第4章 稳定性与李雅普诺夫方法

4.1 李雅普诺夫关于稳定性的定义

4.1.1 系统状态的运动及平衡状态

设系统的齐次状态方程为：

$$\dot{x} = f(x,t)$$

其中，x 为 n 维状态向量，$f(\cdot)$ 为n维向量函数。

如果系统是定常的，则不显含 t；

如果系统是线性的，则 f 为 Ax

设其在初始条件 (t_0, x_0) 下，有唯一解 $x = \Phi(t; x_0, t_0)$那么，此解实际上描述了系统在n维空间中从初始状态 出发的一条状态运动的轨迹。称为运动轨迹或状态轨迹。

平衡状态：若存在状态向量 x_e，对所有t，都有

$$f(x_e,t)\equiv 0$$

成立，则称 x_e为系统的平衡状态。

如果 $f(x,t)=Ax$ ，且A非奇异，则原点是系统唯一的平衡状态。

平衡状态不一定存在，也不一定唯一。

如：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1\\ \dot{x}_2=x_1+x_2-x_2^3\end{cases}$$

其平衡状态有：

$$x_{e1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad x_{e2}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix},\quad x_{e3}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

稳定性是相对于平衡点而言的！

4.1.2 稳定性的几个定义

定义　　欧氏范数：

$$\|x\| = (x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \cdots\cdots + x_n^{\ 2})^{\frac{1}{2}}$$

称为 x 向量的欧氏范数。

超球域　　$\|x - x_{\mathrm{e}}\| \le r$

1. Lyapunov意义下的稳定

$$\dot{x} = f(x,t)$$

系统中，

对任意 $\varepsilon > 0$，若存在 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$，

使得，当$\left\| x_0 - x_e \right\| \le \delta(\varepsilon, t_0)$，$t \ge t_0$时，有

$$\left\| \Phi(t; x_0, t_0) - x_e \right\| \le \varepsilon$$

则称平衡状态 x_e 为李雅普诺夫意义下稳定的。

若δ的选取与初始时刻无关，则称这种平衡状态是一致稳定的。

2. 渐近稳定

如果 x_{e} 是李雅普诺夫意义稳定的，并且

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\Phi(t;x_0,t_0)-x_e\right\|=0$$

