评阅教师	得分

一、单项选择题（本大题共 15 小题，每小题 1 分，共 15 分）

提示：在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在下表中。错选、多选或未选均无分。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15					

1. 下列语句中是真命题的是（ C ）。

A、我正在说谎。 B、如果图的邻接矩阵是对称阵，那么该图为无向图。

C、如果 1+2=5，那么雪是黑的。 D、如果 1+2=3，那么雪是黑的。

2. 下面关于集合等势正确的说法是(C)。

A、一个集合不可能和它的真子集等势； B、$(0,1)$ 和自然数集合等势；

C、$(-\infty,\infty)$ 和 $(100,\infty)$ 等势； D、素数集合与有限集合等势

3. 判断下列命题哪个为真?(　A　)

A、$A-B=B-A \Rightarrow A=B$　　B、空集是任何集合的真子集

C、空集只是非空集合的子集　　D、 若 A 的一个元素属于 B，则 A=B

4. 设 A={1，2，3，4}，下列关系中（　B　）为等价关系。

A、$R1$={<1，1>，<1，2>，<2，1>，<3，3>};

B、$R2$={<1，1>，<1，3>，<2，2>，<3，1>，<3，3>，<4，4>};

C、$R3$={<1，3>，<2，2>，<3，3>，<4，4>};

D、$R4$={<1，1>，<1，3>，<3，2>，<4，4>}.

5. 设 G、H 是一阶逻辑公式，p 是一个谓词，$G=\exists xp(x)$，$H=\forall xp(x)$，则一阶逻辑公式 $G \to H$ 是(　C　).

A、永真式　B、永假式　C、可满足式　D、前束范式

6. 设集合 A={1,2,3,…,10}，下面定义的哪种运算关于集合 A 是不封闭的？（ D ）

A、 x*y=max{x,y}

B、 x*y=min{x,y}

C、 x*y=GCD(x,y)，即 x,y 的最大公约数

D、 x*y=LCM(x,y)，即 x,y 的最小公倍数

7. 含有 3 个命题变元，2 个命题常元的命题公式有（　A　）种不同的解释。

A、2^3；　B、3^2；　C、2^{2^3}；　D、2^{3^2}

8. 已知 R 是二元关系，且满足 $R=R^3$,则下列(　B　)关系具有可传递性

A、R；　B、R^2；　C、 R^3；　D、R^4；

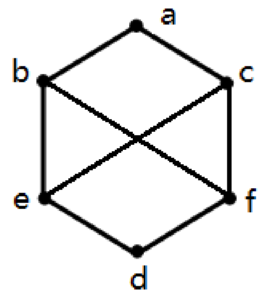
9. 设命题公式 $G \Leftrightarrow \neg(P \to Q), H \Leftrightarrow P \to (Q \to \neg P)$，则 G 与 H 的关系是(　D　)

A、$Q \to H$　B、$H \to G$　C、$H \Rightarrow G$　D、$G \Rightarrow H$

10. 若 A-B=Φ，则下列哪个结论不可能正确？(　D　)

A、 A=Φ　B、 B=Φ　C、A⊂B　D、 B⊂A

11．右图描述的偏序集中，子集$\{b, e, f\}$的下界为（　C　）。



A、d, e；　　　　B、e, f, d；

C、d；　　　　D、 无下界。

12. 有向图G中有8个顶点，连通分支数为3，该图对应的关联矩阵的秩为（　C　）。

A、3　　　　B、4

C、5　　　　D、7

14. 一个含有 3 个命题变元公式，该公式相应的主析取范式有 8 项极小项，那么该公式为（　B　）。

A、矛盾式;　　　B、永真式;

C、不可满足式;　　　D、A,B,C 均不正确。

15. 设$A = \{1, 2, 8, 10, 16, 23\}$，定义在$A$上的一个等价关系$R$为模3同余，则$R$产生$A$上的一个划分共有（　B　）个分块。

