

自动控制系统设计

王广峰 著

机械工业出版社

前 言

关于自动控制系统理论的书籍，目前已经出版很多了。本书不再更多地阐述理论，而主要讨论控制系统设计和分析中的各种实际问题。作者在工作中发现，许多人在学完理论开始搞设计时，遇到具体问题往往不知如何着手去做。例如，不知道应如何根据具体情况确定系统的性能指标，也不清楚在什么情况下选用什么类型的系统，只能是按照教科书所讲的逐条照算而不能自己进行抉择。有鉴于此，作者根据多年从事自动控制理论教学和系统设计的实践经验，整理了这一本专门讲述如何进行设计的书，以帮助设计人员掌握正确而有效的设计方法。

本书前三章的频谱分析及关于信号和噪声的分析是正确进行系统设计的基础，正确理解和掌握这些方法会大大增强处理实际问题的能力。后几章是讨论控制系统设计和分析中的各种实际问题，诸如控制系统的性能要求、结构和参数、系统的实现、模拟和仿真、测试和调整等。本书的章节就是按照这些问题在设计中出现的先后顺序来安排的。

书中尽量避免纯理论的和抽象的讨论，而是通过实例研究来介绍的，使读者从这些实例中了解各种理论和方法的应用条件。读者只要掌握控制理论中的一些基本概念，如频率特性，奈氏判据，描述函数等就可阅读本书。

本书的基本内容作者曾在哈尔滨工业大学讲授过多次，这些内容的取舍主要依据作者本人的工作经验。由于工作的局限性，缺点和错误在所难免，欢迎广大读者批评指正。

内 容 简 介

本书介绍控制系统的设计方法。全书分七章，按设计时处理问题的顺序来排列，内容包括：频谱分析；信号、噪声和误差的分析；系统的设计；模拟和数字仿真；系统的调试。本书主要是通过实例研究来讲解设计问题，避免纯理论和抽象的讨论。本书也是对控制理论应用的一个补充，对学习和掌握控制理论也会有很大的帮助。

本书可供宇航、电子工程、化工、冶金和机械等各工业领域中从事自动控制系统设计和分析的人员参考，也可供大专院校有关专业师生参考。

自 动 控 制 系 统 设 计

王广雄 著

宇航出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

天津市大邱庄印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：10 1/4 字数：229 千字

1986年1月第一版 1986年1月第一次印刷

印数：7,000册 统一书号：15244·0034 定价2.10元

目 录

第一章 频谱分析	(1)
一、傅氏级数	(1)
二、傅氏积分和傅氏变换	(6)
三、典型频谱特性	(13)
四、离散傅里叶变换	(23)
五、快速傅里叶变换	(37)
六、应用举例	(46)
第二章 输入信号和跟踪误差	(54)
一、输入信号的分析	(54)
二、静态误差系数	(63)
三、动态误差系数	(66)
四、跟踪误差的计算	(70)
第三章 噪声和它所引起的误差	(84)
一、引言	(84)
二、正态随机变量和正态随机向量	(86)
三、相关函数	(90)
四、谱密度	(101)
五、均方误差	(113)
六、系统的等效噪声带宽	(127)
第四章 控制系统的设计	(131)
一、设计的基本原则	(131)
二、带宽及其设计问题	(138)
三、相对稳定性及其指标	(146)
四、随动系统的设计	(150)
五、调节系统的设计	(195)

六、多回路系统的设计	(220)
第五章 模拟计算机在系统设计中的应用	(234)
一、模拟机解题的一般方法	(234)
二、模拟机的基本部件 (线性)	(236)
三、传递函数的模拟	(241)
四、时滞特性的模拟	(244)
五、解析函数的产生	(248)
六、模拟机的排题	(252)
七、非线性特性的模拟	(267)
第六章 控制系统的数字仿真	(272)
一、系统的离散化及其 z 传递函数	(272)
二、零极点匹配法	(278)
三、非线性系统的仿真	(284)
四、大步距仿真法	(287)
第七章 控制系统的调试	(295)
一、频率特性的测试	(295)
二、系统的调试	(301)
三、振荡因素的分析	(312)

第一章 频 谱 分 析

在控制系统的设计和分析中,首先会遇到频谱这一概念。设计者不仅应该知道频谱的概念,而且还应掌握频谱分析的方法。本章前三节叙述频谱这一概念。第四、第五节介绍频谱分析的数值方法。第六节是应用频谱分析的几个实例。

一、傅 氏 级 数

设有一周期函数 $f(t)$,其周期为 T ,即

$$f(t) = f(t + T) \quad (1-1)$$

若 $f(t)$ 满足狄里赫利条件,即在区间 T 上有界,且仅有有限个极大值和极小值,则 $f(t)$ 可用收敛的傅里叶级数 来表示。三角函数形式的傅氏级数为

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right) \quad (1-2)$$

式中各系数为

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos \frac{2\pi k}{T} \tau \, d\tau \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \sin \frac{2\pi k}{T} \tau \, d\tau \end{aligned} \quad (1-3)$$

我们在后面的应用中则采用更为紧凑的复数形式的傅氏级数:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi k}{T} t} \quad (1-4)$$

系数 c_k 可以这么来求取：对应第 n 项系数 c_n ，可以对式

(1-4) 的左右项各乘以 $e^{-j \frac{2\pi n}{T} t}$ ，然后从 $-T/2$ 到 $T/2$ 积分。等式右项中除第 n 项外，对于 $k \neq n$ 的各项积分均为零，故可得

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j \frac{2\pi n}{T} t} dt = c_n \int_{-T/2}^{T/2} dt = c_n T$$

因此，

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j \frac{2\pi k}{T} t} dt \quad (1-5)$$

这个 c_k 为复数，一般可表示成如下的形式

$$c_k = \alpha_k e^{j\beta_k} \quad (1-6)$$

从式(1-5)可知 c_k 和 c_{-k} 互为共轭复数，其每一组可写成

$$c_k e^{j \frac{2\pi k}{T} t} + c_{-k} e^{-j \frac{2\pi k}{T} t} = 2 \alpha_k \cos \left(\frac{2\pi k}{T} t + \beta_k \right) \quad (1-7)$$

式(1-7)表明，当用复数形式来表示时〔见式(1-4)〕，

复系数 c_k 的幅值 a_k 表示了第 k 次谐波的幅值(幅值为 $2a_k$)而 c_k 的相角 β_k 则为该次谐波的相移。这种用复数形式来表示的谐波常称为复数正弦。

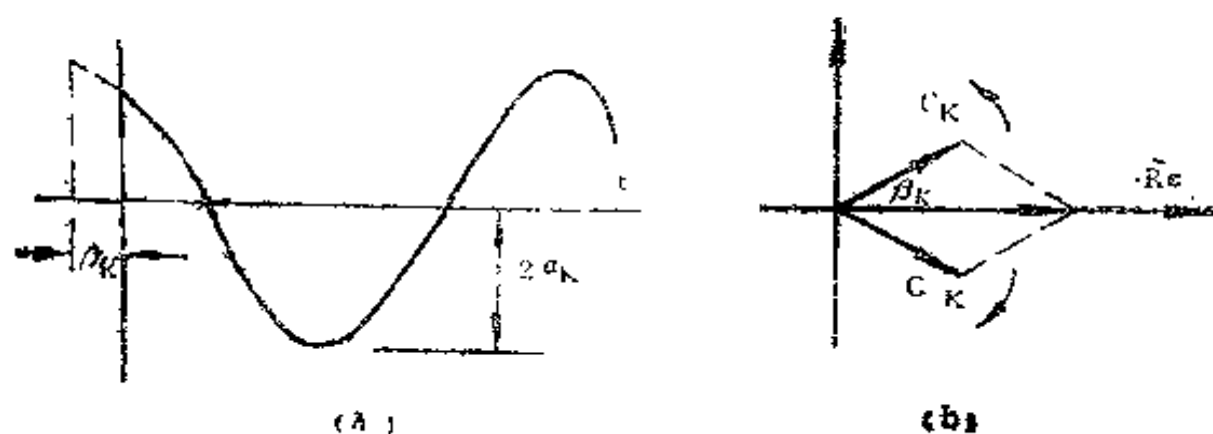


图1—1 谐波的表示形式

我们也可以用图来表示式(1—7)。图1—1a所示就是实数形式的谐波。图1—1b则表示了式(1—7)左项的两个复数正弦的和。每个复数正弦用复平面上的一个旋转向量来表示。正频率对应正向旋转,负频率对应负向旋转。图示的位置是它们的初始位置。因为这两个向量在所有的时间值 t 都互为共轭复数,所以其和始终是实数,且等于图1—1a所示函数的瞬时值,

从上述可见,用傅氏级数来表示函数 $f(t)$,无论是实数形式或复数形式,都是将 $f(t)$ 看成是由各次谐波所组成。傅氏级数的系数表示出了各次谐波的幅值和相位。这些系数的集合称为频谱。当用图来表示频谱时,一般常以频率 ω (或 f)作为横坐标,而用线段来表示相应的系数。图1—2所示就是与式(1—7)函数所对应的频谱。这里负频率也同样是有意义的,当谐波用复数形式表示时,负频率表示了复数正弦

的反向旋转。

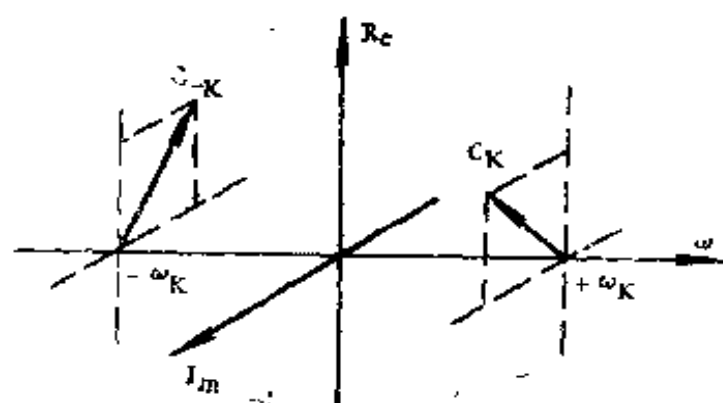


图1—2 频谱表示

频谱可以有不同形式，有时只列出复系数的幅值 $|c_k|$ ，如图1—3所示。

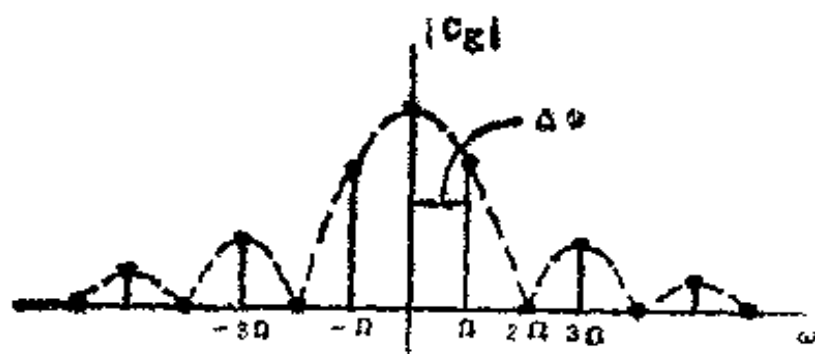


图1—3 幅值谱

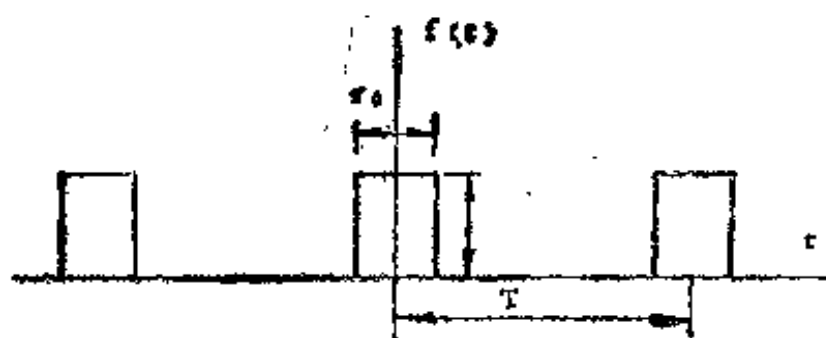


图1—4 方波序列

由于频谱是用线段来表示的，故这种频谱有时也称为线谱。线谱具有离散的特性，线谱间的距离等于

$$\Delta\omega = \Omega = 2\pi/T$$

作为例子，设 $f(t)$ 为一方波序列，周期为 T （图1—4），

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= A_0, & -\tau_0/2 < t < \tau_0/2 \\ f(t) &= 0, & \tau_0/2 < t < T - \tau_0/2 \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

将式(1—8)代入(1—5)得

$$c_k = \frac{A_0 \tau_0}{T} \frac{\sin(\pi k \tau_0 / T)}{\pi k \tau_0 / T} \quad (1-9)$$

设周期 $T = 2\tau_0$ ，对应的基波频率为

$$\Omega = 2\pi/T = \pi/\tau_0,$$

将此 T 值代入式(1—9)可得各次谐波的 c_k 值，见表1—1。图1—5 a所示就是对应的频谱。频谱清楚地表示了该方波的谐波成分。

表1—1 $T = 2\tau_0$ 时的频谱

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
C_k	$\frac{A_0}{2}$	$\frac{A_0}{\pi}$	0	$-\frac{A_0}{3\pi}$	0	$\frac{A_0}{5\pi}$	0	$-\frac{A_0}{7\pi}$...

现在设周期加大一倍，即 $T = 4\tau_0$ 。随着周期 T 的加大，基波频率降低二分之一，各线谱之间的距离 $\Delta\omega$ 也缩短一半。图1—5 b所示即为对应的频谱。

图1—5上a和b的形状是一样的。事实上，线谱包络曲线的形状与周期 T 的值无关，只是其高度与 T 成反比，试比较

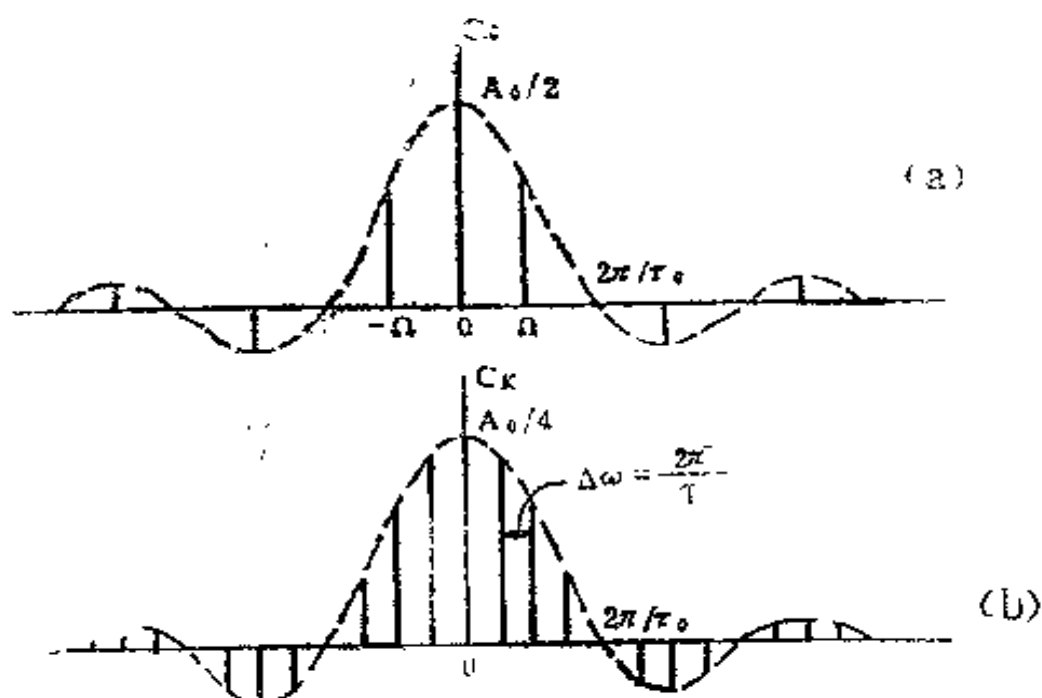


图1—5 方波的频谱 (a) $T = 2\tau_0$; (b) $T = 4\tau_0$

图1—5a和b的纵坐标以及式 (1—9) 中的 c_k 值。假如将线谱的值加大 T 倍, 即以 $c_k T$ 作为纵坐标, 那么包络曲线 就与 T 完全无关了。这时频谱上与周期 T 有关的唯一的量就是各线谱之间的距离 $\Delta\omega = 2\pi/T$ 。随着周期 T 的增大, 线谱 互相 接近, 当 $T \rightarrow \infty$ 时就成为连续谱了。上述的 T 增大时线谱 的变化特点对其它形式的周期函数来说也都是一样的。

$T \rightarrow \infty$ 时周期函数实际上已变为非周期函数, 傅氏级数将过渡为傅氏积分。

二、傅氏积分和傅氏变换

控制系统分析中经常遇到非周期函数。这时傅氏级数是不能应用了, 但可用傅氏积分来处理。

非周期函数可以看作是周期 $T \rightarrow \infty$ 时的周期函数, 现在就从数学上来研究这个极限情况。

已知一个周期函数的傅氏级数的展开式为

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right) \quad (1-10)$$

将式 (1-3) 的各系数代入式 (1-10) 得

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \\ &\times \left[\cos \frac{2\pi k}{T} t \cos \frac{2\pi k}{T} \tau + \sin \frac{2\pi k}{T} t \sin \frac{2\pi k}{T} \tau \right] d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \\ &\quad \times \cos \frac{2\pi k}{T} (t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (1-11)$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, 式 (1-11) 的第一项可考虑如下:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau \right| \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(\tau)| d\tau$$

因此, 若设

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty, \quad (1-12)$$

即若 $f(t)$ 为绝对可积函数, 那么, 当 $T \rightarrow \infty$ 时, 式 (1-11) 的第一项就趋于零。

现在再引入角频率 ω , ω 取离散值: $\omega_1 = 2\pi/T$, $\omega_2 = 2(2\pi/T)$, \dots , $\omega_k = k(2\pi/T)$, \dots 。各谐波之间的频率差, 即 ω 的增量为 $\Delta\omega = 2\pi/T$ 。当 $T \rightarrow \infty$ 时, 频率差为无穷小, 即 $\Delta\omega$ 可以看作 $d\omega$ 。这时 ω 已不再是离散量, 而是一个

连续量，而式 (1—11) 则可写成

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta \omega \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos \omega_k \\ &\quad \times (t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau \quad (1-13) \end{aligned}$$

考虑到式 (1—13) 中的被积函数为 ω 的偶函数，所以上式可改写成

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau$$

这个式子再加上如下的一个 ω 奇函数积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau = 0$$

得 $f(t)$ 为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) [\cos \omega(t - \tau) + \\ &\quad + j \sin \omega(t - \tau)] d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\omega(t - \tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (1-14) \end{aligned}$$

式 (1—14) 称为傅氏积分。

式 (1—14) 还可以写成：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-15)$$

式中

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-16)$$

$F(j\omega)$ 称为函数 $f(t)$ 的傅氏变换。

上面说明了一个满足狄里赫利条件的非周期函数若是绝对可积的，就可以展开成傅氏积分。下面来讨论傅氏积分式 (1-15) 的含义。

我们暂时以 $f = \omega/2\pi$ 作为频率坐标，这时式 (1-15) 可改写成

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(j2\pi f) e^{j2\pi f t} df \quad (1-17)$$

设 $F(j2\pi f)$ 为一单位面积的窄脉冲 (图1-6)，代入式 (1-17) 得

$$f(t) = e^{j2\pi f_k t} \quad (1-18)$$

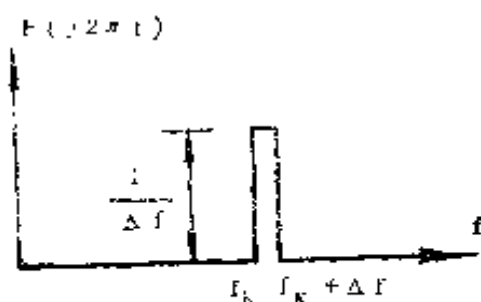


图1-6 脉冲型频谱特性

式 (1-18) 表明， $F(j2\pi f)$ 上一个面积为 1 的窄脉冲即对应于幅值为 1 的复数正弦。因此，若将 $F(j2\pi f)$ 分解为一系列窄脉冲 (图1-7)，面积分别为 $F(j2\pi f_k) \cdot \Delta f$ ，那么，合成的时间函数就是这些对应的复数正弦之和。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum F(j\omega_k) e^{j\omega_k t} \Delta\omega \quad (1-19)$$

当 $\Delta\omega \rightarrow 0$ 时就得到

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

这就是式(1—15)。由此可见，傅氏积分就是在频域上将信号进行分解，分解成图1—7中的那些矩形窄脉冲。因此，傅氏积分的实质就是将信号看作是由无穷多个谐波所组成。

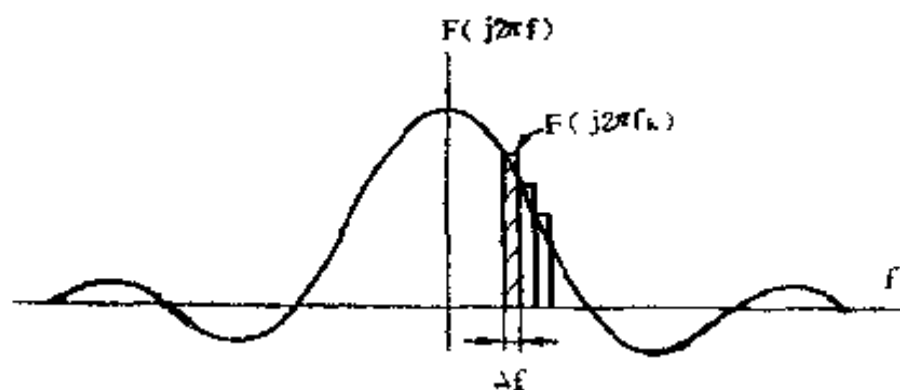


图1—7 $F(j2\pi f)$ 的分解

这也和周期函数用傅氏级数来处理的情形类似，对周期函数我们用傅氏级数也是将函数分解成无穷多个谐波，不过这些谐波的频率其取值是离散的。对现在的非周期函数来说，谐波之间的频率差则为无穷小，即频谱是连续的。

傅氏积分将一非周期函数 $f(t)$ 分解为各次谐波，每一次谐波的幅值从式(1—15)写得为

$$\frac{1}{2\pi} F(j\omega) d\omega \quad (1-20)$$

这幅值为无穷小，所以一般用相对幅值 $F(j\omega)$ 来表示其频谱。这就是说傅氏变换 $F(j\omega)$ [式(1—16)] 表示了该非周期信号谐波的分布特性，故 $F(j\omega)$ 称为信号的频谱特性，也简称频谱。

注意到现在是用 $F(j\omega)$ 下的窄面积来表示谐波的幅值的〔见式(1—20)〕，所以 $F(j\omega)$ 的量纲是函数 $f(t)$ 的量纲乘以时间量纲。例如，设 $f(t)$ 为一转角信号，则 $F(j\omega)$ 的量纲为弧度·秒。

这里要说明的是非周期信号虽是由幅值为无穷小的谐波所组成，不过其频谱特性 $F(j\omega)$ 却还是可以从 $f(t)$ 曲线来求得。例如有一信号 $f(t)$ ，如图1—8a所示，设 $f(t)$ 在 $\pm T/2$ 以外为零。这时式(1—16)可写作

$$F(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-21)$$

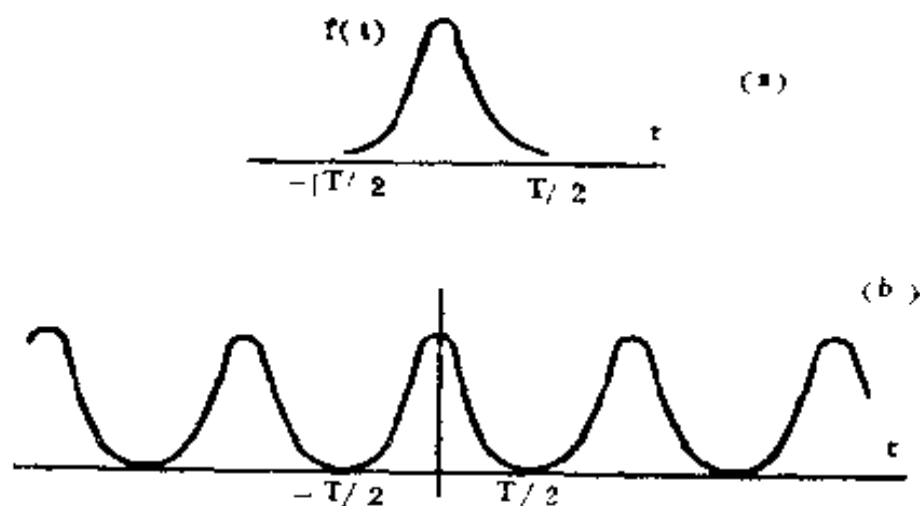


图1—8 非周期信号及其延拓

我们已知一周期函数的傅氏系数为

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j \frac{2\pi k t}{T}} dt \quad (1-22)$$

比较式(1—21)和式(1—22)可知

$$F(j\omega_k) = C_k T, \quad \omega_k = 2\pi k/T \quad (1-23)$$

这说明我们可以根据 $f(t)$ 构造一个周期函数(图1-3b), 并对此周期函数进行谐波分析,求得各次谐波的 C_k 值,然后根据式(1-23)计算各对应频率的 $F(j\omega_k)$ 。将各 $F(j\omega_k)$ 用光滑曲线连起来就得所求的该函数的频谱特性了。

作为例子,设 $f(t)$ 为一单个方波(图1-9)。根据式(1-16)可得该函数的傅氏变换为

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} A_0 e^{-j\omega t} dt \\ &= A_0 \tau_0 \frac{\sin(\omega \tau_0/2)}{\omega \tau_0/2} \end{aligned} \quad (1-24)$$

图1-10所示就是这个频谱特性。

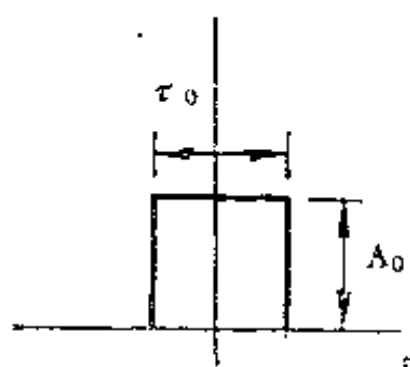


图1-9 单个方波

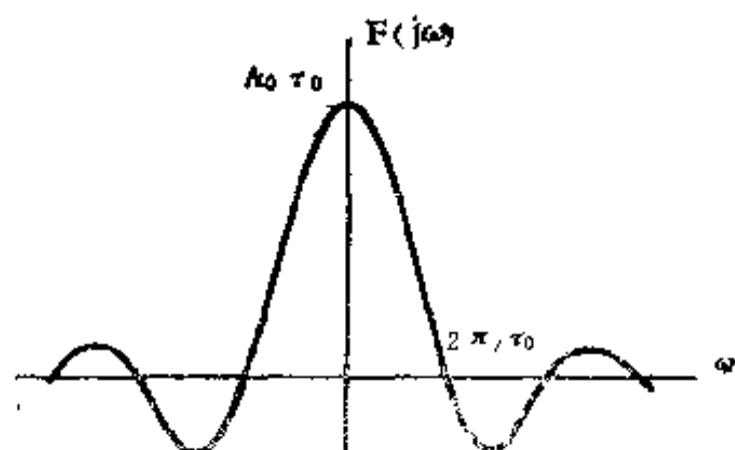


图1-10 单个方波的频谱特性

若将这单个脉冲按周期 T 重复,则得到一周期函数。这一周期函数就是前面讨论过的图1-4,其傅氏系数为〔见式(1-9)〕

$$C_k = \frac{A_0 \tau_0}{T} \frac{\sin(\pi k \tau_0 / T)}{\pi k \tau_0 / T} \quad (1-25)$$

这里第 k 次谐波的角频率是 $\omega_k = 2\pi k/T$,故用角频率表示

时, 式(1—25) 为

$$C_k = \frac{A_0 \tau_0}{T} \frac{\sin(\omega_k \tau_0 / 2)}{\omega_k \tau_0 / 2} \quad (1-26)$$

对比式(1—24) 和式(1—26) 可以看到

$$F(j\omega_k) = C_k T,$$

这再一次证实了式(1—23)。

式(1—23) 是我们今后在数据处理中用来求取傅氏变换 $F(j\omega)$ 的一个基本关系式。

三、典型频谱特性

1. 脉冲函数

无论是理论或实践都要用到脉冲函数。脉冲函数 $\delta(t)$ 除 $t=0$ 外均为零, 而当 $t=0$ 时为无穷大:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & t \neq 0; \\ \delta(t) = \infty, & t = 0. \end{cases} \quad (1-27)$$

并且满足下列关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1-28)$$

脉冲函数 $\delta(t)$ 可以看作是一个与原点对称的连续函数 $\delta_\lambda(t)$ 的极限:

$$\delta(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \delta_\lambda(t) \quad (1-29)$$

这个函数 $\delta_\lambda(t)$ 与参数 λ 有关。为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\lambda(t) dt = 1$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \delta_{\lambda}(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (1-30)$$

这种函数的例子有：

$$\delta_{\lambda}(t) = \frac{\lambda}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)} \quad (1-31)$$

$$\delta_{\lambda}(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 t^2} \quad (1-32)$$

图1—11所示为式(1—31)的图形。当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时上列两函数都具有脉冲函数的性质。

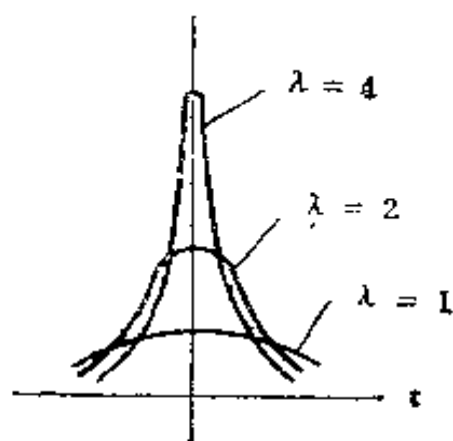


图1—11 连续函数 $\delta_{\lambda}(t)$

现以式(1—31)为例求其频谱特性

$$\begin{aligned} F_{\lambda}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\lambda}(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda e^{-j\omega t}}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)} dt = e^{-|\omega|/\lambda} \end{aligned} \quad (1-33)$$

其极限值为

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F_{\lambda}(j\omega) = 1, \quad (1-34)$$

由此可见，当脉冲函数 $\delta(t)$ 看作是下列极限时

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \delta_{\lambda}(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\lambda}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (1-35)$$

其频谱等于1。图1—12表示了这两者的对应关系。图中长为1的箭头表示面积是1的脉冲函数。

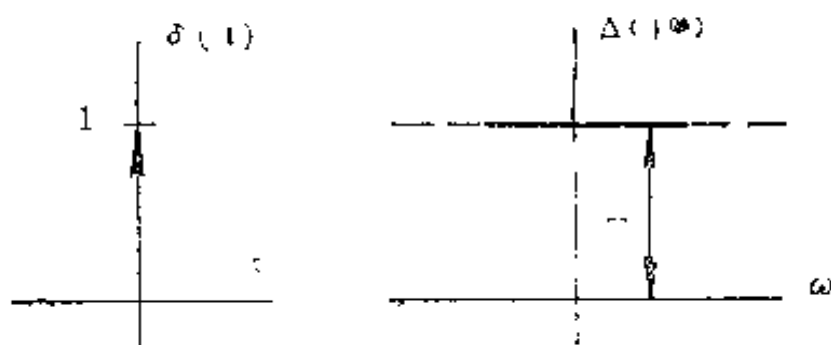


图1—12 脉冲函数及其频谱

式(1—34)和式(1—35)有时常简写成

$$\Delta(j\omega) = F\{\delta(t)\} = 1, \quad (1-36)$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega. \quad (1-37)$$

使用时应将此两式理解为式(1—34)和式(1—35)的简化形式，而没有标出式(1—34)和式(1—35)中的极限。

式(1—37)可改写如下：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \omega t \\ &\quad + j \sin \omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t d\omega = \delta(t). \end{aligned} \quad (1-38)$$

式(1—38)也是经常要用到的一个公式。

2. 余弦函数

设

$$f(t) = A \cos \omega_1 t$$

(1-39)

这是个周期信号，若用傅氏级数来展开，可以知道其频谱就是由 $f = \pm f_1$ 处的两个线段所构成〔见式 (1-7) 和图 1-13a〕。

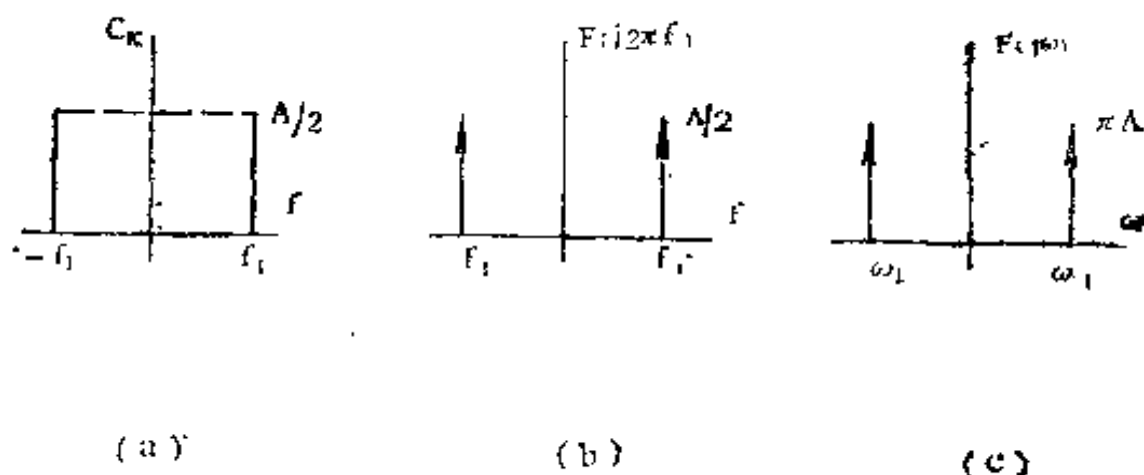


图1-13 余弦函数的频谱

现在来求其频谱特性。余弦函数不满足绝对可积条件，不过借助 δ 函数也仍可写出其 $F(j\omega)$ 。

$$\begin{aligned}
 F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cos \omega_1 t e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_1)t} dt \\
 &\quad + \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_1)t} dt \\
 &= A \int_0^{\infty} \cos [(\omega - \omega_1)t] dt \\
 &\quad + A \int_0^{\infty} \cos [(\omega + \omega_1)t] dt. \quad (1-40)
 \end{aligned}$$

取 $\omega = 2\pi f$, 则式 (1—40) 可写成

$$F(j2\pi f) = A \int_0^{\infty} \cos [2\pi (f - f_1)t] dt + A \int_0^{\infty} \cos [2\pi (f + f_1)t] dt \quad (1-41)$$

将式 (1—38) 也改写成

$$\int_0^{\infty} \cos 2\pi ft df = \frac{1}{2} \delta(f) \quad (1-42)$$

对式 (1—42) 进行变量代换, 可得

$$\int_0^{\infty} \cos 2\pi ft dt = \frac{1}{2} \delta(f) \quad (1-43)$$

根据式 (1—43) 可得式 (1—41) 为

$$F(j2\pi f) = \frac{A}{2} \delta(f - f_1) + \frac{A}{2} \delta(f + f_1) \quad (1-44)$$

式 (1—44) 表明, 此余弦函数的频谱特性由两个 δ 函数组成, δ 函数的面积等于 $A/2$ (图 1—13b)。此 $A/2$ 就是对应的复数正弦的幅值, 即线谱 (图 1—13a)。可见式 (1—44) 的推导也符合前面对于频谱特性所作的解释。

若频谱特性的横坐标是 ω , 则根据式 (1—40)、(1—38) 可得

$$F(j\omega) = \pi A \delta(\omega - \omega_1) + \pi A \delta(\omega + \omega_1). \quad (1-45)$$

图 1—13c 所示即为此频谱特性, 其脉冲函数的面积比图 1—13b 者大 2π 倍。

将式 (1—45) 代入式 (1—15) 得

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\pi A \delta(\omega - \omega_1) \\
&\quad + \pi A \delta(\omega + \omega_1)] e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{A}{2} \left(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t} \right) = A \cos \omega_1 t
\end{aligned}
\tag{1-46}$$

式 (1-46) 表明 $F(j\omega)$ 的反变换是 $A \cos \omega_1 t$, 这就是说式 (1-44) 和 (1-45) 确实是此余弦函数的频谱特性。

3. 常值

设

$$f(t) = A_0/2 = \text{const} . \tag{1-47}$$

常值信号虽然不满足绝对可积条件, 但也可用 δ 函数列写频谱特性:

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\
&= \frac{A_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = A_0 \int_0^{\infty} \cos \omega t dt \\
&= \pi A_0 \delta(\omega) .
\end{aligned}
\tag{1-48}$$

将式 (1-48) 代入式 (1-15) 也可证明其原函数为 $A_0/2$ 。

式 (1-48) 表明, 常值信号的频谱在所有的频段上均为零, 仅在零频率 (直流) 上有一个 δ 函数。

4. 阶跃函数

阶跃函数也是经常要用到的一种函数。阶跃函数 $1(t)$ 不是绝对可积函数, 不过借助于 δ 函数也可列写其频谱特性。

我们现在把阶跃函数看作是下列函数 $f_\varepsilon(t)$ 的极限：

$$1(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t) \quad (1-49)$$

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} e^{-\varepsilon t} & , t > 0; \\ 0 & , t < 0. \end{cases} \quad (1-50)$$

式(1-50)的傅氏变换为

$$F_\varepsilon(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \varepsilon} \quad (1-51)$$

现将式(1-51)分解为实部和虚部：

$$F_\varepsilon(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2} \quad (1-52)$$

图1-14所示是 ε 为有限值时实部和虚部的曲线。

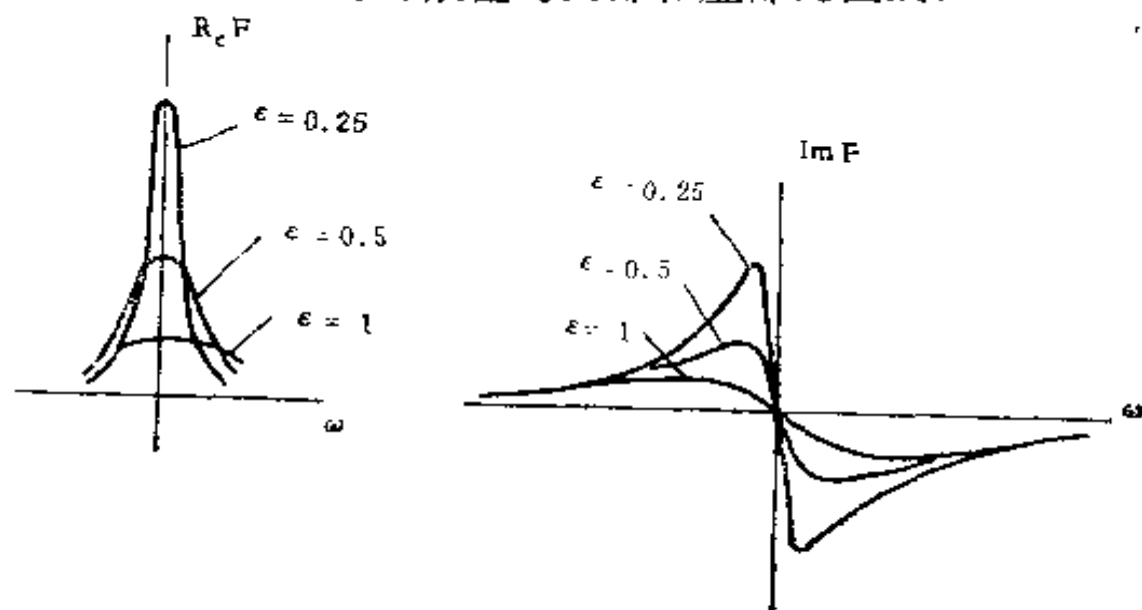


图1-14 $f_\varepsilon(t)$ 的频谱

当用 $\lambda = 1/\varepsilon$ 代入时，式(1-52)的实部可写成式(1-31)的形式：

$$\text{Re } F_\varepsilon(j\omega) = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2 \omega^2} = \pi \delta_\lambda(\omega)$$

因此，取极限可得阶跃函数的频谱为

$$F(j\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_{\epsilon}(j\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (1-53)$$

将式 (1-53) 代入反变换式 (1-15)，有

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega \end{aligned} \quad (1-54)$$

式 (1-54) 中

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\cos \omega t}{j\omega} + \frac{\sin \omega t}{\omega} \right] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} -1/2 & \text{若 } t < 0, \\ +1/2 & \text{若 } t > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1-55)$$

式 (1-55) 中最后一个等号是因为当 $\Omega \rightarrow \infty$ 时，

$$\text{Si}(\Omega t) \rightarrow \pi/2, \quad (t > 0),$$

$$\text{Si}(\Omega t) \rightarrow -\pi/2, \quad (t < 0).$$

将式 (1-55) 代入 (1-54)，得

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad t > 0, \\ f(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \quad t < 0. \end{aligned} \quad (1-56)$$

这就是阶跃函数 $1(t)$ ，所以式 (1-53) 确实是阶跃函数的频谱特性。

图 1-15 所示是这个阶跃函数的频谱特性，它有一个连

续变化的部分和一个 δ 函数。

这个 δ 函数表示了直流分量

〔见式(1—48)〕。这就是说阶跃函数有一个等于

$1/2$ 的直流分量。至于阶跃

函数的其他各次谐波则构成

一连续频谱，这个频谱随着

频率的增加而衰减很快。控

制工程中常用阶跃信号来测

试对象特性，根据上面的分

析可以知道，由于其频谱的

高频部分衰减很快，所以用这方法来求对象特性，只能得到

一低频的数学模型。

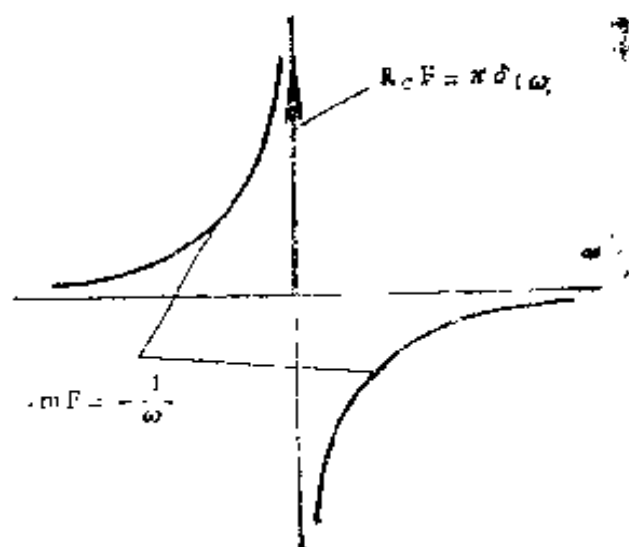


图1—15 阶跃函数的频谱

5. 实际的脉冲信号

我们知道 δ 函数的频谱是常数，表明它包含所有的频率，而且是均匀的。但 δ 函数是一种数学的抽象，实际使用的脉冲信号总有一定的宽度。为了说明实际脉冲信号的特点，下面来分析几种不同形状的脉冲信号(图1—16)。这里设脉冲的冲量，即脉冲函数下的面积为1。注意到当 $\omega=0$ 时从式(1—16)得

$$F(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = f(t) \text{ 所包的面积, (1—57)}$$

现在设脉冲面积为1，就是指 $F(j0) = 1$ 。这就是说，取各频谱特性具有相同的低频段特性以便进行比较。

对于图1—16所示的两种脉冲，设底宽都是 T 。因为面积是1，根据式(1—13)可以算得对应的傅氏变换为

a. 矩形:

$$|F(j\omega)| = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \quad (1-58)$$

b. 三角形:

$$|F(j\omega)| = \frac{\sin^2(\omega T/4)}{(\omega T/4)^2} \quad (1-59)$$

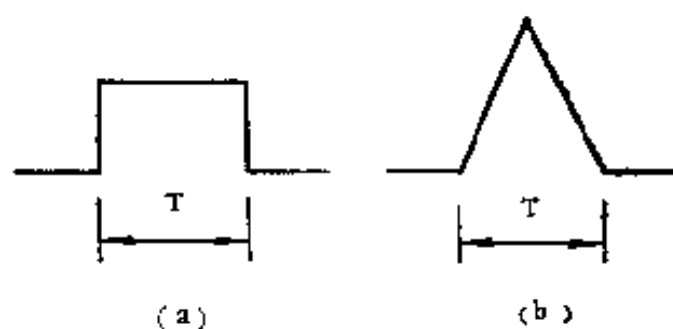


图1—16 脉冲波形

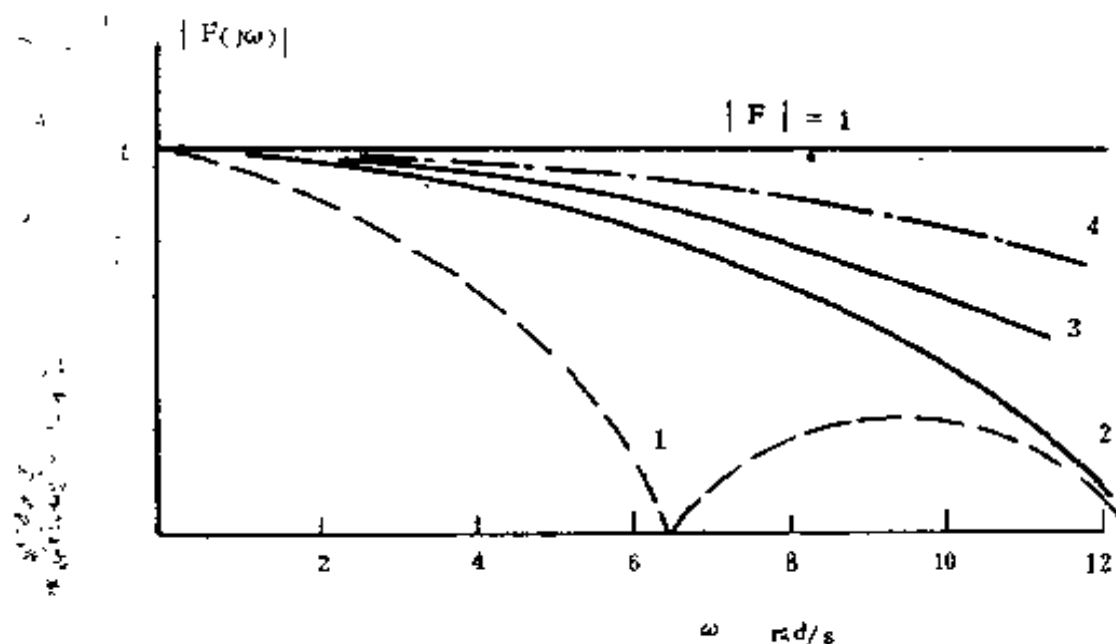


图1—17 实际脉冲信号的频谱

1——矩形波, $T=1$ s; 2——矩形波, $T=0.5$ s;

3——三角波, $T=0.5$ s; 4——矩形波, $T=0.25$ s

图1—17列出了不同底宽 T 时的各频谱。图中 $|F|=1$ 的直线就是 $\delta(t)$ 的频谱——常值谱。从图中可以看到, 实际脉冲的频谱到高频段都是衰减的, 只是在一定的带宽内可

近似为常值。脉冲的底宽 T 愈窄，频谱愈宽。因此，若要用脉冲信号作为测试信号来测定对象特性，脉冲的底宽 T 就应该要窄，这样才能提供丰富的频谱来激发对象。例如，设要求精确测定对象在频率到 $\omega = 6 \text{ rad/s}$ 的频段上的特性时，就得选 0.5s 宽的脉冲作为测试信号。因为这时信号频谱在 6 rad/s 上还有相当的数值（见图1—17中曲线2和3），可以获得比较精确的结果。

图1—17是矩形和三角形脉冲的频谱特性。其他形状脉冲的频谱特性也与它们相类似。底宽 T 与频谱宽度的关系也与图1—17相似。所以实际测试中不论采用何种波形都可参照图1—17来选择恰当的脉冲宽度。

四、离散傅里叶变换

傅氏变换使我们可以从频谱的角度来分析信号。不过要使这个概念得到具体应用，还得解决傅氏变换的计算问题。现在一般均用数值法来计算，即采用离散数据。数据离散化时有它特有的问题。本节将讨论频域和时域上的采样问题，并介绍相应的离散傅里叶变换。

在第二节中已经提到过计算频谱的方法，这是先将信号作周期性的延拓，然后分析此周期信号的谐波。

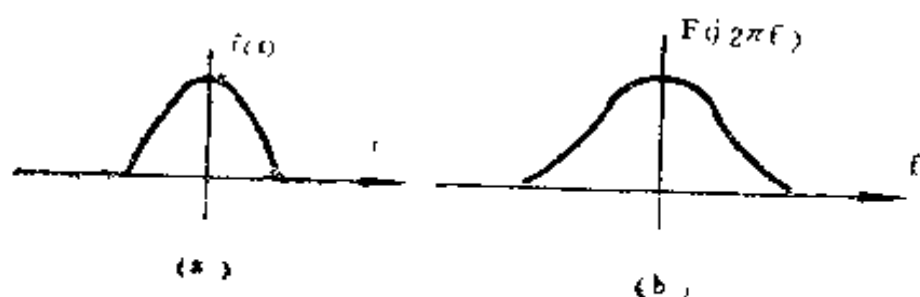


图1—18 信号和其频谱

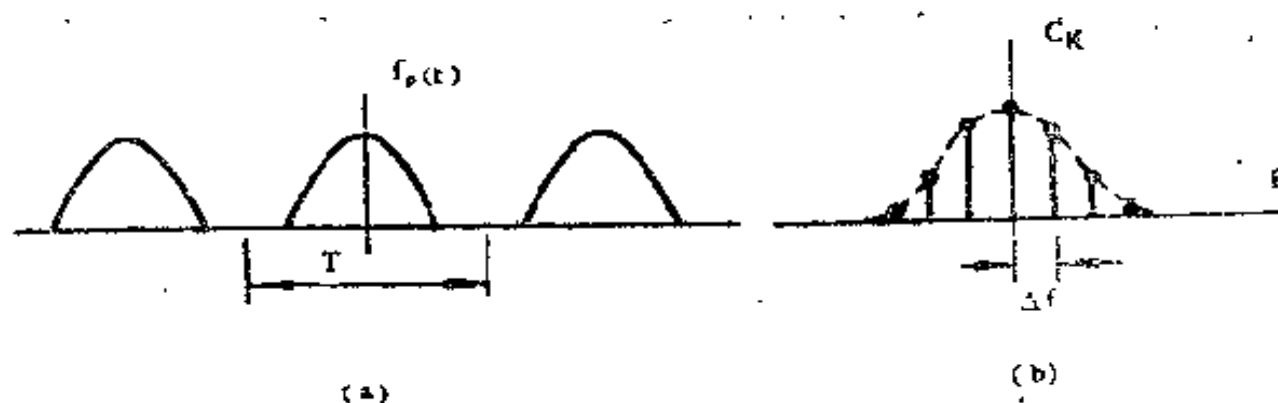


图1—19 信号的周期延拓

设图1—18所示是原信号和对应的频谱，这里设时间函数 $f(t)$ 中的 t (时间) 是有限的。图1—19a是将 $f(t)$ 作周期性延拓后得到的波形，用 $f_p(t)$ 来表示。此 $f_p(t)$ 是一周期函数，故可展成傅氏级数。图1—19b为对应的线谱。根据线谱 c_k 可以算得 $F(j2\pi f)$ 的离散值〔见式(1—23)〕：

$$c_k = F(j2\pi f_k)/T = \Delta f F(j2\pi f_k) \quad (1-60)$$

式中

$$\Delta f = 1/T \quad (1-61)$$

现在用数学式子把这些运算关系表示出来。

我们知道，线谱 c_k 所对应的频谱特性可用 δ 函数来表示，所以 $f_p(t)$ 所对应的频谱特性为

$$F_p(j2\pi f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - f_k) \quad (1-62)$$

将式(1—60)代入(1—62)得

$$F_p(j2\pi f) = \Delta f \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j2\pi f_k) \delta(f - f_k) \quad (1-63)$$

式(1—63)可写成

$$F_p(j2\pi f) = \Delta f \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j2\pi f_k) \delta(f - f_k)$$

上式中求和式表示的 δ 函数序列是一周期函数，周期为 Δf ，因此可展成傅氏级数。将此傅氏级数代入上式，得

$$F_p(j2\pi f) = F(j2\pi f) \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi l f / \Delta f} \quad (1-64)$$

根据位移定理，可将 $F_p(j2\pi f)$ 所对应的时间函数写为

$$\begin{aligned} f_p(t) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(t - l / \Delta f) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(t - lT) \end{aligned} \quad (1-65)$$

式(1—65)表明离散的频谱所对应的时间函数 $f_p(t)$ 是周期函数，周期为 T 。式(1—65)还表明，数值计算中当用离散值来表示频谱时，在时间域上会出现重叠。只有 Δf 选得足够小时才能减少重叠。当然若时间函数是有限的（例如图1—18a），其持续时间小于 T （ $T = 1/\Delta f$ ），就可避免这重叠现象。这时用离散值就能代表原来信号的频谱，这是频域上的采样定理。

也可以对式(1—63)进行直接变换，得

$$f_p(t) = \Delta f \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j2\pi f_k) e^{j2\pi f_k t} \quad (1-66)$$

式(1—65)、(1—66)是 $f_p(t)$ 的两种表示方法，现合在一起如下：

$$\begin{aligned}
 f_p(t) &= \Delta f \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j2\pi f_k) e^{j2\pi f_k t} \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(t-lT) \quad (1-67)
 \end{aligned}$$

式(1-67)的第二个等式说明 $f_p(t)$ 是 $f(t)$ 的周期延拓,而第一个等式表示这个周期函数系由各次谐波组成,谐波的系数由 $F(j2\pi f_k)$ 决定。所以式(1-67)是根据周期延拓来求频谱的数学关系。这也就是数值计算中频谱的离散值与时间函数的关系。

计算时若时间取离散值,则式(1-67)可写成

$$\begin{aligned}
 f_p(n) &= \Delta f \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j2\pi k\Delta f) e^{jkn2\pi/N} \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(n-lN) \quad (1-68)
 \end{aligned}$$

这里时间序列中用 n 表示 $n\Delta t$ 。

式(1-68)中的 N 表示 T 时间内的点数:

$$T = N\Delta t \quad (1-69)$$

由于数值计算中时间函数也是取离散值,所以下面再来列写其离散数据与频谱的关系式。

设用 $f^*(t)$ 表示采样信号:

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(t-n\Delta t) \quad (1-70)$$

式(1-70)中时间间隔 Δt 的取值同式(1-68)。

将式(1-70)中的 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\Delta t)$ 展成傅氏级数

后, 可得

$$f^*(t) = \frac{1}{\Delta t} f(t) \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi l t / \Delta t} \quad (1-71)$$

这样, 根据位移定理便可得 $f^*(t)$ 的变换式

$$F^*(j2\pi f) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F[j2\pi(f - l/\Delta t)] \quad (1-72)$$

式 (1-72) 表明频谱也是周期函数, 周期为 $f_s = 1/\Delta t$ 。这说明当时间函数取离散值时, 对应的频谱也须作周期性的延拓, 见图 1-20。若信号频谱 $F(j2\pi f)$ 限制在 $\pm f_s/2$ 之内, 频域上就不会出现重叠, 时间信号的离散值就能代表原信号, 这是时间域上的采样定理。

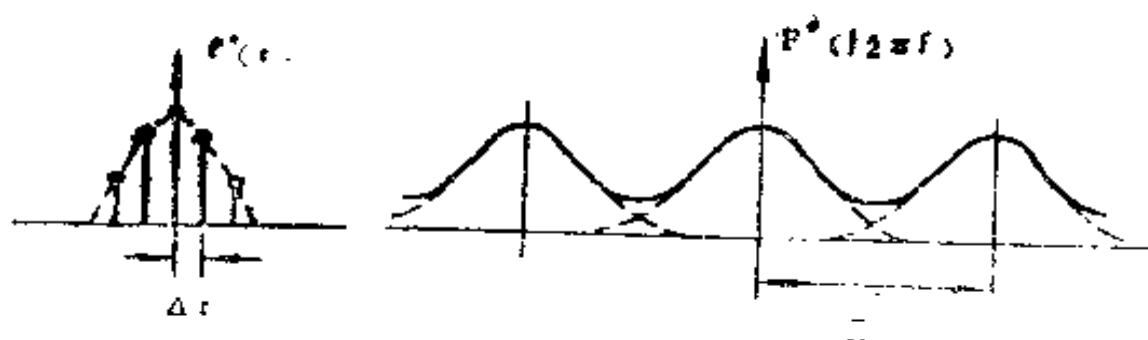


图1-20 频谱的周期延拓

我们也可以直接对式 (1-70) 进行变换, 得

$$F^*(j2\pi f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j2\pi f n \Delta t} \quad (1-73)$$

式 (1—72) 和 (1—73) 是 $F^*(j2\pi f)$ 的两种表示方法
现合并如下:

$$\begin{aligned} F^*(j2\pi f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j2\pi f n \Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F[j2\pi(f - l/\Delta t)] \quad (1-74) \end{aligned}$$

式 (1—74) 的第一个等式表示了采样数据 $f(n)$ 与离散频谱 F^* 的关系, 而第二个等式则表示了这个 F^* 与原频谱的关系是原频谱的周期延拓。

若 f 取离散值, $f_k = k\Delta f$, 这时式 (1—74) 可写成

$$\begin{aligned} F^*(j2\pi k\Delta f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-jnk2\pi/N} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F[j2\pi(k - lN)\Delta f] \quad (1-75) \end{aligned}$$

式 (1—75) 中 Δf 的取值与式 (1—68) 是一致的。根据式 (1—61) (1—69) 可知, 在一个周期 ($f_s = 1/\Delta t$) 内的点数为

$$f_s/\Delta f = N$$

这就是说, 频域上每个周期内采样的数目也是 N 个。

为了便于书写, 今后用 $F^*(k)$ 表示 $F^*(j2\pi k\Delta f)$, 故式 (1—75) 写成

$$\begin{aligned} F^*(k) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-jnk2\pi/N} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F[j2\pi(k - lN)\Delta f] \quad (1-76) \end{aligned}$$

上面第一个关系式 (1—68) 给出了周期函数 $f_p(t)$ 与原频谱 $F(j2\pi f)$ 的关系, 但这是用无穷项的和来表示的, 不便于计算。现在第二个关系式 (1—76) 又给出了离散频谱与原频谱的关系。下面将这两个关系式结合起来, 用有限和来表示 $f_p(t)$ 。

设用 $k-lN$ 来代替式 (1—68) 中的 k , 则其和将变成下面的双重和:

$$f_p(n) = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F[j2\pi(k-lN)\Delta f] \times e^{j(k-lN)n2\pi/N} \quad (1-77)$$

注意到

$$e^{j(k-lN)n2\pi/N} = e^{jkn2\pi/N}$$

因此, 可以把这个因子提到 l 的求和式前面, 然后再把式 (1—76) 代入 (1—77), 得

$$\begin{aligned} f_p(n) &= \Delta f \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} F^*(k) e^{jkn2\pi/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F^*(k) e^{jkn2\pi/N} \end{aligned} \quad (1-78)$$

用类似的方法也可以把式 (1—76) 写成有限和形式:

$$F^*(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_p(n) e^{-jkn2\pi/N} \quad (1-79)$$

式 (1—78) 和 (1—79) 表明, 周期延拓的 $f_p(t)$ 和离散频谱 $F^*(k)$ 都可用有限个 (N 个) 采样值来确定, 因此, 可用 N 个值来定义基本序列:

$$F^*(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_p(n) e^{-jnk2\pi/N}$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1 \quad ; \quad (1-80)$$

$$f_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F^*(k) e^{jkn2\pi/N}$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1 \quad 。 \quad (1-81)$$

今后在书写中将略去角标而写成

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jnk2\pi/N}$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1 \quad , \quad (1-82)$$

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{jkn2\pi/N}$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1-83)$$

式(1-82)称为离散傅里叶变换，缩写为DFT，而式(1-83)称为离散傅里叶反变换，缩写为IDFT。离散傅里叶变换将N个时间采样值与N个离散频谱值连接在一起故也常根据N的值而称之为N点DFT。

由于采用数值法，所以都用离散傅里叶变换来求频谱。应该注意的是离散傅里叶变换所对应的 $f_p(t)$ 和 $F^*(k)$ 都是经过周期延拓后的函数(图1-21)。因此，离散傅里叶变换与傅氏变换又相对应，又不完全一致。当 $0 \leq k < N/2$ 时， $F(k)$ 是与频谱对应的，而 $N/2 \leq k < N$ 时的 $F(k)$ 则与负频域的频谱相对应。同样， $0 \leq n < N/2$ 时的 $f(n)$ 等于原时间函数的离散值，而 $N/2 \leq n < N$ 时的 $f(n)$ 则对应于负时域。

离散傅里叶变换可用来求有限信号的频谱(傅氏变换)。

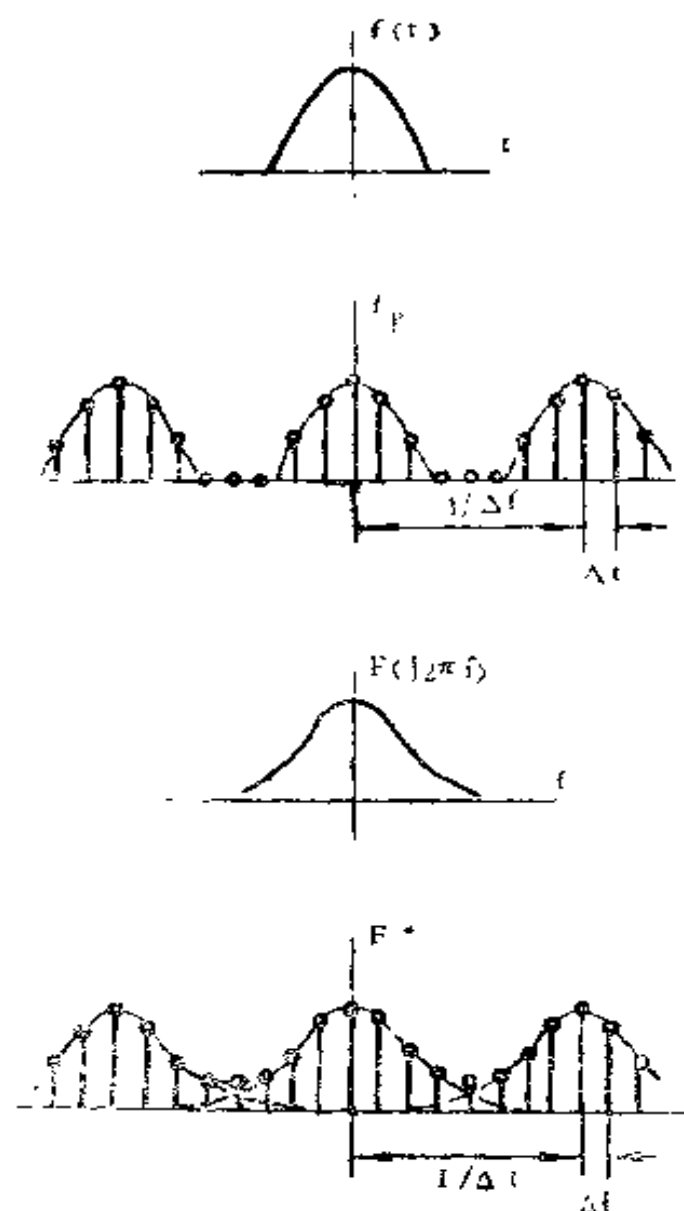


图1—21 数值计算中的信号与频谱

因为从式 (1—75) 可以看到, 当 $-N/2 < k < N/2$ 时, 有

$$F(j2\pi f_k) \approx \Delta t F(k) \quad (1-84)$$

因此, 根据时间函数的 N 个离散值, 先求出 DFT, 再乘以 Δt 便可得对应的的频谱。

我们也可用离散傅里叶变换来求一个周期函数的线谱

C_k 。因为根据式 (1—60) 有

$$C_k = \frac{1}{T} F(j2\pi f_k) = \frac{\Delta t}{T} F(k) = \frac{1}{N} F(k) \quad (1-85)$$

所以，只要在一个周期内取 N 个采样值，求其 DFT，再除以 N 就可得对应的线谱。

〔例1〕设 $f(t)$ 是图1—22所示的一段余弦函数，现求其频谱。

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \cos 2\pi t & -1/2 < t < 1/2; \\ 0 & |t| > 1/2. \end{cases} \quad (1-86)$$

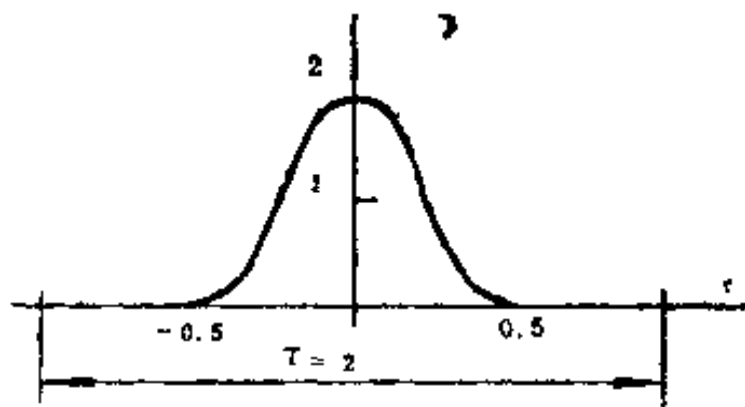


图1—22 $f(t)$ 举例

本例中取数据长度为 $T = 2s$ 。根据上面的说明可以知道，式 (1—82) 中的 $f(n)$ 当 $n < N/2$ 时与图1—22原函数的正时域相符，而当 $N/2 \leq n < N$ 时应与负时域一致。因此，当 $N = 8$ 时，此 $f(n)$ 的序列应该是

$$\{2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1\}$$

图1—23a所示就是这个计算用的 $f(n)$ 图形。

将这个序列代入式 (1—82) 就可算得对应的8点DFT。

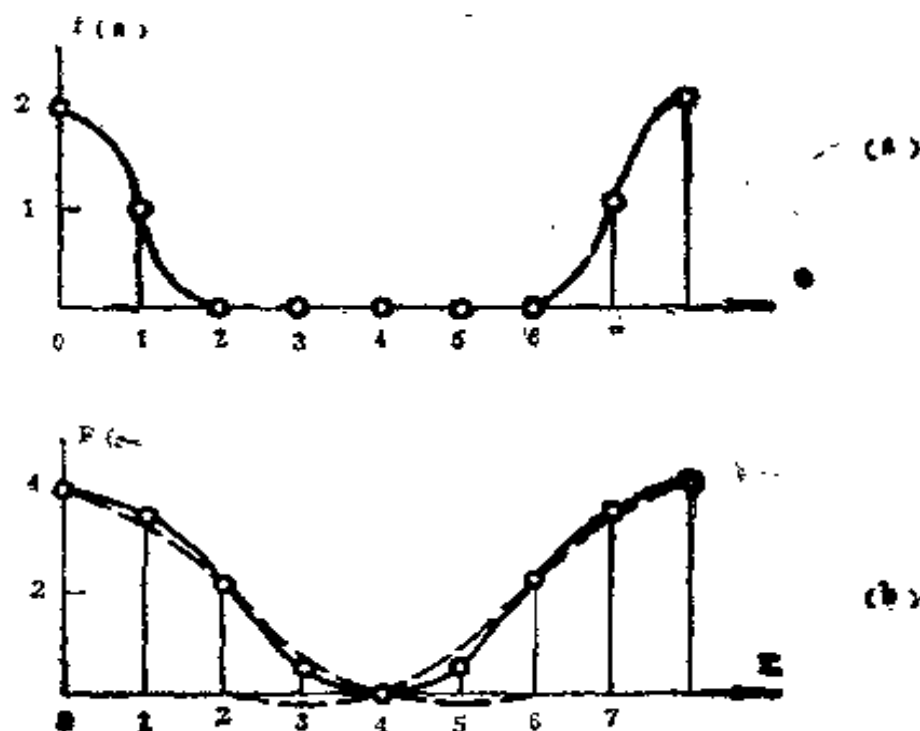


图1—23 计算用的序列

见图1—23b。本例中线谱间的距离 $\Delta f = 1/T = 0.5\text{Hz}$ 。

已知， $k < N/2$ 时的 $F(k)$ 与正频域的频谱相对应，而 $N/2 \leq k < N$ 时的 $F(k)$ 与负频域的频谱相对应。这样，再根据式(1—84)将 $F(k)$ 乘以 Δt ，便可得所求的频谱，如图1—24所示。本例中 $\Delta t = T/N = 0.25\text{s}$ 。

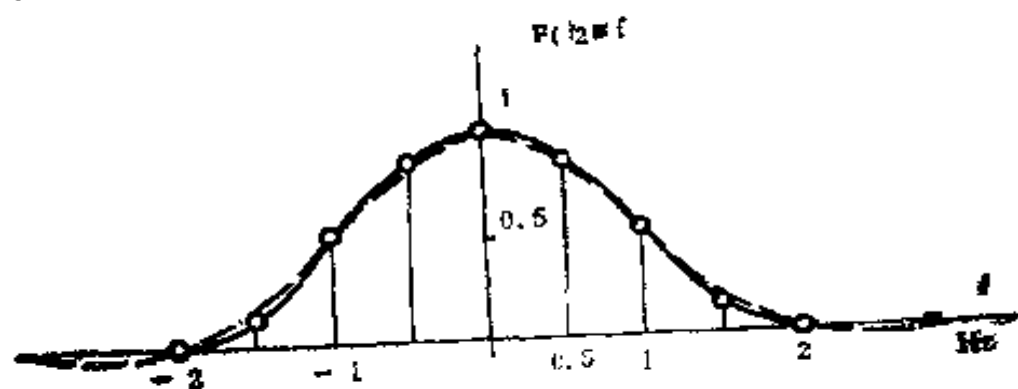


图1—24 频谱特性

图 1—24 中虚线所示为该信号的真实频谱。由于此信号的频谱并不是有限宽度的，所以在频域上有重叠。本例中频谱的重叠并不严重，图1—23和图1—24中的虚线都是夸大了的，增多点数 N ，即减少 Δt ，可以进一步减小频域上的重叠。本例中当 $N = 32$ 时，实际上已无重叠。

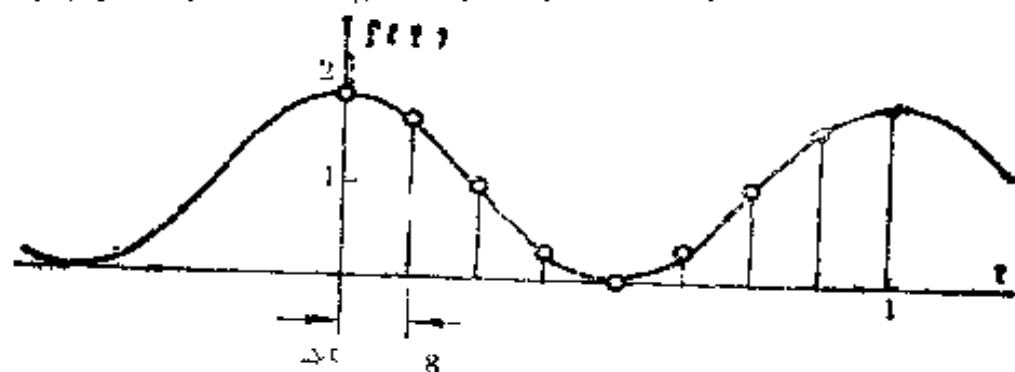


图1—25 周期信号

〔例2〕设有周期信号 $f(t) = 1 + \cos 2\pi t$ ，现求其线谱。

图1—25所示就是此周期函数的图形。现对一个周期内的函数取离散值。设 $N = 8$ ，则 $f(n)$ 序列为

$$\{2, 1.7071, 1, 0.2929, 0, 0.2929, 1, 1.7071\} \quad (1-87)$$

将这 $f(n)$ 代入式(1—82)，得此8点DFT为(图1—26)：



图1—26 离散傅里叶变换

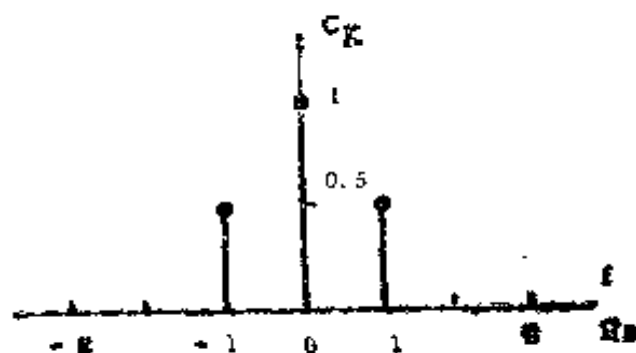


图1—27 周期信号的频谱

$$\{8, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 4\} \quad (1-88)$$

根据式 (1—85), 将此 $F(k)$ 除以 $N = 8$ 就可得此周期函数的线谱, 如图1—27所示。本例中线谱间的距离 $\Delta f = 1/T = 1\text{Hz}$ 。

上面主要讨论了离散傅里叶变换, 下面再来说明一下离散傅里叶反变换的问题, 我们将看到, 正反变换都可使用同一计算程序。

事实上, 式 (1—83) 可改写如下:

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{jkn2\pi/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{-jk(N-n)2\pi/N} \end{aligned} \quad (1-89)$$

$$\text{以 } n = N - p \quad (1-90)$$

代入式 (1—89) 得

$$f(N-p) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{-jkp2\pi/N} \quad (1-91)$$

现在式 (1—91) 中的求和式与式 (1—82) DFT 的形式完全一致, 因此可以直接使用DFT的计算程序, 只是计算所得的序列现在是 p 的序列, $p = 0, 1, \dots, N-1$, 对 n 来说, 正好倒了过来 [见式 (1—90)]。

〔例3〕试求图1—26所示 $F(k)$ 的离散傅里叶反变换。

$F(k)$ 的序列是 $\{8, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 4\}$ ，利用计算DFT的同一计算程序算得序列如下：

$$\{10, 13.6569, 8, 2.3431, 0, 2.3431, 8, 13.6569\} \quad (1-92)$$

根据式 (1—91)，再除以 $N(N=8)$ 得时间序列：

$$\{2, 1.7071, 1, 0.2929, 0, 0.2929, 1, 1.7071\} \quad (1-93)$$

注意到计算所得的这个序列是 p 序列，对 n 来说正好倒了过来。但由于该序列是对称的，所以式(1—93)也就是所求的 $f(n)$ 〔见图1—25〕。

〔例4〕设 $f(t) = \sin 2\pi t$ ，试求此信号的DFT的DFT。

求DFT的DFT就是指重复使用DFT计算程序。这里第一次求DFT得离散傅里叶变换 $F(k)$ 〔见图1—28 b〕，而第二次实际上就是求IDFT，只差一个因子 N 〔见式(1—91)〕。图1—28，所示就是第二次求DFT所得的结果。注意图中横坐标是 p ，与原信号 $f(t)$ 的时序正好相反。

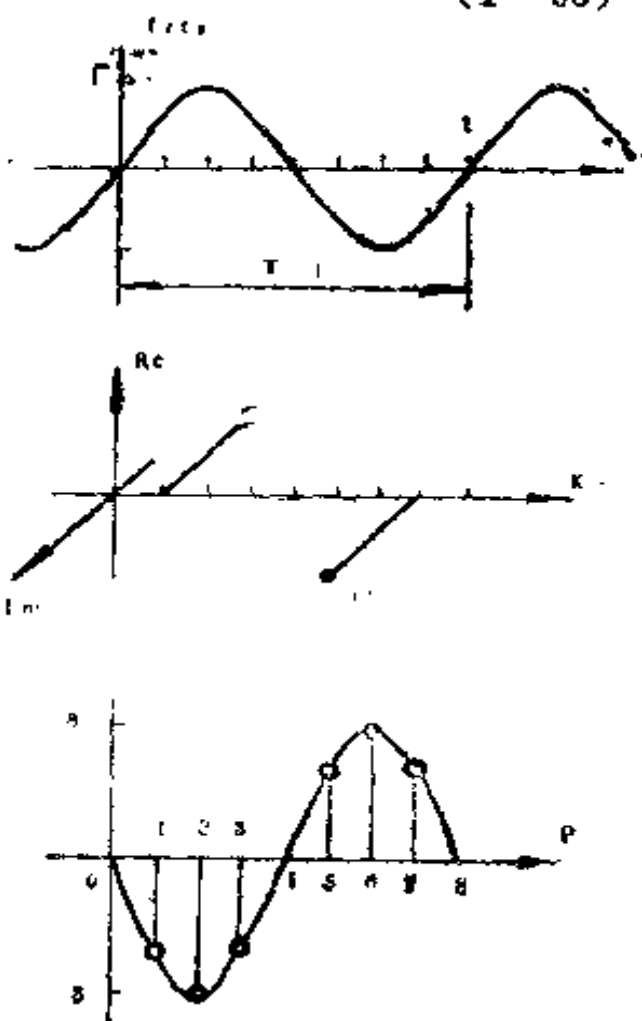


图1—28 DFT的DFT
(a) 原函数 $f(t)$ ；(b) $f(t)$ 的离散傅里叶变换DFT；
(c) DFT的DFT

五、快速傅里叶变换

离散傅里叶变换是进行频谱分析的基本工具，但由于计算费时，因此其应用也受到了限制。约1965年以后，由于出现了快速而有效的算法，DFT才能在实际中得到广泛的应用。这种算法就是快速傅里叶变换或FFT算法。

现在FFT算法有多种多样，这里介绍一种实用的Cooley-Tukey算法。

设有 N 个采样值的数列 $f(n)$ ， $n=0, \dots, N-1$ ，其离散傅里叶变换DFT为

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jnk2\pi/N} \quad (1-94)$$

取

$$w = e^{-j2\pi/N} \quad (1-95)$$

则DFT可写成

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) w^{nk} \quad (1-96)$$

为了提高计算效率，将时间点数 N 限制为2的整数次方，即

$$N = 2^r \quad (1-97)$$

在下面的说明中，当要用到具体数据时，就以 $r=3$ ，即 $N=8$ 作为例子。

将式 (1-96) 中的 n 和 k 用2的各方次来表示之：

$$\begin{aligned} n &= n_1 + 2n_2 + 2^2n_3, \quad n_1, n_2, n_3 = 0, 1, \\ k &= k_12^2 + k_22 + k_3, \quad k_1, k_2, k_3 = 0, 1. \end{aligned} \quad (1-98)$$

将 n, k 代入式(1—96)中的 w^{nk} , 并考虑到 w^p 的周期性:

$$w^{p+mn} = w^p \quad (1-99)$$

可得

$$\begin{aligned} w^{nk} &= w^{n_1(k_1^4+k_2^2+k_3)} w^{2n_2(k_2^2+k_3)} w^{4n_3k_3} \\ &= w_3^{n_1(k_1^4+k_2^2+k_3)} w_2^{n_2(k_2^2+k_3)} w_1^{n_3k_3} \end{aligned} \quad (1-100)$$

中式

$$\begin{aligned} w_3 &= w = e^{-j\pi/4} \\ w_2 &= w^2 = e^{-j\pi/2} \\ w_1 &= w^4 = e^{-j\pi} \end{aligned} \quad (1-101)$$

w_i 的一般表达式为

$$w_i = e^{-j\pi/N_1} \quad (1-102)$$

式中

$$N_1 = 2^{l-1} \quad (1-103)$$

将式(1—100)代入(1—96), $F(k)$ 就可以分解为重求和的形式:

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{n_1=0}^1 w_3^{n_1(k_1^4+k_2^2+k_3)} \sum_{n_2=0}^1 w_2^{n_2(k_2^2+k_3)} \\ &\quad \sum_{n_3=0}^1 w_1^{n_3k_3} f(n) \end{aligned} \quad (1-104)$$

现在式(1—104)就可以按下述的步骤来计算了。

1. 用 $F_0(n_1, n_2, n_3)$ 序列来列写 $f(n)$:

$$F_0(n_1, n_2, n_3) = f(n_1 + 2n_2 + 2^2n_3) \quad (1-105)$$

2. 计算右起第一个求和式：

$$F_1(n_1, n_2, k_3) = \sum_{n_3=0}^1 w_1^{n_3 k_3} F_0(n_1, n_2, n_3) \quad (1-106)$$

这个数列与 n_1, n_2, k_3 的值有关，可展开如下：

$$F_1(0, 0, 0) = F_0(0, 0, 0) + w_1^0 F_0(0, 0, 1),$$

$$F_1(0, 0, 1) = F_0(0, 0, 0) + w_1 F_0(0, 0, 1),$$

$$\vdots$$

为了便于书写，也常用对应的十进制来表示上面这个数列的运算：

$$F_1(0) = F_0(0) + w_1^0 F_0(1),$$

$$F_1(1) = F_0(0) + w_1 F_0(1),$$

$$F_1(2) = F_0(2) + w_1^0 F_0(3),$$

$$F_1(3) = F_0(2) + w_1 F_0(3),$$

$$F_1(4) = F_0(4) + w_1^0 F_0(5),$$

$$F_1(5) = F_0(4) + w_1 F_0(5),$$

$$F_1(6) = F_0(6) + w_1^0 F_0(7),$$

$$F_1(7) = F_0(6) + w_1 F_0(7)。$$

3. 根据上面第 2 步算得的数列 $F_1(n_1, n_2, k_3)$ ，计算第二个求和式：

$$\begin{aligned} F_2(n_1, k_2, k_3) \\ = \sum_{n_2=0}^1 w_2^{n_2(k_2 2 + K_3)} F_1(n_1, n_2, k_3) \end{aligned} \quad (1-107)$$

4. 根据第二个数列 $F_2(n_1, k_2, k_3)$, 再计算第三个求和式得最终的 $F(k)$:

$$\begin{aligned} F(k) &= F_3(k_1, k_2, k_3) \\ &= \sum_{n_1=0}^1 w_3^{n_1(k_1 4 + k_2 2 + k_3)} F_2(n_1, k_2, k_3) \end{aligned} \quad (1-108)$$

由此可见, 当 $N = 2^3$ 时, 迭代计算 3 次就可求得离散傅里叶变换 $F(k)$ 。整个计算过程可用图 1—29 的信号流图来表示之。图中标有 w^k 的支路表示该信号乘以 w^k 后再加到结点上, 没有标记者则表示乘以 1。

上面这个算法很容易推广到 $N = 2^r$ 点 DFT。这时迭代计算 r 次就可求得 $F(k)$ 。这就是 FFT 算法。

从图 1—29 可以看到, 这种算法有着明显的规律性, 充分利用这些计算上的特点可以进一步提高计算效率。

这些特点是:

1. 每四个点构成一组对偶结点对。

各数列的计算式中每一个求和式下的两项与所计算的数列中相同序号的两个数构成一组对偶结点对。例如第一个求和式 (1—106) 中的

$$\begin{cases} F_0(n_1, n_2, 0) \\ F_0(n_1, n_2, 1) \end{cases}$$

与所计算的第一列中的

$$\begin{cases} F_1(n_1, n_2, 0) \\ F_1(n_1, n_2, 1) \end{cases}$$

构成一组对偶结点对 (见图 1—29)。

对偶结点对中这两个数的序号 (十进制) 差为 $N_1 = 2^{r-1}$

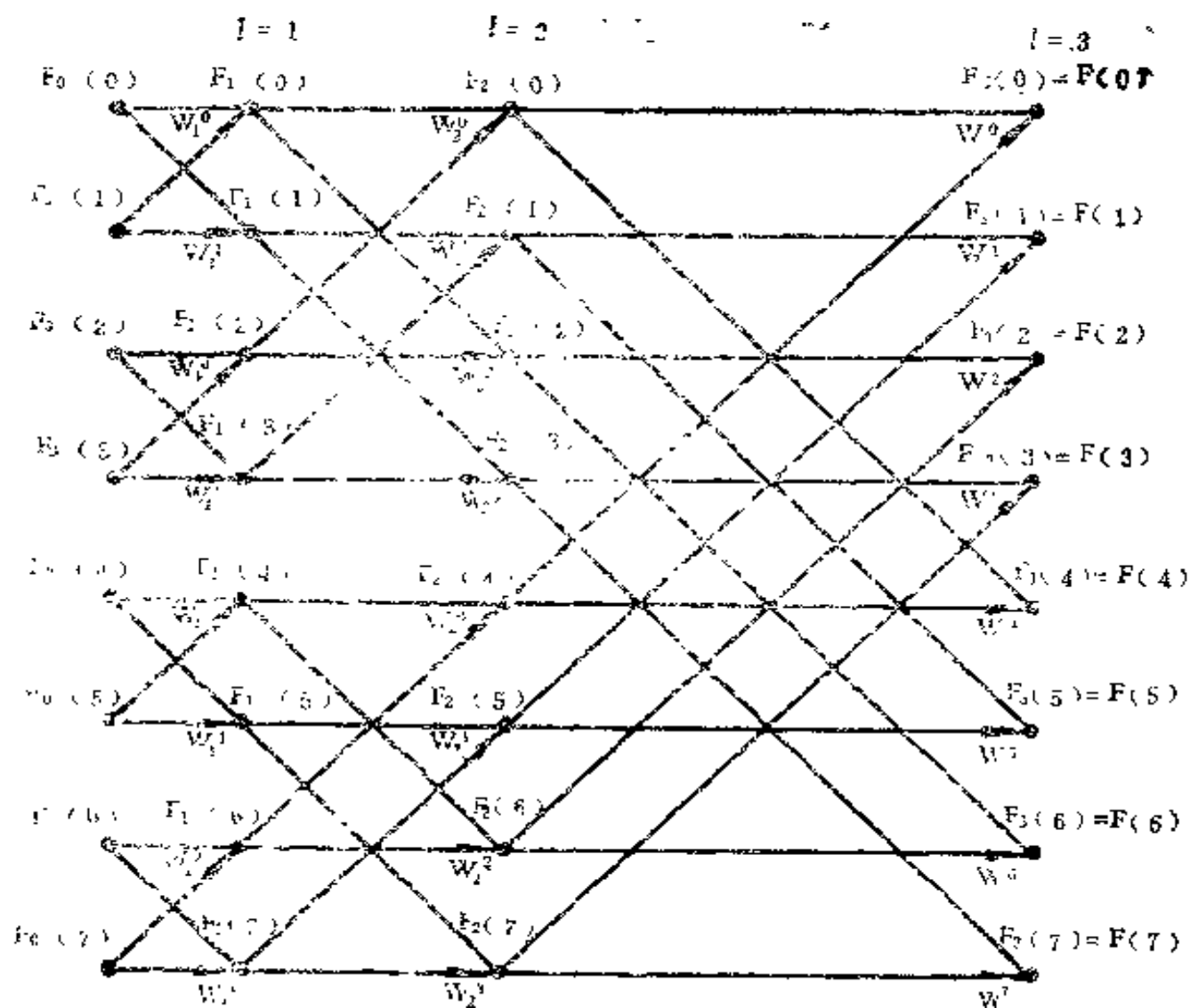


图1-29 FFT算法

〔见式(1-103)〕。

对偶结点对的一个特点是计算式中的相乘因子 w^k 互相对称。事实上，第二个点的序号是 $k + N_1$ ，所以对应的

$$w_1^{k+N_1} = w_1^k w_1^{N_1} = -w_1^k。 \quad (1-109)$$

由于这两个 w_1^k 仅差一负号，所以每一组对偶结点对在运算时只用一次乘法运算，然后相加减就可以得到两个数据：

$$F_l(k) = F_{l-1}(k) + w_1^k F_{l-1}(k + N_1)；$$

$$F_l(F+N_l) = F_{l-1}(K) - w_l^k F_{l-1}(K+N_l) \quad (1-110)$$

利用对偶结点对的这个特点，实际计算时相当于只计算一半的数就可以了。

2. w_l^k 的周期性

从式 (1-102) 可以看到， w_l^k 是一周期为 $2N_l$ 的周期函数，即

$$w_l^{k+2N_l} = w_l^k \quad (1-111)$$

式中

$$2N_l = 2^l$$

例如，当 $l=2$ 时， w_2^k 的周期为 $2N_2 = 4$ 。因此，若计算 $F_2(5)$ ，本要求乘以 w_2^5 ，现在可以直接乘以 w_2^1 ，见图 1-29。既然在 $F_2(5)$ 的计算中也乘同一个 w_2^1 ，所以在计算 $F_2(1)$ 点的同时，最好把 $F_2(5)$ 也带出来，这样计算效率就高了。

