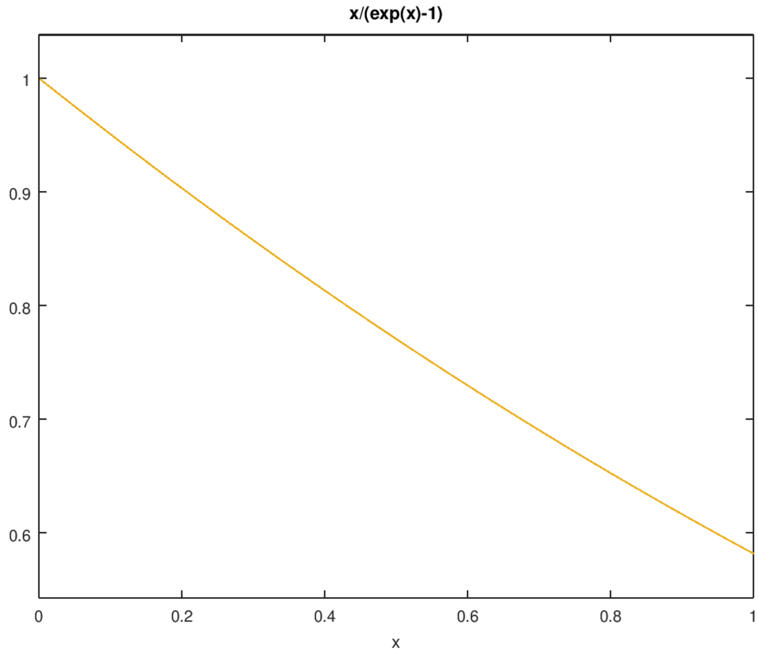
仿照 Example 2.77。我们有

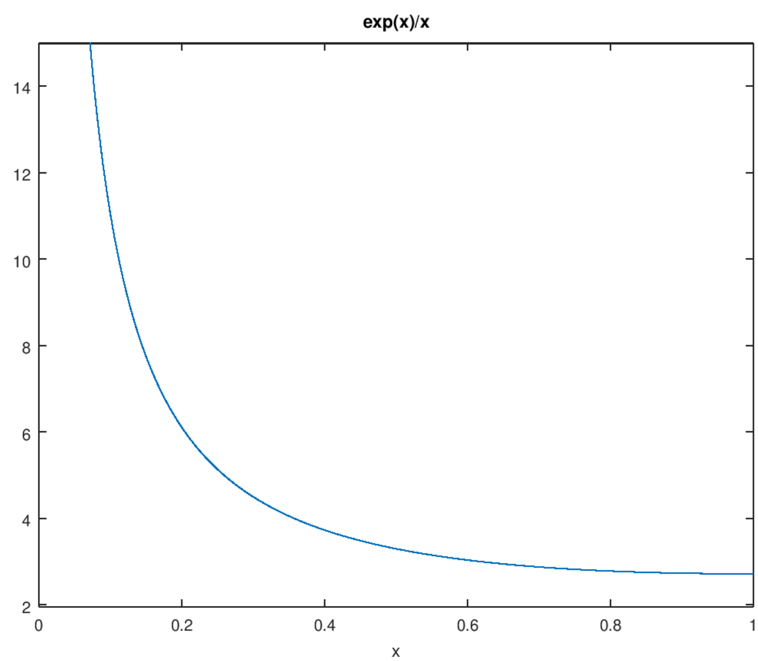
$$f_A(x) = fl[1 - fl(e^{-x})] = (1 - e^{-x}(1+\delta_1))(1+\delta_2),$$

在这里 $|\delta_i| \leq \epsilon_u, i = 1,2$。我们忽视 $O(\delta_i^2)$，得到

$$f_A(x) = 1 - e^{-x}1 + \delta_2 - \delta_1\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}},$$

令 $\phi(x) = 1 + \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$。因此有 $cond_A(x) \leq \frac{e^x-1}{x} * (1 + \frac{1}{1-e^{-x}}) = \frac{e^x}{x}$。





从图像中我们可以分析出虽然从数学上我们得出这个函数在 0 附近的

条件数是良态的，但是从算法的角度分析，该函数在 0 附近的条件数是病态的。

Problem 10

由导数的定义我们很容易得到 $\frac{\partial f}{a_i} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{r+h-r}{\epsilon}$。要求这个极限，我们令 $l(x) = a_0 + a_1 x + a_{n-1}x^{n-1} + x^n, m_i(x) = x^i, L(x) = l(x) + \epsilon m_i(x)$。由 Lemma 2.63 知 $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{r+h-r}{\epsilon} = \frac{m(r)}{l'(r)} = \frac{r^i}{nr^{n-1}+(n-1)a_{n-1}r^{n-2}+\ldots+a_1}$。由此可得 $||A(x)||_1 = \sum_{j=1}^{n} |\frac{a_j r^j}{nr^n \sum_{i=1}^{n-1} a_i i r^i}|$。

令 $r = p$，代入计算得 $C_1 = \frac{\prod_{k=1}^{p}(p+k)}{p\prod_{k=1}^{p-1}(p-k)} = \frac{2p!}{(p!)^2}$。通过简单的计算可以发现 C_1 在 p 很大时是病态的。这再次印证了我们的结论，函数的病态与否是不会因为我们条件数的选择而发生改变的。

Problem 11

反例如下：对十进制下的精度为 2、L=-1、U=1 的浮点数系统考虑如下除法 $1.0/2.2 = 0.45454545....$。我们希望得到结果是 $4.5 * 10^{-1}$。若只保留至 2p 位，得到 0.455，规范化得到 $4.55 * 10^{-1}$，再保留至 p 位得到 $4.6 * 10^{-1}$，这与希望得到的结果不同。若保留至 $2p + 1$ 位得到 0.4545，规范化得到 $4.545 * 10^{-1}$，再保留至 p 位得到 $4.5 * 10^{-1}$，这与希望得到的结果是一致的。

Problem 12

当两个点的距离明显小于其他点时，我们很容易发现我们要求解的系数矩阵 A 的每个次对角线上面的元素都会有一个趋近于 1，一个趋近于 0。这会导致矩阵 A 的逆矩阵范数变得很大，因此 A 矩阵的条件数变大，问题求解不稳定。

Problem 13

我们有 $128 = 2^7 = (10000000)_2, 129 = 2^7 + 2^0 = (10000001)_2$。因此对于在 $[128, 129]$ 中间的数，有其指数部分为 7，第一位为 0，剩下的 23 位中前七位为 0，因此，对于在 $[128, 129]$ 中间的数，其精度最小为 $2^{-16} < 10^{-6}$。

所以不能

Problem 14

同样仿照 Example 2.77，我们有

$$f_A(x) = fl[\frac{fl(sinx)}{fl(1+fl(cosx))}] = \frac{sinx(1+\delta_1)}{(1+cosx(1+\delta_2))(1+\delta_3)}(1+\delta_4),$$

同样有 $|\delta_i| \le \epsilon_u, i = 1, 2, 3, 4$。忽略 $O(\delta_i^2)$，得到

$$f_A(x) = \frac{sinx}{1+cosx}1 + \delta_1 + \delta_4 - \delta_3 - \delta_2\frac{cosx}{cosx+1},$$

令 $\phi(x) = 3 + \frac{1+cosx}{cosx}$，同时我们可以很容易得出

$$cond_f(x) = \frac{1}{cosx+1},$$

因此有

$$cond_A(x) \le \frac{x}{sinx}(3 + \frac{cosx}{cosx+1})$$

。