Numerrical Analysis

欧阳尚可 3190102458

2021 年 9 月 27 日

Problem 1

A function f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is *Riemann integrable* on [a, b] iff

$$\forall L \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0,\ s.t.\ \forall \delta > 0, \exists P_n(a,b)\ with\ h(P_n) < \delta,\ s.t.\ |S_n(f) - L| \geqslant \epsilon$$

In this case we write L = $\int_a^b f(x)dx$ and call it the *Riemann integal* of f on [a, b].

Problem 2

0.1 a

$$\exists! x = 2\ s.t.\ x \in 2\mathbb{N}\ and\ x \in \mathbb{P}$$

In this case we write $\mathbb{P}$ denotes the set of primes.

0.2 b

$$\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{N},\ a(bc) = (ab)c$$

0.3 c

$$\exists n \in \mathbb{N},\ s.t.\ \mathbb{G} \sim \{1, 2 ... n\}$$

In this case we write $\mathbb{G}$ denotes the set of the counterexamples of the Goldbach' conjecture.

problem 3

0.4 a

$$\langle \mathbf{u},\ \mathbf{v}\ +\ \mathbf{w} \rangle\ =\ \overline{\langle \mathbf{v}\ +\ \mathbf{w},\ \mathbf{u} \rangle}\ =\ \overline{\langle \mathbf{v},\ \mathbf{u} \rangle}\ +\ \overline{\langle \mathbf{w},\ \mathbf{u} \rangle}\ =\ \langle \mathbf{u},\ \mathbf{v} \rangle\ +\ \langle \mathbf{u},\ \mathbf{w} \rangle$$

0.5 b

$$\langle \mathbf{v},\ a\mathbf{w}\rangle \ = \ \overline{\langle a\mathbf{w},\ \mathbf{v}\rangle} \ = \ \overline{a}\ \overline{\langle \mathbf{w},\ \mathbf{v}\rangle} \ = \ \overline{a}\ \langle \mathbf{v},\ \mathbf{w}\rangle$$

Problem 4

If a > 0, then $|f(x) - f(y)| \ = \ \frac{|x^2-y^2|}{x^2y^2} \ = \ \frac{1}{xy}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})|x-y| \ < \ \frac{2|x-y|}{a^3}$. Hence $\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta = \frac{a^3\epsilon}{2}$, s.t. $|x-y| < \delta \rightarrow |f(x)-f(y)| \ < \ \frac{2|x-y|}{a^3} \ < \ \epsilon$

If a $= 0$, let $\epsilon = 1$, then we need to prove that $\forall\delta \ > \ 0,\ \exists x, y \ > 0\ s.t.\ |x-y| \ < \ \delta \rightarrow |f(x)-f(y)| \geqslant \epsilon$. Choose $y = \delta;\ x, \in (0,\ \delta)$, then we have $|x-y| < \delta$, for $\forall\delta$, we can always find x that satisfies $x < \sqrt{\frac{\delta^2}{\delta^2+1}}$,and the x, y satisfy the condition we need to prove.

Problem 5

行列式这个概念最早是在日本数学家关孝和在《解伏题之法》一书中提出。最开始提出是在解线性方程组的过程中提出的。

下面我们观察二元一次方程组的例子:

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

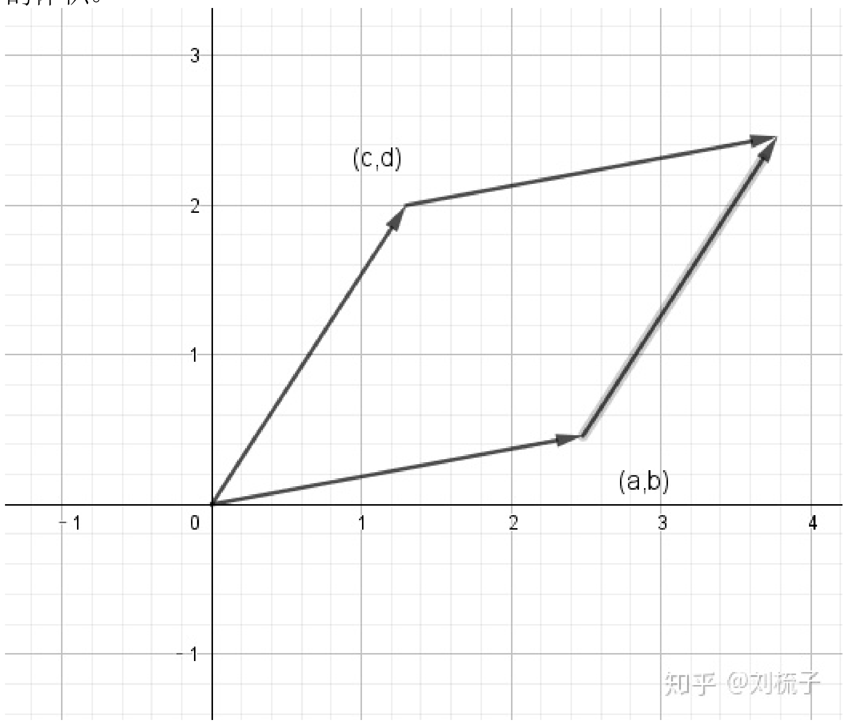
运用消元法我们可以很容易的得出他的基本解。

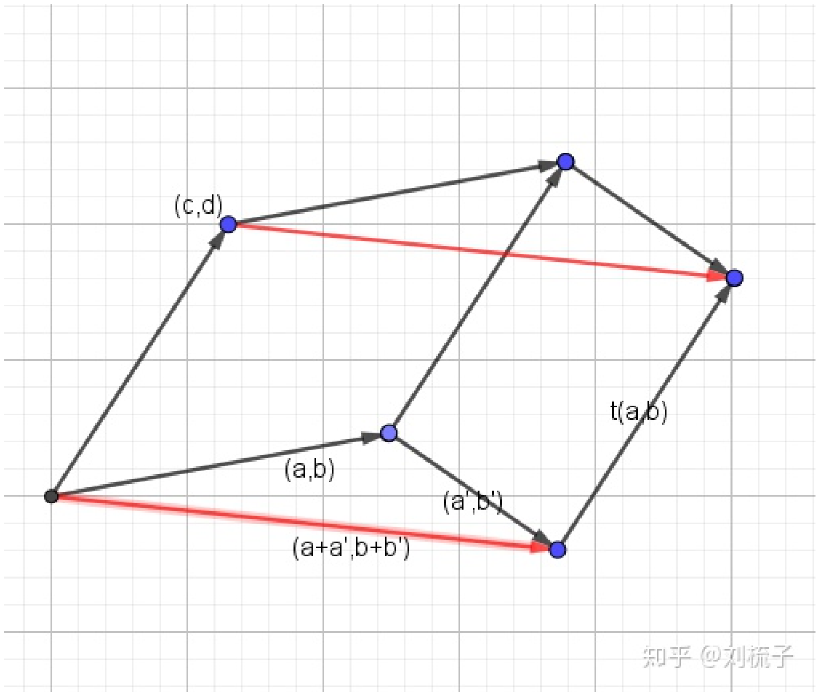
$$\begin{cases} x = \dfrac{b_2a_{1,2}a_{2,1} - b_1a_{2,1}a_{2,2}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}} \\ y = \dfrac{b_1a_{2,2}a_{2,1} - b_2a_{1,1}a_{2,2}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \end{cases} \tag{2}$$

在(2)式中 x, y 的分母为零时说明该方程组有无数组解。不难发现我们计算得出的 x, y 都有相同的分母。并且运用同样的方法在更多元的一次方程组中，我们不难发现他们的基本解都有相同的分母。因此我们把他们所具有的相同的分母记为有他们的系数构成的矩阵的行列式。

在行列式的概念提出之后，人们在几何学的研究中由发现了行列式的几何学意义。同样地，我们还是观察一个二维平面的例子。在平面直角坐标系中，有两个点 X(a, b) 和 Y(c, d) 经过计算我们不难发现在由 **x** 和 **y** 构

成的平行四边形的面积恰好为我们在解二元线性方程组时引入的行列式的值（在 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 共线时面积为零）。并且在将这个结论推广至更高维的过程中，人们发现行列式所对应的值实际上就是对应的向量构成的高维几何平行体的体积。





在抽象数学的发展过程中，人们提出了行列式的概念，甚至基于概念导出了行列式的许多性质，但是无法否认的是在冰冷的数字和字母的计算过程中，我们很难看清楚一些性质的本质，行列式几何意义的发现使得原本很多晦涩的性质有了更加直观的、更加通俗易懂、更加接近本质的另外视角。

经过对行列式的性质的不管研究，我们最终将 n 阶行列式的值用

$$det(a) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} v_{\sigma(i),i}$$

来表示，其中 $sgn\sigma$ 的符号我们按照一下规则来确定（这里我们将 σ 看成一个双射，$\sigma : \{1, 2...n\} \to \{\sigma(1), \sigma(2)...\sigma(n)\}$）：（1）首先我们把恒等映射的符号记为 1；（2）把相邻的两个元素的置换的映射的符号记为-1；（3）其他所有映射可以看成是若干个第二种情况的复合，我们将他们的符号相乘即可得到一个普通映射的符号。

行列式可以看成一个从一般线性群（general linear group）到一个以乘法为运算符号的实数群的一个同态（homomorphism）。

$$det(AB) = det(A) * det(B)$$

同样的，在线性空间中，一组向量要是这个线性空间的一组基的充分必要条件是这组向量所组成的矩阵的行列式要不为零。