NumPDEs

欧阳尚可 3190102458

2022 年 6 月 8 日

1 Exercise

1.1 Ex 12.33

我们只验证 $a \geq 0$ 的情况，对于 $a < 0$ 的情况可以同理推出。由 Taylor 展开有

$$u(x-h,t) = u - hu_x + \frac{1}{2}h^2u_{xx} - \frac{1}{6}h^3u_{xxx} + O(h^4)$$

$$u(x-2h,t) = u - 2hu_x + 2h^2u_{xx} - \frac{4}{3}h^3u_{xxx} + O(h^4)$$

$$u(x,t+k) = u + ku_t + \frac{1}{2}k^2u_{tt} + \frac{1}{6}k^3u_{ttt} + O(k^3)$$

代入得

$$\tau(x,t) = \frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k} + \frac{a}{2h}(3u(x,t) - 4u(x-h,t) + u(x-2h,t)) - \frac{a^2k}{2h^2}(u(x,t) - 2u(x-h,t) + u(x-2h,t))$$

$$= u_t + \frac{1}{2}ku_{tt} + \frac{1}{6}k^2u_{ttt} + O(k^3) + \frac{a}{2h}(2hu_x - \frac{2}{3}h^3u_{xxx}) - \frac{a^k}{2h^2}(h^2u_{xx} - h^3u_{xxx}) + O(h^2) = \frac{a^2kh}{2}u_{xxx} + O(h^2+k^2)$$

注意到 $k = O(h)$ 我们就可以得到方法在时间和空间上的二阶精确。

1.2 Ex 12.34

要有 $\mathbf{U}^{n+1} = T\mathbf{U}^n$，其中

$$T = \mathbf{I} - \frac{\mu}{2}\begin{bmatrix} 3 & & & 1 & -4 \\ -4 & 3 & & & 1 \\ 1 & -4 & 3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} + \frac{\mu^2}{2}\begin{bmatrix} 1 & & & 1 & -2 \\ -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

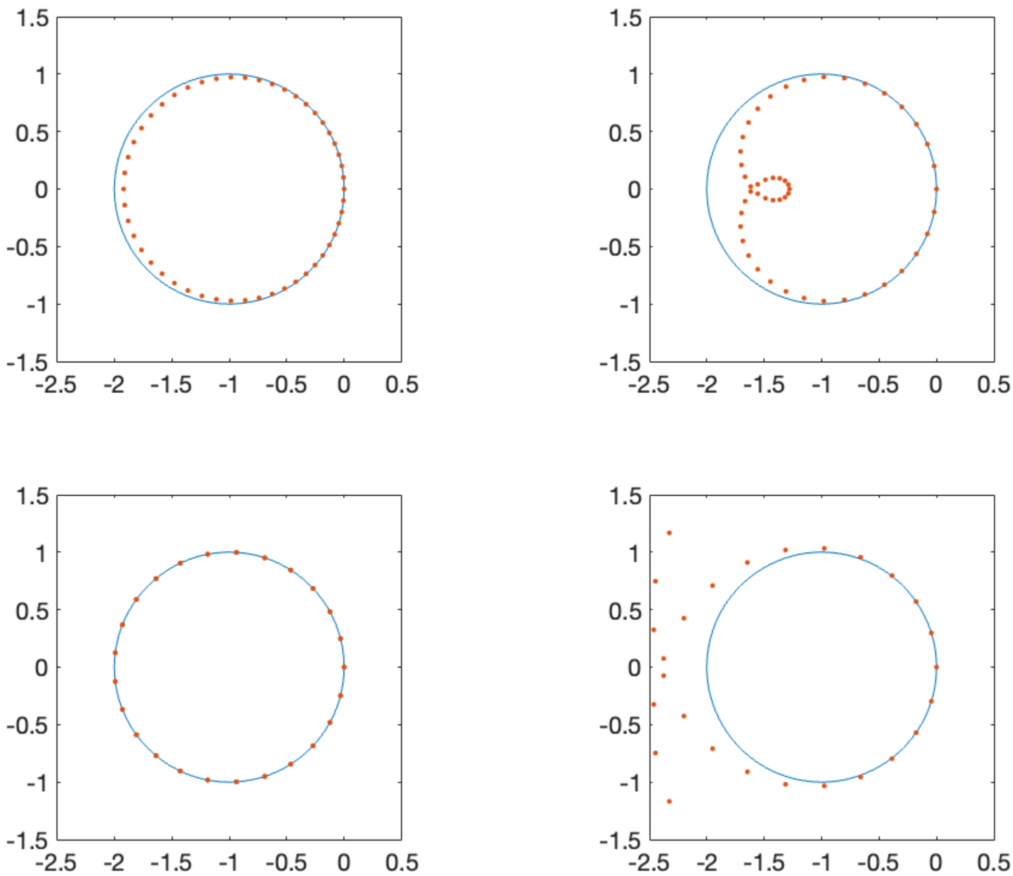
我们有 T 的特征向量 ω^p，其中 $\omega_j^p = e^{2\pi ipjh}, p, j = 1, 2, ..., m+1$