A、1　　　　B、2

C、3　　　　D、无法确定

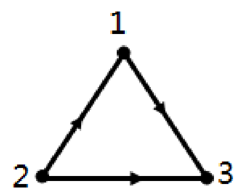
评阅教师	得分

二、多项选择题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

提示：在每小题列出的五个备选项中有二个至五个是符合题目要求的，请将其代码填写在下表中。错选、多选、少选或未选均无分。

1	2	3	4	5

1. 设A={1,2,3}，则右图所示A上的关系具有（ B D E　）。



A、自反性　　　B、反自反和传递性

C、自反性和反对称性　　D、反对称性和传递性　　　E、传递性

2. 下列命题公式中，（　A，B，C，　D，E　）在解释{P，～Q，　R }下为真。

A、(P∧Q)→R　　　　B、(P∨Q)→R　　　　C、(R↔Q)→P

D、P→(Q→R)　　　　E、～(P∧Q)→R

3．A，B 均为合式公式，且 $A \Leftrightarrow B$，则（ A，E　　）。

A、$A \to B$ 为重言式；　　　　B、A 的对偶式为 A^*，$A^* \to A$ 为重言式；

C、B 的对偶式为 B^*，$B \to B^*$ 为矛盾式；　D、A 的对偶式 $A^* \Rightarrow B$；

E、$A \leftrightarrow B$ 为重言式。

4. 设有如下具体命题：A：如果地上有水，则天上下雨；B：如果天上下雨，则地上有水；

C:如果地上没有水，则天上不下雨；D:如果天上不下雨，则地上没有水；哪些命题等价的（　　B　　D　　　）。

A、 A)与 B)等价 ；　B、 A)与 D)等价；

C、 A)与 C)等价；　D、 B)与 C)等价；　E、 B)与 C)等价

5． A,B,C 为任意集合, $\varnothing$ 为空集，下列结论中正确的是（ BDE　　）

A、 $\varnothing \in \varnothing$　　　B、 $\varnothing \subseteq \varnothing$　　　C、2A∩2B=2A∩B

D、(A∩B)=(A∩C)⇒B=C　　　E、$A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow$ B=C

评阅教师	得分

三、填空题（本大题共 15 空，每空 1 分，共 15 分）。

1．一个连通平面图有 20 个顶点，每个顶点都为 3 度，那么这个平面图可被分割为（　12　）个面。

2．若集合 $A, |A| \geq 1$，那么 A 上有（　$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$　　）个既是自反的又是对称的关系，A 上有（　$2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$　　）个反对称关系。

3．设 R 是 $A=\{1,2,3,4,6,8,9\}$ 上的整除关系，子集 $B_1=\{4,6\}$ 关于整除的最大下界（ 2 ），最小上界（　无　）；子集 $B_2=\{2,3,6\}$ 关于整除的最大元（ 6 ），最小元（ 无　）

4. 设 A, B 是集合，若 $A \cap B = \Phi$，$|A|=n, |B|=m$，则 $|2^A \cup 2^B| =$ （　$2^m + 2^n - 1$　　）。

5．谓词公式 $\forall x P(x,y) \wedge \forall y Q(x,y)$ 的前束范式为（$\forall x \forall y (P(x,z) \wedge Q(h,y))$　　）。

6．设个体域为整数集，公式 $\forall x \exists y (x+y=0)$ 的真值为（　　1　　）。

7．集合 $A=\{a,b,c\}$ ，A 上关系 $R=\{<a,a>,<a,c>,<a,b>,<b,c>\}$ ，关于 R 的传递关系 $t(R)=$（$\{<a,a>,<a,c>,<a,b>,<b,c>\}$）。

8. 一幅标准的 52 张扑克牌中，至少摸出（ 9 ）张才能保证色选出的牌中至少有 3 张是同样花色的。

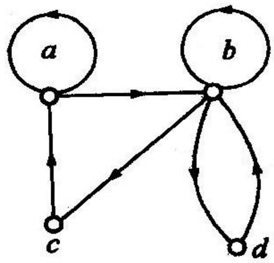
9. 实数集 R 上有二元运算：$a*b=a+b-ab$，运算$*$的零元是（ 1 ），运算$*$的幂等元是（ 0 1 ）。

