现 代 控 制 理 论

Modern Control Theory

课程要求： 出勤；课堂表现；

作业。

前续课程：自动控制原理

基础知识：线性代数

常微分方程

教材：《现代控制理论》天津大学 刘豹 唐万生 主编 第3版

主要参考书：

- 张嗣瀛 高立群编，《现代控制理论》，清华大学出版社
- 郑大钟 主编，《线性系统理论》，清华大学出版社

网上资源：

- https://www.bilibili.com/video/av78233052?from=search&seid=5976731891112834009
- https://www.icourse163.org/learn/ZJU-1206497805?tid=1206820209#/learn/content?type=detail&id=1212193124&cid=1215440033
- https://www.bilibili.com/video/av73847297?from=search&seid=10632392639221741919

绪　论

- 现代控制理论是在经典控制理论基础上发展起来的一门新兴学科，它的内容是随着电子计算机技术的发展而逐步完善的。

- 性　质　　是经典控制理论的完善与补充; 是在经典控制理论基础之上建立起的新兴学科。

控制理论的发展历程

经典控制理论 →	现代控制理论 →	智能控制理论
20世纪30年代	20世纪60年代	20世纪90年代
自动控制原理 输入–输出 传递函数	状态空间描述 输入–状态–输出 转移矩阵	多种智能方法 综合

经典控制理论：

(1) 形成和发展

① 20世纪30~40年代，初步形成。

② 20世纪40年代形成体系。

频率理论　　根轨迹法

③ 代表人物

奈奎斯特　伯德（波特）　维纳

绪　论

⑵ 以SISO线性定常系统为研究对象。

⑶ 以拉普拉斯(拉氏)变换为工具，以传递函数为基础在频率域中分析与设计。

⑷ 经典控制理论的局限性

① 难以有效地应用于时变系统、多变量系统

② 难以有效地应用于非线性系统。

现代控制理论:

(1) 现代控制理论的形成和发展

① 在20世纪50年代形成

动态规划法　极大值原理　卡尔曼滤波

② 上世纪60年代末至80年代迅速发展。

非线性系统　大系统　智能系统

③ 代表人物

贝尔曼　　庞特里亚金　　卡尔曼

绪　论

⑵ 以MIMO线性、非线性、时变与非时变系统为主要研究对象。

⑶ 以线性代数和微分方程为工具，以状态空间法为基础。

⑷ 描述和揭示系统内部状态和性能。

绪　　论

20世纪90年代以来出现了新的控制思想和控制理论

(1) 多变量频率域控制理论

(2) 模糊控制理论

(3) 神经网络

(4) ……

	经典控制理论	现代控制理论
研究对象	单输入—单输出（**SISO**）的线性、连续、时不变系统的分析和综合	适用于线性和非线性、定常和时变、单变量和多变量(**MIMO**)、连续和离散的系统
数学基础	处理单变量的线性定常系统 数学问题：传递函数 数学工具：拉氏变换	处理多变量的问题 数学基础：矩阵和向量空间理论
计算手段	手工计算的方法体系	计算机的方法体系
研究方法	频域上的伯德图和相轨迹法 以系统的输入—输出特性作为研究的依据	时域方法 建立在状态空间描述法的基础上
研究观点	就事论事; 针对给定的输入，分析输出的特性，给定某种指标，构成校正网络; 主要着眼于系统的外部联系。	着眼于系统的内在规律性。 分析：揭示系统对控制函数及初始状态的依赖关系，指出其可能影响的程度及性质。 综合：揭示系统在某种指标下和其它限制条件下所能达到的最佳效果，即最优控制。

绪　论

现代控制理论的主要内容

(1) 线性系统理论

(2) 最优滤波理论

(3) 系统辨识

(4) 最优控制

(5) 自适应控制

(6) 非线性系统理论

* 现代控制理论的基础
* 线性系统状态的运动规律
* 改变运动状态的可能性和可操作性
* 系统结构、参数、行为与性能之间的关系

绪　论

现代控制理论的主要内容

(1) 线性系统理论

(2) 最优滤波理论

(3) 系统辨识

(4) 最优控制

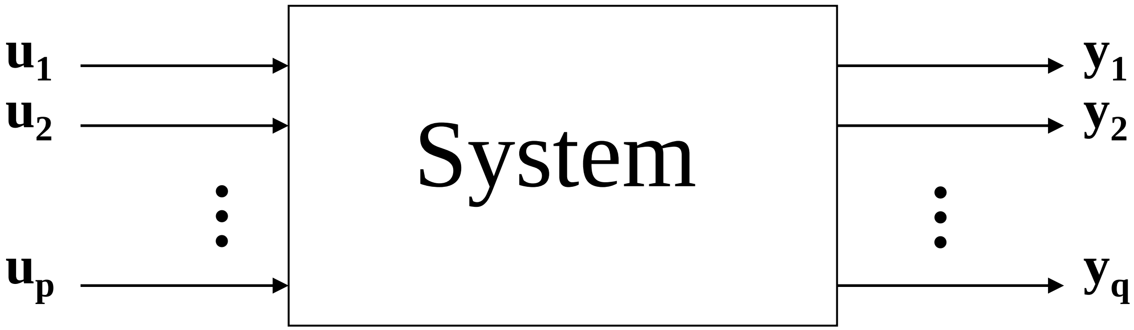
(5) 自适应控制

(6) 非线性系统理论

本课程的主要内容

- 第1章 控制系统的状态空间表达式
- 第2章 控制系统的状态空间表达式的解
- 第3章 线性系统的能控性和能观性
- 第4章 稳定性与李雅普诺夫方法
- 第5章 线性定常系统的综合

第1章 控制系统的状态空间表达式



输入输出模式	状态变量模式
外部描述	内部描述
黑箱子	动力学特性

1.1 状态变量及状态空间表达式

几个定义：

(0) 状态：系统过去、现在和将来的状况

(1) 状态变量：能够完全表征系统运动状态的最小一组变量：

a) $x(t)_{t=t_0} = x(t_0)$ 表示系统在 t_0 时刻的状态

b) 若初值 $x(t_0)$ 给定，$t \geq t_0$ 时的 $u(t)$ 给定， 则状态变量完全确定系统在 $t \geq t_0$ 时的行为。

(2) 状态向量：以系统的n个独立状态变量$x_1(t),\cdots,x_n(t)$作为分量的向量，即

$$x(t)=\left[x_1(t),\cdots,x_n(t)\right]^{\mathrm{T}}$$

(3) 状态空间：以状态变量 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 为坐标轴构成的n维空间

(4) 状态方程：描述系统状态与输入之间关系的、一阶微分方程（组）：$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$

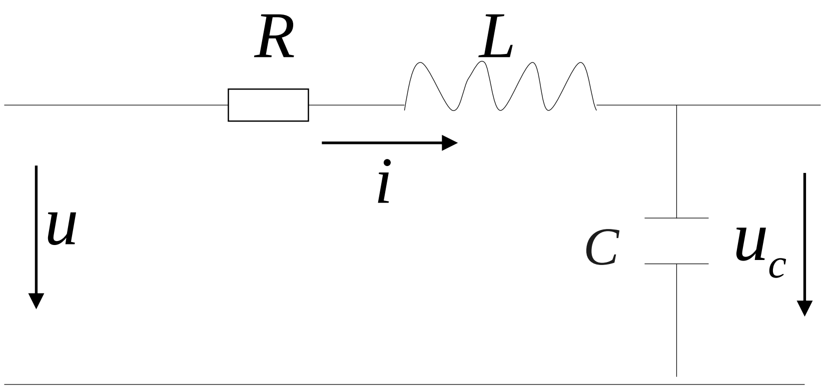
(5) 输出方程：描述系统输出与状态、输入之间关系的数学表达式： $y(t)=Cx(t)+Du(t)$

(6) 状态空间表达式： (4)+(5).

例： R-L-C电路

u-输入变量，列写微分方程：

$$\begin{cases} C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{dt}=i \\ L\dfrac{di}{dt}+Ri+u_c=u \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{u}_c=\dfrac{du_c}{dt}=\dfrac{1}{C}i \\ \dot{i}=\dfrac{di}{dt}=-\dfrac{1}{L}u_c-\dfrac{R}{L}i+\dfrac{1}{L}u \end{cases}$$

一阶微分方程表示形式：

$$\begin{cases} \dot{u}_c = \dfrac{1}{C} i \\ \dot{i} = -\dfrac{1}{L} u_c - \dfrac{R}{L} i + \dfrac{1}{L} u \end{cases}$$

向量矩阵表示形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_c \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

令 $x_1 = u_c, x_2 = i$ 则上式变为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

再令 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{C}\\-\frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{L}\end{bmatrix}$

则可写为 $\dot{x}=Ax+bu$

若取 u_c 为输出，则有 $y=u_c=x_1$

写出矩阵形式： $y=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

状态空间表达式为： $\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\y=cx\end{cases}$

设SISO定常系统，其状态变量为： $x_1, x_2, \ldots x_n,$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 u \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 u \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n u
\end{aligned}
$$

