NumPDEs

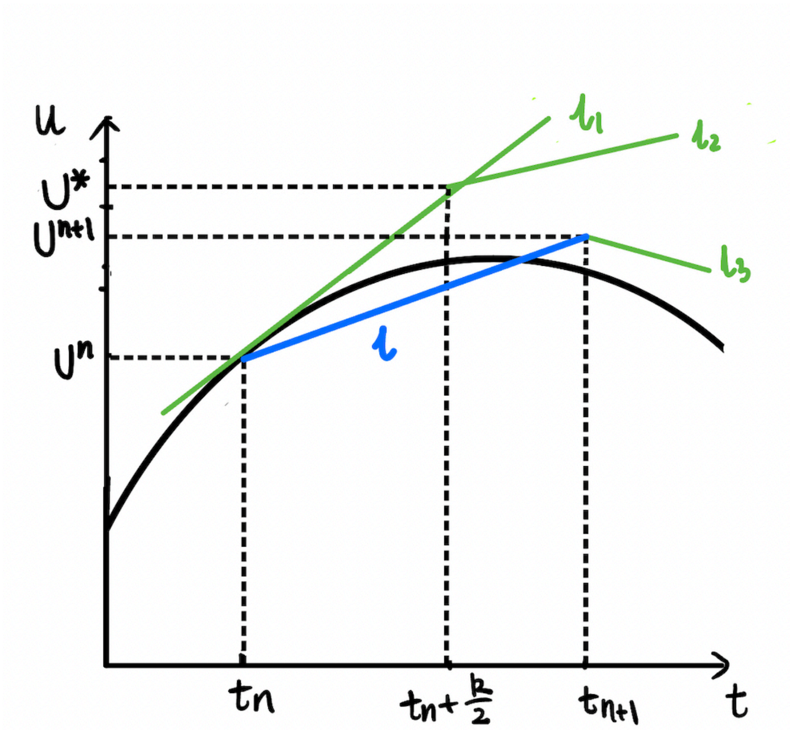
欧阳尚可 3190102458

2022 年 5 月 19 日

Ex 10.159

由图像可得其长度可表示为 $L = U^{n+1} - u(t_{n+1}) + u(t_n) - U^n$，而对于 modified Euler method 有 $\Phi(U^n, t_n; k) = f(U^n + \frac{k}{2} f(U^n, t_n), t_n + \frac{k}{2})$。因此有 $\mathcal{L}u(t_n) = u(t_{n+1}) - u(t_n) - k\Phi(u(t_n) + \frac{k}{2} f(u(t_n), t_n), t_n + \frac{k}{2}) = -L$。

Ex 10.161



Ex 10.165

我们使用 Example 10.156 中相同的记号。我们有

$$\mathcal{L}u(t_n) = u(t_{n+1}) - u(t_n) - ky_2 = u(t_{n+1}) - u(t_n) - kf(u(t_n) + \frac{k}{2}f, t_n + \frac{k}{2})$$

有 Taylor 展开有

$$f(u(t_n)+\frac{k}{2}f, t_n+\frac{k}{2}) = f+\frac{k}{2}ff_u+\frac{k}{2}f_t+\frac{k^2}{8}f^2f_{uu}+\frac{k^2}{8}f_{tt}+\frac{k^2}{8}ff_{ut}+\frac{k^2}{8}ff_{tu}+O(k^3)$$

$$u(t_{n+1})-u(t_n) = kf+\frac{k^2}{2}(f_uf+f_t)+\frac{k^3}{6}(f_u^2f+f_{uu}f^2+f_uf_t+f_{tu}f+f_{ut}f+f_{tt})+O(k^4)$$

由上面两式我们可以得到 $\mathcal{L}u(t_n) = \Theta(k^3)$。

Ex 10.174

我们考虑 $u^{'}(t) = \lambda u$，由 TR-BDF2 的定义有

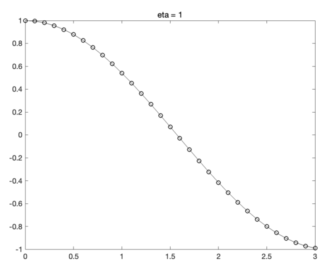
$$U^* = U^n + \frac{k\lambda}{4}(U^n + U^*)$$