图 1-30 所示就是考虑了上述这些特点以后实际 FFT 的流程图。考虑到周期性，对应同一个 w^k ，我们把每隔一个周期 ($2N_l$) 的 $F(k)$ 都一起算出来。这就是流程图中最里面的一个循环。在这 $2N_l$ 个计算中，对偶结点对又是一起算出来的，所以，实际上只要计算 N_l 个即可，这就是第二个循环。计算完一组数列后，再递推计算下一列，这就是最外边的一个循环。这样计算 r 次后，最后的一列数据就是所求的离散傅里叶变换 $F(k)$ 。

上面讨论了 FFT 流程图的基本部分，即数列的迭代计算〔见式 (1-106) (1-107) (1-108)〕。现在再来说明一下式 (1-105) 所表示的原始数列 $F_0(n_1, n_2, n_3)$ 的排列问题。

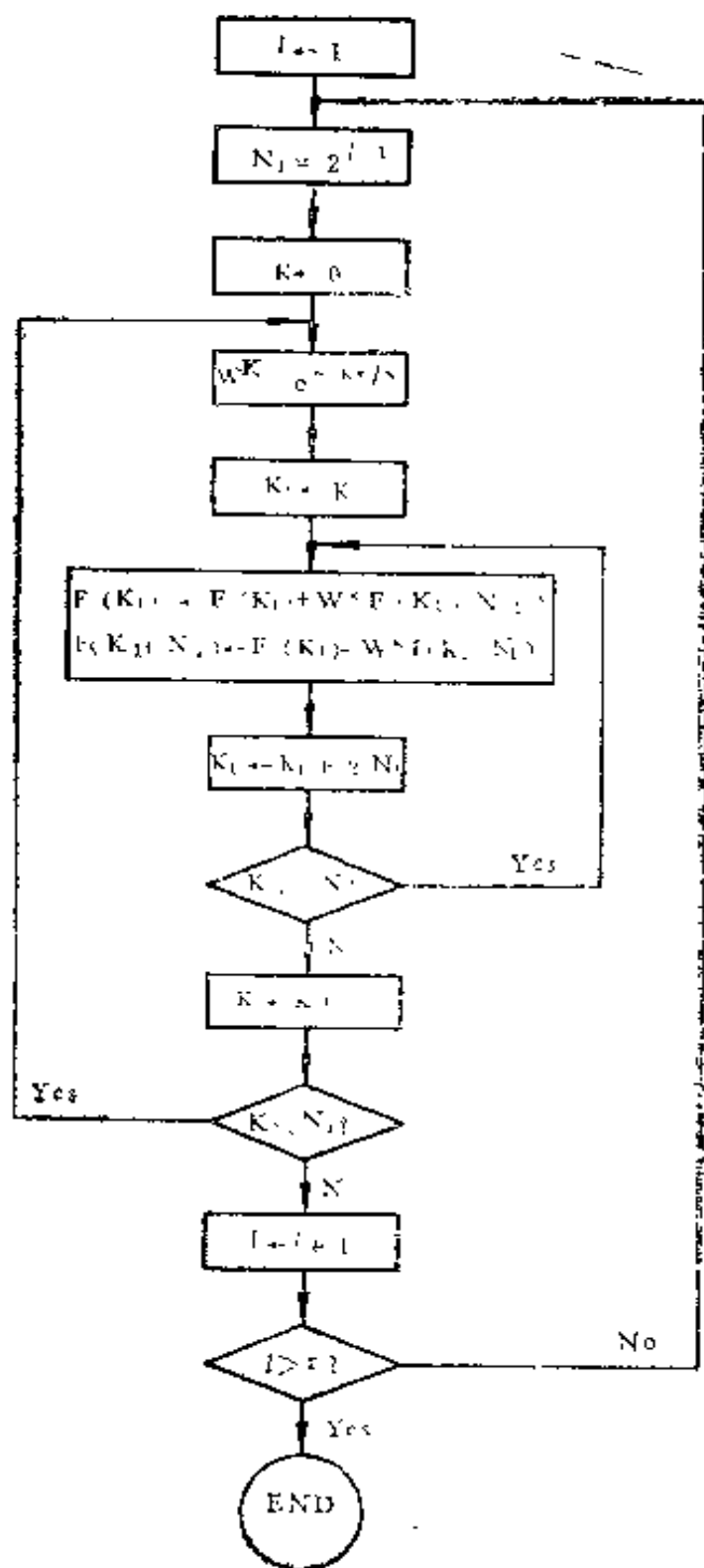


图1—30 FFT流程图

式 (1—105) 所表示的这一步称为整序：从 n 求出 n_1 , n_2 , n_3 , 然后按 (n_1, n_2, n_3) 序列将 $f(n)$ 安放到对应

的位置上成为 $F_0(n_1, n_2, n_3)$ 。

例如对 $f(6)$

$$n = 6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0$$

将此式与式 (1-98) 对比可得 n_1 、 n_2 和 n_3 的值为

n_3	n_2	n_1
1	1	0

因此, $f(6)$ 按 (n_1, n_2, n_3) 顺序来排列时序号为3,

$$n_1 2^2 + n_2 2 + n_3 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 3$$

所以整序过程实际上就是将 n 用二进制码 来表示, 例如110, 然后将此码序翻转过来成为011。图 1-31表示了 $N=8$ 时这个数列的整序过程。

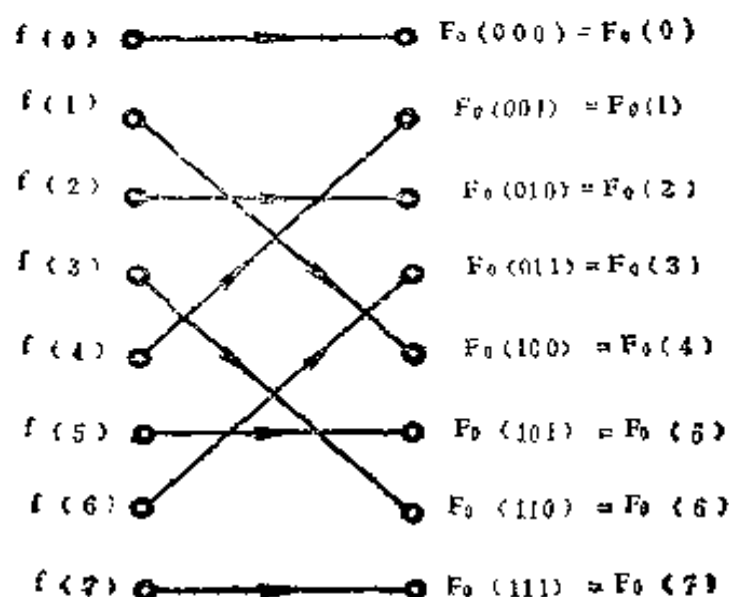


图1-31 整 序

将这个整序过程作为第一步, 接在图1-30的流程图前面, 就构成了一完整的FFT算法。

流程图清楚地表明了FFT的运算程序。根据它就可以直接列写出计算机程序。下面就是一个与图1—30算法相对应的计算FFT的BASIC程序。语句150前是输入语句，输入N个数据，实部为 $R(K)$ ，虚部为 $I(K)$ ， $K=0, 1, \dots, N-1$ 。语句150到300是整序程序段，这一部分完成式(1—105)的运算。程序中的P就是式(1—97)中的 r 。语句310以后为数列的迭代运算，即计算式(1—106) (1—107) (1—108)等。其中语句370到440对应于流程图(图1—30)中最里面的一个计算循环。语句450前的程序对应于第二个计算循环，语句470前的程序则对应于最外一个计算循环。语句470以后就是打印输出。

快速傅里叶变换的BASIC程序

```

150  FOR K=0 TO N-1
160  G=K
170  D=0
180  FOR Q=1 TO P
190  C=INT (G/2)
200  D=2*D+G-2*C
210  G=C
220  NEXT Q
230  IF K>=D THEN 300
240  R1=R (K)
250  I1=I (K)
260  R (K) =R (D)
270  I (K) =I (D)
280  R (D) =R1
290  I (D) =I1
300  NEXT K

```

```

310 N1 = 1
320 FOR K = 0 TO N1 - 1
330 A = 3.1415926535 * K / N1
340 C = COS(A)
350 S = SIN(A)
360 K1 = K
370 R1 = R(K1 + N1) * C + I(K1 + N1) * S
380 I1 = I(K1 + N1) * C - R(K1 + N1) * S
390 R(K1 + N1) = R(K1) - R1
400 I(K1 + N1) = I(K1) - I1
410 R(K1) = R(K1) + R1
420 I(K1) = I(K1) + I1
430 K1 = K1 + 2 * N1
440 IF K1 < N THEN 370
450 NEXT K
460 N1 = 2 * N1
470 IF N1 < N THEN 320

```

六、应用举例

频谱分析在控制系统分析和设计中的应用是很普遍的。现在有了FFT算法，频谱分析就更为方便了。

这里要举的几个例子主要是围绕着系统特性的测试来讲的，至于在信号（输入信号和随机信号）的分析和处理中的应用将在有关的章节中再来介绍。

1. 频率特性的测定

频率特性直观的测试方法是输入不同频率的正弦信号，测定相应的稳态输出。但是有时会由于信号发生器或测试时间过长等问题而受到限制。

另一种测试办法是给被测对象输入一个脉冲信号而分析对象的输出响应。脉冲信号有丰富的频谱，可以根据输出频谱与输入频谱的比值来获得对象的频率特性。有人曾用此法测定过飞机的频率特性，测试时间只用了3秒钟^①。

现在用一个二阶系统作为例子说明这个方法（图1—32）。

系统的输入信号用三角波，三角波的底宽为 $0.5S$ ，面积为1。

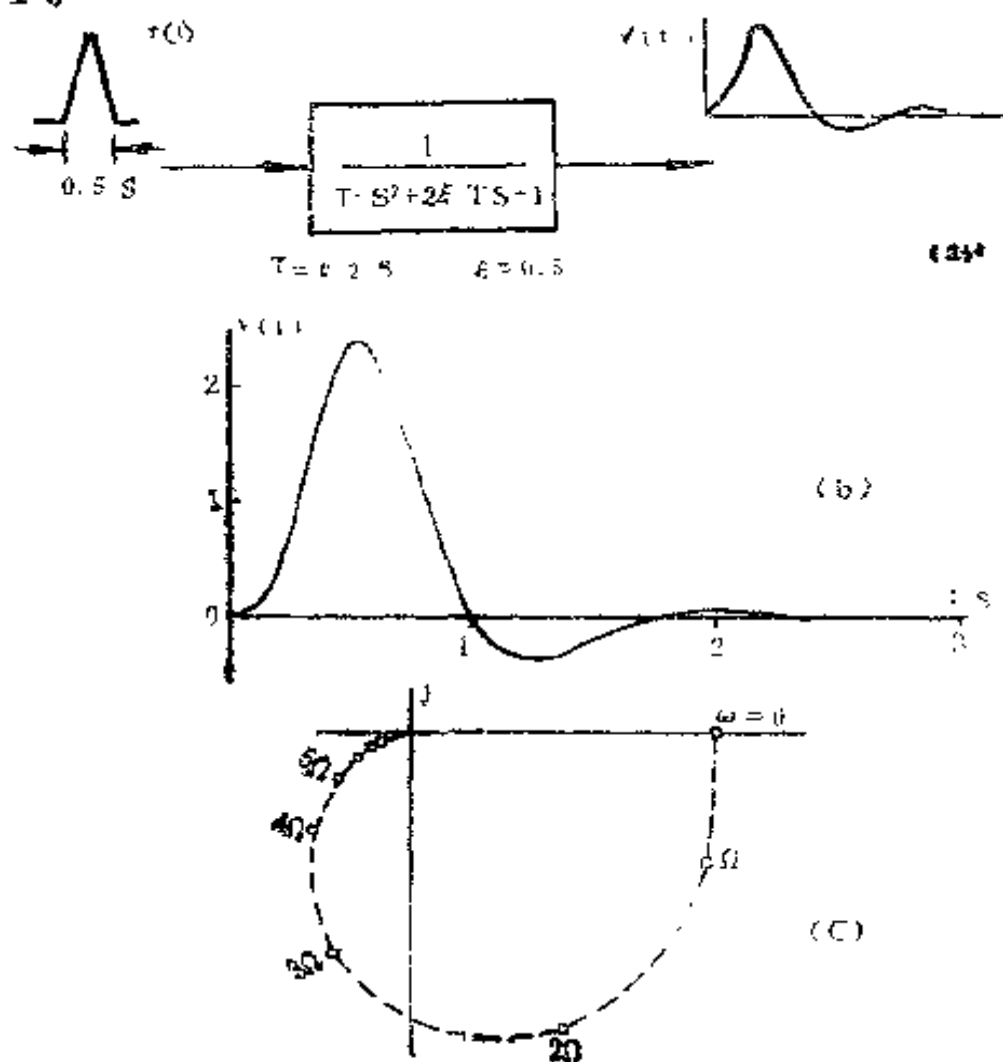


图1—32 脉冲法测频率特性

① 见Seacord, C.L., Jr., J.Aeronaut. Sci., 17 (1950), No.8, 481—498。

表1 2 输入输出的频谱和频率特性

k	ω	输出的频谱 $Y(j\omega_k) = \Delta t \cdot F(k)$	输入的频谱 $R(j\omega_k)$	$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)}$	频率特性的 理论值
0	0	$0.9994 \angle 0^\circ$	1	$0.9994 \angle 0^\circ$	$1 \angle 0^\circ$
1	Ω	$1.0504 \angle -53.9492^\circ$	$0.9801 \angle -23.1250^\circ$	$1.0717 \angle -21.9242^\circ$	$1.0721 \angle -24.9054^\circ$
2	2Ω	$1.0550 \angle -120.2739^\circ$	$0.9222 \angle -56.2300^\circ$	$1.1440 \angle -64.0299^\circ$	$1.1443 \angle -63.9956^\circ$
3	3Ω	$0.6707 \angle -192.6427^\circ$	$0.8319 \angle -84.3750^\circ$	$0.8062 \angle -108.2677^\circ$	$0.8062 \angle -103.2236^\circ$
4	4Ω	$0.3339 \angle -245.5934^\circ$	$0.7173 \angle -112.5000^\circ$	$0.4655 \angle -133.9934^\circ$	$0.4652 \angle -133.0509^\circ$
5	5Ω	$0.1700 \angle -286.1403^\circ$	$0.5837 \angle -140.6250^\circ$	$0.2888 \angle -145.5153^\circ$	$0.2886 \angle -145.4851^\circ$
6	6Ω	$0.0892 \angle -321.3842^\circ$	$0.4567 \angle -168.7500^\circ$	$0.1953 \angle -152.6342^\circ$	$0.1951 \angle -152.6313^\circ$
7	7Ω	$0.0467 \angle -354.0625^\circ$	$0.3315 \angle -196.8750^\circ$	$0.1409 \angle -157.1875^\circ$	$0.1407 \angle -157.2553^\circ$
8	8Ω	$0.0236 \angle -385.3785^\circ$	$0.2214 \angle -225.0000^\circ$	$0.1066 \angle -160.3735^\circ$	$0.1063 \angle -160.4960^\circ$

图1—32 b所示为系统的输出响应。从图可见，此输出响应到第3秒时已实际上为零。根据这段曲线，可以取 $\Delta t = 0.05\text{s}$ ， $N = 64$ ，也就是说取 $N\Delta t = 3.2\text{s}$ 长的一段记录曲线，用64点DFT来求其离散傅里叶变换 $F(k)$ 。求得 $F(k)$ 后乘以 Δt [见式(1—84)] 就得出输出信号的频谱 $Y(j\omega_k)$ 。表1—2列出了前9个点的值 $Y(j\omega_k)$ ， $\omega_k = k\Omega$ 。这里

$$\Omega = 2\pi / N\Delta t = 1.963\text{rad/s} \quad (1-112)$$

对输入信号也可以用同样的方法进行频谱分析，不过本例中输入信号是三角波，其频谱可用解析法算得，为

$$R(j\omega) = \left\{ \frac{\sin\omega/8}{\omega/8} \right\}^2 e^{-10 \cdot 28\omega} \quad (1-113)$$

表1—2中也列出了输入频谱的离散值 $R(j\omega_k)$ 。

输出频谱与输入频谱之比就是所求的系统频率特性，见表1—2第三列数据和图1—32c。

为了比较，表1—2中也列出了此二阶系统频率特性的理论值，其图线见图1—32c虚线所示。比较这两套数据可以看到，用脉冲输入来测特性并用频谱分析法求其频率特性是相当精确的。

这里要说明的是，为了便于定量分析，所以本例中输入信号取三角波脉冲。实际测试时并不受此限制，可以根据现场的条件给对象一个脉冲型的输入。只要将这个执行机构的动作记录下来，再根据它分析输入频谱就是了。

2. 热工对象频率特性的测定

现在再介绍一种适用于热工对象的频率特性的测定方法。

设输入 $x(t)$ 作阶跃变化，测得的对象飞升特性 $y(t)$ 如图1—33a所示。我们利用这条飞升特性构成如图1—33b所

示的周期函数。然后对此周期函数进行频谱分析。同一谐波下的输出与输入之比就是此对象在这一频率下的频率特性值 $G(j\omega_k)$ 。将这些 $G(j\omega_k)$ 用一光滑曲线连接起来即为此对象的频率特性 $G(j\omega)$ 。

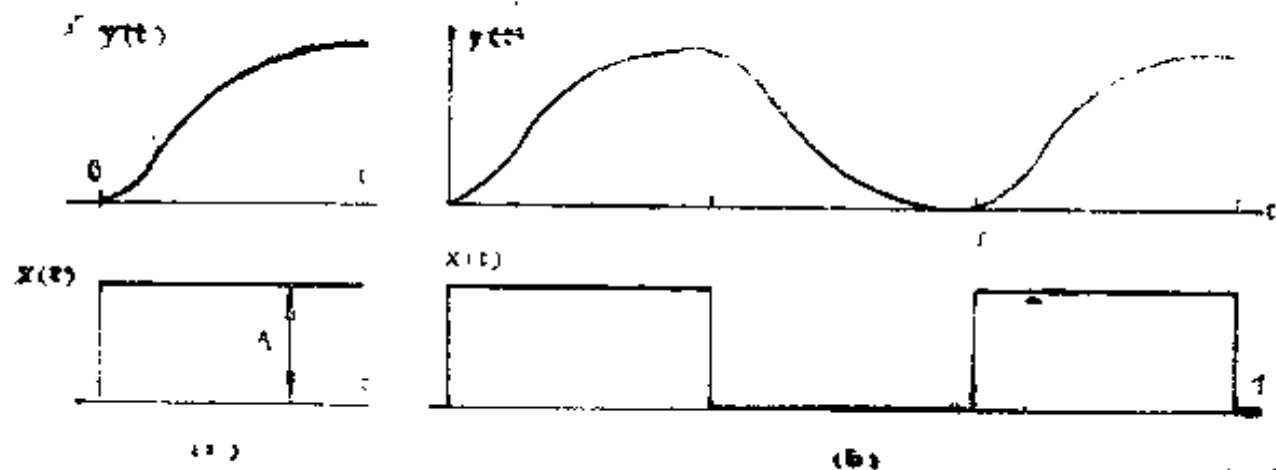


图1—33 从飞升特性求频率特性

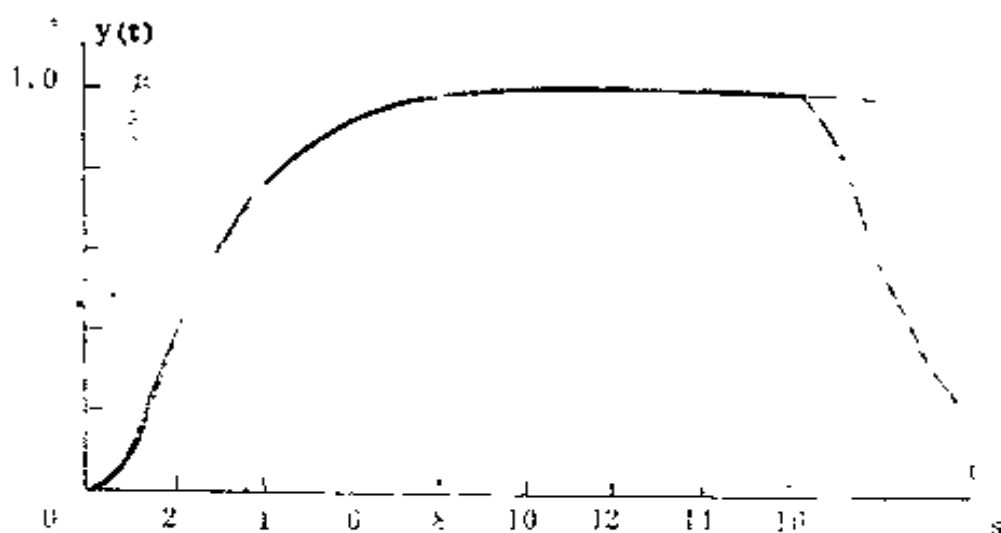


图1—34 飞升特性

为了具体说明这个方法，用一条理论计算的飞升特性来代替实验曲线。图1—34和表1—3就是传递函数为

$$G(s) = \frac{e^{-0.3s}}{(1+1.5s)(1+1.2s)} \quad (1-114)$$

的对象的飞升特性。

表1—3 飞升特性

K	0	1	2	3	4	5	6	7
y (K)	0	0.0967	0.3603	0.5951	0.7389	0.8618	0.9228	0.9576
K	8	9	10	11	12	13	14	15
y (K)	0.9771	0.9877	0.9935	0.9965	0.9982	0.9990	0.9995	0.9997

基于图1—33b的概念，取周期 T 为32s，即取基波频率为

$$\Omega = 2\pi/32 = 0.1963 \text{ rad/s.} \quad (1-115)$$

现在输出信号是由图1—34的飞升特性所构成的周期函数。设 $N = 32$ ，求得该周期函数的32点DFT后除以 N ，就得各次谐波的复系数 C_k ，见表1—4。

输入信号 $x(t)$ 为一方波（图1—33b），方波的各次谐波可用傅氏级数的式（1—5）进行解析计算。设输入幅值 $A = 1$ ，计算所得的各复系数 c_k 的值为

$$\begin{cases} c_0 = 1/2, \\ c_k = -j1/\pi k, \quad k = 1, 3, 5, \dots, \\ c_k = 0, \quad k = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (1-116)$$

输出与输入的各次谐波 c_k 的比值就是所求的对象频率特性 $G(jk\Omega)$ ，见表1—4第二列。

为了比较，将表1—4的各点 $G(jk\Omega)$ 标在图1—35中。图中实线为根据式（1—114）求得的理论频率特性。从图可见，两者几乎重合。

从频谱分析的角度来看，表明了象本例中的应用场合，取32点的DFT就可以得到满意的结果。

从频率特性的测试来说，本方法是简便而有效的。但是

表1—4

输出的频谱和对象的频率特性

K	$C_k = F(k) / 32$	$G(jk\Omega)$
0	0.5000	1
1	$0.2971 \angle 237.6015^\circ$	$0.9334 \angle -32.9985^\circ$
3	$0.0647 \angle 133.2069^\circ$	$0.6089 \angle -86.7040^\circ$
5	$0.0229 \angle 147.1255^\circ$	$0.3587 \angle -122.5745^\circ$
7	$0.0100 \angle 122.4121^\circ$	$0.2199 \angle -147.5876^\circ$
9	$0.0050 \angle 102.3984^\circ$	$0.1414 \angle -167.6016^\circ$
11	$0.0023 \angle 83.0111^\circ$	$0.0968 \angle -186.9889^\circ$
13	$0.0016 \angle 59.4609^\circ$	$0.0653 \angle -210.5391^\circ$
15	$0.0011 \angle 24.4931^\circ$	$0.0518 \angle -245.5069^\circ$

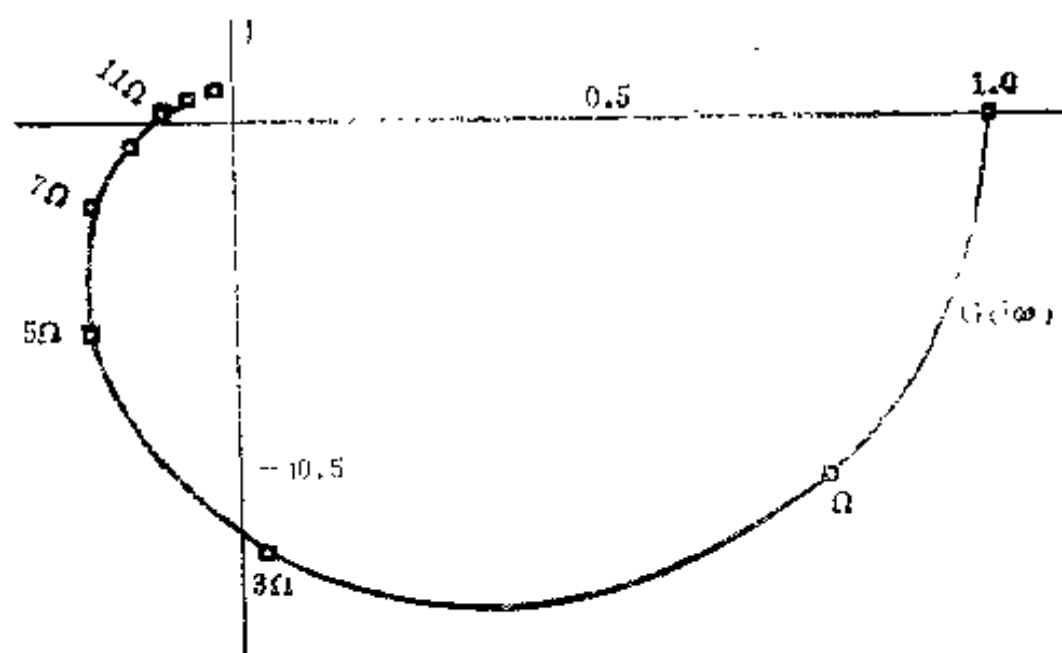


图1—35 频率特性

应该注意到这里的分析仅仅是理论上的。而对于实际应用，从式（1—116）可以看到，输入信号的第七次谐波就已经很小了。因此七次以上的数据实际上是不可信的。这就是说，此法主要适合于测定对象的低频数学模型。

比较一下表1—2就可以看到，对脉冲输入信号，在所测的频段上各次谐波都有相当大的幅值，因此测定结果是比较精确的，是可信的。

参 考 文 献

1. И.马可：系统理论方法——频谱变换及其应用（冯锡标译），人民教育出版社，1981年。
2. P.Faure, M.Depuyrot: Elements of System Theory, North-Holland, 1977.
3. П/Р Б. К. Чемоладова: Математические Основы Теории Автоматического Регулирования, Том I, Высшая школа, 1977.

第二章 输入信号和跟踪误差

控制系统设计时首先要研究作用在系统上的各种信号，因为它们决定了所要设计的系统的基本特性。

作用在系统上的信号并不是单一的。例如，以输入端的信号来说，这里除了所要求跟踪的有用信号外，常伴随有各种干扰，或者说噪声。此外，在系统的其他地方也常作用有各种干扰，使系统的输出偏离输入。对控制系统的设计要求就是要求其输出能很好地复现输入中的有用信号，至于干扰或者噪声就不应出现在输出端，即应受到抑制。所以，我们首先要知道对这些不同信号的描述方法以及它们对系统的影响，在这个基础上才能解决系统的设计问题。

这一章，先说明有用信号，即不伴有噪声的理想输入，以及在这输入作用下的系统的跟踪误差。

一、输入信号的分析

线性理论把系统看作是线性的，这时输入信号的幅值大小是无所谓的。但是设计实际系统时就得弄明白输入信号的具体数值，这样才能正确选用元件和保证所要求的特性。所以，在说明输入信号的时候还应该说明其幅值大小、它的变化率以及二阶或高阶的导数。

设计时，一般选一典型的信号作为理想输入来进行分析。这个典型是怎么确定的呢？

首先，是根据该系统所预定要执行的任务来确定。例如，一防空雷达，其目的是要对抗来袭的敌机而不是防御雷达站本身，即认为敌机的目标并不是雷达站。因此，对这种雷达随动系统，应考虑目标的通过路线，理想情况就是设目标以等速、等高、直线通过。我们应该根据这个理想的通过路线来分析方位角和高低角信号，并把它们作为该随动系统的理想输入信号。

其次，也应该指出在确定典型输入时总是要对实际情况作一些简化，以便于分析和计算。

下面以随动系统常会遇到的一些工作条件为例，来说明如何对理想输入进行分析并提取必要的参数。

1. 舰用随动系统的输入信号

图 2—1 a 是海船摇摆的一段典型曲线。严格说来，这个运动是随机的，图 2—1 b 是其功率谱密度曲线。不过从频谱上可以看到，该信号是集中在一个比较窄的频段上的，因此，舰船上各种设备的输入信号往往都用一个正弦型的信号来描述，

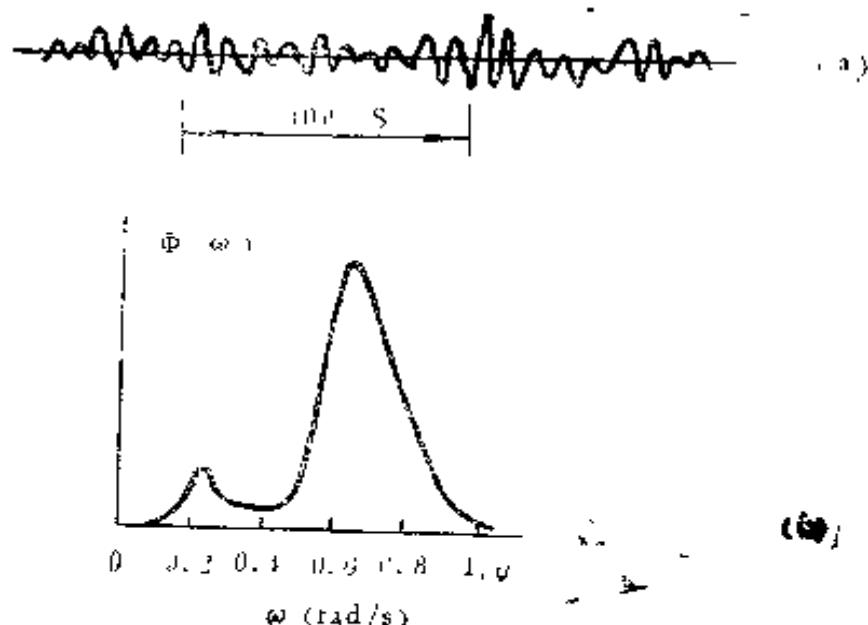


图2—1 海船的摇摆特性

设摇摆角为 $\pm 20^\circ$ ，周期为10s，那么这个信号就可以写作

$$\theta(t) = \theta_{max} \sin \omega t \quad (2-1)$$

式中

$$\theta_{max} = 20^\circ$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T = 0.628\text{s}^{-1}$$

从式(2-1)可得对应的角速度和角加速度为

$$\dot{\theta}(t) = \theta_{max} \omega \cos \omega t = \dot{\theta}_{max} \cos \omega t \quad (2-2)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\theta_{max} \omega^2 \sin \omega t = -\ddot{\theta}_{max} \sin \omega t \quad (2-3)$$

式中

$$\dot{\theta}_{max} = 12.6^\circ/\text{s}$$

$$\ddot{\theta}_{max} = 7.9^\circ/\text{s}^2$$

式(2-1) ~ (2-3)表征了这类输入的特性，见图2-2。这些随时间而变化的特性是今后设计系统时的依据。

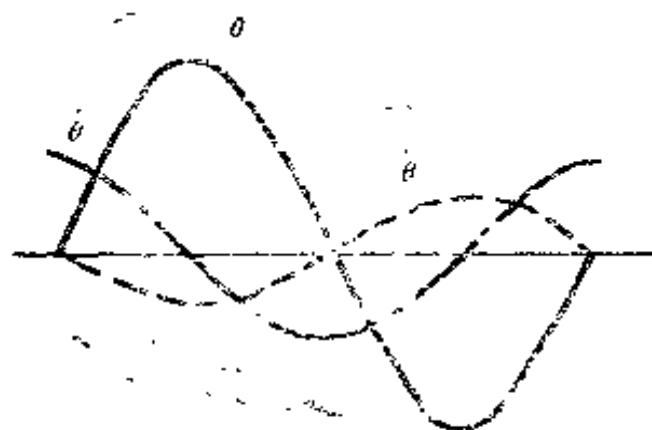


图2-2 正弦型信号

2. 跟踪直线飞行目标的伺服系统的输入

现在来考虑目标以等速、等高、直线通过时跟踪站的方

方位角和高低角的输入信号（图2—3）。

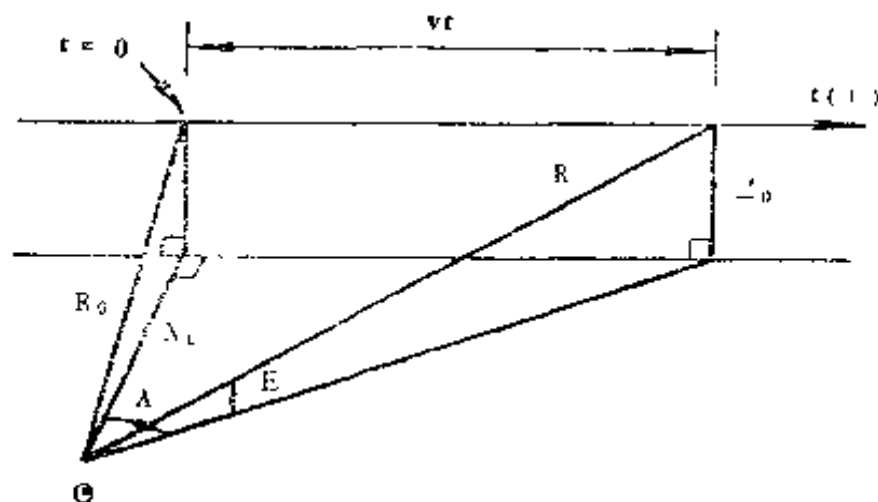


图2—3 跟踪等高飞行目标的角度关系

设跟踪站位于点O，跟踪以等速V，等高 Z_0 作直线飞行的目标。渡越点的水平距离为 X_0 。根据几何关系可得

$$A = \operatorname{tg}^{-1} \frac{Vt}{X_0} = \operatorname{tg}^{-1} at \quad (2-4)$$

$$E = \operatorname{tg}^{-1} \frac{Z_0/X_0}{\sqrt{1 + (Vt/X_0)^2}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{\sqrt{1 + (at)^2}} \quad (2-5)$$

式中

$$a = V/X_0$$

$$b = Z_0/X_0$$

对式（2—4）求导，得

$$\frac{dA}{dt} = a \cos^2 A \quad (2-6)$$

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = -a^2 \sin 2A \cos^2 A \quad (2-7)$$

图2—4所示为对应的方位角的角速度和角加速度的变化特性。图中角加速度的最大值为

$$\ddot{A}_{max} = 0.65a^2 \quad (2-8)$$

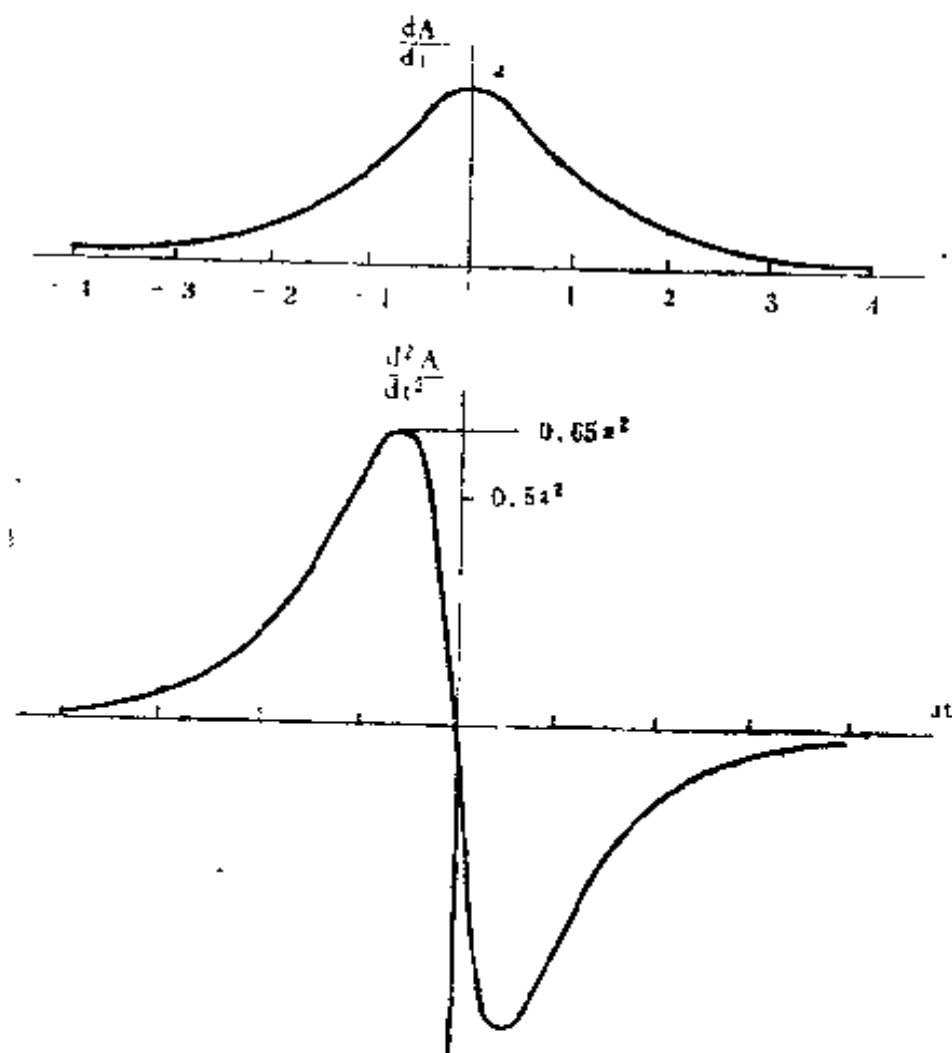


图2—4 方位角变化特性

同对方位角的运算一样，也可得高低角的角速度和角加速度如下：

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{a^2 b t}{[1 + (at)^2]^{\frac{3}{2}}} \cos^2 E$$

$$= -\frac{V}{R} \sin A \sin E \quad (2-15)$$

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = -\frac{V^2}{R^2} \operatorname{tg} E [1 - \sin^2 A (1 + 2 \cos^2 E)] \quad (2-16)$$

式中 R = 斜距。

根据上述分析可知，即使是很明显的直线等高 等速 飞行，跟踪角速度和角加速度都不是常值，跟踪误差也将是一个随时间而变化的量。

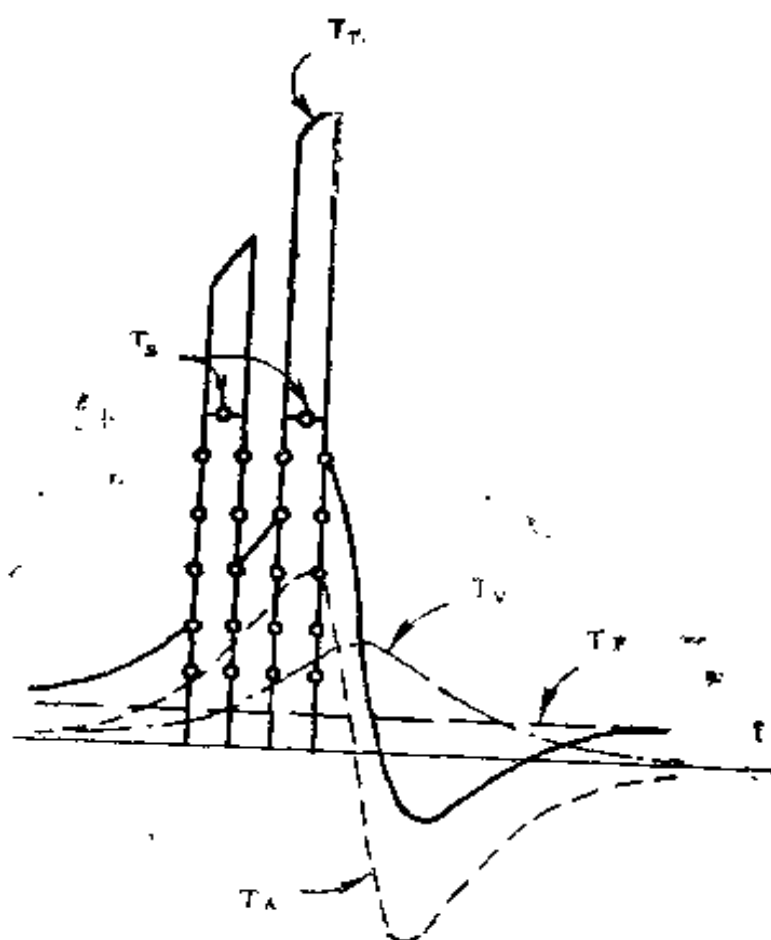


图2—5 跟踪过程中的力矩分量

T_A —加速度力矩； T_V —速度力矩；
 T_F —摩擦力矩； T_S —冲击力矩；
 T_T —总负载力矩

以后还要专门来谈跟踪误差的计算问题。这里要指出的是分析输入信号的速度、加速度等等变化特性不仅仅用于计算跟踪误差等的动态设计，而且我们在实际设计系统时也要根据这些特性曲线来选用元件或确定元件的线性范围。

现以确定执行电机所需的力矩为例来说明之〔1〕。设系统的输入信号如图2-4所示。这实际上也是跟踪时系统的输出变化特性。由此可以算得与各分量有关的各力矩，如图2-5所示。图中还附加了两个可能的冲击力矩(T_s)，这些力矩的总和(T_T)就表示了该系统在实际工作时所要克服的负载力矩，可以据此来选用执行电机。

上面举例说明了如何根据系统的实际工作情况来分析其输入信号。这些信号可以是如上所述用解析式来表示，也可以直接用图解曲线来表示。若为图解曲线，则其导数就用图解法（差分）来求取〔1〕。我们要求知道输入信号及其各阶导数的随时间而变化的特性。今后将根据这些特性曲线来求系统的跟踪误差。

现在再来分析输入信号的频谱，这也是系统设计时要考虑的一个内容。我们仍以上面讨论过的方位角信号为例来分析。已知方位角的变化为

$$A(t) = t g^{-1} a t$$

设 $a = 0.5 \text{ rad/s}$ ，图2-5a所示即为此方位角的变化特性。显然这 $A(t)$ 不是一绝对可限函数，不能直接进行傅氏变换。对于这类信号，一般可以从其速度特性着手来进行分析。图2-5b为其速度变化特性 dA/dt 。本例中可以认为此曲线在 $\pm 16s$ 以外为零，因此可以对这段曲线作离散傅里叶变换。

现数据长度 $T = 32s$ ，所以对应的 Ω 为

$$\Omega = 2\pi/T = 0.1963 \text{ rad/s}。 \quad (2-11)$$

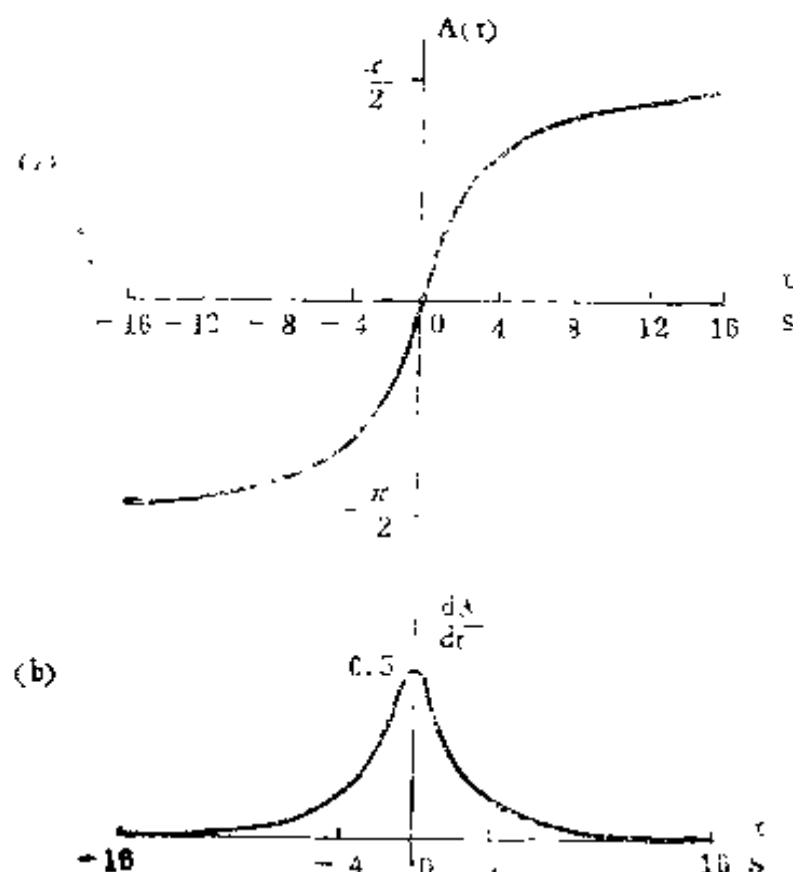


图2—6 方位角变化实例

取 $N = 32$ ，求得此32点DFT后再乘以 $\Delta t = 1$ s〔见式(1—84)〕就得到此速率信号的频谱特性值 $\dot{A}(j\omega_k)$ ， $\omega_k = k\Omega$ 。表2—1列出了其前9点的值。图2—7为对应的频谱特性。

有了方位角速度的频谱特性 $\dot{A}(j\omega)$ ，就可以来求方位角变化 $A(t)$ 的频谱 $A(j\omega)$

$$|A(j\omega)| = \left| \frac{\dot{A}(j\omega)}{\omega} \right| \quad (2-12)$$

应该说明的是 dA/dt 是 $A(t)$ 的导数，故 dA/dt 中不包括 $A(t)$ 中常值分量的信息。因此根据式(2—12)算得的频谱 $A(j\omega)$ 将不包含直流，即 $\omega = 0$ 处的脉冲分量 $\delta(\omega)$ 。这个直流分量不影响我们这里的讨论。

表2—1中的第二列就是根据式(2—12)所算得的方位

表2—1 dA/dt 和 $A(t)$ 的频谱

K	$ \dot{A}(j\omega_k) = \Delta t F(k) $	$ A(j\omega) , \omega = k\Omega$
0	2.8886	∞
1	2.1540	10.9720
2	1.4185	3.6122
3	0.9761	1.6571
4	0.6460	0.8225
5	0.4472	0.4555
6	0.2926	0.2484
7	0.2064	0.1502
8	0.1312	0.0835

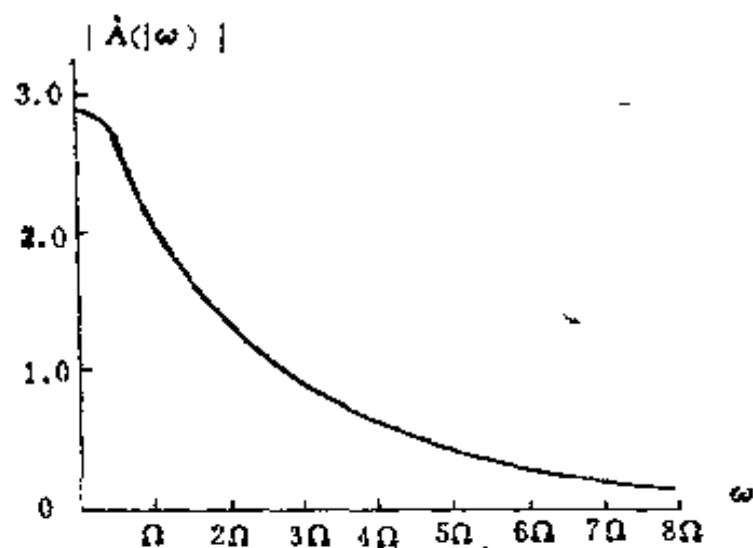


图2—7 方位角速度的频谱特性

角的频谱，图2—8为对应的频谱特性。从图可见，本例中方位角信号的频谱分布在 $\omega = 8\Omega = 1.57 \text{ rad/s}$ 以内，或者说在 0.25Hz 以内。这个数据将是进一步分析方位角随动系统的依据^①。

① 根据此信号来处理频谱设计问题的例子也可参阅文献〔2〕。

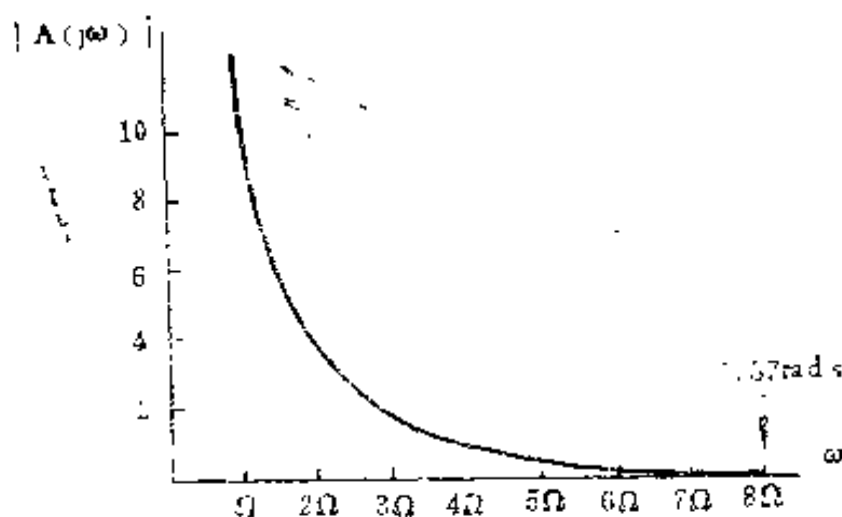


图2—8 方位角信号的频谱特性

二、静态误差系数

现在来研究输入信号作用下的系统的跟踪误差。这一节先从最简单的信号着手，即位置信号、速度信号和加速度信号。

对于这些信号，不同系统的跟踪性能是不一样的。一般按照所能跟踪的信号的形式将系统分成 0 型、I 型、II 型等等。

系统的这种类型是与其开环传递函数中积分环节的数目有关的。例如，设开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s^\gamma} \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2-13)$$

则式中的 γ 的值就代表了系统的型号： $\gamma = 0$ 者称 0 型， $\gamma = 1$ 者称 I 型，……。

我们先来说明 K 。 γ 值不同时，式 (2—13) 中增益 K 的

纲量和意义是不一样的。

设 $A(0) = 1$, $B(0) = 1$, 则当 $\gamma = 0$ 时, K 表示了输出与输入的比例关系, 是无量纲的。这时的 K 称为比例系数, 并用 K_p 来表示之。

当 $\gamma = 1$ 时, K 的量纲为 秒^{-1} , 这时的 K 称为速度系数, 用 $K_v \text{秒}^{-1}$ 来表示。当 $\gamma = 2$ 时, K 的量纲为 秒^{-2} , 这时的 K 称为加速度系数, 用 $K_a \text{秒}^{-2}$ 来表示。

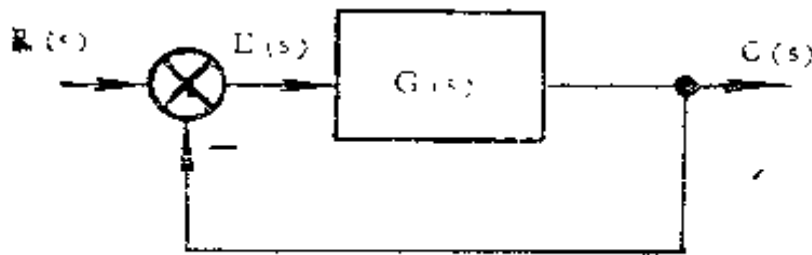


图2—9 随动系统

各型系统的稳态误差可计算如下:

设我们讨论的是图2—9所示的随动系统。

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} \quad (2-14)$$

根据终值定理, 系统的稳态误差为

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \quad (2-15)$$

现结合下列三种输入信号来观察系统的稳态误差。

位置输入: $r(t) = 1(t)$, $R(s) = 1/s$;

速度输入: $r(t) = t \cdot 1(t)$, $R(s) = 1/s^2$;

加速度输入: $r(t) = \frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$, $R(s) = 1/s^3$ 。

将式 (2—13) 代入 (2—15)，对应不同的 $R(s)$ 计算系统的稳态误差，列于表2—2内。注意到计算中所用的输入函数都是单位函数，因而算得的这个稳态误差实际上应看作是系统的误差系数。它们表示了系统的误差与常值输入（位置、速率、加速度）的比值。

表2—2 静态误差系数

系统的类型	γ	低频部分的 $G(s)$	静态误差系数		
			位 置	速 度	加 速 度
0	0	K_p	$1/(1+K_p)$	∞	∞
I	1	K_v/s	0	$1/K_v$	∞
II	2	K_a/s^2	0	0	$1/K_a$

常值的稳态误差一般叫静态误差。所以表2—2的误差系数就叫做静态误差系数 Θ 。也有人将这个系数定义为稳态误差与常值输出的比值，这时表2—2中的位置误差系数为 $1/K_p$ ，而速度误差系数与加速度误差系数则在这两个定义下都是一样的。这样，所谓静态误差系数实际上就是比例系数、速度系数和加速度系数等等的倒数，是对这些系数的另外一种解释。

有了静态误差系数的概念就可以在一定的条件下来计算跟踪误差。但是现在这个概念太窄了，还需要将它推广到更一般的情形。

Θ 有些教科书中将这些系数的倒数定义为相应的静态误差系数。

三、动态误差系数

现在来分析系统在实际跟踪过程中的误差。理论上，只要已知系统的运动方程，这个实际的跟踪过程总是可以求解的。但是在工程上一般希望能较快地得到结果（虽然带有一定的近似程度），然而更重要的是我们希望跟踪误差能与系统的开环传递函数直接联系起来，这样就可以根据对系统的精度要求直接来设计传递函数了。为此在这里引入动态误差系数的概念。

我们将跟踪过程中的误差看作是由输入信号中的位置、速度、加速度等等分量引起的，各项误差与相应分量的比例系数就称为动态误差系数。

这也就是说将误差信号 $e(t)$ 看作如式(2—16)所示的形式：

$$e(t) = C_0 r + C_1 \dot{r} + \frac{C_2}{2!} \ddot{r} + \frac{C_3}{3!} r^{(3)} + \dots, \quad (2-16)$$

而式中 $C_0, C_1, C_2/2, \dots$ 就是相应的动态误差系数。

式(2—16)的拉氏变换式为

$$E(s) = C_0 R(s) + C_1 s R(s) + \frac{C_2}{2!} s^2 R(s) + \dots, \quad (2-17)$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = C_0 + C_1 s + \frac{C_2}{2!} s^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n s^n}{n!} \quad (2-18)$$

式(2—18)至少在 $|s|$ 很小时是收敛的。也就是说，幂级数(2—18)在 $s=0$ 的邻域内是收敛的，根据拉氏变换的概

念, $s \rightarrow 0$ 对应于 $t \rightarrow \infty$, 所以 t 大的时候式 (2-16) 才成立。这时才可以将误差看作是由与输入信号及其各阶导数成比例的各分量所组成。

现在再从频率域上来讨论。设输入信号为正弦

$$r(t) = A \sin \omega_0 t. \quad (2-19)$$

根据式 (2-16) 可写得

$$e(t) = A \left[\left(C_0 - \frac{C_2}{2!} \omega_0^2 + \frac{C_4}{4!} \omega_0^4 - \dots \right) \sin \omega_0 t + \left(C_1 \omega_0 - \frac{C_3}{3!} \omega_0^3 + \dots \right) \cos \omega_0 t \right] \quad (2-20)$$

可见, 这时的误差信号 $e(t)$ 也是正弦型的。其实这本来就是频率特性的概念。

$e(t)$ 的幅值为

$$|e| = A \sqrt{\left(C_0 - \frac{C_2}{2!} \omega_0^2 + \frac{C_4}{4!} \omega_0^4 - \dots \right)^2 + \omega_0^2 \left(C_1 - \frac{C_3}{3!} \omega_0^2 + \dots \right)^2} \quad (2-21)$$

上面所说的对 t 值取值的限制, 在这里就是限制 ω_0 值。 ω_0 值很小时, 只要 C_i 有界, 式 (2-21) 就是收敛的。因此, 只要输入信号的频谱处于低频段, 至少大部分是在低频段时就可以用式 (2-16) 来计算误差信号 $e(t)$ 。对于大多数实际应用的情况来说, 例如跟踪等速等高目标的方位角、高低角信号, 都能满足这个要求。

关于误差系数的进一步讨论将在下一节中结合误差的计算来进行, 这里先来计算 C_i 。

前面已经说过, 当 $s \rightarrow 0$ 时级数 (2-18) 是收敛的。所

以式中的系数可按泰勒级数公式来求取：

$$C_1 = \left(\frac{d^1}{ds^1} \frac{E(s)}{R(s)} \right)_{s=0} \quad (2-22)$$

式 (2—17) 和 (2—21) 一般收敛得相当快，所以，在计算误差时实际上只要看前面几项就可以了。具体地说，往往只要知道 C_0 ， C_1 ， C_2 就足够了。因此，不一定要根据式 (2—22) 来计算 C_1 ，将传递函数 $E(s)/R(s)$ 的分子分母直接相除取前面几项也就可以了。

设

$$G(s) = \frac{K}{s^v} \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} \quad (2-23)$$

则可写得

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{R(s)} &= \frac{1}{1 + G(s)} \\ &= \frac{s^v (1 + a_1 s + \dots + a_n s^n)}{s^v (1 + a_1 s + \dots + a_n s^n) + K(1 + b_1 s + \dots + b_m s^m)} \end{aligned} \quad (2-24)$$

表2—3列出了根据式 (2—24) 直接相除求得的前几项动态误差系数。

将表2—3与表2—2对比可以看到，I型系统的 C_1 就是它的静态速度误差系数，I型系数的 $C_2/2!$ 就是它的静态加速度误差系数。

除了解析计算以外，误差系数也可以从Bode图上求得。图2—10就是一个I型系统频率特性的低频部分特性图。我们知道， -20dB/dec 的延长线与 0dB 线的交点 ω_0 就是 K ，

表2—7

动态误差系数

C_1	I 型	I 型
C_0	0	0
C_1	$1/K$	0
$\frac{C_2}{2!}$	$\frac{a_1 + b_1}{K} - \frac{1}{K^2}$	$\frac{1}{K}$
$\frac{C_3}{3!}$	$\frac{1}{K^3} + 2 \frac{b_1 - a_1}{K^2} + \frac{b_1^2 - a_1 b_1 + a_2 - b_2}{K}$	$\frac{a_1 - b_1}{K}$

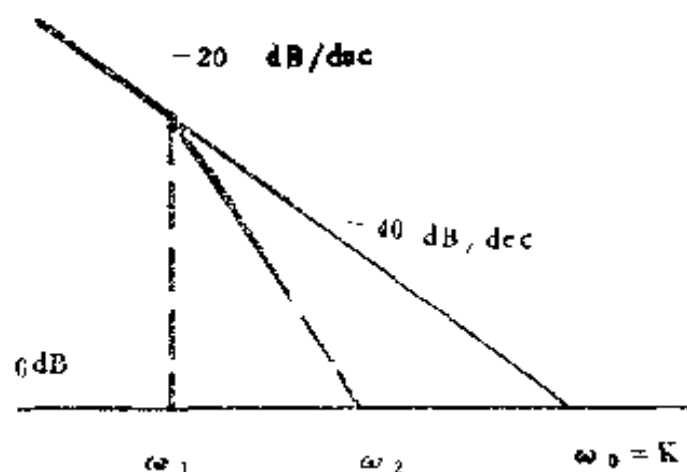


图2—10 I型系统的Bode图

因此可得误差系数 C_1 为

$$C_1 = 1/K \approx 1/\omega_0 \quad (2-25)$$

误差系数 C_2 则可以从 -40dB/dec 的延长线与 0dB 线的交点 ω_2 来求得。事实上，式(2—23)中的系数 a_1 可认为就反映在 ω_1 上， $\omega_1 \approx 1/a_1$ 。因此根据表2—3有

$$\frac{C_2}{2} \approx \frac{a_1}{K} = \frac{1}{\omega_1 \omega_0} = \left(\frac{1}{\omega_2} \right)^2 \quad (2-26)$$

若为I型系数(图2—11)，则就更简单了。这时 $C_0 =$

$C_1 = 0$ ，而 C_2 也可根据 -40 dB/dec 的延长线来求得。因为I型系统低频部分 -40 dB/dec 的延长线在 0 dB 线上的交点 ω_2 与增益 K 的关系为 $\omega_2 = \sqrt{K}$ ，所以根据表2—3得

$$\frac{C_2}{2} = \frac{1}{K} = \left(\frac{1}{\omega_2} \right)^2 \quad (2-27)$$

从上面的计算过程可以看到，无论是表2—3或Bode图，都已经把误差系数与开环传递函数联系到一起了。这样在设计开始阶段就可以来校验系统的跟踪误差，或者反过来，根据对跟踪误差的要求确定所设计的系统的基本参数。

四、跟踪误差的计算

本节先说明计算的一般方法，然后再用误差系数法进行比较，最后讨论跟踪误差的近似计算，以便于工程应用。

1. 卷积法

我们知道，系统的输入与输出之间满足卷积关系：

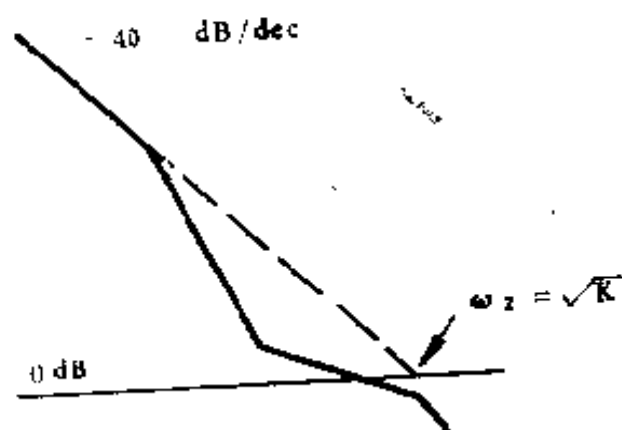


图2—11 I型系统的Bode图

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \triangleq h(t) * u(t) \quad (2-28)$$

可以利用此关系式来计算任意输入下的输出。不过具体计算时宜用数值法，这时要用卷积和来代替卷积：

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(k-n)u(n) \quad (2-29)$$

式中 $w(k)$ 是单位脉冲响应。注意到

$$W(k) = 0, k < 0$$

另外，系统的脉冲响应在有限时间后，实际上可视为零，即

$$w(k) = 0, k \geq N$$

或者说 $w(k)$ 具有一定的宽度 N ，这时式 (2—29) 可写成

$$x(k) = \sum_{n=k-N}^k W(k-n) u(n) \quad (2-30)$$

式 (2—30) 表明，当用数值法计算时，只要计算有限项，很是方便，甚至计算器也能算。图 2—12 表示了这个运算关系：对应点的坐标相乘，再相加，共总有 N 个点。

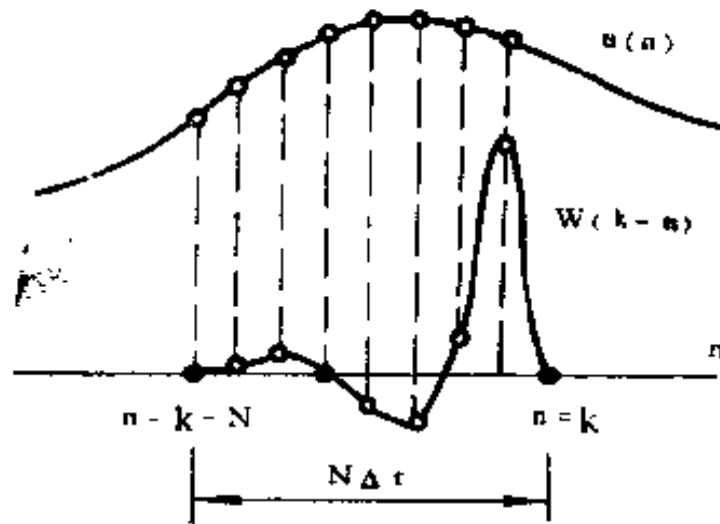


图2—12 卷积和的运算关系

但卷积和只是对离散信号才适用，因此，需要对原系统进行离散化。离散化的概念如图2—13所示，图中 $u(k)$ 和 $x(k)$ 表示输入和输出的离散值，只有在这两个离散序列间才存在卷积和关系。因为实际系统的输入是连续的，所以离散信号 $u(k)$ 后应有保持器以恢复此信号。保持器一般为零阶，零阶保持器不能完全恢复原信号 $u(t)$ ，其输出 $\hat{u}(t)$ 呈阶梯形（图2—14）。这个阶梯形的 $\hat{u}(t)$ 将带来计算误差。

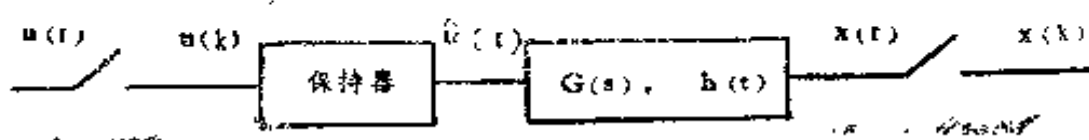


图2—13 信号的离散化

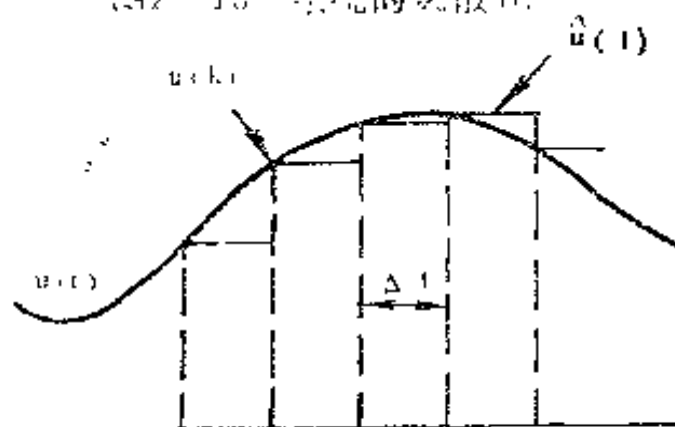


图2—14 $\hat{u}(t)$ 与原信号的关系

式 (2—29) 中的 $w(k)$ 就是此离散化系统的单位脉冲响应, 也就是当输入为

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

时系统的响应 $x(k)$ 。结合图2—13可以知道, 具体计算时, 就是计算当 $\hat{u}(t)$ 为 $1 \times \Delta t$ 的方波脉冲时的输出, 其离散值即为 $W(k)$ 。

〔例1〕 计算一小功率随动系统的跟踪误差。

设系统的特性已经作了初步设计, 其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s} \frac{Ts + 1}{Ts + 1} \quad (2-31)$$

式中

$$K = 500 \text{ s}^{-1}$$

$$T = 0.025 \text{ s}$$

$$\alpha T = 0.15 \text{ s}$$

对应的频率特性见图2—15中的曲线1。

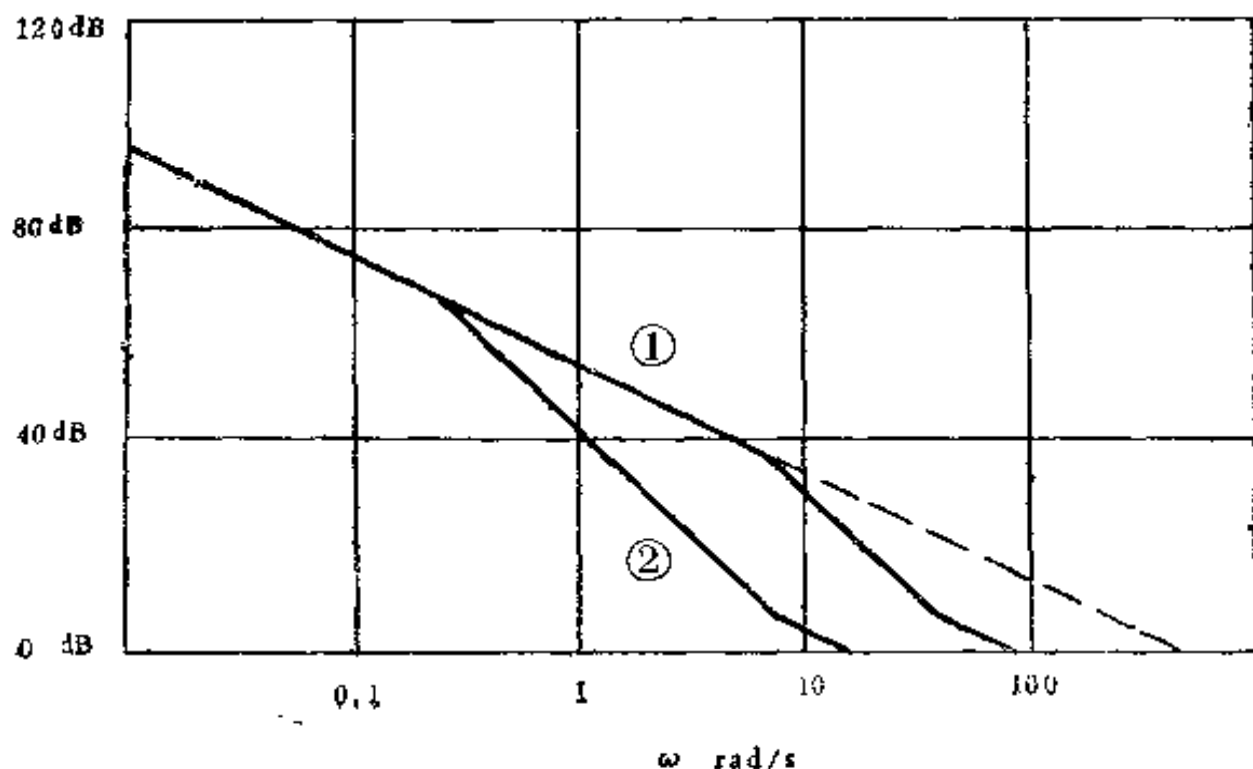


图 2—15 小功率随动系统的频率特性

设该系统跟踪一直线飞行的目标，其输入信号为

$$A(t) = t g^{-1} \frac{Vt}{X_0} = t g^{-1} \alpha t \quad (2-32)$$

本例中

$$V = 250 \text{ m/s},$$

$$X_0 = 500 \text{ m},$$

$$\alpha = V/X_0 = 0.5 \text{ s}^{-1}$$

dA/dt 和 d^2A/dt^2 的变化曲线见图2—4。

现在来计算跟踪误差。

我们知道，系统跟踪误差的最大值将出现在 dA/dt 的最大值附近，即 $t = 0$ 时刻前后。根据式 (2—32) 可以知道，此时

$$A(t) \approx at$$

因此,若欲用一零阶保持器来恢复其信号,则为了保证计算精度,计算所用的步距 Δt 就不能大。这样, $w(k)$ 的点数就要增多,加大了计算工作量。所以本例中取 $\dot{A}(t)$ 作为输入信号。

此系统的误差信号的传递函数为

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)} = -\frac{s(\alpha Ts+1)}{\alpha Ts^2 + (KT+1)s + K} \quad (2-33)$$

根据上式可写得

$$\frac{E(s)}{\dot{R}(s)} = -\frac{\alpha Ts+1}{\alpha Ts^2 + (KT+1)s + K} \quad (2-34)$$

现在取 $\Delta t = 0.01$ s,并设输入 $\dot{A}(t)$ 为 $1 \times \Delta t$ 的方波脉冲。根据式(2-34)可算得此时的输出 $e(t)$,其离散值就是所求的单位脉冲响应 $w(k)$,见图2-16。从图可见, $w(k)$ 的宽度为 $N = 20$ 。

根据这 $w(k)$,将 dA/dt 的各离散值依次代入式(2-30)中的输入 $u(n)$,就可算得跟踪误差的变化特性,见图2-17。本例中误差的最大值为

$$e_{\max} = 1.0064 \times 10^{-3} \text{ rad,}$$

2. 误差系数法

从例1可以看到,由于系统的单位脉冲响应的宽度是有限的,所以只要对20个数据进行运算就可以了。或者说本例中输入信号的影响只限于前0.2s就够了。因为0.2s以后的现在,过渡过程已经结束,所以可以有另一种计算误差的方

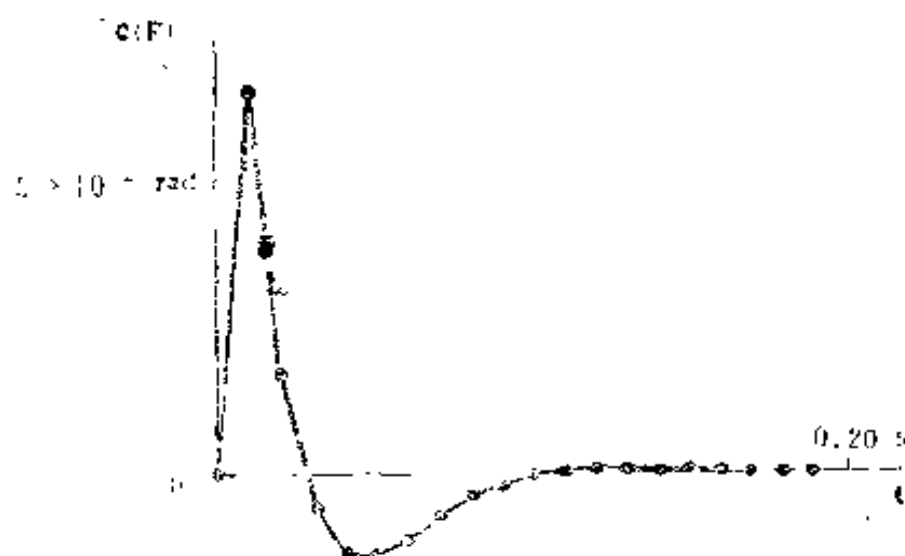


图 2-16 单位脉冲响应

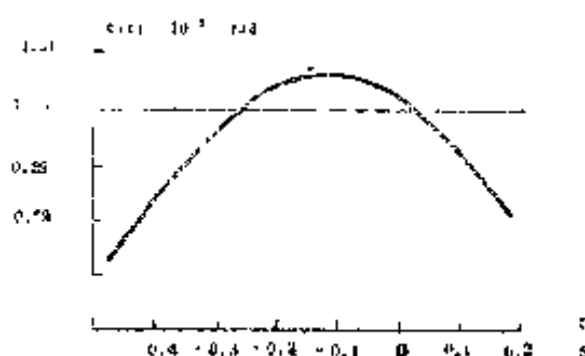


图 2-17 跟踪误差

法，即用稳态的概念来计算现在这一时刻的误差：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ C_0 r + C_1 \dot{r} + \frac{C_2}{2!} \ddot{r} + \dots \right\} \quad (2-35)$$

至于输入信号，则只要前推 $0.2s$ 。而在 $0.2s$ 这么窄的时间内输入信号一般都可有限项来逼近，例如

$$r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \quad (2-36)$$

式中 a_0 、 a_1 和 a_2 均为常数。

对应的各阶导数为

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}(t) &= a_1 + 2a_2 t \\ \ddot{r}(t) &= 2a_2 \\ \dddot{r}(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-37)$$

将式 (2-37) 代入 (2-35)，并考虑到本例中 $C_0 = 0$ ，可得跟踪误差的计算式为

$$e(t) = C_1 \dot{r} + \frac{C_2}{2!} \ddot{r} \quad (2-38)$$

式 (2-38) 仅由两项构成。由此可见，我们可以用稳态的概念，并用有限项来计算误差。

例如例1中系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s} \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \quad \circ$$

系统的误差系数为

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 1/K = 1/500 = 2 \times 10^{-3} \text{ s} \\ \frac{C_2}{2!} &= \frac{a_1}{K} - \frac{b_1}{K^2} = \frac{1}{K^2} = 0.25 \times 10^{-3} \text{ s}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2-39)$$

将式 (2-39) 代入 (2-38) 就可以来计算该系统的跟踪误差了。

例如，根据式 (2-6) 和 (2-7) 可知 $t = -0.1\text{s}$ 时，输入信号的 \dot{r} 和 \ddot{r} 值为

$$\begin{aligned} \dot{r} &\approx 0.4988 \text{ rad/s} ; \\ \ddot{r} &= 0.0249 \text{ rad/s}^2 \circ \end{aligned}$$

代入式 (2-38) 就可得该时刻的跟踪误差为

$$e(-0.1) = (2 \times 0.4988 + 0.25 \times 0.0249) \quad 10^{-3} \text{rad} \\ = 1.0037 \quad 10^{-3} \text{rad}。$$

前面用卷积法算得的 $t = -0.1\text{s}$ 时的跟踪误差为

$$e(-0.1) = e_{\text{max}} = 1.0064 \quad 10^{-3} \text{rad}。$$

由此可见，用稳态误差的概念来计算，虽有误差，但准确度还是很高的。

上面所讨论的就是动态误差系数法。这里 $t \rightarrow \infty$ 的条件实际上就是系统的单位脉冲响应的宽度。只要在这个宽度内输入信号可用式(2—36)那样的有限项来逼近，那么就可以用有限项误差系数来计算跟踪误差。大多数实际系统在实际应用中都能满足这个条件，因此都可以用动态误差系数来计算跟踪误差。这个方法虽有误差，但使用方便，而且更主要的是将跟踪误差与系统的参数直接联系在一起，便于系统的设计。

〔例2〕用动态误差系数法计算例1中的跟踪误差、式(2—39)是该系统的误差系数，图2—1是输入信号的

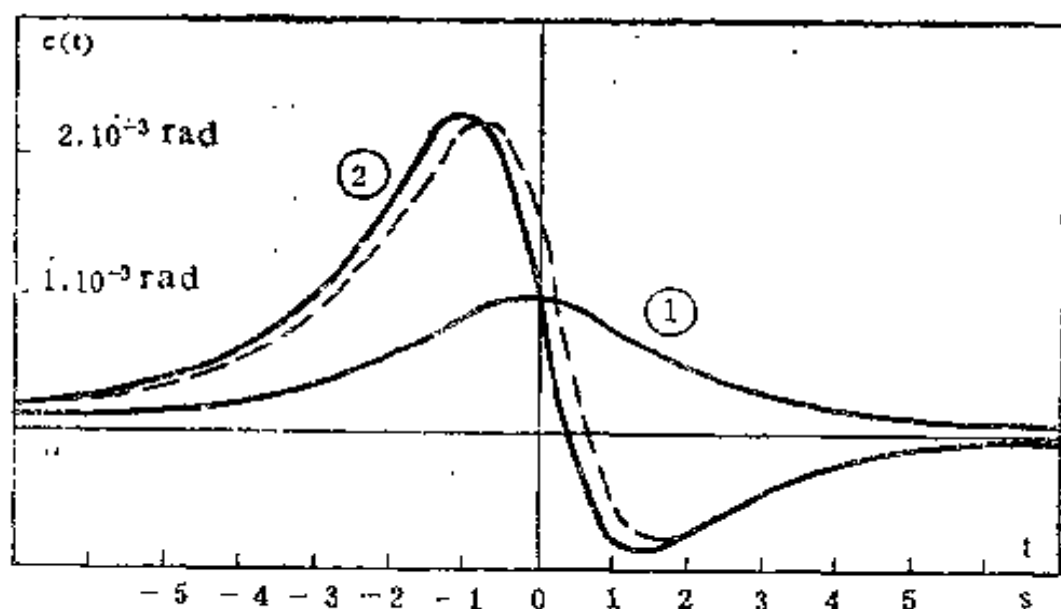


图2—18 跟踪误差 $e(t)$ 的变化曲线

一阶和二阶导数。将这些数据代入式(2—38)就可得跟踪误差 $e(t)$ 的变化曲线,见图2—18曲线1。表2—4所列是两种方法所算得的部分结果。两者是很接近的,在图2—18中已无法区分开来。

表2—4 跟踪误差的比较

t (s)	卷 积 法	误 差 系 数 法
	e 10^{-3} rad	e 10^{-3} rad
-0.4	0.9853	0.9847
-0.3	0.9972	0.9959
-0.2	1.0043	1.0024
-0.1	1.0064	1.0037
0	1.0033	1.0
0.1	0.9951	0.9913

作为比较,下面再对一假想的,非正常设计的窄带宽系统进行分析。

设系统的传递函数仍为式(2—31),且 $K=500\text{s}^{-1}$ 。所不同的是现在取

$$\begin{aligned} T &= 0.15 \text{ s}, \\ \tau &= 5 \text{ s}. \end{aligned} \quad (2-40)$$

对应的频率特性见图2—15中特性2。

此系统所对应的误差系数为

$$\begin{aligned} C_1 &= 1/500 \text{ s}, \\ C_2/2! &= 9.7 \times 10^{-3} \text{ s}^2. \end{aligned} \quad (2-41)$$

将式(2—41)代入式(2—38)得跟踪误差 $e(t)$ 的变化曲线,见图2—18曲线2。图中同时绘有用卷积法求得的精确解(虚线)。本例中此两方法所得的结果就有差别了,不过这主要

表现为时间滞后，即真正的 $e(t)$ 滞后于用误差系数所求得的近似解。两者的峰值分别为：

理论计算值 $2.2684 \times 10^{-3} \text{ rad}$

误差系数法 $2.3529 \times 10^{-3} \text{ rad}$

跟踪误差在最大值上的差别小于4%。

图2-19就是此窄带宽系统的单位脉冲响应 $w(k)$ 。

计算中所用的步距为 $\Delta t=0.1\text{s}$ 。这个脉冲响应的宽度已达1.5s，较原来的0.2s宽度(图2-16)大7倍，所以用误差系数来算的计算误差就比较大了。但即使如此，仍能满足工程计算的要求。

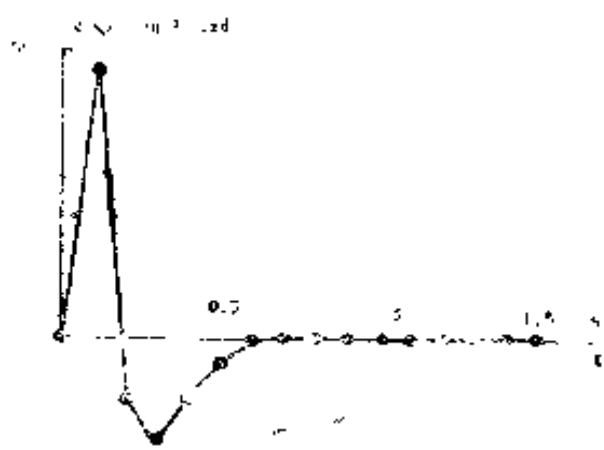


图2-19窄带宽系统的单位脉冲响应

3. 误差系数法的频域解释

现在再从频域上来讨论跟踪误差的计算问题。图2-8是本例中方位角信号的频谱，它主要处于 $\omega < 1.57 \text{ rad/s}$ 的频段上。将这个频谱与图2-15的系统频率特性相对比可以看到，输入信号的频谱并没有超出系统的带宽，而且对原设计的系统来说（图2-15曲线1），信号频谱完全处于系统的低频段，低于第一个转折频率。因此对于这样的输入信号，可以用低频数学模型代替实际系统来计算跟踪误差。

对于低频，误差信号的传递函数可近似为

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)} \approx \frac{1}{G(s)} \quad (2-42)$$

对例1的系统来说，

$$G(s) = \frac{k}{s} \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

故得

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(\alpha Ts+1)}{K(Ts+1)} \quad (2-43)$$

式(2-43)也可写成

$$\frac{E(s)}{sR(s)} = \frac{\alpha Ts+1}{K(Ts+1)} \quad (2-44)$$

图2-20所示就是对应式(2-44)的频率特性。由于输入信号的频谱是处于低频段,因此计算误差信号时可以只用图2-20特性的前半段。这就是说式(2-44)可以进一步简化为

$$\frac{E(s)}{sR(s)} \approx \frac{1+\alpha Ts}{K} = \frac{1}{K} + \frac{\alpha T}{K} s \quad (2-45)$$

式(2-45)就是此系统的低频模型。

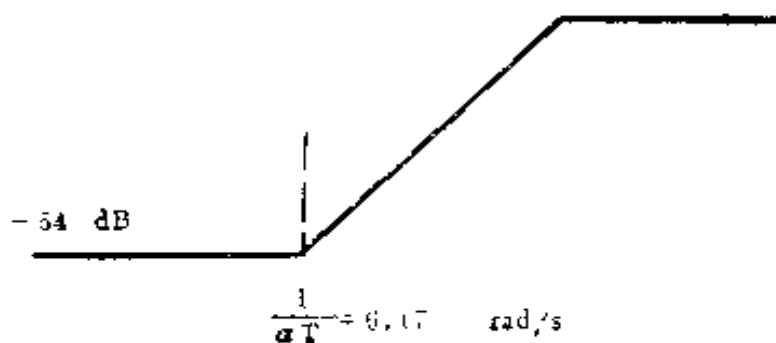


图2-20 低频模型

若运算过程中事先不作简化,那么系统的这个低频数学模型可以根据 $E(s)/sR(s)$ 的分子分母多项式直接相除,取前几项来求得,即

$$\frac{E(s)}{sR(s)} \approx C_1 + \frac{C_2}{2!} s \quad (2-46)$$

式中 C_1 , $C_2/2!$ 就是系统的动态误差系数。

所以从频域上来说, 当输入信号的频谱分布在低频段时, 就可以用低频的数学模型来代替实际系统, 而动态误差系数就是这低频模型中的各次系数。

有了这个概念以后, 就可以从频域上来讨论用动态误差系数计算跟踪误差的准确性问题了。当输入信号频谱的主要部分处于系统的低频段, 低于第一个转折频率时, 系统的特性确实可以用低频模型来代替, 这时计算的精度就很高, 如例1和表2—4所示。假如信号的频谱延伸到中频部分, 这时低频数学模型就不足以描述系统了, 计算的精度也就差了。

4. 跟踪误差的简化计算

下面再来说明进一步简化计算的问题。图2—20是I型系统低频部分的特性。若能保证输入信号的频谱处于系统的低频段, 低于第一个转折频率, 那么只要考虑这转折频率前的特性就够了。也就是说只要考虑式(2—46)的第一项。这时系统的低频模型将简化为

$$\frac{E(s)}{sR(s)} = C_1 \quad (2-47)$$

对应的时间函数之间的关系为

$$e(t) = C_1 \dot{r}(t) \quad (2-48)$$

这一点从图2—18也可以看到, 图中曲线1基本上与 $\dot{A}(t)$ (图2—4) 一致。

注意到式(2—48)中的 C_1 等于I型系统的静态速度误差系数, 即 $C_1 = 1/K_v$ 。现在看起来好象是用静态误差系数来计算跟踪误差, 其实还是动态误差系数的概念, 只是取了第一项。

对于II型系统, 也有类似的关系式。因为II型系统的

$C_0 = C_1 = 0$, 故跟踪误差可写成

$$e(t) \approx \frac{C_2}{2!} \ddot{r} = \frac{1}{K_2} \ddot{r} \quad (2-49)$$

这个 $C_2/2!$ 也是 I 型系统的静态加速度误差系数。

式 (2-48) (2-49) 表明, 系统的跟踪误差 $e(t)$ 也可用静态误差系数来算 (当然要满足上面所说的条件)。这些公式使用方便, 也很容易记忆。我们在设计中常用这些简化公式来确定系统的一些基本参数。

〔例 3〕设目标速度 $V = 2400 \text{ km/h}$, 最短水平距离 $X_0 = 2740 \text{ m}$, $a = V/X_0 = 0.244 \text{ s}^{-1}$ 。

方位角的变化特性如图 2-4 所示, 其最大速度为

$$\dot{A}_{\max} = a = 0.244 \text{ rad/s}$$

最大加速度为

$$\ddot{A}_{\max} = 0.65a^2 = 0.039 \text{ rad/s}^2 = 2.235^\circ/\text{s}^2$$

设要求跟踪误差小于 $3'$ 。

若选用 I 型, 则根据式 (2-49) 可以看到, 系统的最大误差出现在 \ddot{A}_{\max} 的时候。根据此式可以确定系统的增益 K_2 为

$$K_2 > \frac{\ddot{A}_{\max}}{e_{\max}} = 44.7 \text{ s}^{-2}$$

式中

$$e_{\max} = 3' = 1/20 \text{ 度}$$

这一章说明了系统的输入信号和跟踪误差, 并讨论了跟踪误差的各种计算方法。由于动态误差系数法计算方便, 而且将误差和系统的开环特性联系在一起, 所以一般都用此法来计算跟踪误差。为了正确理解和使用这个方法, 本章从时

域和频域上对动态误差系数作了充分的讨论，还进一步说明了近似计算的问题。我们看到，若近似计算的条件得到满足，那么跟踪误差还可以用静态误差系数来算，那就更简单了。

参 考 文 献

1. H.Chestnut, R.W.Mayer: Servomechanisms and Regulating System Design, vol. I, 1955.
2. 王广雄：快速傅里叶变换及其在系统设计中的应用，信息与控制，v.10 (1981)，No.2.