输出方程式： $y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

用矢量矩阵表示的状态空间表达式：

$$
\begin{cases}
\dot{x} = Ax + bu \\
y = cx
\end{cases}
$$

注意： b c 小写表示SISO

一般，MIMO系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

其中：

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

n维向量

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

系统矩阵

$n\times n$方阵

输入矩阵

控制矩阵

$n\times r$维

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

r 维输入向量

一般，MIMO系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

其中：

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

m维输出向量

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

输出矩阵

$m \times n$维

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mr} \end{pmatrix}$$

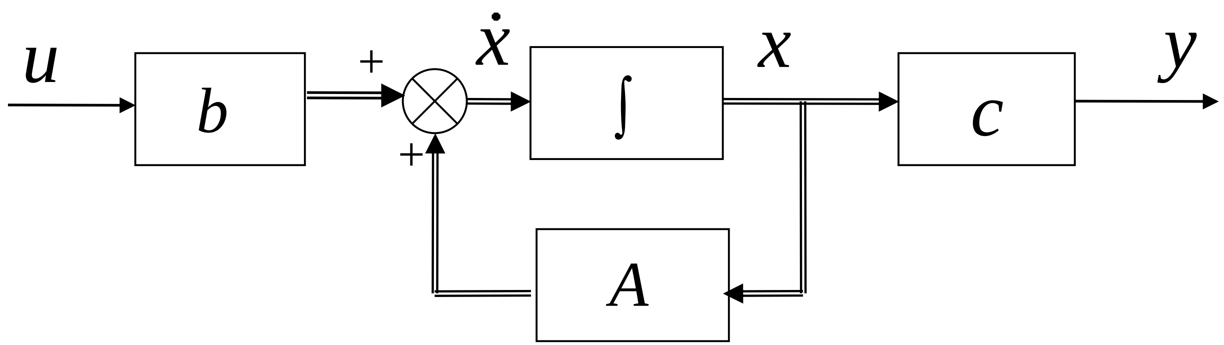
直接传递矩阵

$m \times r$维

(7)、状态空间表达式的系统框图

表示系统信号传递的关系。 既反映了输入对系统内部状态的因果关系，又反映了内部状态对外部输出的影响。单线表示一维信号，双线表示多维信号。

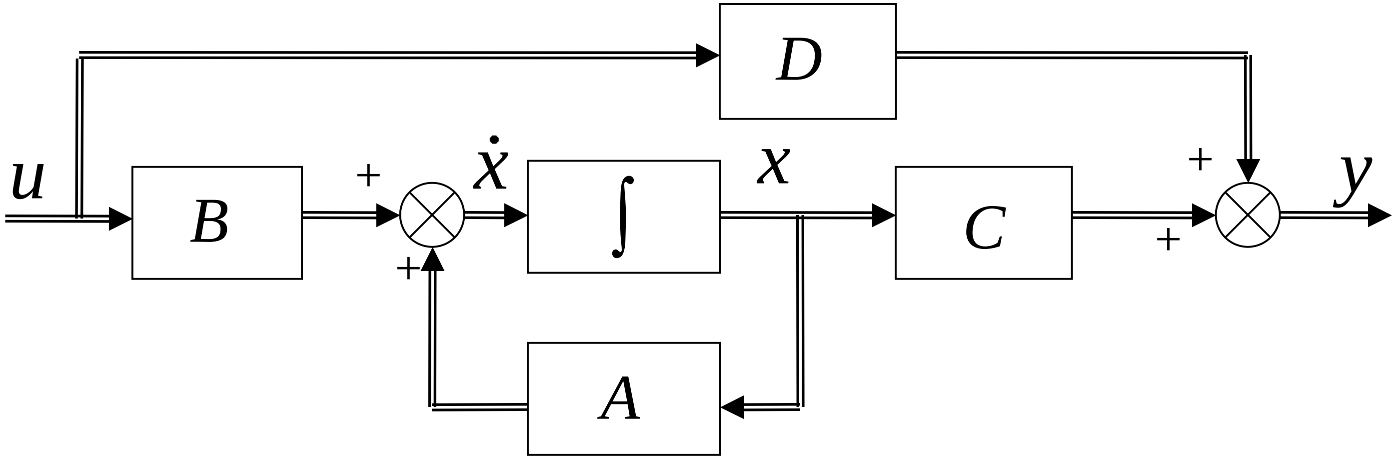
SISO系统：
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases}$$



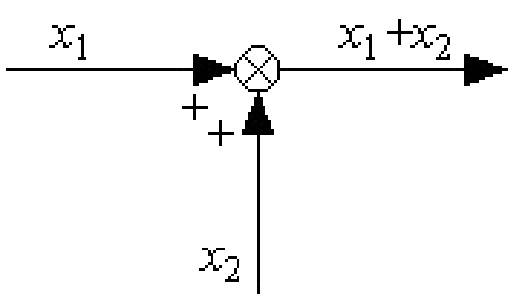
(7)、状态空间表达式的系统框图

MIMO系统

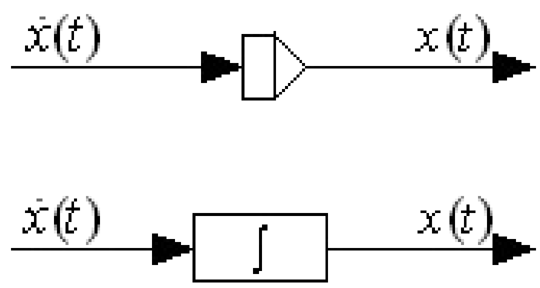
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$



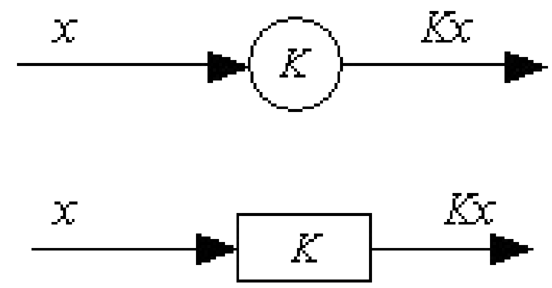
1.2 状态空间表达式的模拟结构图



加法器



积分器



放大器

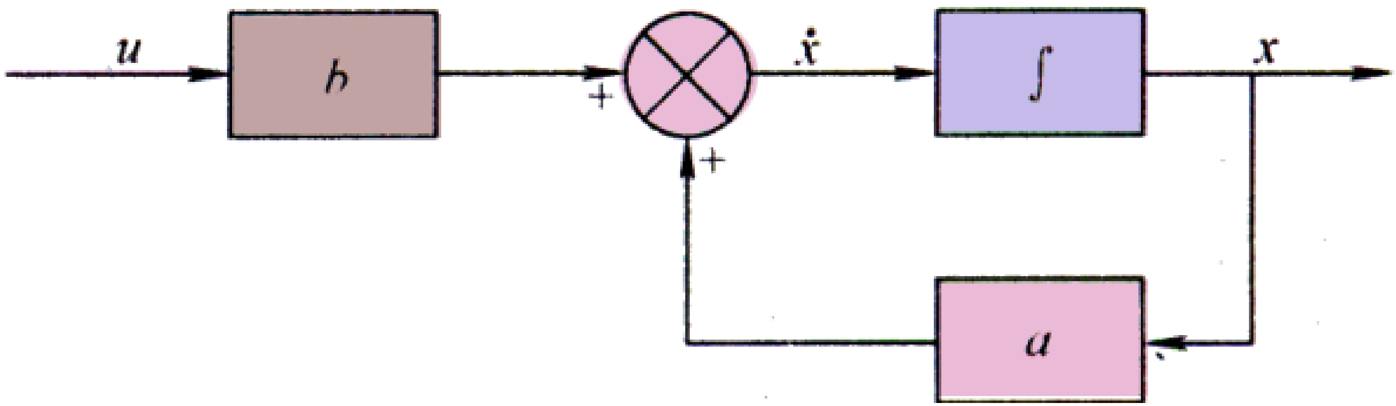
绘制步骤：(1) 绘制积分器

(2) 画出放大器和加法器

(3) 用线连接各元件，并用箭头示出信号传递的方向。

例　设一阶系统状态方程为 $\dot{x} = ax + bu$

则其状态图为



模拟结构图：用来反映系统各状态之间的信息传递关系。

绘制原则：

(1) 系统的阶数等于积分器的个数，取每个积分器的输出为状态变量；

(2) 根据状态方程和输出方程，画出加法器和比例器；

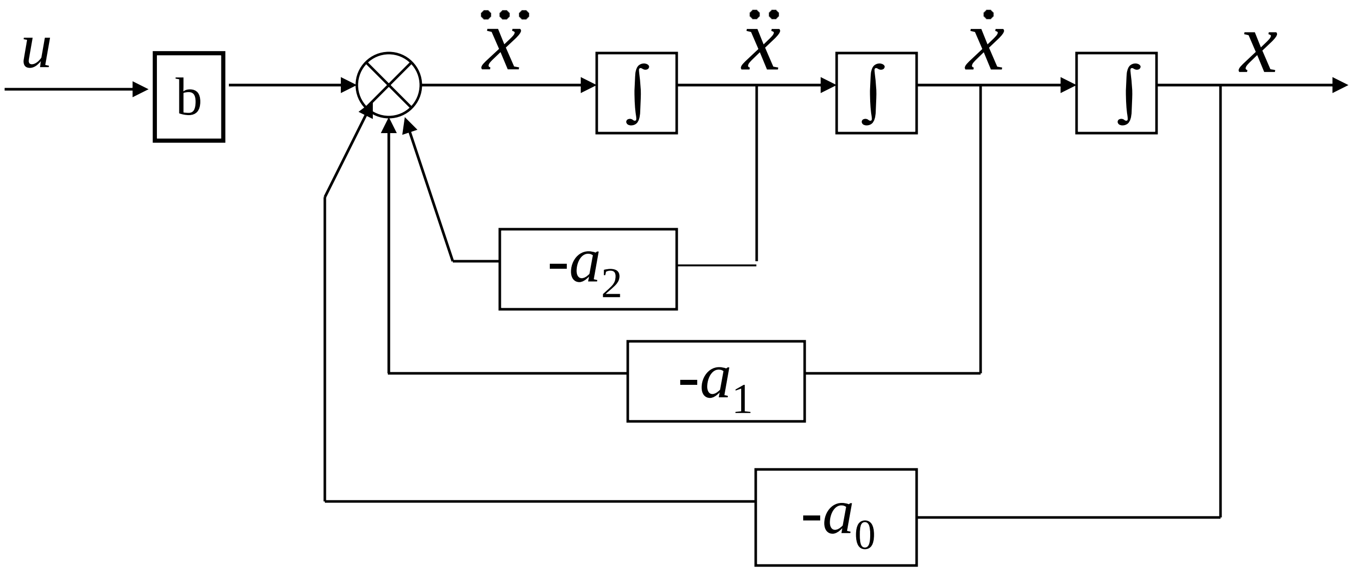
(3) 用箭头进行连接

a，由微分方程绘模拟结构图

例：

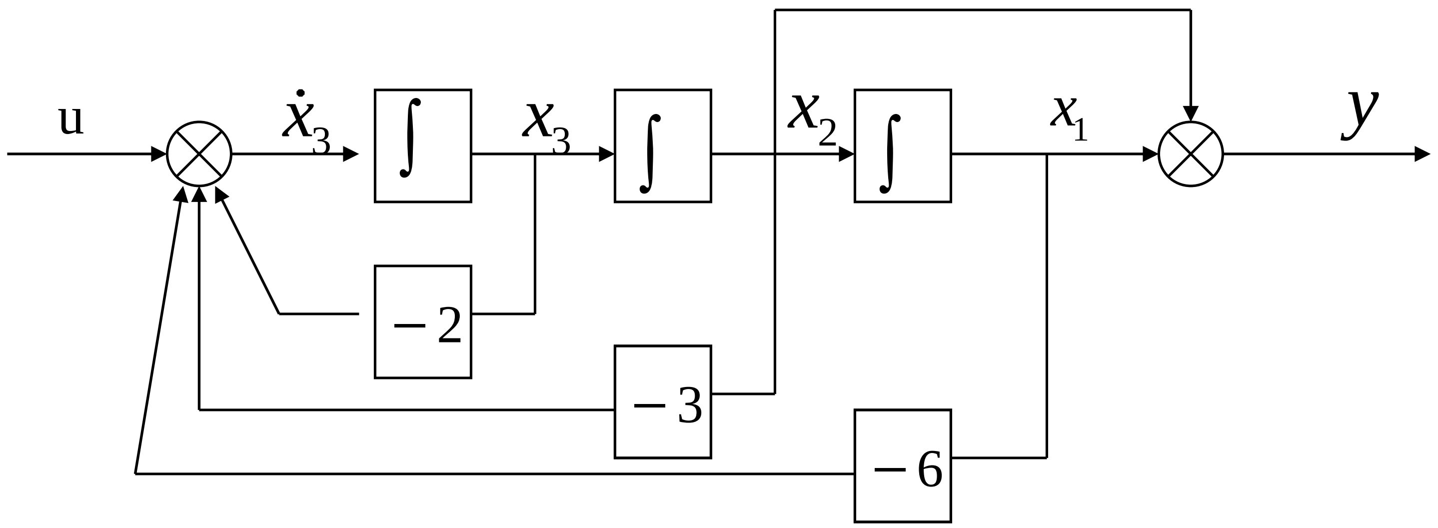
$$\dddot{x}+a_2\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_0x=bu$$