则称 x_{e} 是渐近稳定的。

3. 大范围渐近稳定

若$\delta(\varepsilon,t_0)=\infty$，则称 x_e为大范围(全局)渐近稳定。

如果平衡状态x_e是渐近稳定的，且渐近稳定的最大范围是整个状态空间，则x_e为大范围渐近稳定的，其必要条件是整个状态空间只有一个平衡点。

线性系统：渐近稳定 $\longrightarrow$ 大范围渐近稳定

非线性系统：一般小范围渐近稳定

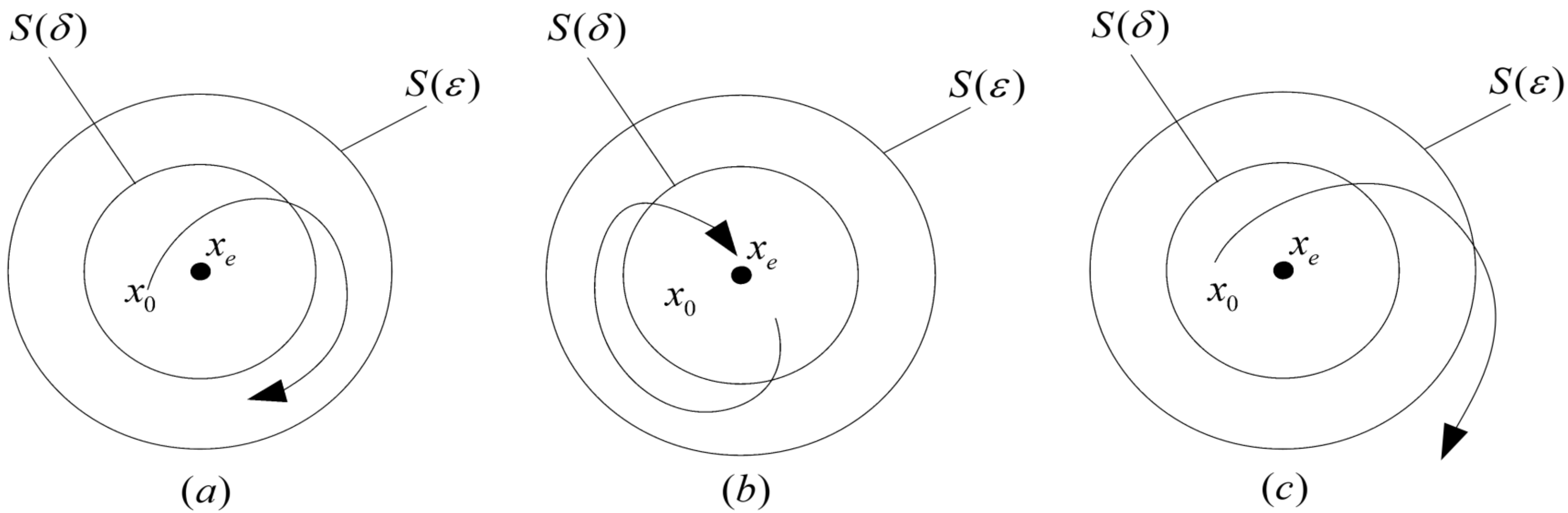
4. 不稳定

对于某个实数 $\varepsilon > 0$ 和任意 $\delta > 0$，在超球域

$$S(\delta):\quad \|x - x_{\mathrm{e}}\| \le \delta$$

内始终存在状态 x_0 ，使得从该状态开始的运动轨迹要突破超球域 $S(\varepsilon)$。

4.1.2 稳定性的几个定义



此三个图分别表示平衡状态为稳定、渐近稳定和不稳定时初始扰动所引起的典型轨迹。

4.2 李雅普诺夫第一法

- 李雅普诺夫第一法又称间接法。
- 基本思路是通过状态方程的解来判别系统的稳定性。
  - **线性定常系统：由特征方程的根来判断稳定性。**
  - **非线性系统：先线性化，再判别。**

4.2.1 线性系统的稳定判据

线性定常系统 $\Sigma:(A,b,c)$，

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx$$

在平衡状态 $x_e = 0$ 渐近稳定的充要条件是矩阵A的所有特征值均具有负实部。此为状态稳定性，或称内部稳定性。

如果 $\mathrm{Re}(\lambda(A)) < 0$，则 x_e 渐近稳定；

<u>输出稳定性</u>：如果系统对于有界输入u所引起的输出y是有界的，则称系统为输出稳定。BIBO稳定（Bounded Input Bounded Output）

输出稳定性判据：线性定常系统 $\Sigma:(A,b,c)$ 输出稳定的充要条件是其传递函数 $W(s)=c(sI-A)^{-1}b$的极点全部位于s平面的左半部。

【例4-1】 $\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$

解：（1）由A的特征方程 $|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-1)=0$

$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=-1$ 故系统的状态不是渐近稳定的。

（2）系统的传递函数：

$$W(s)=c(sI-A)^{-1}b=\frac{(s-1)}{(s+1)(s-1)}=\frac{1}{s+1}$$

故系统是输出稳定的。

结论：系统状态稳定 $\longrightarrow$ 系统输出稳定。

系统输出稳定，且能控能观 $\longrightarrow$ 系统状态稳定。

4.2.2 非线性系统的稳定性

设 $\dot{x}=f(x,t)$，x_e 为平衡点。

将 $f(x,t)$ 在 x_e 邻域内展成泰勒级数，得

$$\dot{x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x\text{-}x_e)+R(x)$$

