

## 逆矩阵的几种求法与解析

矩阵是线性代数的主要内容，很多实际问题用矩阵的思想去解既简单又快捷。逆矩阵又是矩阵理论的很重要的内容，逆矩阵的求法自然也就成为线性代数研究的主要内容之一。本文将给出几种求逆矩阵的方法。

### 1. 利用定义求逆矩阵

定义：设A、B都是n阶方阵，如果存在n阶方阵B使得 $AB=BA=E$ ，则称A为可逆矩阵，而称B为A的逆矩阵。下面举例说明这种方法的应用。

例1 求证：如果方阵A满足 $A^k=0$ ，那么E-A是可逆矩阵，且

$$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$$

证明 因为E与A可以交换，所以

$$(E-A)(E+A+A^2+\dots+A^{k-1}) = E-A^k,$$

因 $A^k=0$ ，于是得

$$(E-A)(E+A+A^2+\dots+A^{k-1}) = E,$$

$$\text{同理可得 } (E+A+A^2+\dots+A^{k-1})(E-A) = E,$$

因此E-A是可逆矩阵，且

$$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}.$$

同理可以证明(E+A)也可逆，且

$$(E+A)^{-1} = E - A + A^2 - \dots + (-1)^{k-1} A^{k-1}.$$

由此可知，只要满足 $A^k=0$ ，就可以利用此题求出一类矩阵 $E \pm A$ 的逆矩阵。

例2 设  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，求E-A的逆矩阵。

分析 由于A中有许多元素为零，考虑 $A^k$ 是否为零矩阵，若为零矩阵，则可以采用例2的方法求E-A的逆矩阵。

解 容易验证

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = 0$$

而  $(E-A)(E+A+A^2+A^3)=E$ , 所以

$$(E-A)^{-1} = E+A+A^2+A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 2. 初等变换法

求元素为具体数字的矩阵的逆矩阵，常用初等变换法。如果  $A$  可逆，则  $A$  可通过初等变换，化为单位矩阵  $I$ ，即存在初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_s$  使

$$(1) \quad P_1 P_2 \dots P_s A = I, \text{ 用 } A^{-1} \text{ 右乘上式两端，得：}$$

$$(2) \quad P_1 P_2 \dots P_s I = A^{-1}$$

比较 (1) (2) 两式，可以看到当  $A$  通过初等变换化为单位矩阵的同时，对单位矩阵  $I$  作同样的初等变换，就化为  $A$  的逆矩阵  $A^{-1}$ 。

用矩阵表示  $(A \mid I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I \mid A^{-1})$ ，就是求逆矩阵的初等行变换法，它是实际应用中比较简单的一种方法。需要注意的是，在作初等变换时只允许作行初等变换。同样，只用列初等变换也可以求逆矩阵。

例1 求矩阵  $A$  的逆矩阵。已知  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad [A \mid I] &\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/6 & -13/6 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{故 } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & -13/6 & 4/3 \\ 1/2 & 3/2 & -1 \\ -1/6 & -1/6 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

在事先不知道  $n$  阶矩阵是否可逆的情况下，也可以直接用此方法。如果在初等变换过程中发现左边的矩阵有一行元素全为 0，则意味着  $A$  不可逆，因为此时表明  $|A| = 0$ ，则  $A^{-1}$  不存在。

$$\text{例2 求 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } [A \ E] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由于左端矩阵中有一行元素全为 0，于是它不可逆，因此  $A$  不可逆。

### 3. 伴随阵法

定理  $n$  阶矩阵  $A = [a_{ij}]$  为可逆的充分必要条件是  $A$  非奇异，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

其中  $A_{ij}$  是  $|A|$  中元素  $a_{ij}$  的代数余子式。

$$\text{矩阵 } \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ 称为矩阵 } A \text{ 的伴随矩阵，记作 } A^3, \text{ 于是有 } A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^3.$$

证明 必要性：设  $A$  可逆，由  $AA^{-1} = I$ ，有  $|AA^{-1}| = |I|$ ，则  $|A| |A^{-1}| = |I|$ ，所以  $|A| \neq 0$ ，即  $A$  为非奇异。

充分性：设  $A$  为非奇异，存在矩阵

$$B = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & |A| & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

同理可证  $BA=I$ .

由此可知，若  $A$  可逆，则  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ .

用此方法求逆矩阵，对于小型矩阵，特别是二阶方阵求逆既方便、快捷，又有规律可循。因为二阶可逆矩阵的伴随矩阵，只需要将主对角线元素的位置互换，次对角线的元素变号即可。

若可逆矩阵是三阶或三阶以上矩阵，在求逆矩阵的过程中，需要求 9 个或 9 个以上代数余子式，还要计算一个三阶或三阶以上行列式，工作量大且中途难免

出现符号及计算的差错。对于求出的逆矩阵是否正确，一般要通过  $AA^{-1}=I$  来检验。一旦发现错误，必须对每一计算逐一排查。

## 4. 分块矩阵求逆法

### 4.1. 准对角形矩阵的求逆

命题 设  $A_{11}$ 、 $A_{22}$  都是非奇异矩阵，且  $A_{11}$  为  $n$  阶方阵， $A_{22}$  为  $m$  阶方阵

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

证明 因为  $|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| |A_{22}| \neq 0$ ，所以  $A$  可逆。

$$\text{设 } A^{-1} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}, \text{ 于是有 } \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},$$

其中  $XA_{11}=I_n$  ,  $YA_{22}=0$  ,  $ZA_{11}=0$  ,  $WA_{22}=I_m$  . 又因为  $A_{11}$ 、 $A_{22}$  都可逆, 用  $A_{11}^{-1}$ 、 $A_{22}^{-1}$  分别右乘上面左右两组等式得:

$$X=A_{11}^{-1}, Y=0, Z=0, W=A_{22}^{-1}$$

故  $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

把上述结论推广到每一个子块都是非奇异矩阵的准对角形状矩阵中去, 即:

$$\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \dots \\ & & & A_k \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & \dots \\ & & & A_k^{-1} \end{bmatrix}$$

#### 4.2. 准三角形矩阵求逆

命题 设  $A_{11}$ 、 $A_{22}$  都是非奇异矩阵, 则有

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

证明 因为  $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$

两边求逆得

$$\begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

所以  $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

同理可证

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{11}^{-1}A_{21}A_{22}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

此方法适用于大型且能化成对角子块阵或三角块阵的矩阵. 是特殊方阵求逆的一种方法, 并且在求逆矩阵之前, 首先要将已给定矩阵进行合理分块后方能使用.

#### 5. 恒等变形法

恒等变形法求逆矩阵的理论依据为逆矩阵的定义，此方法也常用与矩阵的理论推导上。就是通过恒等变形把要求的值化简出来，题目中的逆矩阵可以不求，利用  $AA^{-1}=E$ ，把题目中的逆矩阵化简掉。

例1 计算  $(A+4E)^T (4E-A)^{-1} (16E-A^2)$  的行列式，其中  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{解 令 } & \left| (A+4E)^T (4E-A)^{-1} (16E-A^2) \right| = D \\ & D = \left| (A+4E)^T (4E-A)^{-1} (16E-A^2) \right| \\ & = \left| (4E+A)^T (4E-A)^{-1} (4E-A)(4E+A) \right| \\ & = \left| (4E+A)(4E+A)^T \right| = \left| (4E+A) \right|^2. \end{aligned}$$

虽然题目中出现了  $(4E-A)^{-1}$ ，但是经过化简之后不再出现此式，因此得

$$D = \left| 4E - A \right|^2 = 22500.$$

例2 已知  $n$  阶矩阵  $A$  满足  $A^2 + 2A - 3E = 0$ . 求证： $A+4E$  可逆并求出  $A+4E$  的逆。

证明 把  $A^2 + 2A - 3E = 0$  变形为  $A^2 + 2A - 8E = 5E$ ，即

$(A+4E)(A-2E) = -5E$ ，可得  $(A+4E)(-A/5 + 2E/5) = E$ ，  
所以存在一个矩阵  $B = -A/5 + 2E/5$ ，使  $(A+4E)B = E$ ，由定义得  $A+4E$  可逆，且

$$(A+4E)^{-1} = B = -A/5 + 2E/5.$$

另外，有些计算命题中虽出现逆矩阵，但通过适当的矩阵运算可消去，因而不必急于求出逆矩阵。

## 6. 利用线性方程组求逆矩阵

若  $n$  阶矩阵  $A$  可逆，则  $AA^{-1} = E$ ，于是  $A^{-1}$  的第  $i$  列是线性方程组  $AX = E_i$  的解，  
 $i=1, 2, \dots, n$ ,  $E_i$  是第  $i$  个分量是 1 的单位向量。因此，我们可以去解线性方程组  $AX = B$ ，  
其中  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ ，然后把所求的解的公式中的  $b_1, b_2, \dots, b_n$  分别用

$$E_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$E_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