第三章 噪声和它所引起的误差

除输入的有用信号外，设计时需要考虑的第二个因素就是噪声和干扰。一般说来，噪声和干扰都是随机信号，对随机信号就要用相关函数和谱密度来进行描述。本章第三、四节从应用的角度对相关函数和谱密度作了说明。第五、六节说明随机信号作用下系统的误差及其计算方法。而第二节则是对一些要用到的概率论中的概念作最低限度的说明。

一、引言

前面已说过，除有用的输入信号外，设计时要考虑的第二个因素就是噪声和干扰，也就是外加信号。

这外加信号往往与输入信号伴随在一起。例如有一个垂直仪。它由加速度计和伺服平台所组成（图3—1）。加速度计是提供垂线的指向误差 θ 的。但是这加速度计也同样会反映实际存在的水平加速度。因此小偏差下加速度计的实际输出将是

$$y = \theta + n。 \quad (3-1)$$

式中的 n 就是由于水平加速度引起的干扰信号，它与指向误差信号 θ 混在一起作用于平台。

有些输入元件本身也会引入这种外加信号，例如一些电子设备中由于电子的热运动引起的噪声电压。又例如当用自整角机传递角度信息时交流载波信号也是一种外加信号。

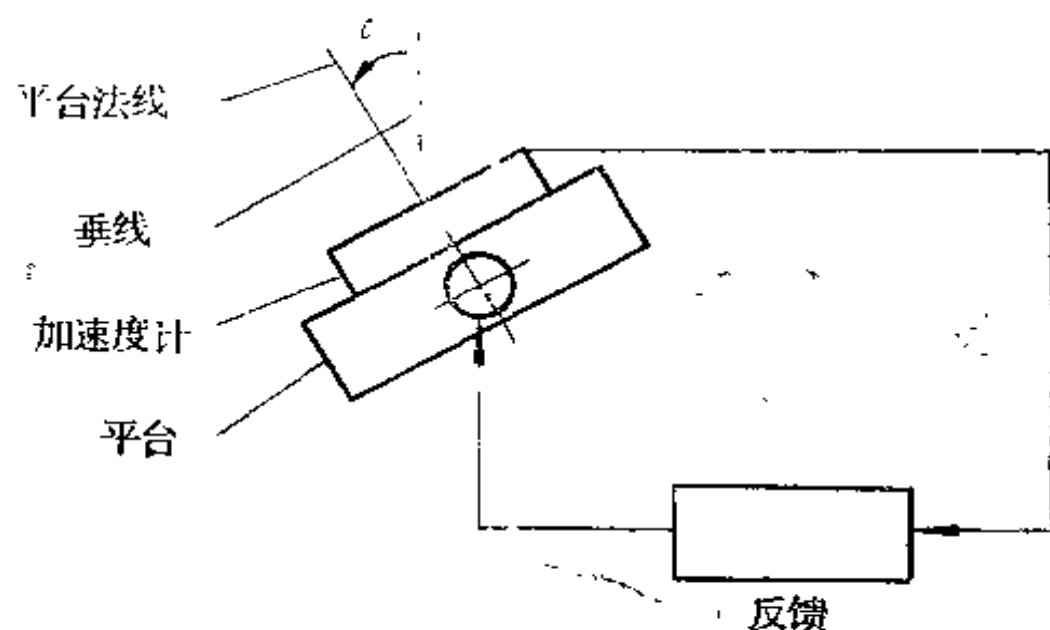


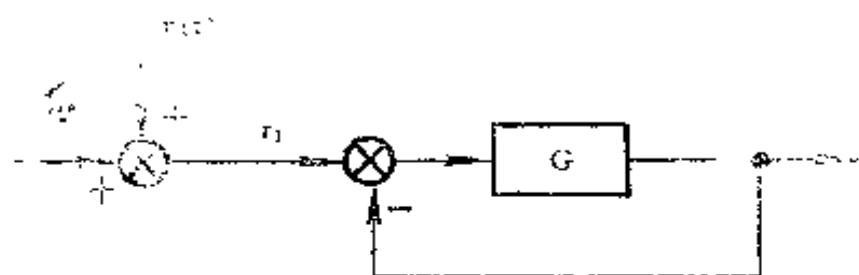
图3-1 垂直仪原理图

另外，由于测量不精确而带来的信号误差也相当于一种外加信号。

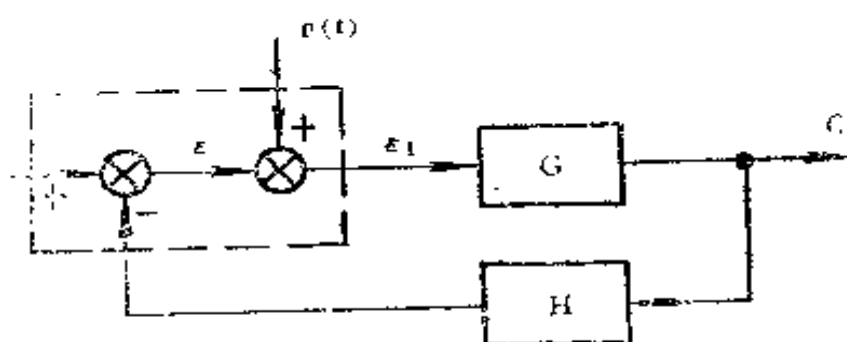
上面列举的都是作用在输入端，叠加在理想输入信号上的外加信号。图3-2所示就是这种外加信号在具体系统中的作用情况，它可能是与输入信号一起加到系统上来的（图3-2a），也可能是与误差信号混在一起的（图3-2b）。这种信号犹如通讯中的噪声一样不受欢迎，所以控制工作者常把这类外加信号称作“噪声”。

除了输入端的噪声外，系统的其他点上也有外加信号，后者统称为干扰。这些干扰是客观存在的，自动控制的任务就是要在干扰作用下使系统的输出量维持在所希望的值上。这些干扰包括负载的变化，电源的波动，基座的运动（例如在运动物体上）等等。

这些噪声和干扰一般说来都是随机信号。这一章就是要研究这些随机信号对系统的影响。我们先要说明如何描述这些信号的统计特性，然后来计算这些信号所引起的误差。



(a)



(b)

图 3—2 系统中的外加信号

r_1 —实际的输入信号；

e_1 —测到的误差信号；

n —噪声

二、正态随机变量和 正态随机向量

1. 正态随机变量

一个正态随机变量的概率密度函数（图3—3）是

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (3-2)$$

式中的 m 是其平均值。

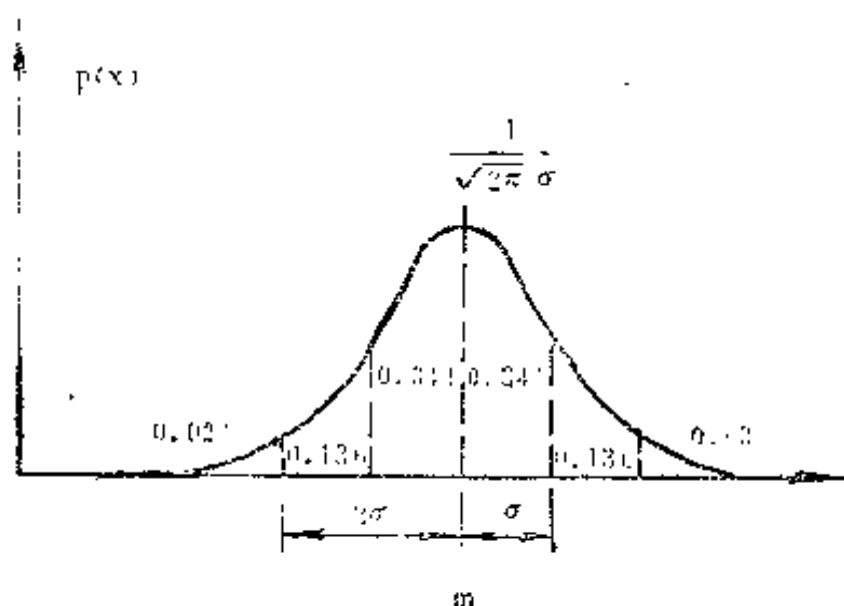


图3—3 正态密度函数

这里概率密度函数表示了随机变量 X 出现在 x 和 $x + dx$ 之间的概率：

$$P(x \leq X < x + dx) = p(x) dx \quad (3-3)$$

所以 $p(x)$ 下的面积表示了随机变量取值的概率：

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b p(x) dx \quad (3-4)$$

结合正态分布来讲，从 m 到 $m + \sigma$ 下的面积根据式（3—4）可以算得为0.341，说明 $m \leq X < \sigma + m$ 的概率是0.341。图3—3中分别标上了各段的面积（概率）。现将图中的数据归纳如下：

$$\begin{aligned} P(|X - m| < \sigma) &= 0.6827 \\ P(|X - m| < 2\sigma) &= 0.9545 \\ P(|X - m| < 3\sigma) &= 0.9973 \end{aligned} \quad (3-5)$$

从上面的数据中可以看到，对于正态随机变量，有99.73%的把握说它不会超出 3σ （相对于平均值 m 而言）。这个 3σ 的

概念在实践中也是很有用的。

上面我们看到了概率密度函数完全说明了一个随机变量的统计特性。实际应用时一般不直接用此概率密度函数，而是用几个能表征其分布的特征数据（称作矩）：

（1）平均值或数学期望（一阶矩）

$$m = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (3-6)$$

（2）方差（二阶中心矩）

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E[(X-m)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 p(x)dx \end{aligned} \quad (3-7)$$

将式(3-2) 代入 (3-7) 可得

$$\text{Var}[X] = \sigma^2 \quad (3-8)$$

根据上面对 σ 的分析可以知道，这个方差表征了随机变量在其平均值 m 周围的离散程度。

一般说来还有其他一些用来表征随机变量概率分布的特征数据。不过对正态分布来说，用这两个数据就足够了，见式(3-2)。正态分布常记为 $N(m, \sigma^2)$ 。

2. 正态随机向量

除了一维的以外，工程上也常遇到多维的随机变量。当用向量来表示时就叫做随机向量 $\mathbf{X} = [X_1 X_2 \cdots X_k]^T$ 。随机向量的各分量都是一维的随机变量。

多维随机变量的特性要用联合概率密度来说明。例如，对二维来说，两个随机变量 X_1 和 X_2 分别同时出现在 x_1 和 $x_1 + dx_1$ 以及 x_2 和 $x_2 + dx_2$ 之间，其概率是 $p(x_1, x_2)dx_1 dx_2$ 。这个 $p(x_1, x_2)$ 称为联合概率密度函数。对于 k 维随

机变量来说，其联合概率密度函数就是 $p(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 或 $p(\mathbf{x})$ 。

与一维的情形一样，随机向量也是用一些特征数据来表征其概率分布的。这些数据称为联合矩。常用的矩有：

(1) 均值 (一阶矩)

$$m_i = E[X_i], \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3-9)$$

或者写成向量

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_k \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

(2) 协方差 (二阶中心矩)

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \text{cov}[X_i, X_j] = E[(X_i - m_i)(X_j - m_j)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)(x_j - m_j) p(x_i, x_j) dx_i dx_j, \end{aligned} \quad (3-11)$$

$i, j = 1, 2, \dots, k.$

当用矩阵来表示时，这个矩阵称为协方差阵

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ r_{12} & r_{22} & \dots & r_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{jk} & r_{2k} & \dots & r_{kk} \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

虽然还有高阶的联合矩，不过若为正态随机向量，则 \mathbf{m} 和 \mathbf{R} 就完全表征了其统计特性。事实上，其联合概率密度函数完全由 \mathbf{m} 和 \mathbf{R} 所确定：

$$p(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-k/2} (\det \mathbf{R})^{-1/2} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m})\right\} \quad (3-13)$$

对二维来说, $k=2$,

$$\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}.$$

可得二维的联合概率密度函数为

$$p(x_1, x_2) = \left(2\pi\sqrt{r_{11}r_{22} - r_{12}^2}\right)^{-1} \exp\left\{-\frac{r_{22}(x_1 - m_1)^2 - 2r_{12}(x_1 - m_1)(x_2 - m_2) + r_{11}(x_2 - m_2)^2}{2(r_{11}r_{22} - r_{12}^2)}\right\} \quad (3-14)$$

三、相关函数

1. 相关函数

现在来看随机过程。这就是与时间有关的随机变量 $X(t)$ (图3—4)。

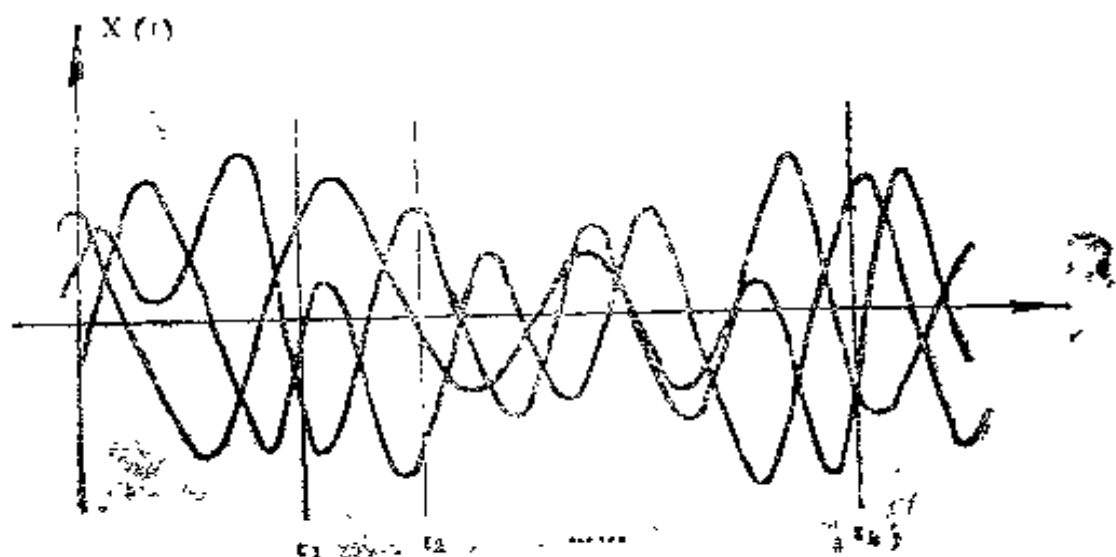


图3—4 随机过程

若 t 固定, 例如 $t = t_k$, 那么随机过程在这个断面上就成了一个随机变量。若我们看 k 个断面: $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$ 。那么, 就得到了一个 k 维的随机变量。这样, 一个随机过程可以近似地当作多维随机变量来看待。要完全给定这个随机过程, 就要知道所有的 k 维联合概率密度函数

$$p(x_1, x_2, \dots, x_k; t_1, t_2, \dots, t_k)$$

当然对正态分布来说, 知道均值向量 \mathbf{m} 和协方差阵 \mathbf{R} 就够了。

因此, 对正态随机过程来说, 要求知道这两个函数:

(1) 均值函数

$$m(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, t) dx \quad (3-15)$$

(2) 协方差函数

$$\begin{aligned} r(t_1, t_2) &= \text{cov} [X(t_1), X(t_2)] \\ &= E [X(t_1) - m(t_1)] [X(t_2) - m(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m(t_1))(x_2 - m(t_2)) \\ &\quad \times p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (3-16)$$

这是因为若 $m(t)$ 和 $r(t_1, t_2)$ 已知, 那么, k 维随机变量 $X(t_1), \dots, X(t_k)$ 的均值向量

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_k \end{pmatrix} \quad (3-17)$$

和协方差阵

$$R = \begin{pmatrix} r(t_1, t_1) & r(t_1, t_2) & \cdots & r(t_1, t_k) \\ r(t_1, t_2) & r(t_2, t_2) & \cdots & r(t_2, t_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(t_1, t_k) & r(t_2, t_k) & \cdots & r(t_k, t_k) \end{pmatrix} \quad (3-18)$$

就总是可以求得的。

现在再把讨论局限于平稳随机过程。这是指统计特性并不随时间而变化的过程。对平稳随机过程来说，其均值函数是常数

$$m(t) = m = \text{const.} \quad (3-19)$$

而其协方差函数则仅与时间的差值有关

$$r(t_1, t_2) = r(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2. \quad (3-20)$$

若 $m(t) = m = 0$ ，那么协方差函数还可写作

$$r(\tau) = E[X(t)] [X(t + \tau)] \quad (3-21)$$

用 $R(\tau)$ 表示 $X(t)X(t + \tau)$ 的均值，即

$$\begin{aligned} R(\tau) &= EX(t)X(t + \tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (3-22)$$

这个 $R(\tau)$ 称为相关函数。相关函数就是均值为零时的协方差函数。由此可见，相关函数表征了一个零均值的平稳随机过程的统计特性。

下面来说明相关函数的物理意义。

这里要讨论的就是协方差。为此我们来研究一个三维的正态随机向量

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

已知它的联合概率密度函数为式 (3-14) 所示。

$X(t_1)$ 的概率密度函数可根据此式 (3-14) 算得

$$\begin{aligned} p(x_1) &= \int p(x_1, x_2) dx_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma_{11}} e^{-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\Gamma_{11}}} \end{aligned} \quad (3-24)$$

根据条件概率密度的公式

$$p(x_2 | x_1) = \frac{p(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{p(x_1)} \quad (3-25)$$

将式 (3-14)、(3-24) 代入式 (3-25) 可得

$$\begin{aligned} p(x_2 | x_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2/\Gamma_{11}}} \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{[x_2 - m_2 - (x_1 - m_1)\Gamma_{12}/\Gamma_{11}]^2}{2(\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2/\Gamma_{11})} \right\} \end{aligned} \quad (3-26)$$

将式 (3-26) 与 (3-2) 对比可以知道：正态随机向量的一个分量对另一个分量的条件分布仍然是正态的，其均值为

$$m = m_2 + \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{11}} (x_1 - m_1) = m_2 + \rho (x_1 - m_1) \quad (3-27)$$

方差为

$$\sigma^2 = r_{22} - \frac{r_{12}^2}{r_{11}} = r_{22} - \rho^2 r_{11} \quad (3-28)$$

式中

$$\rho = r_{12}/r_{11} \quad (3-29)$$

设我们讨论的是零均值的平稳随机过程，这时

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= m_2 = 0 \\ r_{12} &= \text{cov}[X(t_1), X(t_2)] \\ &= EX(t_1)X(t_1 + \tau) = R(\tau) \\ r_{11} &= \text{cov}[X(t_1), X(t_1)] = R(0) = \overline{X^2} \\ r_{22} &= \text{cov}[X(t_2), X(t_2)] = R(0) = \overline{X^2} \end{aligned} \right\} \quad (3-30)$$

将 r_{11} 和 r_{12} 的值代入式(3-29)得

$$\rho(\tau) = R(\tau)/R(0) \quad (3-31)$$

式(3-31)表明， $\rho(\tau)$ 就是归一化的 $R(\tau)$ 。下面就通过 $\rho(\tau)$ 来说明相关函数的含意。

将式(3-30)代入式(3-27)和式(3-28)得条件均值和方差为

$$m = \rho x_1 \quad (3-32)$$

$$\sigma^2 = (1 - \rho^2) \overline{X^2} \quad (3-33)$$

从式(3-32)、(3-33)可以看到，当 $\rho \rightarrow 1$ 时，若 t_1 时刻时， $X(t_1)$ 为 x_1 ，则 t_2 时刻 $X(t_2)$ 的均值也接近 x_1 ，而且其分布的方差 $\sigma^2 \rightarrow 0$ （图3-5a）。当 $\rho \rightarrow 0$ 的时候，则 t_1 时刻的值对 t_2 时刻基本上没有影响，见图3-5b。

由此可见，相关函数表示了相距为 τ 时刻的随机变量 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 间的联系。 $\rho \rightarrow 1$ 表示将来值与现时刻的值差不多相等， $\rho \rightarrow 0$ 则表示两者基本上无联系。

〔例〕设

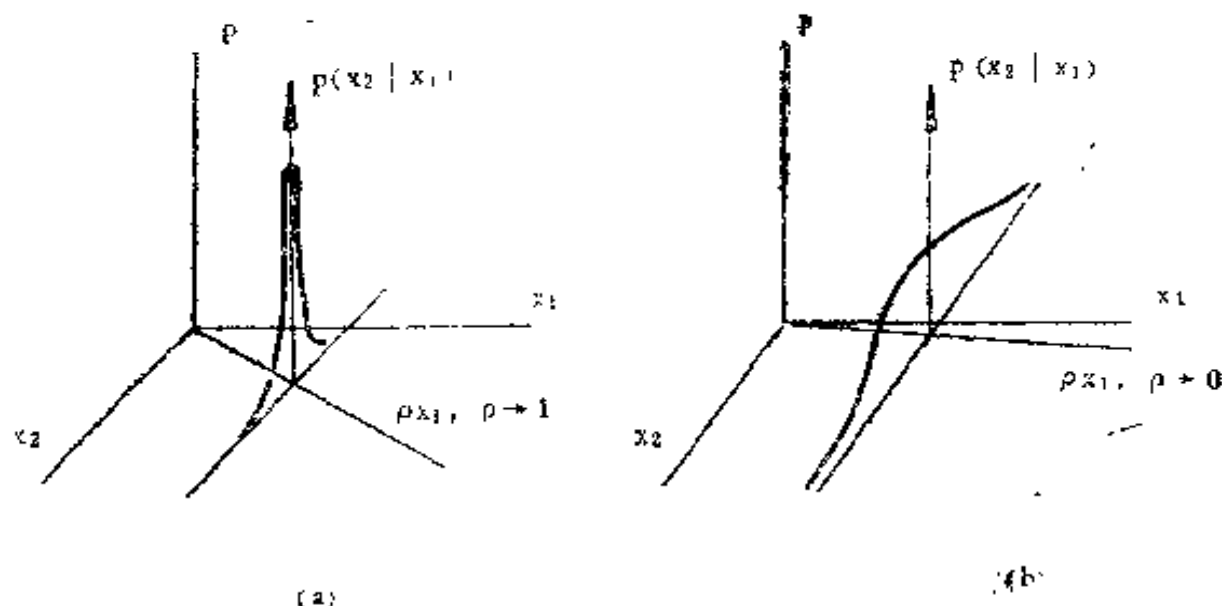


图3-5 相关性的说明

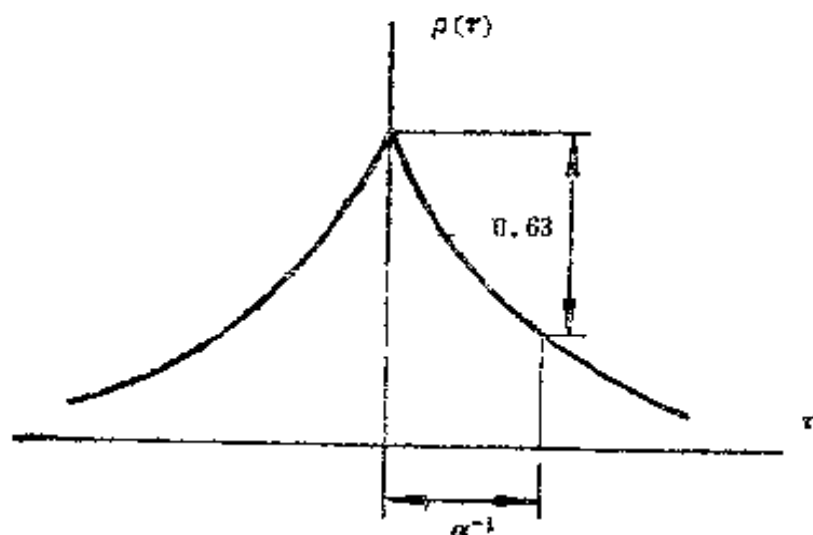


图3-6 相关函数举例

$$\rho(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \quad (3-34)$$

$\rho(\tau)$ 的图形见图3-6。当 $\tau = \alpha^{-1}$ 时，

$$\rho(\tau) = e^{-1} = 0.37$$

代入式 (3-32) (3-33) 得

$$m = 0.37x_1$$

$$\sigma^2 = (1 - \rho^2)\bar{x}^2 = (0.93)^2 \bar{x}^2。$$

此时标准差 σ 已相当大，接近于该随机过程本身的 σ ，这表

明将来值与现时刻值的联系已相当弱了。或者说这时预测的精度已很低了。因此,对于式(3—34)这种类型的随机过程来说,我们常说 α^{-1} 是一个可以预测的间隔,并称 α^{-1} 为相关时间。

2. 相关函数的计算

按照定义,相关函数为

$$R(\tau) = E X(t) X(t + \tau)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \quad (3-35)$$

这就是相距为 τ 的两个时刻上的量相乘的集合平均。根据各态历经假设,平稳随机过程的时间平均等于集合平均,故相关函数又可写成

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt \quad (3-36)$$

这样,就可以取随机过程中任意一个时间函数,用式(3—36)的时间平均的概念来计算相关函数了。

具体计算时都采用数值计算法。这时 $x(t)$ 取离散值,而且因为实际上的 T 不可能为 ∞ , 所以离散化的计算公式应该是

$$\begin{aligned} R(\tau) &= R(n\Delta t) \\ &= \frac{1}{M-n} \sum_{l=0}^{M-n-1} x(l\Delta t) x[(l+n)\Delta t] \end{aligned} \quad (3-37)$$

这里数据的长度是 $M\Delta t$ 。 $M\Delta t$ 应该大于 $x(t)$ 中最长周期的10倍,或者是 $R(\tau)$ 几乎为零时的 τ 值的10倍。而采样间隔

Δt 则要小于 $x(t)$ 中最短周期的 $1/4$ 。一般可凭肉眼来大致判断随机信号中变化快的分量和变化慢的分量的周期。

为了便于书写，式(3—37)中的时间变量今后将只写序号，即写成

$$R(n) = \frac{1}{M-n} \sum_{l=0}^{M-n-1} x(l)x(l+n) \quad (3-38)$$

当数据的点数 M 不太多的时候，一般就直接用式(3—38)来计算相关函数。若点数很多，则可用FFT算法来减少计算量。下面就说明这个方法。

事实上，相关计算与卷积有关，所以先来说明离散傅里叶变换的卷积性质。

设已知离散序列 $x(l)$ 和 $y(m)$ ，它们对应的离散傅里叶变换分别为

$$X(k) = \text{DFT}[x(l)] = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) e^{-jlk2\pi/N} \quad (3-39)$$

$$Y(k) = \text{DFT}[y(m)] = \sum_{m=0}^{N-1} y(m) e^{-jmk2\pi/N} \quad (3-40)$$

现在来看这两个离散傅里叶变换的乘积所对应的时间序列 $q(n)$

$$q(n) = \text{IDFT}\{\text{DFT}[x(l)] \cdot \text{DFT}[y(m)]\} \quad (3-41)$$

将式(3—39) (3—40)代入，得

$$q(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{jkn2\pi/N} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{l=0}^{N-1} x(l) e^{-jlk2\pi/N} \sum_{m=0}^{N-1} y(m) e^{-jmk2\pi/N} \\
& = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(l) y(m) \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk(n-l-m)2\pi/N} \right]
\end{aligned}
\tag{3-42}$$

式 (3-42) 方括号内的指数项是周期函数, 因此可以证明:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{N-1} e^{jk(n-l-m)2\pi/N} \\
& = \begin{cases} N, & \text{当 } n-l-m \equiv 0 \pmod{N} \\ 0, & \text{当 } n-l-m \not\equiv 0 \pmod{N} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3-43}$$

$n-l-m \equiv 0 \pmod{N}$ 的条件就是 $m = n-l \pmod{N}$, 只有这些 m 值才能使式 (3-42) 不为零。所以式 (3-42) 最后可写成

$$q(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) y[(n-l) \bmod N] \tag{3-44}$$

式 (3-44) 中的 $m = n-l \pmod{N}$ 是指 $n-l$ 不论为何值, m 总是在 $0 \sim (N-1)$ 之间循环。这也就是说, 式 (3-44) 中的 $y(n-l)$ 是以周期函数的形式出现的, 周期为 N 。图3-7d表示了式 (3-44) 的这个相乘求和关系。

注意到一般卷积和公式

$$q'(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) y(n-l) \tag{3-45}$$

的相乘关系如图3-7c所示。所以式 (3-44) 和一般的卷积不同, 这里信号首尾相接, 好似其尾部又缠了回来。故式 (3-44) 称为循环卷积或圆卷积。循环卷积是离散傅里叶变换的

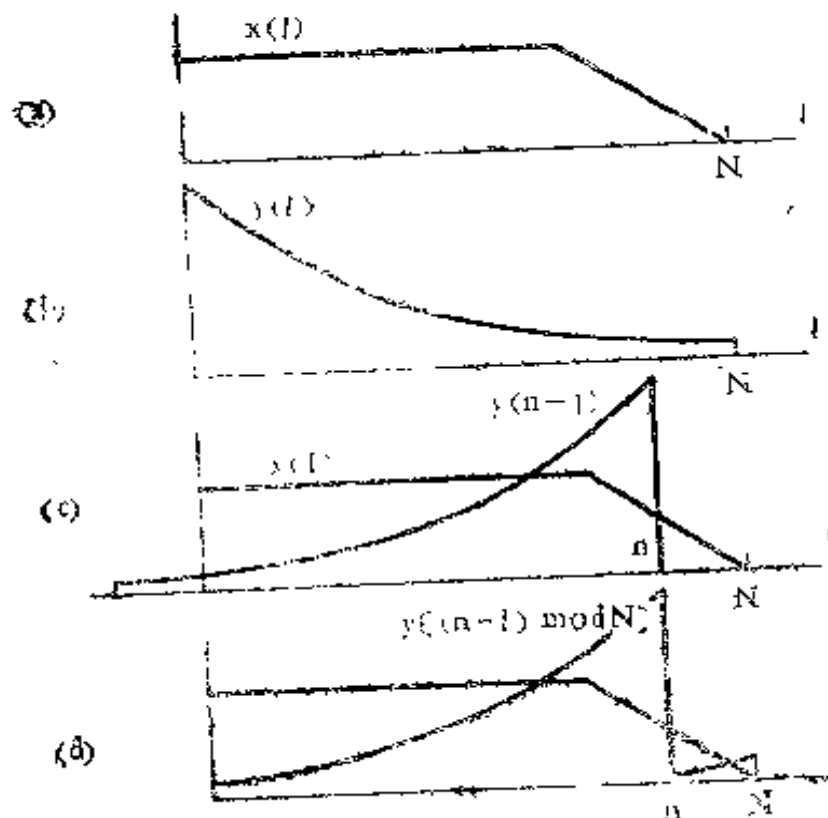


图3—7 圆卷积与一般卷积的比较

一个重要性质。要是用循环卷积来计算一般的卷积，就得在信号后面再补充零，用零来加长原信号，以消除上述的尾部效应。

现在来看相关函数的计算。设相关函数为

$$r(n) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-n-1} x(l)x(l+n) \quad (3-46)$$

这里设信号的长度为 M 。

式(3-46)与卷积计算式比较仅差一符号。这对变换式来说就是求其共轭，因此有

$$r(n) = \text{IDFT} \left\{ \frac{1}{M} \text{DFT} [x(l)]^* \cdot \text{DFT} [x(l)] \right\}$$

$$= \text{IDFT} \left\{ \frac{1}{M} | \text{DFT} |^2 \right\} \quad (3-47)$$

式中 * 号表示是DFT的共轭复数。

式(3-47) 的证明如下:

$$\begin{aligned} & \text{IDFT} \left\{ \frac{1}{M} \text{DFT} [x(l)]^* \cdot \text{DFT} [x(m)] \right\} \\ &= \frac{1}{M} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{jkn2\pi/N} \sum_{l=0}^{N-1} x(l) e^{jl k 2\pi/N} \\ & \quad \times \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-jmk2\pi/N} \\ &= \frac{1}{M} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(l) x(m) \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk(n+l-m)2\pi/N} \right] \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{N-1} x(l) x[(n+l) \bmod N] \end{aligned} \quad (3-48)$$

由此可见, 若对 $x(l)$ 补充零, 以消除圆卷积的尾部效应, 那么, 式(3-48) 所计算的就是相关函数(3-46)。这就是式(3-47)。

现将利用式(3-47)来计算相关函数的具体步骤归纳如下:

(1) 设原数据长为 M , 将这序列补上 M 个零, 得一长度为 $N=2M$ 的新序列 $f(n)$ 。

(2) 用FFT算法, 计算此 $f(n)$ 的离散傅里叶变换 $F(k)$ 。

(3) 计算 $F(k)$ 的模的平方并除以 M

$$S = \frac{1}{M} |F|^2 \quad (3-49)$$

(4) 再用FFT算法, 计算 S 的IDFT得

$$\{r(n), n=0, 1, \dots, M\}。$$

这里要指出的是, 随机信号分析中所用的相关函数为

$$R(n) = \frac{1}{M-n} \sum_{l=0}^{M-n-1} x(l) x(l+n)。$$

(3-50)

这在算得上面的 $r(n)$ 后, 再算一步, 便可求得:

$$R(n) = \frac{M}{M-n} r(n) \quad (3-51)$$

若 M 很大, 而 n 相对较小时, 则 $r(n)$ 与 $R(n)$ 的差别是很小的, 也可以不加修正。

从上面的介绍中可以看到, 相关函数的计算, 实际上就是调用现成的FFT程序, 整个计算程序非常简单。

四、谱 密 度

1. 谱密度

若对随机信号进行频谱分析, 这时就要用谱密度这个概念。

先取出随机过程中的一个时间函数 (称标本函数) $x(t)$ 来进行研究。我们只取中间一段, 并使其两端为零, 即取

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T \leq t \leq T, \\ 0, & \text{其他 } t. \end{cases} \quad (3-52)$$

现在这个 $x_T(t)$ 的傅氏变换是存在的：

$$\begin{aligned} X_T(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (3-53)$$

$T \rightarrow \infty$ 时， $\frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2$ 的极限值叫做这个函数 $x(t)$

的谱密度 $\phi(\omega)$ ，即

$$\phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2 \quad (3-54)$$

一个随机过程的谱密度则是所有这些标本函数谱密度的集合平均：

$$\phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \overline{|X_T(j\omega)|^2} \quad (3-55)$$

式中波纹号表示集合平均。

对平稳随机过程来说，集合平均和按其中任一个函数来求的 $\phi(\omega)$ 应该是一样的，所以按式 (3-54) 或 (3-55) 来算都是可以的。

现在来看谱密度与相关函数的关系。这里仍用式 (3-52) 所定义的 $x_T(t)$ 来推导。

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T-\tau} x(t) x(t+\tau) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) x_T(t+\tau) dt \\
&= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) \left[\frac{1}{2\pi} \right. \\
&\quad \times \left. \int_{-\infty}^{\infty} X_T(j\omega) e^{j\omega(t+\tau)} d\omega \right] dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(-j\omega) X_T(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega
\end{aligned}$$

对上式求集合平均，得

$$\frac{2T-\tau}{2T} R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} \left[\widetilde{X_T(j\omega)} \right]^2 e^{j\omega\tau} d\omega.$$

(3-56)

当 $T \rightarrow \infty$ 时，上式就成为

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

(3-57)

式 (3-57) 表明，谱密度 $\phi(\omega)$ 就是相关函数 $R(\tau)$ 的傅氏变换，即

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

(3-58)

根据式 (3-57) 还可写成

$$R(c) = \bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi f) d f$$

3-59)

式 (3-59) 表明，一个随机过程的均方值等于谱密度函数 ϕ 沿整个频率轴的积分。

有些书中把均方值 $\overline{x^2}$ 称为平均功率，因此，也可以说谱密度函数 ϕ 下的面积等于信号的平均功率。而每一频段下的面积，例如 (f_1, f_2) 下的面积

$$\int_{-f_1}^{-f_2} \phi(2\pi f) df + \int_{f_1}^{f_2} \phi(2\pi f) df, \quad f_2 > f_1 > 0$$

则代表了这一频段的功率。这样， $\phi(\omega)$ 就表示了这个随机信号的功率沿频率轴的分布特性。故 $\phi(\omega)$ 也称作功率谱密度。

我们知道，相关函数表征了一随机过程的统计特性。现在我们看到，它的傅氏变换式具体表征了这个信号的功率沿频率轴的分布特性。从这里可以看到虽然信号是随机的，但各次谐波的平均功率则是一定的，满足一定的分布特性。因此，就均方值来说，随机信号作用下的系统也仍然可以从频谱的角度来进行分析。

2. 谱密度的计算

因为谱密度是相关函数 $R(\tau)$ 的傅氏变换式，所以往往是先求相关函数，然后经傅氏变换得 $\phi(\omega)$ 。

其实谱密度也可以直接求取。

设 $x_T(t)$ 表示所要处理的一段数据，见式(3-52)。 $x_T(t)$ 所对应的频谱 $X_T(j\omega)$ 可用DFT来求，为

$$X_T(j\omega_K) = \Delta t F(k)$$

将 $X_T(j\omega_K)$ 代入式(3-54)得

$$\phi(\omega_K) = \frac{1}{M\Delta t} \left| X_T(j\omega) \right|^2 = \frac{\Delta t}{M} \left| F(k) \right|^2 \quad (3-60)$$

式中 $M\Delta t$ 为数据的长度。

将式 (3—6)) 与 (3—49) 比较可以看到, 谱密度 $\phi(\omega)$ 也可以利用上述计算相关函数的同样方法和程序来算。计算到第三步求得

$$S = \frac{1}{M} |F|^2$$

后, 乘以 Δt 即得谱密度

$$\phi = S \Delta t \quad (3-61)$$

因为 Δt 是常数, 所以我们可以说上述第三步的结果就是谱密度, 而第四步是求 IDFT, 即求其反变换, 得相关函数。现在把谱密度和相关函数的计算步骤统一起来了。计算时可将第三步和最终的结果都打印出来, 这样就同时得到了谱密度和相关函数。

谱密度和相关函数的概念是相辅相成的。谱密度可以使我们从频域上来研究随机过程, 而相关函数则帮助我们了解该随机过程的相关程度。

应该指出的是, 实际计算谱密度时有一个量纲问题。这是因为谱密度虽是相关函数的傅氏变换, 但傅氏变换中由于 2π 的位置不同, 有时会遇到不同的变换式, 如

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ \phi(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (3-62)$$

和

$$\begin{cases} R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ \phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{cases} \quad (3-63)$$

这第二种变换式就是本章到现在为止所使用的变换式。

为了区分不同变换式所定义的谱密度，一般对这第二种变换式再加以变换，取变量 f ，并用 $S(f)$ 来表示谱密度，即

$$\begin{cases} R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f\tau} df \\ S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \end{cases} \quad (3-64)$$

式(3-62)中谱密度是用圆频率 ω (rad/s)来表示的，而式(3-64)中谱密度则是用频率 f (Hz)来表示。

这两种变换式所对应的均方值分别为

$$\overline{x^2} = R(0) = \int \phi(\omega) d\omega \quad (3-65)$$

$$\overline{x^2} = R(0) = \int S(f) df \quad (3-66)$$

这就是说，无论哪种变换式，它们的概念都是统一的，谱密度下的面积都仍然是方差。

考虑到存在这两种变换式，所以约定，当频率的量纲取为 rad/s 时，谱密度就用 $\phi(\omega)$ 来表示，其量纲为 (变量 x 的量纲)²/rad/s，计算式用式(3-62)。若频率用 f (Hz)，则谱密度就用 $S(f)$ 来表示，此时谱密度的量纲为 (变量 x 的量纲)²/Hz，计算的关系式用式(3-64)。本书今后所遇到的谱密度均采用这里所说的表示符号和公式。

$\phi(\omega)$ 和 $S(f)$ 的折算关系可直接从式(3-62)(3-64)求得，为

$$\phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} S\left(-\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad (3-67)$$

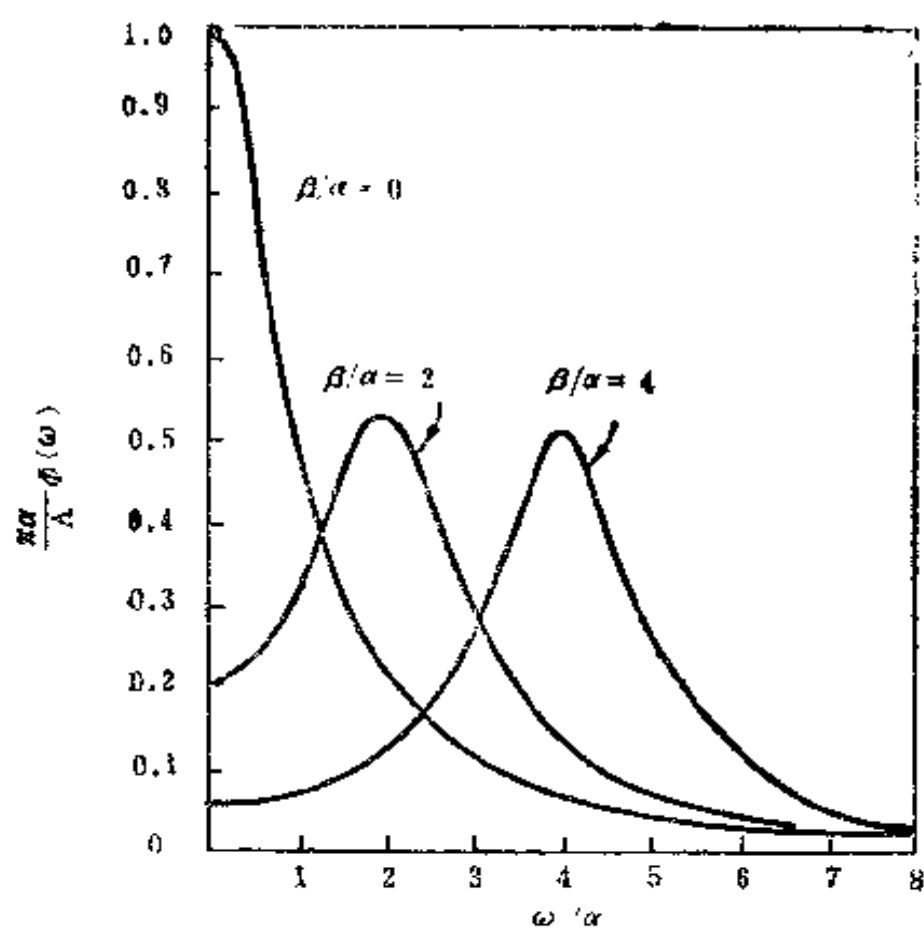
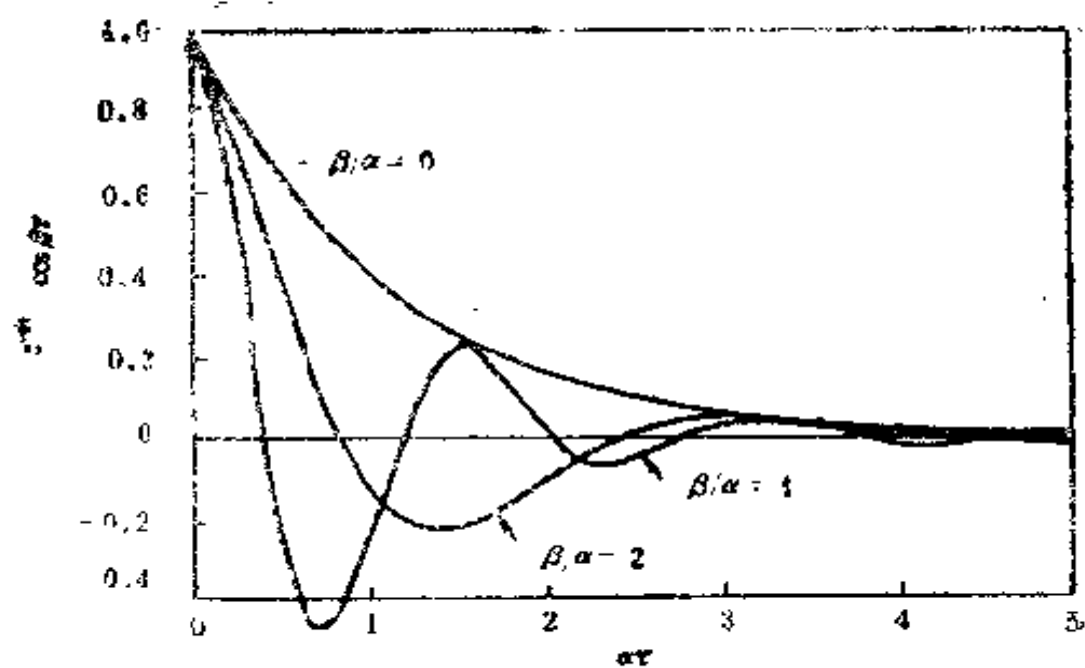


图2-8 相关函数 $R(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$ 及其谱密度

3. 谱密度的解析表示式

系统的分析和计算中有时需要谱密度的解析表示式。这时常可用一解析式(3—58)来逼近根据实验数据所算得的相关函数。

$$R(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau \quad (3-58)$$

此式的傅氏变换就是可用作解析计算的谱密度 $\phi(\omega)$:

$$\phi(\omega) = \frac{\alpha A}{\pi} \left[\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{[\alpha^2 + (\beta + \omega)^2][\alpha^2 + (\beta - \omega)^2]} \right] \quad (3-59)$$

图3—8所示为不同比值 β/α 的几组典型曲线。 $\beta \gg \alpha$ 时相关函数 $R(\tau)$ 呈波动特性, 而谱密 $\phi(\omega)$ 则在 $\omega = \beta$ 处出现峰值。注意到因为 $R(0)$ 值不变, 所以 $\phi(\omega)$ 下的面积不变, 只是由于 β 值不同, 功率谱将集中在不同的 ω 处。

4. 典型谱密度

(1) 指数相关的随机过程的谱密度

很多扰动信号都属于这一类随机过程, 例如天线的风载, 陀螺的随机漂移等等。

这类随机信号的数学模型可以这么来考虑: 随机信号(例如风速, 陀螺的漂移率等等)的值是跃变的, 每一区段的值与以前区段上的值无关, 见图3—9, 而且跃变的时刻 t_1, t_2, \dots 也是随机的。

现在来求这类随机信号的相关函数。

按照定义, 相关函数是相距为 τ 时刻的两个数的乘积的



图3—9 指数相关的随机过程之依

平均值。当 $x(t)$ 和 $x(t+\tau)$ 处在同一区段时

$$x(t)x(t+\tau) = a_n^2$$

而当 $x(t)$ 和 $x(t+\tau)$ 不在同一区段时

$$x(t)x(t+\tau) = a_n a_{n+k}$$

设 t 和 $t+\tau$ 在同一区段的概率为 $Q(\tau)$ ，故可写得相关函数为

$$R(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \tilde{a}^2 Q(\tau) + (\tilde{a})^2 [1 - Q(\tau)] \quad (3-70)$$

式中波纹号表示集合平均。

今后设信号的平均值为零，即 $\tilde{a} = 0$ 。这时式 (3—70) 就可写成

$$R(\tau) = \tilde{a}^2 Q(\tau) \quad (3-71)$$

下面计算 $Q(\tau)$ 。 $Q(\tau)$ 表示了该信号在 τ 时距内不变化的概率。设 α 是该信号在单位时间内的平均变化次数，那么当 Δt 足够小时，在 Δt 内变化的概率就是 $\alpha \Delta t$ ，而不变化的概率是 $1 - \alpha \Delta t$ 。将 $(0, \tau)$ 分成 r 个 Δt 。在第一个 Δt 内不变化的概率是 $1 - \alpha \Delta t$ 。第一个 Δt 和第二个 Δt 内都不变化的概率就是 $(1 - \alpha \Delta t)^2$ 。在 r 个 Δt 内都不变化的概

率就是 $(1 - \alpha \Delta t)^r$ 。

现在以 $\tau/\Delta t$ 代替 r ，并使 $\Delta t \rightarrow 0$ ，得

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - \alpha \Delta t)^{\tau/\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[1 - \alpha \tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} \frac{\tau}{\Delta t} \left(\frac{\tau - \Delta t}{\Delta t} \right) \alpha^2 \Delta t^2 - \dots \right] \\ &= 1 - \alpha \tau + \frac{1}{2!} \alpha^2 \tau^2 - \dots \\ &= e^{-\alpha \tau} \end{aligned} \quad (3-72)$$

这就是该信号在 $(0, \tau)$ 内不变化的概率，即

$$Q(\tau) = e^{-\alpha |\tau|} \quad (3-73)$$

将 $Q(\tau)$ 值代入式 (3-71) 可得相关函数

$$R(\tau) = \tilde{a}^2 e^{-\alpha |\tau|} \quad (3-74)$$

对应的谱密度为

$$\phi(\omega) = \frac{\tilde{a}^2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \quad (3-75)$$

这个相关函数的图形就是图3-6所示的指数形式。从式

(3-75) 可以看到，这类谱密度的主要参数是均方值 \tilde{a}^2 和单位时间内的平均变化次数 α 。这两个参数往往可以根据物理过程来近似写得。例如当需要确定天线随动系统中风载的谱密度时，可以先估算风载力矩的均方值，再根据当地情况估算风速在单位时间内的平均变化次数。有了这两个参数，代入式 (3-75) 就可求得所需的风载谱密度了。

〔例〕天线随动系统中风载的谱密度^[2]

设有一直径为6 m (20 ft) 的天线, 已知,

平均风速 $V_0 = 72 \text{ km/h}$

阵风最大为 $V_m = 96 \text{ km/h}$

$$\alpha = 0.11 \text{ s}^{-1}$$

天线上的风载力矩为

$$T = C_w V^2 \quad (3-76)$$

式中 C_w 为力矩系数。根据风洞实验所得

$$C_w = 0.134 \text{ kg} \cdot \text{m} / (\text{km/h})^2 \quad (3-77)$$

根据式 (3-76) 可得

$$dT/dV = 2C_w V$$

故可写得

$$\Delta T = 2C_w V_0 \Delta V \quad (3-78)$$

谱密度计算中用的都是均方值, 所以这里的 ΔV 就应该是均方根值。已知阵风对平均值的峰值为 $96 - 72 = 24 \text{ km/h}$ 。根据 3σ 的概念 (见本章第一节), 可以写得阵风的均方根值为

$$\Delta V_{\text{rms}} = 24/3 = 8 \text{ km/h}$$

代入式 (3-78) 得阵风的均方根力矩为

$$\Delta T_{\text{rms}} = 2C_w V_0 \Delta V_{\text{rms}} = 156 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

这样, 就得到了作用在此天线上的风载力矩的均方值为

$$\tilde{a}^2 = 156^2 \text{ kg}^2 \cdot \text{m}^2 \quad (3-79)$$

将 \tilde{a}^2 和 α 值代入式 (3-75), 得风载的谱密度为

$$\phi(\omega) = \frac{852}{\omega^2 + (0.11)^2} \frac{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^2}{\text{rad/s}} \quad (3-80)$$

图 3-10 所示为此谱密度的图形, 由图可见, 本例中风载频谱的范围到 0.2 Hz。

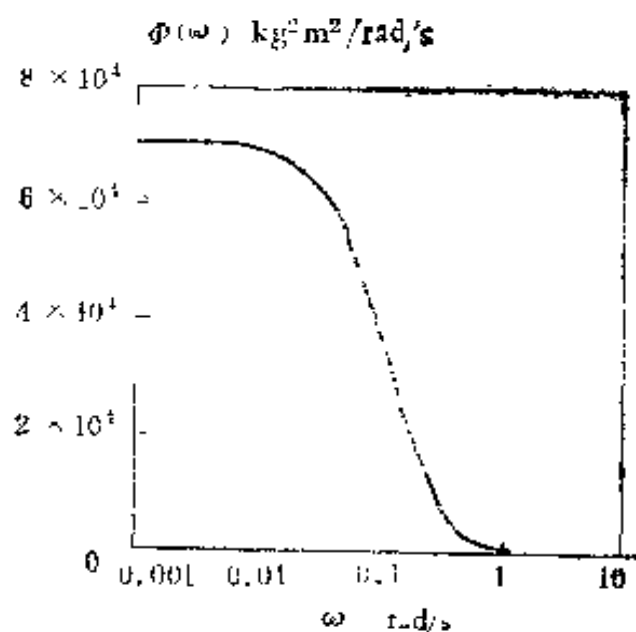


图 3—10 风载的谱密度

(2) 常值谱密度

设计系统的时候并不一定都能得到噪声（或干扰）的数据，有时也可能数据不齐全。这时常假设该噪声在一定的频段内（ $0 \sim \omega_N$ ）具有恒定的谱密度值（图 3—11）。在实际应用中这个 ω_N 一般大大超出系统的带宽，因而这个噪声对系统来说可以看作是白噪声。

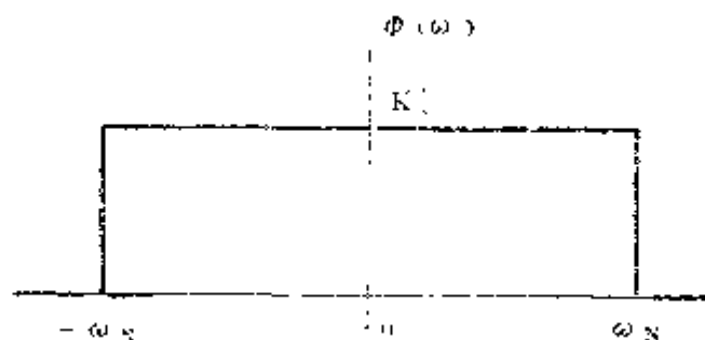


图 3—11 常值谱密度

这里提出的常值谱密度是一种假设的谱密度。 $\Phi(\omega)$ 取常值可以简化计算。因为这时在系统分析中甚至不需要具体数据，只用一个符号，例如用 K_N^2 来代替这个 $\Phi(\omega)$ 的值就

但为了。所以当缺乏实验数据时，常用此谱密度来代替实际的噪声谱密度。

五、均方误差

在噪声作用下系统的误差信号也是一个随机信号，因此对系统的评价就要采用均方误差：

$$\bar{\varepsilon}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varepsilon^2(t) dt. \quad (3-81)$$

若已知误差信号 ε 的相关函数或谱密度，则 $\bar{\varepsilon}^2$ 就可按下式来计算

$$\bar{\varepsilon}^2 = R_{\varepsilon}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\varepsilon}(\omega) d\omega \quad (3-82)$$

现在的问题是，首先要求得到输入噪声作用下误差信号的谱密度 $\phi_{\varepsilon}(\omega)$ 。

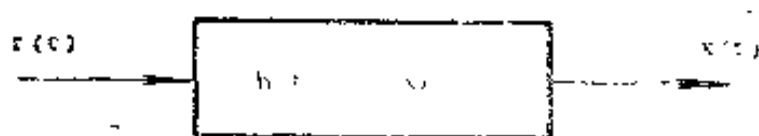


图 3—12 系统的输入输出关系

我们先看一般情况（图3—12）。设系统的输入信号 $r(t)$ 是随机的，已知其谱密度为 $\phi_r(\omega)$ ，现在来求输出 $x(t)$ 的谱密度 $\phi_x(\omega)$ 。

设系统的传递函数为 $G(s)$ ，其单位脉冲响应为 $h(t)$ ，则有输入输出的关系为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t - \lambda) h(\lambda) d\lambda \quad (3-83)$$

将式(3-83)代入相关函数的计算式,

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t+\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \\ &\quad \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} r(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} r(t+\tau-\eta) h(\eta) d\eta \right\} \end{aligned}$$

改变积分顺序, 得

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) d\eta \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T r(t-\lambda) r(t+\tau-\eta) dt \right] \end{aligned}$$

注意到方括号内这一项当 $T \rightarrow \infty$ 时为 $R_r(\tau + \lambda - \eta)$, 所以上式可写成

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) R_r(\tau + \lambda - \eta) d\eta \end{aligned}$$

(3-84)

对式(3-84)左右项分别求傅氏变换得

$$\phi_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) R_r(\tau + \lambda - \eta) d\eta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) e^{-j\omega\eta} \\
&\quad \times \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_r(\tau + \lambda - \eta) e^{-j\omega(\tau + \lambda - \eta)} d\tau \right] \\
&= G(-j\omega) G(j\omega) \phi_r(\omega) \\
&= |G(j\omega)|^2 \phi_r(\omega) \tag{3-85}
\end{aligned}$$

式(3-85)表明, 对一线性系统来说, 输入功率谱密度 $\phi_r(\omega)$ 通过 $|G(j\omega)|^2$ 传递到输出。在这种意义上, 有时把 $|G(j\omega)|^2$ 称为功率传递函数。

因此, 若已知误差的传递函数 $G_e(s)$, 那么就可求得误差信号的谱密度为

$$\phi_e(\omega) = |G_e(j\omega)|^2 \phi_r(\omega). \tag{3-86}$$

下一步的问题是将 $\phi_e(\omega)$ 变换成便于计算的形式。若 $\phi_e(\omega)$ 能写成平方的形式, 就容易计算了。

我们先研究输入的谱密度 $\phi_r(\omega)$ 。

$$\begin{aligned}
\phi_r(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_r(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_r(\tau) \cos\omega\tau d\tau \right. \\
&\quad \left. - j \int_{-\infty}^{\infty} R_r(\tau) \sin\omega\tau d\tau \right]
\end{aligned}$$

根据相关函数的性质， $R_r(\tau)$ 是 τ 的偶函数，所以上式第三项为零，于是得

$$\phi_r(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_r(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau \quad (3-87)$$

由上式可知， $\phi_r(\omega)$ 是 ω 的实偶函数。所以，虽然谱密度是 $R(\tau)$ 的傅氏变换式，但一般并不写成 $\phi(j\omega)$ 而是写 $\phi(\omega)$ 。

$\phi_r(\omega)$ 是偶函数，所以 $\phi_r(\omega)$ 包含如下因子

$$\omega^2 - p_k^2 = (\omega + p_k)(\omega - p_k)$$

这就是说，其零极点对原点对称的。又因为是实函数，零极点总是共轭存在的。所以， $\phi_r(\omega)$ 的零极点对实轴和虚轴都是对称分布的，如图 3—13所示。因此，输入噪声的谱密度可以用两个共轭因式的乘积来表示：

$$\phi_r(\omega) = \phi_1(\omega) \phi_1^*(\omega) = |\phi_1(\omega)|^2 \quad (3-88)$$

式中 $\phi_1(\omega)$ 只包含 $\phi_r(\omega)$ 在 ω 上半平面的所有零极点，而这些零极点对虚轴是对称的。

注意到 $\phi_1(\omega)$ 的零极点对虚轴对称，这与系统的传递函数（频率特性 $G(j\omega)$ ）具有相同的性质，所以可以和式（3—86）中的传递函数归并到一起，写成

$$|\phi_e(\omega)|^2 = |G_e(j\omega) \phi_1(\omega)|^2 = |H(j\omega)|^2 \quad (3-89)$$

式中 $H(j\omega)$ 的零极点对虚轴是对称的。

将式 (3-89) 代入 (3-32) 得均方误差的计算式为

$$\overline{e^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega$$

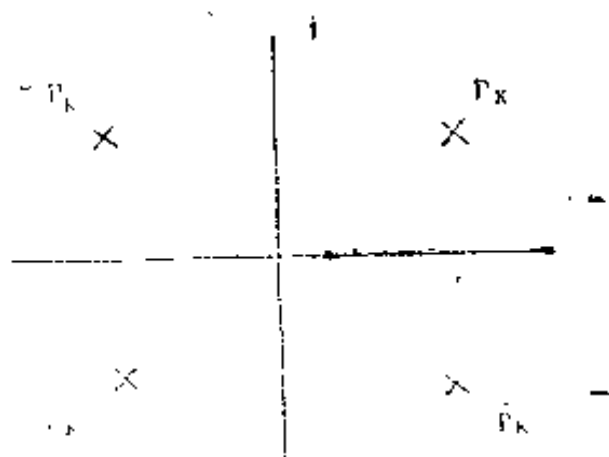


图 3-13 谱密度的零极点分布图

$$(3-90)$$

具体计算时一般将式 (3-90) 写成如下的形式

$$\overline{e^2} = 2\pi I \quad (3-91)$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \quad (3-92)$$

现在来求积分 I 。求得 I 值后, 均方误差 $\overline{e^2}$ 也就得到了。

令 $s = j\omega$, 式 (3-92) 可写成

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |H(s)|^2 ds \quad (3-93)$$

式中 $H(s)$ 的极点都在 s 的左半平面。

理论上, 式 (3-93) 的积分可用留数定理来算。表 3-1 是已经计算好的各次的积分值。但是, 当方程的阶次高于四阶时, 用这种方法是不实际的。我们这里介绍一种递推算法, 无论手算或机器算都适用。

表3-1

积 分 表

$$I_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_0}{d_n s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_0} \right|^2 ds$$

I_1	$\frac{c_0^2}{2d_0 d_1}$
I_2	$\frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2}$
I_3	$\frac{c_2^2 d_0 d_1 + (c_1^2 - 2c_0 c_2) d_0 d_2 + c_0^2 d_2 d_3}{2d_0 d_2 (-d_0 d_3 + d_1 d_2)}$
I_4	$\frac{c_3^2 (-d_0^2 d_2 + d_0 d_1 d_2) + (c_2^2 - 2c_1 c_3) d_0 d_1 d_2 + (c_1^2 - 2c_0 c_2) d_0 d_2 d_3 + c_0^2 (-d_1 d_2^2 + d_1 d_3 d_4)}{2d_0 d_4 (-d_0 d_2^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)}$

这里，将式 (3-93) 中的 $H(s)$ 写成多项式的形式

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (3-94)$$

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (3-95)$$

$$B(s) = b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n \quad (3-96)$$

递推计算中原 n 阶多项式标以 n ，即，

$$A_n(s) = A(s), \quad B_n(s) = B(s)$$

依次算得的各阶多项式则用 k 作为上角标来标明，即

$$A_k(s) = a_0^k s^k + a_1^k s^{k-1} + a_2^k s^{k-2} + \dots + a_k^k \quad (3-97)$$

$$B_k(s) = b_1^k s^{k-1} + b_2^k s^{k-2} + \dots + b_k^k \quad (3-98)$$

各次多项式都是按下列的式 (3-99) (3-100) 递推计算得来的。

$$A_{k-1}(s) = A_k(s) - \alpha_k s \tilde{A}_k(s), \quad (3-99)$$

$$B_{k-1}(s) = B_k(s) - \beta_k \tilde{A}_k(s), \quad (3-100)$$

式中

$$\alpha_k = a_0^k / a_1^k, \quad (3-101)$$

$$\beta_k = b_1^k / a_1^k \quad (3-102)$$

$\tilde{A}_k(s)$ 为 $A_k(s)$ 中奇数标号的系数所组成的多项式：

$$\tilde{A}_k(s) = a_1^k s^{k-1} + a_3^k s^{k-3} + \dots \quad (3-103)$$

现在以式 (3-99) 为例，将计算过程列出如下：

$$A_k(s) = a_0^k s^k + a_1^k s^{k-1} + a_2^k s^{k-2} + a_3^k s^{k-3} + \dots$$

$$\tilde{s}A_k(s) = a_1^k s^k + a_3^k s^{k-2} + \dots,$$

$$A_k(s) - \alpha_k s \tilde{s}A_k(s) = 0 + a_1^k s^{k-1} + \left(a_3^k - \alpha_k a_1^k \right) s^{k-2} + \dots$$

上面第三行就是 α_k 乘以第二行并与第一行相减得到的。

因为 $\alpha_k = a_0^k / a_1^k$ ，所以相减后第一项等于零。这就是说

$A_{k-1}(s)$ 的阶次较 $A_k(s)$ 的低一阶。

具体计算时，可列表进行计算。表 3—2 的第一行对应 $A(s)$ 和 $B(s)$ 的系数。 a_i 系数表的第二行是上一行奇数标号的各元往左移一位，而其他地方则置以零而得到的。 b_i 系数表的第二行与 a_i 系数表的第二行相同。

a_i 系数第二行乘以 α_k ， b_i 系数第二行乘以 β_k ，并从第一行的相应各项中减去它们，就得到降低一阶的多项式 $A_{n-1}(s)$ 和 $B_{n-1}(s)$ 。表中第三行所列就是对应这降一阶的多项式的系数。

第四行系数的构成方法与第二行相同，见表 3—2 所示。

这样，单数行对应的都是较前一次降低一阶的多项式，共 n 个，在这递推计算的同时，我们也得到了相应的 n 对 α_k ， β_k 值。

设 I_k 为 k 阶多项式 (3—97) (3—98) 所对应的积分值

$$I_k = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{B_k(s)}{A_k(s)} \right|^2 ds. \quad (3-104)$$

显然， $k=n$ 时的积分值就是所求的 I ：

$$I = I_n \quad (3-105)$$

可以证明^[1]，若 $A(s)$ 的所有零点均在左半平面，则各积分值可递推计算如下：

$$I_k = I_{k-1} + \frac{\beta_k^2}{2\alpha_k}, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (3-106)$$

$$I_0 = 0$$

考虑到 $I_0=0$ ，根据式(3-106)可得所求的积分值 I 为

$$I = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k^2}{2\alpha_k}. \quad (3-107)$$

这里的 α_k 和 β_k 就是上面递推计算 $A_k(s)$ 和 $B_k(s)$ 过程中所得到的值。

由此可见，只要按式(3-99) (3-100)来递推计算 $A_{k-1}(s)$ 和 $B_{k-1}(s)$ ，并将 α_k 和 β_k 值按式(3-107)累加，就可求得积分值。因此计算程序很简单。下面给出了计算此积分值的BASIC程序。语句110以前是输入语句：输入阶次 n ，并根据CRT上的提示依次送入 a_0, a_1, \dots 和 b_1, b_2, \dots 。语句150和160对应于式(3-99) (3-100)。这是基本的计算公式，重复应用此两公式(语句170, 180)便可依次算得各系数。再利用语句190, 200对降一阶的方程重复上述计算。最后的计算结果由语句290递推算得，该语句对应于式(3-106)。

注意到上述各步运算中 $A_k(s)$ 中的系数 a_1^k , $k = n, n-1, \dots, 1$, 就是Routh行列式中第一列的系数, 表3-2中用黑体字标出了 这些 a_1^k 。因此, 计算程序中应包括对 a_1^k 符号的判别, 见语句260。若 a_1^k 都是正的, 就说明 $A(s)$ 的所有零点确实都在左半平面, 计算结果是可信的。若 $a_1^k < 0$, 程序就打印出“不稳定”并停止运算。

计算积分值I 的 BASIC程序

```

10  PRINT "THE INTEGRAL I"
20  PRINT "N = ",
30  INPUT N
40  FOR K=0 TO N
50  PRINT "A (", K, ") = ",
60  INPUT A (K)
70  NEXT K
80  FOR K=1 TO N
90  PRINT "B (", K, ") = ",
100 INPUT B (K)
110 NEXT K
120 LET I = 0
125 LET K = 0
130 GOSUB 260
140 LET L = K + 2
150 A (L) = A (L) - A * A (L + 1)
160 B (L + 1) = B (L + 1) - B * A (L + 1)
170 LET L = L + 2
180 IF L < N THEN 150

```



```

190 LET K=K+1
200 IF K<N-1 THEN 130
210 GOSUB 260
220 PRINT "I=" , I
230 END
240 PRINT "UNSTABLE"
250 END
260 IF A (K+1) <=0 THEN 240
270 A=A (K) /A (K+1)
280 B=B (K+1) /A (K+1)
290 I=I+B*B/2/A
300 RETURN

```

作为递推算法的例子，现在计算下列多项式所对应的积分值。

$$A(s) = s^6 + 3s^5 + 5s^4 + 12s^3 + 6s^2 + 9s + 1$$

$$B(s) = 3s^5 + s^4 + 12s^3 + 3s^2 + 9s + 1$$

按表 3—2 将各系数排列如下：

α_k							β_k						
1	3	5	12	6	9	1	3	1	12	3	9	1	
3	0	12	0	9	0	1/3	3	0	12	0	9	0	1
	3	1	12	0	6	1		1	0	3	0	1	
	1	0	3	9	1	3		1	0	3	0	1	
		1	3	3	6	1		0	0	0	0		
.....													

注意到 β_k 系数表，从第 5 行起全为零，故 $\beta_k = 0$ ($k \leq 4$)，所以得

$$I = \sum_{k=1}^6 \frac{\beta_k^2}{2^{\alpha_k}} = \frac{\beta_6^2}{2^{\alpha_6}} + \frac{\beta_5^2}{2^{\alpha_5}} = 1.6667$$

本例中尚应将 a_1^k 列出以判别 $A(s)$ 的零点是否都在左半平面，但这已是一般的判别问题，故略去。

从这个例子还可以看到，这积分也可以用手算，其工作量相当于用Routh判据来判别一个系统的稳定性。

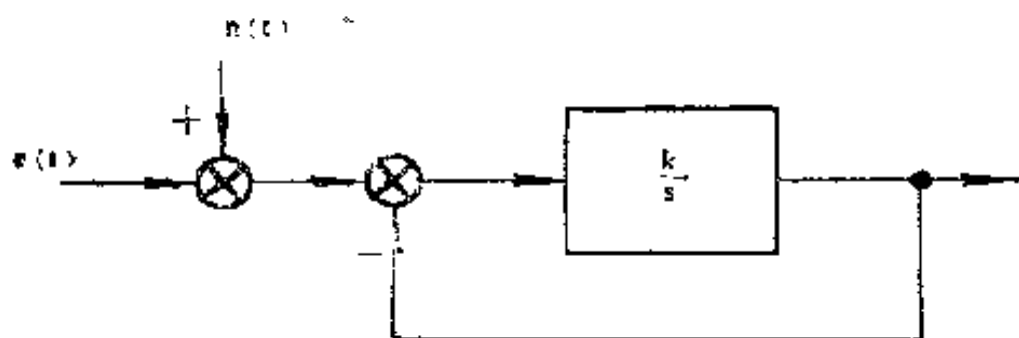


图 3—14 有噪声的系统

这一节说明了根据输入谱密度和传递函数计算均方误差的方法。现在再来看一个具体的例子。

〔例题〕在图 3—14 的一阶反馈系统中设输入信号 $r(t)$ 和噪声 $n(t)$ 的谱密度分别为

$$\phi_r(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{4}{\omega^2 + 4} \quad (3-108)$$

$$\phi_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{8}{\omega^2 + 16} \quad (3-109)$$

试求出使 $\bar{\epsilon}^2$ 为最小时的增益 K 的值。

设噪声与输入信号互不相关，故可写得系统的均方误差为

$$\bar{\epsilon}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |G_e(j\omega)|^2 \phi_r(\omega) d\omega +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 \phi_n(\omega) d\omega \quad (3-110)$$

式 (3-110) 中的第一项为对输入信号 $r(t)$ 的跟踪误差，而第二项则表示出现在输出端的噪声大小。

式 (3-110) 中的传递函数分别为

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega + K} \quad (3-111)$$

$$G_e(j\omega) = 1 - G(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + K} \quad (3-112)$$

按式 (3-88)，将谱密度表示为共轭因式相乘，

$$\phi_r(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{j\omega + 2} \frac{2}{-j\omega + 2} \quad (3-113)$$

$$\phi_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{8}}{j\omega + 4} \frac{\sqrt{8}}{-j\omega + 4} \quad (3-114)$$

将 G 和 ϕ 都代入式 (3-110) 得

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{j\omega}{j\omega + K} \frac{2}{j\omega + 2} \right|^2 d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{K}{j\omega + K} \frac{\sqrt{8}}{j\omega + 4} \right|^2 d\omega \end{aligned} \quad (3-115)$$

令 $s = j\omega$ ，则 $\overline{\varepsilon^2}$ 可写成

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{2s}{s^2 + (2+K)s + 2K} \right|^2 ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{K\sqrt{8}}{s^2 + (4+K)s + 4K} \right|^2 ds \quad (3-116)$$

式(3-116)的阶次较低,故可以直接从表3-1查得其积分值

$$\overline{e^2} = \frac{2}{2+K} + \frac{K}{4+K} \quad (3-117)$$

根据 $d\overline{e^2}/dk = 0$, 从上式可求得 $\overline{e^2}$ 为最小的增益 K ,

$$K = \sqrt{8} \text{ s}^{-1}$$

将此 K 值代入式(3-117)得

$$\overline{e^2} = \overline{e^2}_{\min} = 0.414 + 0.414 = 0.828 \quad (3-118)$$

式(3-117)中当增益 K 增大时, 第一项, 即跟踪误差减少, 但第二项噪声误差则增大, 当 K 减小时噪声误差减小, 但跟踪误差却增大了。因此, 最后来个折衷, 跟踪误差与噪声误差相等, 如式(3-118)所示。这个例子虽然简单, 但也反映了系统设计中的基本矛盾。

六、系统的等效噪声带宽

这一章我们说明了随机信号作用下系统的品质要用均方误差来衡量, 也介绍了均方误差的计算方法。但并不是所有场合都能得到噪声数据, 这时就得假设噪声具有常值谱密度。当然也有不少噪声其谱密度也确实可以看作常值, 例如, 一些电子设备的热噪声。工程上把具有常值谱密度的信号看作实际上的白噪声。在白噪声作用下系统的品质(均方输出)常用等效噪声带宽来衡量^[3]。

系统的等效噪声带宽是指与其相当的一理想滤波器的带宽，两者在白噪声作用下的均方输出是相等的。这里指的理想滤波器其频率特性是平直的，而在带宽 ω_b 外则完全截止（图 3—15）。

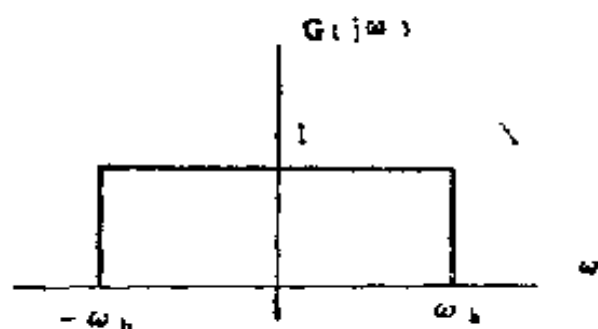


图 3—15 理想滤波器的频率特性

设一白噪声，其谱密度在 ω_N 内为常值（图 3—11），

$$\phi_N(\omega) = K_N^2, \quad (3-119)$$

显然， $\omega_N \gg \omega_b$ 。

在这个白噪声作用下，图 3—15 所示理想滤波器的均方输出是

$$\overline{X^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) d\omega = \int_{-\omega_b}^{\omega_b} K_N^2 d\omega = 2K_N^2 \omega_b \quad (3-120)$$

式（3—120）表明输出噪声与 ω_b 有关，理想滤波器的带宽 ω_b 越宽，噪声输出就越大。

现在来看白噪声通过一阶系统的情形。

设一阶系统为

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \quad (3-121)$$

这时输出的均方值为

$$\begin{aligned} \overline{X^2} &= K_N^2 \int_{-\omega_N}^{\omega_N} |G(j\omega)|^2 d\omega \\ &= K_N^2 \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 T^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2 K_N^2}{T} t g^{-1} \omega_N T \quad (3-122)$$

设 $\omega_N T > 10$ ，则上式可近似为

$$\overline{x^2} \approx 2 K_N^2 (\pi / 2T) \quad (3-123)$$

将式(3-123)与(3-120)比较可见，一阶系统的输出均方值与一带宽为 $\pi / 2T$ 的理想滤波器者相同，所以，我们说一阶系统对于白噪声的等效噪声带宽为其本身的带宽 $(1/T)$ 乘以 $\pi / 2$ 。

一般在计算系统的等效噪声带宽时可认为输入白噪声的带宽 ω_N 很高， $\omega_N \rightarrow \infty$ 。这时输出均方值的表达式可写成

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= K_N^2 \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \\ &= 2 K_N^2 \pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \\ &= 2 K_N^2 (\pi I) \quad (3-124) \end{aligned}$$

式(3-124)表明，系统的等效噪声带宽等于 π 乘以 I ，后者由系统的传递函数 $G(j\omega)$ 所决定，即由系统的结构和参数所决定。这个积分值 I 可以查积分表3-1，也可用递推算法来求得。

下面再来看一个二阶的例子。

设

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-125)$$

将 $G(s)$ 代入式 (3—124) , 查表3—1得

$$I_2 = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2} = \frac{\omega_n}{4\xi} \quad (3-126)$$

系统的等效噪声带宽为

$$\omega_{bN} = \pi I_2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega_n}{2\xi} \quad (3-127)$$

若 $\xi = 1$, 这个二阶系统就相当于两个相同的一阶系统相串联, 每个一阶系统的带宽为 ω_n 。从式 (3—127) 可见, 两个一阶相串联的效果是将原一阶系统的等效噪声带宽减少一半。

但是并不是二阶系统的等效噪声带宽一定比一阶的小。注意到若阻尼比 ξ 很小, 其等效噪声带宽就会增加很多。这是很显然的, 因为某些谐波分量得到了放大。

根据上面的讨论可以看到, 系统的等效噪声带宽表征了白噪声作用下系统的噪声输出 (误差) 的大小, 因此在设计中常用作衡量噪声误差的指标。系统设计或确定方案的时候要力求获得最小的等效噪声带宽。

另外, 从对二阶系统的讨论中还可以看到, 最小噪声带宽的设计在一定程度上也保证了系统的相对稳定性。

参 考 文 献

1. K.J.Astrom: Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press, 1970.
2. D.R.Wilson (ed.): Modern Practice in Servo Design, Pergamon Press, 1970.
3. P.Garnell, D.J.East, Guided Weapon Control Systems, Pergamon Press, 1977, Chapter 1.