其中

雅可比矩阵

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{x=x_e}$$

高阶导数项

$$R(x)=o(x^2)$$

近似线性化：令 $\Delta x=x-x_e$ 得

$$\Delta\dot{x}=A\Delta x$$ ，

其中 $A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e}$

结论：

- 如果$\mathrm{Re}(\lambda(A))<0$，则 x_e渐近稳定；
- 如果存在$\mathrm{Re}(\lambda(A))>0$，则 x_e不稳定；
- 如果 $\mathrm{Re}(\lambda(A))\le 0$，则 x_e的稳定性由高阶导数项 $R(x)$ 来决定。

例4-2 已知非线性系统

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1 x_2$$

试分析系统平衡状态的稳定性。

解：系统有两个平衡状态为 $x_{e1}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T, x_{e2}=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$

在 x_{e1} 处线性化，得 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$

特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=1$。故，该平衡点不稳定。

在 x_{e2} 处线性化，得 $A=\begin{bmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$

特征值为 $\pm j$ ，实部为0。故，该平衡点用此方法无法判定稳定性。

4.3 李雅普诺夫第二法

4.3.1 预备知识

1. 标量函数符号性质

设 $V(x)$ 是向量 x 的标量函数，且在 $x=0$ 处，恒有 $V(0)=0$，对所有在定义域中的任何非零向量 x，如果成立：

（1）$V(x)>0$，则称 $V(x)$ 是正定的。

（2）$V(x)\geq 0$，则称 $V(x)$ 是半正定(非负定)的。

（3）$V(x)<0$，则称 $V(x)$ 是负定的。

（4）$V(x)\leq 0$，则称 $V(x)$ 是半负定(非正定)的。

（5）$V(x)>0$，或 $V(x)<0$ 则称 $V(x)$ 是不定的。

例

1) $V(x)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}$ 正定的

2) $V(x)=(x_1+x_2)^2$ 半正定的

3) $V(x)=-x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}$ 负定的

4) $V(x)=-(3x_1+2x_2)^2$ 半负定的

5) $V(x)=x_1x_2-x_2^{\ 2}$ 不定的

例　设 $x=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$

1) $V(x)=(x_1+x_2)^2+x_3^2$　　半正定的

2) $V(x)=x_1^2+x_2^2$　　半正定的

2. 二次型标量函数

二次型标量函数可写为

$$V(x)=x^T Px=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

其中，P为实对称矩阵。

例如：

$$V(x)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

4.3 李雅普诺夫第二法

二次型函数，若P为实对称阵，则必存在正交矩阵T，通过变换 $x=T\bar{x}$ ，使之化为：

$$V(x)=x^T Px=\bar{x}^T T^T PT\bar{x}=\bar{x}^T(T^T PT)\bar{x}=\bar{x}^T\bar{P}\bar{x}$$

$$=\bar{x}^T\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{x}_i^2$$

此称为二次型函数的标准型，λ_i 为P的特征值，则 $V(x)$ 正定的充要条件是P的特征值 λ_i 均大于0。

矩阵P的符号性质定义如下：

设 P 为$n\times n$实对称阵，$V(x)=x^T Px$ 为由 P 决定的二次型函数，则

（1）$V(x)$正定，则 P 正定矩阵，记为 $P>0$;

（2）$V(x)$负定，则 P 负定矩阵，记为 $P<0$;

（3）$V(x)$ 半正定，则 P 半正定矩阵，记为 $P\geq 0$;

（4）$V(x)$ 半负定，则 P 半负定矩阵，记为 $P\leq 0$;

3、希尔维斯特判据

设实对称阵

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, p_{ij}=p_{ji}$$

Δ_i为其各阶顺序主子式，即

$$\Delta_1=|p_{11}|,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix},\cdots,\Delta_n=|P|$$

矩阵P或$V(x)$定号性的充要条件是：

(1)若 $\Delta_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$，则 P 正定；

(2)若 $\Delta_i \begin{cases} > 0(i\text{为偶数}) \\ < 0(i\text{为奇数}) \end{cases}$，则 P 负定；

(3)若 $\Delta_i \begin{cases} \geq 0(i=1, 2, \cdots, \mathrm{n}-1) \\ = 0(i=\mathrm{n}) \end{cases}$，则 P 半正定；