.....,

$$E_n=(0,0,0, \dots,1)$$

代替，便可以求得  $A^{-1}$  的第 1, 2, ..., n 列，这种方法在某些时候可能比初等变换法求逆矩阵稍微简一点。下面例子说明该方法的应用。

例 求矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  的逆矩阵。

解 设  $X=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ ,  $B=(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)^T$  解方程组  $AX=B$ ，即：

解得：

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = b_1 \\ 3x_2 + x_3 = b_2 \\ 3x_3 + x_4 = b_3 \\ 3x_4 + x_5 = b_4 \\ 3x_5 = b_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3^{-5}(3^4 b_1 - 3^3 b_2 + 3^2 b_3 - 3b_4 + b_5) \\ x_2 = 3^{-4}(3^3 b_2 - 3^2 b_3 + 3b_4 - b_5) \\ x_3 = 3^{-3}(3^2 b_3 - 3b_4 + b_5) \\ x_4 = 3^{-2}(3b_4 - b_5) \\ x_5 = 3^{-1}b_5 \end{cases}$$

然后把  $B=(b_1, b_2, \dots, b_n)$  列，分别用

$$E_1=(1,0,0, \dots,0),$$

$$E_2=(0,1,0, \dots,0),$$

.....,

$$E_n=(0,0,0, \dots,1)$$

代入，得到矩阵  $A^{-1}$  的第 1, 2, 3, 4, 5 列，分别用

$$x_1=(3^{-4}, 0, 0, 0, 0)^T,$$

$$x_2=(3^{-2}, 3^{-4}, 0, 0, 0)^T,$$

$$x_3=(3^{-3}, 3^{-2}, 3^{-4}, 0, 0)^T,$$



$$x_4 = (3^{-4}, 3^{-3}, 3^{-2}, 3^{-1}, 0)^T,$$

$$x_5 = (3^{-5}, 3^{-4}, 3^{-3}, 3^{-2}, 3^{-1})^T$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3^{-1} & 3^{-2} & 3^{-3} & 3^{-4} & 3^{-5} \\ 0 & 3^{-1} & 3^{-2} & 3^{-3} & 3^{-4} \\ 0 & 0 & 3^{-1} & 3^{-2} & 3^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 3^{-1} & 3^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^{-1} \end{bmatrix}.$$

这种方法特别适用于线性方程组  $AX=B$  比较容易求解的情形，也是很多工程类问题的解决方法。

以上各种求逆方法只是我的一些粗浅的认识，也许有很多的不当之处，我希望我的这篇文章能给大家带来帮助，能帮助我们更快更准地解决好繁琐的求逆矩阵问题。同时，它还是我们更好的学习线性代数的必备基础知识，认真掌握它，可供我们以后继续在数学方面深造打下坚实的基础。但我很希望各位老师和同学给予指导，能使我的这篇文章更加完善和实用。

## 参 考 文 献

- [1] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组 . 高等代数 [M]. 北京：高等教育出版社，2001.
- [2] 杨明顺 . 三角矩阵求逆的一种方法 [J]. 渭南师范学院学报，2003.
- [3] 丘维声 . 高等代数 [M]. 北京：高等教育出版社，2001.
- [4] 杨子胥 . 高等代数习题集 [M]. 济南：山东科学技术出版社，1984.
- [5] 赵树原 . 线性代数 [M]. 北京：中国人民大学出版社，1997.
- [6] 李宗铎 . 求逆矩阵的一个方法 [J]. 数学通报，1983.
- [7] 贺福利等 . 关于矩阵对角化的几个条件 [J]. 高等函授学报（自然科学版），2004，(1)
- [8] 张禾瑞 . 郝炳新 . 高等代数 [M]. 北京：高等教育出版社 .1999.
- [9] 王永葆 . 线性代数 [M]. 长春：东北大学出版社 .2001.
- [10] 同济大学编 . 线性代数（第二版） . 北京：高等教育出版社，1982.
- [11] 王萼芳，丘维声编，高等代数讲义 . 北京大学出版社，1983.
- [13] 华东师范大学数学系编 . 数学分析 . 人民教育出版社，1980
- [14] 杜汉玲 求逆矩阵的方法与解析 高等函授学报（自然科学版）第17卷第4期  
2004年8月



- [15] 苏 敏 逆矩阵求法的进一步研究 河南纺织高等专科学校学报, 2004 年第 16 卷第 2 期