$$(M\omega^p)_j = (1 - \frac{\mu}{2}(3 - 4e^{-2\pi iph} + e^{-4\pi iph}) + \frac{\mu^2}{2}(1 - 2e^{-2\pi iph} + e^{-4\pi iph}))\omega_j^p$$

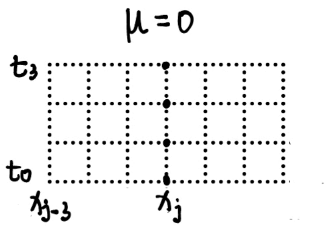
因此我们有相应的特征值 $\lambda_p = 1 - \frac{\mu}{2}(3 - 4e^{-2\pi iph} + e^{-4\pi iph}) + \frac{\mu^2}{2}(1 - 2e^{-2\pi iph} + e^{-4\pi iph}) = \frac{\mu^2-3\mu+2}{2} + \frac{\mu^2-\mu}{2}e^{-4\pi iph} + (2\mu - \mu^2)e^{-2\pi iph}$。进一步我们有

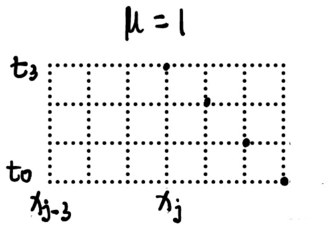
$$|\lambda_p|^2 = 1 + \mu(\mu-2)(\mu-1)^2 sin^4(2\pi ph)$$

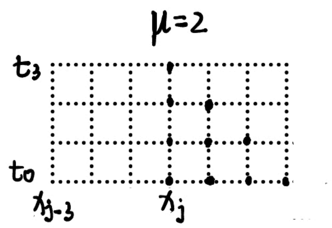
要使得 $|\lambda_p| \leq 1 \Rightarrow \mu \in [0, 2]$。



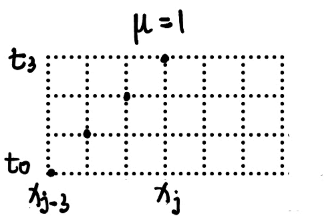
1.3 Ex 12.38

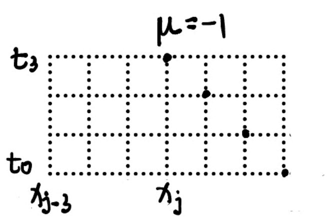






1.4 Ex 12.40





1.5 Ex 12.49

用 $U_j^n = v(x,t)$ 我们有，同时令 $h = O(k)$

$$\frac{v(x,t+k)-v(x,t-k)}{2k} = a\frac{v(x+h,t)-v(x-h,t)}{2h} \Rightarrow v_t + av_x = -\frac{1}{6}k^2v_{ttt} - \frac{a}{6}h^2v_{xxx} + O(h^3)$$

由上面的等式求偏导我们可以进一步得到

$$v_{ttt} = -av_{xtt} + O(k); v_{ttx} = -av_{xxt} + O(k); v_{txx} = -av_{xxx} + O(k)$$

