Numerrical Analysis

欧阳尚可 3190102458

2022 年 1 月 6 日

Problem 1

$||g||_\infty = \max_{1\le i\le N}|g_i| = O(h)$;$||g||_1 = h\sum_{i=1}^{N}|g_i| = O(h^2)+\sum_{i=2}^{N-1}O(h^3) = O(h^2)$; $||g||_2 = (h\sum_{i=1}^{N}|g_i|^2)^{\frac{1}{2}} = [O(h^3)+\sum_{i=2}^{N-1}O(h^5)]^{\frac{1}{2}} = O(h^{\frac{2}{3}})$

Problem 2

不妨让我们假设 B 矩阵第一列的所有元素分别为 $b_1, b_2..., b_{m+2}$，由矩阵 B 和 A_E 互为逆矩阵很容易得到

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(-h*b_1+h*b_2)=1 \\ b_1-b_2=b_2-b_3 \\ ...... \\ b_{m+2}*1=0 \end{cases}$$

从这些方程我们可以得到 $b_{m+2}=0, b_{m+1}=-h, b_m=-2*h...$，从而我们可以得到 B 的第一列是 $O(h)$，进而是 $O(1)$。

problem 3

由泰勒展开很容易得到 $\frac{U_{i-1,j}-2U_{i,j}+U_{i+1,j}}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(x_i,y_i)} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}|_{(x_i,y_i)} + O(h^4)$,$\frac{U_{i,j-1}-2U_{i,j}+U_{i,j+1}}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|_{(x_i,y_i)} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}|_{(x_i,y_i)} + O(h^4)$。由此可以得到 $\tau_{i,j} = -\frac{h^2}{12}(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4})|_{(x_i,y_i)} + O(h^4)$。

Problem 4

第三问我们已经证明了在规则点处 LTE 是 $O(h^2)$。而在非规则点处有 $\tau_p = \frac{(1+\theta)U_P-U_A-\theta U_W}{\frac{1}{2}\theta(\theta+1)h^2} + \frac{(1+\alpha)U_P-U_B-\theta U_S}{\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)h^2} + (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})|_{(x_P,y_P)}$。而在 U_A 处考虑泰勒展开有 $U_A = U_P + \frac{\partial u}{\partial x}|_{(x_P,y_P)}\theta h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(x_P,y_P)}\frac{(\theta h)^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}|_{(x_P,y_P)}\frac{(\theta h)^3}{6} + O(h^4)$，在另外三个 U_W, U_B, U_S 上面进行同样的操作有 $\tau_p = \frac{h}{3}[(\theta-1)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (\alpha-1)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}]|_{(x_P,y_P)} + O(h^2)$。从而得到 LTE 为 $O(h)$。

Problem 5

仿照 7.55 的构造有

$$\Phi_P = E_P + max\{\frac{T_1}{C_1}, \frac{T_2}{C_2}\}\phi_P$$

我们有 $L_hE_p = -T_p; \forall P \in X_1, L_h\phi_P \leq -C_1; \forall P \in X_2, L_h\phi_P \leq -C_2, \forall P \in X_2$，由此不难得到

$$\forall P \in X_1, L_h\Phi_P \leq -T_P - C_1 max\{\frac{T_1}{C_1}, \frac{T_2}{C_2}\} \leq -T_P - T_1 \leq 0$$

$$\forall P \in X_2, L_h\Phi_P \leq -T_P - C_2 max\{\frac{T_1}{C_1}, \frac{T_2}{C_2}\} \leq -T_P - T_2 \leq 0$$

因此有

$$E_P \leq \max_{P \in X_\Omega}(E_P + max\{\frac{T_1}{C_1}, \frac{T_2}{C_2}\}\phi_P) \leq \max_{Q \in X_\Omega}(E_Q + max\{\frac{T_1}{C_1}, \frac{T_2}{C_2}\}\phi_Q) = \max_{Q \in X_{\partial\Omega}} \phi(Q)(E_P + max\{\frac{T_1}{C_1}, \frac{T_2}{C_2}\})$$

再由我们刚开始的假设有

$$\forall P \in X, |E_P| \leq \max_{Q \in X_{\partial\Omega}} \phi(Q)(E_P + max\{\frac{T_1}{C_1}, \frac{T_2}{C_2}\})$$