第四章 控制系统的设计

这一章主要是通过实例来说明控制系统的设计，本章前三节说明系统的各性能指标和设计所应遵循的原则。前面已经说明了输入有用信号作用下系统的跟踪误差，也已经介绍了噪声和干扰作用下的系统的误差。这样，加上这前三节所介绍的基本原则就可以来设计系统了。不过每次设计并不一定都要根据基本原则从头开始。事实上，自动控制系统一般都可归属于几种基本的类型。本章其后各节就是将这些基本原则应用于各种典型情况，分析其设计要领，得出一些普遍性的结论。这样，设计时就可很快求得系统的正确结构和参数，大大方便了设计工作。

一、设计的基本原则

对控制系统的要求就是要求其输出能很好地复现输入中的有用信号，至于噪声和干扰则应受到抑制。这两个要求往往是矛盾的。所以，设计时不能单纯追求跟踪精度这一单项指标，只要其值能满足跟踪精度的要求就可以了。这样可以减少噪声误差而使总误差为最小。

现结合实例说明之。

〔实例〕雷达跟踪系统的设计^[1]

图4—1为一舰用雷达跟踪系统。这里我们认为其具有测速反馈的动力拖动部分等效于一个增益为 K_0 （量纲为 rad/s/v ）的二阶系统，该二阶系统的参数为 ω_{n1} 和 ξ_1 。

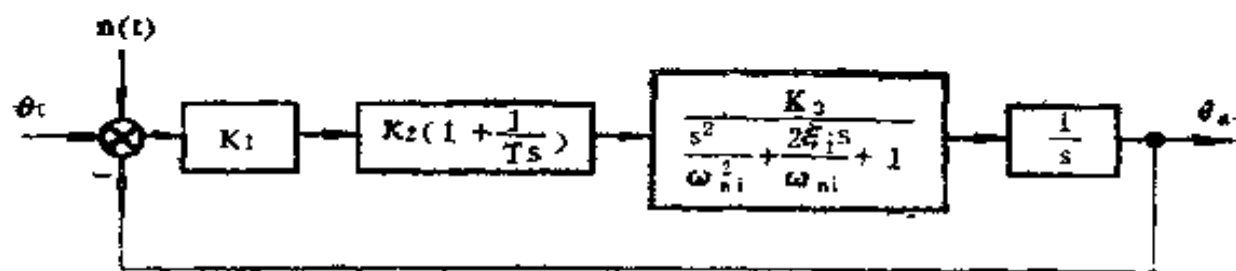


图4—1 雷达跟踪系统的框图

设目标的飞行速度为600m/s。要求该系统在4至32km的范围内能精确跟踪目标，误差的均方根值应小于 0.3×10^{-3} rad。

首先从跟踪误差着手。跟踪性能主要是由系统的低频部分特性所决定，所以，一般就取系统的低频数学模型来进行分析。

所谓低频模型在本例中就是指不计图4—1中速率回路的动特性时的系统特性。此时开环传递函数为

$$K_s G(s) = \frac{K_1 K_2 K_3}{T} \frac{Ts + 1}{s^2} = K_s \frac{Ts + 1}{s^2} \quad (4-1)$$

对应的闭环传递函数为

$$\begin{aligned} \frac{\theta_a(s)}{\theta_r(s)} &= \frac{K_s (Ts + 1)}{s^2 + K_s (Ts + 1)} \\ &= \frac{\frac{2\xi_0}{\omega_{n0}} s + 1}{\frac{s^2}{\omega_{n0}^2} + \frac{2\xi_0}{\omega_{n0}} s + 1} \end{aligned} \quad (4-2)$$

式中

$$\omega_{n0}^2 = K_s = \frac{K_1 K_2 K_3}{T}$$

这个 ω_{n0} 称为自然频率。这个频率作为系统的一个特性，有时也笼统地称为系统的带宽。

注意到这是个Ⅰ型系统〔见式（4—1）〕，根据第二章可知其跟踪误差为

$$e(t) \approx -\frac{1}{K_s} \ddot{r}(t) = \frac{\ddot{r}(t)}{\omega_{n0}^2} \quad (4-3)$$

式（4—3）表明，带宽 ω_{n0} 决定了系统的跟踪误差的大小。设计时一般都从它着手，先把带宽确定下来。

设我们考虑高低角通道，并设仰角 E 不超过 45° 。

根据第二章式（2—10）得

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = -\frac{V^2}{R^2} \operatorname{tg} E [1 - \sin^2 A (1 + 2 \cos^2 E)]$$

对于通过路线，最大角加速度 \ddot{E}_{max} 出现在渡越点，即 $A = 0$ 。这时从上式得

$$\ddot{E}_{max} = -\frac{V^2}{R^2} \operatorname{tg} E \quad (4-4)$$

当 $E = 45^\circ$ 时，本例中最大角加速度为

$$\ddot{E}_{max} = \frac{(600)^2}{(4 \cdot 10^3)^2} = 2.25 \times 10^{-2} \text{ rad/s}^2$$

对于最大误差 $e_{max} = 0.3 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 来说，代入式（4—3）有

$$\omega_{n0}^2 = \frac{2.25 \cdot 10^{-2}}{0.3 \cdot 10^{-3}} = 75 \text{ s}^{-2}$$

所以 ω_{n0} 至少应为 $\sqrt{75} = 8.7 \text{ rad/s}$ 。考虑到除了跟踪误差以外，还存在有噪声误差，故取此系统的带宽为 $\omega_{n0} = 10 \text{ rad/s}$ 。

现在已经确定了系统的主要参数：回路增益 K_s （或 ω_{n0} ）。至于系统的其他参数，如 ξ_0 、 ξ_1 以及 ω_{n1} 等，对

跟踪精度影响较小，但是，它们影响系统的相对稳定性和噪声误差，当噪声影响比较大时，一般应根据系统的等效噪声带宽最小的要求来确定这些参数。

计算系统的等效噪声带宽时，就需要将速率回路的动特性包括进来。这时图 4—1 系统的实际传递函数为

$$\frac{\theta_s(s)}{\theta_t(s)} = \frac{\left(\frac{2\xi_0}{\omega_{n0}}\right)s + 1}{c^2 \omega_{n0}^4 + \frac{2\xi_1 s^3}{c \omega_{n0}^3} + \frac{s^2}{\omega_{n0}^2} + \frac{2\xi_0 s}{\omega_{n0}} + 1} \quad (4-5)$$

式中

$$c = \omega_{n1} / \omega_{n0}$$

ω_{n1} —速率回路的带宽；

ξ_1 —速率回路的阻尼比

系统的等效噪声带宽为

$$\omega_{bN} = \pi I = \pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\theta_s(j\omega)}{\theta_t(j\omega)} \right|^2 d\omega \quad (4-6)$$

将式(4—5)代入(4—6)后就可以来计算 ω_{bN} 了。分析表明，当 $c = \omega_{n1} / \omega_{n0} \geq 4$ 时，内回路的阻尼比 ξ_1 的大小对等效噪声带宽的影响就不大了。不过取 $\xi_1 = 0.5$ 还是比较好的。图4—2就是当 $\xi_1 = 0.5$ 时，用递推算法算得的等效噪声带宽 ω_{bN} 与 ξ_0 和 c 的关系曲线。

从图4—2可以看到，为了尽量减少等效噪声带宽， c 值应该大于4，而 ξ_0 以0.5~0.707为宜。本例中取

$$\left. \begin{aligned} c &= 5, \\ \xi_0 &= \xi_1 = 0.5 \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

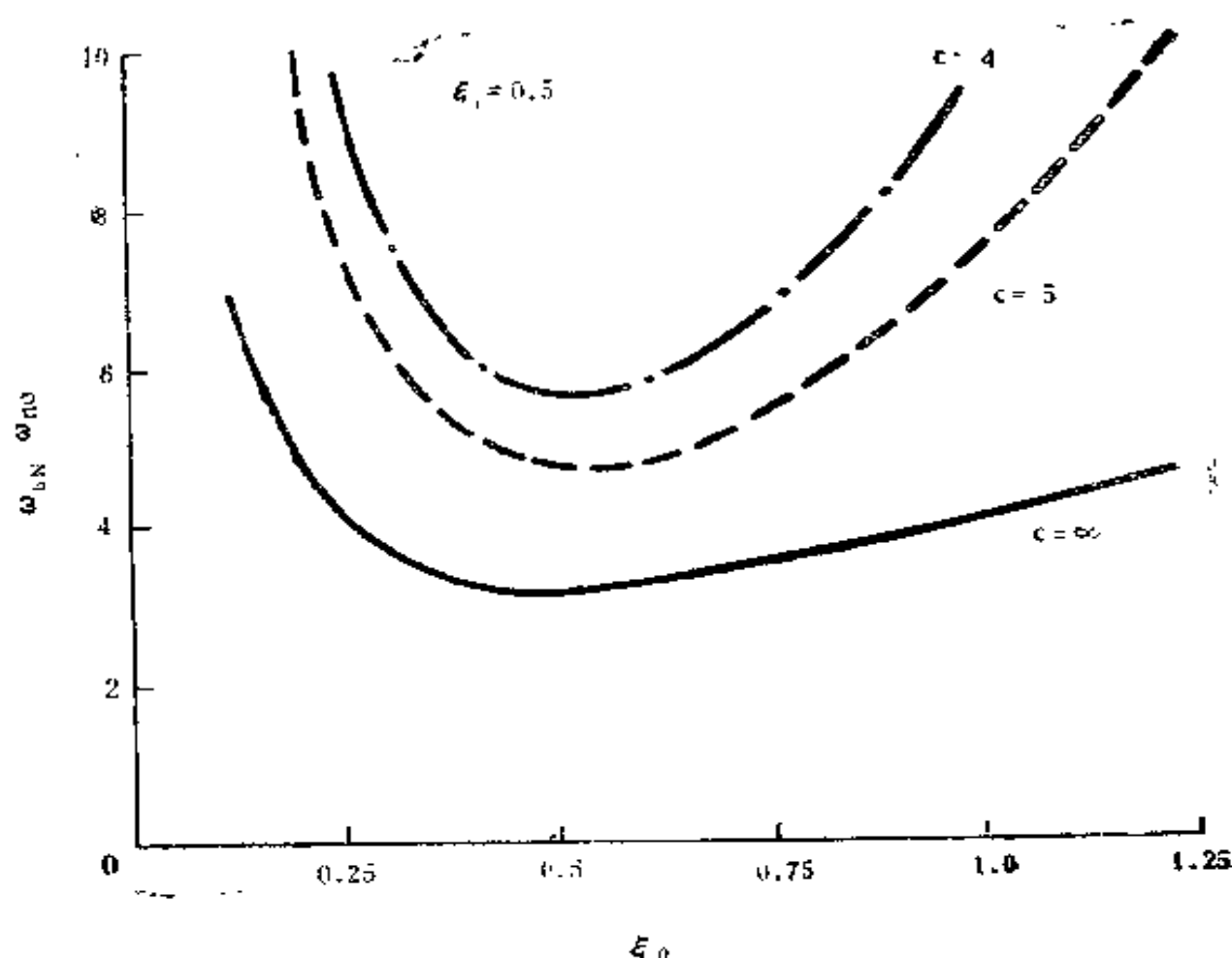


图1—2 图1—1系统的等效噪声带宽

此时速率回路的带宽为

$$\omega_{n1} = c\omega_{n0} = 50 \text{ rad/s} \quad (4-8)$$

这样，根据噪声带宽最小的要求，确定了 ξ_0 ， ξ_1 和 ω_{n1} 等各个参数。在这组参数下，根据图4—2可得 $\omega_{bN}/\omega_{n0} = 4.7$ ，即系统的等效噪声带宽为

$$\omega_{bN} = 4.7\omega_{n0} = 47 \text{ rad/s} \quad (4-9)$$

参数确定后，还需要校核其误差。

现计算噪声误差。本系统的噪声主要是雷达接收机的热（电子）噪声。这个噪声可以看作“白噪声”。对于一定的接收机来说，热噪声是一定的。但对雷达来说，其实际的噪

声输出并不是常值。这是因为放大器具有自动增益控制，当输入信号很强时（例如近距离大目标），输出的噪声会自动降低，也就是说信噪比是在改变的。

一般说来，跟踪目标时，所接收的功率是与斜距的四次方成反比，所以噪声的均方输出将与斜距的四次方成正比。本例中，结合具体数据来说，噪声的谱密度为

$$\phi_n(\omega) = K_N^2 = 4.0 \times 10^{-15} R_t^4 / R_0^4 \quad \text{rad}^2/\text{rad/s},$$

(4-10)

式中

R_t 为目标的实际斜距，km；

R_0 为一个参考距离， $R_0 = 1\text{km}$ 。

因此，由于热噪声引起的天线抖动的均方值为

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= 2 K_N^2 \omega_{bN} \\ &= 8.0 \times 10^{-15} \times 47 \times R_t^4 \quad \text{rad}^2, \end{aligned} \quad (4-11)$$

式中 ω_{bN} 为系统的等效噪声带宽。

对应的均方根值为

$$\sigma_n = 6.13 R_t^2 \times 10^{-7} \quad \text{rad}. \quad (4-12)$$

这样，不同距离所对应的均方根噪声误差 σ_n 为：

$R_t = 4\text{km}$ 时为 $7.01 \times 10^{-3} \text{rad}$,

$R_t = 8\text{km}$ 时为 $0.94 \times 10^{-3} \text{rad}$,

$R_t = 16\text{km}$ 时为 $0.16 \times 10^{-3} \text{rad}$,

$R_t = 24\text{km}$ 时为 $0.35 \times 10^{-3} \text{rad}$,

$R_t = 32\text{km}$ 时为 $0.63 \times 10^{-3} \text{rad}$ 。

显然，当距离加大时，该系统不能保证 $0.3 \times 10^{-3} \text{rad}$

的精度。这主要是带宽过宽所引起的〔见式(4—9)〕，但是，在这些距离下却并不要求这么宽的带宽。因为从式(4—4)可以看到， \ddot{E}_{max} 随着斜距R的增大而减小，也就是说，跟踪误差将随着R的增大而减小。例如，当R=24km时，根据式(4—3)可算得跟踪误差为 $\sigma_t = 0.006 \times 10^{-3} \text{rad}$ ，已大大低于要求值。所以，为了改善系统的性能，一个办法是当距离超过16公里时降低系统的增益，即降低系统的带宽 ω_{nv} ，这样就可减少噪声误差，表4—1所列就是这两种情况下系统性能的对比。考虑到输入信号与热噪声信号互不相关，所以表4—1中的总误差的均方根值是按下式来计算的：

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_n^2} \quad (4-13)$$

表 4—1 跟踪误差， 10^{-3}rad

斜距	固 定 增 益			变 增 益			
	σ_s	σ_n	σ_t	ω_{nv}	σ_s	σ_n	σ_t
4km	0.225	0.01	0.225	10	0.225	0.01	0.225
8km	0.056	0.04	0.069	10	0.056	0.04	0.069
16km	0.014	0.16	0.16	5	0.056	0.09	0.11
24km	0.006	0.35	0.35	2.5	0.10	0.14	0.17
32km	0.003	0.63	0.63	1.4	0.175	0.19	0.26

表4—1表明，现在变增益系统的跟踪误差 σ_t 小于 $3.3 \times 10^{-3} \text{rad}$ ，满足设计要求。当然，当增益改变时， K_2 和T（见图4—1）也应作相应的变化以保持外回路的阻尼比 ξ_0 恒定。由于实际运行时斜距R的信号总是有的，所以这种变增

益的控制是可以实现的。当然对具体的雷达跟踪系统来说还有它本身的一些问题^[1]，这里主要是以此作为例子来阐述系统设计中的一般问题。由此可知，当系统的带宽超过实际需要时，反而会使系统的误差增大。因此，设计时一般都要遵循窄带宽这一原则。这个例子具体说明了设计中如何确定带宽和如何根据最小噪声带宽来选择系统中的各种参数。

二、带宽及其设计问题

从第一节可以看到，系统的设计主要是围绕着带宽来进行的。很多系统的静态指标能否实现，也往往与带宽直接有关。这一节对带宽作进一步的讨论。

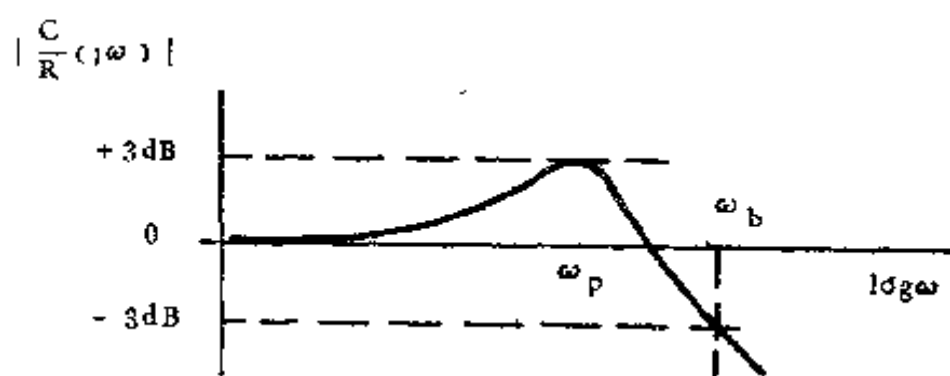


图 4—3 系统的频率特性

带宽是在频率特性上定义的。图4—3所示为一条典型的频率特性。频率特性上的+3dB值表示了该系统的相对稳定性。频率特性上-3dB所对应的频率 ω_b 称为截止频率。自动控制系统的工作频率都是从零开始的， $0 \sim \omega_b$ 就是系统可以通过的频率带，称为带宽。所以，带宽在数值上等于 ω_b 。

在设计中使用带宽这个概念并不是为了要精确求得-3dB处的频率值 ω_b ，而是把带宽看作一种性能指标，即保证

带宽是为了保证系统的快速性。因此，实际使用中往往根据所用的方法来选用其他一些性质相似的数据，而仍笼统地称之为带宽。例如，在解析计算中常以自然频率 ω_n 作为带宽。这是因为 ω_n 可以直接从系统的参数算得。这个 ω_n 与 ω_b 相接近，且与跟踪误差联系在一起。当用Bode图来进行计算时，则往往以过0dB线的穿越频率 ω_c 作为系统的带宽。

带宽越宽，系统的跟踪性能就越好，快速性也好。但是实际系统中往往有噪声，上一节已经说明，带宽越宽，噪声误差就越大。所以，实际设计时一般总是尽可能地压低系统的带宽。

此外，实际系统中还有另一个因素要求对带宽加以限制。这就是结构的机械谐振。图4—4所示为一典型的机械系统，其方程式为

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + F \frac{d\theta}{dt} + K\theta = 0 \quad (4-14)$$

这是一个二阶系统，其固有频率为

$$\omega_m = \sqrt{K/J} \quad (4-15)$$

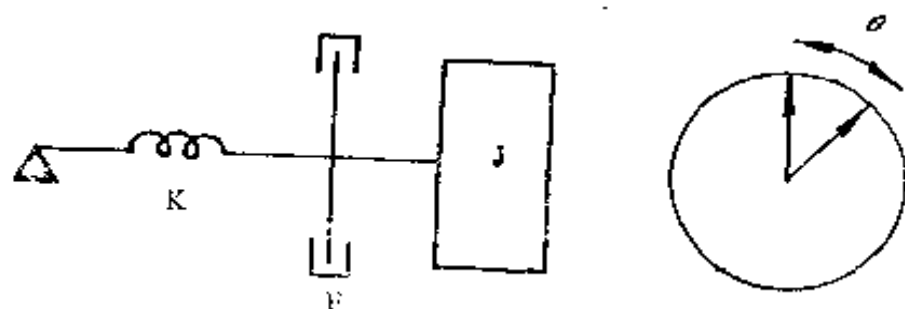


图 4—4 机械系统

虽然系统的实际结构要比这复杂得多，例如，图4—4的左端并不是固定的，而应该是一个伺服电机的轴，不过按图4—4算得的结果一般与实际的固有频率在数量级上是一致的。

的。

这种机械系统的实际位置可能是在整个闭环系统里面，也可能是在闭环外面。若在闭环里面，当固有频率 ω_m 接近系统的带宽 ω_b 时，其谐振特性将降低系统的稳定裕度，造成稳定问题。若在闭环外面，当系统的带宽较宽时，则噪声就有可能激起机械谐振。因此，实际设计时一般要求限制系统的带宽，使之满足不等式

$$5\omega_b < \omega_m \quad (4-16)$$

这里要强调指出，带宽是动态性能指标中的第一位指标。有些设计虽然实际上已将带宽考虑进去了，但由于不是正面对待这个问题，往往会引起人们的错觉，以为这个问题是可有可无的。这种看法是有害的，常给系统的设计和调试带来很大的困难。反之，若正面根据带宽来进行设计，设计问题就会顺利获得解决。下面结合实例来说明之。

〔例1〕运算放大器的校正

先从最熟悉的例子开始。

运算放大器是指能够进行基本数学运算的加、减、积分、微分等等的放大器。一般是采用高增益的直流放大器并加以适当的反馈而组成的。图4—5是一种最简单的工作于跟随状态的运算放大器。

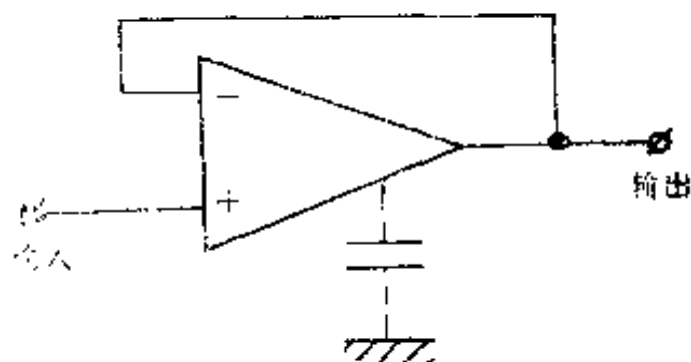


图 4—5 运算放大器

我们现在就从负反馈系统的观点来研究它。

图4—6所示，为高增益直流放大器的典型频率特性。常说的放大器增益，例如100dB，

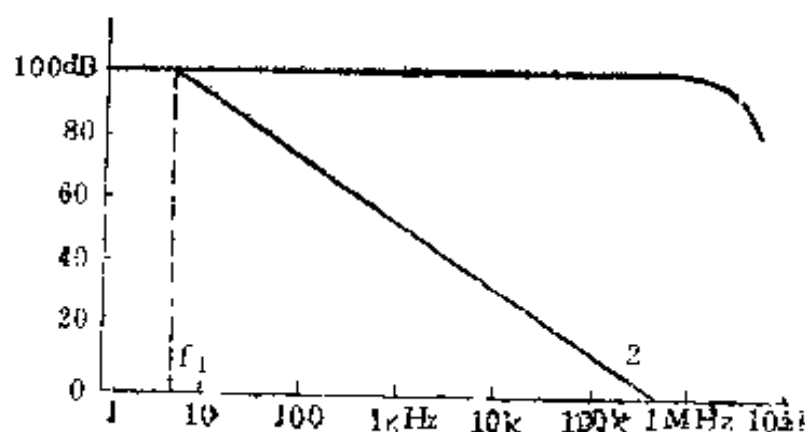


图 4—6 运算放大器的频率特性

是指其低频的线性数学模型而言的。由于各种结间电容的影响，实际的增益特性约到1MHz前后开始衰减，如图中曲线1。此时相频特性上的相位迟后也开始加大。假如，按图4—5的线路将输出直接反馈到负输入端，那么，由于图4—6上开环特性1过0 dB线处的相位大大超过 -180° 。这个线路将是不稳定的，因而也是不能工作的。

一个大家都知道的事实是，直流放大器上应加校正网络，例如图4—5中虚线所示。加校正后的特性见图4—6的特性2。所谓校正，就是故意引入一个转折频率（本例中 $f_1 = 5\text{Hz}$ ），使系统的特性能以 -20dB/dec 的斜率穿越0dB线。加校正后图4—5所示的运算放大器就能稳定工作了。此时系统的带宽是500kHz。

通过这个例子应该看到，无论设计什么系统，总要先解决带宽问题。首先要回答系统的带宽是多少？然后才是实现问题——校正。本例中为了保证500kHz的带宽，就得故意引入一个转折频率 f_1 为5Hz的校正。

带宽设计中应注意系统的带宽不能超出所用对象的数学模型的适用频带。超出这个频带时，由于特性显著变坏，稳

定性就不能保证了。本例中 1 MHz 时放大器的特性已不符合 100 dB 的低频模型了（图4—6特性1），所以这个运算放大器的带宽也不可能做到 1 MHz 。

〔例2〕功率放大器的设计

设有一随动系统中的功率放大器需要设计。功率放大器输出控制一直流力矩电机SYL—15。为了简化系统的结构，力矩电机的功率电源采用不稳压线路。因此，需要采用电流反馈以保证性能稳定。图4—7就是此功率放大器的原理图。图中1为运算放大器，起信号相加的作用。2为功放级，输出最大电流为 2.3 A 。

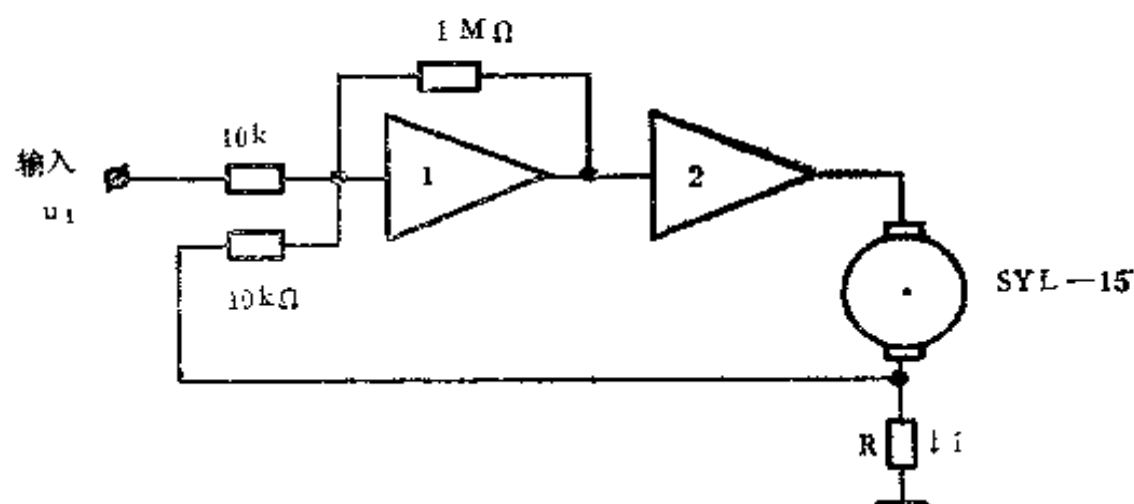


图 4—7 功率放大器原理图

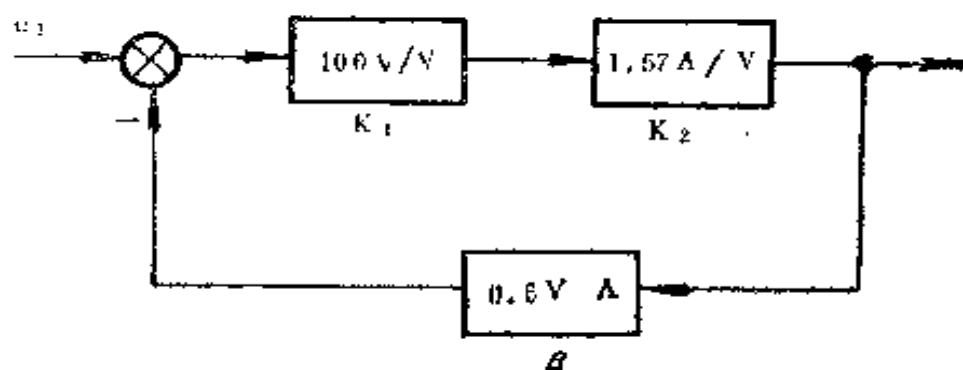


图4—8 功率放大器的框图

这个功率放大器的方框图见图4—8。图中标出了各级的静态比例系数。系统的开环增益为

$$K \beta = K_1 K_2 \beta = 94 \quad (4-17)$$

这里要指出的是，图4—7所示的放大器没有进行带宽设计，实际上存在着高频振荡，是不能工作的。设计这种带反馈的线路时，首先应确定其带宽，再设法实现之。

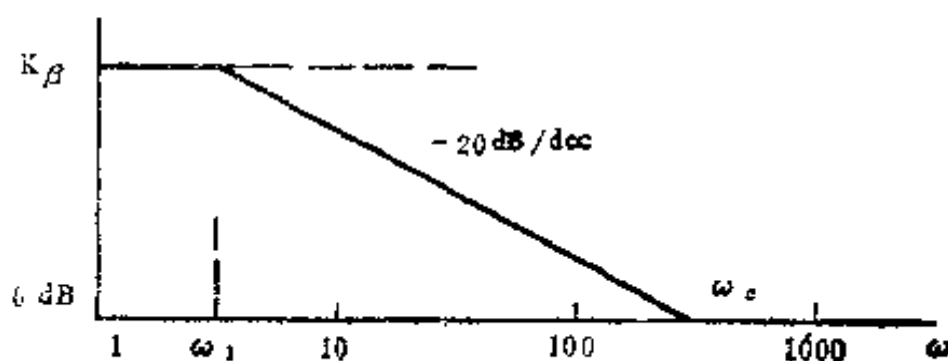


图 4—9 功率放大器的频率特性

设根据整个系统要求，确定功放线路的带宽为 40Hz ，即

$$\omega_c = 2\pi(40) \approx 250 \text{ s}^{-1} \quad (4-18)$$

系统的低频部分特性见图4—9虚线所示。显然，为了使其频率特性能在 ω_c 处以 -20dB/dec 的斜率穿越 0dB 线，应该在开环特性上引入一个转折频率 ω_1 。

按图4—9的几何关系，可知

$$\omega_c / \omega_1 = K \beta \quad (4-19)$$

即

$$\omega_1 = \omega_c / K \beta = 250 / 94 = 2.7 \text{ s}^{-1} \quad (4-20)$$

这个 ω_1 值要求一个时间常数为 $\tau = 1/\omega_1 = 0.37\text{s}$ 的极点。按照具体元件的参数，选

$$\tau = 0.44 \text{ s} \quad (4-21)$$

这个转折频率在实现时可采用图4—10所示的线路。图中1就是图4—7中的运算放大器1。由此可见，只要在原来的线路中，在 $R = 1\text{M}\Omega$ 的电阻上并以电容 $0.44\text{ }\mu\text{F}$ 就可以消除

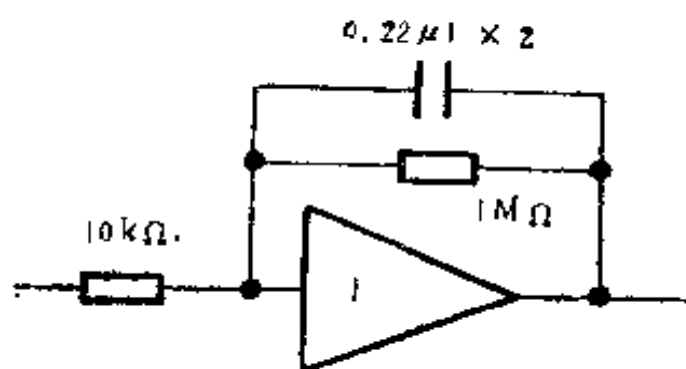


图 4—10 校正的实现

自振荡。现在这个功率放大器已能够在 40Hz 的设计带宽内保证电机的电流 i 无畸变地跟随输入信号 u_1 ，而不受负载的影响。

这个例子说明，只要带宽要求明确，设计问题就可迎刃而解。

〔例3〕流量调节

设有一管路的流量需要自动调节（图4—11）。流量是用节流孔来测量的。现在来讨论该选什么调节器，调节器的参数又怎么来整定。

流量的调节特性在一定的频带内可以视为比例特性。所以现在的问题是选用什么调节器才能使系统的开环特性在 ω_c 处以 -20dB/dec 穿过 0dB 线以保证系统具有一确定的带宽。工业上常用的调节器有积分规律、比例规律、比例加积分等等。显然运用单纯的积分规律就可以达到这个要求。这就是说，对流量调节来说，可选用简单的积分调节器（图4—11）。

至于积分规律中的比例系数，可以根据稳定性分析来选择一个最大的值。事实上，这项工作也可等到系统调试时再来做。调试时先将增益调在最低，然后逐渐加大到可能的最

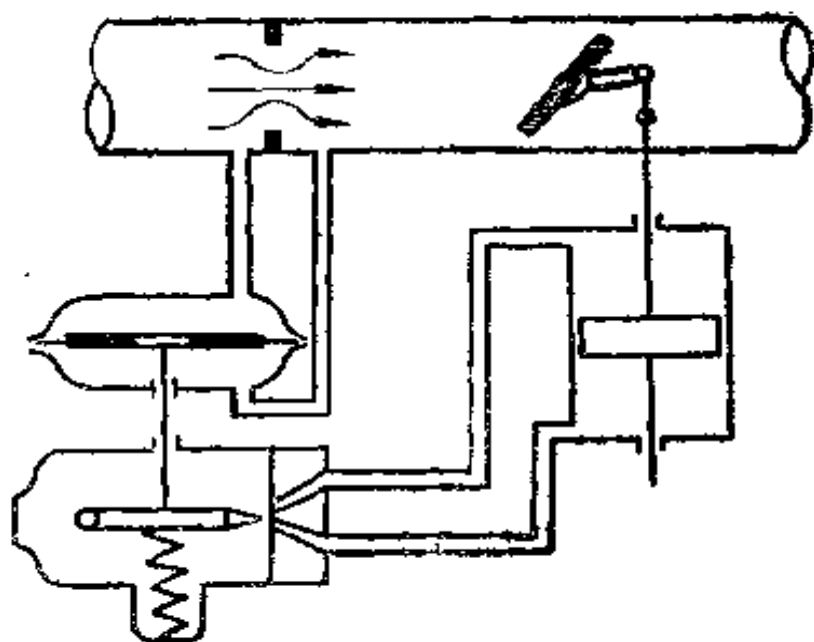


图 4—11 流量调节

大值。

这里要指出的是系统的带宽不能太高，否则对象的这个比例的数学模型就不适用了。因此这种积分调节器的动作速度也是比较低的。

这个例子确实很简单。我们看到，只要带宽要求明确，有些系统的设计基本上用不着计算。反之，本例中若认为反正很简单，随便选用一个比例调节器倒反而可能调不出来。

最后，再来看一个与带宽有关的问题——数学模型。上面已经指出过系统的带宽不能超出对象数学模型所适用的频带。反过来也可以说，对象的数学模型可以简化，只要与系统的带宽相适应就可以。例如电机的传递函数在大多数应用场合可写成

$$G(s) = \frac{K_m}{s(T_ms + 1)}$$

就是这个道理。这种简化，对控制器来说也是适用的。例如图4—11所示的液压调节器可视为积分调节器。很多过程控制用的调节器可视为理想的比例、比例加积分规律等等也是这个道理。

由此可见，首先要有带宽的概念，才能选用适当的数学模型。因此带宽这一概念在系统的分析中也占首要地位。

三、相对稳定性及其指标

控制系统设计中常将动态要求反映在阶跃响应曲线（图4—12）的几个数据上。这些指标可以归为两类：一类是反映响应速度的。例如调节时间 T_s ，上升时间 T_r 等等；一类则是反映系统的相对稳定性的。例如超调量 σ ，振荡次数等等。这些指标在频域中则分别是带宽 ω_b 和谐振峰值 M_p 。

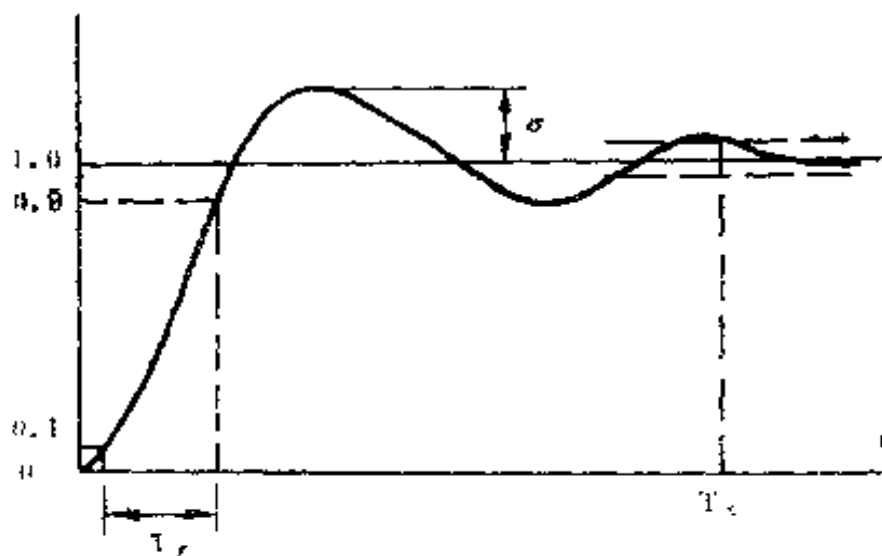


图 4—12 系统的阶跃响应

关于响应速度这一指标，在上两节中已经讨论过了，这和系统的跟踪精度有密切的关系。从讨论中可以知道，我们并不盲目追求快速性（或带宽），系统的带宽要受到噪声和机械谐振的限制。这一节我们来讨论相对稳定性问题。

相对稳定性的指标一般称为稳定裕度。注意到就跟踪误差来说，不论稳定裕度是大或小，基本上都不会影响系统对一些低频输入信号的跟踪特性，那么究竟为什么要考虑这个相对稳定性呢？

原来对控制系统还有其他要求。例如，对火炮随动系统，除了要保证跟踪性能外，还应满足调转特性的要求。当从一个方位角调转到另一个方位角时，若不能很快在新的位置上稳定下来，就不能满足战术要求。其他各种系统也都有要满足设定值变化的要求。

除了设定值有阶跃变化的情形外，有些干扰信号也具有阶跃变化的特性。例如，对轧辊的调速系统来说，毛坯厚度的变化可用阶跃干扰来近似。对于这样的系统，我们也希望扰动后速率能很快稳定下来。过程控制中的负载变化也可视作阶跃变化。例如，汽轮机发电机组，当电网跳闸时对汽轮机调速系统来说，其负载的变化就是阶跃形式的。

有些系统的负载变化具有脉冲特性。例如，对火炮随动系统来说，发射时的后座力就可视为脉冲干扰。若系统的稳定裕度不够，那么在跟踪过程中当发射第一发炮弹后长时间不能在跟踪位置上稳定下来，显然这样的系统也是不能满足战术要求的。

总之，对实际系统，要求扰动后的过渡过程能在一个恰当的时间内结束。这和一般的稳定性要求不一样，因为从绝对的意义上讲，稳定性与过渡过程衰减的时间长短无关。因

此，上述的这种性能要求就叫做相对稳定性。

相对稳定性，在时间特性上，表现为超调量和振荡次数。其具体指标和系统的工作条件有关。若是一般的作为位置指示用的小功率随动系统，超调量25%即可满足要求。若系统的设置值经常要变，或者负载经常在变，就要求提高系统的稳定程度才能保证系统工作的平稳性。这时，允许的超调量指标就要小，一般定为5%。设计时若无明确要求，则一般也可指定25%作为超调量的设计指标。这里要说明的是，对实际系统来说，相对稳定性在一定程度上是一种定性要求，其性能指标也可以理解为一种性能限制，例如，要求超调量为25%，并不是说20%就不行，而是指只要不超出约25%就都满足要求。若将这指标理解得太死，无疑会束缚住设计者的手脚。

应该注意的是有些系统有自己的工艺要求，这时就不只是从动态性能方面来要求了。例如，带动发电机的水轮机或汽轮机的调速系统要求基本上无超调，以满足发电机并电网的要求。船舶自动驾驶系统要求在狭窄水道航行时不能有超调，否则就要出现碰撞事故。又例如，一用于测试惯性器件的精密转台，若被测件有滞环特性，则转台的位置控制就要求无超调，否则会引起测试误差。

相对稳定性的指标在频域法中则是谐振峰值 M_p 。一般设计时可取 $M_p = 3\text{dB}$ 。 M_p 等于6dB的系统也是可以工作的。

用频域法设计时一般都是在开环频率特性上进行的，所以，需要将 M_p 的指标变换到开环频率特性上去，这就是相位裕度和幅值裕度。这后两个指标是根据开环特性与等 M 图线的相对关系来制定的。对大多数实际系统来说，往往只用这

两者中的一个指标就可以了。若系统的开环频率特性在过0 dB的频率 ω_c 附近与M圆大致平行或相切（如图4—13曲线1），一般就可以用相角裕度来表征其相对稳定性。相角裕度的一般值为 30° 到 50° 。相角裕度为 60° 的系统一般都已经是过阻尼了。

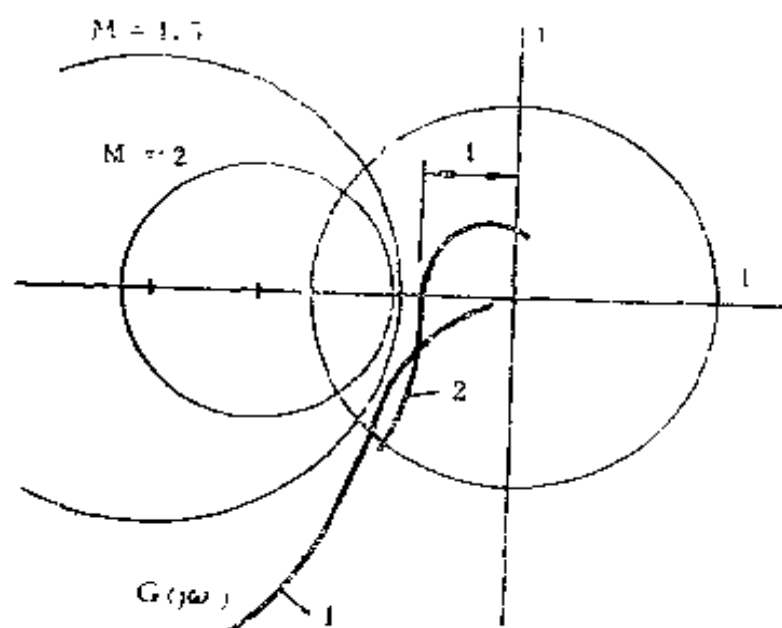


图 4—13 频率特性的两种类型

大多数系统具有如图4—13曲线1所示的频率特性。所以，一般设计时都采用相角裕度作为相对稳定性的指标。但是，若系统的频率特性具有图示特性2的形状，即幅频特性在过 180° 时变化较缓慢，这时则宜采用幅值裕度作为相对稳定性的指标。这个幅值裕度一般要求大于5分贝，即对应的 l 值为 $l \leq 9.56$ 。对于这后一种系统，其相对稳定性对增益的变化比较敏感。所以，调试时宜直接根据幅值裕度来设置系

统的增益。具体做法是先加大增益，使系统接近临界稳定状态，然后测定这时的增益值，将其衰减到约0.6倍，即可作为实际系统的增益，而用不着再调了。这一类系统的例子见本章第四节之3。

这里要指出的是相对稳定性是一种定性性质的指标，所以也没有必要要在时域指标和频域指标之间建立一个确切的关系式。假如你用频域法设计，就尽可采用 $M_p = 3\text{dB}$ 的指标，而用不着将它“翻译”成时域指标。选用时域指标或频域指标没有本质上的区别，视所用的方法、测试手段和设计者本人的经验而定。当然，也不排斥几种指标并用，但要注意相互间不要有矛盾，例如，超调量和 M_p 值应相一致。

相对稳定性是所有实际系统都应具有的性能。由于对各种系统都有类似的指标要求，所以，下面在——介绍具体设计实例时就不再重复强调这个要求了。

四、随动系统的设计

上面介绍了设计的一般原则，现在将这原则应用于各类系统。虽然自动控制的应用范围很广，但大多数系统都可归结为下述的几种基本类型。只要弄清楚每一种类型的带宽、参数和误差系数之间的关系，再加上一些最基本的校正概念，那么，系统的设计问题就不难解决了。

1. 基本 I 型系统

我们将只有一个转折频率 ω_1 的系统（图4—14）称为基本 I 型。这是 I 型系统中最为简单的一种系统。

基本 I 型系统的开环频率特性为

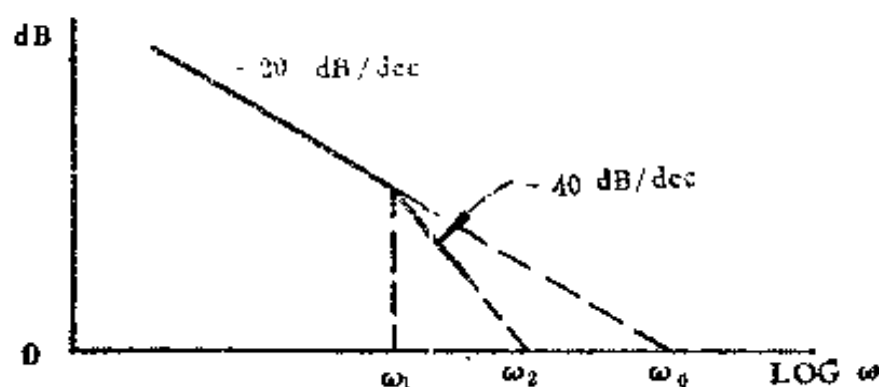


图4—14 基本 I 型系统的特性

$$G(j\omega) = \frac{\omega_0}{j\omega \left(\frac{j\omega}{\omega_1} + 1 \right)} \quad (4-22)$$

现以转折频率 ω_1 为基准，取无量纲频率

$$\Omega = \omega / \omega_1 \quad (4-23)$$

那么式 (4—22) 可改写为

$$G(j\Omega) = \frac{K}{j\Omega(j\Omega + 1)} \quad (4-24)$$

式中 K 为无量纲增益，

$$K = \omega_0 / \omega_1 \quad (4-25)$$

取无量纲变量后，式 (4—24) 中只有一个参数 K 了。表 4—2 列举了不同 K 值下系统的动态性能。从表 4—2 可见， K 值在 $1/2 \sim 1$ 之间较为适宜，这时阻尼不是太小，有一定的稳定裕量。

下面再从等效噪声带宽方面来进行比较。

系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega_0 \omega_1}{s(s + \omega_1)} \quad (4-26)$$

闭环传递函数为

表 4—2

基本 I 型系统的性能

无量纲增益	$K = \omega_0 / \omega_1$	1/2	1	2
单位阶跃输入下输出的峰值		1.05	1.15	1.3
阻尼比	$\xi = 1/(2\sqrt{K})$	0.707	0.5	0.35
相位裕度		66°	52°	39°
闭环幅频特性峰值	M_p	≤ 1	1.15	1.5

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\omega_0 \omega_1}{s^2 + \omega_1 s + \omega_0 \omega_1} \quad (4-27)$$

根据第三章的表3-1可得积分值

$$I_2 = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2} = \frac{\omega_0}{2} \quad (4-28)$$

因此，系统的等效噪声带宽为

$$\omega_{bn} = \pi I_2 = \omega_0 \pi / 2 \quad (4-29)$$

式(4-29)表明，只要 ω_0 不变，K值大小对等效噪声带宽并无影响。既然如此，一般倾向于取 $K=1$ 。因为这有助于抑制可能存在的高频噪声。

因此，综合起来看，基本 I 型系统的参数配置以 $\omega_0 = \omega_1$ 最为适宜。

式(4-29)还表明，基本 I 型系统的等效噪声带宽与一阶系统的等效噪声带宽相同（见第三章）。这说明若开环特性只有一个积分环节，就可以加一个转折频率而不致影响其等效噪声带宽。但这却可以削弱系统中可能存在的高频噪声。因此，即使是一个纯积分特性，当组成系统时也要引入

一个转折频率 ω_1 ，使之成为基本I型系统。从这一点上来说，基本I型特性（图4—14）是I型中最简单、最基本的特性。

这里要说明的是，基本I型系统要求 $K=1$ （即 $\omega_0 = \omega_1$ ），这只是增益的相对值。带宽 ω_0 的具体数值则仍是要根据跟踪误差的要求来确定。

〔例1〕仪表随动系统

图4—15所示为一电子电位差计，用于测量和记录温度。这里温度是用热电偶T来测量的，而反映温度的热电势 e_x 则是用补偿的办法来读得。两相电机带动指针和电位计，当补偿电压 $e_c = e_x$ 时就停下来。

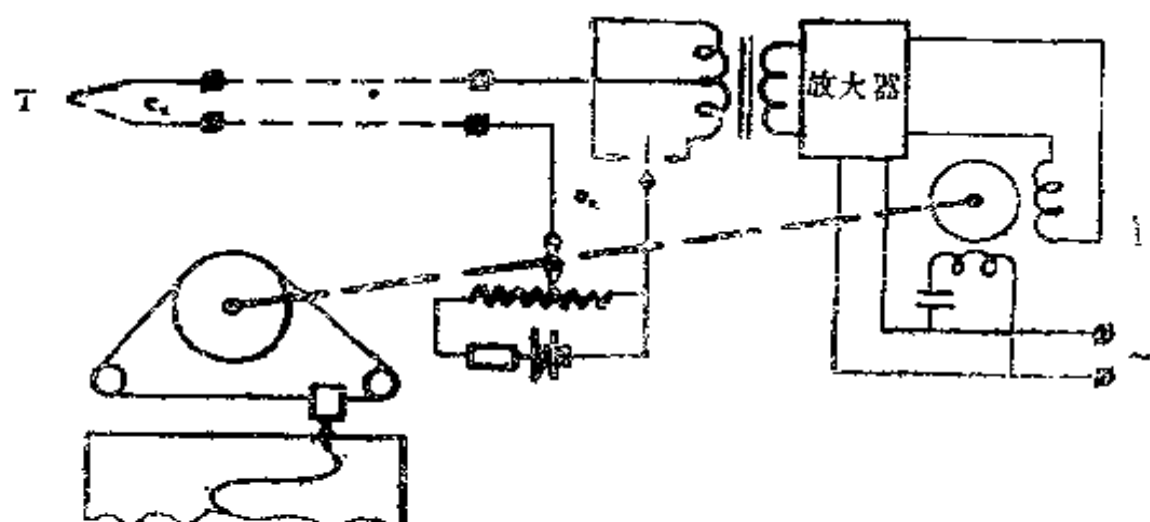


图4—15 电子电位差计

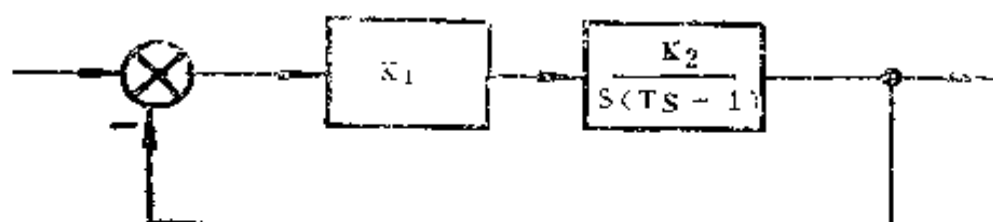


图4—16 电子电位差计框图

这是一个典型的不带任何校正装置的仪表随动系统。图4—16所示为此系统的框图。图中第一个环节代表放大器，第二个环节表示电机。

从图4—16可见，这是一基本I型系统，其转折频率 $\omega_1 = 1/T$ 。

设电机的时间常数为 0.05 s ，则 $\omega_1 = 1/T = 20\text{ s}^{-1}$ 。根据对基本I型系统的讨论，可以立即确定出该系统的增益应为

$$K_v = K_1 K_2 = \omega_1 = 20\text{ s}^{-1}$$

若电机的常数和仪表的结构已定，那么，就可以根据上式求得所要求的电压放大倍数

$$K_1 = K_v / K_2$$

对于这种仪表随动系统，因为电机的参数已经定了，所以系统的增益（或带宽）已不容选择，等于时间常数的倒数，一般为 $15 \sim 20\text{ s}^{-1}$ 。不过对于记录仪，典型的输入信号可认为是阶跃形式的，即位置输入。因此，只要是I型系统，虽然增益 K_v 并不大，也能满足要求。

通过此例可以看到，这种最简单的随动系统的增益是有限的。若对 K_v 要求较高，则应采用改进I型系统。

〔例2〕陀螺力反馈测漂回路的设计

图4—17所示为一两自由度陀螺仪和它的测漂线路。当转子绕y轴有漂移时，失调角 θ ，控制x轴的力矩器使转子绕y轴进动，消除失调角。所以x轴力矩器电流 i_x 就反映了绕y轴的漂移率。同样，绕x轴的陀螺漂移率可根据y轴力矩器的电流 i_y 来求。事实上，整个试验装置还受到地球自转的影响，力矩器的电流减去地速分量才是陀螺的漂移率。

这两个轴的力反馈线路都是一样的。现在就以y轴为例

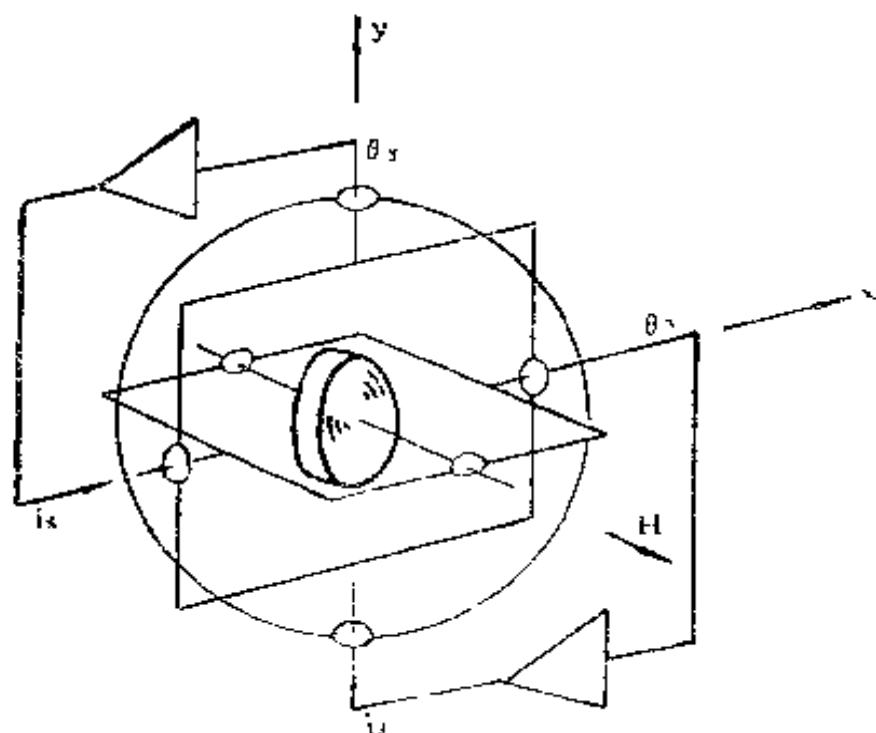


图 4—17 陀螺仪和测漂线路

来进行分析。图4—18所示就是这一个轴的力反馈回路。图中

ω_{by} = 壳体绕y轴相对惯性空间的速率，即地速分量；

θ_{fy} = 浮球相对惯性空间的转角；

θ_f = 浮球相对于壳体的转角；

M_x = 绕x轴的干扰力矩；

i_x = x轴力矩器的电流；

H = 陀螺转子的动量矩。

结合图4—18可以看到，力矩器的电流有两个分量，一个就是用来补偿干扰力矩 M_x 的。干扰力矩被补偿后，浮球相对于惯性空间的转角 θ_{fy} 将跟踪 θ_{by} 。这时，浮球相对于壳体的转角 θ_f （失调角）基本上进入零位。这样，记录力矩器电流 i_x ，将它减去地速分量，就得到了x轴上的干扰力矩，或者说绕y轴的漂移率。

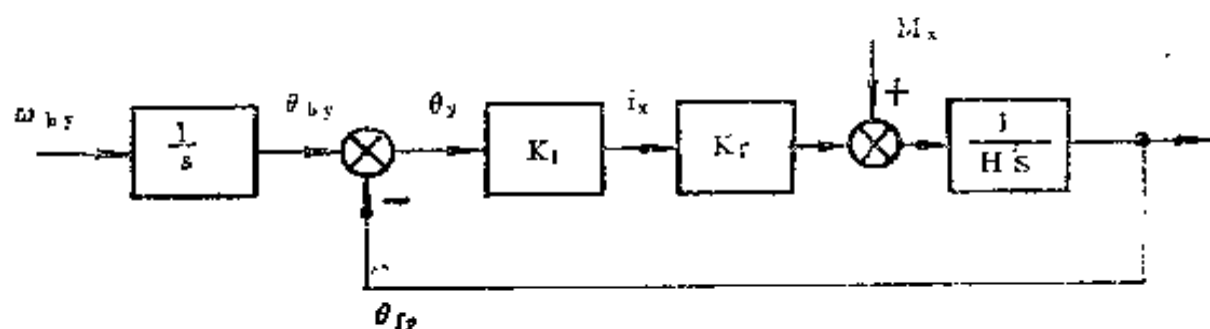


图 4—18 力反馈测漂回路

现在从动态设计的角度来讨论这个系统。

设力矩与进动角速度成比例，因此，图 4—18 力反馈回路中的陀螺为一积分环节。图中 H 是陀螺的动量矩。系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_I K_T}{Hs} = \frac{K_v}{s} \quad (4-30)$$

式中

$$K_v = K_I K_T / H \quad (4-31)$$

K_I = 力矩器电流与失调角之间的增益，

K_T = 力矩器系数。

此系统为 I 型，其误差

$$e(t) \approx \frac{1}{K_v} \dot{r} \quad (4-32)$$

对于力反馈测漂来说，地速在数值上是一个主要的量，因为漂移率一般小于 $1/1000$ 地速。这就是说，跟踪误差主要是由地速分量 ω_{by} 引起的。要求是当沿 y 轴的地速分量达到地球的自转速时 ($15^\circ/\text{h}$)，系统的失调角为 $1''$ 。将这个要求代入式 (4—32) 就可以确定系统的开环增益为

$$K_v = \frac{\Gamma_{\max}}{e_{\max}} \approx 15 \text{ s}^{-1} \quad (4-33)$$

设

$$H = 4 \cdot 10^4 \text{ g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s},$$

$$K_T = 2 \text{ g} \cdot \text{cm} / \text{mA}。$$

将 H , K_T 以及 K_v 值代入式 (4—31) 得

$$K_i = K_v H / K_T = 1.5 \text{ 毫安/角秒}。 \quad (4-34)$$

设陀螺传感器的系数为 $K_g = 1 \text{ 毫伏/角秒}$, 代入式 (4—34) 可得此线路的电气部分的增益为 1.5 mA/mV 。

式 (4—30) 表明, 此系统的基本特性为纯积分特性。因此, 根据上面对 I 型系统的分析可知, 当组成系统时宜再加一转折频率, 使之成为基本 I 型。转折频率应等于

$$\omega_1 = K_v = 15 \text{ s}^{-1}。 \quad (4-35)$$

图 4—13 是一个在实际中使用的线路, 其传递函数为

$$G(s) = \frac{s + 460}{s + 20}。 \quad (4-36)$$

式 (4—36) 中分母部分就是所要求加上的转折频率。

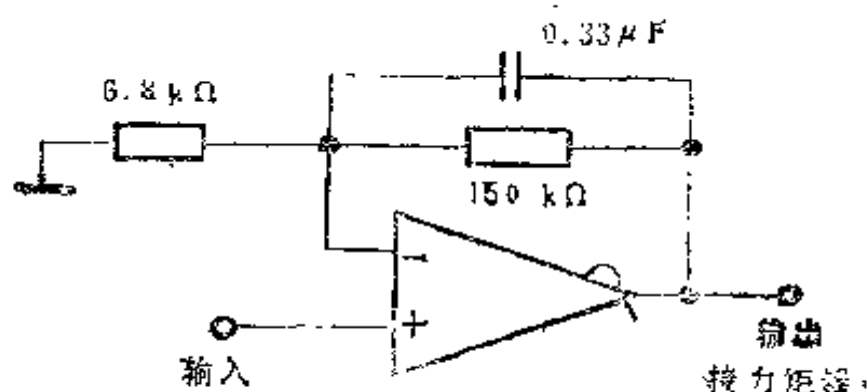


图 4—13 力反馈回路的校正网络

应该说明的是设计中所考虑的都是些主要参数, 具体线路中尚有很多小时间常数, 不过这些时间常数常较主要的时间常数小一个数量级, 不影响系统总的性能。

3. 改进 I 型系统

基本 I 型系统的增益较低, 所以大部分 I 型系统都属于

改进 I 型，其频率特性由三段所构成：-20，-40，-20
(图 4—20)。

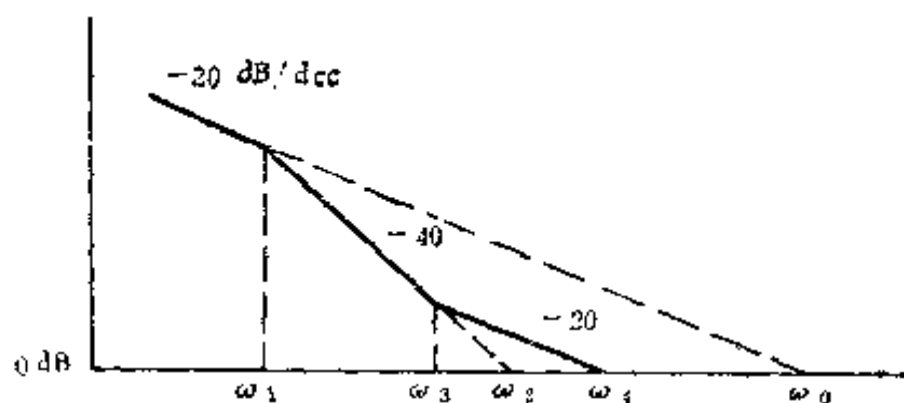


图4—20 改进 I 型系统的特性

这类系统的误差系数见第二章式 (2—25) 和式 (2—26)。从第二章还知道，一般设计时系统的误差信号可视为 [见式 (2—48)]

$$e(t) \approx C_1 \dot{r} = \frac{1}{\omega_0} \dot{r} \quad (4-37)$$

因此，根据此式和误差要求便可确定 ω_0 值。

对于这类系统的设计来说，主要就是确定 ω_0 和 ω_1 的值。至于 ω_3 的值，则可以根据稳定分析或最小噪声带宽来确定，它一般小于 $\omega_4/2$ 。下面结合设计实例来说明如何确定 ω_1 和 ω_3 。

〔例1〕小功率随动系统的设计

现在来分析一指挥仪系统中的小功率随动系统的设计^[3]。这个系统用于由瞄准具带动解算装置。由于要求精度较高，频带较宽，所以采用改进 I 型。

设所要跟踪的是一作等速等高直线飞行的飞机，飞行速度 $V = 250$ m/s，最短水平距离 $X_0 = 500$ m，故

$$a = V/X_0 = 0.5 \text{ s}^{-1}$$

相应的方位角的变化曲线 dA/dt 和 d^2A/dt^2 见第二章图2—4。本例中最大的 dA/dt 和 d^2A/dt^2 分别为

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_{\max} &= 500 \times 10^{-3} \text{ rad/s} \\ \ddot{A}_{\max} &= 163 \times 10^{-3} \text{ rad/s}^2 \end{aligned} \right\} \quad (4-38)$$

设允许的跟踪误差为

$$e_{\max} = 10^{-2} \text{ rad} \quad (4-39)$$

将式 (4—38) 和式 (4—39) 代入式 (4—37) 可得

$$\omega_0 = 500 \text{ s}^{-1} \quad (4-40)$$

本系统是一个小功率系统 (22w)，要求结构尽量简单，所以用电机的时间常数 T_m 来形成第一个转折频率 ω_1 ，即

$$\omega_1 = 1/T_m = 6.65 \text{ s}^{-1} \quad (4-41)$$

现在 ω_0 和 ω_1 已经确定，图 4—21 所示为此系统的低频部分特性。

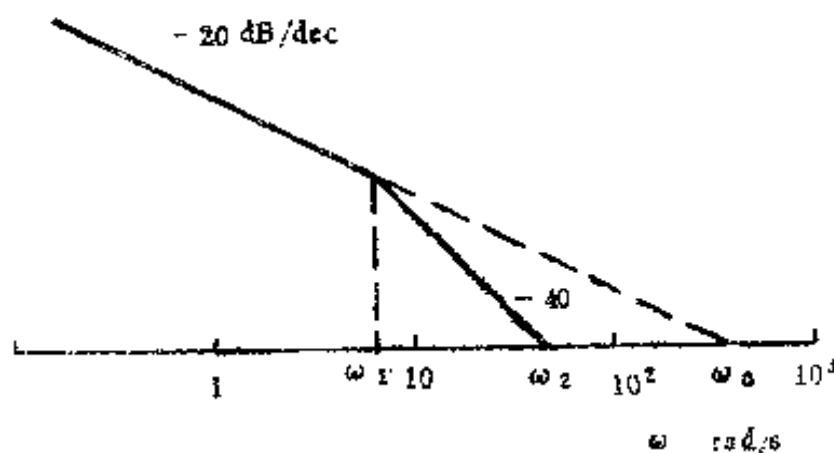


图 4—21 小功率随动系统的低频部分特性

从图 4—21 可见，现在剩下的问题是要保证系统稳定。显然，加一微分校正就可达到目的。

这种利用电机的时间常数形成所要求的转折频率的方案

大多适用于小功率系统。而小功率系统的校正往往有自己的特点。本例中这个系统从自整角机到两相执行电机都采用交流电，因此为了简化结构，希望用交流校正网络。下面就来介绍用于这类交流载波系统中的微分校正网络。

交流载波系统的信号是调制在载波频率 ω_c 上进行传递的。例如，误差信号 $e(t)$ 在交流载波系统中就是

$$e_1(t) = e(t) \cos \omega_c t \quad (4-42)$$

交流校正网络的输出则是

$$m_1(t) = m(t) \cos \omega_c t \quad (4-43)$$

这里要求的信号变换是指调制信号的包络，即 $e_1(t)$ 和 $m_1(t)$ 中的 $e(t)$ 和 $m(t)$ 之间的变换。设要求的 $e(t)$ 和 $m(t)$ 的变换关系为

$$M(s) = G(s)E(s). \quad (4-44)$$

现在来求满足式(4-44)的交流校正网络的特性。

设一交流校正网络如图4-22所示，其输入为 $e_1(t) =$

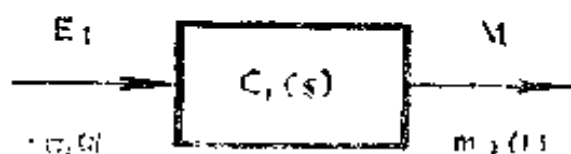


图4-22 交流校正网络

$$e(t) \cos \omega_c t,$$

$$\text{因此 } \cos \omega_c t =$$

$$(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})/2,$$

$$\begin{aligned} e_1(t) &= e(t) \cos \omega_c t \\ m_1(t) &= m(t) \cos \omega_c t \end{aligned}$$

故得 $e_1(t)$ 的拉氏变换为

$$E_1(s) = [E(s - j\omega_c) + E(s + j\omega_c)]/2$$

$$(4-45)$$

式中 $E(s)$ 为包络信号 $e(t)$ 的拉氏变换，即

$$E(s) = \mathcal{L}\{e(t)\},$$

这里同样可以写得交流校正网络的输出变换式为

$$M_1(s) = [M(s - j\omega_c) + M(s + j\omega_c)]/2 \quad (4-46)$$

式中 $M(s)$ 为包络信号 $m(t)$ 的拉氏变换, $M(s) = \mathcal{L}\{m(t)\}$ 。

式(4—45)和式(4—46)相除, 并将式(4—44)代入, 就可得交流校正网络的传递函数为

$$G_1(s) = \frac{M_1(s)}{E_1(s)}$$

$$= \frac{G(s - j\omega_c)E(s - j\omega_c) + G(s + j\omega_c)E(s + j\omega_c)}{E(s - j\omega_c) + E(s + j\omega_c)} \quad (4-47)$$

取 $s = j\omega$, 这里主要研究 $\omega \rightarrow \omega_c$ 时的频率特性。

考虑到 $|\omega_c| \gg |\omega_b|$, ω_b 为输入信号 $e(t)$ 的带宽。故当 $\omega > 0$ 时, $\omega + \omega_c$ 显然超出信号的带宽, 所以 $E[j(\omega + \omega_c)] = 0$ 。当 $\omega < 0$ 时, 则有 $E[j(\omega - \omega_c)] = 0$ 。这样, 从式(4—47)可写得

$$G_1(j\omega) = \begin{cases} G[j(\omega - \omega_c)], & \omega > 0, \\ G[j(\omega + \omega_c)], & \omega < 0 \end{cases} \quad (4-48)$$

式(4—48)就是能满足上述式(4—44)要求的交流校正网络的频率特性。该式表明 $G_1(j\omega)$ 具有与 $G(j\omega)$ 相同的形式, 只是频率特性的原点要从零移到 ω_c 处。

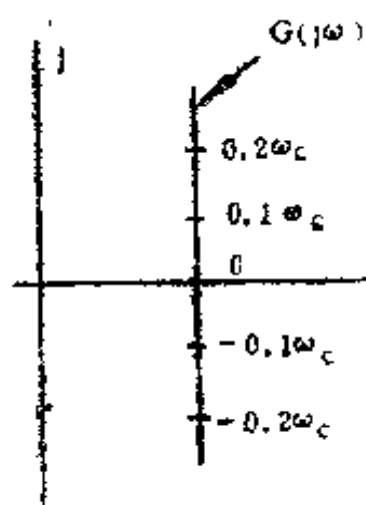
设要求的微分校正的频率特性 $G(j\omega)$ 如图4—23 a所示, 现在只要将 $G(j\omega)$ 的原点移到 ω_c 上就可得到所要求的交流校正网络的频率特性(图4—23 b)。

图4—24是图4—23 b所对应的幅频特性。我们知道, 双T形或桥式T形网络具有如图4—24所示的频率特性。因此, 交流载波系统中可以用这样的网络来实现微分校正。图4—25所示就是上面所说的小功率随动系统所采用的桥式T形线路。本例中各元件的参数为

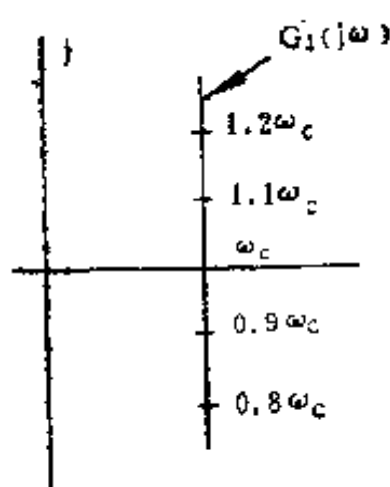
$$R_1 = 1.378 \text{ k}\Omega, C_1 = 0.1 \mu\text{F},$$

$$R_2 = 204.4 \text{ k}\Omega, C_2 = 0.25 \mu\text{F}$$

(4-4S)



(a)



(b)

图4—23 微分校正的频率特性

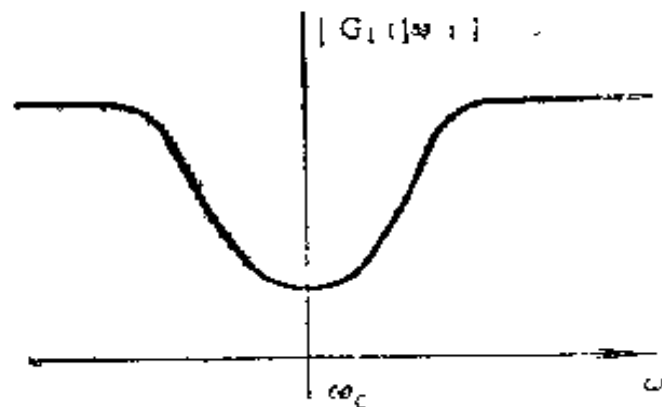


图4—24 交流系统中
微分校正网络的幅频特性

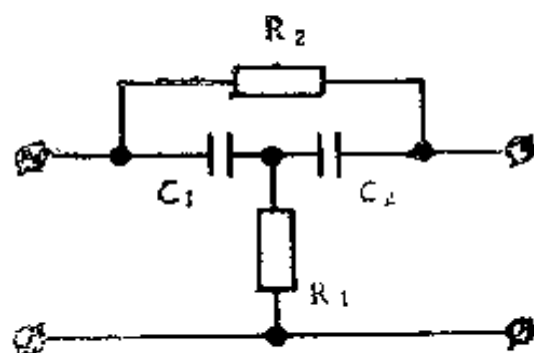


图4—25 桥式T形网络

图4—25所示线路的传递函数为

$$G_1(s) = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + R_1 (C_1 + C_2) s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) s + 1}$$

此线路的固有频率可计算如下：

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} = (377)^2 = (2\pi \times 60)^2 \quad (4-51)$$

此 ω_0 即对应于60Hz的载波频率。图4—26是此网络的频率特性，实线为所要求的理论上的超前特性，虚线为实测特性。

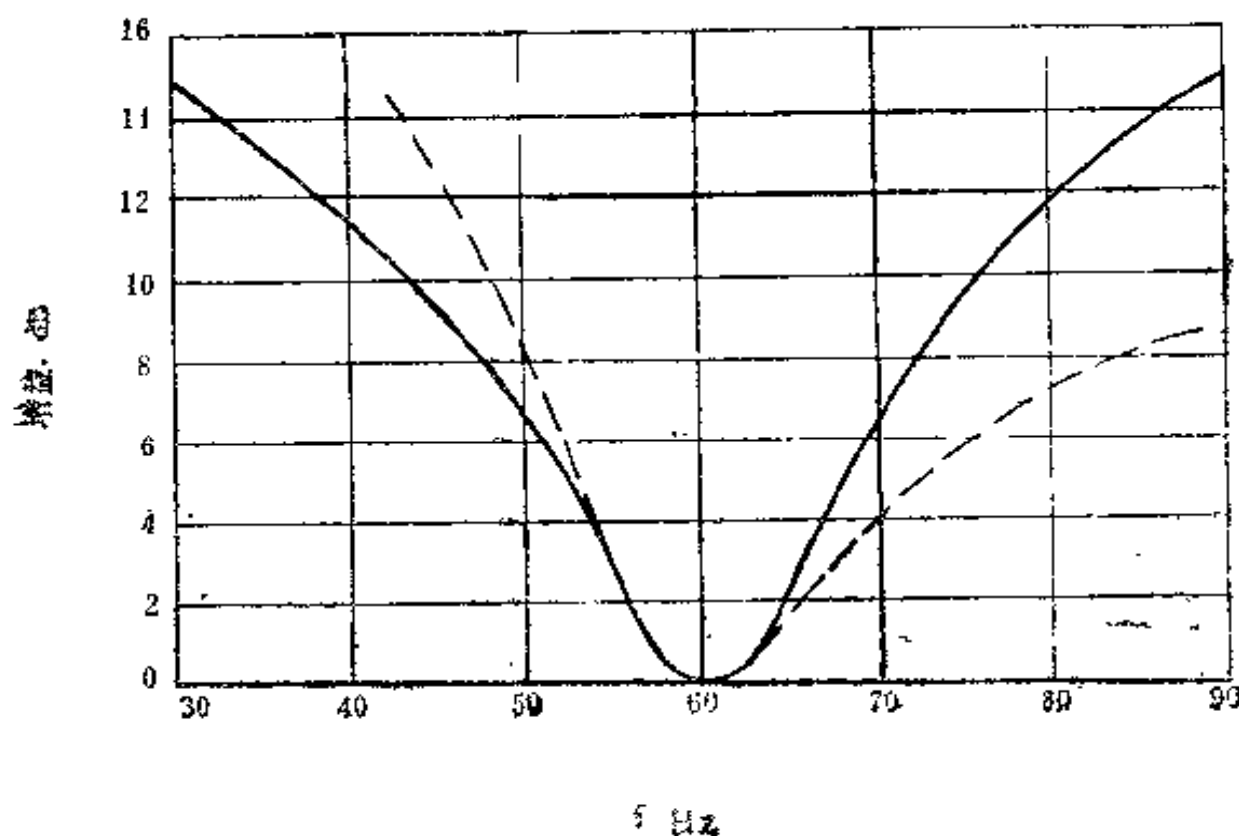


图4—26 图1—25网络的频率特性

注意到图4—24的特性在 ω_0 处有很大的衰减，结合本例来说，式(4—50)在 ω_0 处的衰减为40 dB。这里是将这个衰减归算到系统的总的增益上，因而得到如图4—26所示的增益标度，最低点为0分贝。

图 4—26 上对应于 3dB 的带宽约为 5.5Hz，这对应于微分时间常数为

$$T_d = \frac{1}{2\pi(5.5)} = \frac{1}{34.5} = 0.029 \text{ s} \quad (4-52)$$

在这个小功率随动系统中配上如图 4—25 所示的校正网络后，确实保证了稳定^[3]。实验证明系统的开环增益可调到设计值 500 s^{-1} [见式 (4—43)]。实验测得开环频率特性过 0dB 线的频率为 96 rad/s (即 15.3Hz)。实验并表明其闭环频率特性在频率超过 15Hz 以后衰减很大。这些数据均与理论分析相符。

〔例 2〕舰用随动系统的设计

设欲设计一艘用的某仪器的角度复现系统，该系统的技术数据如下。

典型输入信号：正弦，最大角度 $\theta_{m,x} = 20^\circ$ ，周期 10 s。

输出轴负载力矩： $M_f = 1200 \text{ g} \cdot \text{cm}$ 。

复现精度： 10^{-3} rad 。

这种输入信号已经在第二章分析过了，我们可以根据其速度信号和加速信号求得误差的表达式，然后根据误差要求来确定参数。但是既然其典型输入信号是正弦，我们就可以利用更为直接的频率特性的概念来进行讨论。

根据频率特性的概念，在正弦信号作用下，系统的误差也是正弦的。

$$e(t) = e_{m,x} \sin(\omega_x t + \phi_x) \quad (4-53)$$

至于系统的输出，考虑到精度比较高，可以认为它等于输入，即

$$\theta_c(t) \approx \theta_i(t) = \theta_{m,x} \sin \omega_x t \quad (4-54)$$

输出 $\theta_c(t)$ 和误差信号 $e(t)$ 之间的关系就是这个系统的

开环特性。因此，根据式(4—53)和式(4—54)可得对应于摇摆频率 ω_k 处的开环频率特性的幅值

$$|G(j\omega_k)| = G_k = \beta_{max}/e_{max} \quad (4-55)$$

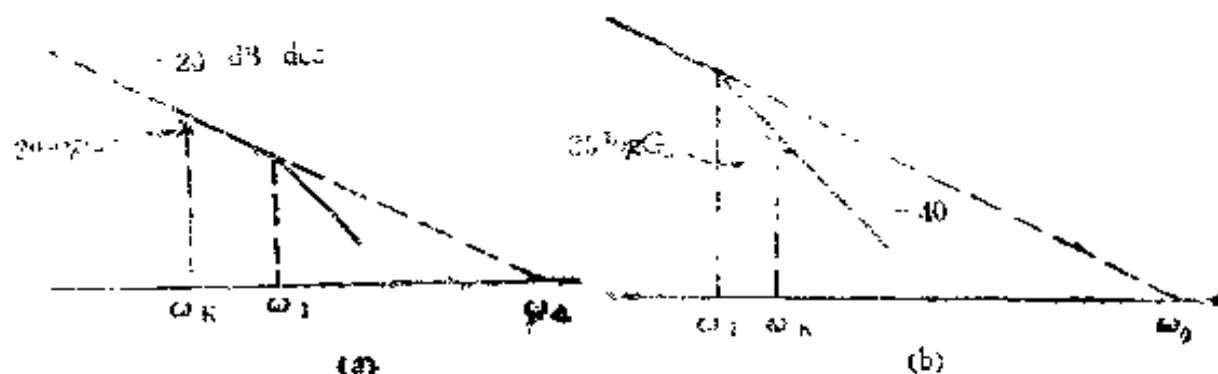


图4—27 转折频率 ω_1 的选择

这里所要求的系统的开环频率特性应该等于或高于此值。对于改进I型来说，若转折频率 $\omega_1 > \omega_k$ （图4—27 a），低频段 -20dB/dec 的特性就应该通过 G_k 点，故可由此确定 ω_0 的值。至于系统的带宽，则将随 ω_1 的增大而增大。注意到这时虽然带宽随 ω_1 而增加，却并不影响

$|G(j\omega_k)|$ 的值，即精度并未因此而提高。因此我们希望取较低的 ω_1 值以限制带宽。反过来，若取 $\omega_1 < \omega_k$ （图4—27 b），就要求 -40dB/dec 的那一段特性通过 G_k 点。显然这时所要求的系统的增益 ω_0' 就要高于第一种情况下的 ω_0 。所以 ω_1 小于 ω_k 是不利的。

由此可见，摇摆情况下转折频率 ω_1 宜取摇摆频率 ω_k 的值，即

$$\omega_1 = \omega_k \quad (4-56)$$

当 $\omega_1 = \omega_k$ 时，频率特性在 ω_k 处为

$$G(j\omega_k) = \left. \frac{\omega_0}{s \left(\frac{s}{\omega_k} + 1 \right)} \right|_{s=j\omega_k} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}\omega_k} e^{-j45^\circ} \quad (4-57)$$

将式 (4—57) 代入式 (4—55) 得

$$e_{\max} = \frac{\dot{\theta}_{\max}}{|G(j\omega_k)|} = \frac{\dot{\theta}_{\max}\omega_k}{\omega_0} \sqrt{2} = \frac{\dot{\theta}_{\max}}{\omega_0} \sqrt{2} \quad (4-58)$$

若取均方根值, 则为

$$e_{\max} = \dot{\theta}_{\max} / \omega_0 \quad (4-59)$$

式中 $\dot{\theta}_{\max}$ 为正弦型速度的幅值。

式 (4—56) 和式 (4—58) 是设计这类系统用的基本公式, 根据这两个公式就可以很容易地将所求的主要参数 ω_0 和 ω_1 确定下来。

下面结合本例的数据来计算。

已知信号的周期 $T = 10\text{s}$, 所以得摇摆频率为 $\omega_k = 2\pi/T = 0.628\text{ s}^{-1}$ 。因此根据式 (4—56) 可以立即确定此系统的转折频率 ω_1 为

$$\omega_1 = \omega_k = 0.628\text{ s}^{-1} \quad (4-60)$$

系统的总的精度要求为 $e \leq 10^{-3}\text{rad}$, 考虑到由于负载力矩引起的误差, 故分配给跟踪误差为 $0.5 \times 10^{-3}\text{rad}$, 即

$$e_{\max} = 0.5 \times 10^{-3}\text{rad} \quad (4-61)$$

将这些数据代入式 (4—58) 得

$$\omega_0 \geq 620\text{s}^{-1}$$

所以, 取系统的增益为

$$\omega_0 = 62(\text{s}^{-1}) \quad (4-62)$$

确定了 ω_0 和 ω_1 的值就得到了所希望的系统特性的基本形状, 见图 4—28。剩下的问题就是要确定 ω_s 。 ω_s 的值只要能保证在过 0 dB 线的 ω_1 处有足够的相角裕度就可以了。这一般可以用试探法。其实, 只要稍微有些设计经验, 在图

4—28上基本上可直观地标出所需要的 ω_s 值,然后再根据元件的可能性和系统的调试作一些修改。本例中我们先选定 $\omega_s = 10 \text{ s}^{-1}$ 。

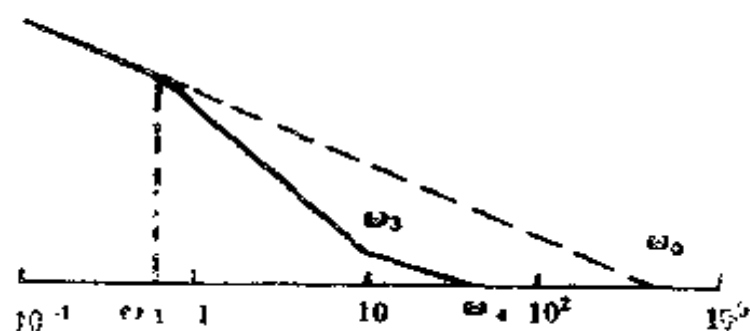


图4—28 希望频率特性

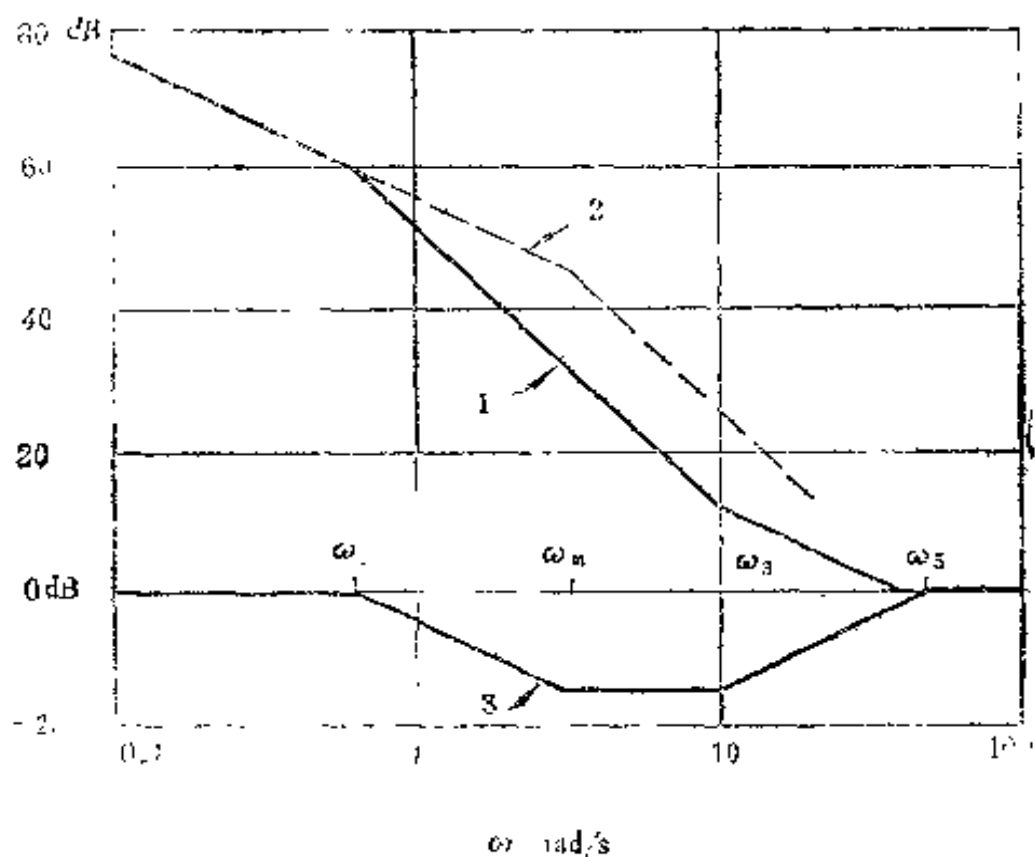


图4—29 求串联校正

得到图 4—28 的希望特性后，再和具有同样增益 ω_0 的未加校正的系统特性作比较，就可得到所需的串联校正的特性。图 4—29 中的特性 1 就是上述的希望特性。特性 2 为系统的固有特性，其中 ω_m 对应于电机的时间常数。

$$\omega_m = 1/T_m = 3.18 \text{ s}^{-1}$$

特性 1、2 相减得校正特性 3。特性 3 上的各转折频率相应为 ω_1 、 ω_m 、 ω_s 和 ω_b 。具有这种特性的校正称为积分微分校正。这个校正线路在具体实现时，可以用一个线性组件来组成，也可以用两个有源校正线路分别实现积分校正和微分校正。图 4—30 所示是本例中实际使用的积分校正和微分校正的线路。

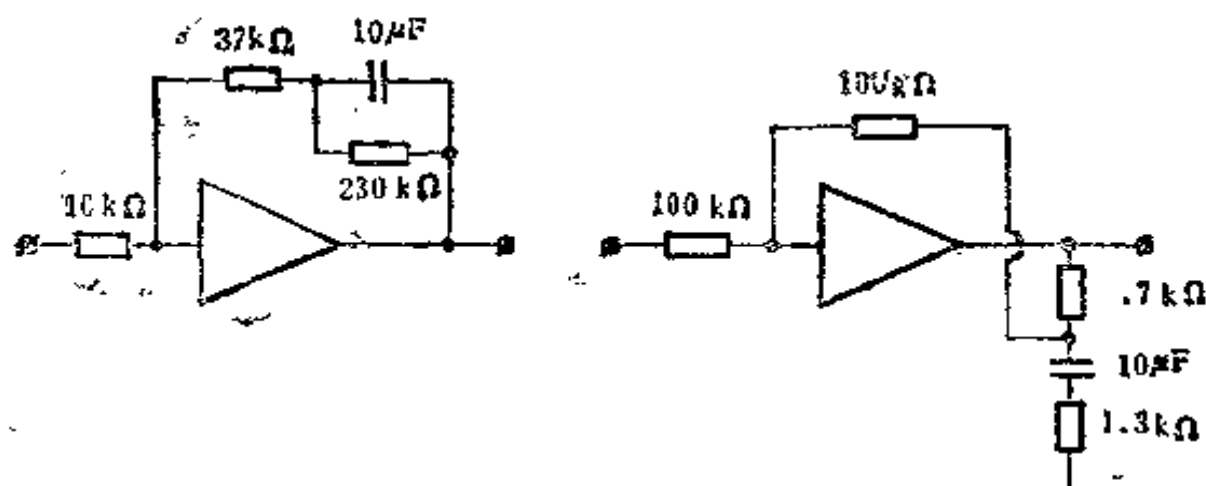


图 4—30 实际的积分校正和微分校正线路

〔例 3〕方位角随动系统的设计

设有某方位角随动系统需要设计。技术要求是当方位角速度达 $24^\circ/\text{s}$ 时，跟踪误差不超过 2 密位，加速度为 $5^\circ/\text{s}^2$ 时，加速度误差不超过 4 密位（1 密位 = 0.06° ）。

根据技术要求可以知道，此系统的误差系数为

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0.12/24 = 1/200 \text{ s} \\ C_2/2 &= 0.24/5 = 1/21 \text{ s}^2 \end{aligned} \right\} \quad (4-63)$$

根据第二章误差系数与Bode图的关系可得此改进I型的误差系数为

$$C_1 = 1/\omega_0$$

$$C_2/2 = 1/\omega_0\omega_1 \quad (4-64)$$

将式(4-61)与式(4-63)对比, 可得

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= 200 \text{ s}^{-1} \\ \omega_1 &\approx 0.1 \text{ s}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (4-65)$$

有了 ω_0 和 ω_1 的值, 所希望的系统的开环特性就确定了。图4-31中的特性1就是这条希望特性。特性上的 ω_2 根据相对稳定性要求初步选定为 3.3 s^{-1} 。

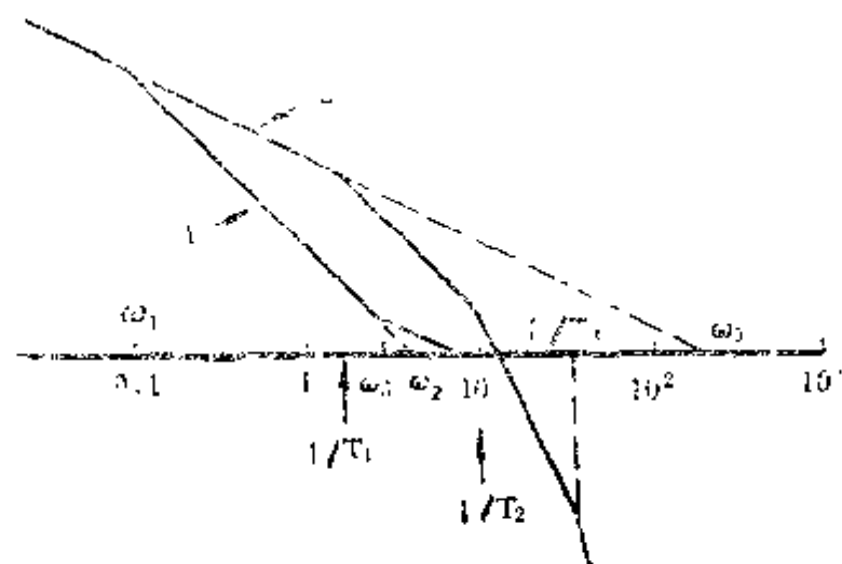


图4-31 例3的频率特性

图4-32为本系统的原理图。执行电机M为直流电机, 其时间常数 $T_1 = 0.6 \text{ s}$ 。直流电机受电机放大机A控制。电机放大机的交轴时间常数 $T_2 = 0.1 \text{ s}$ 。控制绕组的时间常数 $T_3 = 0.03 \text{ s}$ 。所以, 未加校正时系统的开环传递函数是

$$G(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$$

(4-66)