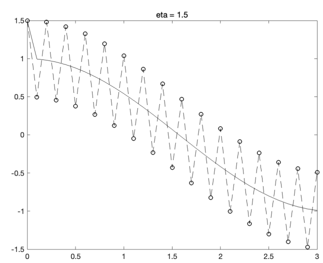
$$U^{n+1} = \frac{1}{3}(4U^* - U^n + k\lambda U^{n+1})$$

令 $z = k\lambda$ 由第一个等式可以解得 $U^* = \frac{1+\frac{z}{4}}{1-\frac{z}{4}}$ 再将结果带入第二个等式可以解得 $U^{n+1} = \frac{1+\frac{5}{12}z}{1-\frac{7}{12}z+\frac{1}{12}z^2}$。

而对于 e^z 进行 Taylor 展开有 $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + O(z^3)$ 因此 $R(z) - e^z = \frac{5z^3-z^4}{24-14z+2z^2} + O(z^3) \to O(z^3), z \to 0$。

Ex 10.179





Ex 10.182

由这三种方法定义不难得出

0	0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	0	1

表 1: Modified Euler

0	0	0
1	1	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

表 2: Improved Euler

0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0
	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$

表 3: Heun's third-order

Ex 10.183

为了简洁起见，我们记 $y_i = f(\xi_i, t_n + c_i k)$。由此我们得到 $\xi_i = U^n + k\sum_{j=1}^{s} a_{i,j} y_j$，带入第二个等式得到 $U^{n+1} = U^n + k\sum_{j=1}^{s} b_j f(\xi_j, t_n + c_j k) = U^n + k\sum_{j=1}^{s} b_j f(U^n + k\sum_{l=1}^{s} a_{j,l} y_l, t_n + c_j k)$。由 (10.121) 中的第一个等式我们进一步得到：原式 $= U^n + k\sum_{j=1}^{s} b_j y_j$ 这就是 (10.121) 中的第二个等式。

Ex 10.190

由 Taylor 展开得到

$$
\begin{aligned}
u(t_{n+1}) - u(t_n) &= kf + \frac{k^2}{2}(f_u f + f_t) + \frac{k^3}{6}(f_u^2 f + f_{uu} f^2 + f_u f_t + f_{tu} f + f_{ut} f + f_{tt}) + O(k^4) \\
y_1 &= f \\
y_2 &= f(U^n + k a_{21} y_1, t_n + c_2 k) \\
&= f + k(a_{21} y_1 f_u + c_2 f_t) + \frac{k^2}{2}\{(a_{21} y_1)^2 f_{uu} + a_{21} c_2 y_1 f_{ut} + a_{21} c_2 y_1 f_{tu} + c_2^2 f_{tt}\} + O(k^3) \\
y_3 &= f(U^n + k a_{31} y_1 + k a_{32} y_2, t_n + c_3 k) \\
&= f + k[(a_{31} y_1 + a_{32} y_2) f_u + c_3 f_t] \\
&+ \frac{k^2}{2}[(a_{31} y_1 + a_{32} y_2)^2 f_{uu} + c_3(a_{31} y_1 + a_{32} y_2) f_{ut} + c_3(a_{31} y_1 + a_{32} y_2) f_{tu} + c_3^2 f_{tt}] + O(k^3)
\end{aligned}
$$

考虑到 $\mathcal{L}u(t_n)=u(t_{n+1})-u(t_n)-kb_1y_1-kb_2y_2-kb_3y_3$。将上面展开的结果带入并且令 k,k^2,k^3 到系数全部为零并且运用等式 $c_2=a_{21};c_3=a_{31}+a_{32}$

$$\begin{cases} 1-b_1-b_2-b_3=0 \\ \frac{1}{2}-b_2a_{21}-b_3(a_{31}+a_{32})=0 \\ \frac{1}{3}-b_2a_{21}^2-b_3(a_{31}+a_{32})^2=0 \\ \frac{1}{6}-b_3a_{21}a_{32}=0 \end{cases}$$