(4)若 $\Delta_i \begin{cases} \geq 0(i\text{为偶数}) \\ \leq 0(i\text{为奇数}) \\ = 0(i=\mathrm{n}) \end{cases}$，则 P 半负定；

例 证明如下二次型函数是正定的。

$$V(x)=10x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-4x_1x_3$$

解：二次型 $V(x)$ 可以写为

$$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$10>0,\quad \begin{vmatrix}10 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix}10 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=40+2+2-16-1-10>0$$

可见此二次型函数是正定的，即 $V(x)>0$

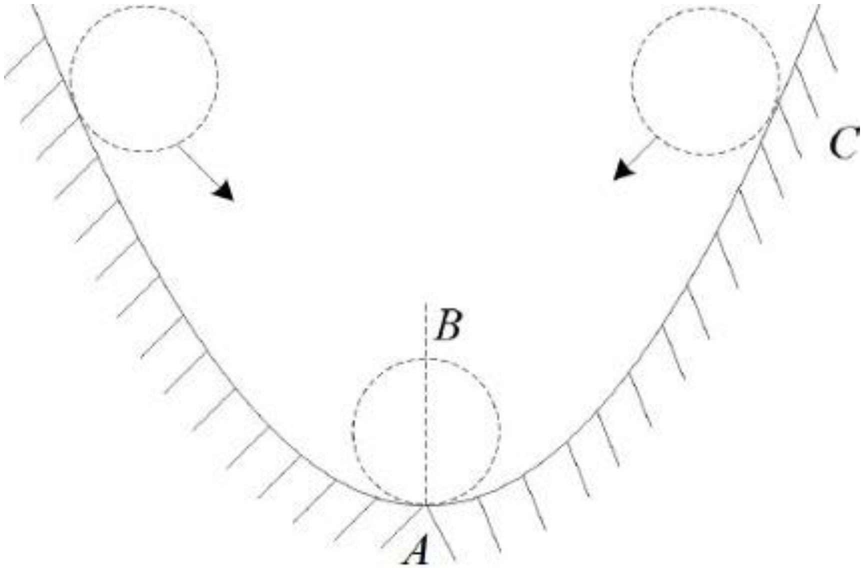


图4.4 小球运动分析示意图

4.3.2 几个稳定性判据

定理 设系统的状态方程为 $\dot{x} = f(x)$,

如果平衡状态 $x_e = 0$, 即, $f(x_e) = 0$ 如果存在标量函数$V(x)$满足:

1）$V(x)$ 对所有x具有一阶连续偏导数。

2）$V(x)$ 是正定的;

3）若 $\dot{V}(x)$是半负定的。

则平衡状态 x_e 为在李亚普诺夫意义下的稳定。

4.3.2 几个稳定性判据

定理 设系统的状态方程为 $\dot{x} = f(x),$

如果平衡状态 $x_e = 0$, 即，$f(x_e) = 0$ 如果存在标量函数$V(x)$满足：

1）$V(x)$ 对所有x具有一阶连续偏导数。

2）$V(x)$ 是正定的；

3）若 $\dot{V}(x)$是负定的；或者 $\dot{V}(x)$为半负定，对任意初始状态 $x(t_0) \neq 0$，除去x=0外，有 $\dot{V}(x)$不恒为0。

则平衡状态 x_e 是渐近稳定的。

进一步当 $\|x\| \to \infty$，有 $V(x) \to \infty$，则在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

