Numerrical Analysis

欧阳尚可 3190102458

2021 年 11 月 2 日

1 Assignments

Problem 1

考虑线性插值 $p_1(f;x) = kx + n$, 将 x_0 和 x_1 及其对应的函数值代入解得 $k = -\frac{1}{2}; b = \frac{3}{2}$, 因此 $p_1(f;x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$。所以 $f(x) - p_1(f;x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{f^{''}(\epsilon(x))}{2}(x-1)(x-2) = (x^2-3x+2)[\epsilon(x)]^{-3}$, 化简得 $\epsilon(x) = (2x)^{\frac{1}{3}}$ $x \in (1,2)$。

对 $\epsilon(x)$ 进行解析延拓至 [1,2] 可得 $\epsilon(x) = (2x)^{\frac{1}{3}}$ $x \in [1,2]$。对函数进行求导得 $\epsilon^{'}(x) = \frac{1}{3}(2x)^{-\frac{2}{3}}$，可知在 $x \in [1,2]$ 时，$\epsilon^{'}(x) > 0$ 恒成立。所以 $\epsilon(x)$ 在 [1,2] 上单调递增。因此 $max(\epsilon(x)) = 4^{\frac{1}{3}}, min(\epsilon(x)) = 2^{\frac{1}{3}}$。通过前面的推导我们可以得出 $f^{''}(\epsilon(x)) = \frac{1}{x}, x \in [1,2]$, 因此 $max(f^{''}(\epsilon(x))) = 1$。

Problem 2

首先，对于给定的每个点对应的函数值取它们的根号，构成一些新的节点。我们总可以找到 $p \in \mathbb{P}_n$，使得 $p(x_i) = \sqrt{f_i}$。再令 $p^{'}(x) = p^2(x)$，有 $p^{'}(x_i) = f_i, p^{'}(x) \in \mathbb{P}_{2n}^{+}$。

Problem 3

考虑对 $\forall t \in \mathbb{R}$ 使用归纳法，当 $n = 1$ 时，$f[t, t+1] = f[t+1] - f[t] = (e-1)e^t$；现在假设当 $n = k$ 时，$f[t, t+1, ..., t+k] = \frac{(e-1)^k}{k!}e^t$；当 $n = k+1$ 时，$f[t, t+1, ..., t+k, t+k+1] = \frac{f[t+1,...,t+k+1] - f[t,...,t+k]}{k+1} = \frac{1}{k+1}(\frac{(e-1)^k}{k!}e^{t+1} - \frac{(e-1)^k}{k!}e^t) = \frac{(e-1)^{k+1}}{(k+1)!}$。

$f[0, 1, ..., n] = \frac{(e-1)^n}{n!} = \frac{f^{(n)}(\epsilon)}{n!}$, 由此可知 $(e-1)^n = e^\epsilon \to \epsilon = nln(e-1)$。由于 $e - 1 > e^{\frac{1}{2}}$，所以 $\epsilon > \frac{n}{2}$。

Problem 4

由上表可知 $p_3(f;x) = 5 - 2x + x(x-1) + \frac{1}{4}x(x-1)(x-3)$。

$p_3^{'}(f;x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4} \to x = \sqrt{3}$，负值舍去。

0	5			
1	3	-2		
2	5	0	1	
3	12	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$

Problem 5

0	0					
1	1	1				
1	1	7	6			
1	1	7	21	15		
2	128	127	120	99	42	
2	128	448	321	201	102	30

由上表可知 $f[0,1,1,1,2,2]=30$。

由余项的表达形式可知 $\frac{f^{(5)}(\epsilon)}{5!}=f[0,1,1,1,2,2]=30\rightarrow\epsilon=\frac{\sqrt{70}}{7}$。

Problem 6

0	1				
1	2	1			
1	2	-1	-2		
3	0	-1	0	$\frac{2}{3}$	
3	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{36}$

由上表可知 $p_4(f;x)=1+x-2x(x-1)+\frac{2}{3}x(x-1)^2-\frac{5}{36}x(x-1)^2(x-3)$。因此 $f(x)\approx p_4(f;2)=\frac{11}{18}$。

由余项的估计形式可知 $f(x)-p_4(f;x)\leq\frac{1}{5!}f^{(5)}(\epsilon(x))\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\leq\frac{M}{5!}x(x-1)^2(x-3)^2$。令 $g(x)=x(x-1)^2(x-3)^2,x\in[0,3]$，可知 $g(x)$ 在 $x=2$ 处取最大值 2，所以 $f(x)-p_4(f;x)\leq 2M$。

Problem 7

考虑使用数学归纳法进行证明。当 $n=1$ 时，$\triangle f(x)=f(x_1)-f(x_0)=hf[x_0,x_1]$；现假设当 $n=k$ 时，$\triangle^k f(x)=k!h^k f[x_0,x_1,...,x_k]$；则当 $n=k+1$ 时，$\triangle^{k+1}f(x)=\triangle^k f(x+h)-\triangle^k f(x)=k!h^k f[x_1,...,x_{k+1}]-k!h^k f[x_0,...,x_k]=(k+1)hk!h^k f[x_0,...,x_{k+1}]=(k+1)!h^{k+1}f[x_0,...,x_{k+1}]$。