题目中提到的一种形式只需要令 $b_1=\frac{1}{4};b_3=\alpha$ 即可。

Ex 10.196

($\Leftarrow$) 由于 f 的阶数比 r 小，由 Taylor 展开有 $f(t_n+c_jk)=f(t_n)+c_jkf^{'}(t_n)+...+\frac{(c_jk)^(r-1)}{(r-1)!}f^{r-1}(t_n)$，再由 $\sum_{j=1}^{s}b_jc_j^{l-1}=\frac{1}{l}$

$$\begin{aligned} k\sum_{j=1}^{s}b_jf(t_n+c_jk) &= k\sum_{j=1}^{s}b_j(f(t_n)+c_jkf^{'}(t_n)+...+\frac{(c_jk)^{r-1}}{(r-1)!}f^{r-1}(t_n)) \\ &= kf(t_n)+...+\frac{k^r}{r!}f^{r-1}(t_n)=\int_{t_n}^{t_n+k}f(t)dt \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) 依题意得

$$\begin{aligned} I_s(f)=k\sum_{j=1}^{s}b_jf(t_n+c_jk)=\int_{t_n}^{t_n+k}f(t)dt=kf(t_n)+...+\frac{k^r}{r!}f^{r-1}(t_n) \\ \Rightarrow \forall l=1,2,...,r,\sum_{j=1}^{s}b_jc_j^{l-1}=\frac{1}{l} \end{aligned}$$

Ex 10.211

由 Definition 10.209 我们知道

$$u^{'}(t)-p^{'}(t)=\frac{u^{s+1}(\xi)}{s!}\prod_{i=1}^{s}(t-t_n-c_ik)$$

记 $M_i=max\{|c_i|,|1-c_i|\}$，我们有 $|t-t_n-c_ik|\le M_ik$，再令 $M=max_{t_n\le t\le t_{n+1}}\frac{u^{s+1}(t)}{s!}\prod_{i=1}^{k}M_i$ 我们可以得到 $max_{t_n\le t\le t_{n+1}}|u^{'}(t)-p^{'}(t)|\le Mk^s$。再令 $p(t_n)=u(t_n)$

$$|\mathcal{L}u(t_n)|=|u(t_{n+1})-p(t_{n+1})|=\int_{t_n}^{t_{n+1}}|u^{'}(t)-p^{'}(t)|dt\le Mk^{s+1}=O(k^{s+1})$$

Ex 10.213

由 $\forall i=1,2,...,s; \sum_{j=1}^{s} l_j(c_j)=1$ 且 $\sum_{j=1}^{s} l_j(\tau)$ 小于 s, 故 $\sum_{j=1}^{s} l_j(\tau)=1$，因此 $\forall i=1,2,...,s$ 有

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = \int_0^{c_i} \sum_{j=1}^{s} l_j(\tau) d\tau = c_i$$

$$\sum_{j=1}^{s} b_j = \int_0^{1} \sum_{j=1}^{s} l_j(\tau) d\tau = 1$$

Ex 10.215

仿照 Example 10.214 我们得到

$$\begin{aligned} l_1(\tau) &= (2\tau-1)(4\tau-3) \\ l_2(\tau) &= -(4\tau-1)(4\tau-3) \\ l_3(\tau) &= (4\tau-1)(2\tau-1) \end{aligned}$$

由 (10.149) 我们可以得到

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{4} & \frac{23}{48} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{48} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{16} & 0 & \frac{3}{16} \\ \hline & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$$

Ex 10.218

依题意得

$$\begin{aligned} (V\mathbf{u})_k &= \sum_{j=1}^{s} c_j^{k-1} u_j = \sum_{j=1}^{s} c_j^{k-1} \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{m-1} a_{ij} = \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{m-1} \sum_{i=1}^{s} c_j^{k-1} a_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{m-1} \frac{c_i^k}{k} = \frac{1}{k(m+k)} \\ (V\mathbf{v})_k &= \sum_{j=1}^{s} c_j^{k-1} u_j = \sum_{j=1}^{s} c_j^{k-1} \frac{1}{m} b_j (1-c_j^m) = \frac{1}{mk} - \frac{1}{m(m+k)} = \frac{1}{k(m+k)} \end{aligned}$$

这意味着 V(**u**-**v**)=0，而 V 为 Vandermonde 矩阵可以 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$。

Ex 10.222

依题意得 Ex 10.215 中的方法是 3-stage 以及 $q(x)=(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})$，有 $\int_0^k q(x)dx=0; \int_0^k q(x)xdx\neq 0$ 可知他是四阶精确的。