其对应的频率特性见图4-31中特性2。

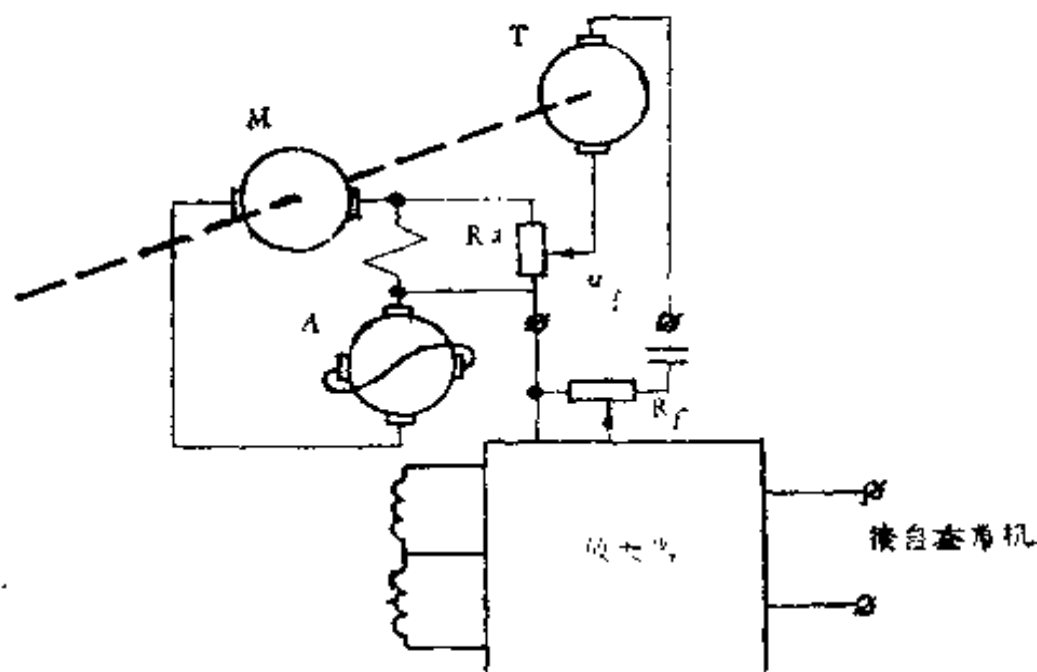


图4-32 例3的原理图

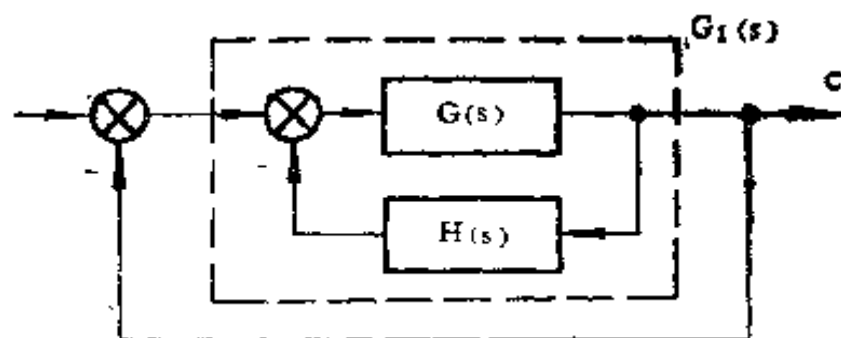


图4-33 反馈校正原理图

此系统采用反馈校正。现在的问题是如何根据已经得到的改进I型的特性1(图4-31)来设计校正回路。

图4-33为一采用反馈校正的系统原理图。校正后系统

的等效开环传递函数为

$$G_1(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4-67)$$

当 $G(s)H(s) \gg 1$ 时, 可得

$$G_1(s) \approx 1/H(s) \quad (4-68)$$

因此, 只要满足其条件, 就可以根据所要求的 $G_1(s)$ 来确定 $H(s)$ 。

这个 $G_1(s)$ 就是校正后的开环特性, 结合本例来说, 就是所希望的特性 1 (图 4-31)。现在来列写其中频段特性。此特性的中频部分由斜率为 -40 和 -20 的两段直线所组成, 转折频率为 $\omega_z = 3.3 s^{-1}$ 。设特性 1 上 -40 dB/dec 的延长线在 0 dB 线的交点为 ω_2 , 那么根据图 4-31 上的几何关系可得

$$\omega_2^2 = \omega_0 \omega_1 = 20 s^{-2}$$

这样, 就可写得特性 1 的中频部分特性为

$$G_1(s) = \omega_2^2 \frac{1 + s/\omega_1}{s^2} = 20 \frac{1 + 0.3s}{s^2} \quad (4-69)$$

根据式 (4-68) 可以知道, 所要求的校正环节的特性就是这个 $G_1(s)$ 的倒数, 即

$$H(s) = \frac{1}{20} \frac{s^2}{1 + 0.3s} \quad (4-70)$$

式 (4-70) 表明, 本例中反馈校正 $H(s)$ 要求取输出量的二阶导数。具体实现的时候就是取测速发电机的输出再经一微分线路即可。图 4-34 所示就是这一微分线路。该线路的时间常数为 $T_d = 0.3s$ 是根据式 (4-70) 的分母来配置的。

传递函数 $H(s)$ 中的比例系数基本上是一个静态计算问题, 这里就不再介绍了。

从上面的讨论中可以看到, 这里取测速反馈, 实际上是

对测速信号再进行一次微分。因此，当输出轴以恒速转动时，测速反馈回路（图4—34）在理论上并无输出。也就是说，在恒速转动这个稳态工作状态下无反馈信号。因此稳态时的特性由前向环节 $G(s)$ （图4—33）所决定。或者说，采用这种反馈后并不影响系统的开环增益，系统低频段的特性与未校正前是一样的（图4—31）。

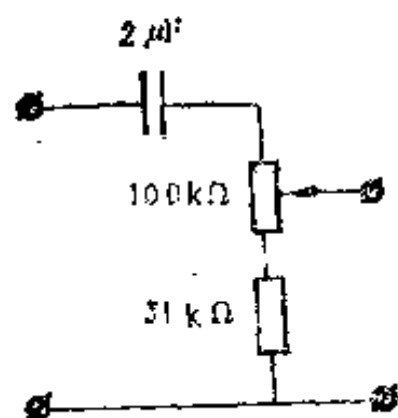


图4—34 微分网络

应该指出的是，既然采用了反馈，就不可避免地带来了稳定问题。为了保证这个测速回路的稳定性，实际上还要取加速度信号。本例中将电机的电枢电流作为加速度信号与测速电机T的信号串接在一起加到放大器上（图4—32）。所以实际上的反馈电压为

$$u_f = K_1 \dot{\theta} + K_2 \ddot{\theta} = K_1 (\dot{\theta} + \tau \ddot{\theta}) \quad (4-71)$$

式中

$$\tau = K_2 / K_1 \quad (4-72)$$

考虑到有加速度信号，所以校正环节的传递函数现在是

$$H(s) = \frac{1}{20} \frac{1 + \tau s}{1 + 0.3s} s^2 \quad (4-73)$$

τ 的具体数值可根据稳定分析来确定。不过实际上是在线路设计上给出一定的范围，而在调整中确定最合适的值。

结合本例来说，加速度信号取自电位器 R_4 （图4—32）。这就是说，式（4—71）中的 K_2 是可调的。其最大值 $K_{2max} = 0.6V/(^\circ)/s^2$ 。而本例中 $K_1 = 1.4V/(^\circ)/s$ ，代入式（4—71）可得 τ 的变动范围为

$$\tau = 0 \sim 0.43 \text{ s} \quad (4-74)$$

从图 4—31 可以知道，这个范围完全可以满足调试需要。

这类系统在调试时首先要保证开环增益，因为这是设计要求，而且也是一个静态问题。至于稳定性和跟踪误差的调试一般配备两个可调电位器： R_s 和 R_f （图 4—32）。 R_s 是调测速回路的稳定性的，只要测速回路已经稳定，再调 R_s 对系统性能的影响就不那么显著了。这时要靠 R_f 来保证跟踪精度满足要求（调 R_f 可改变误差系数 $C_2/2$ ）。

跟踪误差或误差系数调试时一般采用正弦测试信号。因为正弦信号的最大速度和最大加速度是分别单独出现的，所以常用来调试系统的误差系数。对本例来说可以用周期为 30 s，峰—峰值为 230° 的信号（图 4—35）。这个信号所对应的最大角速度和角加速度分别为

$$\dot{\theta}_{\max} = A\omega = 24^\circ/\text{s}$$

$$\ddot{\theta}_{\max} = A\omega^2 = 5^\circ/\text{s}^2$$

正好满足技术要求。

在这个正弦测试信号作用下来观察误差信号，例如用示波器观察自整角机的输出的变化，就可以看到加速度误差和速度误差交替地出现。如果加速度误差超出技术要求的 4 密位就调整 R_f 使之满足要求。

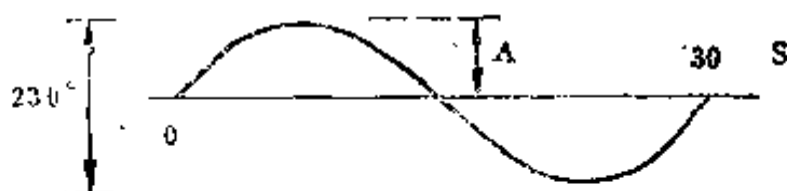


图4—35 正弦测试信号

3. 基本 I 型系统

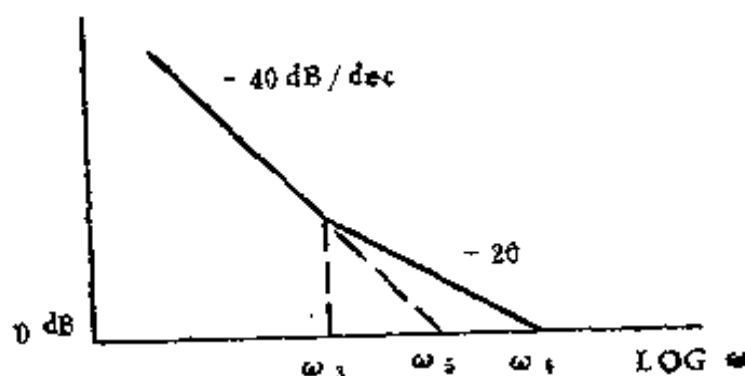


图4—36 基本 I 型系统特性

I 型系统中最为简单的一种系统就是只有一个转折频率 ω_s 的系统 (图 4—36), 称这种系统为基本 I 型, 其开环频率特性为

$$G(j\omega) = K_s \frac{1 + j\omega/\omega_z}{(j\omega)^2} \quad (4-75)$$

式中

$$K_s = \omega_z^2 = \omega_s \omega_4$$

现以转折频率 ω_s 为基准, 取无量纲频率

$$\Omega = \omega/\omega_s \quad (4-76)$$

这时, 式 (4—75) 改写为

$$G(j\Omega) = K \frac{1 + j\Omega}{(j\Omega)^2} \quad (4-77)$$

式中 K 为无量纲增益

$$K = \omega_4/\omega_s \quad (4-78)$$

取无量纲变量后, 现在式 (4—77) 中只有一个参数 K 了。表 4—3 所列为不同 K 值下系统的动态性能。

从表 4—3 和图 4—36 都可以看到, 无量纲增益 K 值大一些, 系统的稳定性能就会好一些。下面再来比较一下它们的

表4—3

基本Ⅰ型系统的性能

无量纲增益	$K = \omega_4 / \omega_3$	1	2
单位阶跃输入下输出的峰值		1.3	1.22
阻尼比	$\xi = \sqrt{K} / 2$	0.5	0.707

等效噪声带宽。

此系统的开环和闭环传递函数分别为

$$G(s) = \frac{K_1(1 + s/\omega_3)}{s^2} \quad (4-79)$$

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K_1 s + K_1 \omega_3}{\omega_3 s^2 + K_1 s + K_1 \omega_3} \quad (4-80)$$

根据 $T(s)$ 和第三章的表3—1得

$$I_2 = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2} = \frac{K_1}{2\omega_3} + \frac{\omega_3}{2} \quad (4-81)$$

取 $\partial I_2 / \partial \omega_3 = 0$, 得

$$\omega_3 = \sqrt{K_1} \quad (4-82)$$

我们知道, 该 I_2 表征了系统的等效噪声带宽, 所以, 当

$\omega_3 = \sqrt{K_1}$ 时, 系统的等效噪声带宽为最小。

由式 (4—82)

$$\omega_3^2 = K_1 = \omega_3 \omega_4, \text{ 得}$$

$$\omega_4 = \omega_3 \quad (4-83)$$

式 (4—83) 表明, 当 $\omega_4 = \omega_3$ 或无量纲增益 $K = \omega_4 / \omega_3 = 1$ 时系统的等效噪声带宽为最小。将此时的 ω_3 值代入, 得对应的

$$I_2 = I_{2\text{ min}} = \sqrt{K_1} \quad (4-84)$$

现在设 $\omega_4 = 2\omega_3$, 则 $K_1 = \omega_3\omega_4 = 2\omega_3^2$, 即此时

$$\omega_3 = \sqrt{K_1/2} \quad (4-85)$$

将式 (4-85) 代入 (4-81) 得对应的

$$I_2 = 1.06\sqrt{K_1} = 1.06 I_{2\text{ min}} \quad (4-86)$$

式 (4-86) 表明, 无量纲增益 $K = \omega_4/\omega_3 = 2$ 时, 系统的等效噪声带宽增加得并不多, 而从表4-3可以看到, 这时系统的稳定性却提高了。所以 $K=2$ 也是一个可以选用的值。

根据上面的分析可知, 基本 I 型中一般取

$$1 < K \leq 2. \quad (4-87)$$

这里要说明的是, 这个 K 值是增益的相对值 $K = \omega_4/\omega_3$, 至于带宽 ω_4 的具体数值仍是要根据跟踪误差的要求来确定。从第二章已知, I 型系统的跟踪误差为

$$e(t) \approx \frac{\ddot{r}}{K_1} = \frac{\ddot{r}}{\omega_3\omega_4} \quad (4-88)$$

因此, 可以根据误差要求和式 (4-88) 先确定 K_1 , 然后根据上面式 (4-87) 的 $K = \omega_4/\omega_3$ 的范围来确定转折频率 ω_3 (或带宽 ω_4)。确定 K_1 的例子也可见第二章第四节的例3。

基本 I 型看起来很简单, 应用却很广。这是因为很多 I 型系统是按基本 I 型来设计的。为了说明这个问题, 下面就来分析一下 I 型系统的选型和其实际特性。

一些重型设备, 如远程的高炮, 大型天线等等往往选用 I 型系统。这要从它们的传动装置谈起。因为这些设备比较笨重, 其传动往往需要一套比较复杂的装置。为了减少元件的滞后, 提高响应速度, 所以传动系统一般均采用反馈控

制，其特性可近似为

$$\frac{\dot{\theta}}{u} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2 \xi T s + 1} \quad (4-89)$$

或

$$\frac{\theta}{u} = \frac{1}{s(T^2 s^2 + 2 \xi T s + 1)} \quad (4-90)$$

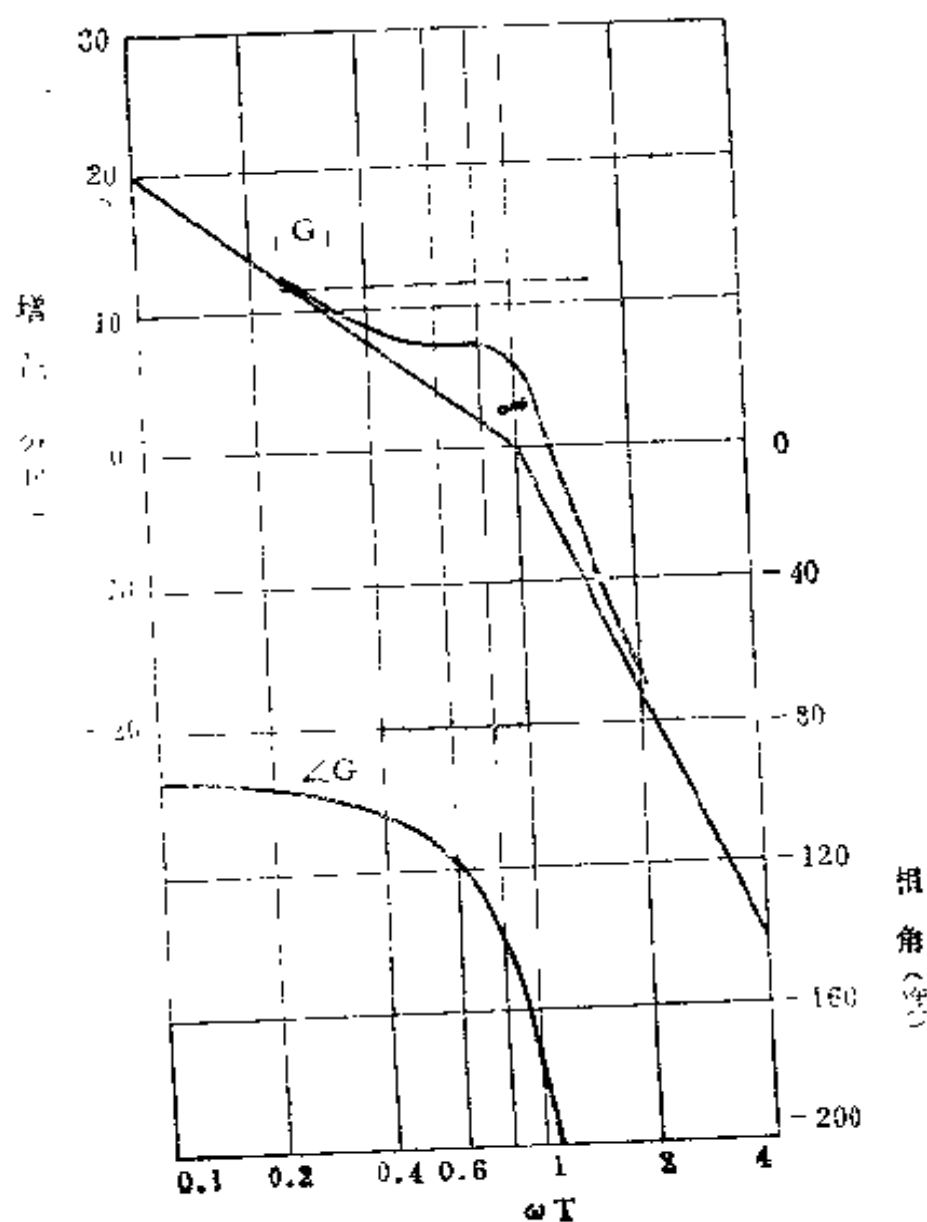


图4-37 传动部分特性

图4—37是 $\xi = 0.25$ 时，式 (4—90) 所对应的频率特性。现在若以这种装置来组成系统，那么图4—37就是该系统的开环特性。从图可见，若欲保证相角穿越 -180° 时的幅值裕度为5dB，则系统的带宽只能做到

$$\omega_c \approx 0.3/T \quad (4-91)$$

例如，设 $T = 0.066 \text{ s}$ ，则

$$\omega_c \approx 0.3/T = 4.5 \text{ rad/s} \approx 0.7 \text{ Hz}.$$

这个带宽是相当低的。由于这类系统的带宽受到限制，就本例来说做不到0.7Hz以上，故为了提高低频段的增益，就需要加一积分环节，这就成为Ⅰ型系统了。只要系统的带宽不超出式 (4—91) 所限制的值，那么从图4—37可知，系统的传动部分就可视为理想的积分环节。这样，整个系统就可以当作基本Ⅰ型来看待了。

从上面的分析可以看到，由于一些重型设备的带宽受到限制，所以当精度要求高时就得选用Ⅰ型，而且这时系统的特性往往可以看作是基本Ⅰ型。当然，这基本Ⅰ型是指其低频特性而言，目的是为了便于确定几个主要的设计参数： ω_c 和 ω_{ϕ} 。有了带宽 ω_{ϕ} 的值，便可以确定动力传动部分的带宽。进行进一步的设计。

现在来讨论Ⅰ型系统的相对稳定性指标。图4—38为对应于式 (4—90) 的尼氏图。图中可以清楚地看到，当相角穿越 -180° 线时幅值的变化很是缓慢。当由式 (4—90) 组成基本Ⅰ型时，这一段尼氏图线的特性也仍与此图相似。对于这样的系统宜用幅值裕度作为相对稳定性的指标。这样，调试时就会感到很方便。我们知道，幅值裕度定义为相位等于 -180° 所对应的 $|G(j\omega)|$ 的倒数，即 $1/l$ 。图4—39表示了奈氏特性和尼氏特性上的幅值裕度关系。设以 $l = 0.6$ 作

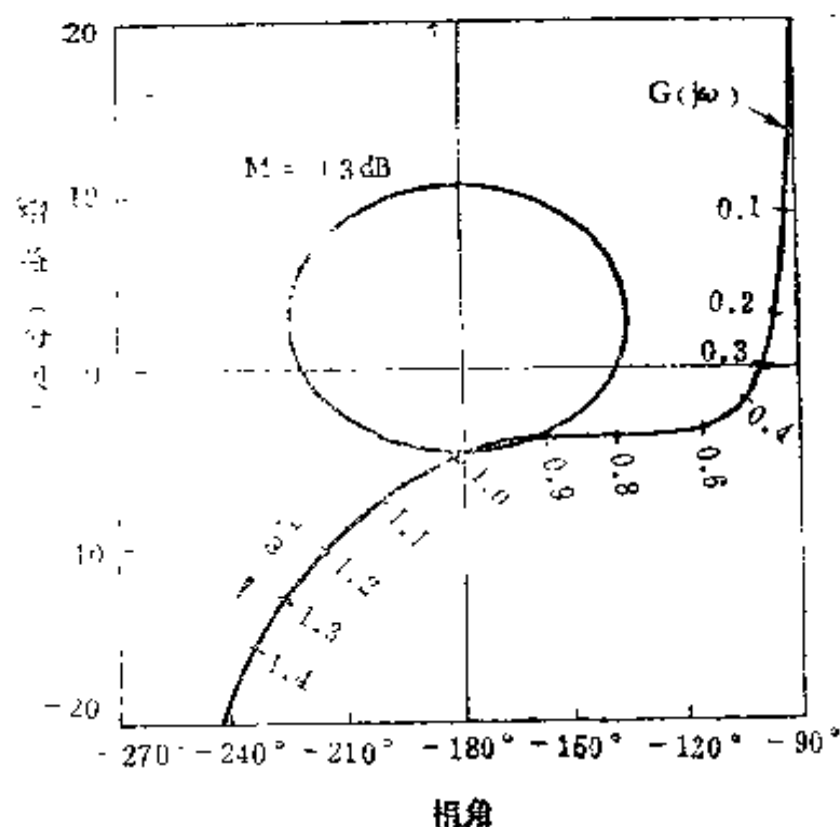


图4—33 图4—37的尼氏图

为设计指标。系统调试时一般是先增加增益使系统接近临界稳定状态，然后根据这时的增益值（或电阻上的分压系数）乘以0.6便可得到所需要的增益。

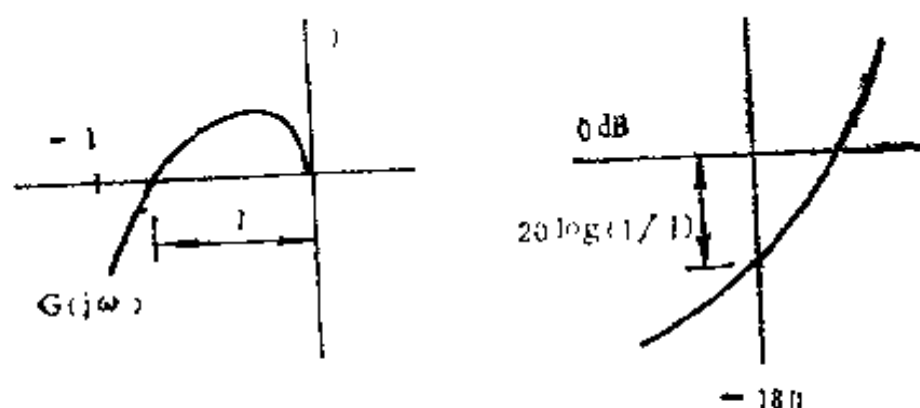


图4—39 增益裕度

I 型系统在使用中会遇到的一个问题是齿隙引起的自振荡。这个问题可以用描述函数法来说明。齿隙的描述函数的

负倒特性 $-1/N$ 位于第三象限，而Ⅰ型系统的频率特性又恰好横穿第三象限，两者必然相交（图4—40）。所以若传动中存在齿隙，这类系统从理论上来说就存在自振荡。

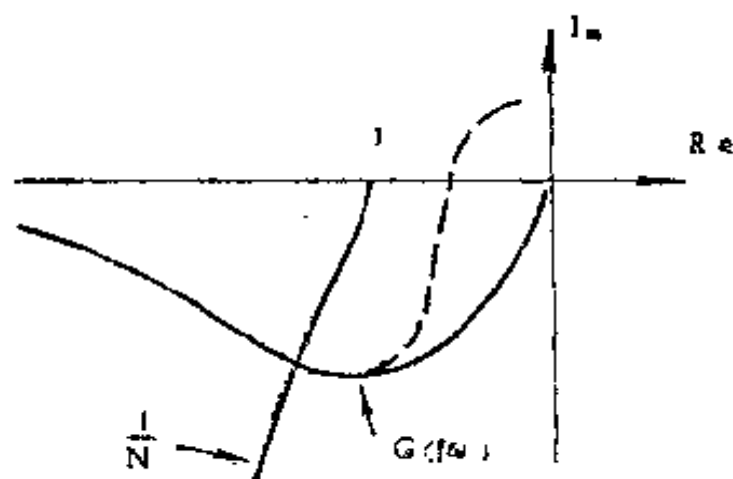


图4—40 Ⅰ型系统的自振荡分析

一个解决的办法是控制自振荡的幅值，例如从设计上保证自振荡的幅值小于1密位。另一种做法是采取措施消除齿隙的影响，例如采用两个电机的方案。图4—41所示就是用两个电机来拖动一大型天线的例子。这两个电机的力矩方向是相反的，以保证齿轮与齿盘的无间隙传动。图4—41中还标有这两个电机的力矩特性^[2]。

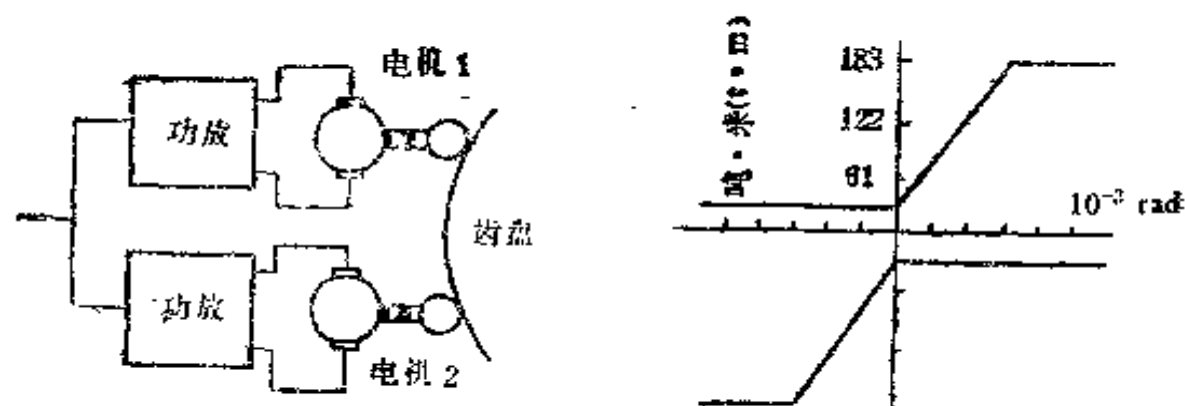


图4—41 用两个电机来消除齿隙

应该要说明的是，除了上述由于传动部分的带宽限制而人为引入积分环节成为Ⅰ型系统的情形外，有时被控对象本身具有二阶积分特性。例如，对于纯惯性负载，控制力矩和输出转角之间的关系就是这种关系。这种系统自然构成了Ⅰ型系统。上面所讨论的设计原则和各种问题对它自然也是适用的。

〔实例〕方位角随动系统的设计

有一方位角随动系统，设基于上述的考虑，确定选用Ⅰ型。技术要求是当角加速度为 $3^\circ/\text{s}^2$ 时，误差不超过8密位。设计时取最大误差为5密位（即 0.3° ）

$$\sigma_{\max} = 0.3^\circ$$

这样，根据式（4—83）可得系统的增益为

$$K_1 = \ddot{\varphi}_{\max} / \sigma_{\max} = 10 \text{ s}^{-2} \quad (4-92)$$

取 $\omega_4 / \omega_3 = 2$ ，可写得

$$K_1 = \omega_3 \omega_4 = 2 \omega_3^2$$

故

$$\omega_3 = \sqrt{K_1 / 2} = \sqrt{5} = 2.24 \text{ s}^{-1}$$

现根据具体元件参数取

$$\omega_3 = 2.7 \text{ s}^{-1} \quad (4-93)$$

K_1 和 ω_3 就是本系统的主要参数。

本系统具体实现时执行机构是液压放大器控制的泵—马达组，输出轴的转速比例于液压放大器的输入位移信号。根据上面对这类系统的传动装置的分析可以知道，在系统的带宽内其特性可视为一积分环节，即

$$G_2(s) = \frac{\Theta_0(s)}{U(s)} = \frac{K_2}{s} \quad (4-94)$$

现在需要加一个如式（4—95）所示的积分校正，以组成

基本 I 型系统 (图 4—42)。

$$G_1(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_1 \frac{1 + s/\omega_s}{s} \quad (4-95)$$

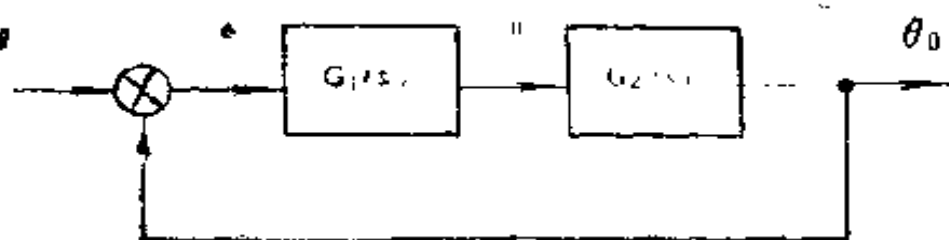


图4—42 系统的组成

这个 $G_1(s)$ 可以用反馈的方法来实现。结合图 4—33 的讨论已经知道，当一个反馈回路的增益很高时，根据式 (4—68) 有

$$G_1(s) \approx 1/H(s) \quad (4-96)$$

因此，只要使反馈环节 $H(s)$ 按 $G_1(s)$ 的倒数特性来设计，就可实现所要求的积分校正。这样，根据式 (4—95) 可写得本例中要求的 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{1}{K_1} \frac{s}{1 + s/\omega_s} \quad (4-97)$$

式 (4—97) 表明，只需要对反馈信号求导，并通过一阶惯性环节就可实现校正。

图 4—43 所示就是这个系统的原理图。由放大器控制的两相电机 A 通过减速器带动液压放大器和泵 (P) — 马达 (M) 组。这个两相电机 A 的输出也同时带一测速发电机 T 以实现反馈校正。测速电机的输出已经是一次微分了。因此只要再接一个 RC 网络就可以了。电容 C_1 上的电压就是 RC 网络的输出，它与来自自整角机的信号相串接 (负反馈相加)，加到放大器上。这个 RC 网络的传递函数为

$$\frac{RC_2s+1}{R(C_1+C_2)s+1} \approx \frac{0.022s+1}{0.374s+1} \quad (4-98)$$

式(4-98)的极点就是式(4-97)所要求的极点,与设计要求的 ω_s 相对应〔见式(4-93)〕。式(4-98)的零点则是内反馈回路本身所要求的。

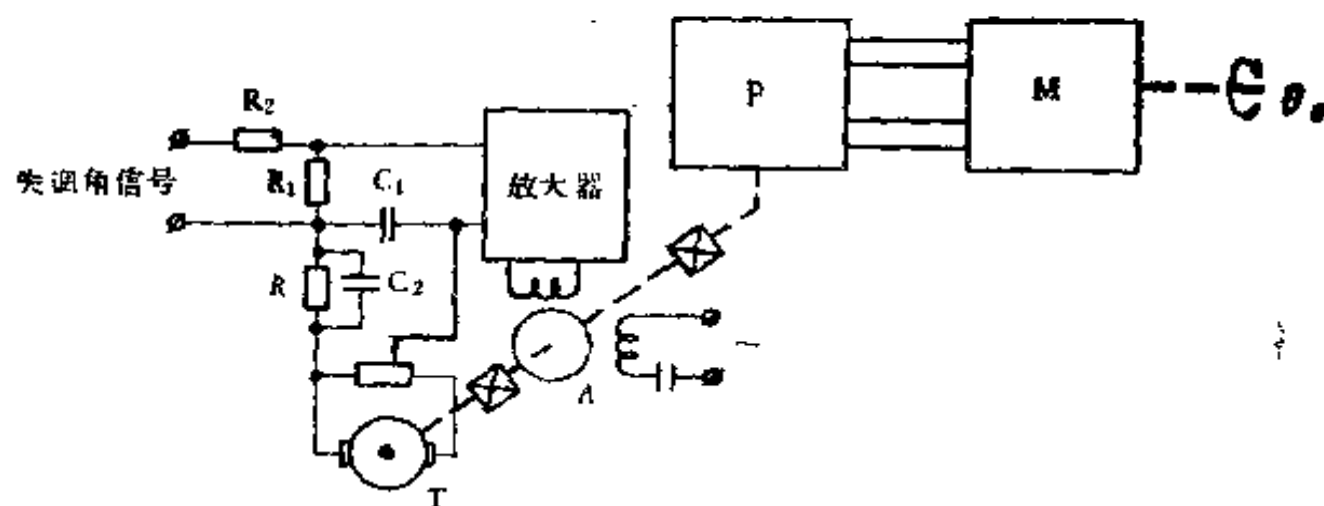


图4-43 I型系统的实例
 $R = 22k\Omega$, $C_1 = 16\mu F$, $C_2 = 1\mu F$

此系统的增益是由 R_1 和 R_2 的分压比来调整的,调试时根据幅值裕度来确定。

保证了稳定裕度后,调试时还应校验系统的跟踪误差。这可利用与图4-35相类似的正弦信号来进行。

4. 滞后校正及其附带的问题

上面已对几种基本的系统类型作了说明,一般的设计问题都可按照所提出的原则来处理。但应该指出的是有些系统的带宽会受到各种实际因素的限制,所以有可能带宽已达极限值,但增益指标却没有达到设计要求。

例如,某一系统为I型。设基于实际的考虑,这一系统的带宽不能超过 $35s^{-1}$ 。故取 $\omega_4 = 35s^{-1}$ 。若取 $\omega_s = \omega_4 / 2$

（图 4—36）。则系统的增益为

$$K_s = \omega_s \omega_z = 612.5 \text{ 秒}^{-1}.$$

这个增益就是这一系统所能达到的上限值。但某些高精度系统所要求的增益却可能高达 50000 s^{-2}

怎么来解决这个矛盾呢？一个很自然的答案就是选用滞后校正。滞后校正网络的传递函数为

$$G_L(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \quad \alpha > 1 \quad (4-99)$$

图 4—44 是 $\alpha = 100$ 时的频率特性。对 I 型系统来说（图 4—36），假如取 $1/T < \omega_s$ ，那么就可以在基本不影响系统中频特性的情况下提高系统的增益。

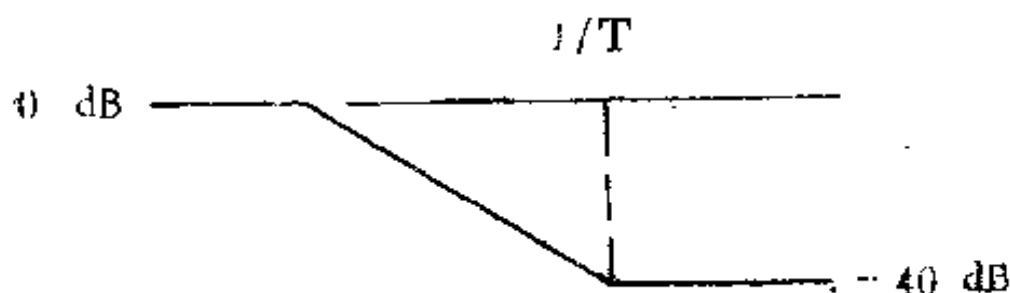


图 4—44 滞后校正

我们就是利用滞后校正高频段的衰减特性来解决上述的矛盾的。但滞后校正低频部分的相位滞后却会给系统带来问题。尤其是 I 型系统采用滞后校正后就成为一条件稳定系统。所谓条件稳定系统是指增益只能在某一范围内才能稳定工作的系统。增益大或小时，系统都是不稳定的。对于条件稳定系统来说，当信号比较大的时候，由于元件饱和引起等效增益下降时，系统就变为不稳定了。图 4—45 所示，就是带滞后校正的 I 型系统的频率特性和饱和元件的描述函数的负倒特性的相对关系。该图表明，当信号幅值大于 A_1 时，

系统就不稳定了。

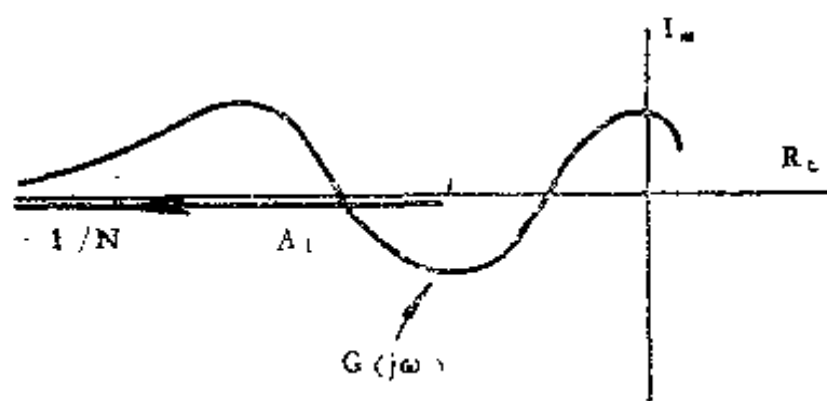


图4—45 滞后校正导致条件稳定性

应该指出的是，即使不构成条件稳定系统，滞后校正对于大信号下的系统特性也是不利的。图4—46所示为一带滞后校正的系统特性。设在大信号下系统的前置放大级（或功放级）饱和，图中绘有相应的 $-1/N$ 特性。由于对应 A_1 处两

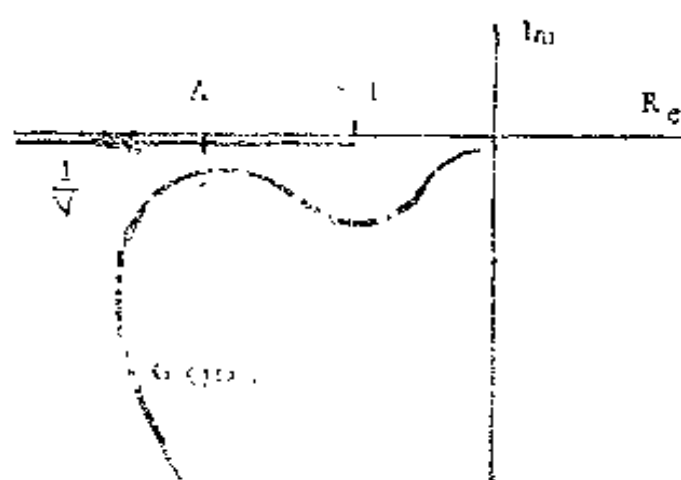


图4—46 滞后校正影响大信号下的性能

条特性比较接近，根据描述函数法可以知道^[4]，这个系统在大信号下的过渡过程具有相当大的振荡。

总之，采用滞后校正后系统在大信号下的特性就变坏了。在承受干扰或者当系统投入工作时会出现大幅度的振荡，甚至不稳定。要解决这个问题，理论上当然是要防止饱和现象的发生，但是实际上往往做不到。因此需要寻找另外

的出路。一般采取的措施是从线路上保证在大信号下切除积分效应。图 4—47 所示就是这样一种校正线路的例子。当信号小的时候，由于二极管的作用， R_3 上没有电流。这时该线路就是一个普通的滞后校正网络，其传递函数为

$$G_L(s) = \frac{R_2 C_2 s + 1}{(R_1 + R_2) C_2 s + 1} \quad (4-100)$$

当信号增大时，电容 C_2 上的电压被钳位，失去了积分作用，

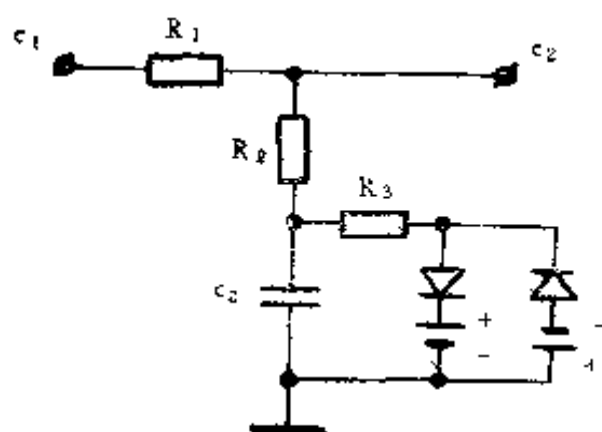


图 4—47 带钳位的校正网络

其传递函数变为

$$G_L(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad R_3 \ll R_2 \quad (4-101)$$

这样一来，大信号下这个校正线路就不产生相移，提高了稳定性。

钳位的办法主要用于早期的无源校正^[4]。现在对于有源校正则可以利用线性组件本身的饱和特性来切除积分效应。应该指出的是，应用时应注意正确设计和分配增益，务使滞后校正首先进入饱和。图 4—48 为在某一设计中所采用的线路，其传递函数为

$$G_L(s) = (200) \frac{0.22s + 1}{22s + 1} \quad (4-102)$$

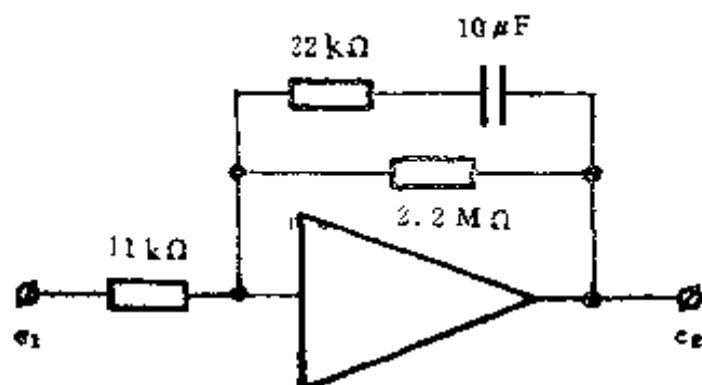


图4—18 有源滞后校正

该线路具有较高的增益，通过正确的系统设计可以使它在大信号下首先进入饱和，切除积分效应。实践证明这种线路对消除条件稳定性是有效的。

5. 半自动系统的设计 [3] [5] [9]

随动系统应用中有时会要求手动跟踪。这是一种由人操纵系统进行跟踪的工作状态。这时整个系统也称人机跟踪系统。

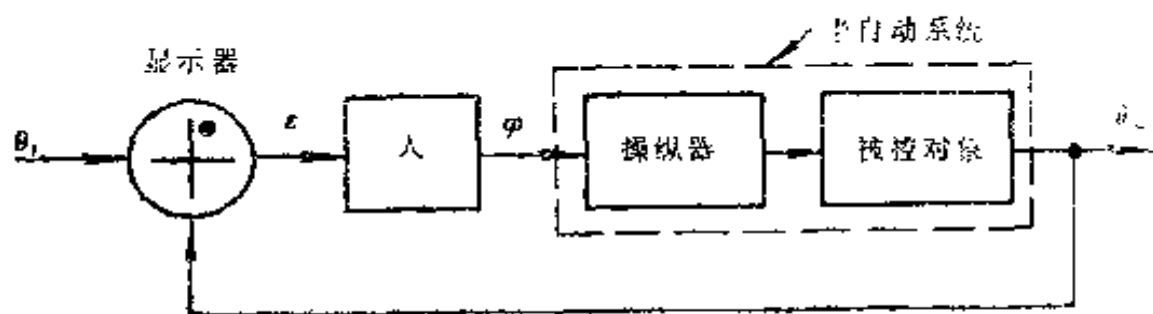


图4—49 人机跟踪系统框图

图4—49所示，为一种人机系统的框图。图中显示器可以是光学瞄准具，观测窗或光电显示器。操纵人员直观地检

测系统的误差，人工移动操纵器（手轮或操纵杆），使输出（指向）与目标一致。操纵人员所操纵的传动系统可能是从随动系统换接过来的。随动系统的这种工作状态称为半自动工作。例如火力控制中由指挥仪控制的火炮改为瞄准手人工跟踪时就是将同一系统切换成半自动工作状态的。因为是随动系统的一种工作状态，所以随动系统设计时常要包括这一内容。

5.1. 操纵人员的动特性

人机系统中人是闭环系统中的一个环节，因此也需要研究人的动特性。人的动特性都是用实验来测定的。根据闭环跟踪情况下的数据，简化后，得到操纵人员的低频近似的传递函数为

$$G_H(s) = K_H \frac{T_d s + 1}{T_1 s + 1} \frac{e^{-Ls}}{T_n s + 1} \quad (4-103)$$

式（4—103）中各参数的意义和范围如下：

L 是人的反应延迟， L 值的范围一般为 $0.12 < L < 0.25s$ ，正常值可取 $L \approx 0.15s$ 。

T_n 代表神经肌肉系统的滞后特性， $0.06 < T_n < 0.1s$ 。一般取 $T_n = (0.08 \sim 0.1)s$ 。

T_d 和 T_1 反映了人在控制不同装置时的一种自适应能力，它可补偿被控元件的动特性和操纵人员本身的反应延迟和滞后，从而保证稳定跟踪。所以这一项称为人的补偿特性，相当于控制系统中的校正装置。时间常数 T_d 和 T_1 的范围为

$$T_d = 1 \sim 5 s$$

$$T_1 = 0 \sim 20 s$$

这里要说明的是，操纵人员的动特性与他所操纵的部件有关。当操纵器是手轮时，其特性宜用下面的式（4—106）

来描述。

5.2. 人机系统的设计原则

人机系统也是一种随动系统，因此可以利用各种已有的概念和方法来进行设计。具体设计时应遵循下列三条原则。

(1) 对操纵人员（传递函数）的要求要尽可能简单。

人机系统设计时对人的动特性的处理与对具体元件的处理是不同的。虽然已知人有自适应能力，有补偿特性，但设计时却不应直接照搬式（4—103）。因为若按式（4—103）设计，就相当于要求人去实现补偿。这样，操纵人员的劳动强度就大，而且也不容易训练。我们的设计应该要求操纵人员的操作最为简单。这就是说，对人的传递函数的要求要尽可能地简单。至于稳定跟踪所要求的补偿特性，可设计相应的半自动系统（图4—49）来提供。

所以实际设计中一般取人的传递函数为

$$G_H(s) = K_H \frac{e^{-LS}}{T_n s + 1} \quad (4-104)$$

或

$$G_H(s) = K_H e^{-LS} \quad (4-105)$$

若操纵器是手轮，大量的实验表明当瞄准手轮的速度是在每分钟10~200转之间时，瞄准手摇动手轮的速度与误差信号是成比例的。因此，这时人的传递函数可以看作

$$G_H(s) = K_H \frac{e^{-LS}}{s} \quad (4-106)$$

实验并表明，操纵瞄准手轮时，人的反应延迟为 $L = 0.5s$ ^[3]。

(2) 系统的带宽 ω_c 不宜超过3 rad/s。这是由人

的通频带限制的。

(3) 应保证系统中频段的特性为

$$G(s) = \frac{\omega_c e^{-Ls}}{s} \quad (4-107)$$

这个要求是从带宽和稳定性提出来的，与本章第二节中的概念是一样的。

根据式(4—107)的要求可以知道，为保证稳定跟踪，若被控元件具有比例特性，则操纵器就宜选用瞄准手轮〔见式(4—106)〕。如操纵器为操纵杆，则半自动系统(被控对象)就应该具有积分特性。

5.3. 设计实例

设以图4—32所示的系统为基础，设计一个半自动系统，用手轮操纵。

我们知道，当采用手轮操纵时，半自动系统在中频段应具有比例特性。但考虑到，人机系统的带宽较窄，低频段宜再加一积分规律，故本例中取半自动系统的特性是比例加积分。图4—50所示就是接成半自动工作状态时的系统原理图。这里取原输出轴上的测速发电机T的输出作为反馈信号。半自动工作时瞄准手轮也带动一测速发电机(T_1)。手轮转动时 T_1 发出电压(u_1)控制输出轴转动。输出轴转动时原系统中的测速发电机T给出反馈电压与 u_1 平衡。当手轮以恒速转动时，输出轴也恒速转动。所以这一部分属于比例规律： $\theta_0 = K_1 \varphi$ 。瞄准手轮同时还带动一电位计。若手轮停在某一位置上($\dot{\varphi} \approx 0$)，电位计有电压输出，输出轴就会以恒速转动。所以这一部分为积分规律： $\theta_0 = K_2 \int \varphi dt$ 。这两种规律相结合，构成了此半自动系统的方程式：

$$\theta_o = K_1 \varphi + K_2 \int m dt \quad (4-108)$$

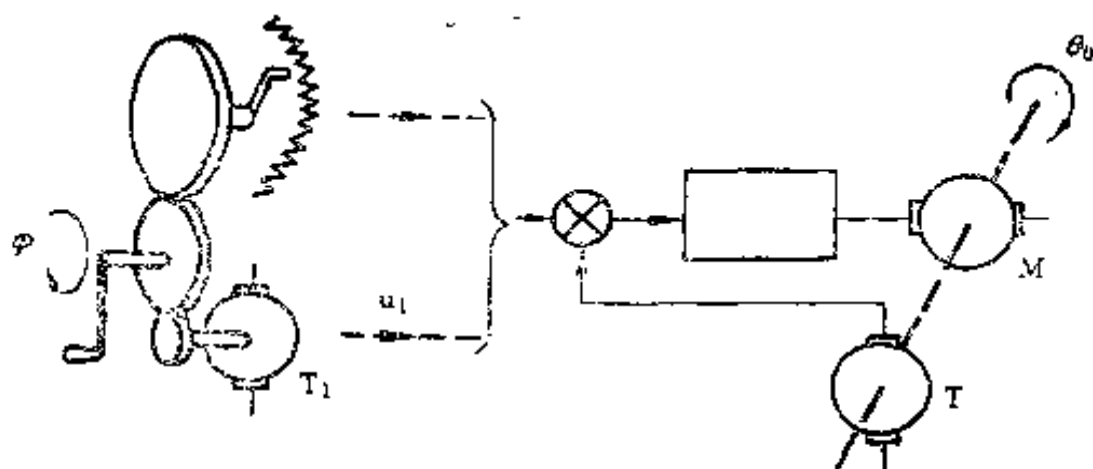


图4—50 半自动跟踪系统

对应的传递函数为

$$G_E(s) = \frac{\theta_o(s)}{\varphi(s)} = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_s s} \right) \quad (4-109)$$

式中 T_s 称为半自动系统的时间常数

$$T_s = K_1 / K_2 \quad (4-110)$$

这里要讨论的半自动系统的设计，就是指式(4—109)中 K_1 和 T_s 值的选取。这些数据是进一步具体确定传动比和光学系统的增益系数的依据。

我们已经知道，操纵手轮时，人的特性要用式(4—106)来描述。将式(4—106)与(4—109)结合，得系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_H(s) G_E(s) = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_s s} \right) \frac{e^{-Ls}}{s} \quad (4-111)$$

式中我们将整个开环增益归在一起，用 K_1 来表示。

为了便于解析计算, 取

$$e^{-Ls} \approx 1 / \left(\frac{L}{3} - s + 1 \right)^3 \quad (4-112)$$

将式 (4-112) 代入式 (4-111) 可写得误差的传递函数为

$$\frac{E(s)}{\Theta_1(s)} = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{(Ls/3+1)^3 s^2}{(Ls/3+1)^3 s^2 + K_1 s + K_1/T_n} \quad (4-113)$$

根据式 (4-113) 得输入加速度对误差信号的传递函数为

$$\frac{E(s)}{\ddot{\Theta}_1(s)} = \frac{(Ls/3+1)^3}{(Ls/3+1)^3 s^2 + K_1 s + K_1/T_n} \quad (4-114)$$

设输入的加速度信号为白噪声, 其谱密度为

$$S_1(f) = N \quad (4-115)$$

这样, 根据第三章的式 (3-82) 和式 (3-86) 可得系统跟踪误差的均方值为

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_e(f) df \\ &= \frac{N}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(j\omega L/3+1)^3}{(j\omega L/3+1)^3 (j\omega)^2 + j_1 \omega K + K_1/T_n} \right|^2 d\omega \end{aligned} \quad (4-116)$$

取无量纲频率 $\Omega = \omega L$ 后, 式 (4-116) 可改写成

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2} &= NL^3 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(j\Omega/3+1)^3}{(j\Omega/3+1)^3 (j\Omega)^2 + K_1 L (j\Omega) + (K_1 L)(L/T_n)} \right|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (4-117)$$

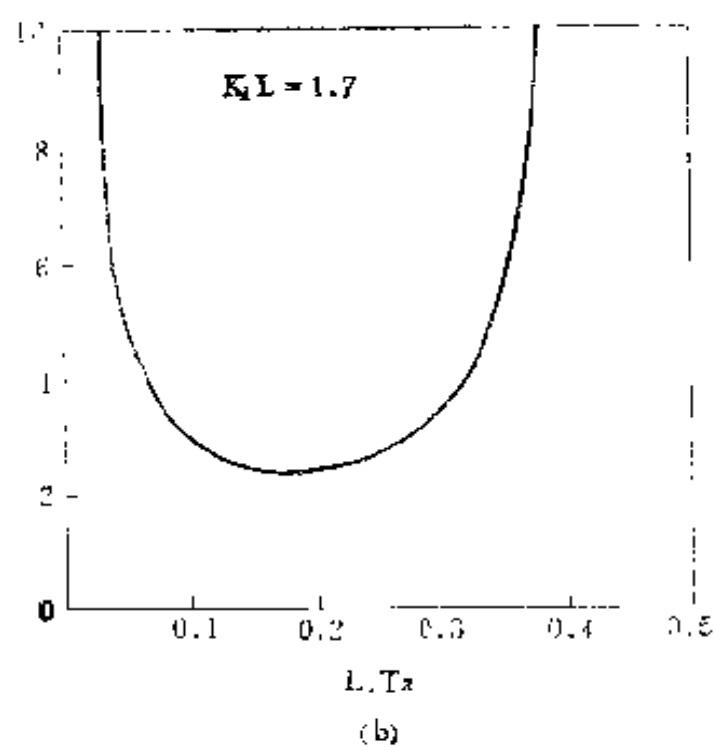
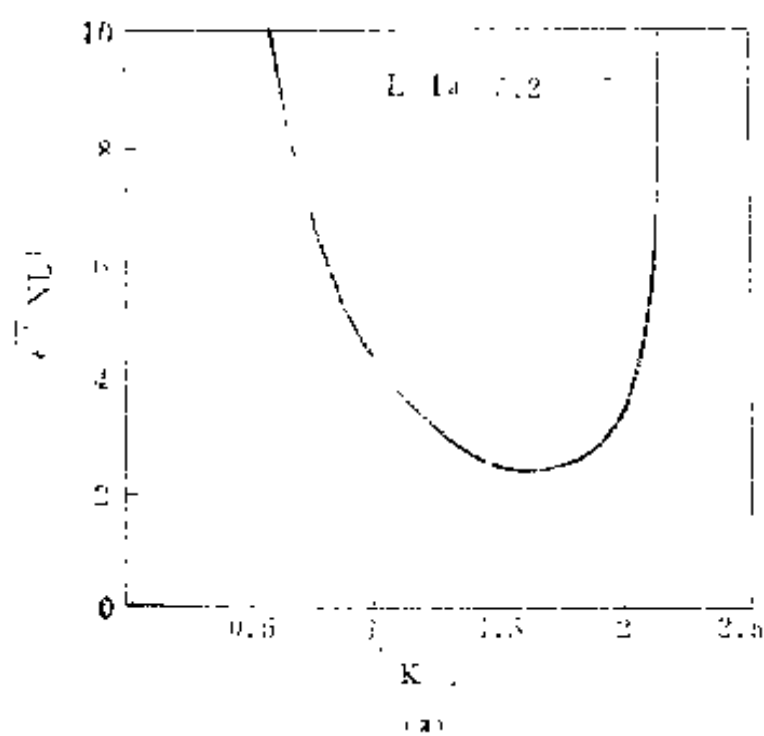


图4—51 均方误差与参数的关系

或

$$\overline{\epsilon^2} = NL^3 \cdot I_5 \quad (4-118)$$

式中 I_5 表示式 (4-117) 中五阶的积分式。这个积分值可用递推算法 (第三章 § 5) 来算。图 4-51 就是不同参数下所算得的均方误差 $\overline{\epsilon^2}$ 的曲线。由图可见, 当

$$\begin{cases} L/T_s = 0.2 \\ K_1 L = 1.7 \end{cases} \quad (4-119)$$

时, 均方误差为最小。此时

$$\overline{\epsilon^2} = \overline{\epsilon^2}_{\min} = 2.3415 NL^3$$

图 4-52 为系统的参数稳定区域, 参数超出这个区域时这个手动跟踪系统就不稳定了。图中标出了最小均方误差所对应的点的位置。该图表明, 最小方差设计既保证了稳定, 又保证了误差最小。

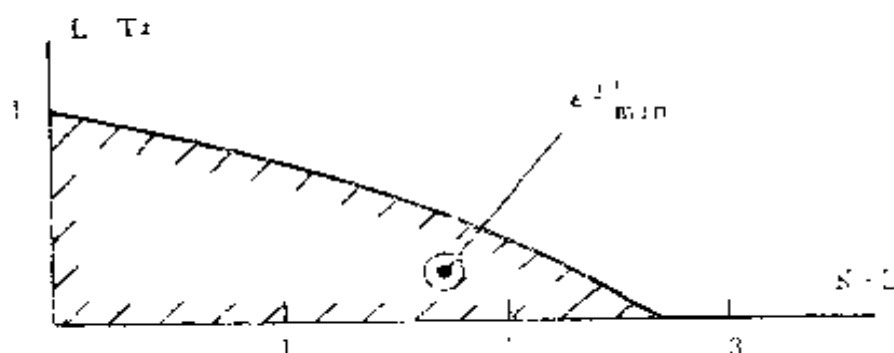


图4-52 参数稳定区域

设人的反应延迟 $L = 0.5s$, 根据式 (4-119) 可得此半自动系统的参数为

$$T_s = L/0.2 = 2.5 \text{ s}$$

$$K_1 = 1.7/L = 3.4 \text{ s}^{-1}$$

根据这套参数, 从式 (4-111) 可以看到过 0 dB 线时

积分项已不起作用，其中频段的特性为

$$G(s) \approx \frac{K_1 e^{-Ls}}{s}$$

系统的带宽为 $\omega_0 = K_1 \approx 3.4 \text{ rad/s}$ ，符合对人机系统提出的设计要求。

上面的理论计算与实验结果也相符合^[8]。理论计算的最优时间常数 $T_s \approx 2.5s$ 。实验求得的值为 $2 \sim 3s$ 。

五、调节系统的设计

1. 干扰的抑制

我们知道，每一个工艺过程都存在着干扰，自动调节的任务就是要在干扰作用下使被调量保持在给定值上。所以调节系统的设计是围绕着如何抑制干扰来进行的。

当然随动系统里也有干扰，例如风载的影响等。这里介绍的一些原则对随动系统也是适用的。

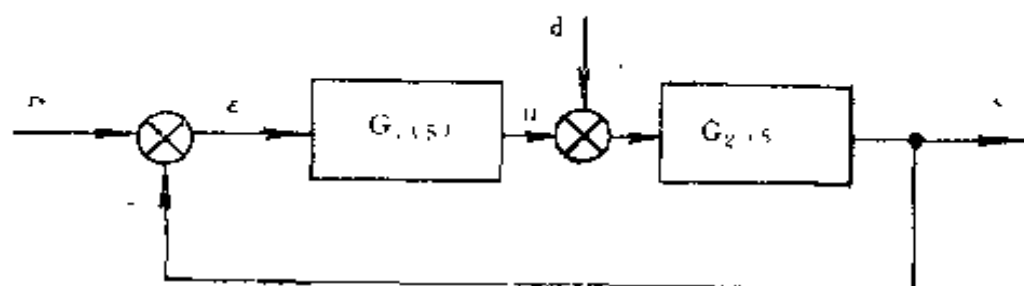


图4—53 调节系统中的干扰

这里讲的干扰主要是指作用在被控对象上的干扰。它在

系统中的作用情况如图4—53所示。图中d表示干扰。

设输入 $r=0$ ，输出与干扰的关系为

$$\frac{C(s)}{D(s)} = T(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (4-120)$$

对应的频率特性为

$$T(j\omega) = \frac{G_2(j\omega)}{1 + G_1(j\omega)G_2(j\omega)} \quad (4-121)$$

注意到低频段特性有

$$|G_1(j\omega)G_2(j\omega)| \gg 1 \quad (4-122)$$

所以低频段的频率特性可近似写作

$$T(j\omega) \approx 1/G_1(j\omega)。 \quad (4-123)$$

当超出系统的带宽时，

$$|G_1(j\omega)G_2(j\omega)| \ll 1 \quad (4-124)$$

这时的频率特性可近似写作

$$T(j\omega) \approx G_2(j\omega) \quad (4-125)$$

这就是说，当超过系统的带宽时，干扰对于输出的特性由被控对象的频率特性 $G_2(j\omega)$ 所决定。

根据上述分析可以知道，只有当干扰（或负载）的变化比较慢，即当干扰的频谱比较窄时，式（4—123）才成立，即 $T(j\omega) \approx 1/G_1(j\omega)$ 。这时，为了抑制干扰，可增大 G_1 的增益。有时可以在 G_1 即调节规律上加一积分规律，使低频段的 G_1 的幅值大为增加，以达到抑制干扰的作用。因此，在具体设计时应该先弄清干扰的特性频谱，才能有针对性地来考虑设计问题，而不是笼统地提高增益或加积分规律。否则这个设计就有可能是不成功的。

下面结合一具体例子来说明。图4—54所示为一随动系统和它的干扰到输出的频率特性 $T(j\omega)$ 。虚线为式（4—123）

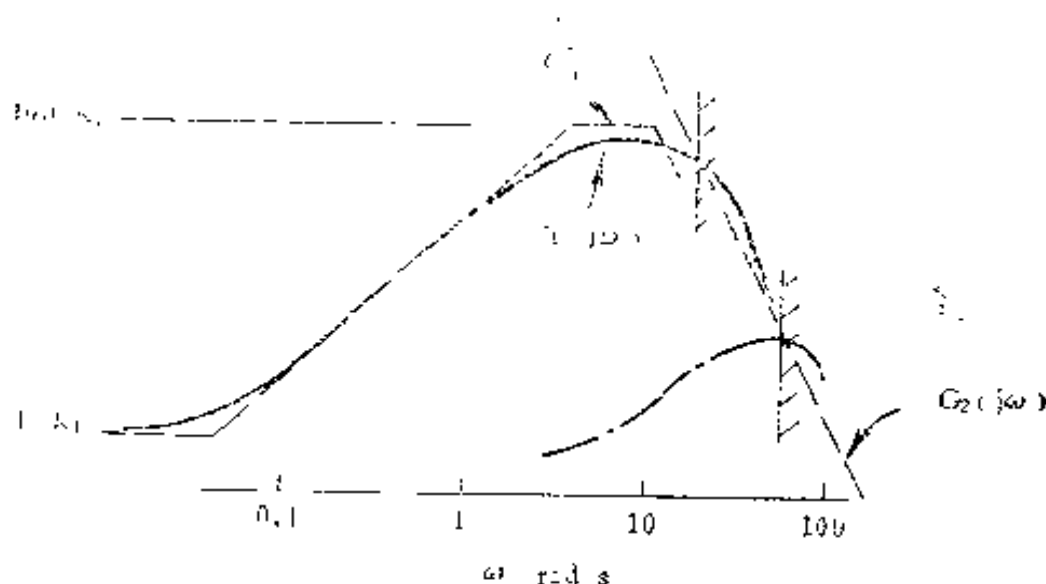
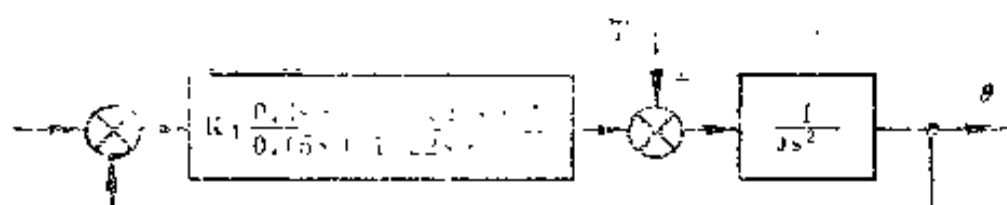


图4—54 θ/T_d 的频率特性

和式 (4—125) 的近似特性线。这个系统的一个设计指标是伺服刚度 K_T 。从图 4—54可以看到，当 $\omega < 0.045 \text{ rad/s}$ 时，

$$T(j\omega) \approx 1/G_1(j\omega) = 1/K_T$$

即该系统在低频段有足够的刚度。但若干扰的频谱延伸到中频段就没有刚度了，因为在 $\omega = 10 \text{ rad/s}$ 处， $T(j\omega)$ 的值较低频段高出近40dB。这时只要有一点干扰就会引起很大的误差。所以这类系统设计时首先得弄清干扰是否确实处于低频段，否则即使采用高增益也无济于事。

另外，从 θ/T_d 的频率特性还可以看到，其中频部分的特性是由对象和带宽所决定的，带宽以后此频率特性必然过渡到对象的特性 $G_2(j\omega)$ 上。所以不论采用何种校正，只要

带宽上去了，抗干扰的特性就会好，如图4—54中的点虚线所示。

上面这些都说明了要抑制干扰就应该增加系统的带宽。当然这要和噪声误差统一起来考虑，若发生矛盾，一般的解决办法是分不同回路来满足不同的要求。因为噪声和干扰的作用点不同，这样的处理是有可能的。这个问题将在第六节进行讨论。这里就认为系统的带宽是可以增加的。所以为了抑制干扰，就应该使系统的带宽超过干扰的频谱，并尽量提高调节器 G_1 的增益。

干扰引起的均方误差的计算与噪声误差的计算是一样的（见第三章）。当干扰的频谱小于系统的带宽时，一般还可使用式（4—123）的近似式来简化计算。

〔例〕设有一直径为6m的天线，其风载的谱密度为

$$\phi(\omega) = \frac{852}{\omega^2 + (0.11)^2} \quad \frac{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^2}{\text{rad/s}}$$

谱密度曲线见第三章图3—10，其频谱的宽度为0.2Hz。

设系统的带宽为1Hz，其低频段的控制规律为

$$G_1(j\omega) = 1.38 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m/rad}.$$

本例中干扰（风载）的频谱低于系统的带宽，所以干扰对输出的传递函数 $T(j\omega)$ 可用式（4—123）来近似。将 $T(j\omega)$ 和谱密度 $\phi(\omega)$ 代入均方误差的计算式，得

$$\begin{aligned} \overline{\sigma^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} |T(j\omega)|^2 \phi(\omega) d\omega \\ &= 4.48 \times 10^{-8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + (0.11)^2} d\omega \end{aligned}$$

$$= 4.48 \times 10^{-8} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 0.11} \right|^2 d\omega \quad (4-126)$$

式中的积分可写成

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 0.11} \right|^2 d\omega = 2\pi 1, \quad (4-127)$$

这样，根据第三章的表3—1可得

$$I_1 = 4.545$$

将这个 I_1 值代入式 (4—126) 得系统的均方根输出为

$$\sigma_{r.m.s.} = 1.13 \times 10^{-8} \text{ rad}$$

这就是在风载干扰下天线抖动的均方根值。

上面介绍了调节系统设计的一般原则。实际应用中调节系统的控制规律（调节规律）常由基本规律来组成。下面结合过程控制来讨论调节规律的选用及其参数整定问题。

2. 调节规律

过程控制中常把控制对象近似为有时滞 τ 的一阶惯性环节，

$$G_2(s) = \frac{K_2 e^{-\tau s}}{Ts + 1} \quad (4-128)$$

时滞是一般过程控制对象的共性。这可能是由于容积滞后引起的，也可能是由于测量滞后引起的，也可能是由于传输滞后（例如通过传送带，管路）引起的，或者是这几个因素都有。一个对象的特性常用对象时间常数 T 与时滞 τ 之比值 Z 来表示：

$$Z = T/\tau \quad (4-129)$$

现在来配调节器，图 4—55 所示为系统的框图。这里为了便于定量分析，取调节对象的比例系数 $K_2 = 1$ ，特征值 $Z = T/\tau = 10$ 。

先设调节器是一比例调节器，即其传递函数是一比例系

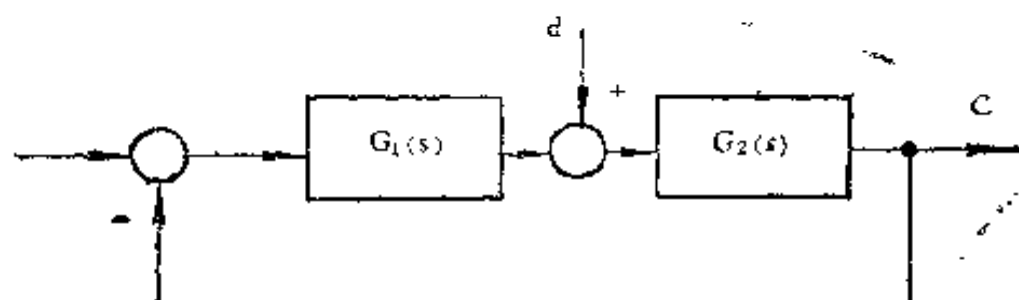


图4—55 调节系统

$$G_2(s) = e^{-\tau s} / (Ts + 1)$$

数,

$$G_1(s) = K$$

(4—130)

这个比例调节规律也称P调节规律。

设干扰为单位阶跃, 即 $d(t) = 1(t)$ 。图4—56所示就是阶跃干扰作用下的调节过程。曲线1对应于 $K = 6$, 曲线2对应于 $K = 10$ 。

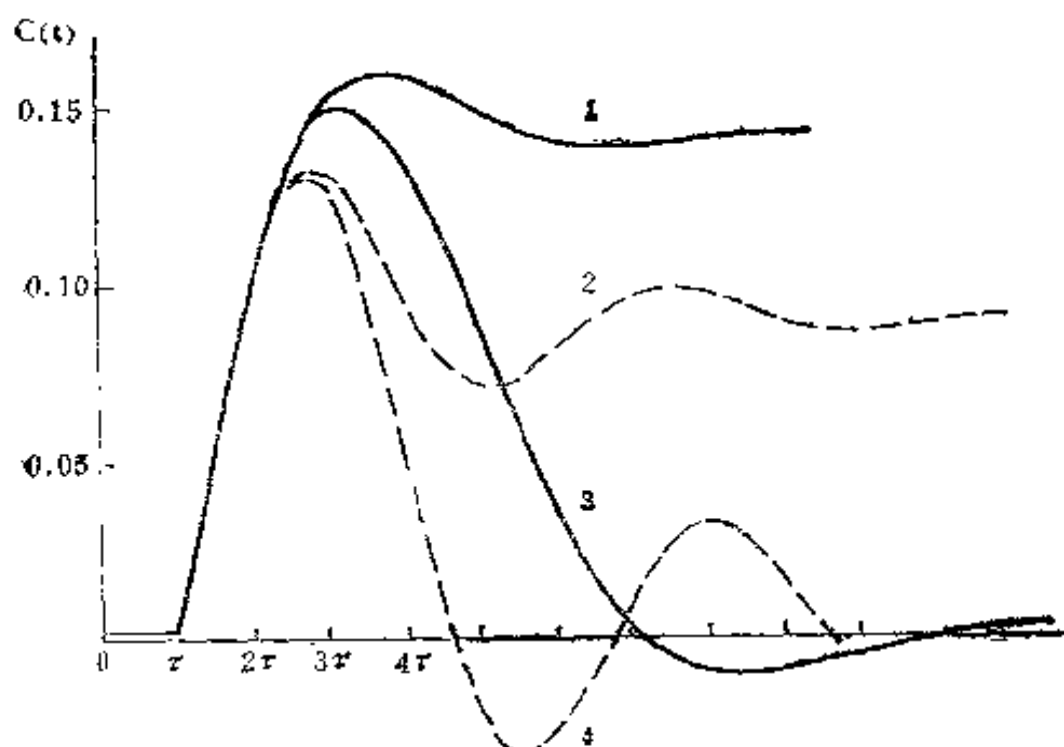


图4—56 P和PI调节的比较

1— $K = 6$; 2— $K = 10$;

3— $K = 6$, $T_i = 3\tau$;

4— $K = 10$, $T_i = 8\tau$ 。

比例调节的特点是有静差，本例中静差为

$$c(\infty) = \frac{1}{1 + K} \quad (4-131)$$

K值越大，静差越小。

我们知道，K值越大，系统的稳定性越差。因此K值的提高有一定的限度。若这时对应的静差不能满足要求，就要在调节规律上加一积分规律以消除静差。这就形成了比例加积分规律，或PI规律。

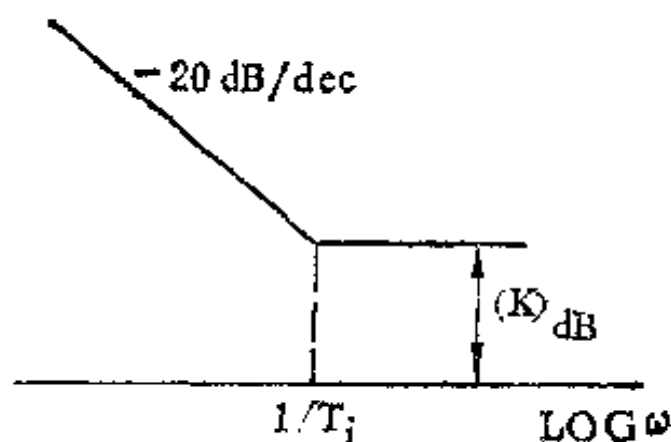


图4—57 PI调节器的频率特性

PI调节器的传递函数为

$$G_1(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (4-132)$$

图 4—57所示是PI 调节器的频率特性。从图可见，只要 $1/T_i \ll \omega$ ，那么中频段仍相当于比例调节。这就是说，PI调节的动态性能仍是由比例项所决定，积分规律主要是用来克服静差的。

其实这里谈静差，实际上是指低频特性。积分规律主要是用来提高低频段的增益。所以 $1/T_i$ 的值也不宜太小，计算时一般取

$$\frac{1}{T_i} = \left(\frac{1}{2} \sim \frac{1}{4} \right) \omega_c \quad (4-133)$$

式中 ω_c 是开环特性过0dB线的频率或带宽。

图4—56中曲线3和4是上述P调节规律， $K=6$ 和 $K=10$ 上再加积分规律时的调节过程。这里 T_i 都取相同值， $T_i=3\tau$ 。将同一个 K 值下的曲线3与1比较（或将曲线4与2比较）可以看到，积分规律对调节过程的初始阶段（第一个峰值）影响甚小。系统的稳定程度在同一 K 值下（加与不加积分规律）也基本上是相同的。当然由于积分部分相角滞后的影响，PI调节中稳定裕度要低一些。由此可见，系统的动态性能基本上是由比例规律所决定，积分规律主要影响静差，加积分规律是为了提高低频段的增益以抑制干扰。

从图4—56可以看到，调节过程的峰值一般出现在 $t=3\tau$ 前后。这是因为调节对象有时延 τ ， τ 以后的输出才有变化。而且即使这时调节器有足够的响应能及时给出控制作用，调节对象也还要经过时延 τ 后才对此控制作用作出响应。所以要在 2τ 后才能看出调节过程。故调节过程的峰值出现在 3τ 前后。峰值的大小与调节规律中的比例部分系数 K 有关。 K 值大时峰值就小一些，调节过程也会快一些。但 K 值受稳定性限制。提高 K 值，系统的相对稳定性就差了。这时为了改善稳定性，可以再加一微分规律而成为PID调节。

PID调节器的传递函数为

$$G_i(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (4-134)$$

或写成

$$G_i(s) = K + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \quad (4-135)$$

由于加了微分项，故可取较大的 K 值，图4—58曲线1就是 $K=12$ 时的PID调节过程，其调节规律〔式(4—135)〕中的各对应参数为：

$$K=12$$

$$\tau/\tau_1=7$$

$$\tau_d/\tau=5$$

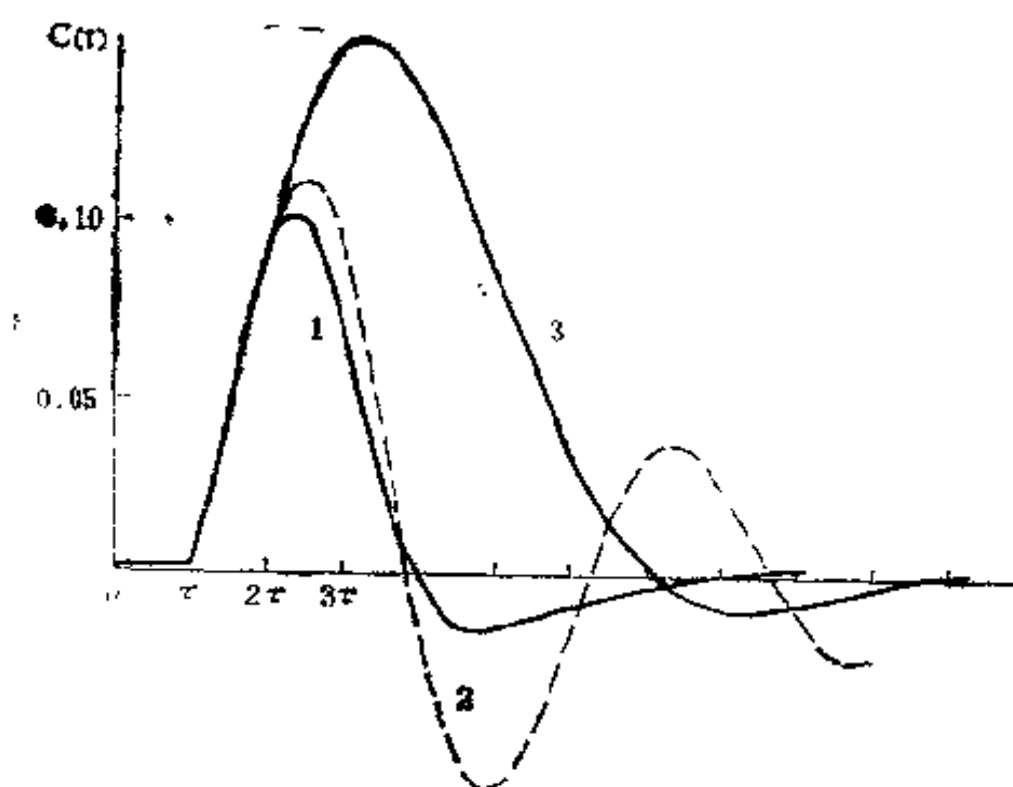


图4—58 PID调节过程的比较

为了比较微分项的作用，图4—58中曲线2与其他参数相同，仅减少微分项 ($\tau_d/\tau=2.5$) 而得出的调节过程。曲线2和曲线1的初始段基本上一致，不过曲线2的稳定性显著变坏。由此可见，调节过程的初始阶段仍是由PID中的比例项所决定，而微分项主要在于改善稳定性。由于加入了微分项，使得有可能采用较大的 K 值，从而使调节性能较PI的

有了提高。作为比较，图中还列出了上面图4—56中PI调节的典型过程（曲线3）。

3. 调节规律的性能分析〔10〕〔11〕

现在我们定量地来研究各调节规律的调节性能。

在下面的讨论中我们将对象的时延 τ 看作单位时间，即对时间取相对单位。这时调节对象的传递函数就成为

$$G_2(s) = \frac{K_2 e^{-s}}{Zs + 1} \quad (4-136)$$

式中 Z 表征对象特性，是一个相对于 τ 的无量纲时间：

$$Z = T/\tau$$

各调节规律中的时间常数也将是相对于 τ 的无量纲时间。

先讨论积分规律，这时调节器的传递函数为

$$G_1(s) = \frac{1}{T_1 s} \quad (4-137)$$

系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{K_2 e^{-s}}{T_1 s(Zs + 1)} \quad (4-138)$$

这个开环传递函数有两个实数极点。图4—59所示为此积分调节系统的主导根轨迹。

从根轨迹的布局可以看到， Z 值越小，根轨迹的分离点就越往左，整个根轨迹也就往左移，调节过程就越快。所以积分规律更适合于对象时间常数很小的场合。至于积分时间常数（或增益）的选择，若只从衰减的快慢来看，显然对应于点1（图4—59）比较好，因为这时系统的主导极点是一对相等的实数极点，且离虚轴最远。但点1处的增益较小，调节过程的峰值就要大。那么参数选在点2（ $\xi = 0.6$ ）就更好些，因为这时增益较高，而极点离虚轴还比较远。

图4—60就是取 ξ 为0.6时的阶跃干扰作用下对应不同

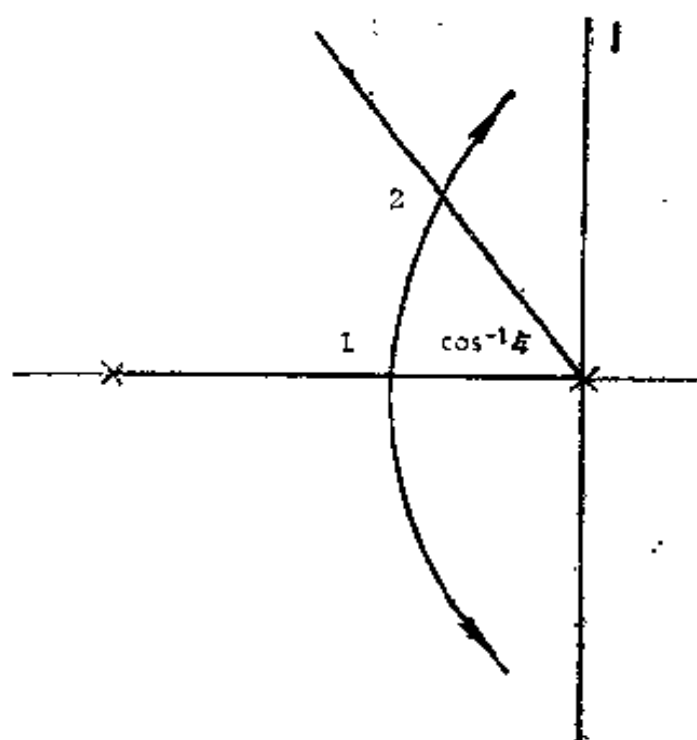


图4—59 积分调节的根轨迹

对象的调节过程。对 $Z=1$ 来说，由图可见，从 $t=\tau$ 时开始出现变化算起，经过 14τ 后调节过程就结束了，即调节时间

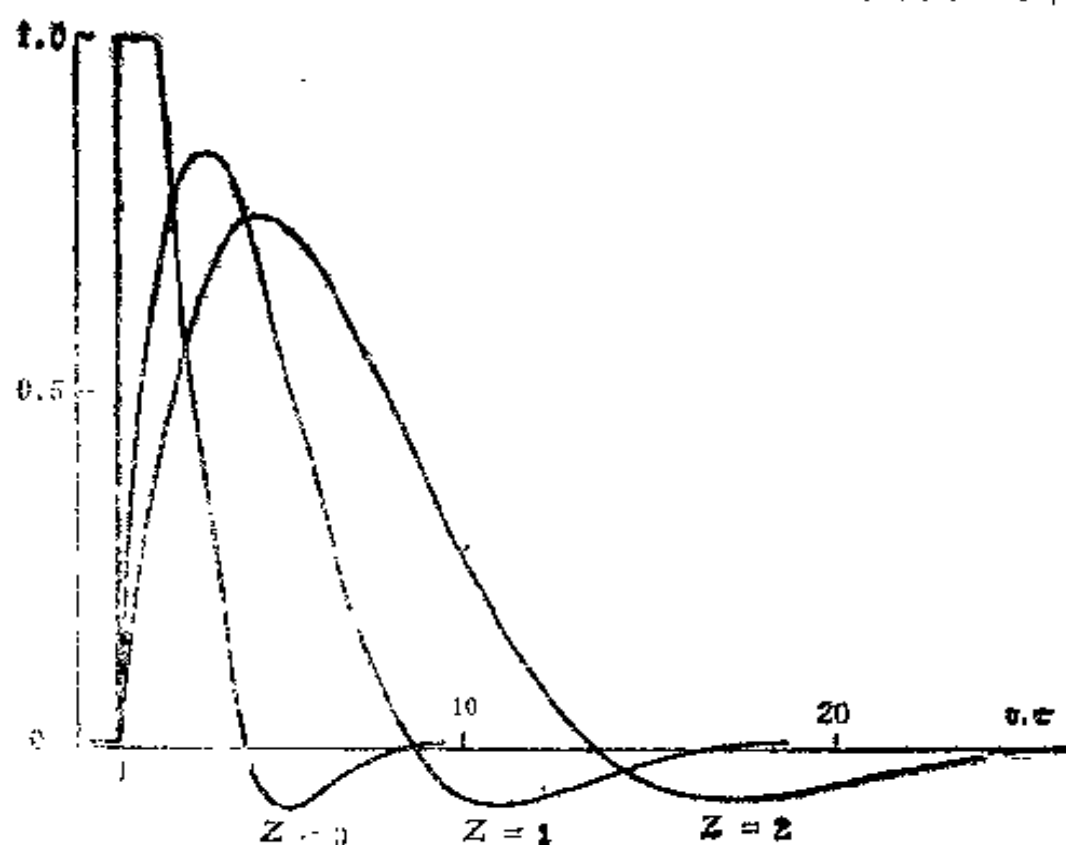


图4—60 积分调节过程

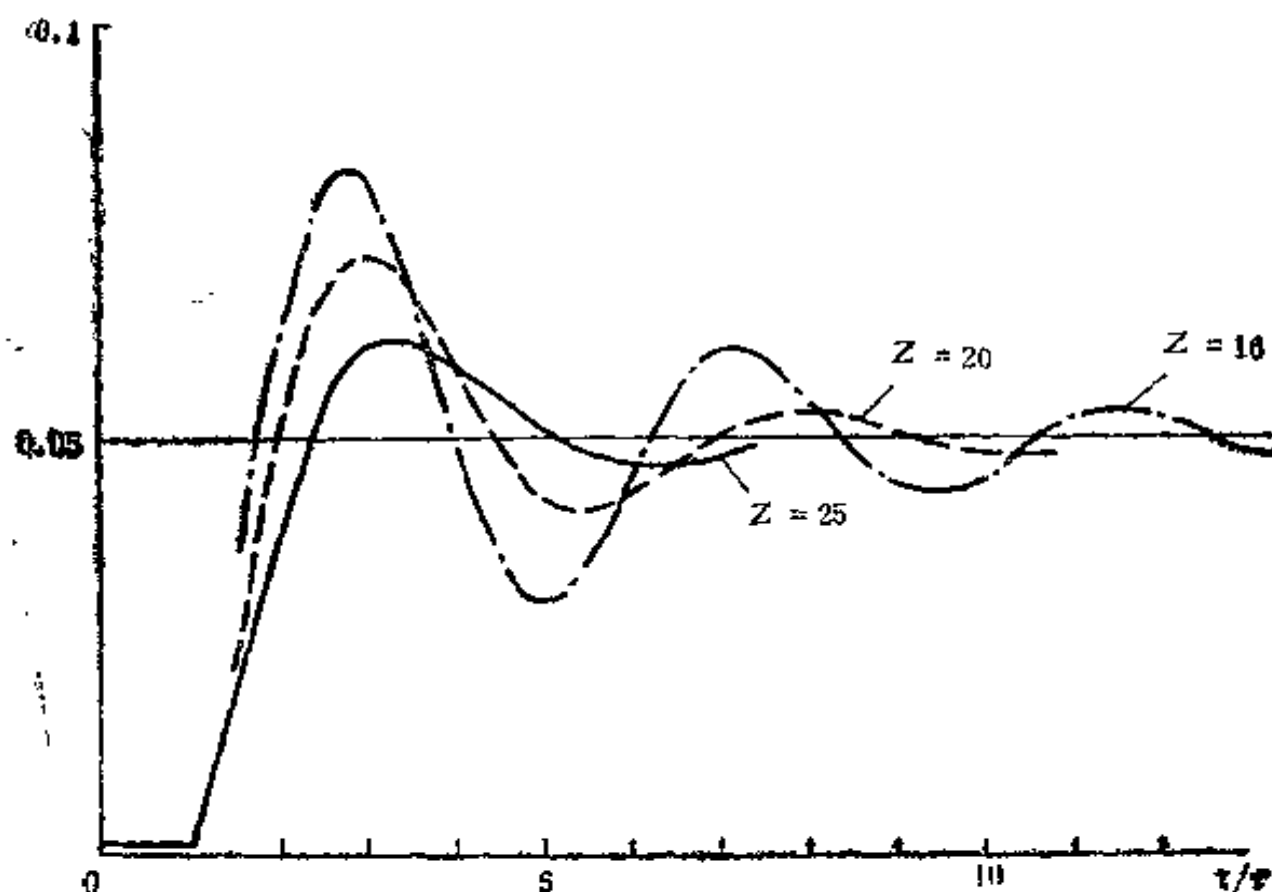
$t_s = 14\tau$ 。图 4—60 中不同对象特性所对应的调节时间可归纳成图 4—65 中的曲线 I。