4.3.2 几个稳定性判据

定理 设系统的状态方程为 $\dot{x} = f(x),$

如果平衡状态 $x_e = 0,$ 即，$f(x_e) = 0$ 如果存在标量函数$V(x)$满足：

1）$V(x)$ 对所有x具有一阶连续偏导数。

2）$V(x)$ 是正定的；

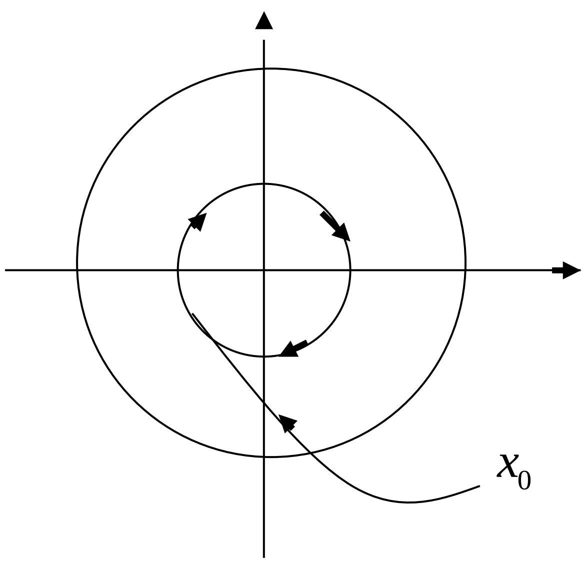
3）若 $\dot{V}(x)$是正定的。

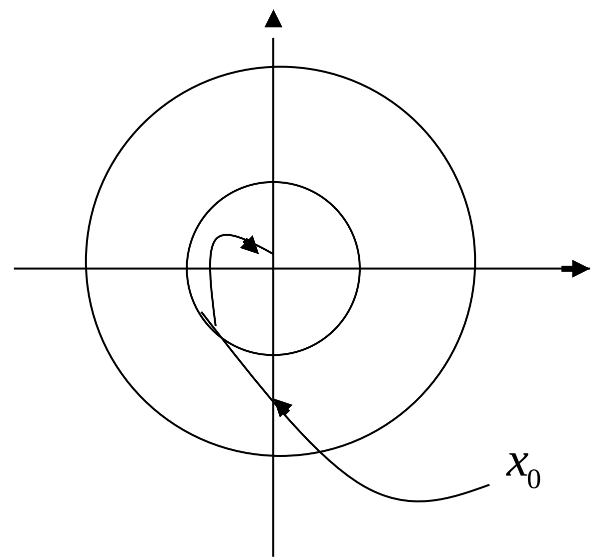
则平衡状态 x_e 是不稳定的。

说明:

（1）$\dot{V}(x) \equiv 0$ ，则此时 $V(x)=C$，系统轨迹将在某个曲面上，而不能收敛于原点，因此不是渐近稳定。

（2）$\dot{V}(x)$不恒等于0，说明轨迹在某个时刻与曲面 $V(x)=C$ 相交，但仍会收敛于原点，所以是渐近稳定。





（3）稳定判据只是充分条件而非必要条件！

例4-4 已知系统
$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2})$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2})$$

试用李雅普诺夫第二方法判断其稳定性。

解：显然，原点 $x_e = 0$ 是系统平衡点，

取 $V(x) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} > 0$，则

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(x_2 - x_1(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2})) + 2x_2(-x_1 - x_2(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}))$$
$$= 2x_1x_2 - 2x_1^2(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}) - 2x_2x_1 - 2x_2^2(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2})$$
$$= -2(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2})^2 < 0$$

又因为当 $\|x\| \to \infty$ 时，有 $V(x) \to \infty$，所以系统在原点处是大范围渐近稳定的。

【例 4-5】已知系统的状态方程，试分析平衡状态的稳定性。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}x$$

解：线性系统，故 $x_e=0$ 是其唯一平衡点。

将矩阵形式的状态方程展开得到：$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1-x_2\end{cases}$

取标量函数(李雅谱诺夫函数)：$V(x)=x_1^2+x_2^2>0$

$$\dot{V}(x)=\frac{dV(x)}{dt}=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=-2x_2^2\le 0$$

半负定，不恒为0，渐近稳定。

且当 $\|x\|\to\infty$时，$V(x)\to\infty$，

所以系统在其原点处大范围渐近稳定。

另选一个李雅普诺夫函数：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + x_2^2]$$

$$\dot{V}(x) = (x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -(x_1^2 + x_2^2)$$