移项：$\dddot{x}=-a_2\ddot{x}-a_1\dot{x}-a_0x+bu$



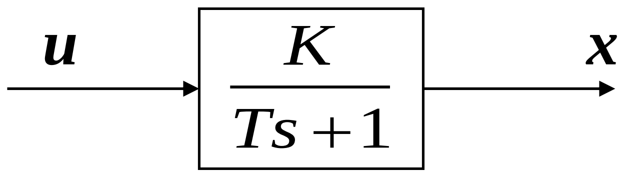
b，由状态空间表达式绘模拟结构图

例：
$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = x_3 \\
\dot{x}_3 = -6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + u \\
y = x_1 + x_2
\end{cases}
$$



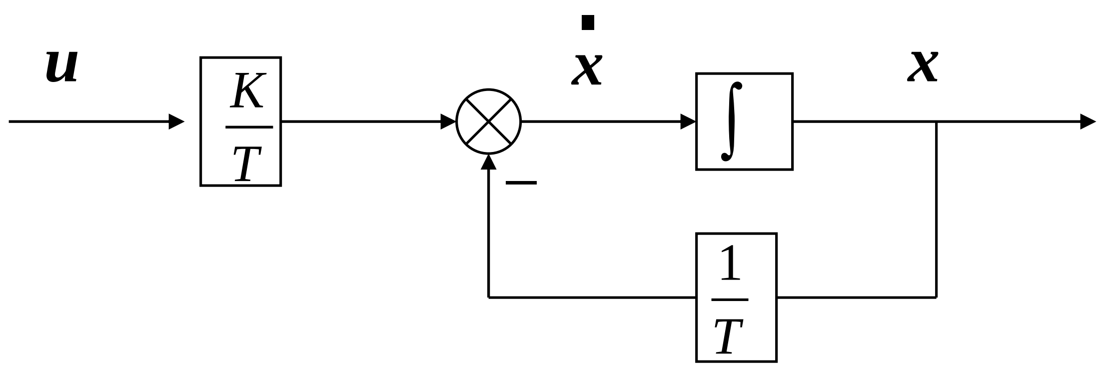
c，由方框图绘模拟结构图

例：



$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{K}{T}u$$

$$\frac{K}{Ts+1} = \frac{K}{T} \cdot \frac{1}{s+1/T} = \frac{K}{T} \cdot \frac{s^{-1}}{1+\frac{1}{T}s^{-1}}$$



1.3 状态空间表达式的建立（一）

1、根据系统方框图导出系统状态空间表达式

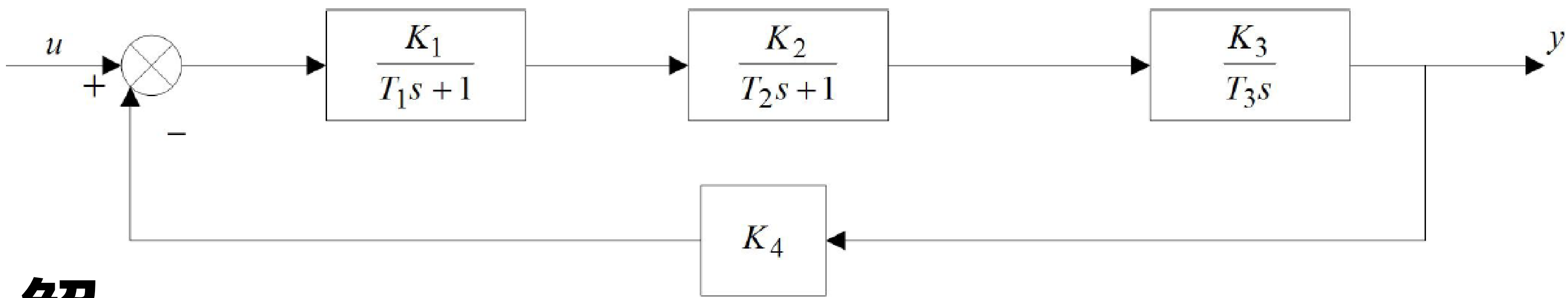
1)把各环节传递函数化为最简形式组合. $\frac{k_i}{s+p_i}$

2)把具有简单函数相乘的环节化为单元方块的串联.

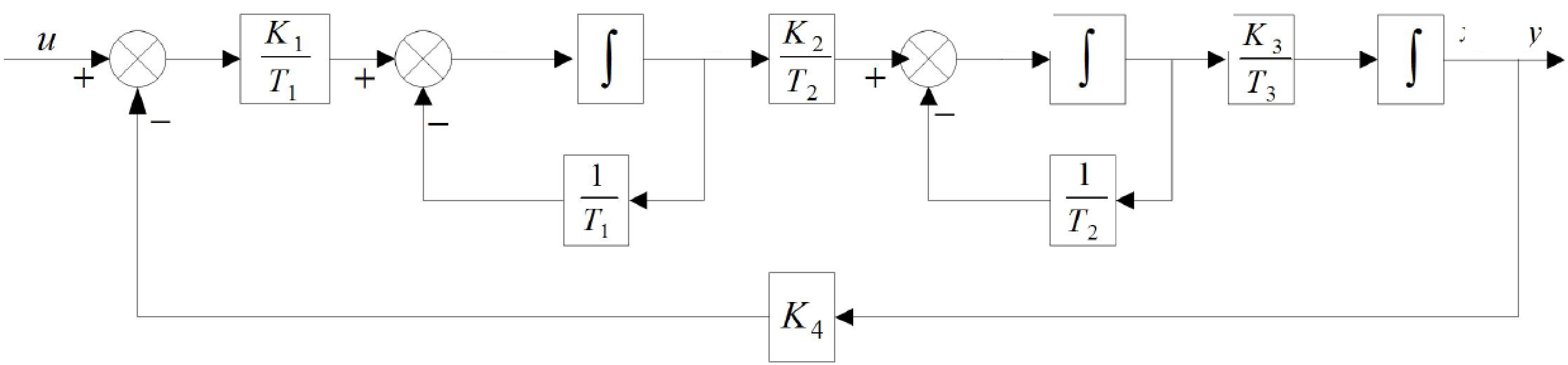
3)把具有最简单传递函数的环节输出选取为状态变量。(即，积分器的输出选为状态变量)

4) 列写状态空间表达式。

【例1】已知系统方块图, 试导出系统状态空间描述.



解:

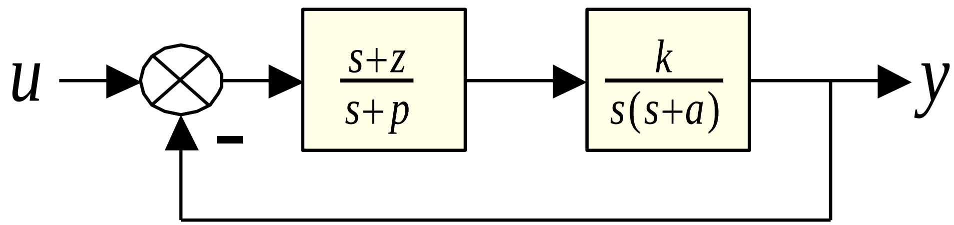


写成矢量矩阵形式,系统状态空间描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_3}{T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{K_2}{T_2} \\ -\frac{K_1K_4}{T_1} & 0 & -\frac{1}{T_1} \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_1}{T_1} \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = [1,\ \ 0,\ \ 0]\boldsymbol{x}$$

【例2】已知系统方块图, 试导出系统状态空间描述.

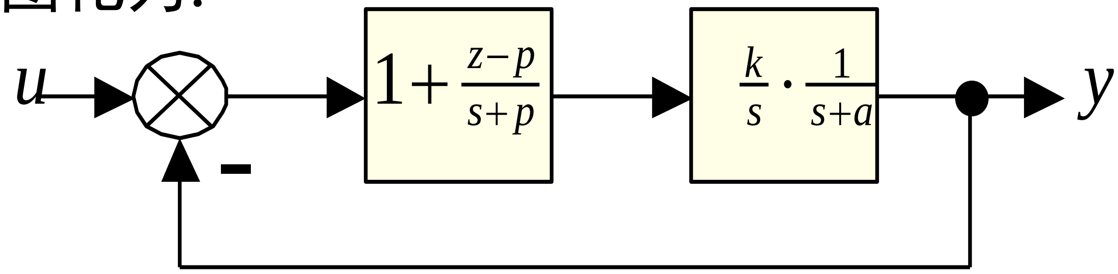


解: 1)把各环节传递函数化为最简形式 $\dfrac{k_i}{s+p_i}$ 组合.

$$\frac{s+z}{s+p}=1+\frac{z-p}{s+p}$$

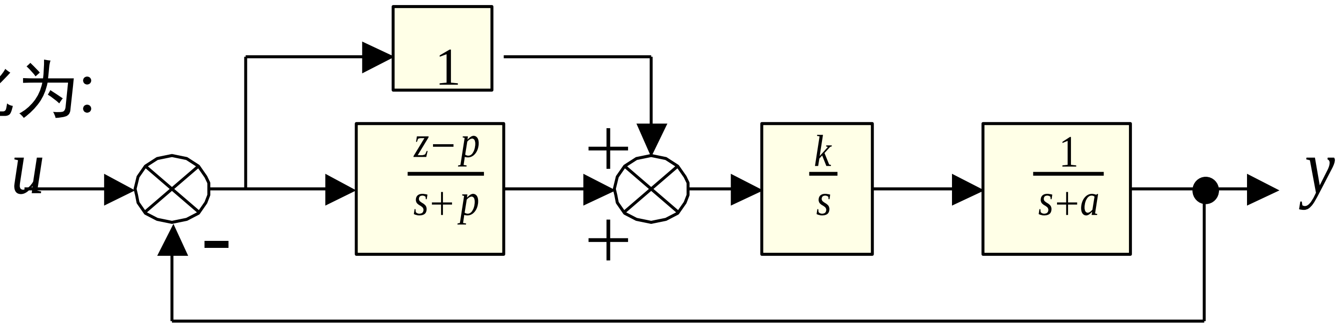
$$\frac{k}{s(s+a)}=\frac{k}{s}\cdot\left(\frac{1}{s+a}\right)$$

原方块图化为:

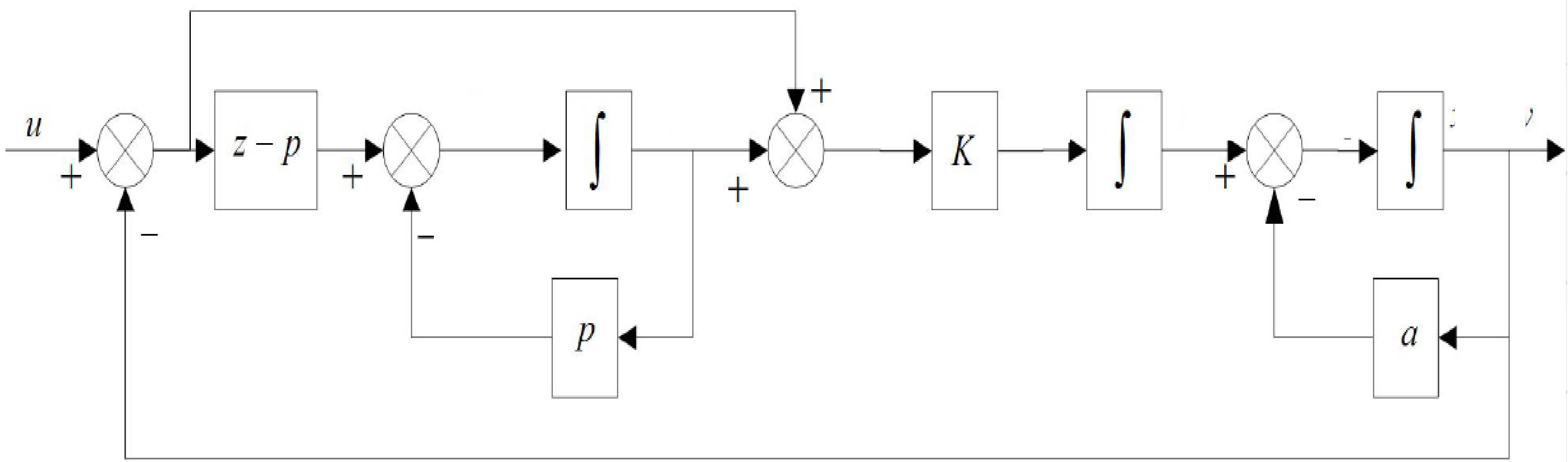


1.3 状态空间表达式的建立（一）

进一步化为:



2) 把具有简单函数相乘的环节化为单元方块的串联



3）把具有最简单传递函数的环节输出选取为状态变量。

4）写出状态空间表达式

状态方程为：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_1 + kx_3 + ku \\ \dot{x}_3 = (p-z)x_1 - px_3 + (z-p)u \end{cases}$$

状态空间表达式矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -k & 0 & k \\ p-z & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ z-p \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2、根据物理机理建立状态空间表达式

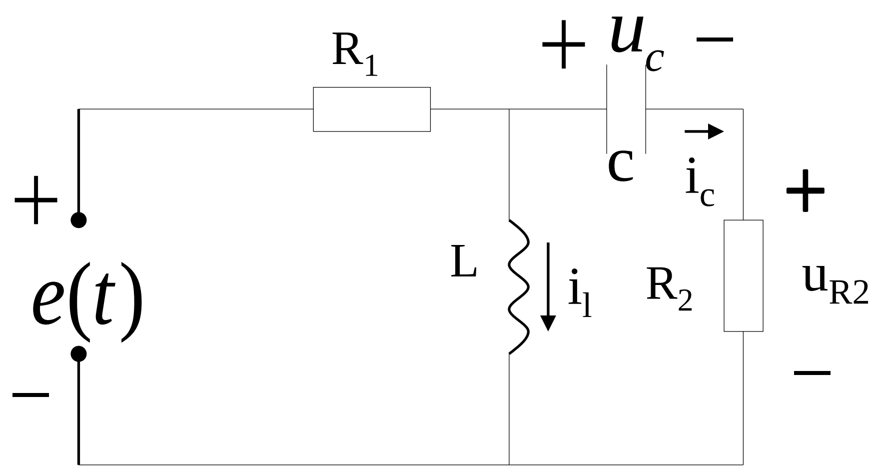
方法：根据系统含有独立储能元件的个数确定最小变量组，根据系统物理机理列写微分方程，最后写出矩阵形式。

【例2】R-C-L 网络如图所示。e(t)-输入变量，$u_{R_2}(t)$输出变量。试求其状态空间描述。

解：1)确定状态变量

选 u_c和 i_l 构成最小变量组,组成状态向量

$$x = [u_c \ \ i_l]^T$$

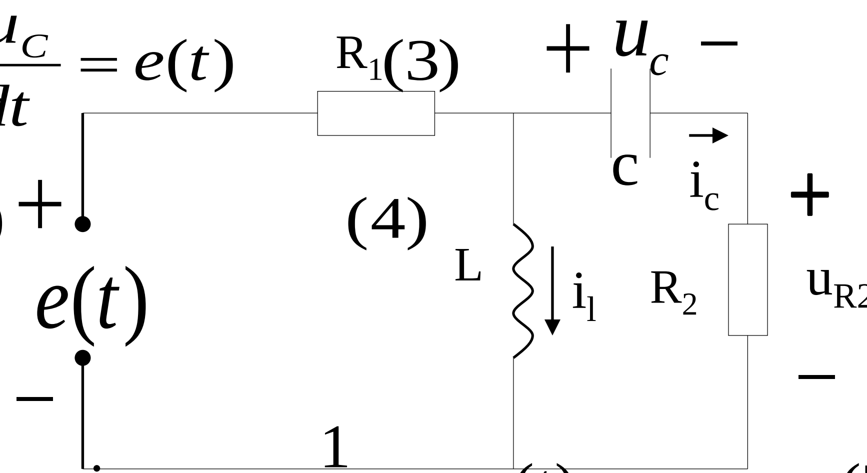


2)列写网络方程:

$$
\begin{cases}
R_1(i_L+i_C)+u_C+R_2 i_C=e(t) & (1)\\
R_1(i_L+i_C)+L\dfrac{di_L}{dt}=e(t) & (2)
\end{cases}
$$

消去不是所确定的状态变量,即将代入 $i_c = c\dfrac{du_c}{dt}$

$$
\begin{cases}
R_1 i_L+R_1 C\dfrac{du_C}{dt}+u_C+R_2 C\dfrac{du_C}{dt}=e(t)\\
R_1 i_L+R_1 C\dfrac{du_C}{dt}+L\dfrac{di_L}{dt}=e(t)
\end{cases}
$$



由（3）式得

$$
\frac{du_C}{dt}=-\frac{1}{(R_1+R_2)C}u_C-\frac{R_1}{(R_1+R_2)C}i_L+\frac{1}{(R_1+R_2)C}e(t) \qquad (5)
$$

由（4）式得

$$\frac{di_L}{dt}=-\frac{R_1C}{L}\frac{du_C}{dt}-\frac{R_1}{L}i_L+\frac{1}{L}e(t) \qquad (6)$$

（5）式代入（6）式 得

状态方程:

$$\begin{cases}\dfrac{di_L}{dt}=\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)L}u_C-\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}i_L+\dfrac{R_2}{(R_1+R_2)L}e(t)\\[2ex]\dfrac{du_C}{dt}=-\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}u_C-\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C}i_L+\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}e(t)\end{cases} \qquad (5)$$

输出方程:

$$u_{R_2}=R_2i_C=R_2C\frac{du_C}{dt}=-\frac{R_2}{R_1+R_2}u_C-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_L+\frac{R_2}{R_1+R_2}e(t)$$

1.3 状态空间表达式的建立（一）

令状态向量： $x=\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} \qquad \dot{x}=\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix}$

输入向量: $u=e(t)$

输出向量: $y=u_{R_2}$

状态方程:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}x_1-\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C}x_2+\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}u(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)L}x_1-\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}x_2+\dfrac{R_2}{(R_1+R_2)L}u(t) \end{cases}$$

输出方程: $y=-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}x_1-\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}x_2+\dfrac{R_2}{R_1+R_2}u(t)$

写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{(R_1+R_2)C} & -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C} \\ \dfrac{R_1}{(R_1+R_2)L} & -\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(R_1+R_2)C} \\ \dfrac{R_2}{(R_1+R_2)L} \end{bmatrix} u(t)$$

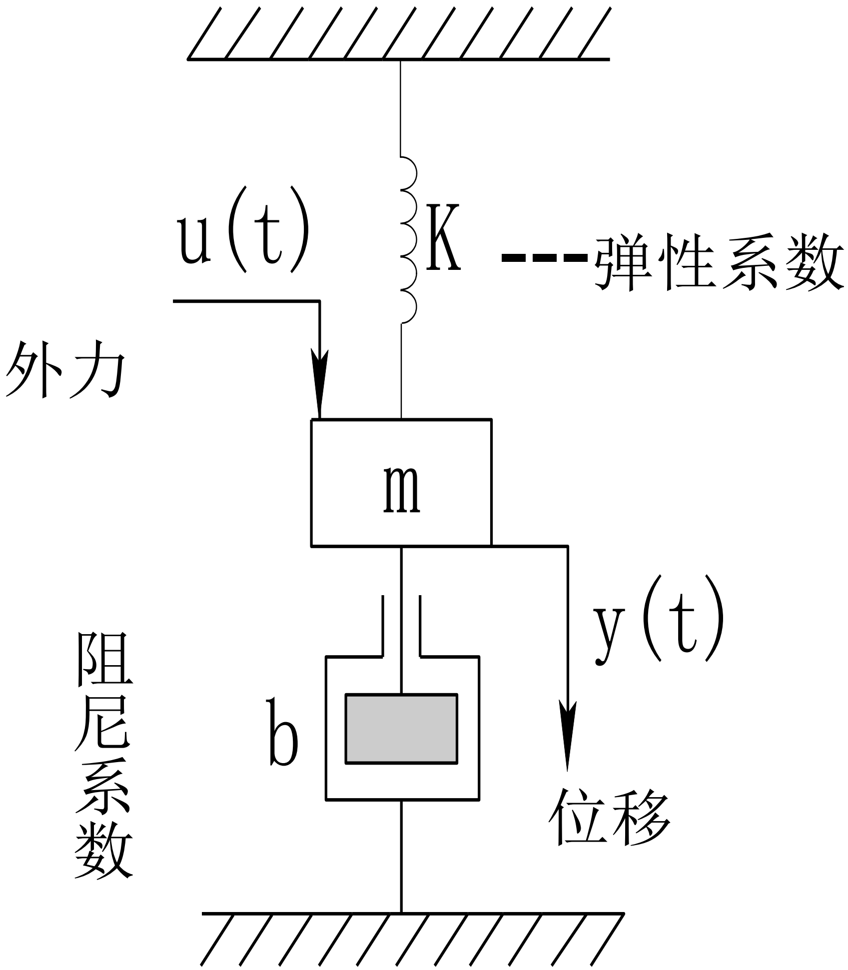
$$y = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_2}{R_1+R_2} & -\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} u(t)$$

3)状态空间描述的数学模型可表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$x \in R^2,\quad u \in R^1,\quad y \in R^1$$

【例3】 求图示机械系统的状态空间表达式



根据牛顿力学

$$u(t) = m\ddot{y} + b\dot{y} + ky$$

选择状态变量

$$x_1 = y,$$
$$x_2 = \dot{y}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{b}{m}x_2 + \dfrac{1}{m}u(t) \end{cases}$$

系统输出方程为：

$$y = x_1$$

写成矩阵形式的状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

系统输出方程为：

$$y = x_1$$

写成矩阵形式的状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}} u$$

$$y = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$x \in R^2,\ u \in R^1,\ \ y \in R^1$$

1.4 状态空间表达式的建立（二）

微分方程（传递函数）$\longrightarrow$ 状态空间表达式（实现问题）

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_mu^{(m)}+b_{m-1}u^{(m-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$$

