Numerrical Analysis

欧阳尚可 3190102458

2021 年 12 月 28 日

1 Assignments

Problem 1

假设 $p_3(y;-1,0,0,1;t) = at^3+bt^2+ct+d$，由条件得

$$\begin{cases} -a+b-c+d = y(-1) \\ d = y(0) \\ a+b+c+d = y(1) \\ c = y^{'}(0) \end{cases} \tag{1}$$

化简得 $a=c=0; d=y(0); b=\frac{y(-1)-2y(0)+y(1)}{2}$。因此 $\int_{-1}^{1} p_3(y;-1,0,0,1;t)dt = \frac{y(-1)+4y(0)+y(1)}{3}$。由此得证。

$E^s(y) = \int_{-1}^{1} \frac{f^4(\epsilon)}{4!} t^2(t-1)(t+1)dt = -\frac{f^4(\epsilon)}{90}$。

对于多段的情况只需要在 $(x_k, x_{j+2}$ 上分别考虑再累和即可得其表达式

$$I_k^S(f) = \frac{h}{3}(f(x_k)+4f(x_{k+1}+f(x_{k+2}))$$

$$E_k^S(f) = -\frac{(2h)^5}{2880} f^{(4)}(\epsilon)$$

再进行简单的累和以及中值定理即可得到结论。

$$I_n^S(f) = \sum_{k\in 2\mathbb{N}} I_k^S(f) = \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+...+4f(x_{n-1}+f(x_n))$$

$$I_n^S(f) = \sum_{k\in 2\mathbb{N}} I_k^S(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\epsilon)$$

Problem 2

$|E_n^T(f)| = |\frac{1}{12n^2} f^{''}(\epsilon)|$。而 $f^{'''}(x) = e^{-x^2}(12x-8x^3)$ 在 [0,1] 上大于等于 0 恒成立。故 $|E_n^T(f)| \leq \frac{1}{6n^2} \leq 0.5*10^{-6}$ 由此的 $n \geq 578$。

$|E_n^S(f)| = |\frac{1}{180n^4} f^{(4)}(\epsilon)|$。而 $f^{(4)}(x) = e^{-x^2}(12-48x^2+16x^4) \leq 12$。由此得 $n \neq 37$。

Problem 3

$\int_0^\infty (t^2+at+b)e^{-t}dt = 0$ 和 $\int_0^\infty (t^3+at^2+bt)e^{-t}dt = 0$ 得 $a=-4; b=2$。

$\pi_2(t)=0$ 得 $x_1 = 2+\sqrt{2}; x_2 = 2-\sqrt{2}$。再由 $\omega_1+\omega_2 = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1; x_1\omega_1 + x_2\omega_2 = \int_0^\infty te^{-t}dt = 1$ 得 $\omega_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}; \omega_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$。$E_2^G(f) = \frac{f^{(4)}(\tau)}{4!}\int_0^\infty (t^2-4t+2)^2 e^{-t}dt = \frac{f^{(4)}(\tau)}{6}$。

$I_2(f) = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 = \frac{4}{7}$。$E_2^G(f) = I - I_2$ 由此解得 $\tau = 1.76125$。

Problem 4

$p(x_k) = (a_k+b_kx_k)f_k + (c_k+d_kx_k)f_k^{'}$ 得 $a_k+b_k*x_k = 1; c_k+d_k*x_k = 0$。$p^{'}(x_k) = [b_k+2(a_k+b_k*x_k)\sum_{j\neq k}^n \frac{1}{x_k-x_j}]f_k + [d_k+2(c_k+d_k*x_k)\sum_{j\neq k}^n \frac{1}{x_k-x_j}]f_k^{'}$ 得 $b_k+2(a_k+b_k*x_k)\sum_{j\neq k}^n \frac{1}{x_k-x_j} = 0; d_k+2(c_k+d_k*x_k)\sum_{j\neq k}^n \frac{1}{x_k-x_j} = 1$，联立解得 $a_k = 1+2x_k\sum_{j\neq k}^n \frac{1}{x_k-x_j}, b_k = -2\sum_{j\neq k}^n \frac{1}{x_k-x_j}, c_k = -x_k, d_k = 1$。