10. 设命题公式 S=¬(P→(Q∧R))，则使公式 S 为真的解释有((1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0))。

评阅教师	得分

四、分析及演算题（本大题共 4 小题，1−4 小题每题 5 分，5 小题 10 分共 30 分 ）

1.用邻接矩阵求右图长度为 7 的通路（含回路）总数。



$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$ （1 分）

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\1&2&1&1\\1&1&0&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}4&8&4&4\\4&8&4&4\\2&4&2&2\\2&4&2&2\end{bmatrix}$$

$$A^7=\begin{bmatrix}32&64&32&32\\32&64&32&32\\14&32&16&16\\16&32&16&16\end{bmatrix}$$ （2 分）

$32\times8+64\times2+16\times6=480$ （2 分）

2、设无向图 G=<V,E>，|E|=12。已知有 6 个 3 度顶点，其他顶点的度数均小于 3。问 G 中至少有多少个顶点？

解：设 G 中度数小于 3 的顶点有 k 个，由欧拉握手定理 $24=\sum_{v\in V}\deg(v)$ （2 分）

知，度数小于 3 的顶点度数之和为 6。（1 分）

故当其余的顶点度数都为 2 时，G 的顶点最少。（1 分）

即 G 中至少有 9 个顶点。（1 分）

3、某地有 5 个风景点，若每个风景点均有两条道路与其他点相通，问有人可否经过每个风景点恰好一次而且游完这 5 处。

解：将 5 个风景点看成是有 5 个结点的无向图，（1 分）

两风景点间的道路看成是无向图的边，因为每处均有两条道路与其他结点相通，（1 分）

故每个结点的度数均为 2，从而任意两个结点的度数之和等于 4，正好为总结点数减 1。（2 分）

故此图中存在一条哈密顿道路，因此本题有解。（1 分）

4. 设 $S=Q\times Q$，Q 为有理数集合，$*$为 S 上的二元运算：对任意 $(a,b),(c,d)\in S$，有 $(a,b)*(c,d)=(ac,ad+b)$,求出 S 关于二元运算*的单位元，以及当 $a\neq 0$ 时，(a,b) 关于*的逆元。

解：

设 S 关于*的单位元为(a, b)。根据*和单位元的定义，对∀ (x, y)∈S, 有

(a, b)∗(x, y)=(ax, ay+b)=(x, y),（1 分）

(x, y)∗(a, b)=(ax, xb+y)=(x, y)。（1 分）

即 ax=x, ay+b=y, xb+y=y 对∀ x, y∈Q 都成立。解得 a=1, b=0。

所以 S 关于*的单位元为(1, 0)。（1 分）

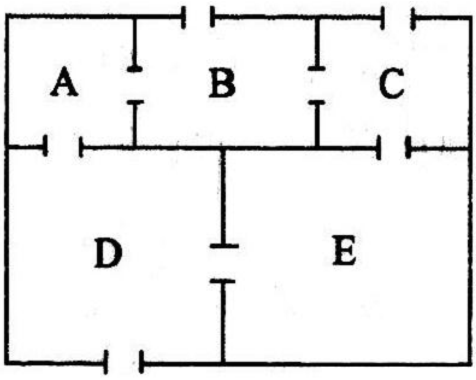
当 a≠0 时，设(a, b)关于*的逆元为(c, d)。根据逆元的定义，有

(a, b)∗(c, d)= (ac, ad+b)=(1, 0)

(c, d)∗(a, b)= (ac, cb+d)=(1, 0)（1 分）

即 ac=1, ad+b=0, cb+d=0。解得 c=$\frac{1}{a}$, d=-$\frac{b}{a}$。（1 分）

5.下图表示一开发商所设计房屋的平面图，缺口处表示门的位置。如果希望从户外进入该房屋，穿过每个门一次并且恰好一次，再回到户外，目前的设计能实现这个愿望吗？如果不能，应该如何修改设计，通过增加最少的门来实现这个愿望？