现在来看比例调节。

比例调节时，调节器的传递函数为

$$G_1(s) = K_1 \quad (4-139)$$

比例调节的特点是有静差。若静差有一定要求，那么比例系数 K_1 就确定了，系统的参数已不容再作选择。



4—61 比例调节过程

图 4—61 是静差系数为 0.05 (即 $K_1 K_2 = 19$) 时阶跃干扰下的调节过程。从图可读得不同对象所对应的调节时间。例如对 $Z = 25$ 来说，从 $t = \tau$ 时出现变化算起，经过 6τ 后就稳定了。不同 Z 所对应的调节时间最后可归纳成图 4—65 中标有 5% 的 P 曲线。从图 4—61 可以看出，当 $Z < 16$ 时静差

为0.05的系统的稳定性已相当差了，已经不能用了。

根据同样的计算可以算得静差为0.10（即 $K_1 K_2 = 9$ ）时比例调节所适用的对象范围和相应的调节时间，见图4—65中标有10%的P曲线。

现在再来讨论PI调节。PI调节器的传递函数是

$$G_1(s) = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (4-140)$$

系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{K}{Z} \frac{s + 1/T_i}{s(s + 1/Z)} e^{-s} \quad (4-141)$$

这个开环传递函数有两个实数极点和一个实数零点。为了能从定量的上进行说明，先设对象的特性 $Z = 10$ 。图4—62所示就是此系统在不同 T_i 值时的根轨迹。（注：图中只表示了此时滞系统的主导根轨迹）。根轨迹1对应于 $1/T_i = 0.5$ ，这时零点 $(-1/T_i)$ 离虚轴较远，它对从原点出的根轨迹影响较小，所以系统的复数极点离虚轴较近，阻尼较弱。当这个 $(-1/T_i)$ 的零点往原点靠拢时，从原点出发的根轨迹受此零点影响将向左弯曲，但若零点太接近 $(-1/Z)$ 点，则根轨迹将分裂成两个分支，如图中的根轨迹2所示，此时 $1/T_i = 0.2$ 。

从上面的分析可以看到， $1/T_i = 0.5$ 时的根轨迹3最佳。这时从原点出发的那一对分支离虚轴最远。

根轨迹3上还标有增益 K/Z 。当 $K/Z = 0.577$ 时，复数极点离虚轴最远，而这时实数极点为 -0.54 ，与复数极点的实数部分差不多相等。所以这套参数下系统的动态响应将是最快的。

当对象特性 Z 为其他数值时，选择适当的 T_i 值也可得类

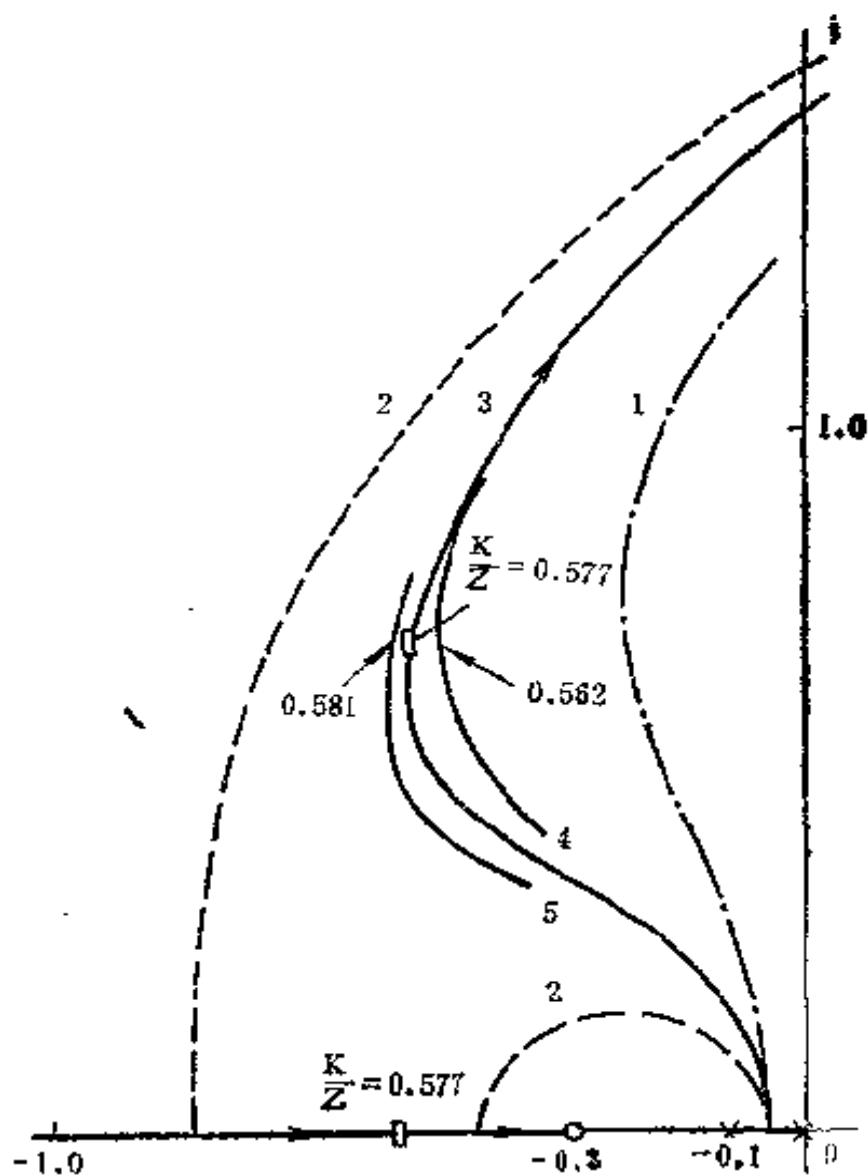


图4—62 PI调节的根轨迹

1— $1/T_I = 0.5$; 2— $1/T_I = 0.2$; 3— $1/T_I = 0.3$

似的根轨迹。图4—62中根轨迹4对应于 $Z = 5$ ，根轨迹5对应于 $Z = 20$ ，具体参数如下表所列。

Z	5	10	20
$1/T_I$	0.4	0.3	0.25
$K_1 K_I / Z$	0.562	0.577	0.581

图4—62表明，Z值不同时，最佳的根轨迹图形基本相同，最远的复数根的实数部分数值都在0.5左右，这是PI调节所能达到的最大值。因此，根据这实数部分来估算，系统的调节时间将大于6，即大于6倍的 τ 。

图4—63所示，是Z=1时单位阶跃干扰下的调节过程。此调节过程从t=τ时出现变化算起，经过7τ后就稳定了。这个数据可以认为是PI调节的性能极限。

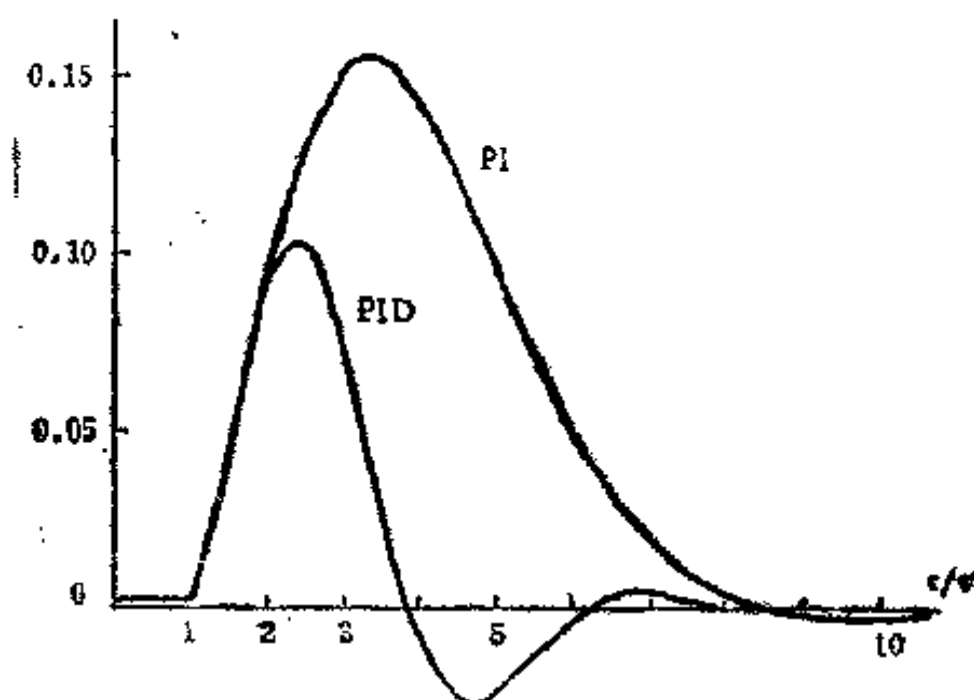


图4—63 PI和PID的典型调节过程

最后来讨论PID调节。设调节器的传递函数是

$$G_1(s) = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) (1 + T_d s) \quad (4-142)$$

现在系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{K_1 K_2 T_d}{Z} \frac{(s + 1/T_i)(s + 1/T_d)}{s(s + 1/Z)} e^{-s} \quad (4-143)$$

设 $Z = 10$ 。我们先固定 T_1 ，设 $1/T_1 = 0.7$ ，来分析 T_d 的影响。减小 T_d 可吸引根轨迹向左，但减小得太多会削弱此零点对虚轴附近的根轨迹的影响。根据综合考虑^[10]，取 $1/T_d = 2$ 。

现在固定 $1/T_d = 2$ 来讨论 T_1 的影响。图4—64所示为此时滞系统的主导根轨迹。图线1对应 $1/T_1$ 增加到0.8时的根轨迹。根轨迹2为 $1/T_1 = 0.7$ 时的根轨迹。根轨迹1的顶端随 $1/T_1$ 的增加而左移，因而 $(-1/T_1)$ 这个零点往左移动是有利的。但若这个零点再往左，对靠近虚轴的根轨迹的影响就削弱了，会使根轨迹的布局发生变化。图中曲线3就是当 $1/T_1$ 增加到0.9时的根轨迹。这时根轨迹重新组合成左右两个分支。显然右边分支上的根衰减较慢，这时调节过程反而拖长了。由此可见， $1/T_1$ 取0.8是比较理想的，不能再增大了。总之，零点可以吸引根轨迹往左，但太远了又会失去对从原点出发的根轨迹的影响，上面这套参数是能够将根轨迹拉向左面的最适当的值。

根轨迹1上标有增益的变化方向。从图4—64可以看到当 K 增大时第一对根从右向左移动，而第二对根则从左向右移动。从所标的 K 值可以看到，顶端附近这两分支上的对应根离虚轴差不多一样远，这时系统的动态响应将最快。因此我们将系统的极点安排在顶端附近，这时 $K/Z = 0.89$ ，各根的实数部分数值都约等于0.8。

现在来考虑对象参数 $Z = T/\tau$ 的影响。这个 Z 反映在极点 $(-1/Z)$ 的位置上，由于根轨迹的顶部离它比较远，所以这个极点的变化对根轨迹的影响比较小。图4—64中绘出了不同 Z 值时的部分根轨迹。不同 Z 时根轨迹顶部的形状和位置（横坐标）基本不变，离虚轴的距离都在0.8左右。

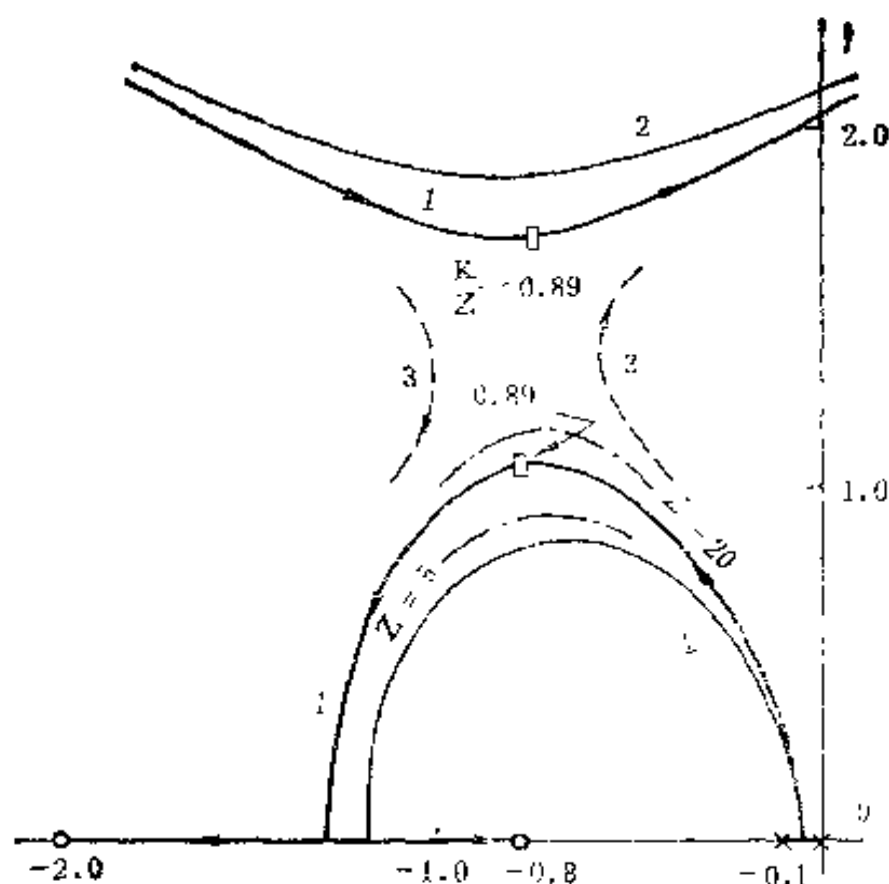


图4—64 PID调节的根轨迹 ($1/T_d = 2$)

1— $1/T_1 = 0.8$; 2— $1/T_1 = 0.7$; 3— $1/T_1 = 0.9$

总之，PID系统的根的实数部分数值可做到0.8。根据此实数部分来估算，系统的调节时间将大于4，即大于4倍的 τ 。

图4—63上也表示出了在上述参数下 $Z = 10$ 时单位阶跃干扰下的PID调节过程。这个调节过程从 $t = \tau$ 时出现变化算起，经过 5τ 的时间就可认为结束了。

上面虽然只讨论了有自衡的对象，但从图4—64可以清楚看出无自衡时根轨迹也不会有什么大的变化，所以这里的分析具有一般性。

现在将上面的讨论结果归纳为图4—65。图4—65的横

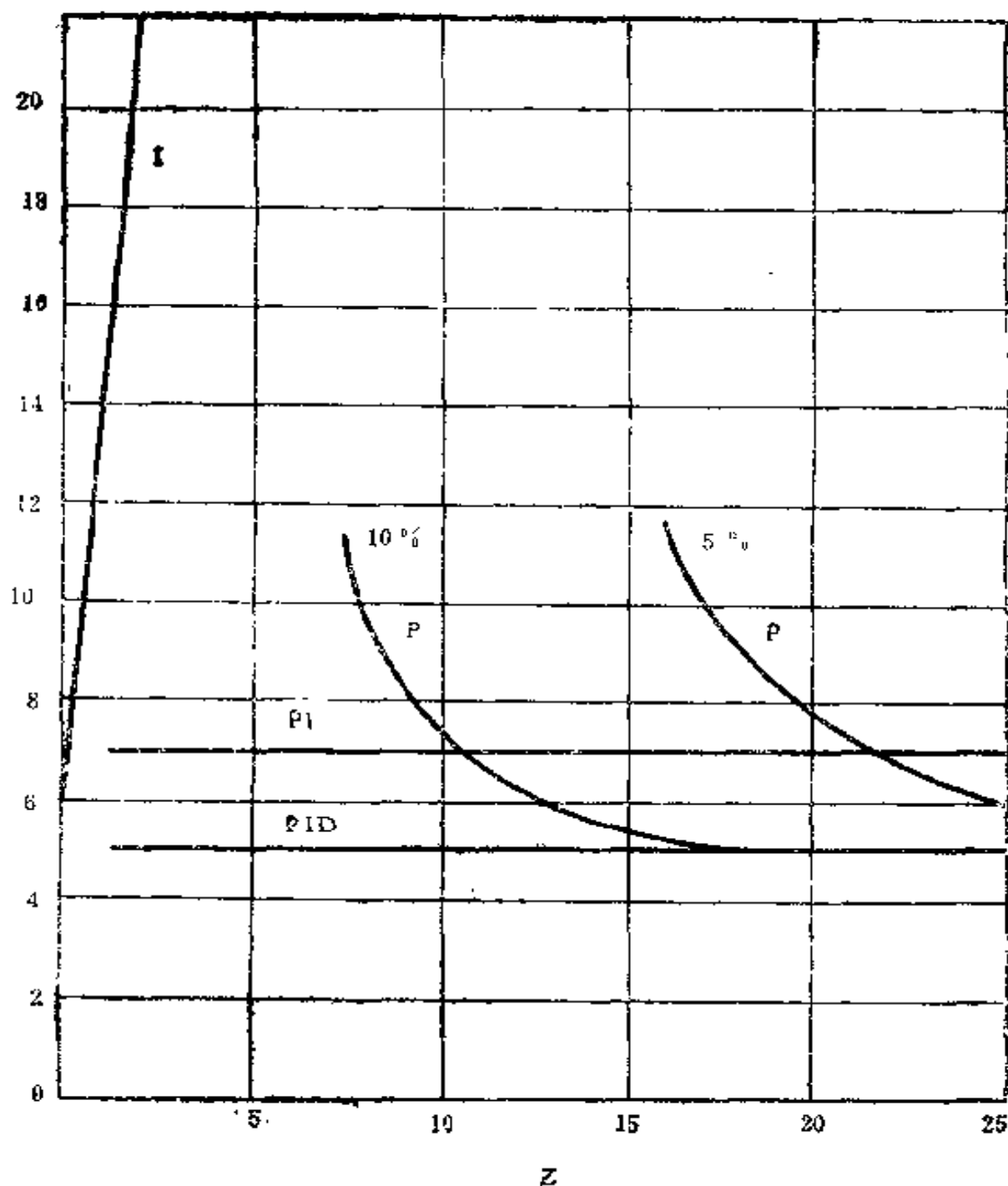


图4—65 调节规律性能图

坐标为对象的特性 $Z = T/\tau$ ，纵坐标为调节时间 t_s 。图4—65既表示了各调节规律的适用范围，又表示了各调节规律所能达到的性能。注意到这里虽然是以调节时间作为指标，但从上面的讨论中可以看到这已包含了对系统的相对稳定性的要

求。图 4—65 表明，积分调节适用于无惯性或对象时间常数很小的场合。而比例调节则适用于大惯性和时滞小的对象。这时系统的调节时间都不大，且静差（对比例调节来说）也比较小。至于 PI 和 PID 调节，适用的范围就很广。从图 4—65 还可以看到，常规调节的调节时间最小也要 5 倍的 τ ，这是常规调节器的极限性能。

图 4—65 既可作为调节规律选用的依据，也可用作判别参数整定效果的依据。

4. 调节规律的参数整定

上面详细说明了各调节规律的作用和可能达到的性能。设计时就可以根据这些概念来选用合适的调节器。至于调节规律中的参数原则上可以用有关的控制理论来确定，不过对一些典型对象〔例如式（4—128）〕，都已经有很多成熟的经验，制订了各种现成的公式或表格。表 4—4，表 4—5 就是这样的一种参数整定表，可供我们整定时参考^[6]。

这是根据模拟实验归纳得来的整定表。表 4—4 是无超调时调节过程最快及对应的调节器参数；表 4—5 是超调为 20% 时调节过程最快所对应的参数。所谓 20% 超调，是指图 4—66 所示过程中 $a/b = 20\%$ 来说的。应用时可根据对象特性 (Z, K_2) 和设计要求用表中的公式来确定调节器的参数。

〔例〕设对象的 $Z = 10$ ， $K_2 = 1$ ，要求确定 PID 调节器的参数使系统在阶跃干扰作用下超调为 20%。

根据表 4—5 中 d 突变栏内 PID 的参数公式，得

$$K_1 = 1.2Z / K_2 = 12,$$

$$\tau / \tau_i = 0.6Z / K_2 = 6,$$

$$\tau_d / \tau = 0.5Z / K_2 = 5,$$

表4—4

无超调的最佳整定

调节规律	给定量 r 突变	负荷 d 突变
$u = K_1 \varepsilon$	$K_1 = 0.3Z/K_2$	$K_1 = 0.3Z/K_2$
$u = K_1 \varepsilon + \frac{1}{\tau_1} \int \varepsilon dt$	$K_1 = 0.35Z/K_2$ $\tau/\tau_1 = 0.3/K_2$	$K_1 = 0.6Z/K_2$ $\tau/\tau_1 = 0.15Z/K_2$
$u = K_1 \varepsilon + \frac{1}{\tau_1} \int \varepsilon dt + \tau_d \frac{d\varepsilon}{dt}$	$K_1 = 0.6Z/K_2$ $\tau/\tau_1 = 0.6/K_2$ $\tau_d/\tau = 0.3Z/K_2$	$K_1 = 0.95Z/K_2$ $\tau/\tau_1 = 0.4Z/K_2$ $\tau_d/\tau = 0.4Z/K_2$

表4—5

超调 20% 的最佳整定

调节规律	给定量 r 突变	负荷 d 突变
$u = K_1 \varepsilon$	$K_1 = 0.7Z/K_2$	$K_1 = 0.7Z/K_2$
$u = K_1 \varepsilon + \frac{1}{\tau_1} \int \varepsilon dt$	$K_1 = 0.6Z/K_2$ $\tau/\tau_1 = 0.6/K_2$	$K_1 = 0.7Z/K_2$ $\tau/\tau_1 = 0.3Z/K_2$
$u = K_1 \varepsilon + \frac{1}{\tau_1} \int \varepsilon dt + \tau_d \frac{d\varepsilon}{dt}$	$K_1 = 0.95Z/K_2$ $\tau/\tau_1 = 0.7/K_2$ $\tau_d/\tau = 0.45Z/K_2$	$K_1 = 1.2Z/K_2$ $\tau/\tau_1 = 0.6Z/K_2$ $\tau_d/\tau = 0.5Z/K_2$

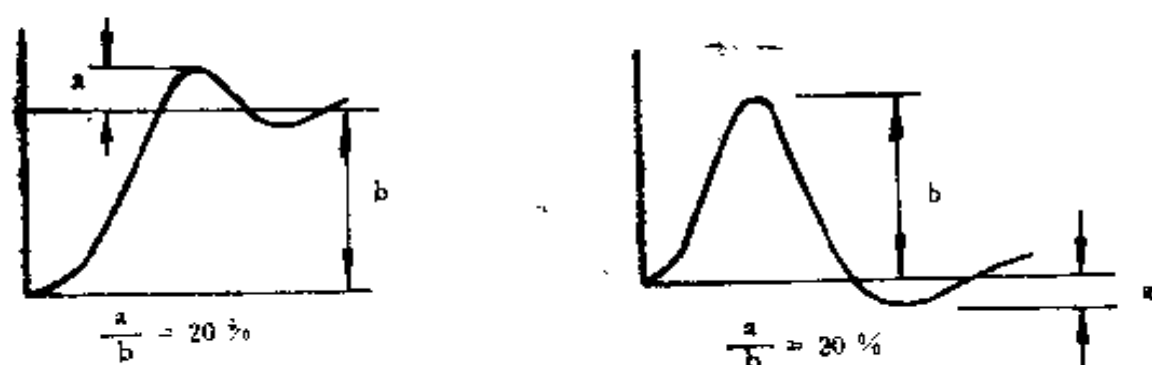


图 4-66 超调20%的过程

参数整定用的公式或表格大大方便了实际的调节器整定工作，不过在使用时应注意下列问题。

(1) 调节规律的表达式

PID调节规律在表达时各有些细微的差别，在确定参数时应特别注意。例如整定表 4—4 和表 4—5 所对应的调节规律表达式为

$$u = K_1 \varepsilon + \frac{1}{\tau_i} \int \varepsilon dt + \tau_d \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4-144)$$

对应的传递函数为

$$G_1(s) = K_1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \quad (4-145)$$

若调节规律写成

$$G_1(s) = k \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (4-146)$$

则根据整定表所求得的数据要经过折算：

$$\left. \begin{aligned} K &= K_1 \\ T_i &= K_1 \tau_i \\ T_d &= \tau_d / K_1 \end{aligned} \right\} \quad (4-147)$$

有时调节器是用比例加微分规律和比例加积分规律串联而成。这时PID规律为

$$G_1(s) = K_1 (1 + T_d s) (1 + \frac{1}{T_i s}) \quad (4-148)$$

这是串联型的PID结构，若写成一般的并联形式，为

$$\begin{aligned} G_1(s) &= K_1 (1 + \frac{T_d}{T_i} + \frac{1}{T_i s} + T_d s) \\ &= K_1 F (1 + \frac{1}{F T_i s} + \frac{T_d}{F} s) \\ &= K_1^* (1 + \frac{1}{T_i^* s} + T_d^* s) \end{aligned} \quad (4-149)$$

式中

$$F = 1 + T_d / T_i \quad (4-150)$$

$$K_1^* = K_1 F$$

$$T_i^* = T_i / F$$

$$T_d^* = F T_d$$

所以若参数整定表是按并联形式（4—146）给出时，那么要经过式（4—150）换算后才是式（4—148）中的参数。

（2） 整定规律

整定用的公式或表格一般是规格化了的，便于使用，但其整定的效果则并不一定是最佳的，不一定能达到图4—65所示的性能。

5. 调节规律的实现

这一节说明调节器的结构形式。讨论调节器时就得用调节器里的术语。调节器里习惯上不用增益而用比例带。调节器的比例带（或称比例度）是调节器输入的相对变化量与输

出的相对变化量的比值。设输出 y 变化100%，那么对应的输入 x 的变化范围就是比例带 P 。图4—67表示了不同比例带所对应的静特性。

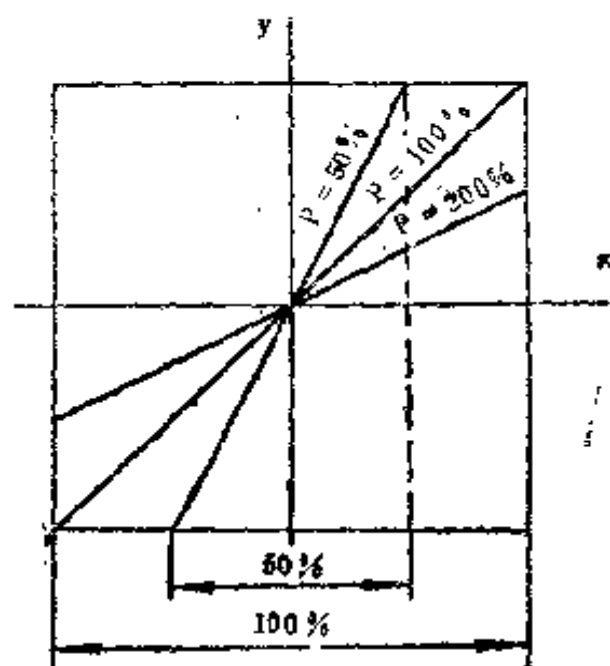


图4—67 调节器的静特性和比例带 P

对于输入范围和输出范围相等的调节器来说，比例带就等于输入变化量与输出变化量之比：

$$P = \frac{\Delta x / \Delta x_{\max}}{\Delta y / \Delta y_{\max}} \times 100\% = \frac{\Delta x}{\Delta y} \times 100\% \quad (4-151)$$

显然，比例带就是调节器增益 K_p 的倒数：

$$P = \frac{1}{K_p} \times 100\% \quad (4-152)$$

例如，设一调节器增益的可调范围 $K_p = 0.2 \sim 50$ ，则我们就称该调节器的比例带为 $P = 2 \sim 500\%$

下面以通用型DDZ—Ⅲ型的调节器为例，来说明调节规律的实现。Ⅲ型调节器采用PD、PI相串接的方案，图4—68所示为其原理图。这个线路的第一部分实现比例加微分规律，第二部分为比例加积分，两者串接形成PID调节规

律。微分电容 C_d 可以切除，这时就成为 PI 调节规律了。

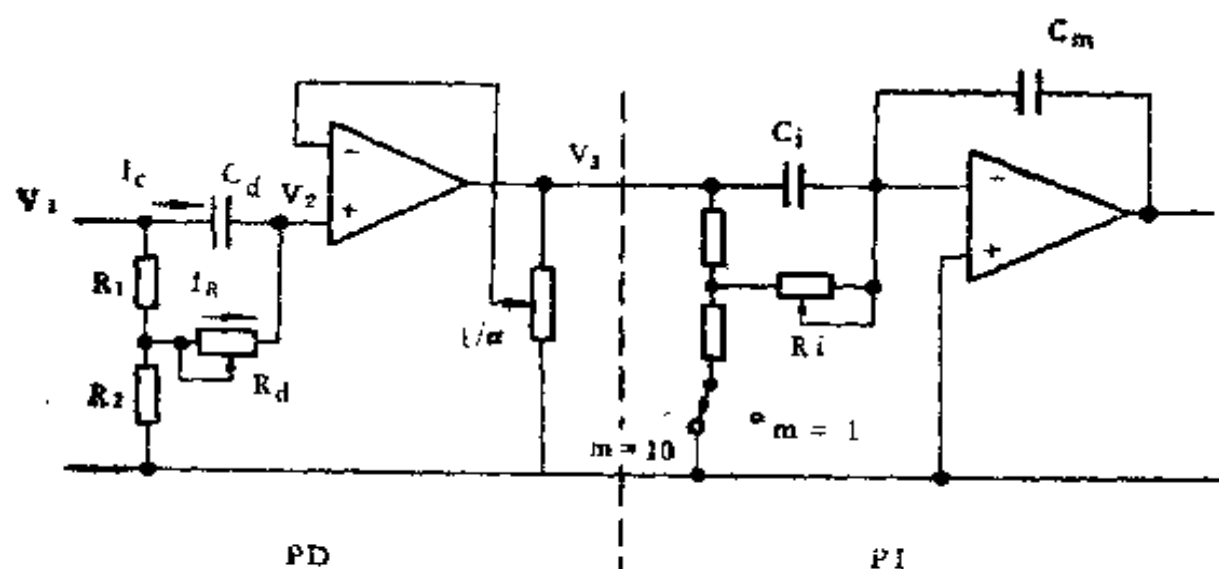


图4-68 Ⅱ型调节器

图4-68的第一级为同相跟踪电路，由于组件的输入阻抗很高，其输入电流可近似认为等于零，即

$$I_C + I_R = 0$$

$$\frac{V_1(s) - V_2(s)}{1/C_d s} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_1(s) - V_2(s)}{R_d} = 0$$

整理后，得

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + n R_d C_d s}{1 + R_d C_d s} \quad (4-153)$$

式中

$$n = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

因为是同相跟踪，并取 $1/\alpha$ 反馈，所以可写以得这第一级的传递函数为

$$G_1(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{1 + n R_d C_d s}{1 + R_d C_d s} \quad (4-154)$$

或

$$G_1(s) = \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{1 + T_d s}{1 + \frac{T_d}{K_d} s} \quad (4-155)$$

式中

T_d = 微分时间常数, $T_d = n R_d C_d$,

$K_d = n$ 。

式(4—155)表明, 这第一级与理论上的PD相比, 分母上多一个时间常数 T_d/K_d 。这里的 K_d 有时称为微分增益。

Ⅱ型调节器中

$$K_d = n = 10$$

$$\alpha = 1 \sim 250$$

图4—68的第二级运算放大器线路是一般的反相放大线路。它由两部分组成: C_1 与 C_m 形成的比例运算和 V_s 分压后的 R_1 与反馈电容 C_m 所构成的积分运算部分, 其传递函数为

$$\begin{aligned} G_2(s) &= - \left(\frac{C_1}{C_m} + \frac{1/m}{C_m R_1 s} \right) \\ &= - \frac{C_1}{C_m} \left(1 + \frac{1}{T_1 s} \right) \end{aligned} \quad (4-156)$$

式中

T_1 = 积分时间常数, $T_1 = m R_1 C_1$,

$1/m$ = 分压系数, Ⅱ型调节器中 m 有两档 (见图4—68): $m = 1$ 或 $m = 10$ 。

因为第一级和第二级相串联, 故得图4—68线路的传递函数为

$$G_1(s)G_2(s) = - \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{C_1}{C_m} \cdot \frac{1 + T_d s}{1 + \frac{T_d}{K_d} s} \left(1 + \frac{1}{T_1 s} \right) \quad (4-157)$$

这里 $C_1 = C_m = 10 \mu F$ 。另外，在实际的Ⅱ型调节器中还有一个输入电路，其增益为 -2 ，故Ⅱ型调节器的总的传递函数为

$$G(s) = K_p(1 + T_d s) \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) / \left(1 + \frac{T_d}{K_d} s\right), \quad (4-158)$$

式中

$$K_p = 2 \alpha / n$$

如果略去小时间常数，则有

$$G(s) = K_p(1 + T_d s) \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right). \quad (4-159)$$

这就是前面所说的串联型PID结构。

附录：Ⅱ型调节器的参数

比例带： $P = 2 \sim 500\%$ ；

积分时间： $T_i = 0.01' \sim 2.5'$ 及 $0.1' \sim 25'$ 两档；

微分时间： $T_d = 0.04' \sim 10'$ 或切断。

六、多回路系统的设计

我们知道系统的带宽是受到一定限制的。也知道无论是随动系统或调节系统都存在着干扰。当干扰的频谱接近或超过系统的带宽时，或者当干扰的量很大时，一般就需要加一些辅助回路来抑制干扰或对干扰作用进行过滤。这时系统就不是一个单一回路的结构，这里统称为多回路系统。这类系

统设计时原则上是用一快速回路来抑制干扰，而主回路仍选用窄带宽以保证精度。一些具体的设计问题通过下面各实例来说明之。

〔例 1〕舰用雷达跟踪系统

图 4—69 是一舰用雷达跟踪系统的原理框图。对舰用雷达跟踪系统来说，舰船的摇摆是一个很大的干扰，故宜采用一稳定回路来补偿舰船的摇摆运动。稳定回路的反馈信号是由速率陀螺提供的。这个系统的主回路采用 PI 控制规律。

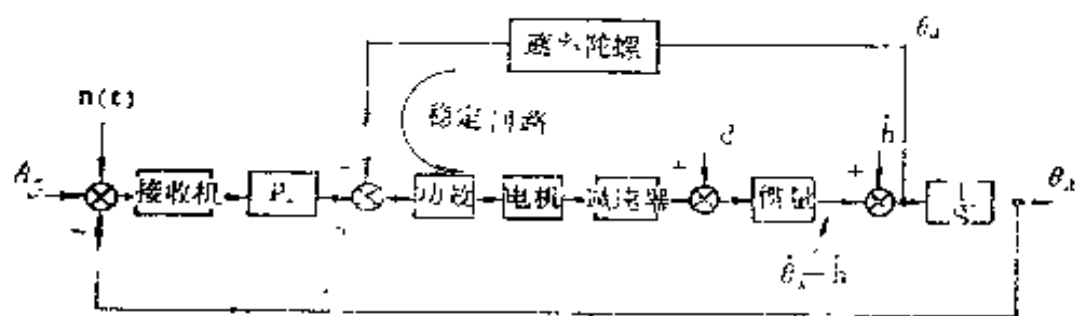


图 4—69 舰用雷达跟踪系统

图中 h 表示基座或船体的运动。因为伺服机构的动作是相对于船体的，所以它给出的速率也是相对于船体的， $\dot{\theta}_a - \dot{h}$ 。设稳定回路的开环传递函数为 $K'G(s)$ ，则当雷达的误差信号为零时可写得

$$(\dot{\theta}_a - \dot{h}) = -K'G(s)\dot{\theta}_a$$

整理后得

$$\frac{\dot{\theta}_a}{\dot{h}} = \frac{1}{1 + K'G(s)} \quad (4-160)$$

这里将稳定回路的增益 K' 单独列出，故低频段 $G(s) \rightarrow 1$ 。从式 (4—160) 可以看出，若 K' 比较大，那么对低频的船体运动的隔离就比较好。但高增益要受结构谐振的限制。一般重型设备，如炮塔稳定器，坦克火炮稳定器等的 K' 值可

做到100，即隔离度40dB^[1]。

此例在本章第一节就已经有过计算，得内回路的带宽 ω_{n1} 为50 rad/s〔见式(4—8)〕。这些数据表明，稳定回路选用的增益较高，带宽也较宽。这就是这类系统的设计特点：用一快速的内回路来抑制干扰，而整个系统则采用较窄的带宽以保证精度。

内回路取较宽的带宽，一方面可增强系统的抑制干扰的能力，另一方面也可简化设计。因为这时整个稳定回路在跟踪系统中可以当作一个比例环节来处理了。但 ω_{n1} 也不能取太高，否则会破坏所假设的数学模型。一般取

$$\omega_{n1} \geq 5\omega_{n0} \quad (4-161)$$

式中 ω_{n0} 为主回路的带宽。

最后要说明的是传动部分加反馈不仅是为了抑制干扰，反馈控制同时会带来一系列的优点，诸如减小滞后，提高响应速度以及减小系统对于参数的灵敏度等等。但是不论出发点如何，只要是加了反馈，这个内回路的参数就应该满足式(4-161)所列的条件。

〔例2〕锁相伺服系统

我们现在来分析一个锁相伺服系统的设计^[7]。这个系统用在一个光学记录仪上，用以带动胶片。要求卷轴的速率与另一速率同步。

图4—70是该系统的框图。系统的输入是反映某一速率的方波信号，其频率 f_1 代表速率。本例中 f_1 为170Hz。系统的输出轴带动一增量编码盘，给出频率为 f_0 的方波信号，这两个方波在检相器中进行比相。正常工作时两者的相位差保持一个常值，这就是所谓的锁相。锁相工作时输出轴就与输入信号保持严格的同步。当输入信号 f_1 为170Hz时，输出卷

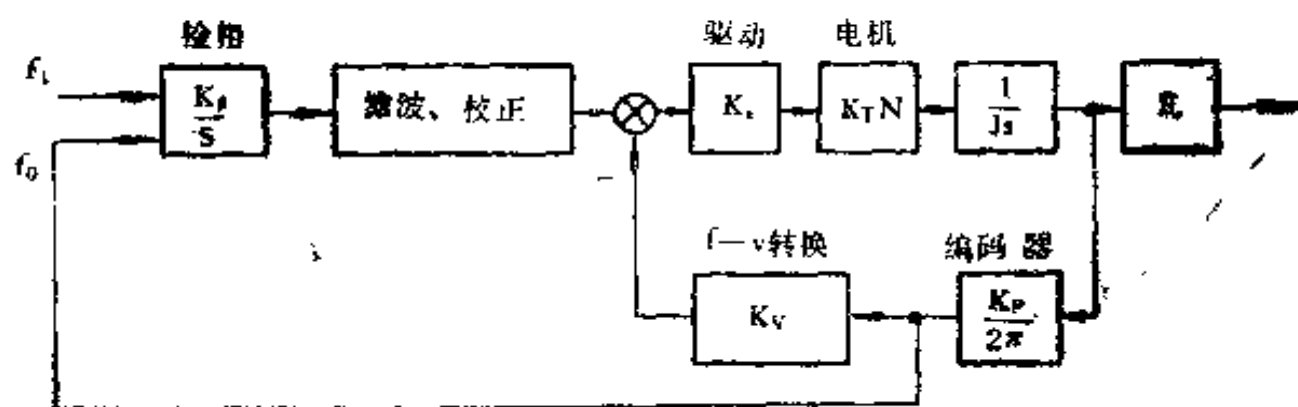


图4—70 锁相伺服系统

轴上胶片的线速度对应为 1.27mm/s 。其允许的误差是 10^{-4}mm/s 。

图4—70中各环节的功能和参数如下：

(1) 检相器

鉴相器的输出要反映方波间的相位差。相位与频率之间为积分关系，故检相器的传递函数为 K_ϕ/s 。本例中

$$K_\phi = 1.5\text{V}/\text{rad} \text{ (电气角)}$$

(2) 编码器

本设计中采用增量编码，卷轴每转 (2π 弧度) 对应9000一个脉冲，即 $K_p = 9000$ 。

(3) $f-v$ 转换

$f-v$ 转换线路就是将频率转换成电压的转换线路。利用此线路就可以将输出速率 (即频率 f_o) 反馈到电机的驱动线路，形成一个速率回路。本例中转换系数

$$K_v = 0.024\text{V}/\text{Hz}$$

(4) 电机和传动部分

$$\text{力矩系数 } K_T = 348.6 \text{ g}\cdot\text{cm}/\text{A},$$

$$\text{减速比 } N = 1000$$

$$\text{惯量 } J = 1840 \text{ g}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^2,$$

卷轴半径 $R = 10.85\text{mm}$ 。

上面的一些参数都与元件或专用线路有关，一般是固定的。要由设计决定的是电机驱动线路（即功放级）的增益 K_a 和各有关的校正环节。本例中驱动线路的时间常数 $\tau_a = 0.002\text{s}$ ，故在初步设计中略去不计。

我们先来看速率反馈回路。这回路主要用来抑制干扰。本例中的干扰主要是轴承、卷轴和电机等机电装置引起的干扰力矩。这些干扰力矩一般随转动而有变化。已知胶片的线速度为 1.27mm/s ，卷轴半径 $R = 10.85\text{mm}$ 。由此可知卷轴的转速为 0.02r/s 。所以力矩波动的主要频率为 0.02Hz 。这就是说，干扰力矩的频谱处在很低的频率段，因此可以用静态的增益系数来计算其影响。设

$$K_d = \left(\frac{K_p}{2\pi} \right) K_v K_a K_T N \quad (4-162)$$

从图4—70可知，这个 K_d 表示了速率波动给出的补偿力矩的大小。显然，为了减少干扰力矩的影响， K_d 的值应该尽可能地大。

另一方面，从图4—70可以看到，此速率回路的开环增益为

$$K = K_d / J \quad (4-163)$$

式（4—163）表明，速率回路的带宽与力矩系数 K_d 成正比，因此 K_d 不能提得太高，它受到带宽的制约。那么速率回路的带宽又受到什么限制呢？注意到编码器的输出是 170Hz 的方波，所以这内回路还得滤掉 $f-v$ 转换线路输出中的 170Hz 的脉动。为了能有效地抑制 170Hz 的波纹，一般要求限制内回路的带宽 ω_{n1} 为

$$\omega_{\Sigma} \leq \frac{1}{10} (2\pi \times 170) = 107 \text{ rad/s} \quad (4-164)$$

本设计取

$$\omega_{\Sigma} = 75 \text{ rad/s} \quad (4-165)$$

将 ω_{Σ} 值代入式 (4-163) 得

$$K_d/J = \omega_{\Sigma} = 75 \text{ s}^{-1}$$

$$K_d = 75J = 138000 \text{ g}\cdot\text{cm}/\text{rad/s} \quad (4-166)$$

根据图 4-70, 将 K_d 折算到输出的线速度, 得

$$K'_d = 12719 \text{ g}\cdot\text{cm}/\text{mm/s}$$

或

$$1/K'_d = 0.08 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm/s}}{\text{g}\cdot\text{cm}} \quad (4-167)$$

式 (4-167) 表明, 若要求的精度为 10^{-3} mm/s , 就得限制力矩波动小于 $7 \text{ g}\cdot\text{cm}$ 。这也是带宽限制对机械设计提出的要求。

上面确定了力矩系数 K_d 。这样, 根据式 (4-162) 就可求得功放级的增益 K_A ,

$$K_A = 0.0115 \text{ A/V} \quad (4-168)$$

从图 4-70 可以看到, 速率回路的基本特性为一积分环节。另外, 为了滤波的需要, 还应有滤波时间常数 τ_s , 所以这是一基本 I 型系统。根据对基本 I 型系统的分析可以知道, 要求

$$1/\tau_s = \omega_{\Sigma} = 75 \text{ s}^{-1}$$

本例中取

$$\tau_s = 0.01 \text{ s}$$

这个 τ_s 应该是 $f-V$ 转换线路中的滤波时间常数。这就是说， $f-V$ 转换线路的传递函数应该设计成

$$G_{fV}(s) = \frac{K_v}{\tau_s s + 1} \quad (4-169)$$

内回路的带宽确定后，主回路的带宽 ω_{n0} 也就确定了。一般取

$$\omega_{n0} \leq -\frac{1}{5} \omega_{r1} = 15 \text{ rad/s} \quad (4-170)$$

我们知道，因为内回路的带宽较宽，所以内回路在主回路的带宽内可视为比例环节，其输入是图4-70中校正装置的输出电压，输出则是编码器的输出频率 f_0 ，也就是说这是一个从电压到频率 f_0 ，频率比例于控制电压的环节。或者如一般所说，现在这个内回路相当于一个压控振荡器。这个压控振荡回路的比例系数等于反馈环节传递函数的倒数，即

$$K_{vco} = 1/K_v \quad (4-171)$$

现在主回路的前向环节是检相器，其增益为 K_ϕ 。根据这些系数可得主回路的开环增益为

$$K = K_\phi K_{vco} = K_\phi / K_v = 393 \text{ s}^{-1} \quad (4-172)$$

这个开环增益较式(4-170)所允许的主回路带宽高出约25倍。为了解决这个矛盾，故在系统中引入滞后校正。要求滞后校正特性在高频段衰减25倍，即其传递函数应设计成

$$G(s) = \frac{\tau_1 s + 1}{\alpha \tau_1 s + 1}, \quad \alpha = 25 \quad (4-173)$$

式(4-173)中 $1/\tau_1$ 应小于 $\omega_{n0}/2 = 7.5$ 〔见式(4-170)〕，故取

$$\tau_1 = 0.2 \text{ s}$$

考虑到检相器输出的相位误差信号中也有 170Hz 的脉动，所以在检相器后的校正线路中还要加一时间常数 τ_3 来作滤波。这个 τ_3 值在主回路带宽内所引起的相移不能大，故取 $\tau_3 = 0.01s$ 。加上这个滤波作用后，最终可写得本例所要求的校正环节的特性为

$$G_C(s) = \frac{\tau_1 s + 1}{(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}$$

$$= \frac{0.2s + 1}{(5s + 1)(0.01s + 1)} \quad (4-174)$$

通过本例可以看到，只要明确内外回路的职能，弄清各个的带宽要求，设计问题就可迎刃而解。本例中用一高增益（从而也是宽带宽）的内回路来抑制干扰力矩，并按常规设计一窄带宽的外回路。计算时每个回路都单独计算，所用的方法也仍是本章第四节所介绍的各方法。

〔例3〕 温度调节

用一快速的辅助回路来抑制干扰的做法在过程控制中也是经常采用的。图 4—71 所示为一温度控制系统。据报道，原先曾采用单回路控制方案，由温度计控制输入的蒸汽量，但即使用 PID 调节也达不到要求。后来改用图 4—71 所示的方案，取中间变量——热水的温度作为辅助信号，形成一个辅助回路。辅助回路所包含的对象的惯性较小，因而带宽可以做得宽。现在是主调节器控制辅助调节器的设定值。主调节器和辅助调节器都采用比例规律，系统的精度可达 $\pm 1^\circ$ 。

〔例4〕 姿态控制

上面几个例子都是采用快速回路来抑制干扰。这里再介绍另一种抑制干扰作用的概念。我们知道，当干扰的频谱超出系统的带宽时，系统对干扰的响应是由被控制部分的特性

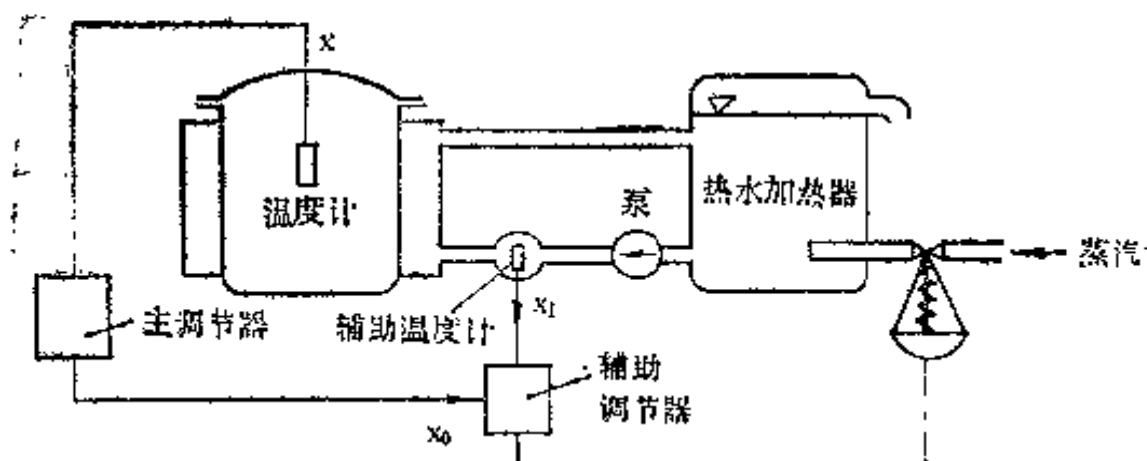


图4—71 温度调节系统

所决定的〔见式（4—125）〕。因此，有可能的话，可以修致被控部分的高频特性以抑制干扰的作用。这个问题自然和控制对象的结构和工艺有关，不过往往也需要用控制的手段来解决。下面结合一空间飞船的姿态控制来作一介绍^[10]。

设有一空间飞船，飞船上装一望远镜，光学系统的角位置就是所要控制的姿态角。要求这个角位置控制在角秒级，以保证成象的质量。由于飞船实际上是一挠性结构，且又存在很多振动源，所以若对干扰不加以处理将严重影响控制系统的精度。现在的一个设计方案是将飞船分成两个舱，即将光学部分和飞船的其它部分分离开来，中间加一隔离器。这个隔离器其实是一个带控制器的反馈回路，反馈信号是加速度。这个反馈回路就是这里要讨论的辅助回路。图4—72所示是这种飞船简化后的原理图。图中M表示光学舱。m表示的第二个舱包括飞船的所有其它部分，结构上的各种振动源都在m上面，用 F_a 表示，姿态控制用的执行机构也装在这个舱上。

我们先来分析隔离器，然后再看整个姿态控制回路。图4—72中K表示隔离器弹簧的刚度， F_a 为隔离器执行机构。

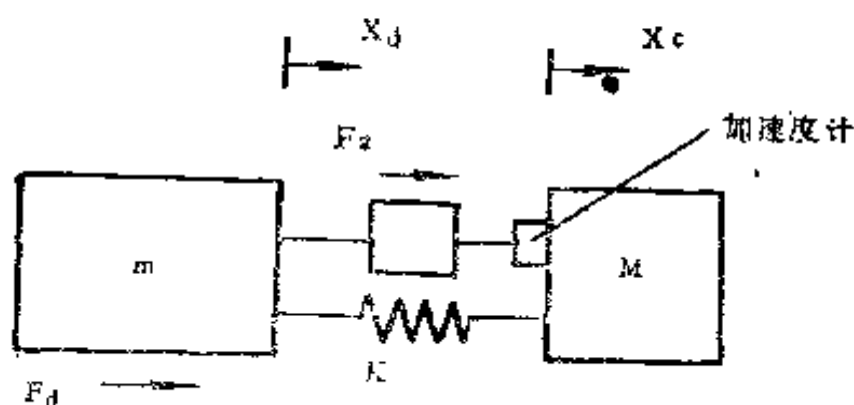


图 4-72 空间飞船原理图

的作用力。反馈信号取自光学舱M的加速度。图4—73所示就是隔离器这一反馈回路的框图。图中 $K_c G_c$ 为控制器。

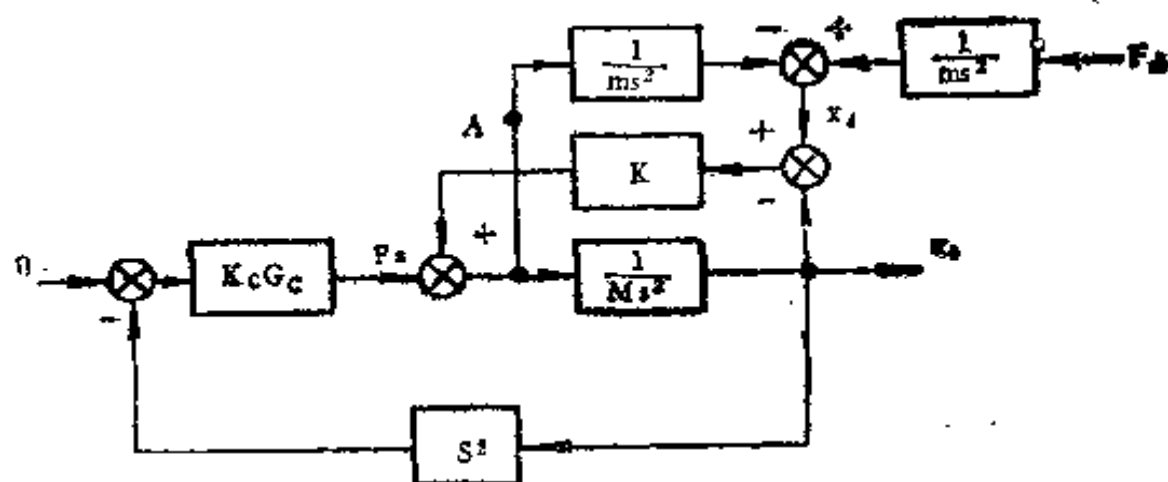


图4—73 隔离器回路

首先确定控制规律 $G_c(s)$ 。从图4—73可见，M是个纯惯性环节，要使其稳定，除位置反馈（弹簧）K外，显然还需要一个速率反馈信号。现在取的是加速度信号，故 G_c 应该是一个积分环节，即

$$G_c(s) = 1/s \quad (4-175)$$

现在暂时将图4—73在A点处断开，得隔离器传递函数

$$\frac{X_c(s)}{X_d(s)} = \frac{1}{\frac{M}{K}s^2 + \frac{K_c}{K}s + 1} \quad (4-176)$$

式(4-176)表明此隔离器相当于一个机械的滤波器，其自然频率为

$$\omega_n = \sqrt{K/M} \quad (4-177)$$

从下面的讨论中可以知道，要求这机械滤波器的阻尼比 $\xi = 1$ 。根据这个要求就可以从式(4-176)分母中的第二项确定控制器的增益 K_c 。

现在接通点A。将点A处的信号通过 x_c 来表示，就可以得到整个隔离器的等效特性，如图4-74中虚线所框。

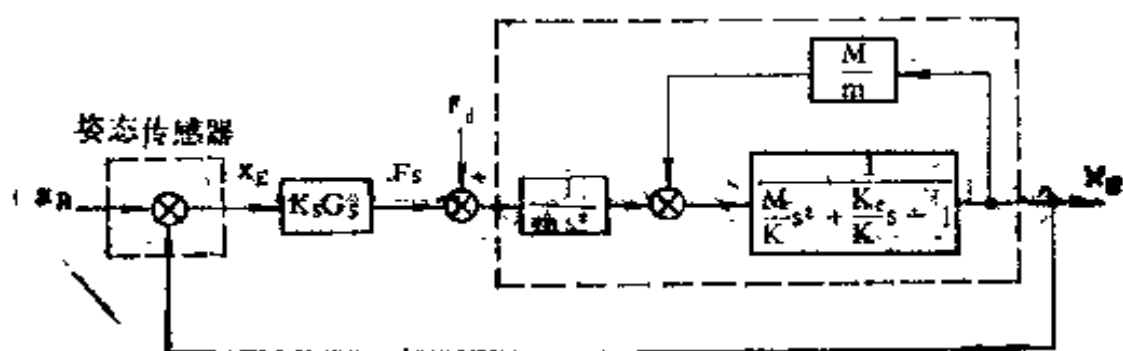


图4-74 姿态控制回路

图4-74是飞船的整个姿态控制回路。虚线所框的就是上面设计好的隔离器。 $K_s G_s$ 为姿态回路的控制器。控制器的控制规律和参数可按一般常规来设计，这里则着重讨论该系统在带宽以外的特性。

图4-75所示是此系统的干扰到输出的频率特性 $X_o(j\omega)/F_d(j\omega)$ 。该图主要表示了带宽以外的部分。我们知道，带宽以外，干扰 F_d 到输出 x_o 的频率特性就是被控部分的特性，即图4-74中虚线所框的这一部分的特性。本例中姿态控制

回路的带宽 f_c 为0.05Hz, 隔离器的带宽 f_n 为0.1Hz。

不用隔离器时, 这两个舱是一个整体, 其特性为 $1/(M+m)s^2$ 。现在加了隔离器, 从图4—75可见, 其高频段的衰减又增加了40 dB/dec。这个衰减是很强的, 能够有效地抑制(滤去)干扰, 在实际系统中保证了角秒级的精度。

图4—75中从-40到-80的特性要求平滑下降, 故设计机械滤波器〔式4—176〕时应保证其阻尼比 $\xi = 1$ 。

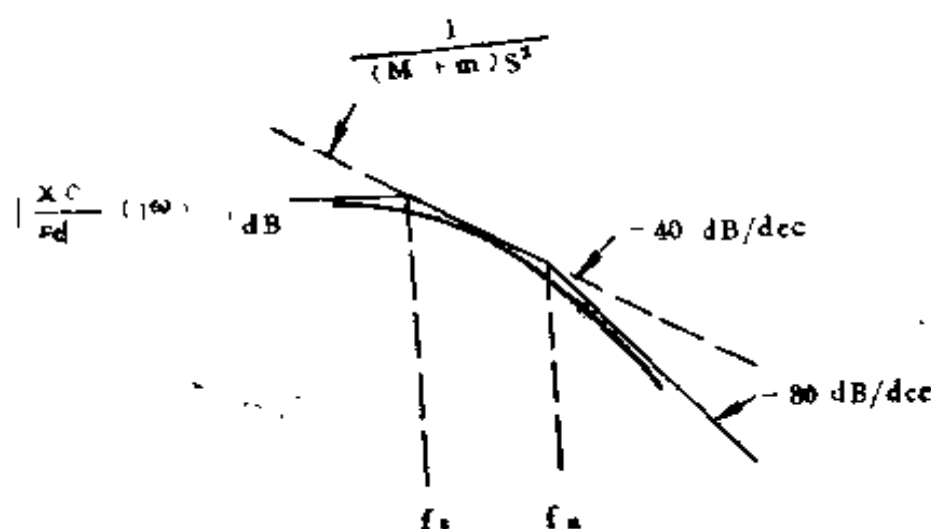


图4—75 干扰到输出的频率特性

$$f_c = 0.05\text{Hz}, f_n = 0.1\text{Hz}$$

这个例子里不是靠高增益, 快速响应的辅助回路来抑制干扰, 而是对辅助回路指定一个带宽, 形成一个滤波器, 使低频的姿态控制信号可以正常通过, 而滤去高频的干扰信号。实际飞船上隔离器是做成杆形的, 共9个, 形成一个支架, 将光学舱架起来。实验表明它对干扰的过滤作用是明显的^[9], 可以保证角秒级的精度。

这一章讲了系统的设计和系统的性能指标,指出系统的设计应该从带宽着手,也讨论了随动系统和调节系统的设计。当干扰的频谱超出系统的带宽,或干扰量很大时,我们提出要用一辅助回路来抑制干扰或对干扰进行过滤。虽然各种方案应用时都有其特点或者说有其条件,不过本章的内容都是从实例中选出来的,可供设计时参考。

应该要说明的是,这里讲的设计只是初步设计,我们只是确定了系统的主要参数和基本结构。初步设计后一般尚需要进行深入的理论分析和模拟或数字仿真来进一步完善设计

参 考 文 献

1. P.Garnell, D.J.East: Guided Weapon Control Systems, Pergamon Press, 1977, Chapter 1.
2. D.R.Wilson (ed.): Modern Practice in Servo Design, Pergamon Press, 1970.
3. H.M.James, N.B.Nichols, R.S.Phillips: Theory of Servomechanisms, 1947.
4. H.Chestnut, R.W.Mayer: Servomechanisms and Regulating System Design, Vol. I, 1955.
5. D.McRuer: Human Dynamics in Man-Machine Systems, Automatica, Vol. 16, No.3, pp. 237-253, 1980.
6. K.L.Chien, J.A.Hrones, J.B.Reswick: On the Automatic Control of Generalized Passive Systems, Trans.ASME, 74 (1952), pp.175-185.

7. R.L.Labinger: Designing Phase Locked Loop Servos with Digital ICs, Control Engineering, Feb.1973.
8. C.E.Kaplow, J.R.Velrnan: ActiveLocal V i-
bration Isolation Applied to a Flexible Space
Telescope, J.Guidance and Control, Vol.3,
No.3, 1980.
9. 尹长德: 人机补偿跟踪系统, 信息与控制, 10卷1期,
1981。
10. 王广雄: PID调节的性能极限, 自动化技术与应用, 2卷 4
期, 1983。
11. 王广雄: 调节规律的分析, 自动化技术与应用, 3卷 1 期,
1984。

第五章 模拟计算机在系统设计中的应用

模拟计算机在系统设计中占有很重要的地位。因为在一个模拟机上可以构成实际系统的电子模型，因而可以象对实际系统一样进行实验研究。尤其重要的是当系统中存在非线性特性时，例如放大器饱和，摩擦，齿轮传动中的间隙等，这时系统的性能很难用解析方法来进行处理，但却很容易进行模拟。

从系统设计的观点来说，一般线性理论只解决工作点的线性特性。非线性的影响以及大偏差下系统的性能常要靠模拟机来确定。所以一般在初步确定了系统的结构和基本参数后就应该上机进行模拟分析，进一步确定和分配所有的参数以及各元件的线性范围。

本章将尽量结合国产的20阶模拟机DMJ—3A来介绍应用问题。

一、模拟机解题的一般方法

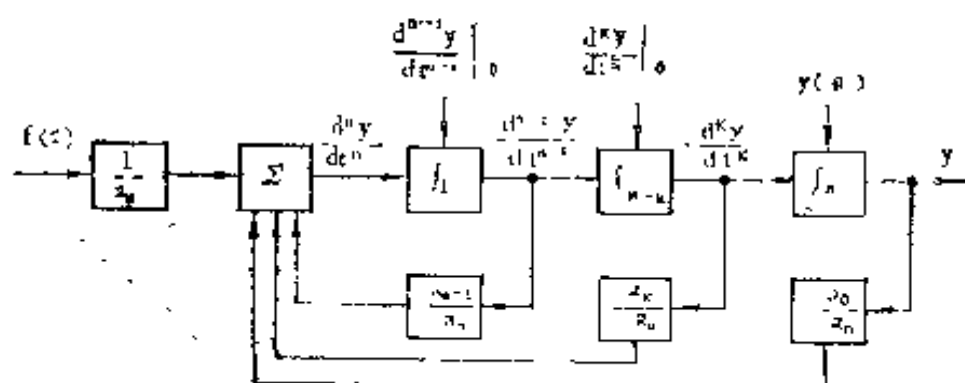


图5—1 线性微分方程的求解

图5—1所示为在模拟机上求解线性微分方程的一般方法。以—n阶的常系数线性微分方程为

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_k \frac{d^k y}{dt^k} + \dots + a_0 y = f(t) \quad (5-1)$$

其初始条件为

$$\frac{d^k y(0)}{dt^k} = b_k, \quad k=0, 1, \dots, (n-1) \quad (5-2)$$

式(5—1)可改写成

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \frac{f(t)}{a_n} - \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} - \dots - \frac{a_k}{a_n} \frac{d^k y}{dt^k} - \dots - \frac{a_0}{a_n} y \quad (5-3)$$

式(5—3)表明该微分方程可以用一加法器来求解，加法器的输出就是第n阶导数 $d^n y/dt^n$ 。依次积分就可以得到各低阶导数，包括y本身。各阶导数以及输入 $f(t)$ 再按式(5—3)乘以相应的常数构成加法器的输入。各初始条件分别加到每一个积分器上，当然具体的加法将随所用的模拟机而有所不同。

从这个常系数线性微分方程的求解中可以看到，整个解题过程需要下列各种运算：

1. 相加
2. 积分
3. 反号
4. 乘以常系数
5. 产生时间函数

此外，求解非线性微分方程时还要求一些非线性的运算

和变换。下面将分别介绍实现上述这些运算的部件和方法。

二、模拟机的基本部件（线性）

1. 运算放大器

在电子模拟计算机中代数相加，积分和反号等运算都是由运算放大器来完成的。运算放大器是指能够进行基本数学运算的放大器，一般是采用高增益的直流放大器并加以适当的反馈来组成的（图5—2）。

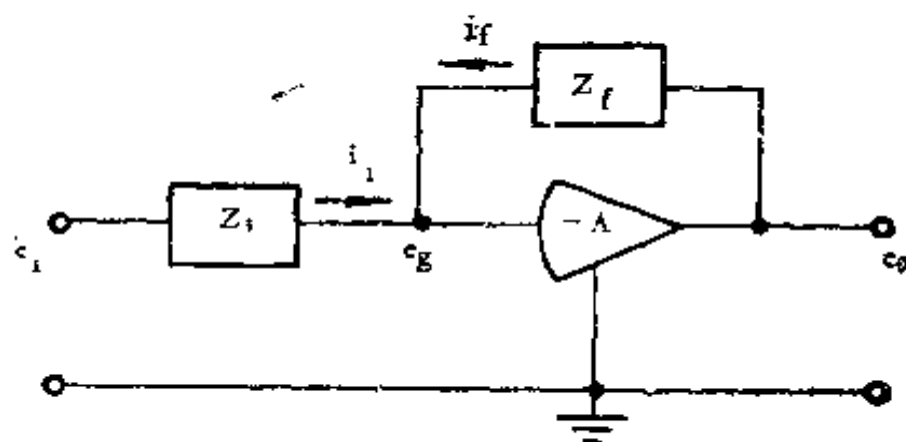


图5—2 运算放大器

图5—2线路的基本关系式为

$$e_o = -A e_g \quad (5-4)$$

$$i_i = \frac{e_i - e_g}{Z_i} \quad (5-5)$$

$$i_f = \frac{e_o - e_g}{Z_f} \quad (5-6)$$

$$i_i + i_f \approx 0 \quad (5-7)$$

从上列各式可得

$$e_o = -\frac{Z_f}{Z_i} e_i - \frac{1 + Z_i/Z_f}{A} e_o \quad (5-8)$$

上式中 $e_o = -(Z_f/Z_i)e_i$ 是理想的运算关系式，而第二项则是由放大器的增益有限所引起的误差项。不过，由于采用了高增益放大器， A 是很大的，故式（5—8）可写成

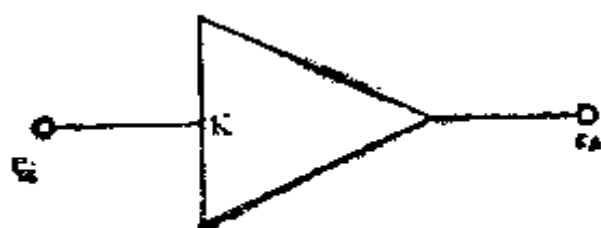
$$e_o \approx -\frac{Z_f}{Z_i} e_i \quad (5-9)$$

式（5—9）表明，只要选择适当的输入阻抗 Z_i 和反馈阻抗 Z_f ，该运算放大器便能完成不同的运算。

2. 比例器

运算放大器的输入回路和反馈回路都是采用电阻时就构成比例器：

$$e_o = -\frac{R_f}{R_i} e_i = -K e_i \quad (5-10)$$



式中 K 称为比例器的比例系数。比例器一般用三角形来表示，并在输入侧标上比例系数，如图5—3所示。

图 5—3 比例器

当 $R_f = R_i$ 时， $K = 1$ 。这时的比例器就是反号器。

一般模拟机上比例器均配有固定的电阻。图5—4所示是DMJ—3A模拟机上的电阻配置情况。图中电阻的单位为 $M\Omega$ 。输入端所标的数就是对应的比例系数。这些电阻都与模拟机的排题板相连，排题板上有相应的插孔，排题时只要将导线插到插孔中就是了。例如插到标有5的插孔时，就与 $0.2M\Omega$ 相连，，这时比例器的比例系数 $K = 5$ 。

实际的比例器线路如图5—4所示，还有一个继电器。继电器接点位置1对应于正常工作状态，接点位置在0时为放大器调零以及输入电阻接地成为常系数部件（电位器）的有

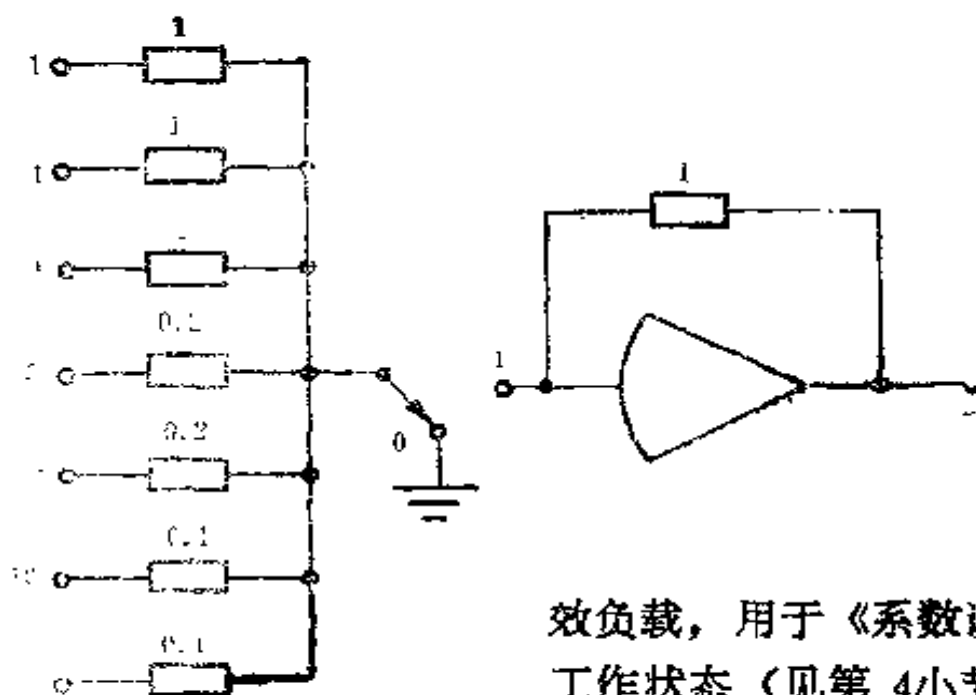


图5—4 比例器线路

效负载，用于《系数设置》工作状态（见第4小节）。

比例器也可当作加法器使用，图5—5所示就是三个电压相加的例子：

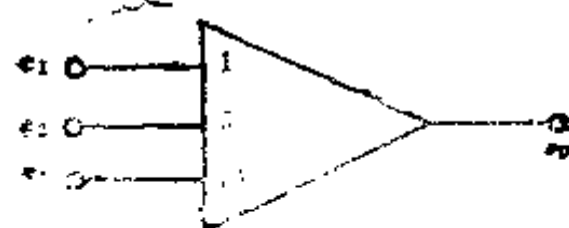


图5—5 加法器

$$-e_0 = e_1 + 5e_2 + 10e_3 \quad (5-11)$$

3. 积分器

设运算放大器的反馈回路是电容，

$$Z_f = 1/C_s \quad (5-12)$$

这时，若输入回路仍采用电阻 $Z_1 = R$ ，则根据式（5—9）有

$$\frac{e_0}{e_1} = -\frac{1}{RC_s} = -\frac{1}{T_s} = -\frac{K}{s} \quad (5-13)$$

这就是积分运算。积分器一般用带方框的三角形来表示，如图5—6a所示。当输入有数个电压时（图5—6b），其输出与输入的关系为

$$-e_0 = \int (e_1 + 5e_2 + 10e_3) dt. \quad (5-14)$$

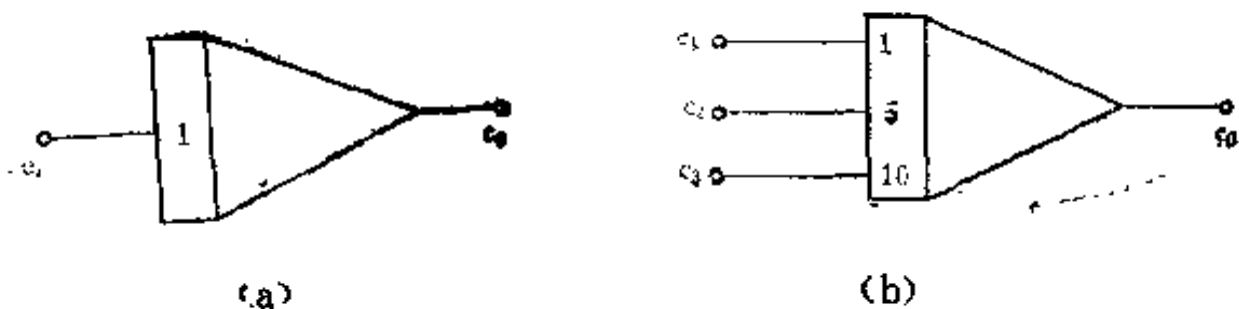


图 5—6 积分器

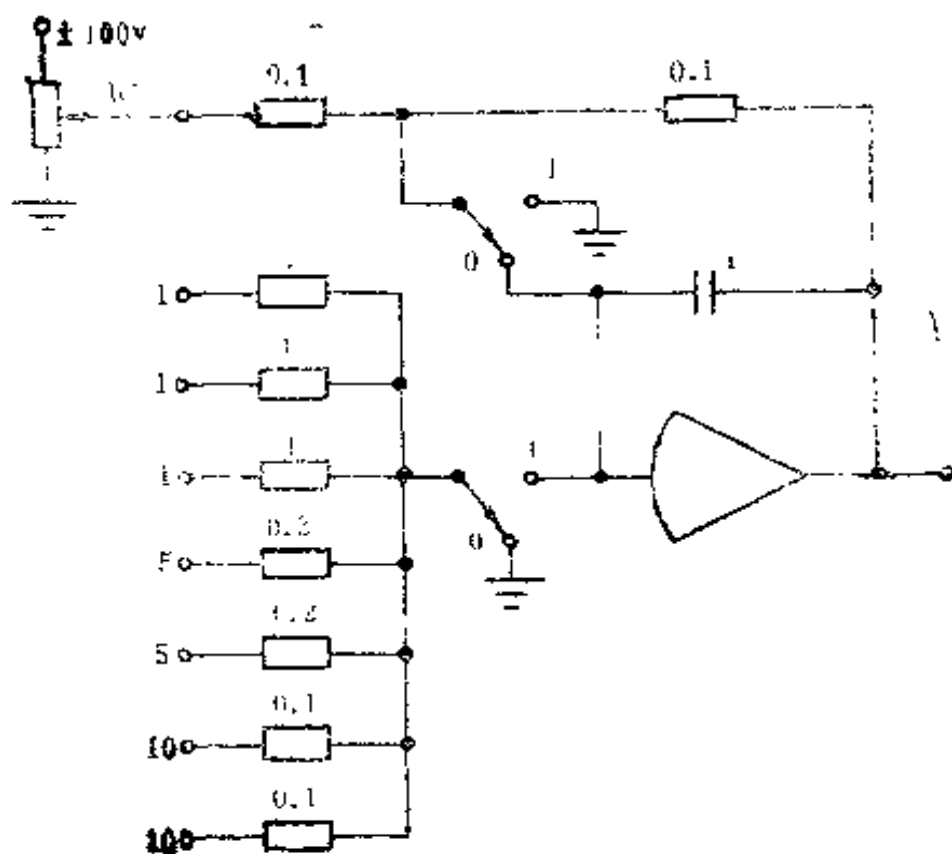


图 5—7 积分器线路

图5—7所示是DMJ—3A模拟机的积分器线路。图中电阻的单位是 $M\Omega$ ，电容的单位是 μF 。输入端所标的系数是积分器的比例系数 $K = 1/T$ 。

求解一个微分方程时需要给定初始条件。这对模拟机来说就是要求给定各积分器的初始电压。图5—7中的IC孔就是给定初始电压用的。图中继电器接点位置0对应于复原

状态，这时积分器接成比例器工作状态，通过IC孔可以 给此积分器加初始电压。按运算键后，接点跳到位置1，积分器就从这初始电压开始作积分运算。这时给初值用的电阻 $100\text{ k}\Omega$ 接地，成为积分器的负载，不影响积分运算功能。位置0时，积分器的输入电阻接地成为常系数部件（电位器）的负载，用于《系数设置》工作状态。

4. 常系数部件

模拟机上积分器或比例器的比例系数常是固定的几档，故应用时还要配以电位器来连续改变传递系数。这电位器就称为常系数部件，它与比例器或积分器的配置见图5—8a 所示。常系数部件一般用圆圈来表示，圆圈内标以对应的系数 α 。例如图5—8b所表示的就是图5—8a所示的线路。

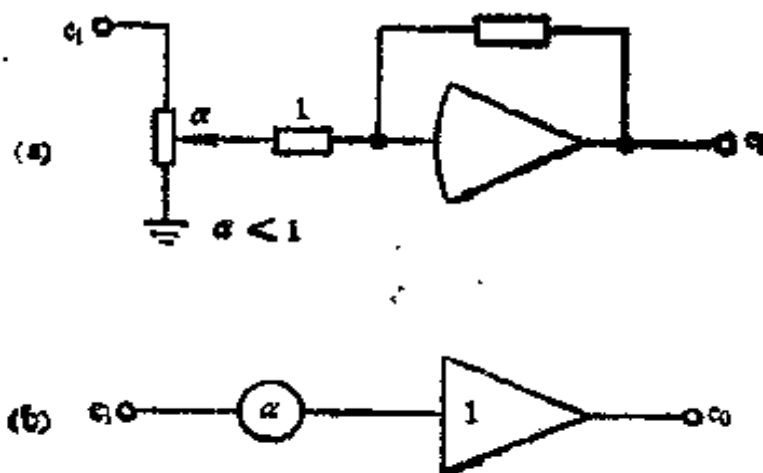


图5—8 常系数部件

调试时，在常系数部件上加有 100 V 的基准电压（指电子管模拟机），根据输出电压就可确定系数 α 。例如输出 63 V 就表示此时所对应的 $\alpha = 0.63$ 。注意到运算放大器的输入电阻 R_i 对电位器的分压系数 α 是有影响的。所以应该是在带负载的情况下进行系数设置。DMJ—3A模拟机配有《系数设置》工作状态。图5—9所示就是按下《系数设置》键后

电路的连接情况。这时比例器或积分器的输入电阻接地（见图5—4和图5—7），成为电位器的实际负载。设置时只要拨动相应的开关就可以将基准电压加到所选的常系数部件（电位器）上。这时就可以在带负载的情况下进行系数设置了。

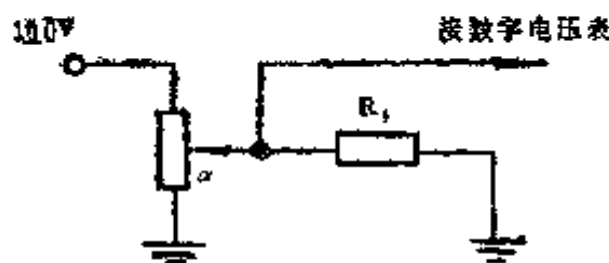


图 5—9 系数设置状态

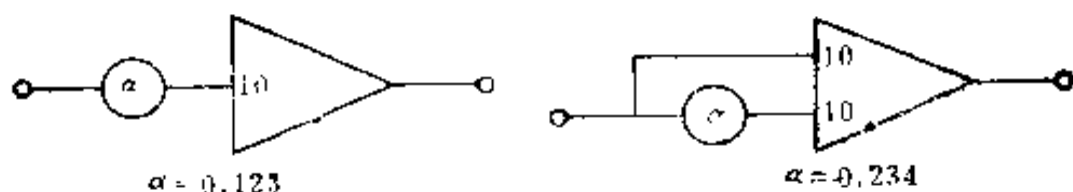


图 5—10 系数的给定

常系数部件与比例器（积分器）配合可以得到不同的系数。图 5—10所示就是系数为1.23和12.34的接线图。

三、传递函数的模拟

对控制系统来说，一般是按照系统的组成环节来进行模拟的，而不是单纯地从数学上模拟一个整个系统的微分方程。也就是说，分别模拟各环节，然后把各个部分按系统的组成形式连接起来构成整个系统的模拟。这样做就可以获得各中间变量的实际特性，便于对系统进行分析研究。各环节可按传递函数来进行模拟。这里将介绍一些典型的模拟线路，整个系统的模拟线路都可由这些典型线路来组成。

1. 单极点

设传递函数为

$$\frac{e_o(s)}{e_i(s)} = \frac{1}{1+Ts} \quad (5-15)$$

对应于式 (5-15) 的微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e_o(t) + \frac{1}{T}e_o(t) &= \frac{1}{T}e_i(t), \\ -\frac{d}{dt}e_o(t) &= \frac{1}{T}e_i(t) - \frac{1}{T}e_o(t) \end{aligned} \quad (5-16)$$

式 (5-16) 表明此方程可用一个积分器来模拟 (图 5-11)。考虑到积分器是反号的, 所以输出标以 $-e_o$ 。这个 $-e_o$ 直接反馈到输入端构成式 (5-16) 的第二项。

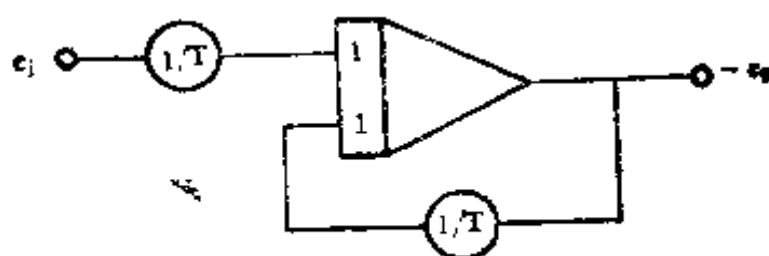


图 5-11 单极点的模拟

2. 一阶系统 (一般形式)

一阶系统的传递函数为

$$\frac{e_o(s)}{e_i(s)} = \frac{b_1s + b_0}{a_1s + a_0} \quad (5-17)$$

对应的微分方程为

$$\frac{de_o}{dt} = \frac{b_1}{a_1} \frac{de_i}{dt} + \frac{b_0}{a_1} e_i - \frac{a_0}{a_1} e_o \quad (5-18)$$

式 (5-18) 的积分形式为

$$e_0 = \frac{b_1}{a_1} e_1 + \int \left(\frac{b_2}{a_1} e_1 - \frac{a_0}{a_1} e_0 \right) dt \quad (5-19)$$

图5—12就是求解式 (5—19) 的模拟线路。

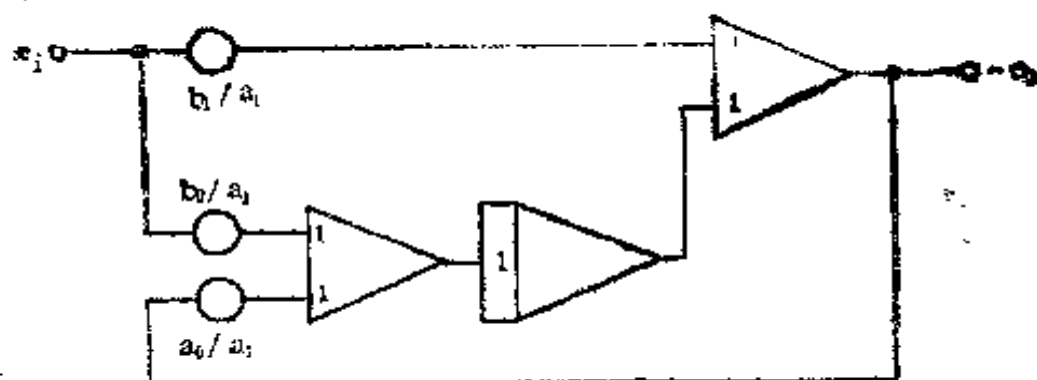


图5—12 一阶系统的模拟

3. 二阶系统

二阶系统的传递函数为

$$\frac{e_0(s)}{e_1(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (5-20)$$

对应的积分方程为

$$e_0 = \frac{b_2}{a_2} e_1 + \int \left(\frac{b_1}{a_2} e_1 - \frac{a_1}{a_2} e_0 \right) dt + \iint \left(\frac{b_0}{a_2} e_1 - \frac{a_0}{a_2} e_0 \right) dt^2 \quad (5-21)$$