传递函数 $$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

实现问题：选取适当的状态变量，确定线性定常系统的状态空间表达式

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$

实现条件： $m\le n$

1、传递函数中没有零点时的实现

系统的微分方程： $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_0u$

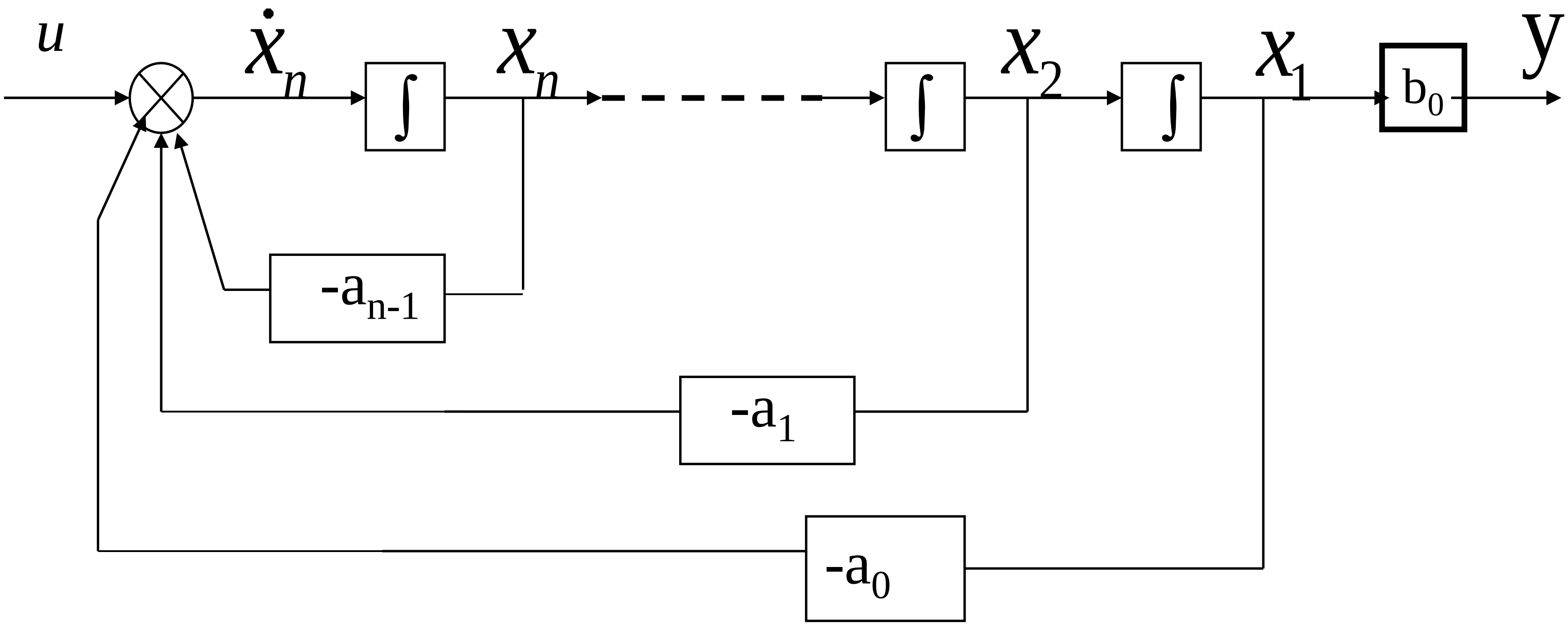
（1）选择状态变量（画出模拟结构图 ）；

（2）将高阶微分方程化为状态变量的一阶微分方程组

（3）写成矩阵形式

1.4 状态空间表达式的建立（二）

$$y^{(n)}=-a_0y-a_1\dot{y}-\dots-a_{n-1}y^{(n-1)}+b_0u$$



（1）选择状态变量

$$x_1=y/b_0,\quad x_2=\dot{y}/b_0,\quad \cdots,\quad x_n=y^{(n-1)}/b_0$$

（2）将高阶微分方程化为状态变量的一阶微分方程组

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = x_3 \\
\cdots\cdots \\
\dot{x}_{n-1} = x_n \\
\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u
\end{cases}
$$

（3）矩阵形式

状态方程为:

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\text{友矩阵}}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

输出方程为:

$$
y = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x
$$

【例1】 设系统输入-输出微分方程为:

$$\dddot{y}+6\ddot{y}+41\dot{y}+7y=6u$$

解：取 $x_1=y/6, x_2=\dot{y}/6, x_3=\ddot{y}/6$

可导出系统状态方程和输出方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -7 & -41 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

2、传递函数中有零点时的实现

系统微分方程：

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_mu^{(m)}+b_{m-1}u^{(m-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$$

传递函数 $$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

状态变量选择原则：

使导出的一阶微分方程组右边不出现 u 的导数项。

（1）中间变量法

（2）待定系数法

（1）中间变量法

状态方程：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}u$$

输出方程：

$$y=[(b_0-a_0b_n)\ (b_1-a_1b_n)\cdots(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)]x+[b_n]\,u$$

(当*m*<*n* 时，b_n =0)

$$y=[b_0\quad b_1\quad \cdots\quad b_{n-1}]\,x$$

【例2】给定系统的输入—输出描述为:(m<n)

$$y^{(3)}+16y^{(2)}+194y^{(1)}+640y=160u^{(1)}+720u$$

解：相应的一个状态空间描述为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-640&-194&-16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}720&160&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

【例3】给定系统的输入—输出描述为: (m=n)

$$y^{(3)}+2y^{(2)}+5y^{(1)}+7y=4u^{(3)}+3u^{(1)}+5u$$

解：相应的一个状态空间描述为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -7 & -5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}-23 & -17 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+4u$$

(2）待定系数法：

系统微分方程：（n 阶系统）

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_mu^{(m)}+b_{m-1}u^{(m-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$$

状态方程

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\beta_{n-1}\\ \beta_{n-2}\\ \vdots\\ \beta_1\\ \beta_0\end{bmatrix}u$$

输出方程

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}x+\beta_nu$$

求待定系数：

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ \vdots & a_{n-1} & 1 & & \\ a_1 & \vdots & a_{n-1} & 1 & \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

或记为：

$$\begin{cases} \beta_n = b_n \\ \beta_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_n \\ \beta_{n-2} = b_{n-2} - a_{n-2}\beta_n - a_{n-1}\beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_0 = b_0 - a_0\beta_n - a_1\beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 \end{cases}$$

【例4】系统输出-输入微分方程为:

- 待定系数法 $y^{(3)}+2y^{(2)}+5y^{(1)}+7y=4u^{(3)}+3u^{(1)}+5u$

$$a_2=2,\quad a_1=5,\quad a_0=7$$

$$b_3=4,\quad b_2=0,\quad b_1=3,\quad b_0=5$$

$$\begin{cases}\beta_3=b_3=4\\ \beta_2=b_2-a_2\beta_3=-8\\ \beta_1=b_1-a_1\beta_3-a_2\beta_2=-1\\ \beta_0=b_0-a_0\beta_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1=19\end{cases}$$

状态空间描述:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 19 \end{bmatrix} u$$

输出方程:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 4u$$

1.5 状态向量的线性变换(坐标变换)

1.5.1、系统状态空间表达式的非唯一性

设给定系统为：

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0$$

$$y = Cx + Du$$

任取非奇异矩阵T，将原状态向量x作线性变换，得到另一状态向量z，设变换关系为：

$$x = Tz \quad 则 \quad z = T^{-1}x$$

代入状态方程和输出方程，得到新的状态空间表达式：

$$\dot{x} = T\dot{z} = ATz + Bu \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \;\; ; \;\; z(0) = T^{-1}x(0) = T^{-1}x_0$$

$$y = Cx + Du = CTz + Du$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \\ y = \bar{C}z + \bar{D}u \end{cases} \quad 其中, \begin{cases} \bar{A} = T^{-1}AT, \bar{B} = T^{-1}B \\ \bar{C} = CT, \bar{D} = D \end{cases}$$

由于T为任意非奇异矩阵，所以系统的状态空间表达式是不唯一的。称矩阵T为变换矩阵。

【例1】某系统状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}u\ \ ;x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}x$$

1）若取变换矩阵 $T_1=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$,即 $T_1^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$

则变换后的状态向量为：

$$z=T_1^{-1}x=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}x$$

即： $z_1=\dfrac{1}{2}x_2$

$$z_2=\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2$$

新的状态向量 z_1,z_2 是原状态向量 x_1,x_2 的线性组合

变换后

$$\bar{A}=T_1^{-1}AT_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$\bar{B}=T_1^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\bar{C}=CT_1=\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\end{bmatrix}$$

变换后的状态空间表达式为

$$\dot{z}=\bar{A}z+\bar{B}u=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\bar{C}z=\begin{bmatrix}6 & 0\end{bmatrix}z$$

$$z_0=T_1^{-1}x_0=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\ -1\end{bmatrix}$$

2）若取变换矩阵

$$T_2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\text{即}\quad T_2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

则变换后的状态向量为：

$$\tilde{z}=T_2^{-1}x=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}x$$

变换后的状态空间表达式为：

$$\dot{\tilde{z}}=T_2^{-1}AT_2\tilde{z}+T_2^{-1}Bu=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\tilde{z}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\tilde{z}+\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}u\quad ;$$

$$y=CT_2\tilde{z}=\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\tilde{z}=\begin{bmatrix}3 & 3\end{bmatrix}\tilde{z}$$

1.5.2 系统特征值的不变性及系统的不变量

1、系统特征值定义:

设线性定常系统状态空间表达式为:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

系统特征值：就是其系统矩阵A的特征值。即特征方程

$$\left|\lambda I - A\right| = 0$$ 的根。

特征值性质:

1）一个n维系统的 $n \times n$ 方阵A，有且仅有 n 个特征值。

2）物理上存在的系统，方阵 A 为实数阵，其n个特征值或为实数，或为共轭复数对。

1.5 状态向量的线性变换(坐标变换)

2、对系统作线性变换，其特征值不变。

证明：作 $x=Tz$ 线性非奇异变换，则有

$$\dot{z}=T^{-1}ATz+T^{-1}Bu$$

$$y=CTz+Du$$

若要证其特征值不变，$|\lambda I-A|=|\lambda I-T^{-1}AT|$?

$$|\lambda I-T^{-1}AT|=|\lambda T^{-1}T-T^{-1}AT|=|T^{-1}(\lambda I-A)T|$$

$$=|T^{-1}||\lambda I-A||T|$$

$$=|\lambda I-A|$$

证毕。

注：由于特征值全由特征多项式的系数唯一地确定，也称特征多项式的系数为系统的不变量。

3. 特征向量

定义：令A为n阶矩阵。若λ_i和n维向量p_i满足$Ap_i=\lambda_i p_i$，则称λ_i为矩阵A的特征根，而p_i为对应的特征向量。

【例2】求A的特征向量。

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

解：先求特征值，由

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 6 & \lambda+11 & -6 \\ 6 & 11 & \lambda-5 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1=-1,\ \ \lambda_2=-2,\ \ \lambda_3=-3$$

1.5 状态向量的线性变换(坐标变换)

1）对应于 $\lambda_1 = -1$ 的特征向量 P_1

设 $$P_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}$$

按照特征向量的定义，有 $AP_1 = \lambda_1 P_1$

则 $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{11} \\ -p_{21} \\ -p_{31} \end{bmatrix}$$