设每个房间对应一个顶点（户外也是一个顶点），每个门对应两个顶点（即该所连接的两个房屋）之间的一条边，于是得到一个连通图，所以希望的走法就是这个图的一条欧拉回路。这个愿望能够实现当且仅当每个顶点的度数都是偶数。（4 分）

由于房屋 B,C,D 和户外这 4 个顶点都是奇数度的，所以目前的设计还不能实现上述愿望。（2 分）

至少需要在 B,C,D 和户外这 4 个顶点之间增加两条边（即增加两个门）。由于 C 和 D 之间没有公共的墙，不能在 C 和 D 之间加边，所以只能在 C 和 B 之间，D 和户外之间加边。（2 分）

因此至多增多 2 个门就能实现所希望的走法，即在房间 C 和 B 之间加开第二个门，（1 分）

并且在房间 D 和户外之间加开第二个门（1 分）

评阅教师	得分

五、证明题（本大题共 4 小题，每题 5，共 20 分）

1、运用 CP 规则证明：　$P\rightarrow\neg Q$，$\neg P\rightarrow R$，$R\rightarrow\neg S \Rightarrow S\rightarrow\neg Q$

证明：

(1)	S	附加前提	(1 分)
(2)	$R\rightarrow\neg S$	前提	
(3)	$\neg R$	(1),(2)	(1 分)
(4)	$\neg P\rightarrow R$	前提	
(5)	P	(3),(4)	(1 分)
(6)	$P\rightarrow\neg Q$	前提	
(7)	$\neg Q$	(5),(6)	(1 分)
(8)	$S\rightarrow\neg Q$	CP,(1),(7)	(1 分)

2.设简单平面图 G 中顶点数 n=7，边数 m=15。证明：G 是连通的。

证明：设 G 具有 k 个连通分支 G_1，G_2，…，G_k。设 G_i 的顶点数为 n_i，边数为 m_i，i=1,2,…,k。

先证每个连通分支的顶点数都大于 1。否则说明 G 中有孤立结点。由于 G 是简单图，从而使 G 的边数是 15，则 G 只有两个连通分支，其中一个是由孤立结点导出的，另一个是 K_6。（1 分）

但 K_6 不是平面图，故要每个连通分支的顶点数都大于 1。（1 分）

同理可证，每个连通分支的顶点数都大于 2。

由此可得，G 的每个连通分支至少有 3 个顶点。从而

$m_i \le 3n_i-6$

即 $m=\sum_{i=1}^{k} m_i \le \sum_{i=1}^{k}(3n_i-6)=3n-6k$　　（2 分）

从而 15≤21-6k，即 k≤1。从而 k=1，故 G 是连通图。　　（1 分）

3. 设 e 和 0 是关于 A 上二元运算*的单位元和零元，如果|A|>1，则 e≠0。

证明：用反证法证明。假设 e=0。　　（1 分）

对 A 的任一元素 a，因为 e 和 0 是 A 上关于二元运算*的单位元和零元，　　（1 分）

则 a=a*e=a*0=0。　　（1 分）

即 A 的所有元素都等于 0,　　（1 分）

这与已知条件|A|>1 矛盾。从而假设错误。即 e≠0。　　（1 分）

4.设 9 阶无向图G中，每个顶点的度数不是 5 就是 6，证明G中至少有 5 个 6 度顶点或至少有 6 个 5 度顶点。

证明:

设G有x个 5 度顶点，$9-x$个 6 度顶点，由握手定理可知，　　（1 分）

$5x+6(9-x)=54-x$为偶数，　　（1 分）

x为偶数，即为 0, 2, 4, 6, 8.　　（1 分）

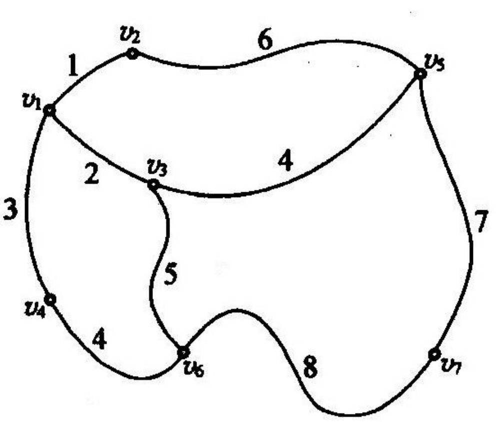
当$x=0,2,4$时，6 度顶点的个数$9-x$分别为 9, 7, 5。所以 6 度顶点的个数至少为 5 个；　（1 分）

当$x=6,8$时，5 度顶点的个数至少为 6 个　　（1 分）

评阅教师	得分

六、设计题（本大题共 1 小题，共 10 分 ）

已知某地区的交通网络图如下，其中顶点v_i代表第i 个居民小区， 边(v_i,v_j)表示小区v_i与v_j之间的公路，边(v_i,v_j)上的权ω_{ij}表示相应公路的距离。若在该地区设立一个中心医院，该医院应该设在哪个小区，才能满足使离医院最远的小区居民就诊时走的路程最近。并画出各个小区到中心医院的路线图。

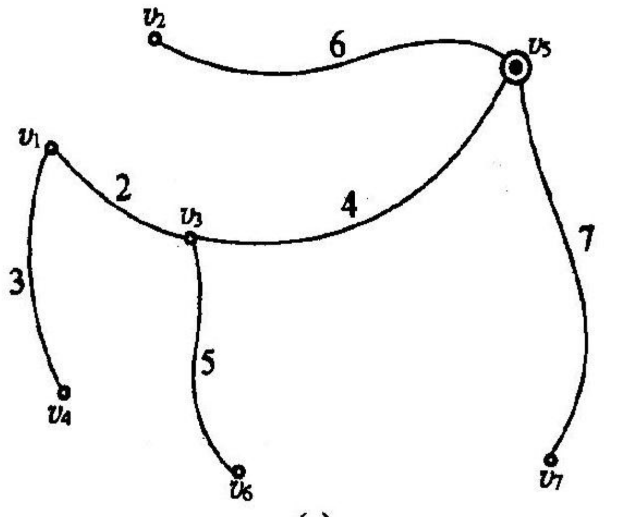


求出顶点v_i到各顶点的最短距离、$d_i=\max\{d_{ij}\}$

	1	2	3	4	5	6	7	d	分数
1	0	1	2	3	6	7	13	13	1
2	1	0	3	4	6	8	13	13	1
3	2	3	0	5	4	5	11	11	1
4	3	4	5	0	9	4	12	12	1

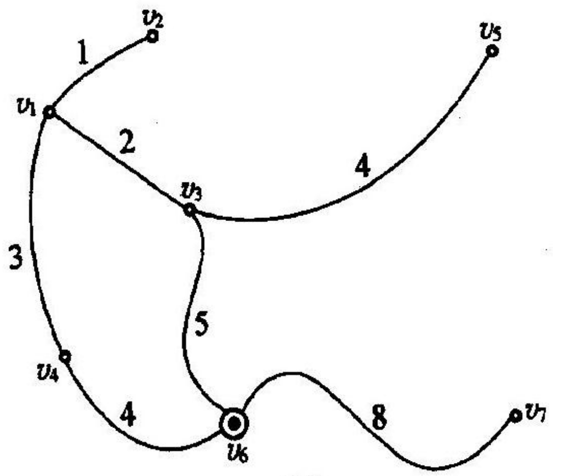
5	6	6	4	9	0	9	7	9	1
6	7	8	5	4	9	0	8	9	1
7	13	13	11	12	7	8	0	13	1

中心医院可设在v_5或v_6所代表的小区中　　　　　　　　　　1 分



(a)

1 分



(b)

1 分