Ex 10.248

由定义得

$$A=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可得

$$(I-zA)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{z}{2} & 1 & & \\ \frac{z^2}{4} & \frac{z}{2} & 1 & \\ \frac{z^3}{4} & \frac{z^2}{2} & z & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{b}=[\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6}]^T$ 有 $R(z)=1+z\mathbf{b}^T(I-zA)^{-1}\mathbf{1}=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}$

Ex 10.242

由上面可知 $R(z)=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}=e^z+O(z^5)$ 再由 Theorem 10.249 可知其四阶精确进一步得到 $\mathcal{L}u(t_n)=O(k^5)$。

Ex 10.253

$\forall z\in S_1, |1+z|\leq 1,$ 因此有 $|1+z+\frac{z^2}{2}|=\frac{1}{2}|(z+1)^2+1|\leq\frac{1}{2}(|z+1|^2+1)\leq 1$，因此 $S_1\subset S_2$。

$\forall z\in S_2, |1+z+\frac{z^2}{2}|<1$，记 $1+z+\frac{z^2}{2}=re^{i\theta}$ 有 $z=\sqrt{2re^{i\theta}-1}-1$

更高阶的情况显然不成立，因为 z=0.03+i1.2 时得到 $z\in S_3, z\notin S_4$。

Ex 10.259

依题意得 A-stable RK 方法是 L-stable$\Leftrightarrow\lim_{z\to\infty}|R(z)|=\lim_{z\to\infty}|\frac{P(z)}{Q(z)}|=0$。而 $Q(z)$ 与 $P(z)$ 都是多项式，所以 $\lim_{z\to\infty}|\frac{P(z)}{Q(z)}|=0\Leftrightarrow degQ(z)<degP(z)$。

Ex 10.262

(10.189) 告诉我们 $b_1\mathbf{1} = A\mathbf{e}_1$，而 A 是非奇异的，有 $b_1 A^{-1}\mathbf{1} = \mathbf{e}_1 \Rightarrow b_1\mathbf{b}^T A^{-1}\mathbf{1} = \mathbf{b}^T\mathbf{e}_1 \Rightarrow \mathbf{b}^T A^{-1}\mathbf{1} = 1$。由此我们得到 $\lim_{z\to\infty} R(z) = \lim_{z\to\infty}(z\mathbf{b}^T(I-zA)^{-1}\mathbf{1}) = 1 - \mathbf{b}^T A^{-1}\mathbf{1} = 0$。

Ex 10.267

Ex 10.276

我们定义 $\mathbf{e}^n = U^n - V^n$ 有

$$\begin{aligned}
<\mathbf{e}^{n+1},\mathbf{e}^{n+1}> &=< \mathbf{e}^{n+1},\mathbf{e}^{n+1}-\mathbf{e}^n> + <\mathbf{e}^{n+1},\mathbf{e}^n> \\
&=< \frac{\mathbf{e}^{n+1}+\mathbf{e}^n}{2},\mathbf{e}^{n+1}-\mathbf{e}^n> + <\frac{\mathbf{e}^{n+1}-\mathbf{e}^n}{2},\mathbf{e}^{n+1}-\mathbf{e}^n> + <\mathbf{e}^{n+1},\mathbf{e}^n> \\
&=< \frac{(U^{n+1}+U^n)-(V^{n+1}-V^n)}{2}, k(f(\frac{U^{n+1}+U^n}{2},t_n+\frac{k}{2}) - f(\frac{V^{n+1}+V^n}{2},t_n+\frac{k}{2}))> \\
&+ <\frac{\mathbf{e}^{n+1}-\mathbf{e}^n}{2},\mathbf{e}^{n+1}-\mathbf{e}^n> + <\mathbf{e}^{n+1},\mathbf{e}^n> \\
&\leq< \frac{\mathbf{e}^{n+1}-\mathbf{e}^n}{2},\mathbf{e}^{n+1}-\mathbf{e}^n> + <\mathbf{e}^{n+1},\mathbf{e}^n> \\
&= \frac{1}{2}<\mathbf{e}^{n+1},\mathbf{e}^{n+1}> + \frac{1}{2}<\mathbf{e}^n,\mathbf{e}^n>
\end{aligned}$$

因此有 $<\mathbf{e}^{n+1},\mathbf{e}^{n+1}>\leq<\mathbf{e}^n,\mathbf{e}^n>\Rightarrow ||U^{n+1}-V^{n+1}|| \leq ||U^n - V^n||$。