解得： $p_{21} = 0,$

$p_{11} = p_{31}$

$p_{11} = p_{31} = 1$ 于是 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

用同样得方法可以分别算出对应于 $\lambda_2 = -2$ **的特征向量**

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

对应于 $\lambda_3 = -3$ **的特征向量**

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

1.5.3、状态空间表达式变换为约旦规范型

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases} \xrightarrow{x = Tz} \begin{cases}\dot{z} = Jz + T^{-1}Bu \\ y = CTz\end{cases}$$

A特征值无重根时

$$J = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$J = T^{-1}AT$$

有重根时（q个重根λ_1）

$$J = \left[\begin{array}{cccc:ccc} \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ \hdashline & & & & \lambda_{q+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{array}\right]$$

变换阵T的求法

1、系统矩阵A具有任意形式

1） A特征值无重根时

定理：对于系统$\dot{x} = Ax + Bu$，若矩阵A具有n个两两相异的特征根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ，则存在线性非奇异变换 $x = Tz$ 将系统化为对角标准型 $\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u$

其中： $$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}$$

p_i为A的n个特征值对应的向量。

1.5 状态向量的线性变换(坐标变换)

证明：设 $T=(p_1,\cdots,p_n)$，p_i为特征根 $\lambda_i, i=1,\cdots,n$ 所对应的特征向量。则有

$$AT=(Ap_1,\cdots,Ap_n)=(\lambda_1 p_1,\cdots,\lambda_n p_n)$$
$$=(p_1,\cdots,p_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$
$$=T\bar{A},$$

$$\Rightarrow \bar{A}=T^{-1}AT \quad \text{为对角标准型。}$$

1.5 状态向量的线性变换(坐标变换)

化对角标准型**充要条件**：n 阶系统矩阵 A 有n 个线性无关的特征向量。

化对角标准型的步骤:

Step 1 求取系统矩阵A的n个特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

Step 2 求特征值对应的特征向量 $p_1,\cdots,p_n$.

Step 3 令 $\mathrm{T}=(p_1,\cdots,p_n)$.，求 T^{-1}.

Step 4 做变换 $\bar{A}=\mathrm{T}^{-1}A\mathrm{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$$\bar{B}=T^{-1}B,\qquad \bar{C}=CT$$

【例3】线性定常系统 $\dot{x} = Ax + B\,u$ 将状态方程化为对角标准型.

其中：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

解:1)求其特征值:

$$|\lambda I - A| = \det\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = -1,\ \ \lambda_3 = 1$$

2)求特征向量 $\lambda_1 = 2,$ $Ap_1 = \lambda_1 p_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_{21} + v_{31} = 0 \\ 3v_{21} = 0 \\ -2v_{21} + v_{31} = 0 \end{cases}$$

$\therefore v_{21} = v_{31} = 0,$ v_{11}为任意常数 取: $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

对 $\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3v_{12} - v_{22} - v_{32} = 0 \\ v_{22} + v_{32} = 0 \end{cases}$$

$v_{22} = -v_{32},$ $v_{12} = 0$ 取: $p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 同理得: $p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3）确定非奇异矩阵

T

$$T=\left[p_1 \quad p_2 \quad p_3\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}, \qquad T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

4）求变换后的矩阵

$$\bar{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\bar{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 2\\ 5\end{bmatrix}$$

5）对角线规范形式为：

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}2\\ 2\\ 5\end{bmatrix}u$$

2) A 阵的特征值有重根时

设A的特征根有q个λ_1的重根，其余（n-q）个为互异根，则通过变换，可以将A阵化为Jordan标准型：

$$\hat{A}=\left[\begin{array}{cccc|ccc}
\lambda_1 & 1 & & & & & \\
 & \lambda_1 & \ddots & & & & \\
 & & \ddots & 1 & & & \\
 & & & \lambda_1 & & & \\
\hline
 & & & & \lambda_{q+1} & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & \lambda_n
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \text{q 维} \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} \text{n} - \text{q 维}
\end{array}$$

1.5 状态向量的线性变换(坐标变换)

变换阵组成如下：

$$T=\left[\begin{array}{cccc:ccc} P_1 & P_2 & \cdots & P_q & P_{q+1} & \cdots & P_n \end{array}\right]$$

其中，$P_{q+1}\cdots P_n$ 是对应于（**n－q**）个单根的特征向量；

$P_1\cdots P_q$ 是对应于**q**个 λ_1 重根的特征向量，由下式计算：

$$\begin{cases} \lambda_1 P_1 - AP_1 = 0 \\ \lambda_1 P_2 - AP_2 = -P_1 \\ \cdots \\ \lambda_1 P_q - AP_q = -P_{q-1} \end{cases}$$

这里 P_1是λ_1对应的特征向量，其余 $P_2\cdots P_q$ 称为广义特征向量。

化约旦标准型的步骤:

Step 1 求取系统矩阵A的n个特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

Step 2 求特征值对应的特征向量及广义特征向量 $p_1,\cdots,p_n$.

$$(\lambda I - A)p_1 = 0,\ (\lambda I - A)p_i = -p_{i-1},\ 2 \le i \le q.$$

Step 3 令 $\mathrm{T} = (p_1,\cdots,p_n)$.， 求 T^{-1}.

Step 4 做变换 $\bar{A} = \mathrm{T}^{-1}A\mathrm{T} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & & \lambda_{q+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{array}\right]$

$$\bar{B} = T^{-1}B,$$

$$\bar{C} = CT$$

例1-11　将下系统化为约当标准型

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=(1\quad 0\quad 0)x$$

解：1) 求系统特征根.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ -2 & -3 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0$$

$$\lambda_1=2,\ \ \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=-1$$

2) 求特征矢量

对 $\lambda_1 = 2$， 由 $(\lambda_1 I - A)v_1 = 0$ 可得

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2v_{11} - v_{21} = 0 \\ 2v_{21} - v_{31} = 0 \\ -2v_{11} - 3v_{21} + 2v_{31} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

对 $\lambda_2=-1$, 由 $(\lambda_2 I-A)v_2=0$ 可得

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -v_{12}-v_{22}=0 \\ -v_{22}-v_{32}=0 \\ -2v_{12}-3v_{22}-v_{32}=0 \end{cases} \Longrightarrow \quad v_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.5 状态向量的线性变换(坐标变换)

对 $\lambda_3 = -1$, 由 $(\lambda_3 I - A)v_3 = -v_2$ 可得

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -v_{13} - v_{23} = -1 \\ -v_{23} - v_{33} = 1 \\ -2v_{13} - 3v_{23} - v_{33} = -1 \end{cases} \Longrightarrow \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3) 构成状态转移矩阵T：

$$T=[v_1,v_2,v_3]=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\4&1&-1\end{bmatrix},\qquad T^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&-5&2\\6&3&-3\end{bmatrix}$$

4) 新的状态空间描述为：

$$\dot{\bar{x}}=T^{-1}AT\bar{x}+T^{-1}Bu=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}\bar{x}+\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}u$$

$$y=CT\bar{x}=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\bar{x}$$

2、A矩阵具有标准型：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

1)对线性定常系统，如果其特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是两两相异

T为范德蒙德矩阵：

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

2)、 A阵为友矩阵形式，A的特征值有重根时

以特征值 λ_1 是三重根为例， $\lambda_2,\lambda_3\cdots\lambda_l$ 是两两相异的，则将系统状态方程化为约旦规范形的非奇异矩阵T的形式为

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_l \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_l^2 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_1 & \lambda_2^3 & \cdots & \lambda_l^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dfrac{d}{d\lambda_1}(\lambda_1^{n-1}) & \dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2}{d\lambda_1^2}(\lambda_1^{n-1}) & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_l^{n-1} \end{bmatrix}$$

3) A阵有共轭复根的情况

以四阶系统其中有一对共轭复根为例

$$\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega; \lambda_3 \neq \lambda_4$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \sigma & \omega & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \sigma^2 - \omega^2 & 2\sigma\omega & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \sigma^3 - 3\sigma\omega^2 & 3\sigma^2\omega - \omega^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{bmatrix}$$

3. 系统的并联型实现

传递函数 $\longrightarrow$ 状态空间描述（并联型）

控制系统的频域描述（传递函数）

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

1、控制系统传递函数的极点为两两相异.

若传函极点为两两相异，则展开后部分分式的形式为:

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c_1}{s-\lambda_1}+\frac{c_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{c_n}{s-\lambda_n}$$

式中 $\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ldots\lambda_n$为系统中两两相异极点.

$c_1,c_2,\cdots,c_n$ **为待定系数.**

可按下式计算 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$

$$c_i = \lim_{s\to\lambda_i} W(s)(s-\lambda_i)$$

（1）选择状态变量：取每个积分器的输出为一个状态变量

令 $x_i(s)=\dfrac{1}{s-\lambda_i}U(s) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$

为状态变量的拉氏变换式,

$$Y(s)=c_1\frac{1}{s-\lambda_1}U(s)+c_2\frac{1}{s-\lambda_2}U(s)+\cdots+c_n\frac{1}{s-\lambda_n}U(s)$$

则：
$$\begin{cases} x_1(s) = \frac{1}{s-\lambda_1}U(s) \\ x_2(s) = \frac{1}{s-\lambda_2}U(s) \\ \cdots \\ x_{n-1}(s) = \frac{1}{s-\lambda_{n-1}}U(s) \\ x_n(s) = \frac{1}{s-\lambda_n}U(s) \end{cases}$$

（2）化为状态变量的一阶方程组

$$\begin{cases} sx_1(s) = \lambda_1 x_1(s) + U(s) \\ sx_2(s) = \lambda_2 x_2(s) + U(s) \\ \cdots \\ sx_{n-1}(s) = \lambda_{n-1} x_{n-1}(s) + U(s) \\ sx_n(s) = \lambda_n x_n(s) + U(s) \end{cases}$$

及 $Y=c_1x_1(s)+c_2x_2(s)+\cdots+c_nx_n(s)$

对上式进行拉氏反变换, 得:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=\lambda_1x_1(t)+u(t)\\ \dot{x}_2(t)=\lambda_2x_2(t)+u(t)\\ \cdots\\ \dot{x}_{n-1}(t)=\lambda_{n-1}x_{n-1}(t)+u(t)\\ \dot{x}_n(t)=\lambda_nx_n(t)+u(t)\end{cases}$$

$$y=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

（3）矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 \; c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

对角线规范形！

【例7】 求其状态空间描述.