图5—13就是根据式 (5—21) 列出的二阶系统的模拟线路。

上述方法还可推广到更高阶的传递函数。不过一般来说已无必要，因为任一传递函数均可分解为一阶和二阶的因子，所以只要重复应用图5—11到图5—13的线路，将它们适当联接起来就可以模拟各种传递函数了。

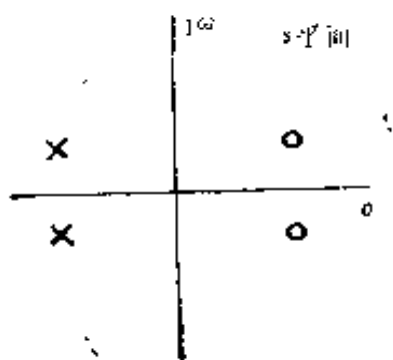


图 5—14 二阶近似的零极点分布

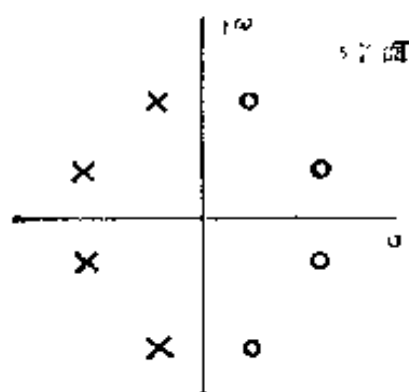


图 5—15 四阶近似的零极点分布

式 (5—23) 和式 (5—24) 所对应的幅频特性都是 1。图 5—16 所示为它们的相频特性。从图可见，当 $\omega\tau \leq 2$ 时，二阶近似特性与理想特性很接近。注意到 $\omega\tau = 2$ 时，时滞环节的相移为 2 rad (约 115°)，而对自动控制的应用来说，在系统的带宽内，回路中各单个环节的相移一般不超过此值。这就是说，在系统的带宽内， $\omega\tau$ 一般不超过 2。所以一般情况下，用二阶近似就可以了。这时模拟线路比较简单。

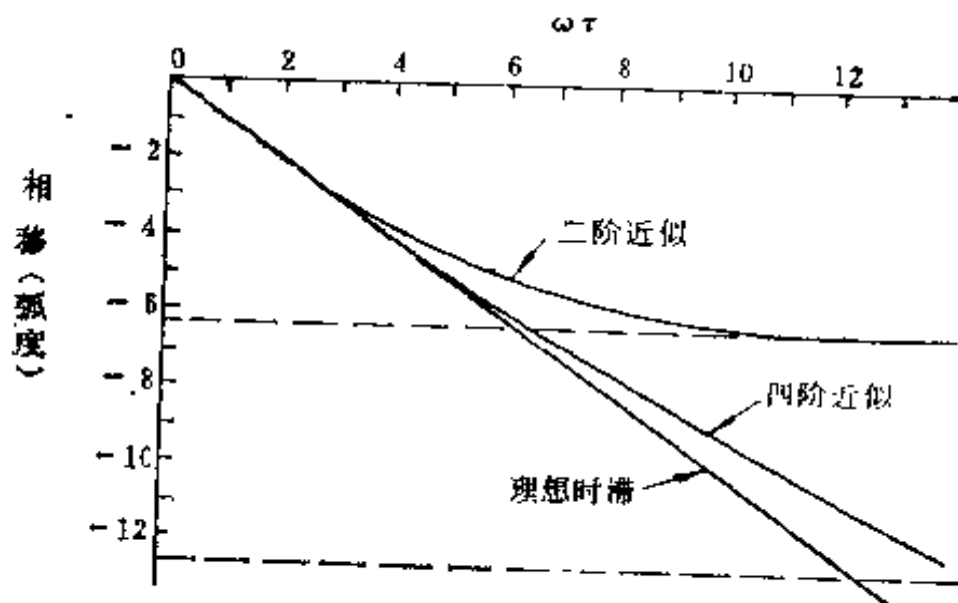


图 5—16 时滞环节的频率特性

单。图 5—17 所示就是二阶近似的时滞特性的模拟线路，这实际上是图 5—13 线路的一个特例。

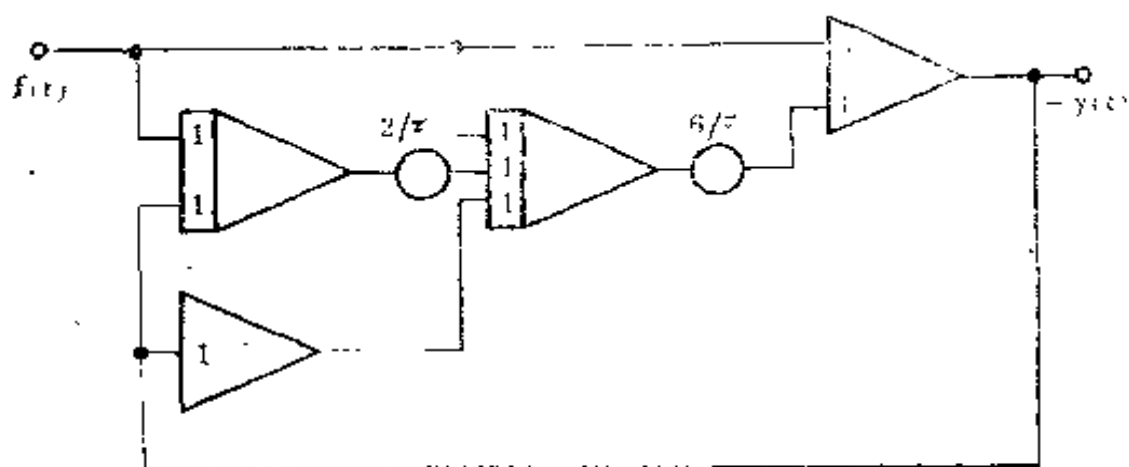


图 5—17 时滞特性二阶近似的模拟线路

应该指出的是虽然在一定的频段内，帕德近似与时滞特性是一致的，但在此频段外却是不一致的。因此，若信号的频谱超出这频段，帕德近似高频段特性就会给模拟结果带来误差。以图 5—17 的二阶近似模拟线路为例，若输入是阶跃信号，其输出响应为^[2]：

$$y(t) = 1 - 4\sqrt{3}e^{-3t/\tau} \sin\sqrt{3}t/\tau \quad (5-25)$$

图 5—18 所示即为此阶跃响应，显然这与理想时滞环节的阶跃响应出入较大，尤其是 $t=0$ 时出现的一个尖脉冲将给模拟结果带来误差。这误差就是帕德近似的高频特性造成的。

所以，虽然自动控制系统的带宽能满足 $\omega\tau < 2$ 的条件，但在具体模拟时还应考虑外加信号的频谱，要使模拟线路中时滞环节的输入信号的频谱始终满足不等式 $\omega\tau \leq 2$ 。总之，要将二阶近似的使用频带限制在 $\omega\tau \leq 2$ 以内才能避免产生误差。

下面来看一个应用实例。

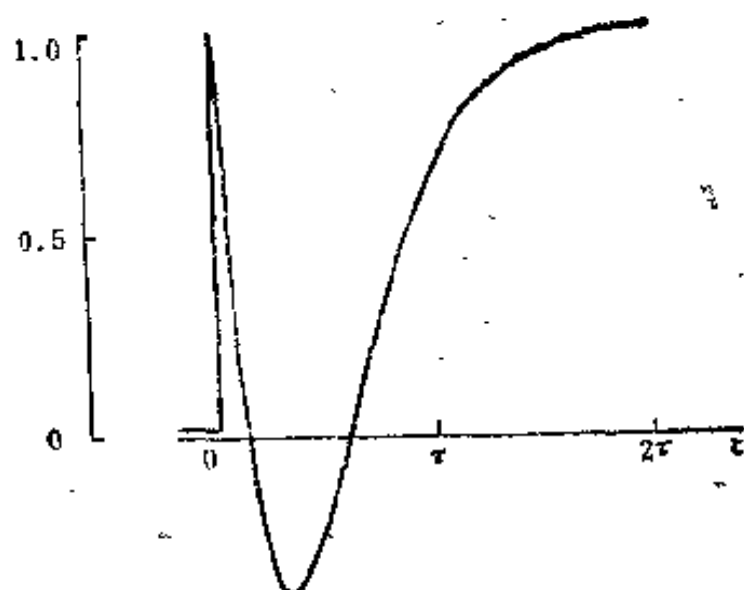


图 5—18 二阶近似的阶跃响应

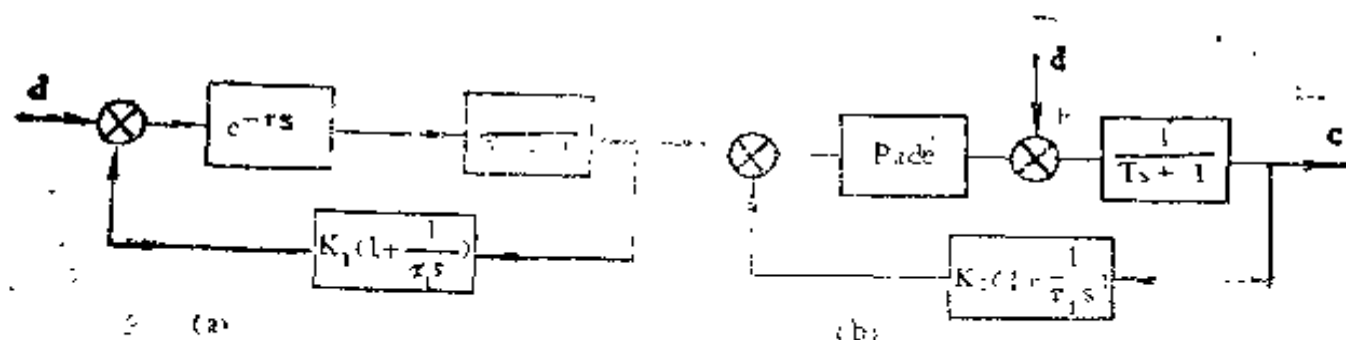


图 5—19 带时滞的系统模拟

设我们要模拟研究阶跃干扰 d 作用下的调节过程。若按图 5—19a 所示的框图来模拟，阶跃信号中的高次谐波将直接作用于时滞环节上（帕德近似），并引起上面所说的误差。因此模拟时应将干扰 d 的作用点移到时滞环节的后面（图 5—19b），这样就可避免产生误差。因为这时时滞环节的输入信号的频谱由系统的带宽所决定，满足 $\omega\tau \leq 2$ 的要求。干扰作用点移到时滞环节后面，只改变输出曲线的时间原点，不影响调节过程的特性。

作为例子，设调节对象的特性

$$Z = T/\tau = 1$$

PI调节规律的参数按一般常规设计取:

$$\left. \begin{aligned} K_I &= 0.389 \\ \tau/\tau_I &= 1.1 \end{aligned} \right\} \quad (5-26)$$

设模拟线路按图 5—19b 来排队, 并用帕德二阶近似式 (5—23) 来代替实际的时滞特性。图 5—20 就是在阶跃干扰 d 作用下的模拟系统的输出。理论分析表明^[2], 实际时滞系统 (不作任何近似) 的调节过程较图 5—20 滞后一个时间 τ , 而图形是重合的 (仅小数第三位上有出入)。

上面这个例子表明, 只要在模拟线路上稍作安排 (例如把干扰作用点移到时滞环节后面), 限制使用带宽, 便可获得理想的效果。

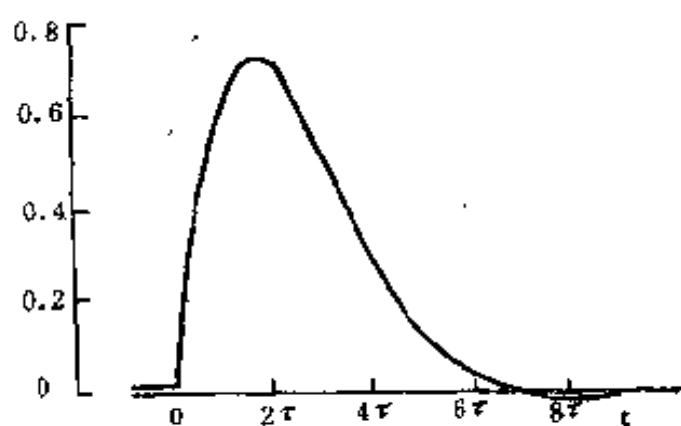


图 5—20 模拟系统的阶跃响应

五、解析函数的产生

模拟分析中常需要一定的解析函数。函数的自变量可以是模拟线路中其它部分的某一个输出量。有时这个自变量就是时间, 即要求产生一定的时间函数, 例如我们可能要求有一个正弦输入信号以观察系统的频率特性 [见图 5—1 中的 $f(t)$]。模拟机上给出这种函数的方法一般有两种, 一种是解该函数的微分方程, 另一种是利用非线性特性。下面以常用到的几种函数为例来分别介绍。

1. 正弦函数

正弦函数 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 可以靠解下列方程来获得,

$$\frac{d(\sin\theta)}{dt} = \dot{\theta}\cos\theta \quad (5-27)$$

$$\frac{d(\cos\theta)}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta \quad (5-28)$$

图5-21就是求解该方程组的模拟机线路。图中 $\dot{\theta}$ 是模拟机其它部分的一个输出量。此线路要求两个乘法器。

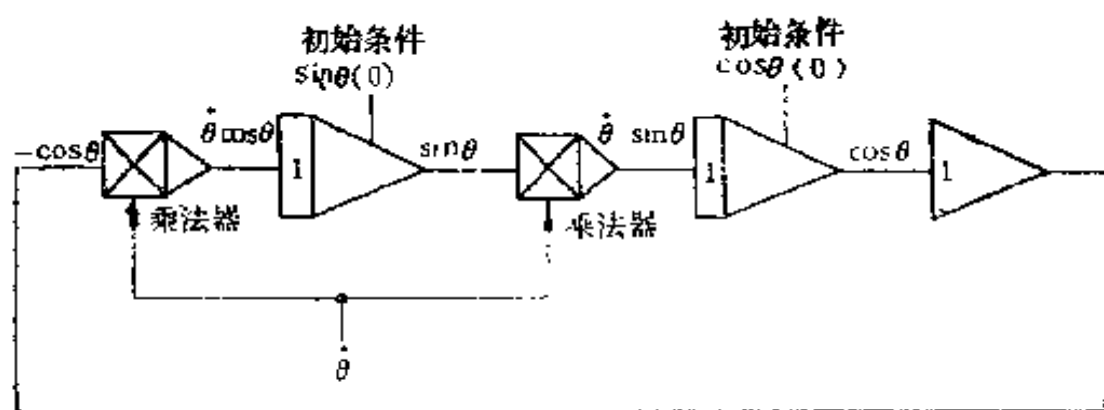


图5-21 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的产生

若式(5-27)和式(5-28)中的 $\dot{\theta}$ 等于常数, $\dot{\theta} = \omega$, 则乘法器就不需要了。这时只要在乘法器的位置换上常数系数部件, 乘一个系数 ω 就是了。现在的式(5-27)和式(5-28)成为

$$\frac{d(\sin \omega t)}{dt} = \omega \cos \omega t \quad (5-29)$$

$$\frac{d(\cos \omega t)}{dt} = -\omega \sin \omega t \quad (5-30)$$

这个方程组的解就是时间函数 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 。图5-22所示就是 $\omega = 3\text{rad/s}$ 时的这个正弦信号发生器线路。正弦的幅

值是由初始条件确定的。图中积分器上圆圈内的数字表示初始电压的值。按图中所示的初始条件可得幅值为90V的正弦信号。设置不同的系数 ω 还可以变更这个正弦信号的频率。

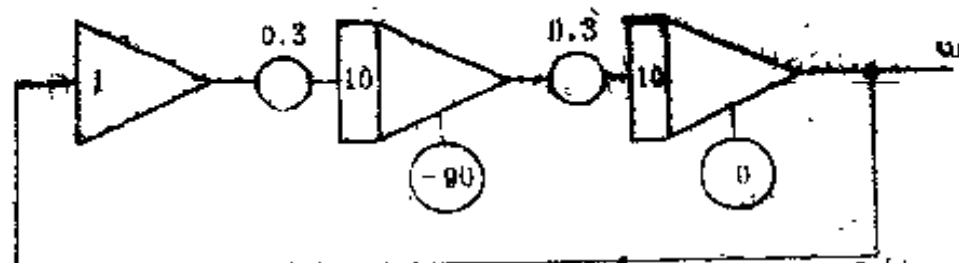


图 5—22 正弦信号发生器

2. 方波和三角波

方波函数一般是利用继电特性来产生的。结合DMJ—3A模拟机来说，可利用比较器的继电特性来产生方波。图5—23是DMJ—3A的比较器原理图，这是利用运算放大器的高增益并加上限幅线路而构成的，其对应的特性为（图5—24）：

$$u_1 + u_2 > 0 \text{ 时 } u_0 = 0$$

$$u_1 + u_2 < 0 \text{ 时 } u_0 = +100\text{V}$$

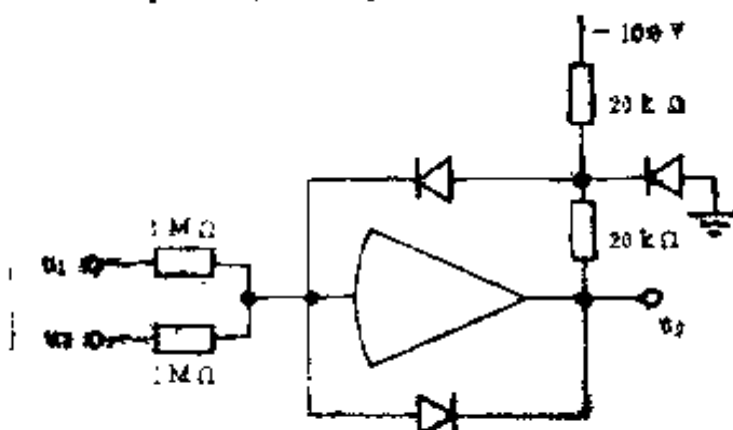


图 5—23 比较器

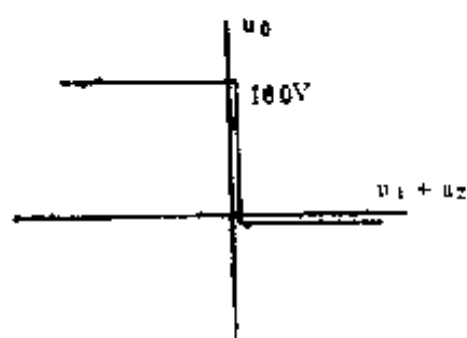


图 5—24 比较器特性

图 5—25就是利用比较器来产生方波的模拟机框图。

这个线路很简单，除了比较器外，仅用了—个积分器和一个作加法用的比例器。比较器的输出是0或100V。我们先设比较器的输出 u_0 是零。这时比例器的输出 u_1 是+100V，积分器对比+100V积分，因为运算放大器都是反号的，所以 u_2 逐渐下降。 u_2 —过-100V时， $u_1 + u_2 < 0$ ，比较器反转，其输出 u_0 上升为+100V。这时比例器的输出 u_1 就从+100V变为-100V，积分器的输出开始增长，到 u_2 —超过+100V时，比较器又反转了。图5—26所示就是 u_0 ， u_1 和 u_2 的变化波形。这样，我们在比例器的输出端上得到 $\pm 100V$ 的方波，在积分器上得到三角波。这些电压经电位器（常系数部件）分压后就可以应用了。方波的周期可通过图5—25中的常系数部件 α 来调整。

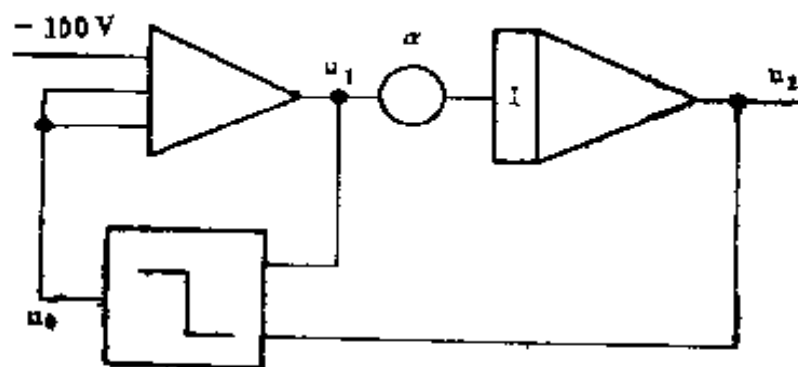


图5—25 方波线路

方波对研究控制系统的特性是很有用的。低频的方波对系统的作用相当于重复加阶跃输入，这时从示波器上就可观察到重复出现的过渡过程。假如这时再将线性变化的三角波 u_2 加到示波器的x轴，那么就可以在示波器上观察到一个固定的过渡过程图形。因此，模拟分析中经常要用方波信号。现在有了图5—25这个线路，就可以由模拟机自己来产生方

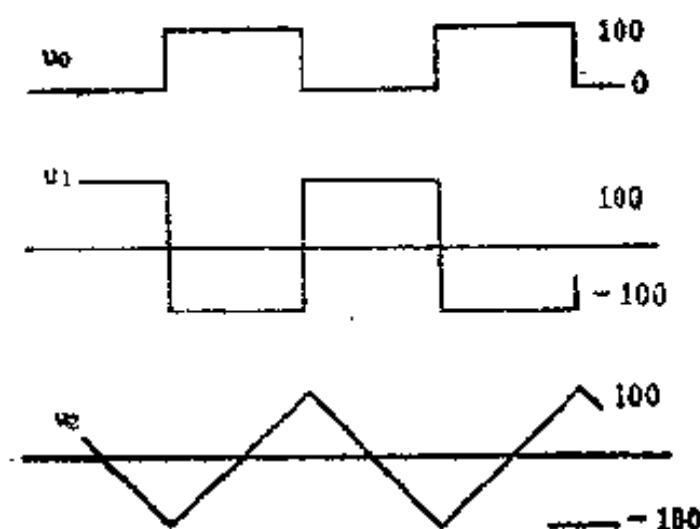


图 5—26 方波线路的波形

波和三角波，用不着外加其它信号源了。

另外，三角波本身可用作控制系统的斜坡输入信号。若将三角波信号加到DMJ—3A机上的《正弦函数器》部件上，还可以在该函数器的输出端得到一正弦函数 $\sin \omega t$ 。这种产

生正弦信号的线路的优点是信号频率用一个电位器（常系数部件 α ）就可改变，因此实验时非常方便，在测定模拟系统的频率特性时可连续改变频率。

六、模拟机的排题

1. 排题应遵循的原则

排题就是将模拟机的各部件按系统的微分方程或结构连接成所要求的系统的模拟。前面几节已经介绍了实现各种传递函数和运算的方法，所以从定性方面来说，我们已经可以按系统的特性来组成模拟线路了。但模拟机上各变量都是用电压来表示的，所以这里就有一个比例问题。只有选择适当的比例系数和时间比例，才能既保证运算的精度又不超出元件的线性范围和带宽。下面就是排题时应遵循的原则：

(1) 各比例器和积分器的输出电压的变化应有较大的范围，但又不能超出运算放大器的线性工作范围。这线性范围对电子管的模拟机来说一般是100V，对集成电路的模

拟机来说可能是10V。

(2) 比例器和积分器的单级增益一般不能超过20。

(3) 解题过程一般取在1—4min之间，不能太快，以保证各元件都工作在带宽以内。

(4) 排队图应尽量简单以保证解的可靠性和精度。

只要按照这几条原则来排队，就能排出一张比较好的排队图，减少上机后的问题，保证运算的精度。

2. 机器变量与机器方程

机器变量是指模拟机上所用的物理量。对电子模拟机来说，机器变量就是电压。系统的方程式用模拟机上的电压来表示就叫机器方程。根据机器方程就可以列出排队图。所以排队时首先要确定机器变量，即确定机器变量与实际变量之间的比例关系。

在下面的讨论中设各元件的线性工作范围为100V，并取100V作为机器变量的一个单位，以大写字母X表示机器变量，而实际变量则用对应的小写字母x来表示。机器变量与实际变量之间的关系如下：

$$X = a_x x \quad (5-31)$$

式中 a_x 称为比例系数。

例如，设x表示转角，用度来表示， $a_x = 0.5 / (^\circ)$ 。那么， $x = 2^\circ$ 时，

$$X = 0.5 \times 2 = 1$$

即模拟机上的100V代表 2° 。

比例系数选择的原则是X不能超过1，即

$$\begin{aligned} 1 &\geq a_x |x|_{\max} \\ a_x &\leq 1 / |x|_{\max} \end{aligned} \quad (5-32)$$

式中 $|x|_{\max}$ 是实际变量可能达到的最大值。

除了变量的比例系数外，还有一个时间比例。这是因为除了实时模拟外，一般模拟机上的机器时间与实际时间也有一个比例系数。时间比例的选择原则是使整个解题时间为1~4min以保证各元件都工作在带宽以内。

设机器时间为 τ ，

$$\tau = a_t \cdot t \quad (5-33)$$

式中 a_t 为时间比例。若 $a_t > 1$ ，就表示机器上的解题时间比实际时间长 a_t 倍。

根据式(5-33)可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= \frac{1}{a_t} \frac{d}{dt} \\ \frac{d^2}{d\tau^2} &= \frac{1}{a_t^2} \frac{d^2}{dt^2} \\ \frac{d^n}{d\tau^n} &= \frac{1}{a_t^n} \frac{d^n}{dt^n} \end{aligned} \quad (5-34)$$

式(5-34)表明，只要每一个积分器的输入均除以 a_t ，就可以保证所要求的时间比例。

选取了各比例系数以后就可以将系统的方程式改写成机器方程，然后根据机器方程列出模拟机的排题图。

下面结合一个例子来说明。

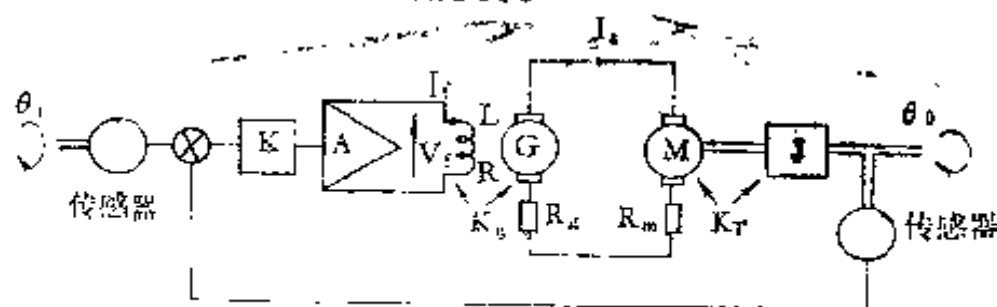


图 5-27 随动系统

设有一随动系统（图5—27）需要进行模拟分析。系统的方程式为

$$V_f = K_A(\theta_i - \theta_o) \quad (5-35)$$

$$L \frac{di_f}{dt} + R_f i_f = V_f \quad (5-36)$$

$$e_g = K_g i_f \quad (5-37)$$

$$e_g = i_a (R_g + R_m) + e_m \quad (5-38)$$

$$e_m = K_m \dot{\theta}_o \quad (5-39)$$

$$t_m = K_T i_a \quad (5-40)$$

$$\ddot{\theta}_o = t_m / J \quad (5-41)$$

$$\dot{\theta}_o = \int \ddot{\theta}_o dt \quad (5-42)$$

$$\theta_o = \int \dot{\theta}_o dt \quad (5-43)$$

图5—28是对应的框图，系统的各参数见表5—1。

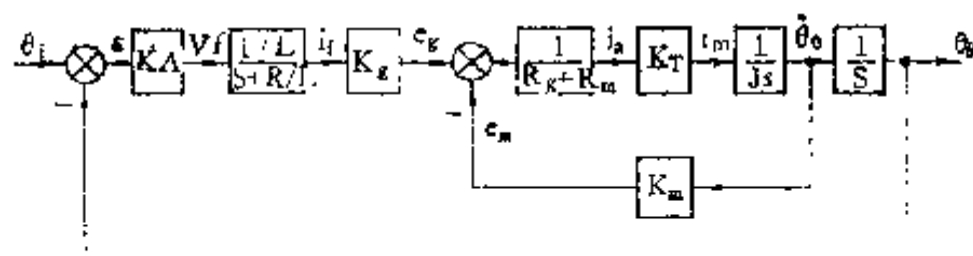


图 5—28 随动系统的框图

根据变量在系统中可能出现的最大值确定比例系数和机器变量，见表5—2所列。

确定了比例系数以后，就可以来改写系统的方程式了。其原则是各方程式的左右项都乘同一个与比例系数有关的

表5—1

随动系统中的参数

参 数	数 值	参 数	数 值
K $V/(\circ)$	1	K_g V/A	20
可调增益 A	0→1	K_m $V/(\circ)/s$	1
L/R_f s	0.06	K_T $kg \cdot m \cdot A^{-1}$	0.01
R_f Ω	0.4	J $kg \cdot m \cdot s^2$	0.02
$R_g + R_m$ Ω	2		

表5—2

变量和比例系数

实 际 变 量	可能的最大值	机 器 变 量
θ_i	2.0°	$\Theta_i = 0.5\theta_i$
θ_o	2.0°	$\Theta_o = 0.5\theta_o$
v_f	10V	$V_f = 0.1v_f$
i_f	25A	$I_f = 0.04i_f$
e_m	500V	$E_m = 0.002e_m$
e_g	500V	$E_g = 0.002e_g$
i_a	250A	$I_a = 0.004i_a$
t_m	$2.5kg \cdot m$	$T_m = 0.4t_m$
$\ddot{\theta}_r$	$125^\circ/s^2$	$\ddot{\Theta}_o = 0.008\ddot{\theta}_o$
$\ddot{\theta}_o$	$12.5^\circ/s$	$\dot{\Theta}_o = 0.08\dot{\theta}_o$

数，并仍保持原来的等式。结合本例来说，式(5—35) ~ (5—43)可改写如下：

$$[0.1v_f] = 0.2A[0.5\theta_i] - 0.2A[0.5\theta_o] \quad (5-44)$$

$$\frac{d}{dt} [0.04i_f] = 16.6 [0.1v_f] - 16.6 [0.04i_f] \quad (5-45)$$

$$[0.002e_g] = 1.0 [0.04i_f] \quad (5-46)$$

$$[0.002e_g] = 1.0 [0.004i_a] + [0.002e_m] \quad (5-47)$$

$$[0.002e_m] = 0.1 [\dot{0.08\theta_o}] \quad (5-48)$$

$$[0.4t_m] = 1.0 [0.004i_a] \quad (5-49)$$

$$[\ddot{0.008\theta_o}] = 1.0 [0.4t_m] \quad (5-50)$$

$$\frac{d}{dt} [\dot{0.08\theta_o}] = 10 [\ddot{0.008\theta_o}] \quad (5-51)$$

$$\frac{d}{dt} [0.5\theta_o] = 6.25 [\dot{0.08\theta_o}] \quad (5-52)$$

将机器变量代入上列各式，整理后得该系统的机器方程如下：

$$V_f = 0.2A(\Theta_1 - \Theta_o) \quad (5-53)$$

$$\frac{d}{dt} I_f = 16.6 V_f - 16.6 I_f \quad (5-54)$$

$$T_m = I_a = E_g - E_m = I_f - F_m \quad (5-55)$$

$$E_m = 0.1 \dot{\Theta}_o \quad (5-56)$$

$$\frac{d}{dt} \dot{\Theta}_o = 10 \ddot{\Theta}_o = 10 T_m \quad (5-57)$$

$$\frac{d}{dt} \Theta_o = 6.25 \dot{\Theta}_o \quad (5-58)$$

根据机器方程就可列出排题图。图5—29就是此系统的模拟机排题图。排题图上比例器和积分器均应标上实际使用的编号，以便于接线和检查。常系数部件也应编号（图5—29中

略)。排队图上各放大器的输出要标上所代表的变量的比例系数,如图5—29所示。这样在实验时看到电压就知道对应的物理量。例如,设读得积分器01的输出为40V,根据排队图上的比例就可知道对应的激磁电流 i_f 就是10A。

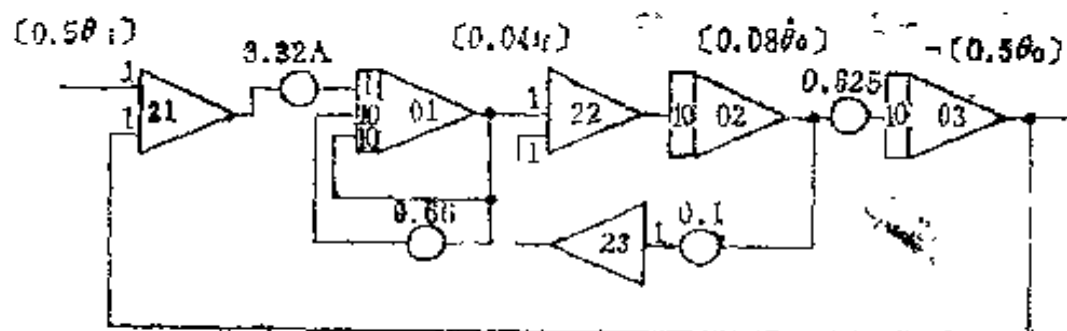


图5—29 随动系统的排队图

设现在要修改时间比例,取 $a_t = 10$ 。那么,根据式(5—34)可以知道,只要在原来的排队图中将每一个积分器的比例系数都除以10就可以了。图5—30就是取 $a_t = 10$ 后的排队图。现在图5—30的过程将比图5—29者放慢10倍。

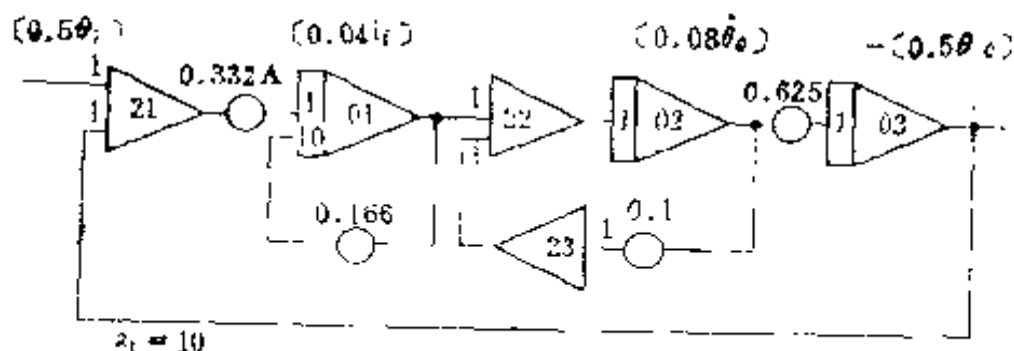


图5—30 $a_t = 10$ 时的排队图

通过上面这个例子介绍了排队图的概念。应该指出的是实际变量的最大值在解题之前是不易估算的。因此,在解题过程中往往需要进一步修改比例系数和重新分配增益。但假如我们就用这个例子里的方法来排队,那么每修改一次比例系

数就得作一系列的代数运算。这工作量是很大的，而且也还可能出差错。下一节介绍的图解法可以解决排队时遇到的这种困难。

3. 排题的图解法

注意到排队时选择变量的比例系数和列写机器方程都是在—组线性方程上进行代数运算的，因此可以利用信号流通图来简化运算。我们知道，信号流通图就是线性方程的图解表示。在信号流通图上进行运算虽然没有什么新的概念，但是由于图形清晰，各量之间的关系十分明确，大大减轻了计算工作。

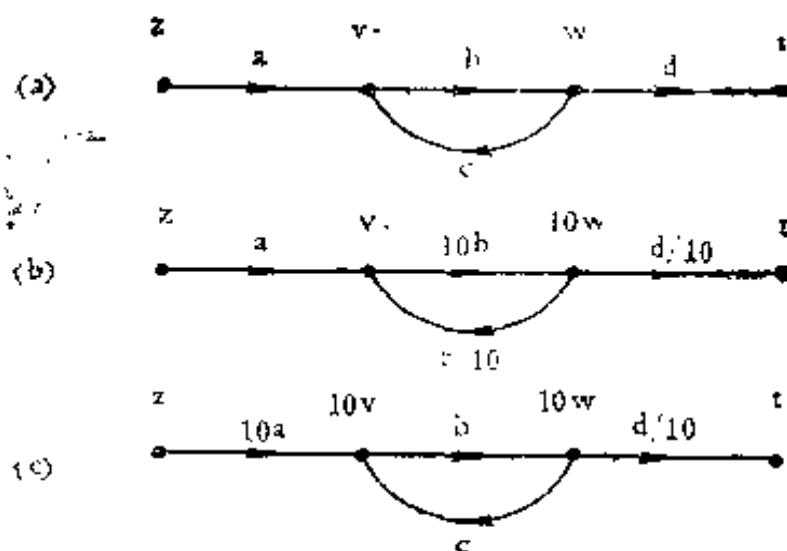


图5—31 信号流图上的运算

现在用图5—31的例子来说明利用信号流通图运算的方法。设图5—31a是原始的方程关系。欲使节点 w 代表 $10w$ ，可将输入信号加大10倍(即用 $10b$ 代 b)，并将所有输出支路的增益降到 $1/10$ ，见图5—31b。这时原方程关系不变，节点 v 和 t 也都没有变化。设再欲改变节点 v 的比例系数，使 v 变为 $10v$ ，则可将进入 v 的支路 a 和 $c/10$ 乘以10，并将输出支路的 $10b$ 除以10，得图5—31c。图a到图b，图b到图c的变换就

是排队中选择变量比系数所需要的基本运算：进入节点的所有支路乘上某个常数时，所有离开节点的支路就要除上同一个常数。这时节点所代表的信号的比例系数就增大了这个倍数。

比较图a和图c还可以看到，反馈回路前后节点同时变更一个比例时，反馈回路的回路增益不受影响。这个概念在今后的排队中是经常要用到的。

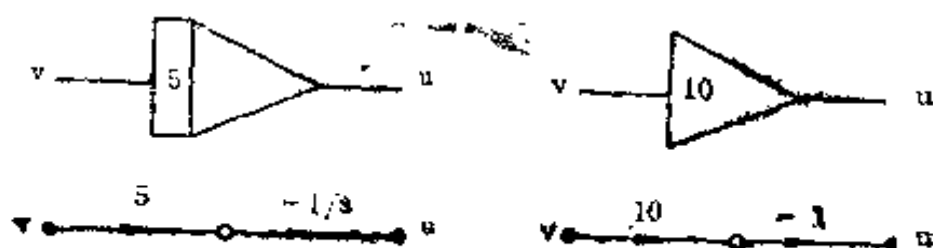


图5—32 运算放大器的信号流通图

当将信号流通图用到模拟机的排队图上时，为了将系数与运算职能分开，一般是用两条支路来表示一个积分器或比例器的，如图5—32所示。图中用黑点表示的是在选择比例系数时需要考虑的变量。空心的圈点是伪信号，不必考虑其比例系数。

下面结合一个例题来介绍用信号流通图排队的方法。

〔例题〕设有一机械系统，其运动方程式为

$$\ddot{x} + 10 \dot{x} + 16x = 0 \quad (5-59)$$

初始条件为

$$x(0) = 0 \quad m$$

$$\dot{x}(0) = 8 \quad m/s$$

式(5—59)可改写为

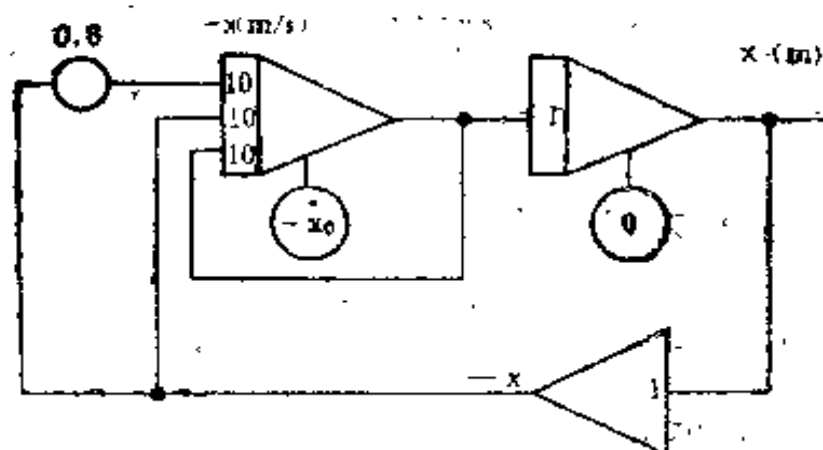
$$\ddot{x} = -10\dot{x} - 16x \quad (5-60)$$

式(5-60)表明该系统的二阶导数等于 $-10\dot{x} - 16x$ 。二阶导数再经两次积分就可得解 x 。所以根据式(5-60)可直接列出求解式(5-59)的方案,如图5-33a所示。图5-33a不能算真正的排队图,因为这上面的变量并不是机器变量——电压。不过,也可把它当作排队图来用,这时实际上是让模拟机上的1V代表1个单位的变量,即1V代表1m或1m/s。或者说,取变量的比例系数为0.01(注:机器变量1代表100V)。标上比例系数后的图5-33b就是一张真正的排队图了。显然图5-33b是一张可以上机运算的排队图。应该要指出的是,这个例子过于简单,对于稍为复杂一些的系统来说,这种直观的排队图往往是没法运算的。但是这种用1V代表1个单位变量的做法很直观,所以一般可用这个方法先列出一张原始的排队图,然后再用图解法修改各比例系数使之成为一张满意的排队图。

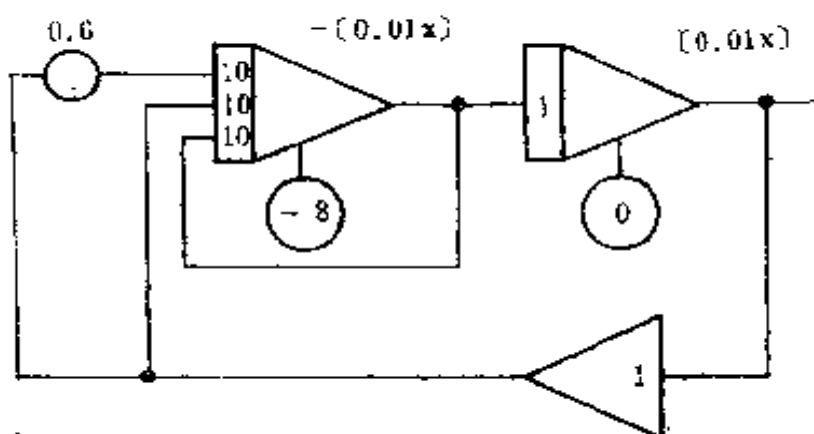
再说,虽然图5-33b可以上机,但也存在一些问题。第一, \dot{x} 的比例系数太小。按这个比例, $\dot{x}(0)$ 是8V,整个解题过程中 \dot{x} 小于8V,没有充分利用运算放大器100V的线性范围,或者说解的精度不够高。第二,图中第一个积分器要三个系数为10的输入端,若用DMJ-3A模拟机就有困难。

总之,可以用各种方法来列出原始的排队图,但这排队图一般说来往往不能满足要求,总是需要修改的。下面仍结合本例来说明如何对排队图进行修改。

我们先来提高 \dot{x} 的比例系数。根据上面的分析可以知



(a)



(b)

图5—33 例题的原始排队图

道，若此比例系数提高10倍，那么 \dot{x} 在模拟机上就从80V开始变化，增大了其变化范围，提高了运算精度。

这里用图解法来修改比例系数。图5—34a是与图5—33b原始排队图对应的信号流通图。图5—34b是 \dot{x} 的比例系数提高10倍后的信号流通图。从图5—34b可以看到，只改变 \dot{x} 的比例，对 \dot{x} 的积分器就会要求过高的增益（160）。所以还得

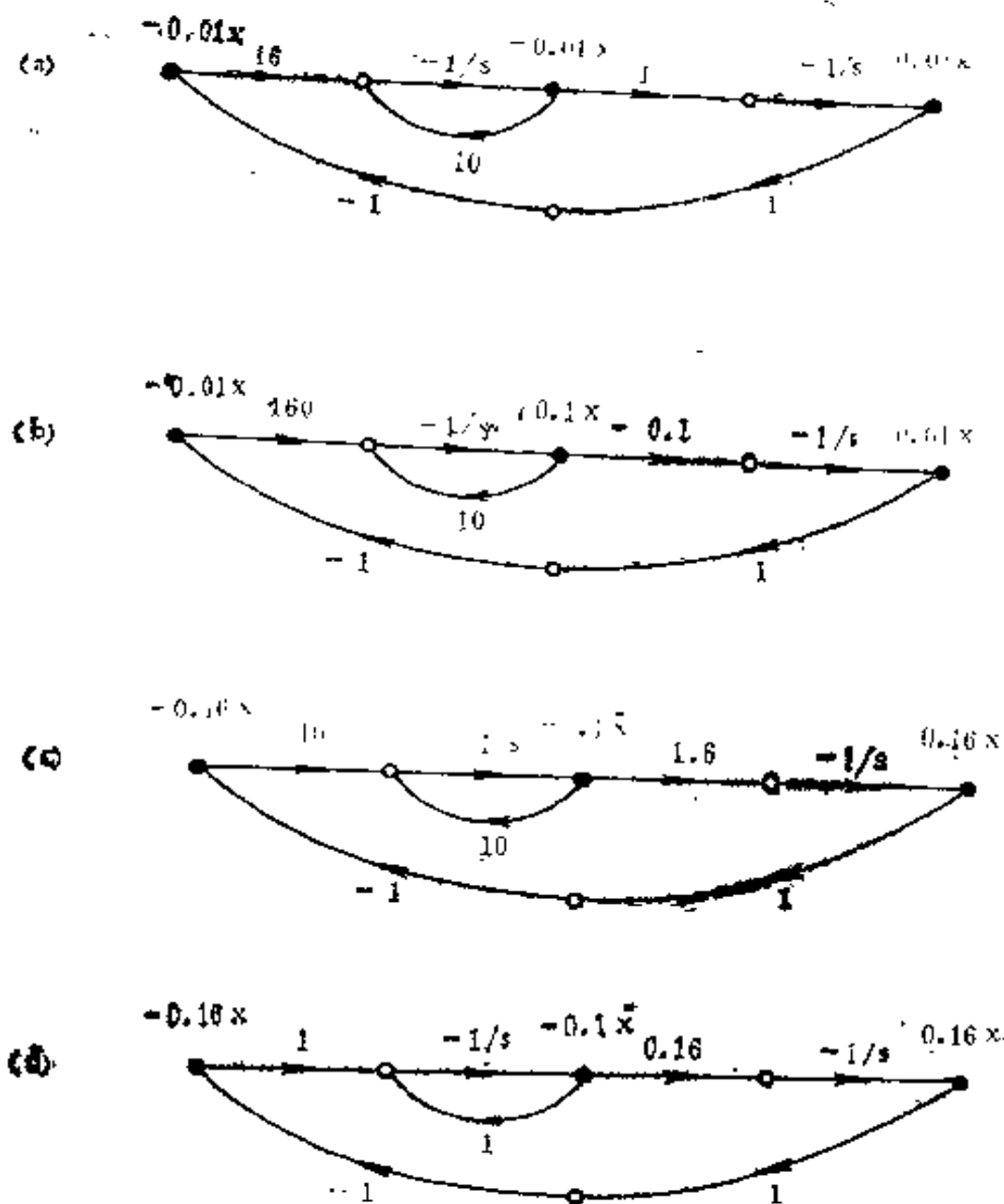


图5—34 比例系数的修改过程

改变 x 的比例系数，使增益重新分配一下。为了使增益从160降到10，所以将 x 的比例系数提高16倍，得图5—34c。下一步再取时间比例 $a_1 = 10$ ，这时各积分器的系数都除以10，得图5—34d。图5—34d是最终的信号流通图，根据此

图就可列出修改后的排队图，见图5—35。

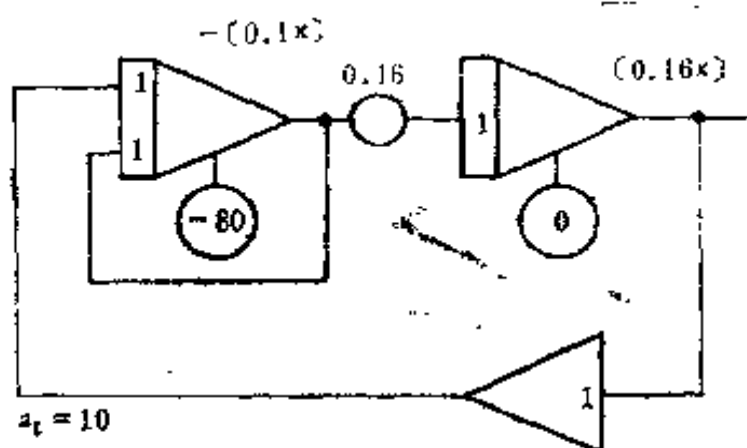


图5—35 最终的排队图

图5—35中 x 的比例系数已提高了10倍。现在是10V代表1 m/s，对应的初始条件现在就是80V了。图中除了一个常数部件外，积分器和比例器的系数都是1。所以这张排队图不但保证了各变量有比较大的变化范围，而且线路简单，从而提高了运算的精度和可靠性。

通过这个例题具体说明了如何按照§1讲的原则来排队以保证运算的精度。也具体说明了信号流通图的用法。我们看到，利用信号流通图可以很方便地来修改变量的比例系数。排队时由于实际变量的最大值在解题前不一定都能估计到，所以一般还需要在解题过程中再修改变量的比例系数。若是用图解法，这时就可以在原来的信号流图上进行修改，既方便，又不容易出差错。所以图解法的实用意义是很大的。

应该说明的是，这里为了叙述方便，所以在图5—34上罗列了一组信号流通图，其实真正排队时只要在一组信号统

通图上修改就可以了，很是简单。

4. 排题后的检查

排题以后需要检查。所谓检查，有两方面的内容。一是排题图的纸面上的检查，检查机器方程和排题图是否确是实际系统的一个模型。另一是检查模拟机排题板上的联线和所有系数的设置是否与排题图一致。

纸面检查时一般应注意下列三点：

(1) 各闭合回路的时间常数是否正确。例如图5—30中包含积分器 Σ 回路的时间常数应与图5—28框图中的时间常数 L/R 相符（要考虑时间比例 a_t ）。

(2) 排题图中回路的总增益应等于系统的总增益。

(3) 排题图中构成回路的放大器总数应是单数。这是负反馈所要求的。

模拟机上按排题图联线以后，也还要进行检查。因为有可能接线或设置有误，也有可能接触不良或断线，因此最好是通电检查。模拟机上称这种检查为静态检查。DMJ—3A模拟机在《静态检查》工作状态时是将积分器接成比例器工作，并将积分器的输出线路与积分器分开，在输出线路上加检查用电压（可测）。例如图5—36a是一带积分器的排题线路，图5—36b就是在《静态检查》时的联线图。静态检查时各比例器的工作与正常运算时是一样的，不受影响。若取静态检查电压为1V（见图5—36b），则积分器输出为-30V、比例器输出为-1V时就表示这线路的联接和常系数部件的设置正确无误。

因为静态检查时各积分器都在输出处断开，所以即使是很复杂的系统，各放大器的输出也只要通过一些简单的计算就可求得。图5—37就是图5—30系统静态检查时的工作情

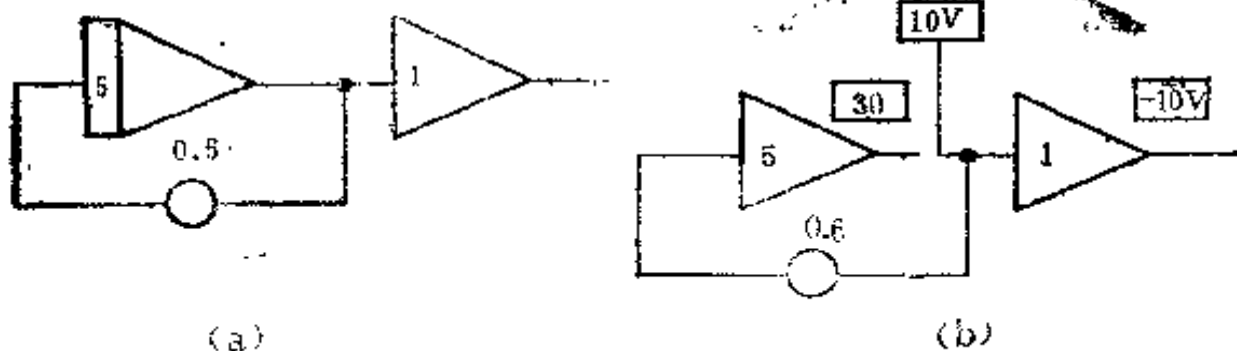


图5—36 静态检查原理图

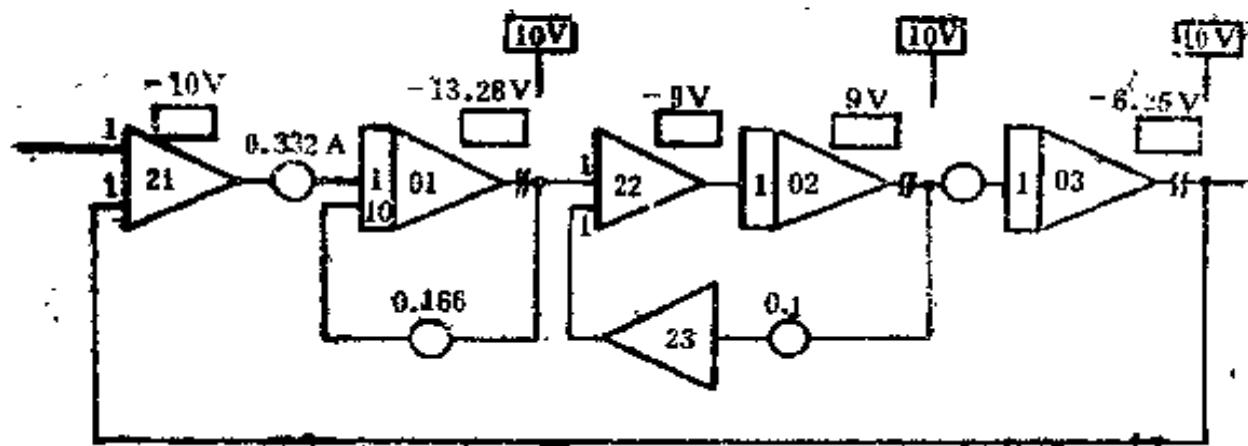


图5—37 图5—30排队图的静态检查

况。这里设静态检查用电压都是+10V，根据排队图（图中设 $A=1$ ）很容易算出各放大器的输出电压，如图中方框所示。只要依次检查这些电压是否相符，就可知道此题在排队板上的接线是否正确。

用方框标在排队图上的静态检查电压是排队图的一个组成部分。

七、非线性特性的模拟

自动控制系统均含有非线性特性。从一定意义上讲，模拟机主要用于处理含有非线性系统的分析。这是因为线性理论的发展以及工程方法的完善，线性系统的分析实际上已不一定要借助于模拟机了。

这一节主要介绍需要由使用者自己来配线的非线性特性的模拟。其它如非线性函数发生器，乘法器等与模拟机配套的非线性部件可以参照说明书来使用，这里就不再介绍了。

1. 死区特性

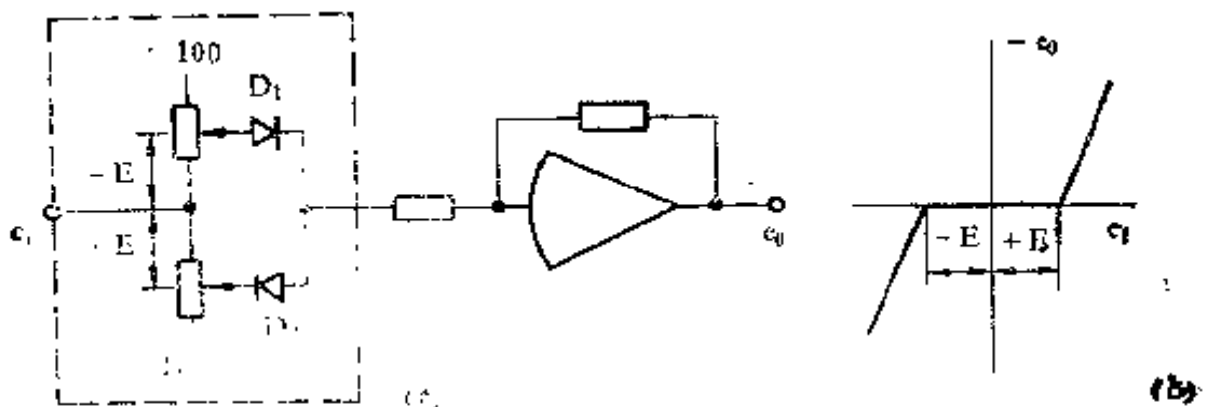


图5—38 死区特性

图5—38的线路可用来模拟死区特性。当输入电压 e_i 比较小时， D_1 、 D_2 均不导通，所以输出是零。当 e_i 超过一定的设置值时， D_1 或 D_2 就会导通，这时比例器的输出 e_o 就按比例增加。

DMJ—3A模拟机上配有这种模拟非线性特性用的二极管组合，称为典型非线性（见图5—38中虚线所示）。使用时只要接上输入与输出即可，很方便。

2. 限幅特性

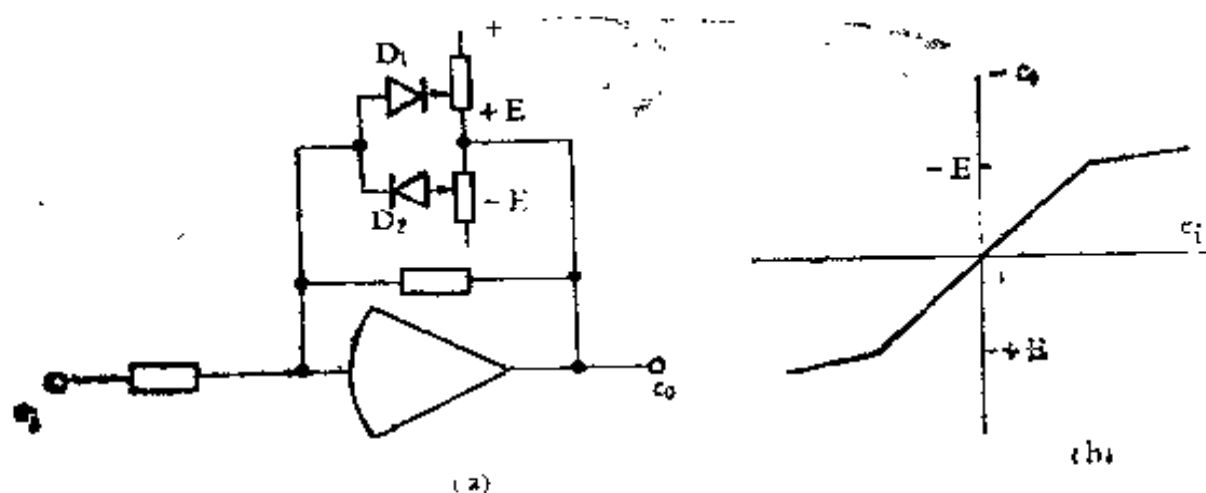


图5—39 限幅特性

图5—39所示的线路可用于模拟限幅特性。当输出 e_o 的幅值小于设置值时， D_1 和 D_2 均不导通，整个线路相当于一个普通的比例器。当 e_o 超过设置值时 D_1 或 D_2 导通，增益就减小。图5—39b为其输入—输出特性。

图5—39上的二极管线路就是DMJ—3A上的典型非线性部件，所以只要将放大器的输出端和相加点与典型非线性部件上的两个插孔相连就可实现限幅特性。

3. 硬限幅特性

上面所介绍的限幅特性在限幅后并不是水平的，故称为软限幅特性，可用来模拟实际系统中的放大器等饱和特性，但不适用于模拟机械的行程限制。行程限制的模拟需要采用硬限幅线路。

图5—40所示就是硬限幅特性的模拟线路。第二个放大器所模拟的是一个死区特性。线性特性与死区特性相减得硬限幅特性。

4. 干摩擦特性

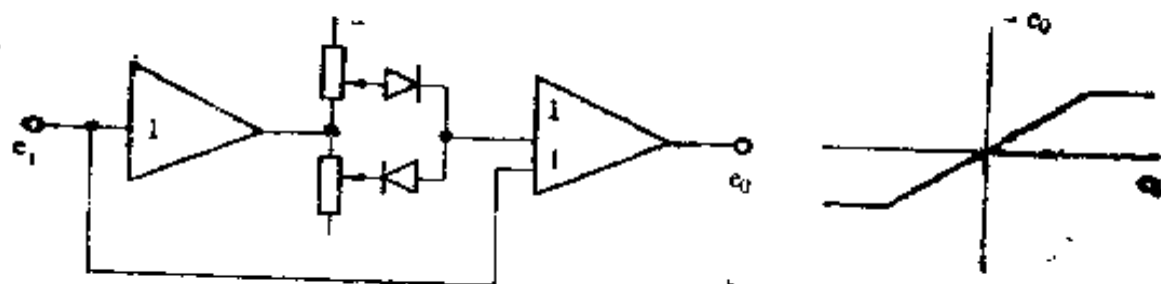


图5—40 硬限幅特性

干摩擦特性与运动的速度有关，所以这里结合一具体的运动方程来讨论其模拟线路。

设有一惯性环节，当有干摩擦力矩 M_f 时其运动方程式为：

$$(Tp + 1)\omega = K_T u - M_f \text{sign} \omega \quad |K_T u| \geq M_f \quad (5-61)$$

$$\omega = 0, \quad |K_T u| < M_f \quad (5-62)$$

式中 $p = \frac{d}{dt}$ ， ω —输出轴的转速； $K_T u$ —输入的控制力矩。

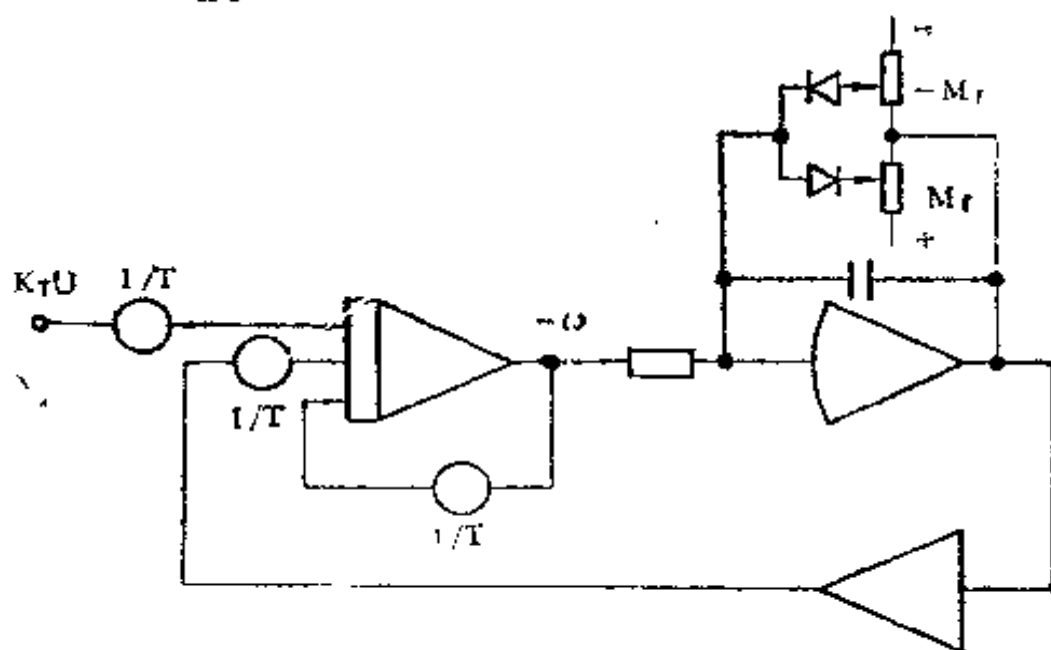


图5—41 干摩擦特性的模拟

图5—41就是此系统的模拟线路。当控制力矩 $K_T u$ 小于摩擦力矩 M_f 时，限幅部分不起作用，模拟线路相当于一个线性的随动系统，误差为零，即第一个积分器的输出为零。这个输出电压代表式(5—62)中的速率 ω 。也就是说，当控制力矩小于摩擦力矩时系统不动作， $\omega = 0$ 。当 $K_T u$ 值大于摩擦力矩 M_f 时，后者受到限幅线路的限制而不再增大，这时第一个积分器的输出满足式(5—61)。由此可见，图5—41的模拟线路满足带有干摩擦的运动方程，其第一个积分器的输出代表速率 ω 。

5. 滞环特性

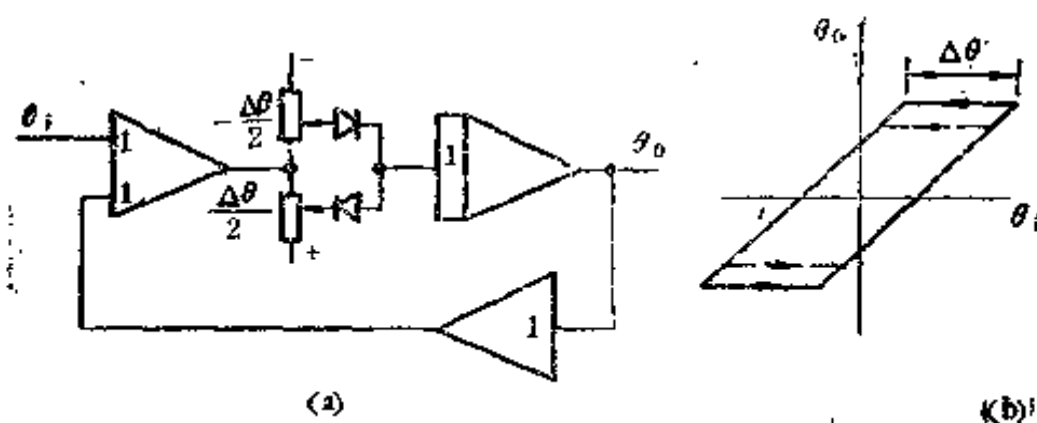


图5—42 滞环特性

图5—42所示是滞环特性及其模拟线路。图中第一个比例器后有一个死区特性。当输入与输出的差 $(\theta_i - \theta_o)$ 超出 $\pm \Delta\theta/2$ 时，即超出死区时，整个线路相当于一个线性系统，这时 θ_o 随 θ_i 作线性变化。当运动方向改变时，《死区》输出为零，这时积分器输出 θ_o 就保持不变。这就形成了滞环特性。

这里是利用反馈系统来形成滞环特性的，所以只有在相

对比较低的频带内才具有图5—42b所示的特性。排[题图]中积分器的比例系数取大一些，例如取10，会好一些。不过总的说来，我们应该注意包含这个滞环特性的整个模拟系统的带宽，选取适当的时间比例，否则模拟的效果就比较差。

参 考 文 献

1. C.T.Leondes (ed.), Computer Control Systems Technology, McGraw-Hill, 1961, Chapters 6 and 7.

2. 王广雄：时滞特性的模拟及其问题，自动化技术与应用，第3卷3期，1984。

第六章 控制系统的数字仿真

控制系统设计中也常要用数字计算机进行仿真研究。过去往往是一些复杂的系统才上数字机。现在，随着计算工具的普及和仿真理论的进一步完善，一般的线性系统或非线性系统也开始用数字机来进行仿真计算了。

数字仿真有多种方法，也有专门的仿真语言。近年来又发展了各种传递函数变换法，传递函数变换法是指将系统的传递函数直接变换为 z 传递函数，然后根据 z 传递函数列写计算程序。这种方法较经典的数值方法有很多优点，尤其是可以缩短计算时间。这里将介绍其中的一种——零极点匹配法。本章也要讨论非线性系统的仿真。最后还要介绍利用计算器来进行仿真计算的问题。

一、系统的离散化及其 Z 传递函数

要进行数字仿真，就得先将连续系统的方程式离散化，然后才能用数字机来解这离散方程组。可以有很多种方法来进行离散化。我们这里用的是保持器等效法。

设 $G(s)$ 是一连续系统的传递函数，图6—1虚线所框的 $G(z)$ 是其对应的离散化系统。对离散化的要求是在同样的输入 $e(t)$ 下，离散化系统的输出序列 $\hat{u}(k)$ 等于 $u(t)$ 的离散值，这个 $u(t)$ 是原连续系统的输出。

要做到这一点就应该在 $G(s)$ 前加一保持器 H （见图

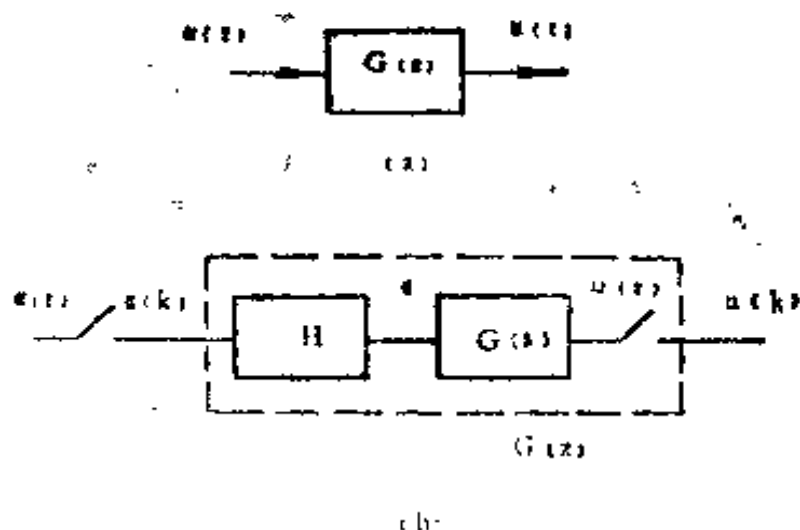


图6—1 保持器等效法

6—1 b)，将离散信号 $e(k)$ 还原成 $e(t)$ 。假如图6—1 b的 $G(s)$ 上加的是同样的 $e(t)$ ，那么其输出就必然与原连续系统的输出一致了。这保持器与 $G(s)$ 结合起来列写的 z 传递函数就是所求的离散化系统的传递函数。这种列写离散化方程的方法称为保持器等效法。

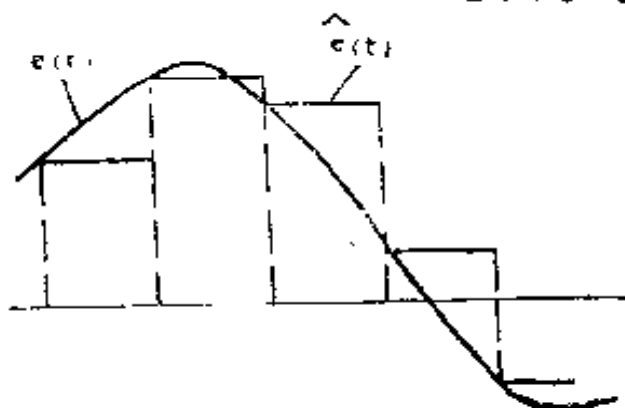


图6—2 零阶保持器的输出 $\hat{e}(t)$

但是为了便于计算，一般取零阶保持。零阶保持不能完全恢复原信号 $e(t)$ ，

其输出 $\hat{e}(t)$ 呈阶梯形(图

6—2)。这个 $\hat{e}(t)$ 将造成仿真误差。

当取零阶保持时，图6—1 b所对应的 z 传递函数就是

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \frac{G(s)}{s} \quad (6-1)$$

式中 \mathcal{Z} 表示与拉氏变换式 $G(s)/s$ 对应的 z 变换。

下面结合典型环节来讨论离散化 z 传递函数的列写、改进以及方法的简化, 所得出的结果将是零极总匹配法的基础。

1、单极点

设传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts} \quad (6-2)$$

根据式(6-2)可写得

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s(1 + Ts)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T} \quad (6-3)$$

$$Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-\Delta t/T} z^{-1}} \quad (6-4)$$

代入式(6-1)并整理后可得

$$G(z) = \frac{1 - e^{-\Delta t/T}}{z - e^{-\Delta t/T}} \quad (6-5)$$

从式(6-3) ~ (6-5)的运算中可以看到, s 传递函数的极点 $s_1 = -1/T$ 对应为 z 传递函数的极点 $z_1 = e^{-\Delta t/T}$, s 与 z 间的对应关系为

$$z = e^{s\Delta t} \quad (6-6)$$

式中 Δt 为步距或采样周期。

上述的对应关系也可以说成是: s 平面上的极点通过式(6-6)映射为 z 平面上的极点。

式(6-5)虽是 $G(s)$ 的等效离散化传递函数, 但是两者的频率特性显然是不一致的。频率特性上的畸变主要是零阶保持带来的。根据采样系统理论, 我们知道零阶保持的频率特性为

$$H_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega\Delta t}}{j\omega} = \Delta t \frac{\sin(\omega\Delta t/2)}{\omega\Delta t/2} e^{-j\omega\Delta t/2} \quad (6-7)$$

式 (6-7) 表明, 采用零阶保持不但使连续部分的输入信号变为梯形, 而且从时间上来说也有滞后, 滞后半个步距 ($\Delta t/2$)。

因此, 式 (6-5) 的一个改进算法是超前半个步距, 即取

$$G(z) = \frac{z+1}{2} \frac{1 - e^{-\Delta t/T}}{z - e^{-\Delta t/T}} \quad (6-8)$$

这个附加的因子与零阶保持合起来的频率特性为

$$\begin{aligned} H'_0(j\omega) &= \frac{e^{j\omega\Delta t} + 1}{2} \frac{1 - e^{-j\omega\Delta t}}{j\omega} \\ &= \Delta t \frac{\sin\omega\Delta t}{\omega\Delta t} \end{aligned} \quad (6-9)$$

式 (6-9) 已无相位滞后。这表明改进的算法已经补偿了零阶保持的相位滞后, 当 $\omega\Delta t \leq 0.02$ 时, $\sin\omega\Delta t/\omega\Delta t = 0.99993$ 。这时 $H'_0(j\omega)$ 已可视为理想的比例环节。

上面的分析说明, 对于单极点, 离散化时按映射关系式 (6-6) 确定极点外, 宜再补充一个 $z = -1$ 的零点, 如式 (6-8) 所示。

有了上述确定零极点的简单关系, 就可以不用式 (6-1) 来推导 z 传递函数了。因为求得零极点后, 再根据下列式 (6-10) 静态增益应相等的要求, 也可列出整个 z 传递函数。

根据稳态值应该相等而得到的静态增益匹配关系式为

$$G(z) \Big|_{z=1} = G(s) \Big|_{s=0} \quad (6-10)$$

2. 一阶零极点

设传递函数为

$$G(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + Ts} \quad (6-11)$$

将式(6-11)代入式(6-1)可算得对应的离散化传递函数为

$$G(z) = \frac{\tau}{T} \frac{z - [1 - (1 - e^{-\Delta t/T})T/\tau]}{z - e^{-\Delta t/T}} \quad (6-12)$$

式(6-12)的零点尚可简化如下:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 - (1 - e^{-\Delta t/T})T/\tau \approx 1 - \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{T}{\tau} \\ &= 1 - \Delta t/\tau \approx e^{-\Delta t/\tau} \end{aligned} \quad (6-13)$$

式(6-13)中近似等号是根据指数函数的近似展开式:

$$e^{-\Delta t/T} \approx 1 - \Delta t/T \quad (6-14)$$

若取 $\Delta t/T = 0.02$, 则 $e^{-\Delta t/T}$ 的近似式为0.98, 而真实值 $e^{-0.02} = 0.9802$, 即误差为0.02%。这个误差是相当小的。因此仿真计算中若步距满足要求, 则其z传递函数中的零点就可按式(6-13)来算。

现在式(6-12)就可写成

$$G(z) = K \frac{z - e^{-\Delta t/\tau}}{z - e^{-\Delta t/T}} \quad (6-15)$$

注意到式(6-15)的零极点与(6-11)的零极点之间都符合式(6-6)的映射关系。可见z传递函数中的零点和极点都可直接从G(s)写得, 没有必要再用式(6-1)来从头推导了。现在只要再按式(6-10)求出增益便可得到整个z传递函数。式(6-16)就是按这个概念来列出的式(6-11)

的离散化传递函数

$$G(z) = \frac{1 - e^{-\Delta t/T}}{1 - e^{-\Delta t/T}} \frac{z - e^{-\Delta t/T}}{z - e^{-\Delta t/T}} \quad (6-16)$$

3、二阶环节

设二阶环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6-17)$$

其极点为

$$s_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$s_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

将式(6-17)代入式(6-1)可算得其对应的离散化传递函数。当 $\omega_n\Delta t \leq 0.02$ 时, 这个 z 传递函数可写成

$$G(z) = K \frac{z+1}{(z-z_1)(z-z_2)} \quad (6-18)$$

式中

$$z_1 = e^{s_1\Delta t}$$

$$z_2 = e^{s_2\Delta t}$$

式(6-18)表明极点之间仍符合式(6-6)的映射关系。式(6-18)中的零点是近似的。以典型数据 $\xi = 0.707$ 为例, 根据式(6-1)得出的零点应该是 $s_1 = -0.9906$ 。现在用-1来代替这个零点, 有1%的误差, 但可大大简化计算。

为了补偿零阶保持带来的滞后, 也可以使算式提前半个步距, 即将式(6-18)改进为

$$G(z) = K \frac{z+1}{2} \frac{z+1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

$$= \frac{K (z+1)^2}{2 (z-z_1) (z-z_2)} \quad (6-19)$$

由此可见，对于这种二阶环节，也可以根据式(6—6)的映射关系直接写出其 z 传递函数的极点。另外，视需要和可能加上一个或两个 $z = -1$ 的零点。确定了零极点后再用式(6—10)确定 z 传递函数的增益。这样来求 z 传递函数将比用式(6—1)简便得多。

二、零极点匹配法

现在结合闭环系统(图6—3)的仿真来进行讨论。 $G(s)$ 是此闭环系统的开环传递函数。

设 $G(s)$ 由上一节所介绍各典型环节串联组成(图6—4 a)。我们现在将对应的离散化系统也看作是由各对应的离散化子系统所构成。这实际上是承认各典型环节均由采样和零阶保持相隔开(图6—4 b)。这样做是可能的。因为对单极点或二阶环节可以补偿零阶保持所带来的滞后，且当 $\omega \Delta t \leq 0.02$ 时，零阶保持对幅频特性也没有影响，所以图6—4 a和b的频率特性是一样的。由式(6—16)看出，只有带零点的环节没有补偿。不过每个零阶保持的相角滞后为 $\angle H_0 = -\omega \Delta t / 2$ 。当 $\omega \Delta t \leq 0.02$ 时，相角滞后将小于 0.01 rad ，即 0.57° 。

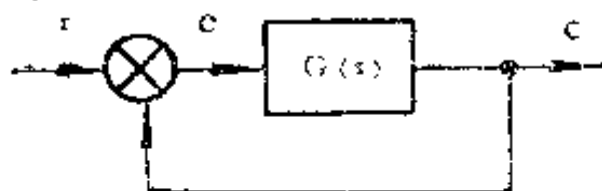


图6—3 闭环系统

这里还要说明闭环仿真计算的一个特点： k 时刻的误差信号 $e(k)$ 是要有了输出 $c(k)$ 才能计算。所以在

计算 $c(k)$ 时尚不能用到 $e(k)$ ，最多是前一时刻的 $e(k-1)$ 。

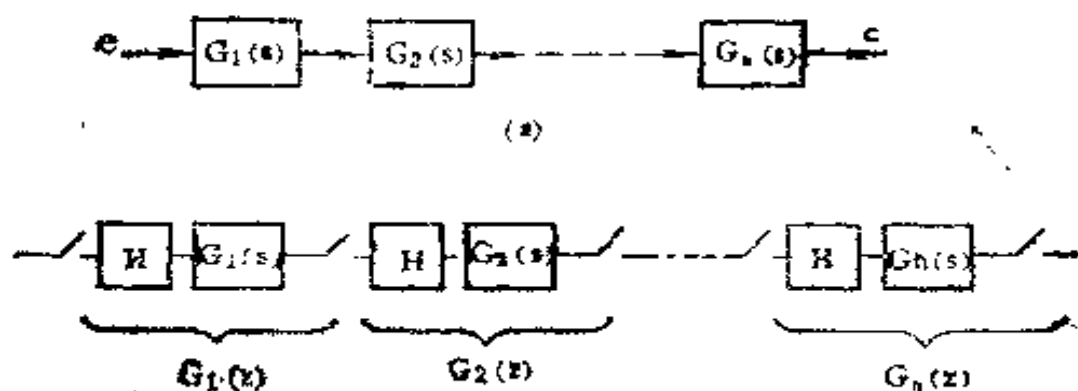


图6—4 串联环节的离散化

因此， $G(z)$ 中分子的阶次应低一阶。这就是说， $G(z)$ 中不能全用 $(z+1)$ 来补偿零阶保持的滞后，得留一项。这一项也将给 $G(z)$ 附加小于 0.57° 的相移。总之，不论采用何种方法来列写 z 传递函数，这一项误差都是存在的。

综上所述可知，当采用图6—4 b的方式来列写 z 传递函数时，系统的频率特性在相角上滞后于原系统（图6—4 a）的角度不会大于 $1^\circ \sim 2^\circ$ 。这个数值对仿真所要研究的闭环特性（图6—3）可以说不会有什么影响。所以在列写离散化方程时，可以将系统按图6—4 b来处理。这样一来，系统的 z 传递函数就等于各典型环节 $G_i(z)$ 的乘积。

另外，将离散化系统看作由一阶或二阶典型环节所构成也有利于对含有非线性的系统进行仿真。因为这时各个环节之间可随时分合，插入非线性项。

将离散化系统看作由典型环节的串接所构成，那么 z 传递函数的零极点就是所有各组成环节的零极点。上一节已经说明，各典型环节的零极点可以根据映射关系直接写得，所以现在这个 z 传递函数的零极点就可以根据 $G(s)$ 的零极点按式 (6—6) 的映射关系来一一写得。这种列写 z 传递函数的方法称为零极点匹配法。这里只用到式 (6—6) 的映射关

系就可以从 $G(s)$ 求得 $G(z)$ ，不需要复杂的计算，大大方便了方程式的离散化。

现将上面讨论过的内容归纳成下列法则，以便于实际应用零极点匹配法。

法则1. $G(s)$ 的零点和极点均按 $z = e^{s\Delta t}$ 分别映射为 $G(z)$ 的零极点。例如，设 $G(s)$ 有一个极点在 $s = -a$ ，则 $G(z)$ 就有一个极点在 $z = e^{-a\Delta t}$ 。

法则2. 除有限值的零点外， $G(s)$ 在 $s = \infty$ 处的零点在 $G(z)$ 中映射为 $z = -1$ 点。例如，设 $G(s) = 1/(s+a)$ 有一个 $s = \infty$ 的零点，则 $G(z)$ 的形式为

$$G(z) = K \frac{z+1}{z - e^{-a\Delta t}}$$

式(6-18)和式(6-19)都是实际应用本法则的例子。

注意，若要求 $G(z)$ 的分子阶次较分母低一阶，则 $G(z)$ 中保留一个 $z = \infty$ 的零点，例如式(6-18)。

法则3. 等效离散系统的静态增益应该与 $G(s)$ 的增益证明，即

$$G(z) \Big|_{z=1} = G(s) \Big|_{s=0} \quad (6-20)$$

但若 $G(s)$ 是I型系统的开环传递函数，增益为 K_v （量纲为 s^{-1} ），则式(6-20)的静态增益关系应改为

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{G(z)}{\Delta t} \quad (6-21)$$

式(6-21)的证明如下。

已知误差信号的传递函数为

$$E(z) = \frac{1}{1+G(z)} R(z) \quad (6-22)$$

设输入为速度输入，即其 z 变换为

$$R(z) = \frac{\Delta t z}{(z-1)^2} \quad (6-23)$$

将 $R(z)$ 代入式(6-22)，并根据终值定理可得系统的稳态误差为

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\Delta t}{(z-1)G(z)} \quad (6-24)$$

已知I型系统在单位速度输入下的静差为

$$e(\infty) = 1/K_v \quad (6-25)$$

将式(6-24)等于式(6-25)就可以得到式(6-21)。

用同样的方法也可证得I型系统所要求满足的静态增益关系式为

$$K_s = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2(z-1)^2 G(z)}{\Delta t^2 (z+1)} \quad (6-26)$$

式中 K_s 为I型系统的增益。

从上面的讨论中可以看到，用零极点匹配法所求得的离散化系统其频率特性基本上可保持原连续系统的频率特性，只是相角上有 $1^\circ \sim 2^\circ$ 的滞后。因此零极点匹配法的仿真误差是相当小的，更不会由于离散化而导致不稳定。但上面这些近似式的条件是步距 Δt 要小。一般使用时要求 Δt 在系统的带宽内应满足下列关系式：

$$\omega \Delta t \leq 0.02 \quad (6-27)$$

现以一I型系统的仿真计算为例来说明这个方法。下一节还要在这个基础上研究非线性系统的仿真问题。

〔例题〕设欲仿真计算一闭环系统(图6-3)的阶跃响应。

系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_s(Ts + 1)}{s^2} \quad (6-28)$$

式中

$$\begin{aligned} K_s &= 100s^{-2} \\ T &= 1/7 \text{ s} \end{aligned} \quad (6-29)$$

式(6-28)有两个 $s=0$ 的极点和一个 $s=-1/T$ 的零点。根据法则1可以知道, $G(z)$ 应有两个 $z=1$ 的极点和一个 $z=e^{-\Delta t/T}$ 的零点, 即离散化的 z 传递函数为

$$G(z) = \frac{K(z - e^{-\Delta t/T})}{(z - 1)^2} \quad (6-30)$$

式(6-30)分子的阶次较分母的低一阶, 故不用再增添 $z = -1$ 的零点。

现在来确定增益 K 。

将式(6-30)代入式(6-26):

$$\begin{aligned} K_s &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2(z-1)^2 G(z)}{\Delta t^2 (z+1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2K(z - e^{-\Delta t/T})}{\Delta t^2 (z+1)} \\ &= \frac{K(1 - e^{-\Delta t/T})}{\Delta t^2} \end{aligned}$$

所以得 $G(z)$ 的增益为

$$K = \frac{K_s \Delta t^2}{1 - e^{-\Delta t/T}} \quad (6-31)$$

现在, $G(z)$ 已完全确定了。将 $G(z)$ 展开, 写成

$$G(z) = \frac{C(z)}{E(z)} = \frac{K(z^{-1} - e^{-\Delta t/T} z^{-2})}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} \quad (6-32)$$

根据式(6-32)可写得对应的差分方程为

$$c(k) = 2c(k-1) - c(k-2) + Ke(k-1) -$$

$$-Ke^{-\Delta t/T}e(k-2) \quad (6-33)$$

从式(6-28)知系统的固有频率 $\omega_n = 10\text{s}^{-1}$ ，因此根据式(6-27)可确定仿真计算的步距为 $\Delta t = 0.002\text{s}$ 。将各参数代入式(6-31)和式(6-33)后并将式(6-33)改写，得

$$c(k+1) = 2c(k) - c(k-1) + 0.028772 e(k) - 0.028372 e(k-1) \quad (6-34)$$

式(6-34)就是仿真计算中代替图6-3中开环传递函数 $G(s)$ 的差分方程。这个方程再加上比较环节：

$$e(k) = r(k) - c(k) \quad (6-35)$$

就构成了一个完整的离散化系统方程。

计算时先根据式(6-35)算得 $e(k)$ ，然后从式(6-34)算得下一时刻的 $c(k+1)$ 。用这个 $c(k+1)$ 再进行下一循环的计算。

下面就是用BASIC来写的这一段程序

```
40 E = R - C
```

```
50 C = 2 * C - C1 + 0.028772 * E - 0.028372 * E1
```

这里C1和E1分别表示前一刻的值。这一段程序再配上循环用的语句，输入数据的程序以及打印程序等就可以进行仿真计算了。

表6-1所列就是阶跃输入下仿真计算的部分结果。为了比较，表中还列出了用拉氏变换法算得的输出响应。从比较可知，本例中零极点匹配法仅在小数第三位上有误差，即误差小于1%。

从上面的说明中可以看到，零极点匹配法有相当的精度。比法所需要的计算都是些直观的计算，非常简单。所以即使是低阶系统，数值计算也往往比解析计算来得方便。

表6—1

阶 跃 响 应

t秒	拉氏变换法	零极点匹配法
0.10	0.9474	0.9557
0.14	1.1068	1.1141
0.18	1.1840	1.1892
0.22	1.2055	1.2084
0.26	1.1929	1.1939
0.30	1.1621	1.1621

三、非线性系统的仿真

线性系统一般尚有解析解，而非线性系统则一般不存在解析解。因此非线性系统的分析更要借助于仿真技术。这里以一具有齿隙的Ⅰ型系统为例来说明这类系统的仿真问题。

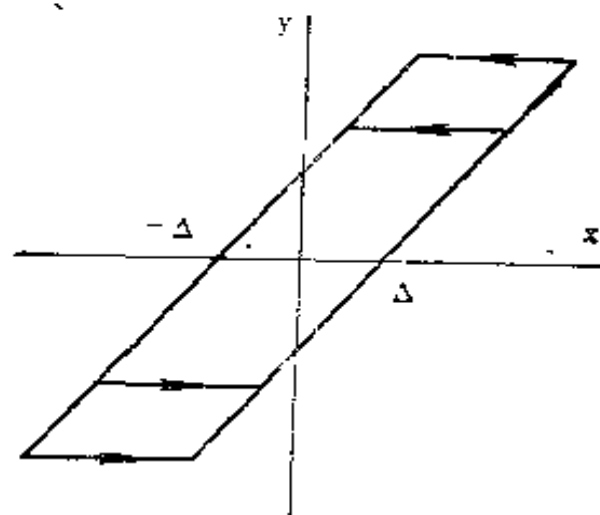


图6—5 齿隙特性

机械传动中的齿隙特性一般也称为滞环特性(图6—5)。数字仿真中滞环特性的离散形式为：

$$x_k > x_{k-1} \text{ 时, } x_k - \Delta > y_{k-1} \text{ 则 } y_k = x_k - \Delta, \quad (6-36)$$

$$\begin{aligned}
& X_k - \Delta < y_{k-1} \text{ 则 } y_k = y_{k-1} \\
& X_k < X_{k-1} \text{ 时, } X_k + \Delta < y_{k-1} \text{ 则 } y_k = X_{k+1} + \Delta, (6-37) \\
& X_k + \Delta > y_{k-1} \text{ 则 } y_k = y_{k-1}
\end{aligned}$$

注意到 $y_k = y_{k-1}$ 就是指输出 y 值保持不变。由此可见，滞环仿真时只要根据输入 x_k 比前一时刻的值 (x_{k-1}) 大或者小，确定用式 (6-36) 或式 (6-37) 来计算输出 y_k ，或者干脆让 y_k 保持不变。

设 $C = x_k, C1 = x_{k-1}, D = \Delta, Y = y$ ，那么用 BASIC 来写的滞环仿真程序就是：

```

60 IF C > C1 THEN 80
70 IF C + D < Y THEN Y = C + D
75 GOTO 90
80 IF C - D > Y THEN Y = C - D
90 .....