代入得 $v_t + av_x = \frac{a^3}{6}k^2v_{xxx} - \frac{a}{6}h^2v_{xxx} + O(k^3) \Rightarrow (12.43)$

同理可得在 $h = O(k)$ 时，有 $v_t + av_x = -\frac{1}{6}k^2v_{ttt} - \frac{a}{6}h^2v_{xxx} - \frac{1}{120}k^4v_{ttttt} - \frac{1}{120}h^4v_{xxxxx} + O(k^6)$ 由上面的等式求偏导我们可以进一步得到

$$v_{ttt} = -av_{xtt} - \frac{1}{6}k^2v_{ttttt} - \frac{a}{6}h^2v_{xxxtt} + O(k^3); v_{xtt} = -av_{xxt} - \frac{1}{6}k^2v_{ttttx} - \frac{a}{6}h^2v_{xxxxt} + O(k^3)$$

$$v_{ttttt} = -av_{ttttx} + O(k); v_{ttttx} = -av_{tttxx} + O(k); v_{tttxx} = -av_{ttxxx} + O(k); v_{txxxx} = -av_{xxxxx} + O(k)$$

代入化简可以得到 $v_t + av_x + \frac{ah^2}{6}(1-\mu^2)v_{xxx} = \epsilon_f v_{xxxxx}$，其中 $\epsilon_f = \frac{10a^3k^2h^2 - 9a^5k^4 - h^4}{120}$。

同理可以得到对于 Lax-Wendroff 有

$$v_t + av_x + \frac{ah^2}{6}(1-\mu^2)v_{xxx} = \epsilon_w v_{xxxx}$$

1.6 Ex 12.50

用 $U_j^n = v(x,t)$ 我们有，同时令 $h = O(k)$

$$\frac{v(x,t+k)-v(t,k)}{k} + \frac{a}{2h}(3v(x,t) - 4v(x-h,t) + v(x-2h,t)) = \frac{ka^2}{2h^2}(v(x,t) - 2v(x-h,t) + v(x-2h,t))$$

$$\Rightarrow v_t + av_x = -\frac{1}{2}kv_{tt} + \frac{a^2}{2}kv_{xx} + \frac{a}{3}h^2v_{xxx} - \frac{a^2}{2}khv_{xxx} - \frac{1}{6}k^2v_{ttt} + O(k^3)$$

由上面的等式求偏导我们可以进一步得到

$$v_{tt} = -av_{xt} - \frac{1}{2}kv_{ttt} + \frac{a^2}{2}kv_{xxt} + O(k^2); v_{xt} = -av_{xx} - \frac{1}{2}kv_{xtt} + \frac{a^2}{2}kv_{xxx} + O(k^2)$$

$$v_{ttt} = -av_{ttx} + O(k); v_{ttx} = -av_{txx} + O(k); v_{txx} = -av_{xxx} + O(k)$$

代入化简可以得到 $v_t + av_x + \frac{ah^2}{6}(-2 + 3\mu - \mu^2)v_{xxx}$。

在 $\mu = 0.8$ 的时候，C_p 和 C_q 都是比 $|a|$ 大的。

1.7 Ex 12.51

在 $\mu = 1$ 的时候，对于两种方法而言都有 C_p 和 C_q 等于 a。

1.8 Ex 12.53

对于 $U_j^n = [g(\xi)]^n e^{i\xi jh}$ 我们有

$$g(\xi) = \frac{1-\mu}{2}e^{i\xi h} + \frac{1+\mu}{2}e^{-i\xi h} = cos(\xi h) - i\mu sin(\xi h)$$

因此有 $|g(\xi)|^2 = cos^2(\xi h) + \mu^2 sin(\xi h)$，由此得到 $|g(\xi)| \leq 1 \Rightarrow |\mu| \leq 1$。