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

解: 其极点: $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2, \lambda_3=-3$

而待定常数为

$$c_1=\lim_{s\to -1} W(s)(s-\lambda_1)=\lim_{s\to -1}\frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}(s+1)=3$$

$$c_2=\lim_{s\to -2} W(s)(s-\lambda_2)=\lim_{s\to -2}\frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}(s+2)=-6$$

$$c_3=\lim_{s\to -3} W(s)(s-\lambda_3)=\lim_{s\to -3}\frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}(s+3)=3$$

相应的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}3 & -6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

对角线
标准型

另外： $c_i(i=1,2,\cdots,n)$

$$c_i = \lim_{s\to\lambda_i} W(s)(s-\lambda_i)$$

$$Y(s) = c_1\frac{1}{s-\lambda_1}U(s) + c_2\frac{1}{s-\lambda_2}U(s) + \cdots + c_n\frac{1}{s-\lambda_n}U(s)$$

（1）选择状态变量：取每个积分器的输出为一个状态变量

令

$$x_i(s) = \frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

为状态变量的拉氏变换式,

则：

$$Y = x_1(s) + x_2(s) + \cdots + x_n(s)$$

1.5 状态向量的线性变换(坐标变换)

$$\begin{cases} x_1(s) = \frac{c_1}{s-\lambda_1}U(s) \\ x_2(s) = \frac{c_2}{s-\lambda_2}U(s) \\ \cdots \\ x_{n-1}(s) = \frac{c_{n-1}}{s-\lambda_{n-1}}U(s) \\ x_n(s) = \frac{c_n}{s-\lambda_n}U(s) \end{cases}$$

（2）化为状态变量的一阶方程组

$$\begin{cases} sx_1(s) = \lambda_1 x_1(s) + c_1 U(s) \\ sx_2(s) = \lambda_2 x_2(s) + c_2 U(s) \\ \cdots \\ sx_{n-1}(s) = \lambda_{n-1} x_{n-1}(s) + c_{n-1} U(s) \\ sx_n(s) = \lambda_n x_n(s) + c_n U(s) \end{cases}$$

及 $$Y = x_1(s) + x_2(s) + \cdots + x_n(s)$$

对上式进行拉氏反变换, 得:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + c_1 u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t) + c_2 u(t) \\ \cdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = \lambda_{n-1} x_{n-1}(t) + c_{n-1} u(t) \\ \dot{x}_n(t) = \lambda_n x_n(t) + c_n u(t) \end{cases}$$

$$y = x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_n(t)$$

（3）矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1.5 状态向量的线性变换(坐标变换)

【例8】 设 $W(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{6}{s^3+6s^2+11s+6}$， 试求其状态空间描述.

解: 其极点为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$， 而待定常数为

$$c_1=\lim_{s\to -1}W(s)(s-\lambda_1)=\lim_{s\to -1}\frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}(s+1)=3$$

$$c_2=\lim_{s\to -2}W(s)(s-\lambda_2)=\lim_{s\to -2}\frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}(s+2)=-6$$

$$c_3=\lim_{s\to -3}W(s)(s-\lambda_3)=\lim_{s\to -3}\frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}(s+3)=3$$

相应的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2、控制系统传递函数的极点为重根

设：传递函数的极点为一个q重根λ_1,其余为互异根

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c_{1q}}{(s-\lambda_1)^q}+\frac{c_{1(q-1)}}{(s-\lambda_1)^{q-1}}+\cdots+\frac{c_{12}}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{c_{11}}{s-\lambda_1}$$

$$+\sum_{i=q+1}^{n}\frac{c_i}{(s-\lambda_i)}$$

λ_1为q重极点，$c_{1i}(i=1,2,\ldots q)$ 为待定常数。

$$c_{1i}=\lim_{s\to\lambda_1}\frac{1}{(q-i)!}\frac{d^{q-i}}{ds^{q-i}}\left[W(s)(s-\lambda_1)^q\right] \qquad c_i=\lim_{s\to\lambda_i}W(s)(s-\lambda_i)$$

$$Y(s)=c_{1q}\frac{1}{(s-\lambda_1)^q}U(s)+c_{1(q-1)}\frac{1}{(s-\lambda_1)^{q-1}}U(s)+\cdots$$

$$+c_{11}\frac{1}{s-\lambda_1}U(s)+\sum_{i=q+1}^{n}\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$$

1.5 状态向量的线性变换(坐标变换)

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{q-1} \\ \dot{x}_q \\ \hdashline \dot{x}_{q+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{cccccc:ccc}
\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_{q+1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{q-1} \\ x_q \\ \hdashline x_{q+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \hdashline 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

$$
y = \left[\begin{array}{ccccc:ccc} c_{1q} & c_{1(q-1)} & \cdots & c_{12} & c_{11} & c_{q+1} & \cdots & c_n \end{array}\right]
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{q-1} \\ x_q \\ \hdashline x_{q+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

约旦规范形!

【例9】设 $W(s)=\dfrac{2s^2+5s+1}{(s-2)^3}$,三重极点为s=2,待定常数

$$c_{13}=\lim_{s\to2}W(s)(s-2)^3=\lim_{s\to2}(2s^2+5s+1)=19$$

$$c_{12}=\lim_{s\to2}\frac{d}{ds}\left\{W(s)(s-2)^3\right\}=\lim_{s\to2}(4s+5)=13$$

$$c_{11}=\lim_{s\to2}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left\{W(s)(s-2)^3\right\}=\frac{4}{2}=2$$

状态空间描述为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}19&13&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

1.6 从状态空间表达式求传递函数阵

1.6.1 传递函数(矩阵)

1、SISO系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \qquad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A: n \times n, & b: n \times 1 \\ c: 1 \times n, & d: 1 \times 1 \end{matrix}$$

取拉氏变换得： $sx(s) = Ax(s) + bu(s)$

$$y(s) = \left(c(s \cdot I - A)^{-1} b + d\right) u(s)$$

$$W(s) = c(sI - A)^{-1} b + d = \frac{c\,\mathrm{adj}(sI - A)b}{|sI - A|} + d$$

A的特征值即为系统的极点。

2、MIMO系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} A: n\times n, & B: n\times r \\ C: m\times n, & D: m\times r \end{array}$$

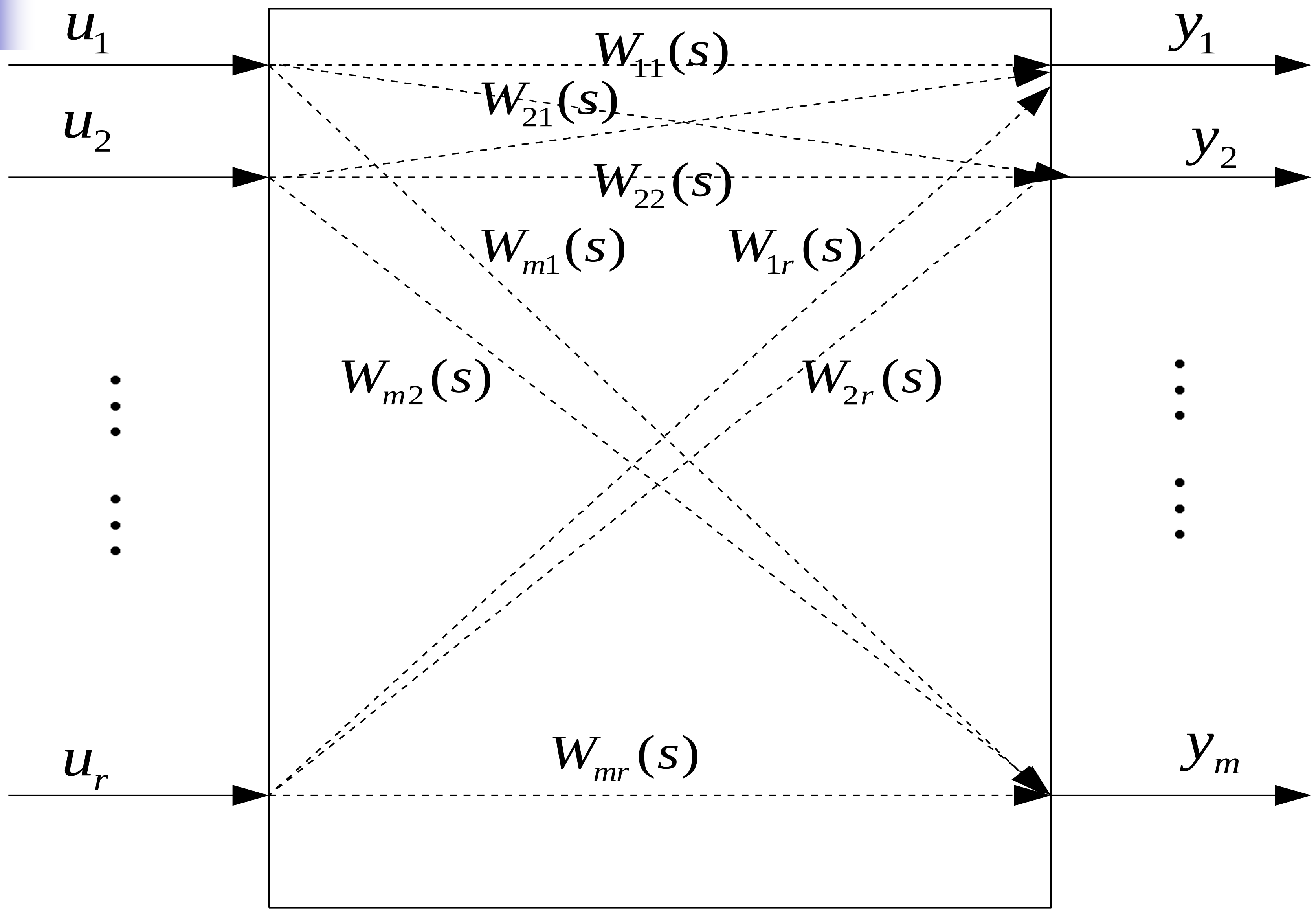
$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$= \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1r}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \cdots & W_{2r}(s) \\ \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{m1}(s) & W_{m2}(s) & \cdots & W_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

$W_{ij}(s)$表示第 j 个输入对第 i 个输出的传递关系。

当 $i \neq j$ 时，不同标号的输入与输出有相互关联，称为**耦合**。

1.6 从状态空间表达式求传递函数阵



【例1】已知系统如下，求传递函数阵。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\qquad y=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&-1\end{bmatrix}x$$

解：

$$W(s)=C(sI-A)^{-1}B$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{-s^2+-4s+29}{s^3+6s^2+11s+6}&\dfrac{s^2+3s-4}{s^3+6s^2+11s+6}\\\dfrac{4s^2+56s+52}{s^3+6s^2+11s+6}&\dfrac{-3s^2-17s-14}{s^3+6s^2+11s+6}\end{bmatrix}$$

1.6 从状态空间表达式求传递函数阵

系统传递函数的不变性

同一系统，尽管系统的状态空间表达式是非唯一的，但是它的传递函数是唯一的。

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \xrightarrow{x = Tz} \begin{cases}\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du\end{cases}$$

$$W'(s) = CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D$$

$$= C[T(sI - T^{-1}AT)T^{-1}]^{-1}B + D$$

$$= C[T(sI)T^{-1} - T(T^{-1}AT)T^{-1}]^{-1}B + D$$

$$= C(sI - A)^{-1}B + D = W(s)$$

利用公式：

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

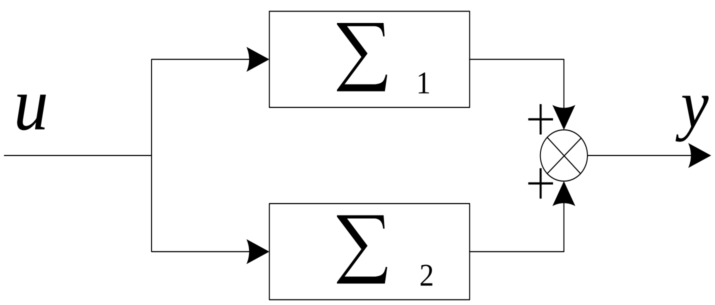
1.6.2 子系统在各种联接时的传递函数阵

1. 并联:

系统如图，二子系统并联连接

$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1\\ y_1 = C_1x_1 + D_1u_1\end{cases}$$

$$\Sigma_2:\begin{cases}\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2\\ y_2 = C_2x_2 + D_2u_2\end{cases}$$



特点： $u_1 = u_2 = u, y = y_1 + y_2$

$W(s) = ?$

1.6 从状态空间表达式求传递函数阵

并联组合系统的状态空间表达式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & \pm C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (D_1 \pm D_2) u$$

而系统的传递函数为：

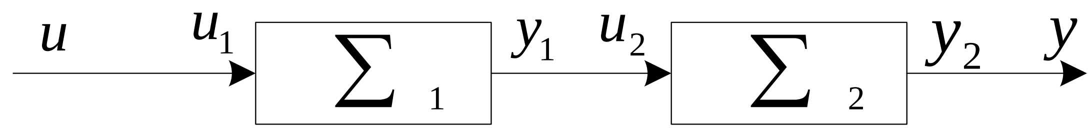
$$W(s) = \begin{bmatrix} C_1 & \pm C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (sI - A_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + (D_1 \pm D_2)$$

$$= C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 \pm C_2 (sI - A_2)^{-1} B_2 + (D_1 \pm D_2)$$

$$= W_1(s) \pm W_2(s)$$

1.6 从状态空间表达式求传递函数阵

2. 串联连接:



系统如图，二子系统串联连接

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

特点： $u = u_1, \quad u_2 = y_1, \quad y_2 = y$

串联组合后系统的状态空间表达式：

$$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1$$

$$y_1 = C_1x_1 + D_1u_1$$

$$\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2 = A_2x_2 + B_2(C_1x_1 + D_1u_1)$$

$$= B_2C_1x_1 + A_2x_2 + B_2D_1u$$

$$y = y_2 = C_2x_2 + D_2u_2 = C_2x_2 + D_2(C_1x_1 + D_1u_1)$$

$$= D_2C_1x_1 + C_2x_2 + D_2D_1u$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D_2D_1u$$

传递函数：

$$W(s)=\begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sI_1-A_1 & 0 \\ -B_2C_1 & sI_2-A_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix}+D_2D_1$$

$$=\begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (sI_1-A_1)^{-1} & 0 \\ (sI_2-A_2)^{-1}B_2C_1(sI_1-A_1)^{-1} & (sI_2-A_2)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix}+D_2D_1$$

$$=[C_2(sI_2-A_2)^{-1}B_2+D_2][C_1(sI_1-A_1)^{-1}B_1+D_1]$$

$$=W_2(s)W_1(s)$$

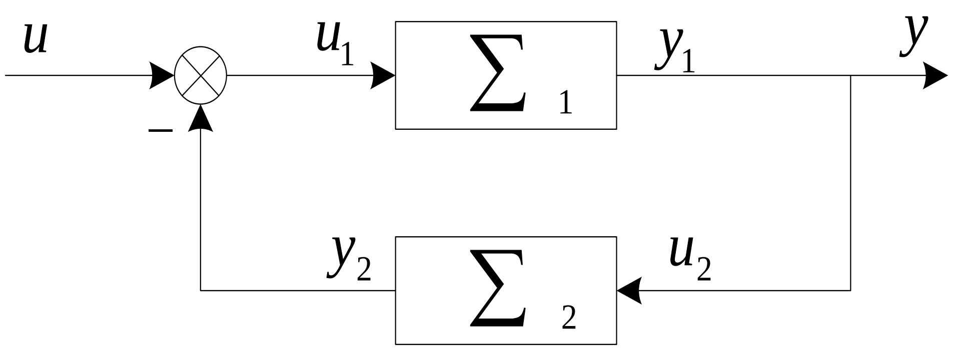
注意次序

1.6 从状态空间表达式求传递函数阵

3. 输出反馈:

系统如图，二子系统并联连接

$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1\\ y_1 = C_1x_1\end{cases}$$



$$\Sigma_2:\begin{cases}\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2\\ y_2 = C_2x_2\end{cases}$$

特点: $y = y_1 = u_2, u_1 = u - y_2$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1 = A_1x_1 + B_1(u - C_2x_2) = A_1x_1 - B_1C_2x_2 + B_1u\\ \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2 = A_2x_2 + B_2C_1x_1 = B_2C_1x_1 + A_2x_2\\ y = y_1 = C_1x_1\end{cases}$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & -B_1C_2\\ B_2C_1 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}C_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

组合系统传递函数：

$$W(s)=\begin{bmatrix}C_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sI_1-A_1 & B_1C_2\\ -B_2C_1 & sI_2-A_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}C_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}=C_1F_{11}B_1$$

$$=W_1(s)\text{-}W(s)W_2(s)W_1(s)$$

$$\Rightarrow\quad W(s)=W_1(s)[I+W_2(s)W_1(s)]^{-1}$$

1.7 离散系统的状态空间表达式

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

连续时间系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

离散时间系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

采样周期T，系统状态从k时刻到k+1时刻的变化情况

1.7 离散系统的状态空间表达式

通常，经典控制理论中，离散系统为如下高阶差分方程描述

$$y(k+n)+a_1y(k+n-1)+\cdots+a_{n-1}y(k+1)+a_ny(k)$$
$$=b_0u(k+n)+b_1u(k+n-1)+\cdots+b_{n-1}u(k+1)+b_nu(k)$$

或经过z变换，用脉冲传递函数描述

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_{n-1}z+b_n}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}$$

如何得到状态空间表达式?

连续时间系统的状态空间方法完全适用于离散时间系统.

1.7 离散系统的状态空间表达式

只考虑一个简单情况

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_1y(k+1)+a_0y(k)=b_0u(k)$$

选择状态变量

$$\begin{aligned}
x_1(k)&=y(k)\\
x_2(k)&=y(k+1)\\
x_3(k)&=y(k+2)\\
&\vdots\\
x_n(k)&=y(k+n-1)
\end{aligned}$$

得到状态空间表达式

$$\begin{aligned}
x_1(k+1)&=y(k+1)=x_2(k)\\
x_2(k+1)&=y(k+2)=x_3(k)\\
x_3(k+1)&=y(k+3)=x_4(k)\\
&\vdots\\
x_{n-1}(k+1)&=y(k+n-1)=x_n(k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_n(k+1)&=y(k+n)\\
&=-a_0x_1(k)-a_1x_2(k+1)-\cdots a_{n-1}x_n(k)+b_nu(k)
\end{aligned}$$

1.8　线性时变系统和非线性系统状态空间表达式

线性时变系统：

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

$$y = C(t)x + D(t)u$$

以前讨论的只是定常系统，其特征是它的状态空间表达式中的*A*、*B*、*C*、*D*等矩阵的元素既不依赖于输入、输出，也与时间无关

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1r}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nr}(t) \end{pmatrix}$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \cdots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1}(t) & c_{m2}(t) & \cdots & c_{mn}(t) \end{pmatrix}$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \cdots & d_{1r}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \cdots & d_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1}(t) & d_{m2}(t) & \cdots & d_{mr}(t) \end{pmatrix}$$

非线性系统：

$$\dot{x} = f(x,u,t)$$
$$y = g(x,u,t)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;u_1,u_2,\cdots,u_r;t),i = 1,2,\cdots,n \\ y_j &= g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n;u_1,u_2,\cdots,u_r;t),j = 1,2,\cdots,m \end{aligned}\right\}$$

如果式中不显含时间t，则为时不变非线性系统，而为：

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \end{aligned}\right\}$$

线性化:

设 $\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{u}_0$ 和 $\boldsymbol{y}_0$ 是满足非线性方程式的一组解，即

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)$$
$$\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)$$

如果我们只局限于考察输入$\boldsymbol{u}$偏离$\boldsymbol{u}_0$为δu时，对应于它，$\boldsymbol{x}$也偏离$\boldsymbol{x}_0$为$\delta\boldsymbol{x}$；y也偏离$\boldsymbol{y}_0$为$\delta\boldsymbol{y}$时的行为，则可以通过对系统的一次近似而予以线性化。为此，将f和g在$\boldsymbol{x}_0$和$\boldsymbol{u}_0$附近作泰勒级数展开

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0} \delta\boldsymbol{x} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0} \delta\boldsymbol{u} + \alpha(\delta\boldsymbol{x}, \delta\boldsymbol{u}) \\
\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0} \delta\boldsymbol{x} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0} \delta\boldsymbol{u} + \beta(\delta\boldsymbol{x}, \delta\boldsymbol{u})
\end{aligned}\right\}$$

1.8 线性时变系统和非线性系统状态空间表达式

线性化：

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \frac{\partial g_m}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial u_r} \end{pmatrix}$$

线性化：

$$\delta\dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,u_0} \delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0,u_0} \delta u$$

$$\delta y = y - y_0 = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_0,u_0} \delta x + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_0,u_0} \delta u$$

令

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,u_0} = A; \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0,u_0} = B$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_0,u_0} = C; \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_0,u_0} = D$$

线性化后的表达式就成了一般线性表达式了，即

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\hat{u}$$

$$\hat{y} = C\hat{x} + D\hat{u}$$

[例1-12] 试求下列非线性系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_2^3 + 2u$$
$$y = x_1 + x_2^2$$

在$x_0 = 0$处的线性化状态空间表达式

解 由状态方程和输出方程知

$$f_1(x_1, x_2, u) = x_2$$

$$f_2(x_1, x_2, u) = x_1 + x_2 + x_2^3 + 2u$$

$$g(x_1, x_2, u) = x_1 + x_2^2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}|_{x_0} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}|_{x_0} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1}|_{x_0} = 1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}|_{x_0} = (1 + 3x_2^2)|_{x_0} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_1}|_{x_0} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2}|_{x_0} = 2x_2|_{x_0} = 0$$

于是

$$A = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}|_{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}|_{x_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}|_{x_0} = [1, \quad 0], \qquad D = 0$$

故线性化后的表达式为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}} = [1, \quad 0]\, \hat{\boldsymbol{x}}$$

本章小结

本章小结

围绕控制系统的状态空间模型

给出几个概念	状态向量
状态空间表达式的建立	三种方式
组合系统的状态空间表达式	三种组合
线性变换	变换矩阵
状态空间表达式求传递函数	传递函数

倒立摆控制系统是一个复杂的、不稳定的、非线性系统，是进行控制理论教学及开展各种控制实验的理想实验平台。同时，其控制方法在军工、航天、机器人和一般工业过程领域中都有着广泛的用途，如机器人行走过程中的平衡控制、火箭发射中的垂直度控制和卫星飞行中的姿态控制、导弹稳定控制、地空导弹稳定控制、空空导弹稳定控制、航天器控制、月球车控制、空间机器人控制、足球机器人控制等。

http://v.youku.com/v_show/id_XNjA2MzY3NTQw.html

http://v.youku.com/v_show/id_XMTIyOTE1ODUy.html

http://v.youku.com/v_show/id_XMzE2NzYxMTA0.html