当 $\|x\| \to \infty$ 时，$V(x) \to \infty$，所以系统在其原点处大范围渐近稳定。

例4-8 系统的状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2$$

试确定系统在其平衡状态的稳定性。

解：系统具有唯一的平衡点 $x_e = 0$。取

$$V(x) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} > 0$$

则

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}) > 0$$

于是知系统在原点处不稳定。

4.3.3 对李雅谱诺夫函数的讨论

（1） $V(x)$是正定的标量函数，$V(x)$具有一阶连续偏导数；

（2）并不是对所有的系统都能找到$V(x)$来证明该系统稳定或者不稳定；

（3）$V(x)$如果能找到，一般是不唯一的，但关于稳定性的结论是一致的；

（4）$V(x)$最简单的形式是二次型 $V(x)=x^T Px$ ；

（5）$V(x)$只是提供平衡点附近的运动情况，丝毫不能反映域外运动的任何信息；

（6）构造$V(x)$ 需要一定的技巧。

4.4 李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

4.4.1 线性定常连续系统渐近稳定判据

$\dot{x} = Ax$ 系统矩阵非奇异

$V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ 选择李雅普诺夫函数正定

$\dot{V}(x) = \dot{x}^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}P\dot{x}$ 对其求时间导数

$= x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}PAx$ 将状态方程代入

$= x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P + PA)x$ 整理

$= -x^{\mathrm{T}}Qx$ 记为$-Q$

< 0 令其负定

定理

设线性定常系统为：

$$\dot{x} = Ax$$

则平衡状态 $x_e = 0$ 为大范围渐近稳定的充要条件是：对任意给定的正定实对称矩阵Q，必存在正定的实对称矩阵P，满足李雅普诺夫方程：

$$A^T P + PA = -Q$$

且 $V(x) = x^T Px$ 就是李雅普诺夫函数。

证明：略。

说明：

（1）一般先取正定矩阵Q，带入李雅谱诺夫方程，求出P，判别P的正定性，从而判断系统的稳定性；

（2）以方便计算，通常取 $Q=I$。

（3）若 $\dot{V}(x)$ 沿任一轨线不恒等于零，那么Q可取半正定，

即可取 $Q=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 计算更简单。

（4）判据是充分必要条件

$$A^T P + PA = -Q \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda(A)) < 0$$

例4-9: 分析下列系统稳定性

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x$$

解：令 $P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$ ， $Q=I$

则由 $A^{\mathrm{T}}P+PA=-I$ 得

$$\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

解上述矩阵方程，即得

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因为 $\Delta_1=\frac{5}{4}>0,\ \Delta_2=\det\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}>0$

可知P是正定的。因此系统在原点处是大范围渐近稳定的。

或，取李雅谱诺夫函数

$$V(x)=x^TPx=\frac{1}{4}(5x_1^2+2x_1x_2+x_2^2) \qquad \text{正定}$$

$$\dot{V}(x)=-x^TQx=-(x_1^2+x_2^2) \qquad \text{负定}$$

【例4-10】系统状态方程

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -k & 0 & -1\end{bmatrix}x$$

确定使系统稳定的K的取值范围。

解：因det$A$≠0，故原点为系统唯一平衡点。取Q为：

$$Q=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\dot{V}(x)=-x^TQx=-x_3^2$ 不恒为0。故，可取Q为半正定矩阵。

则由 $A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$ 得

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -k \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解得，

$$P=\frac{1}{12-2k}\begin{bmatrix} k^2+12k & 6k & 0 \\ 6k & 3k & k \\ 0 & k & 6 \end{bmatrix}$$

为使P为正定矩阵，充要条件为

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_1=\frac{k^2+12k}{12-2k}>0 \Rightarrow 0<k<6 \\ &\Delta_2=\frac{1}{(12-2k)^2}3k(k^2+12k)-36k^2>0 \\ &\Delta_3=k^2(6k+72\times 6-k^2)>0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad 0<k<6$$

本章小结

1、几种稳定性的概念

2、李雅普诺夫第一法判定稳定性

3、李雅普诺夫第二法判定稳定性

4、李雅普诺夫方程