同样考虑使用数学归纳法。当 $n=1$ 时，$\nabla f(x)=f(x)-f(x-h)=hf[x_0,x_{-1}]$；现假设当 $n=k$ 时，$\nabla^k f(x)=k!h^k f[x_0,...,x_{-k}]$；则当 $n=k+1$ 时，$\nabla^{k+1}f(x)=\nabla^k f(x)-\nabla^k f(x-h)=k!h^k f[x_0,...,x_{-k}]-k!h^k f[x_{-1},...,x_{-k-1}]=(k+1)hk!h^k f[x_0,...,x_{-k-1}]=(k+1)!h^{k+1}f[x_0,...,x_{-k-1}]$。

Problem 8

考虑使用数学归纳法。当 $n=1$ 时，$\frac{\partial}{\partial x_0}f[x_0,x_1]=\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}-\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)^2}-\frac{f^{'}(x_0)(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)^2}=\frac{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}-f^{'}(x_0)}{x_1-x_0}=f[x_0,x_0,x_1]$；现假设当 $n=k$ 时，$\frac{\partial}{\partial x_0}f[x_0,...,x_n]=f[x_0,x_0,...,x_n]$；当 $n=k+1$ 时，$\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{f[x_1,...,k_{k+1}]-f[x_0,...,f_k]}{x_{k+1}-x_0}=\frac{f[x_1,...,x_{k+1}]}{(x_{k+1}-x_0)^2}-\frac{f[x_0,x_0,x_1,...,x_k](x_{k+1}-x_0)+f[x_0,...,x_k]}{(x_{k+1}-x_0)^2}=\frac{\frac{f[x_1,...,x_{k+1}]-f[x_0,...,x_k]}{x_{k+1}-x_0}-f[x_0,x_0,x_1,...,x_k]}{x_{k+1}-x_0}=f[x_0,x_0,x_1,...,x_{k+1}]$。

Problem 9

构造 $T_n(x)=cos(narccos\frac{2x-(a+b)}{b-a})$。易得 $T_n(x)$ 有如下性质：$T_{n+1}(x)=2\frac{2x-(a+b)}{b-a}T_n(x)-T_{n-1}(x),T_1=x$；$T_n(x)$ 在 $x_k=\frac{(2k-1)(b-a)\pi}{4n}+\frac{a+b}{2}$ 处 $T_n(x)=0$，在 $x_k^{'}=\frac{k\pi(b-a)}{2n}+\frac{a+b}{2}$ 处 $|T_n(x)|=1$。综上可知，$T_n(x)$ 在 x_n 处的系数为 $\frac{4^{n-1}}{(b-a)^{n-1}}$。

当 $a_0=1$ 时，假设存在一列 $a_1,...,a_n\in\mathbb{R}$，使得由它们构成的 n 次多项式的 $p(x)$ 有 $max_{x\in[a,b]}|p(x)|<\frac{(b-a)^{n-1}}{4^{n-1}}$，令 $Q(x)=\frac{(b-a)^{n-1}}{4^{n-1}}T_n(x)-p(x)$，有上述性质可知 $Q(x)$ 在 $x_k^{'},k=0,1,...,n$ 上变换符号，可知 $Q(x)$ 在 $[a,b]$ 处有 n 个零点，所以 $Q(x)$ 为 n 次多项式，这与 $Q(x)$ 的定义矛盾。由此可知，$max_{x\in[a,b]}|p(x)|\geq\frac{(b-a)^{n-1}}{4^{n-1}}$。(等号在 $p(x)=\frac{(b-a)^{n-1}}{4^{n-1}}T_n(x)$)

当 $a_0\neq 1$ 时，有 $|a_0x^n+...+a_n|=|a_0||x^n+...+a_n^{'}|\geq|a_0|\frac{(b-a)^{n-1}}{4^{n-1}}$。$min\ max_{x\in[a,b]}|a_0x^n+...+a_n|=|a_0|\frac{(b-a)^{n-1}}{4^{n-1}}$

Problem 10

当 $T_n(a) > 0$ 时，令 $Q(x) = \frac{T_n(x)}{|T_n(a)|} - p(x)$。根据 3.40 同样的方法，我们假设 $\exists p \in \mathbb{P}_n^a, s.t. ||\hat{p}_n(x)||_\infty > ||p||_\infty$。那么由于 $|T_n(x)| \leq 1$，所以有 $||p||_\infty < \frac{1}{T_n(a)}$，因此有 $Q(x)$ 在 $x_k^{'}, k = 0, 1, ..., n$ 上变换符号。再由 $Q(x)$ 的连续性知 $Q(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有 n 个零点，又因为 $Q(a) = 0$，所以 $Q(x)$ 至少有 n+1 个零点，而从 $Q(x)$ 的定义中得知其最大次数不会超过 n，矛盾。

当 $T_n(a) < 0$ 时，令 $Q(x) = -\frac{T_n(x)}{|T_n(a)|} - p(x)$。同理可导出矛盾性。因此 $\forall p \in \mathbb{P}_n^a, ||\hat{p}_n(x)||_\infty \leq ||p||_\infty$