首先我们知道对于一个阶数小于等于 $2n$ 的多项式，由题干确定的多项式 $p(t) = p$。令 $\omega_k = \int \rho(t)h_k(t)dt; u_k = \int \rho(t)q_k(t)dt$，有 $I_n(f) = \sum_{k=1}^n (\omega_k f(x_k) + u_k * f^{'}(x_k) = \int \rho(t)p(t)dt = \int \rho(t)pdt$。所以 $E_n(f) = 0$。

$u_k = \int \rho(t)(-x_k+t)l_k^2(t)dt = \int \rho(t)l_k(t)v_n(t)dt = 0$。而任意的 $\forall p \in \mathbb{P}_{n-1}, p = \sum_{k=1}^n p_k l_k(x)$。因此 $u_k = 0$ 当且仅当 $\forall p \in \mathbb{P}_{n-1}, \int \rho(t)p(t)v_n(t)dt = 0$

Problem 5

假设 $D^2u(x) = au(x-h)+bu(x)+cu(x+h) = (a+b+c)u(x) + (c-a)hu^{'}(x) + (a+c)\frac{h^2}{2}u^{''}(x) + (c-a)\frac{h^3}{6}u^{'''}(x) + (c+a)\frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) + o(h^5)$，有 $a+b+c = 0; c-a = 0; \frac{a+c}{2h^2} = 1$，得 $a = \frac{1}{h^2}, b = -\frac{2}{h^2}, c = \frac{1}{h^2}$，由此可得 $D^2u(x) = \frac{u(x-h)-2u(x)+u(x+h)}{h^2}$。再由三角不等式以及中值定理可得 $|u^{''}(x) - D^2u(x)| \leq \frac{h^2}{12}|f^{(4)}(\epsilon)| + \frac{4E}{h^2}$。由柯西不等式可知 $h = \sqrt[4]{\frac{48E}{M}}$，其中 $M = \max|f^4(\epsilon)|, \epsilon \in [x-h, x+h]$。

假设 $D^2u(x) = au(x-2h)+bu(x-h)+cu(x)+du(x+h)+eu(x+2h) = (a+b+c+d+e)u(x) + (-2a-b+d+2e)hu^{'}(x) + (4a+b+d+4e)\frac{h^2}{2}u^{''}(x) + (-8a-b+d+8e)\frac{h^3}{6}u^{'''}(x) + (16a+b+d+16e)\frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) + (-32-b+d+32e)\frac{h^5}{120}u^{(5)}(x) + (64a+b+d+64e)\frac{|f^{(6)}(\epsilon)|}{720}$，有 $a+b+c+d+e = 0, -2a-b+d+2e = 0, 4a+b+d+4e = \frac{2}{h^2}, -8a-b+d+8e = 0, 16a+b+$

$d+16e=0$，得 $D^2u(x)=\frac{-u(x-2h)+12u(x-h)-30u(x)+16u(x+h)-u(x+2h)}{12h^4}$，同理得 $|u^{(4)}(x)-D^2u(x)|\leq\frac{h^4}{90}|f^{(6)}(\epsilon)|+\frac{16E}{3h^2}$。由柯西不等式可知 $h=\sqrt[6]{\frac{480E}{M}}$，其中 $M=\max|f^{(6)}(\epsilon)|,\epsilon\in[x-h,x+h]$。

通过比较不同阶数的估计我们不难看到，首先无论阶数再大，在有轻微扰动的情况下估计在 h 趋向于 0 时仍然是无法约束的。但是好消息是随着估计阶数的增大，使得误差最小的那个 h 在不断的减小，在这样的 h 附近我们也可以获得更小的误差。