1.9 Ex 12.54

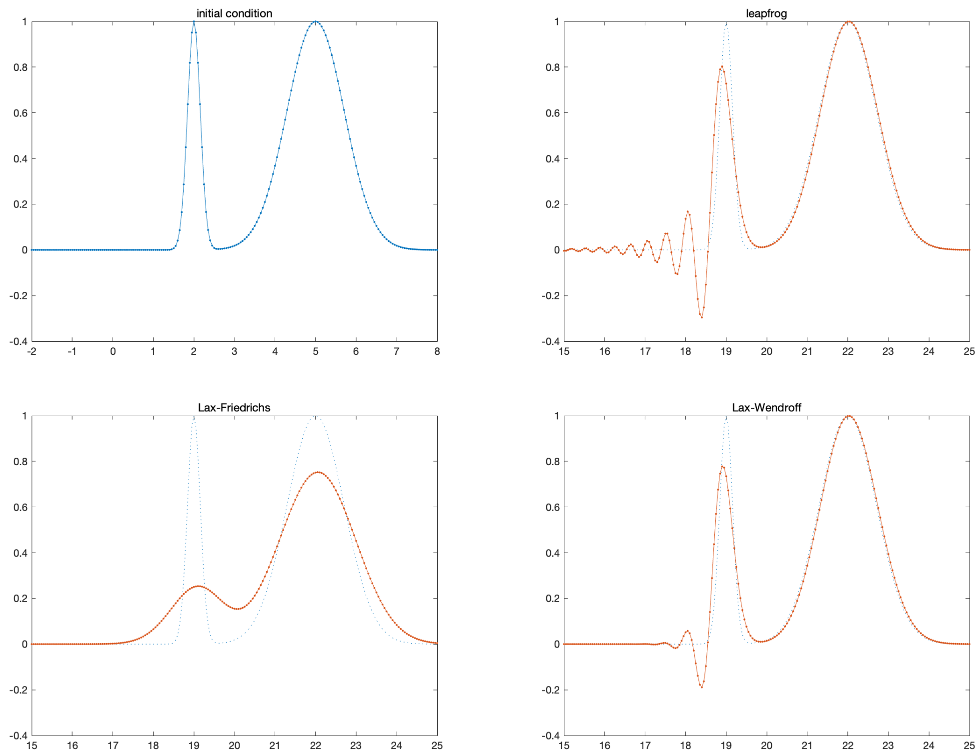
对于 $U_j^n = [g(\xi)]^n e^{i\xi jh}$ 我们有

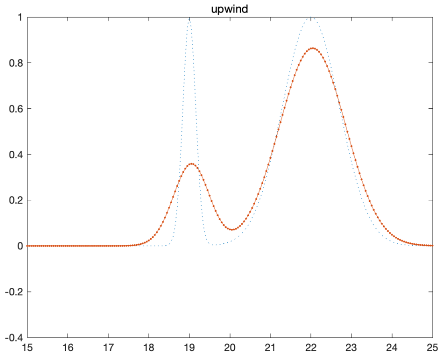
$$g(\xi) = 1 - \mu^2 + \frac{\mu^2-\mu}{2}e^{i\xi h} + \frac{\mu^2+\mu}{2}e^{-i\xi h} = 1 - 2\mu^2 sin^2\frac{\xi h}{2} - i\mu sin(\xi h)$$

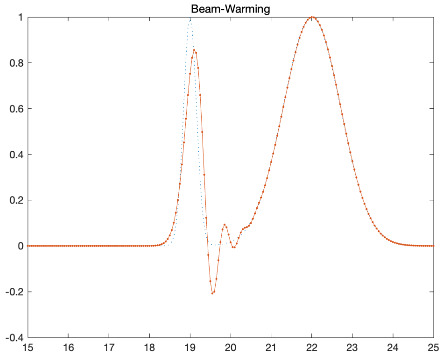
因此有 $|g(\xi)|^2 = 1 - 4\mu^2 sin^2\frac{\xi h}{2} + 4\mu^4 sin^4\frac{\xi h}{2} + \mu^2 sin^2(\xi h)$，由此得到 $|g(\xi)| \leq 1 \Rightarrow |\mu| \leq 1$

2 Programming

对于 $k = 0.8h$







对于 $k = h$