```

这里语句 90 表示系统中滞环特性以后的下一步运算。

下面来对 I 型系统中的齿隙影响进行仿真研究。图 6-6 所示为系统的框图。这个系统的线性部分特性已经有了，见式 (6-34)。因此现在只要对原线性系统的程序稍作修改，加进这里所介绍的滞环仿真程序就可以了。

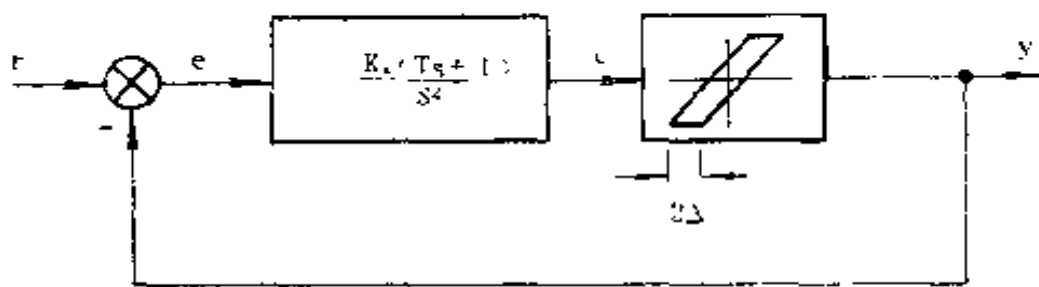


图 6-6 带齿隙的 I 型系统

图 6-7 所示就是此带齿隙的系统在输入一单位脉冲后，仿真计算所得的一段输出响应 $y(t)$ 。图中还给出了线性部

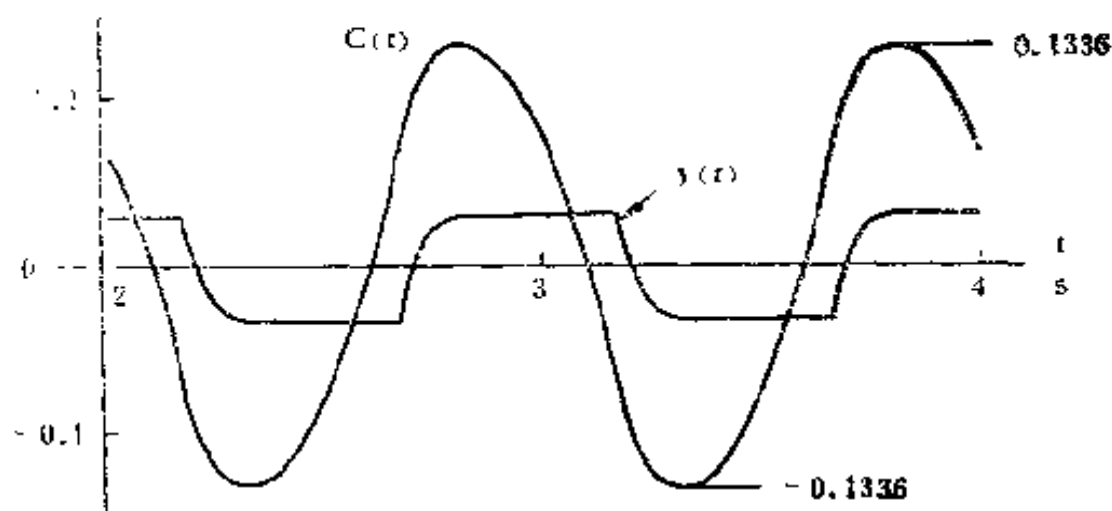


图 6—7 带齿隙的系统的仿真结果

分的输出 $c(t)$ 。

本例中齿隙特性 $\Delta = 0.1$ 。从图6—7可以看到，系统在2.5s以后趋于稳态振荡。非线性元件（齿隙）输入端的振荡幅值为

$$A = 0.1336$$

振荡的周期为0.98s。

作为比较，图6—8列出了用描述函数法所得的结果。图中 $-\frac{1}{N}$ 为齿隙描述函数的负倒特性，特性上标有输入幅值A与齿隙 Δ 的比值 Δ/A 。 $-\frac{1}{N}$ 与线性部分频率特性 $G(j\omega)$ 交点处的 $A/\Delta = 1.45$ ，说明自振荡的幅值为

$$A = 1.45\Delta = 0.145$$

从 $G(j\omega)$ 上还可读得交点处的频率，即自振荡的频率为

$$f = 1.15 \text{ Hz}$$

描述函数法所得的结果与上面仿真计算的结果接近。当然描述函数法本身是一种近似方法。

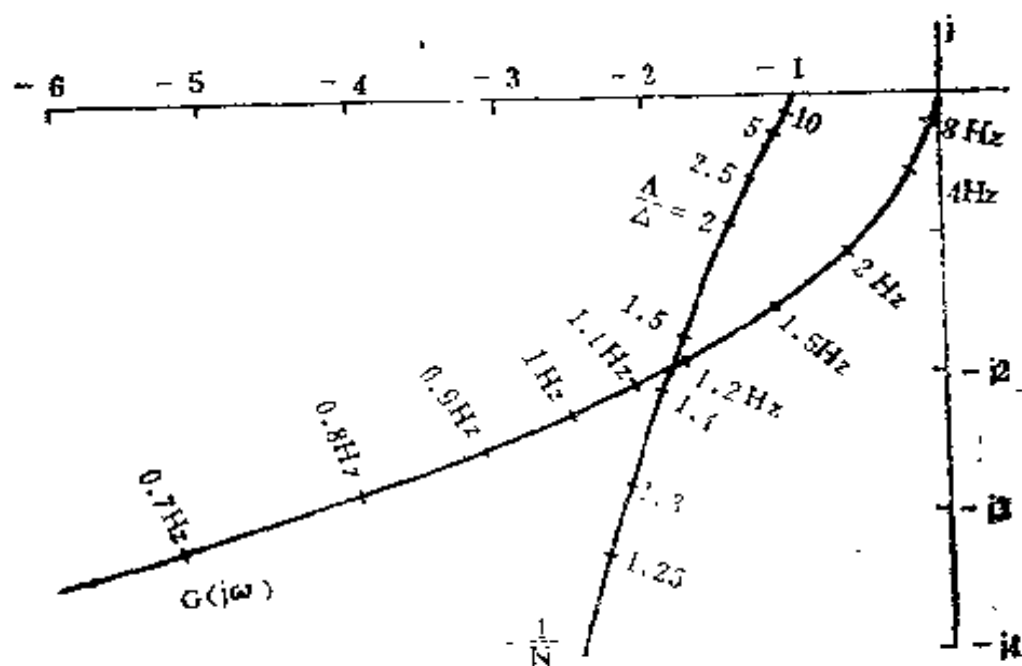


图 6—8 描述函数法的分析结果

除了滞环特性，其他如继电特性等非线性特性也同样可列出相应的仿真程序。这些程序一般说来也都不复杂。若再用零极点匹配法来列写线性部分的仿真程序，那么整个系统的仿真计算将是很简单的，甚至会比用描述函数法（作定量计算）来得简单。

四、大步距仿真法

仿真计算中允许的步距一般是比较小的，例如上面的例子中步距 $\Delta t = 0.002s$ 。由于步距小，计算的点数要多，因而限制了计算速度。

本节要介绍的仿真法可采用较大的步距，一般可大 5 ~ 10 倍。这样就提高了计算速度。另外，由于要计算的点数少了，计算器也可以用来进行仿真研究了，所以本方法的实用意义是比较大的。

下面就说明这个方法。

1. 一阶方程的解

设有一阶方程

$$T_1 \frac{dx}{dt} + x = C \quad (6-38)$$

设方程式的右项C为常数，则可得离散时刻上的解为

$$x(k+1) = x(k) + [C - x(k)] (1 - e^{-\Delta t/T_1}) \quad (6-39)$$

式(6-39)中

$$\begin{aligned} 1 - e^{\Delta t/T_1} &= \frac{\Delta t}{T_1} - \frac{1}{2!} \frac{\Delta t^2}{T_1^2} + \frac{1}{3!} \frac{\Delta t^3}{T_1^3} - \dots \\ &= \Delta t \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{2!} \frac{\Delta t}{T_1^2} + \frac{1}{3!} \frac{\Delta t^2}{T_1^3} - \dots \right) \end{aligned} \quad (6-40)$$

将式(6-40)取作：

$$1 - e^{-\Delta t/T_1} = \frac{\Delta t}{T_0} \quad (9-41)$$

式中的 T_0 就是式(6-40)括号内的数的倒数，除之可得

$$T_0 = T_1 + \frac{\Delta t}{2} \left(1 + \frac{1}{6\varepsilon} - \frac{2}{6! \varepsilon^3} + \frac{2}{7! \varepsilon^6} - \dots \right) \quad (6-42)$$

式中 $\varepsilon = \frac{T_1}{\Delta t}$

式(6-42)表明，当 ε 很大时， T_0 可写成

$$T_0 = T_1 + \frac{\Delta t}{2} \quad (6-43)$$

将此 T_0 值代入式(6-41)，这时式(6-39)就可写成

$$x(k+1) = x(k) + [C - x(k)] \frac{\Delta t}{T_1 + \Delta t/2} \quad (6-44)$$

今后的计算中一般取 $\varepsilon = 10$ 。

一般说来，式(6-38)的右项为一时间函数 $f(t)$ 。

不过当步距 Δt 比较小时，可以认为 $f(t)$ 在两个离散时刻之间为一常数，其值等于中间时刻上的值 $f(k+1/2)$ 。这时式 (6-44) 就改写成

$$x(k+1) = x(k) + \left[f(k + \frac{1}{2}) - x(k) \right] T_1 + \frac{\Delta t}{2} \quad (6-45)$$

式 (6-45) 是今后用来求解一阶方程的基本公式。

有时式 (6-45) 可写成

$$x(k + \frac{1}{2}) = x(k - \frac{1}{2}) + [f(x) - x(k - \frac{1}{2})] T_1 + \frac{\Delta t}{2} \quad (6-45')$$

2. 积分环节的解

积分环节的方程式为

$$T_2 \frac{dx}{dt} = f(t) \quad (6-46)$$

对于这个方程，也认为 $f(t)$ 在两个离散时刻之间为常值，其值等于中间时刻上的值，因而可得离散值为

$$x(k+1) = x(k) + \frac{\Delta t}{T_2} f(k + \frac{1}{2}) \quad (6-47)$$

或

$$x(k + \frac{1}{2}) = x(k - \frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{T_2} f(k) \quad (6-47')$$

3. 二阶系统的解

设一二阶系统的方程式为

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + T_2 \frac{dx}{dt} + x = f(t) \quad (6-48)$$

对于这种系统，一般将它看作是由一个积分环节和一个一阶环节所组成的反馈系统，如图 6-9 所示。

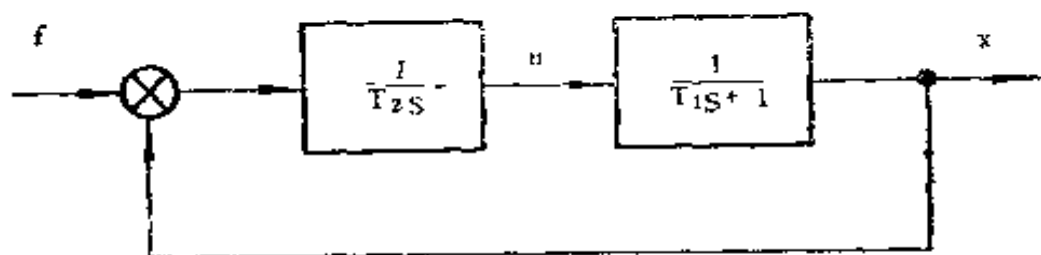


图 6—9 二阶系统的组成

系统中积分环节的输入信号是 $f - x$ ，可以利用式 (6—47') 来计算出中间变量 u 的向前半步的值：

$$u(k + \frac{1}{2}) = u(k - \frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{T_2} [f(k) - x(k)] \quad (6-49)$$

根据算得的 $u(k + \frac{1}{2})$ ，利用式 (6—45) 再计算半步以后的一阶环节的输出 $x(k+1)$ ：

$$x(k+1) = x(k) + \left[u(k + \frac{1}{2}) - x(k) \right] \frac{\Delta t}{T_1 + \frac{\Delta t}{2}} \quad (6-50)$$

求得 $x(k+1)$ 值后，根据 $k+1$ 时刻的输入 $f(k+1)$ ，再用式 (6—49) 和式 (6—50) 来计算 $k+2$ 时刻的 $x(k+2)$ 。这样循环计算就可以得到整个解的离散值序列 $x(k)$ ， $k=0, 1, \dots$ 。

4. n 阶系统的解

一般控制系统都可由上面几种典型环节的不同组合来组成。在对系统进行仿真时也就是象上面对二阶系统的分解那样，将系统分解成用式 (6—45) 和式 (6—47) 来描述的差分方程组，这时就可以用数值方法来进行计算了。

从上面的说明中可以看到本方法的特点是：

- (1) 系统仿真中根据传递函数来列写差分方程时，

所依据的就只是式(6—45)和式(6—47)这两个基本公式。公式中所用的系数均可根据原来传递函数中的系数直接写得。容易使用,也容易记忆。

(2) 系统的离散化模型中的每个环节都是根据输入信号的当时值来推算半步后的输出。可以证明,这样所得到的离散化系统其频率特性与原系统的频率特性一致,在相位上无滞后,因此可以选用比较大的步距。作为比较,设二阶系统中的基本时间常数为 T_1 (图6—9)。如果用零极点匹配法仿真时,步距取 $\Delta t = T_1/(80 \sim 100)$ 所能达到的精度,而用本方法只要取 $\Delta t = T_1/10$ 就可达到。

下面以一时滞系统的仿真计算为例来具体说明这个方法。

设有—PI调节系统,调节器的特性为

$$G_1(s) = K_1 + \frac{1}{\tau_1 s} \quad (6-51)$$

调节对象的特性为

$$G_2(s) = \frac{1}{Ts + 1} e^{-\tau s} \quad (6-52)$$

式中 τ 是调节对象的滞后时间。

本例采用大步距仿真法。取步距 $\Delta t = \tau/4$,即设对象的时滞 τ 由四个步距来构成。图6—10所示即为此系统在干扰 d 作用下的各变量之间的关系。

调节对象是由时滞环节和一阶环节所组成。这个一阶环节的计算公式就是式(6—45),所以整个对象的仿真计算公式为:

$$x(k+1) = x(k) + \left[f\left(k + \frac{1}{2}\right) - x(k) \right] \frac{\Delta t}{T + \frac{\Delta t}{2}} \quad (6-53)$$

—291—

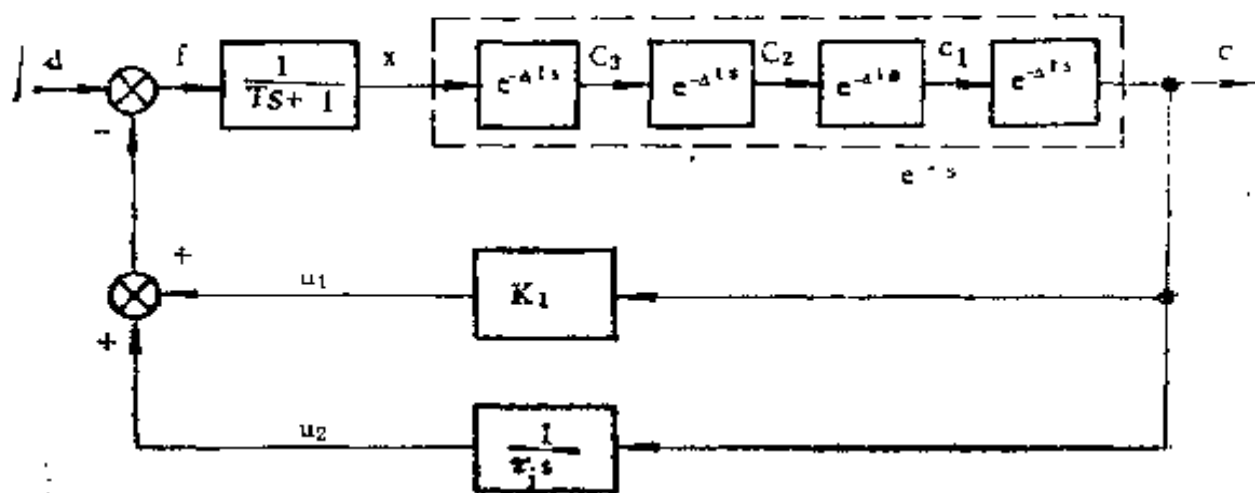


图 6—10 时滞系统的模型

$$c_3(k+1) = x(k) \quad (6-54)$$

$$c_2(k+1) = c_3(k) \quad (6-55)$$

$$c_1(k+1) = c_2(k) \quad (6-56)$$

$$c(k+1) = c_1(k) \quad (6-57)$$

调节规律为比例加积分。积分部分的计算式采用式 (6—47')。比例部分需要 $(k+1/2)$ 时刻的 c 值, 本例中取 k 和 $k+1$ 时刻的平均值作为 $c(k+1/2)$ 。具体的计算公式为

$$\begin{aligned} u_1(k + \frac{1}{2}) &= \frac{K_1}{2} [c(k+1) + c(k)] \\ &= \frac{K_1}{2} [c_1(k) + c(k)] \end{aligned} \quad (6-58)$$

$$u_2(k + \frac{1}{2}) = u_2(k - \frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\tau_i} c(k) \quad (6-59)$$

调节对象的输入 f 可计算如下:

$$f(k + \frac{1}{2}) = d(k + \frac{1}{2}) - u_1(k + \frac{1}{2}) - u_2(k + \frac{1}{2}) \quad (6-60)$$

式中 d 是外干扰。本例中取阶跃干扰，即 $d(t) = 1(t)$ 。

仿真计算的过程如下：根据 $f(k+1/2)$ 值，用式(6—53) ~ (6—57) 计算半个步距后的输出 $c(k+1)$ 。再根据式(6—58) ~ (6—60) 往前计算半个步距，得 $f(k+1+1/2)$ 。用这个 $f(k+1+\frac{1}{2})$ 再来计算下一个 $c(k+2)$ 。这样循环计算就可以得到这个系统在单位阶跃干扰作用下的调节过程了。

式(6—54) ~ (6—57) 代表四个一步延迟。所以实际上真正需要计算的只是式(6—53)、(6—58) 和 (6—59)。因此很容易写出相应的仿真程序，也很容易用(可编程序) 计算器来算。

设调节对象的参数为

$$\tau = 1 \text{ s}, T = 10 \text{ s}$$

取调节器的参数为

$$K_1 = 7, \tau_1 = 1/3 \text{ s}$$

图 6—11就是用此仿真法所算得的调节过程。本例中步距 $\Delta t = \tau/4 = 0.25 \text{ s}$ 。

图 6—11的曲线上第二个峰值与第一个峰值之比为

$$\frac{0.038}{0.144} = 26\%$$

应该说明的是，为了比较，本例中这个调节器参数 K_1 和 τ_1 是根据第四章的表 4—5 确定的。表 4—5 的这套参数公式对应的峰值之比为 20%，是根据模拟实验结果归纳得到的一组通用的整定公式。可以看到，这里的仿真结果与模拟机模拟结果也是吻合的。

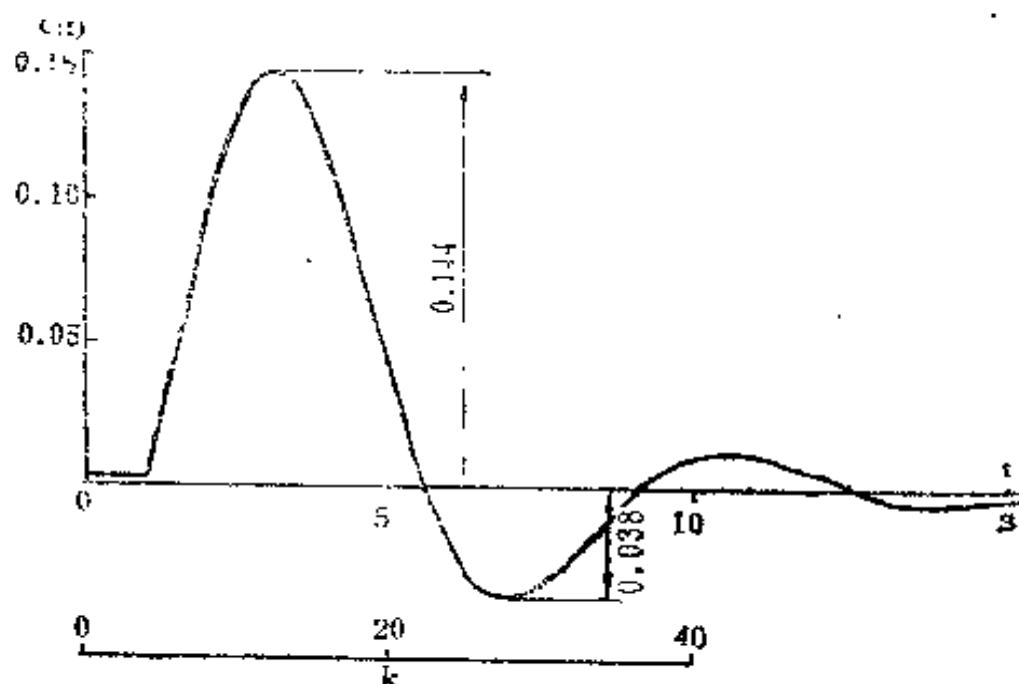


图 6—11 仿真算得的调节过程

参 考 文 献

1. 王广雄: 闭环系统的仿真计算——零极点匹配法, 自动化技术与应用, 4卷1期, 1985。
2. 王广雄: 数字仿真的一种实用技术及其应用, 自动化技术与应用, 3卷2期, 1984。

第七章 控制系统的调试

调试是设计的最后一个环节，通过调试才能实现设计要求。另一方面，通过调试可以发现设计中的问题和没有考虑到的因素，并进而完善设计。本章第一节介绍频率特性的测试，这是调试所必需的基本手段。后两节结合实例说明系统调试的过程以及调试中的问题和解决办法。

一、频率特性的测试

1. 系统频率特性的测试

测试是系统设计中很重要的一步，通过测试主要要解决两方面的问题：

第一，是获取必要的特性和参数。例如元件和对象的参数以及作为更大系统中的一个子系统的特性。这些数据是设计和分析系统所必须的。

第二，整个设计工作最后应该通过测试才能检验其是否满足设计要求并发现设计中的问题。

这里我们不专门研究数据处理问题，而是讨论实际测试时会遇到的问题以及如何解决这些问题。我们主要结合系统频率特性的测试来进行讨论，当然这里的一些方法也可用于测定元件的频率特性。

系统的特性包括开环特性和闭环特性。虽然开环特性往往是设计和分析系统的基础，但测试时一般不能直接测得整个系统的开环特性。这是因为开环增益一般很高，不容易测

出其频率特性。尤其是，

(1) 若系统包含积分环节，测低频时输出将非常大；

(2) 前几级的零漂或零位偏移以及元件的不对称会引起输出角度的很快爬行，往往不等你读完一个数，输出就已经跑到头了。

虽然有时也可利用输出轴上的测速发电机来读输出速率与失调角（误差信号）之间的频率特性 $\dot{\theta}_0(j\omega)/E(j\omega)$ ，但这也只解决了积分环节的读数问题。若系统的开环增益很高，则线路中的零漂或零位偏移也往往会使中间一些线路饱和而无法继续测试下去。所以一般都不直接测整个系统的开环特性。设计用的开环特性往往都是分段测的，分段来测总会忽略一些因素或带来误差。

总之，作为整个系统来说，要测就是测其闭环特性，或者说一定要使系统处在闭环工作状态下才能进行测试，不能将闭环打开。

闭环测试的目的主要是为了校核系统的设计是否正确，系统的性能是否满足设计要求。应该指出的是调试中的系统其稳定裕度并不一定已达到设计要求。测试时可以降低系统的增益，使在有足够稳定裕度的情况下来测系统的闭环频率特性 $\theta_0(j\omega)/\theta_1(j\omega)$ 。测得闭环特性后，利用尼氏图线可求得对应的开环特性 $\theta_0(j\omega)/E(j\omega)$ 。这时再将开环增益乘上测试时缩小的倍数（尼氏曲线平移）便可得到原系统的开环特性了。根据这条特性就可以分析稳定裕度不够的原因，找出设计中的问题，提出必要的校正措施。

测闭环频率特性时，若系统的输入量是机械量（例如轴的转动），那么就需要一个专用的机械的正弦信号发生器。但是

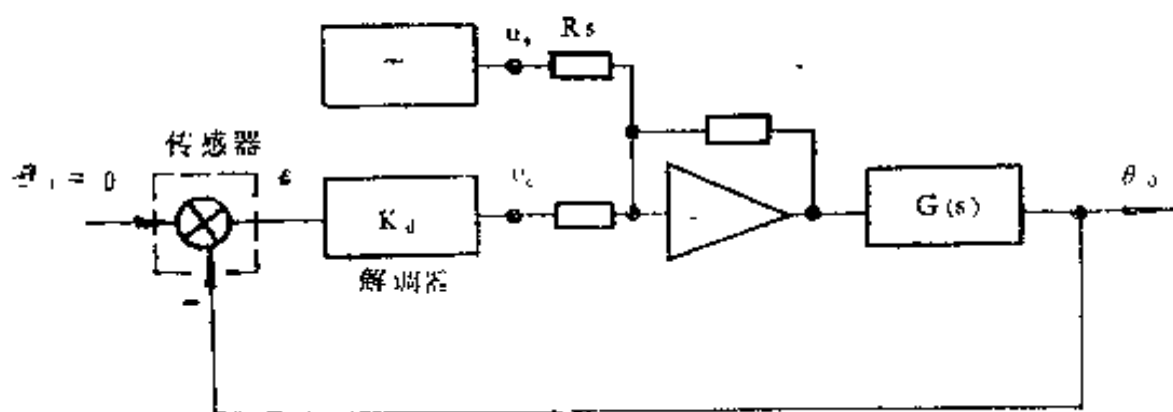


图 7—1 闭环特性的测试

只要系统中有电气信号，也可以用电气的正弦信号发生器来测系统的频率特性。图7—1所示就是这样一种测闭环频率特性的连线图。这里选择原系统中解调器后的一个线性组件1兼作相加放大器用（系统中一般都能找到这样的组件），将正弦信号发生器的输出通过一个电阻 R_s 加到这个运算放大器上。运算放大器的另一个输入电压是解调器的输出 u_d 。这个解调器的输出反映了失调角 $(\theta_i - \theta_o)$ ，即

$$u_d = K_d(\theta_i - \theta_o) \quad (7-1)$$

设相加放大器的增益归到 $G(s)$ ，则根据图7—1可得

$$\begin{aligned} \theta_o(s) &= G(s)[U_s(s) + U_d(s)] \\ &= G(s)[U_s(s) + K_d\theta_i(s) - K_d\theta_o(s)] \end{aligned}$$

现系统的输入轴不动，即 $\theta_i = 0$ ，根据上式整理后可得

$$\frac{U_d(s)}{U_s(s)} = - \frac{K_d G(s)}{1 + K_d G(s)} \quad (7-2)$$

式(7—2)就是系统的闭环特性（负号表示 u_d 和 u_s 的极性相反）。通过这样的线路把系统的输入输出用电压来表示，这样，很多系统就都可以用电气的信号发生器来测系统的闭环频率特性了。由于可以使用通用的测试仪器，大大方便了测试工作，应该指出的是这样测试时系统的工作状态与正常

的工作状态不完全相同。正常工作时系统的失调角(ε)基本上是在零位,而现在这个 ε 则反映输出转角 θ_0 ,这样 ε 变动的范围大了。失调角传感器的精度将直接影响测试精度。

2. 频率特性的读取

测频率特性时所用的正弦信号的频率是很低的,其上限一般为100Hz或稍高一些,下限一般低于0.01Hz。这种信号一般称为超低频。测试时可用记录仪或光线示波器来记录输入和输出波形。输入输出的幅值比和相位差就是频率特性在这一频率下的值。改变不同频率,就可求得整条频率特性。用这种方法来读取频率特性虽然简单,但其应用有一定的限制(例如记录仪不能用于高频,光线示波器测试费用较高),而且测试结果也不太直观。所以这种方法一般是与下列的方法或仪器配合使用的。

(1) 李沙育图形法

将正弦的输入信号和系统的输出分别加到一余辉示波器的x轴和y轴上就可在示波器上得一李沙育图形。我们可以根据李沙育图形来读取信号的相移和幅值。

图7—2表示李沙育图形与输入x和输出y波形的对应点关系。李沙育图形最高点的纵坐标就是输出信号y的幅值A,而y滞后于x的相角可根据坐标a(李沙育图与纵轴的交点)与幅值A的比值算得:

$$\varphi = \arcsin a/A. \quad (7-3)$$

注意到式(7—3)与横轴输入信号的比例无关,因此只要在改变频率时保持系统的输入信号的幅值不变,只需观测纵坐标(a和A)的变化就可读得整个频率特性。

此法对仪器的要求最为简单,只要有余辉示波器就可读数。测试时相位随着频率的变化也可直接看出。

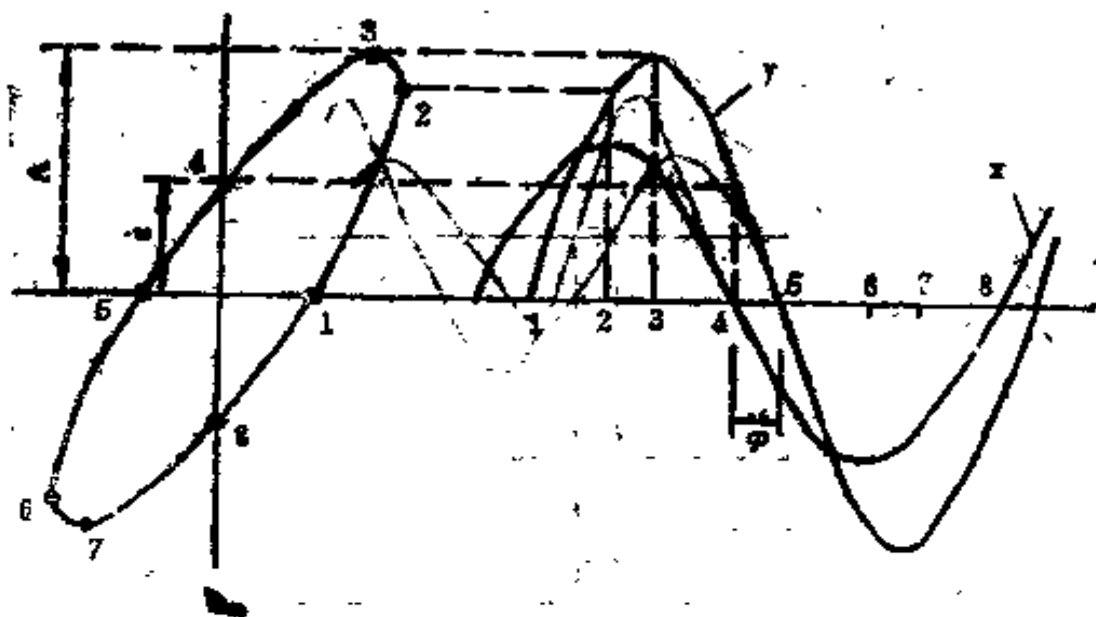


图 7—2 李沙育图形法

(2) 直接测量法

这是指用仪器来直接测量信号的幅值和相位差。早期生产的频率特性测试仪是按这种原理工作的。图7—3就是这类仪器测相的工作原理图。正弦测试信号 x 和系统的输出信号 y 过零的时间差代表了这两信号的相位差。所以可以取检零信号，即过零脉冲，来启闭数字读数系统读取相位差。由于实际信号中往往存在各种噪声，这些噪声信号会影响计数器的启闭，所以这种直接测相法是会有误差的。

这类仪器测幅值时一般是取峰值。由于实际系统中有可能存在非线性因素，输出并不是正弦形的，所以峰值并不就是基波的幅值，因而也有误差。

(3) 相关测量法

现代的频率特性测试仪一般是按相关测量法来工作的。相关测量法是将系统的输出信号与参考信号相乘并求平均，故能有效地抑制谐波和噪声。

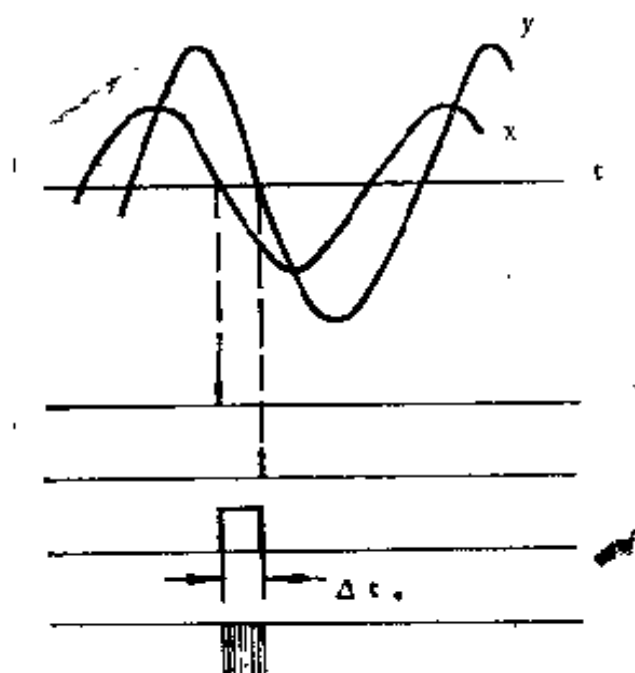
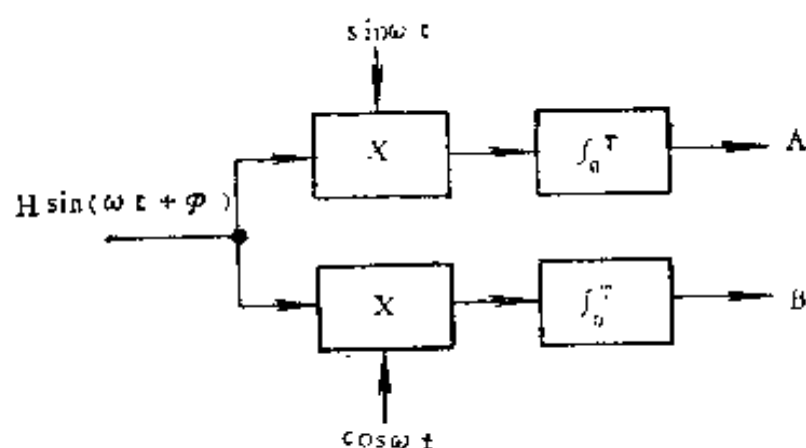


图 7 — 3 直接测量法原理图



7 — 4 相关测量原理图

图7—4是相关测量的原理图。设被测元件在正弦输入作用下的输出是 $H\sin(\omega t + \varphi)$ 。这个信号在上通道中与基准信号 $\sin\omega t$ 相乘，乘法器的输出为

$$H\sin(\omega t + \varphi)\sin\omega t = H[\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)]/2 \quad (7-4)$$

乘法器的输出再经过积分器，积分一个周期。这时谐波项积分为零，输出只留下常数项。取适当的比例系数后可以认为上通道的输出A就是系统的实频特性：

$$A = H \cos \varphi \quad (7-5)$$

下通道的参考信号为 $\cos \omega t$ ，其输出B为系统的虚频特性：

$$B = H \sin \varphi \quad (7-6)$$

有些仪器（例如BT-6）的积分周数是可调的，改变积分的周数能更有效地抑制谐波。

从上面的说明中可以看到，相关测量法给出的是系统的实频特性和虚频特性。根据实频特性A和虚频特性B可求得幅频特性和相频特性为

$$H = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (7-7)$$

$$\varphi = \arctan B/A \quad (7-8)$$

有些仪器可以直接显示出H和 φ 的值。

由于相关测量法采用了求平均的原理，故较直接测量法优越。

二、系统的调试

系统调试的内容与任务有关。对于仿制的系统或重复生产的系统来说，由于系统总的设计问题已经解决，调试主要是校核性质的。这和调试一般就是观察系统的稳定性是否得到保证。所以主要测试一下过渡过程就够了。若稳定裕度不够，就降低一些增益或修改某一特定的参数。在保证稳定的前提下再复查一些其他指标。例如在某一典型信号作用下的误差等。

对于一个新设计的系统来说，就不能采用上述的简单作法。因为现在尚不能保证各参数和增益分配都是合理的。若简单地用降低增益或压低带宽的作法来求得稳定，往往会得出一些似是而非的结论。所以调试的内容应包括测定频率特性，过渡过程以及负载作用下的特性。大信号情况和小信号情况都要作，只有这样才能发现设计中的问题，最后在分析的基础上修改设计，力求得到满意的结果。

下面结合实例来介绍系统的调试。^[1]

1. 系统的初步设计

本节介绍所要调试的系统及其在设计方面的考虑。

设欲设计一个滑环伺服系统。它带动整个滑环轴随动于主轴以确保主轴通过滑环的电气连接。滑环轴上的摩擦力矩由此伺服系统承担，这样主轴就可以在没有摩擦力矩的情况下工作。

滑环轴上的摩擦力矩总和为 $3000\text{g}\cdot\text{cm}$ 。要求的跟踪精度为 0.1° 。

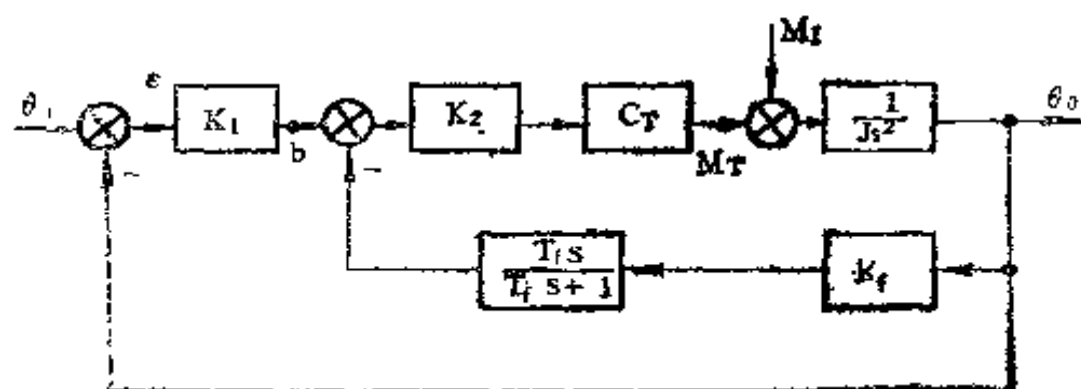


图 7—5 滑环伺服系统

我们初步拟定一个带有测速反馈的控制方案，如图7—5所示。

在初步设计中转动惯量 J 是实测得到的。

$$J = 300 \text{ g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2$$

图7—5中其他两个参数则是根据产品的铭牌数据推算的:

力矩电机在2.45A下的额定力矩为15000g·cm, 故力矩电机SYL—15的力矩系数为

$$C_T = 15000/2.45 = 6100 \text{ g} \cdot \text{cm}/\text{A}$$

测速机CYD—6的额定参数为6V/rad/s, 故测速机的系数为

$$K_f = 6 \text{ V/rad/s}$$

我们知道, 测速反馈回路在有效频段上的特性等效于反馈环节传递函数的倒数。所以该系统在中频段的开环传递函数可写成

$$G(s) \approx \frac{K_1}{T_f K_f} \frac{T_f s + 1}{s^2} \quad (7-9)$$

这是一个典型的I型系统的特性, 图7—6所示就是此中频段的频率特性。

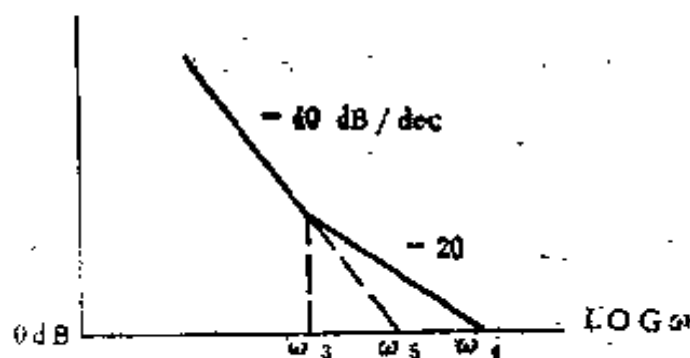


图7—6 中频段频率特性

按一般的设计原则, 取 $\omega_3 = \omega_4/2$, 故根据式(7—9)可写得

$$1/T_f = \omega_3 = \omega_4/2 \quad (7-10)$$

由于此系统对动特性无特殊要求, 所以取系统的带宽为

$$\omega_4 = 40 \text{ rad/s} \quad (7-11)$$

这样，根据式(7—10) 可得时间常数

$$T_f = 0.05 \text{ s} \quad (7-12)$$

根据图7—6和式(7—9) 可写得

$$\frac{K_1}{T_f K_f} = \omega_5^2 = \omega_3 \omega_4 = 800 \text{ s}^{-2}$$

所以得

$$K_1 = 800 T_f K_f = 240 \text{ V/rad} = 4.2 \text{ V/} (^\circ) \quad (7-13)$$

根据系统的技术要求，初步取系统的伺服刚度为

$$S = 10^5 \text{ g} \cdot \text{cm/} (^\circ)$$

这时对应于3000 g·cm摩擦力矩的误差为0.03°。

结合图7—3，系统的伺服刚度为

$$S = K_1 K_2 C_T$$

将 C_T 、 K_1 和 S 的值代入，得

$$K_2 = S / K_1 C_T = 3.9 \text{ A/V} \quad (7-14)$$

至此，系统中的各个参数都已确定完毕。

应该指出的是，图7—5所示系统的数学模型过于简略，因此无法在设计开始阶段对内回路作充分的分析。内回路的稳定性将留待调试中解决。

根据式(7—12) (7—13) (7—14)所给出的参数，具体实现了各相应的电气线路后就可以着手进行调试了。调试时应从最里面的一个回路开始，由里向外，依次进行。下面也就按这个程序来进行介绍。

2. 电流回路的调试

图7—5中 K_2 这个环节实际上是一个功率放大器。为了减少管子的功耗，对力矩电机采取脉冲调宽控制。同时为了尽量简化结构，功率放大器的电源采用不稳压的直流电源。因此为了保证控制性能，我们在线路上采用电流反馈。图

7—7就是这个功率放大线路的原理图。图中a端是输入端。PWM是脉冲调宽型放大器，它通过桥式线路控制力矩电机SYL—15。力矩电机的电流信号是在 0.3Ω 上取得的，经过线性组件3反馈到输入端。线性组件4是起相加放大器的作用。

从图可见，这个功率级是一个完整的反馈回路，称为电流回路。调试时应先测定组成这一回路的各环节的特性。图7—8所示是所测得的脉冲调宽型放大器的静特性。其纵坐标为输出电流，即力矩电机SYL—15的电流 I_a 。

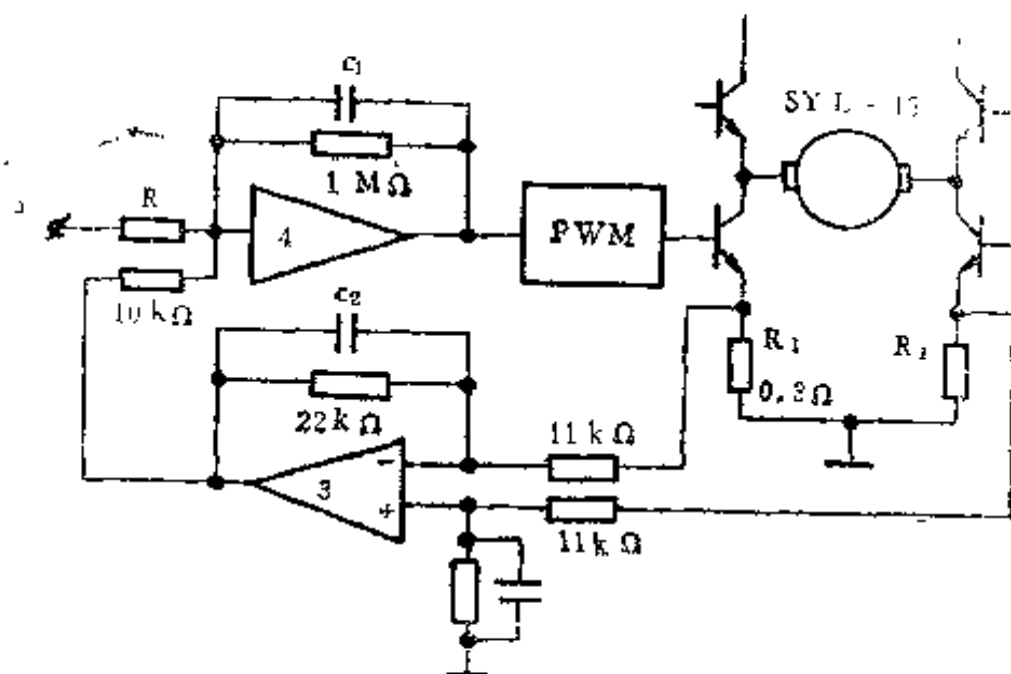


图 7—7 电流回路

从图7—8得此放大器的小信号下的增益为

$$K_{PWM} = 1.57 \text{ A/V} \quad (7-15)$$

这样，再根据图7—7所列的各参数，可得这个电流回路的开环增益为

$$K_i = K_3 K_4 K_{PWM} R_i = 94 \text{ V/V} \quad (7-16)$$

我们需要在调试中解决的一个问题是如何保证在一定的

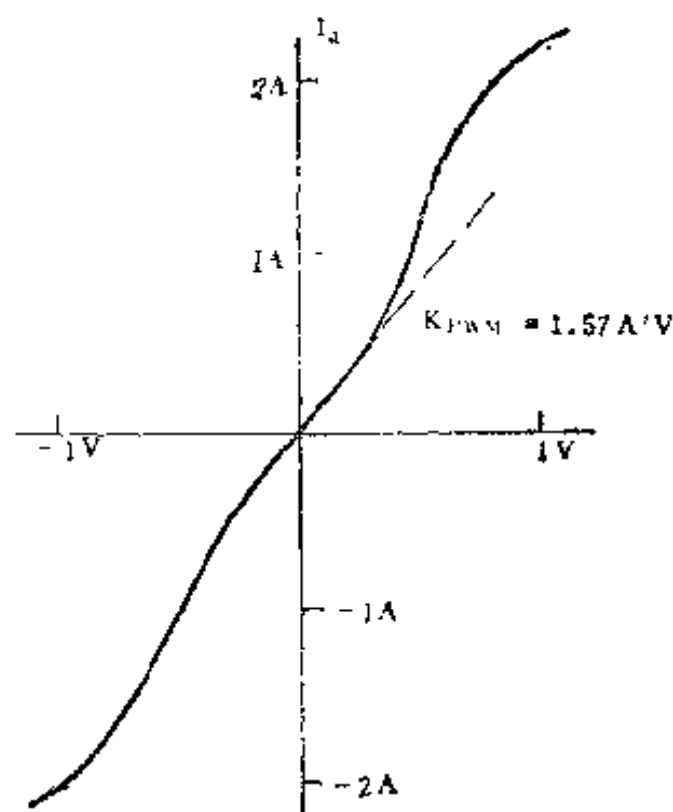


图 7—8 脉冲调宽型放大器静特性

带宽内使此电流回路具有式 (7—14) 所要求的 K_2 值。我们知道，内回路带宽应该为主回路带宽的五倍以上。已知系统的带宽为 40 rad/s [见式 (7—11)]，考虑到这里采用的是脉冲调宽控制，噪声比较大，带宽也不宜过宽，故确定此电流回路的带宽为 40 Hz ，即取

$$\omega_{bi} = 250 \text{ s}^{-1} \quad (7-17)$$

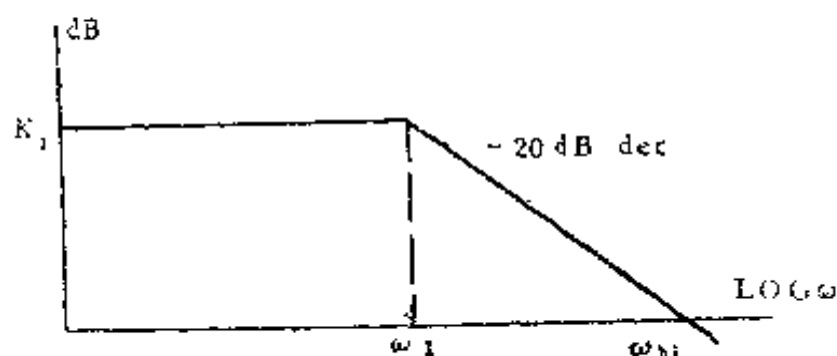


图 7—9 电流回路的开环频率特性

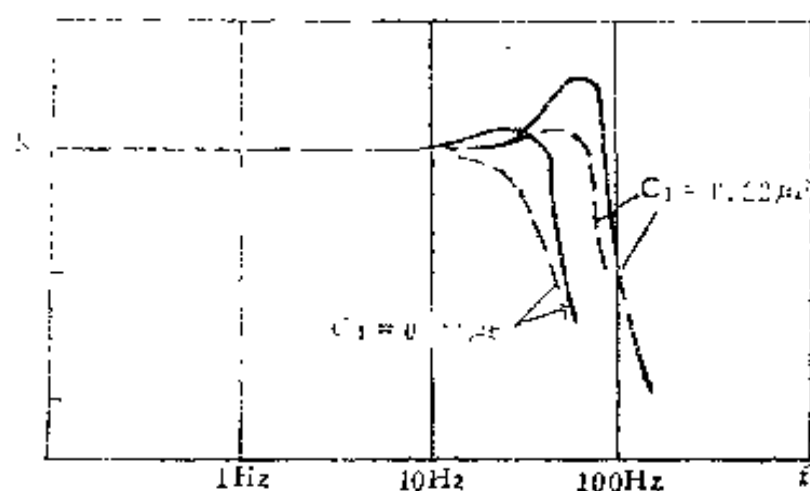
对电流回路来说，这是个零型系统，因此为了使其带宽等于 ω_{b1} ，就应在系统中加一个极点（图7—9）。根据式（7—16）和式（7—17）可得此回路的转折频率 ω_1 为

$$\omega_1 = \omega_{b1} / K_1 = 2.7 \text{ s}^{-1}$$

该转折频率所对应的时间常数为

$$T_1 = 1/\omega_1 = 0.37 \text{ s} \quad (7-18)$$

结合图7—7来考虑，可以在线性组件4的反馈电阻 $1\text{M}\Omega$ 上并联一个电容 C_1 来获得这个时间常数。 C_1 可取 $0.22\mu\text{F}$ 或 $2 \times 0.22\mu\text{F}$ 。图7—10所示为不同 C_1 值时实测得到的电流回路的（闭环）频率特性，图中虚线对应于小信号（ I_a 的幅值为 0.6A ），实线对应于大信号（ 1.3A ）。从图可见，当信号幅值增大、回路频带较宽的时候，稳定性就变差。这是因为脉冲调宽线路实际存在的非线性（见图7—8）和小时间常数所引起的。根据以上分析可以知道，此电流回路中 C_1 取为 $0.44\mu\text{F}$ 是比较合适的，此时小信号的带宽为 40Hz ，这对应于图7—10中衰减到 0.707 的点



7—10 电流回路的频率特性

由于脉冲调宽线路的噪声比较大，故为了抑制噪声，宜在过 0dB 线（图7—9）后再加一转折频率，即在线性组件

3的反馈电阻上再并联一个电容 C_2 。取 $C_2 = 0.1\mu F$ ，其对应的时间常数为 $T_2 = 0.0022 s$ 。

动特性得到保证后，根据初步设计中确定的 K_2 值〔见式(7—14)〕选择输入电阻 R (图7—7)为 $4.3k\Omega$ 。

通过上述调试使电流回路在40Hz的带宽以内具有 $K_2 = 3.9A/V$ 的比例特性。只有这时，图7—5中的系数 K_2 作为常数才有实际意义，才能进一步考虑速率回路的调试问题。

3. 速率回路的调试

图7—11所示就是图7—5中测速反馈回路的实际线路。由测速电机CYD—6来的速率信号经微分环节加到线性组件2上，组件2在线路中兼作解调后信号的滤波器，其输出控制功放级 K_2 ，这个功放级就是上一节已经调好的电流回路。由于功放级的增益还应根据整个回路特性来进一步确定，所以图中特别标出了这个功放级的输入电阻 R 。

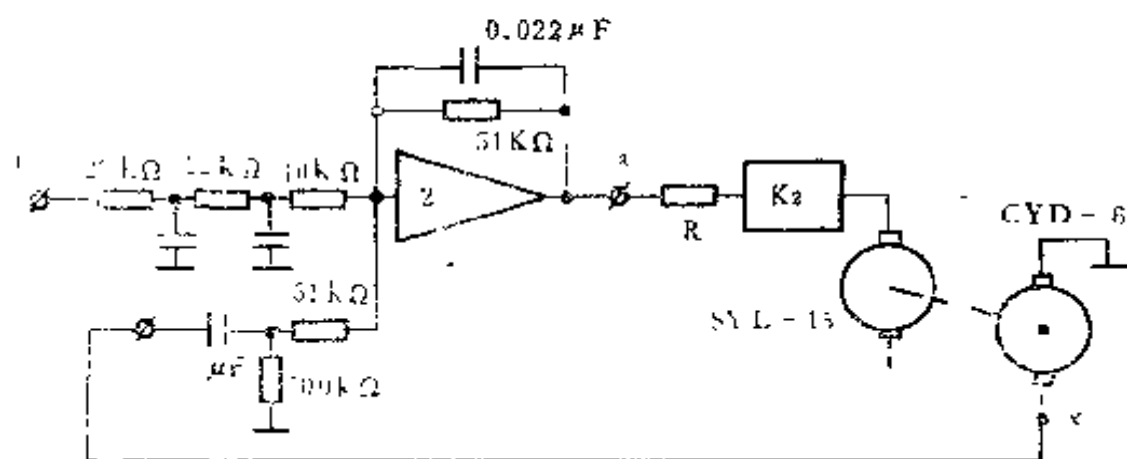


图7—11 速率回路

这样的回路在调试时应首先测定各部件的特性。这包括力矩电机和测速电机的特性，要校核这些外购件的特性是否

满足设计要求以及作一些必要的调整(例如电刷架)。现在这里着重说明一下这个速率回路中的微分环节的特性。根据设计, 这个微分校正环节的传递函数为

$$G_f(s) = \frac{0.05s}{0.05s + 1} \quad (7-19)$$

式(7-19)的特性很容易用RC微分网络来实现, 但是考虑到线性组件2的输入电阻的负载效应, 所以还应该通过调试来确定其参数。选配不同电阻并测定该环节的频率特性, 最后确定的参数见图7-11。对应的频率特性见图7-12所示。图中虚线为理论曲线。图中3Hz对应于该环节的时间常数:

$$T_f = 1 / (2\pi \times 3) = 0.053 \text{ s}$$

这个数值是与所要求的式(7-12)相符合的。

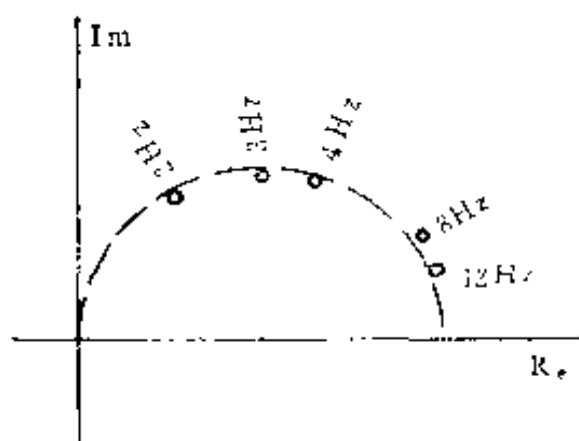


图 7-12 微分校正环节的频率特性

测定了各部件的特性后就可以将回路闭合了。但是在现在的参数下, 发现该速率回路在闭合后, 只要输入信号足够大使其能克服摩擦力就容易出现40~50Hz的振荡。各部件的特性都事先经过测定和校核, 无异常现象。这稳定性问题是由于电流回路引起的。因为其实际特性并不是如图7-5所示为一

常数 K_2 （试比较图7—10之特性）。假如对系统没有特殊要求，可以简单地降低此速率回路的增益以提高其稳定程度。本例中当将图7—11中的 R 从 $4.3\text{k}\Omega$ 提高到 $10\text{k}\Omega$ ，即将 K_1 从 3.9A/V 降为 1.97A/V ，就可以消除振荡，若最后校验系统的跟踪精度不能满足要求，那就得修改设计和重新调试。

参数调试后一般应测定此速率回路的频率特性作为整个伺服回路调试的一个依据。这一部分内容现归在下一节一起讨论。

4. 回路增益的确定和调试

这中回路调好以后就可以来调整整个伺服回路了。我们先测定图7—11速率回路从输入端 b 到测速电机输出端 x 的频率特性。这中输入和输出都是用电压来表示的。图7—13中的 $G_1(j\omega)$ 就是所测得的幅频特性（相频特性略）。根据此特性就可以求取此伺服回路的开环特性 $G(j\omega)$ 。因为从测速电机的端电压，根据测速电机的系数 K_f 可以折算出角速度 $\dot{\theta}_0$ 。再将 $\dot{\theta}_0$ 积分可得输出转角 θ_0 。图7—14表示了这个数据折算关系。图7—13中的 $G(j\omega)$ 就是经过这样折算得到的系统的开环幅频特性（这里设第一级增益 $K_1 = 1\text{V}/(^{\circ})$ ）。

从图7—13的 $G(j\omega)$ 可以看到，系统的增益还可以提高，使 0dB 线（即幅值等于1）移到图中虚线的位置，即可提高 $1/0.26$ 倍。上面假设过这条频率特性对应于 $K_1 = 1\text{V}/(^{\circ})$ ，由此可见，这个系统的信号增益可确定为

$$K_1 = 1/0.26 = 3.8\text{V}/(^{\circ}) \quad (7-20)$$

这个 K_1 值包括了传感器和信号放大部分，现场调试时只要将传感器拨开一个小角度，例如 0.5° ，然后调整信号放大部分的增益，使解调滤波后之输出，即图7—11中组件2输

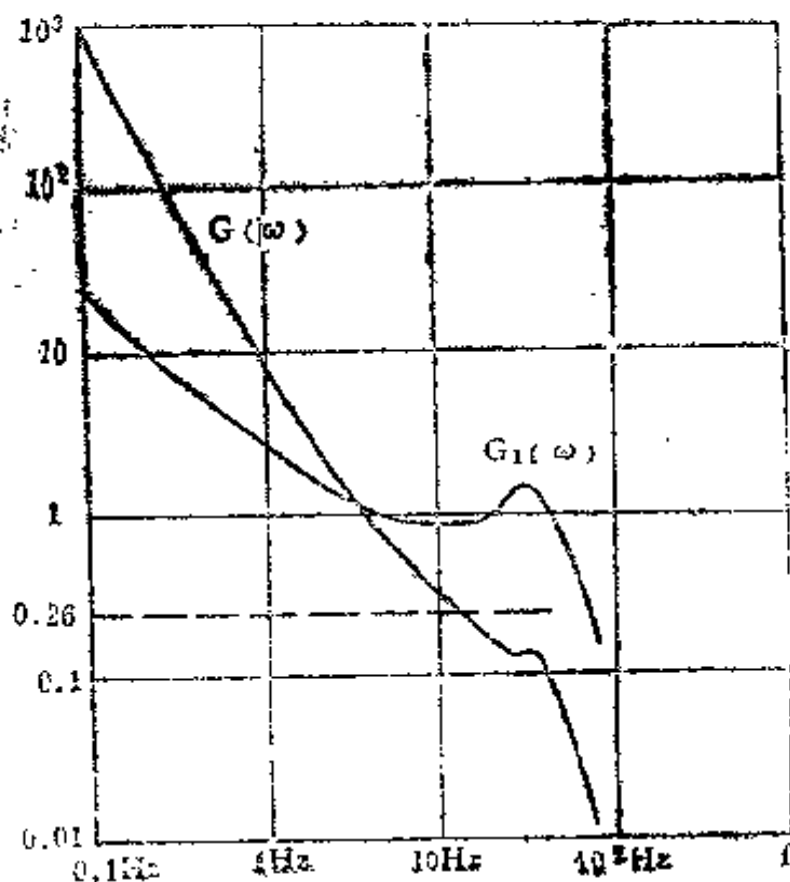


图7-13 系统的开环频率特性

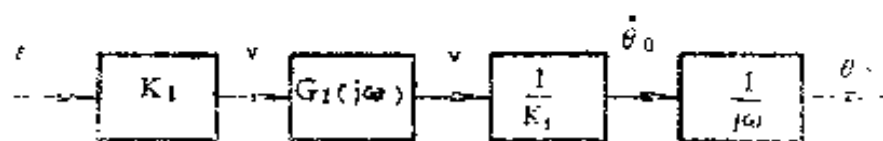


图7-14 系统开环特性的构成

出给之电压满足要求即可。例如失调角为 0.5° ，对应的输出就应该是 3.0V 。

K_1 调试好后就可以将整个系统闭合了。由于上面已经作了比较细致的测定和调试，系统闭合时一般就不会再出现什么问题了。这时只需要观察一下系统的过渡过程，看其稳定程度是否满足要求。若稳定程度稍差或过阻尼，则可再调整一下 K_1 值，使之满足要求。

系统闭合以后还应当校核系统的实际误差。本例经多次实验表明，此系统工作时的误差最大不超过 0.08° 。由于伺服

刚度在初步设计中本来取得偏高，所以，虽然由于速率回路稳定性要求将功放级增益降低了一倍，但系统的实际误差仍小于 0.1° ，满足设计要求。

上面介绍的是一个系统从设计到调试的实际处理过程。从介绍中可以看到，调试应从最里面的一个回路开始，每一步都按设计要求来调试，那么到最后系统闭合时一般就不会遇到困难，而且性能也容易得到保证。

三、振荡因素的分析

调试时除了明显的不稳定外，有时系统会出现小幅值的振荡或者抖动，这也是不希望有的。对于明显的不稳定，一般还比较容易分析。而对小幅值的振荡，则要正确区分，并有针对性地采取措施来抑制它。

1. 振荡的原因

调试时出现小幅值振荡的原因一般有下列三种。

(1) 由于噪声和干扰引起的抖动

这种由噪声引起的抖动一般是随机的，没有一个固定的频率和波形。图7—15所示为这样一条典型的波动曲线。由于噪声信号是始终存在的，所以检查时可将回路打开，这时在信号放大器的输出端仍然能够看到这样的噪声波形。应该注意的是有些噪声是由于工作的机组引起的，所以检查时整个机组都应开着，而系统工作在开环状态。检查时还应弄清楚这噪声是输入噪声还是由负载或其他干扰引起的。若系统的抖动是由于输入噪声引起的，则一般可以降低系统的带宽来减少噪声的影响。若抖动是由于作用在其他点上的干扰引起的，则应该是增加带宽或增益来抑制干扰。

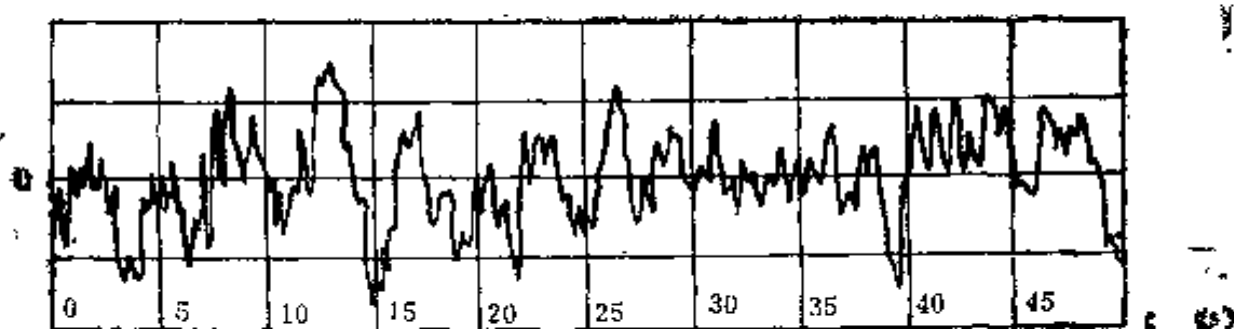


图7—15 随机抖动

(2) 由于系统不稳定而造成的振荡

这种振荡幅值不一定大，但较有规律，基本上为正弦形的，振荡的频率接近或略超过系统的带宽。由于这振荡是不稳定造成的，所以检查时只要将回路打开，在开环状态下来观察信号放大器的输出。若这时放大器的输出是一条平直的直线（偶然的波动除外，因为现在工作在开环状态），就可以说明该系统的振荡是由于闭路引起的，这时应该进一步测试其频率特性，若频率特性表明系统的稳定裕度确实不够，就足以证明系统的振荡是由于不稳定引起的。

这种不稳定的原因有时是因为设计者所用的数学模型是低频模型，当频带较高时已不适用，有时也可能是由于基座等机械谐振频率的限制（见第四章）。设计时若片面地追求增益或带宽指标也容易出现这种不稳定现象。对于这一类振荡一般只要降低系统的带宽或类似的措施就可消除。有时设计者往往把这一类振荡误认为系统中存在干扰，因而不利于问题的解决。

(3) 非线性自振荡

虽然振荡都与非线性有关，但上面的一种振荡其原因是可以用线性理论来解释的，是当线性化系统的特性不满足稳定判据时而导致的振荡。而这里谈的这类振荡则不能用线性

理论来解释，因为这时若单从系统的线性特性来说往往是有足够稳定裕度的。

这类振荡的波形是有规律的周期波形，其频率一般低于或接近系统的带宽。改变系统增益会影响自振荡的参数，但一般不会消除自振荡。图7—16所示为一记录的典型波形，图中a的增益较b者低。

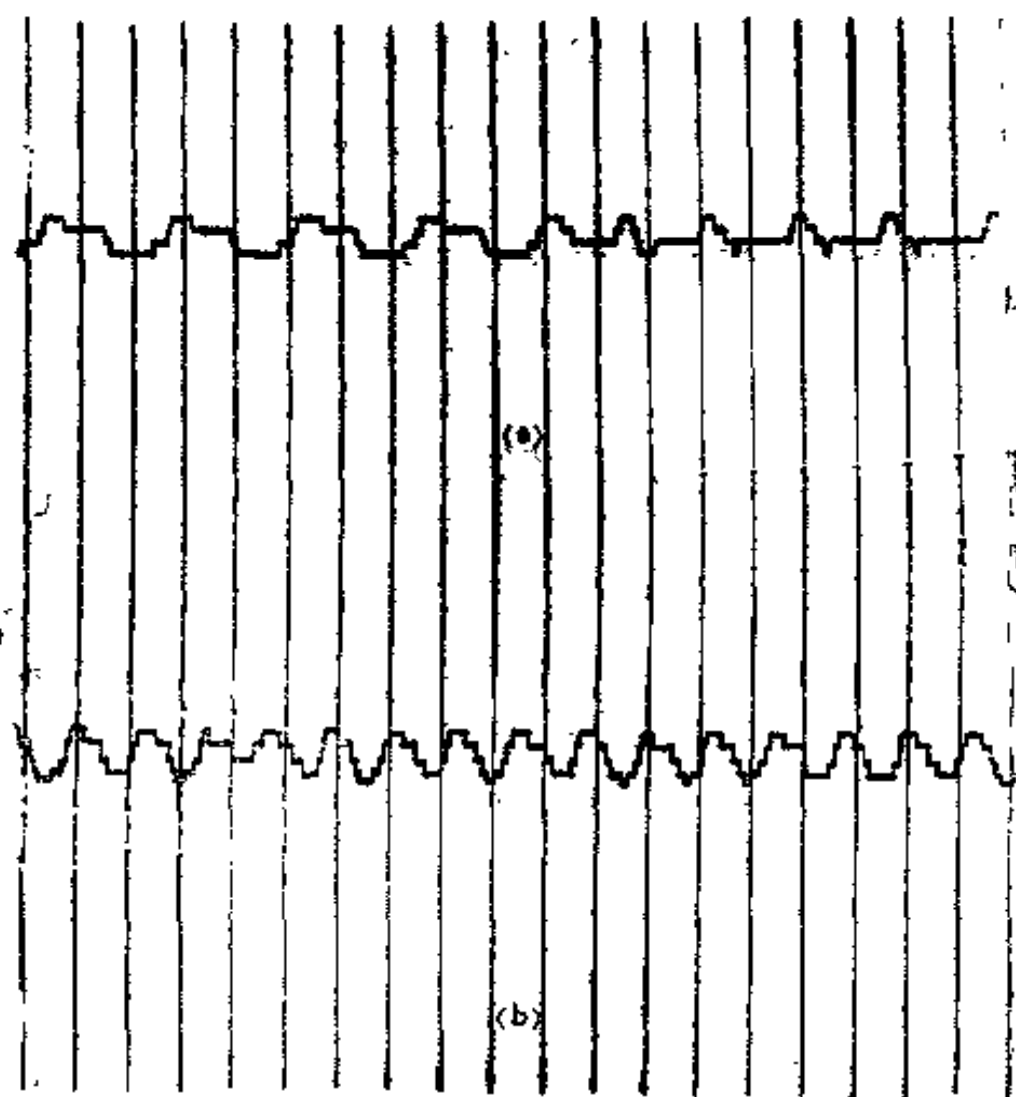


图7—16 自振荡波形

这类自振荡虽然是由于系统中存在非线性而造成的，但这非线性却并不是设计所要求的，且设计者事先也并不一定知道。因此当调试中出现这一类自振荡时先要尽全力找出非

线性因素，然后才能采取相应的措施来抑制自振荡。一般说来，这一类振荡是比较难消除的。

2. 实例分析^[2]

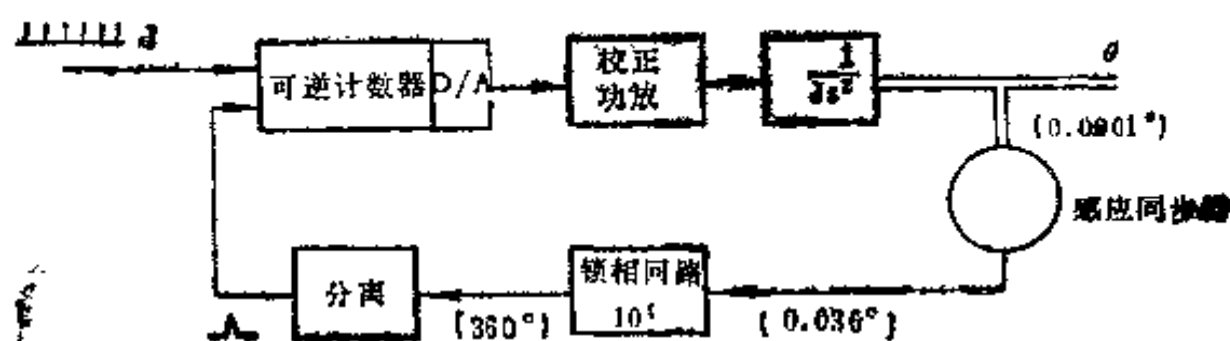


图7—17 高精度伺服系统

设有一高精度伺服系统（图7—17）。此系统用感应同步器作为测角元件。为了保证高精度，这里将角度信号进行数字量化。数字量化线路的核心是高分辨率数字锁相回路^[3]。数字锁相回路主要用在相位上起放大作用，放大 10^4 倍。例如，当机械角变化 0.0001° 时，感应同步器对应的电气角（相位）变化 0.036° ，这个相位变化经数字锁相回路放大为 360° ，即变化一个周波。通过适当的数字线路（分离线路）将这—个周波的变化检出，形成一个脉冲。图7—17中用括号表示了各量之间的变换关系。这样，角度每变化 0.0001° 就送出—个脉冲。这就是所谓的增量编码。代表角度增量的脉冲再送到作为比较环节的可逆计数器，实现反馈控制。这系统的给定信号是以数字形式给出的d脉冲。d脉冲等于零时就是位置工作状态。

调试中发现该系统在位置工作状态下有波动。图7—16a就是在数模转换器输出端所看到的波形。该图的时标是 $0.1s$ ，波形上的增量代表—个量化当量。图7—16b是回路增益提高后的波形。对于这种波动，曾通过实验排除了各种因素，最

后判断是由于非线性引起的。但所研究的系统是采用交流力矩电机直接传动的，轴承为气浮轴承，既无摩擦，传动中又无齿隙。各元件的工作又都设计在线性范围内。那么自振荡的原因究竟是什么呢？进一步实验分析表明，自振荡的原因在角度编码线路中，是锁相回路中压控振荡器的牵制引起的。

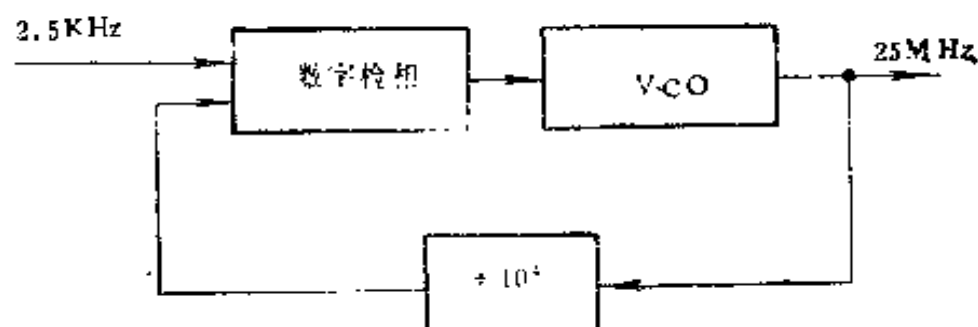


图7—16 锁相回路

图7—18是锁相回路的原理图。压控振荡器 VCO 的输出经 10^4 分频后与输入的感应同步器的 2.5kHz 进行比相。2.5kHz 的相位变化 0.036° 时，压控振荡器的 25MHz 上就变化一个周波 (360°)。这个相位变化通过随后的分离线路转换成一个脉冲，形成增量编码线路的输出。一个脉冲代表角度增量 0.0001° 。下面所介绍的实验工作是在一试验台上进行的。由于试验台上感应同步器的结构和其他线路的限制，试验线路中一个脉冲的当量是 0.0004° (即 $1.44''$)。

图7—19是压控振荡器的特性曲线。压控振荡器的中心频率为 $f_0 = 25\text{MHz}$ ，中心频率处的线性化特性 (见图中虚线) 为

$$K_f = \frac{\Delta f}{\Delta V} = 75\text{kHz/v} \quad (7-21)$$

实际使用中，在锁相回路的分离线路中存在着另一个 25MHz 的信号源，由于这个信号源的影响，压控振荡器的频率在 25MHz 附近会被牵制在这个外界的 25MHz 上，而不随输

入信号（电压）的变化而变化。这就是所谓的频率牵引。所以压控振荡器的实际特性如图7—19中实线所示。根据实验测定，此线路的牵引频带为

$$\Delta \approx 1000 \text{ Hz}.$$
(7—22)

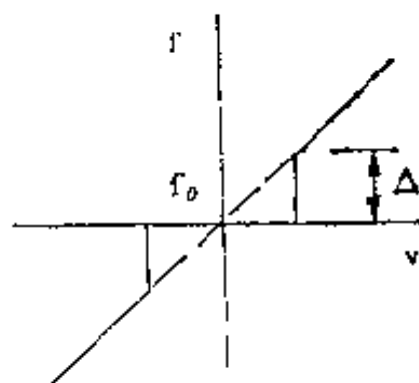


图7—19 压控振荡器特性

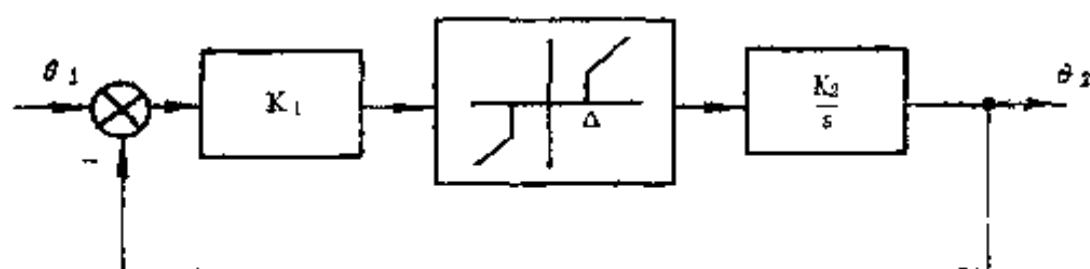


图7—20 归算后的锁相回路

图7—20 是经过归算以后的锁相回路的框图，图中输入和输出均用系统的机械转角来表示。图中非线性特性后面的是频率到相角的积分关系。非线性特性前面的增益 K_1 与压控振荡器的前放级有关，是可调的。锁相回路中尚有滤波线路，因其时间常数较小，在所研究的频带内可略去不计。图7—20中的各参数为

$$\begin{aligned} K_1 &= 1417.5 \times 10^3 \text{ Hz}/(^{\circ}) \\ K_2 &= 2 \times 10^4 \text{ s}^{-1} \\ \Delta &= 1000 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (7-23)$$

现将这个锁相回路作为一个环节来考虑。图7—20 中有

积分环节，所以这个锁相回路的描述函数也与频率有关。图7—21所示即为比描述函数的负倒特性 ($-1/N$)。这描述函数是根据模拟实验求得的，每一条特性对应一个频率值。从图可以看到，这一簇曲线均自曲线1分出。描述函数上标有 ε 与输入的正弦幅值 A 的比值。这 ε 是归算到输入端的牵引频带 Δ ，即

$$\varepsilon = \Delta / K_1 = 2.54'' \quad (7-24)$$

图7—21表明，由于压控振荡器的牵引特性，伺服系统的测角编码线路呈现出非线性特性，其描述函数的负倒特性分布在第三象限。而高精度伺服系统一般都是 I 型系统，其线性分部的频率特性横穿第三象限，两者必然相交。这就是这类系统产生自振荡的原因。

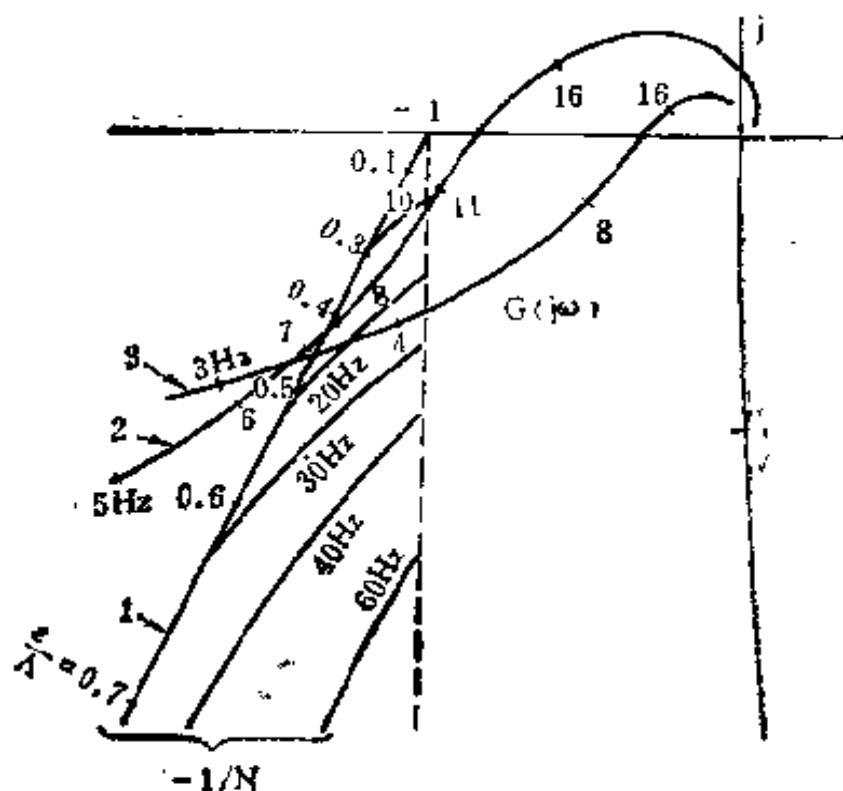


图7—21 自振荡的描述函数法分析

图7—21中 $G(j\omega)$ 就是此系统线性部分的频率特性。曲线2对应于开环增益 $K = 1195 \text{ s}^{-2}$ ，曲线3则对应于 $K = 478 \text{ s}^{-2}$ 。

频率特性与 $-1/N$ 的交点处的参数见下表。

表7—1 描述函数法求得的自振荡参数

K	f	ε/A	$\theta_{1\max} = A$	$\theta_{2\max}$
478 s ⁻²	3.5Hz	0.45	5.64"	3.10"
1195 s ⁻²	7.4Hz	0.42	6.05"	3.51"

表中 θ_1 是非线性环节的输入，其幅值为A。至于实验所观察到的则是输出 θ_2 ，其幅值

$$\theta_{2\max} = \theta_{1\max} - \varepsilon = (\theta_{1\max} - 2.54)'' \quad (7-25)$$

表7—1中也列有对应的 $\theta_{2\max}$ 值。

设 $K = 478 \text{ s}^{-2}$ 。表7—1中用描述函数法所得的幅值是 $\theta_{2\max} = 3.10''$ 。这个实验系统中每一个字的当量是 $1.44''$ ，故这个幅值对应2个字（峰—峰值4个字）。图7—16a就是实际系统在D/A输出上所看到的这个振荡波形。图7—16b则是对应于 $K = 1195 \text{ s}^{-2}$ 时的振荡波形。图7—16中的时标是1.1秒，故从图可以读得图a的自振荡频率约为4Hz，图b的自振荡频率约为8Hz。由此可见，实验结果与理论分析是相符的。

弄清了产生自振荡的原因，就可以设法来改善或消除自振荡了。一种措施就是提高锁相回路的增益 K_1 （图7—20）。设 K_1 提高到

$$K_1 = 4725 \times 10^3 \text{ Hz}/(^{\circ}) \quad (7-26)$$

这时对应的 $\varepsilon = \Delta/K_1 = 0.76''$ 。

K_1 提高后的描述函数其高频部分是有变化的，不过与 $G(j\omega)$ 相交的低频部分 $-1/N$ 特性基本上与图7—21的一样（曲线1）。设系统为高增益，即 $K = 1195 \text{ s}^{-2}$ ，从图7—21可读得交点处 $\varepsilon/A = 0.42$ ，所以

$$\theta_{1\max} = \varepsilon / 0.42 = 1.81''$$

对应的锁相回路输出的幅值为

$$\theta_{2\max} = \theta_{1\max} - \varepsilon = 1.05''$$

这个数值已不足一个当量 $1.44''$ ，所以不能激发起系统的振荡。图7—22就是这组参数下实际系统在D/A输出处所看到的波形，此时系统已不存在自振荡。从图中可以看到系统有一个字的波动，这是数字系统的正常工作状态。

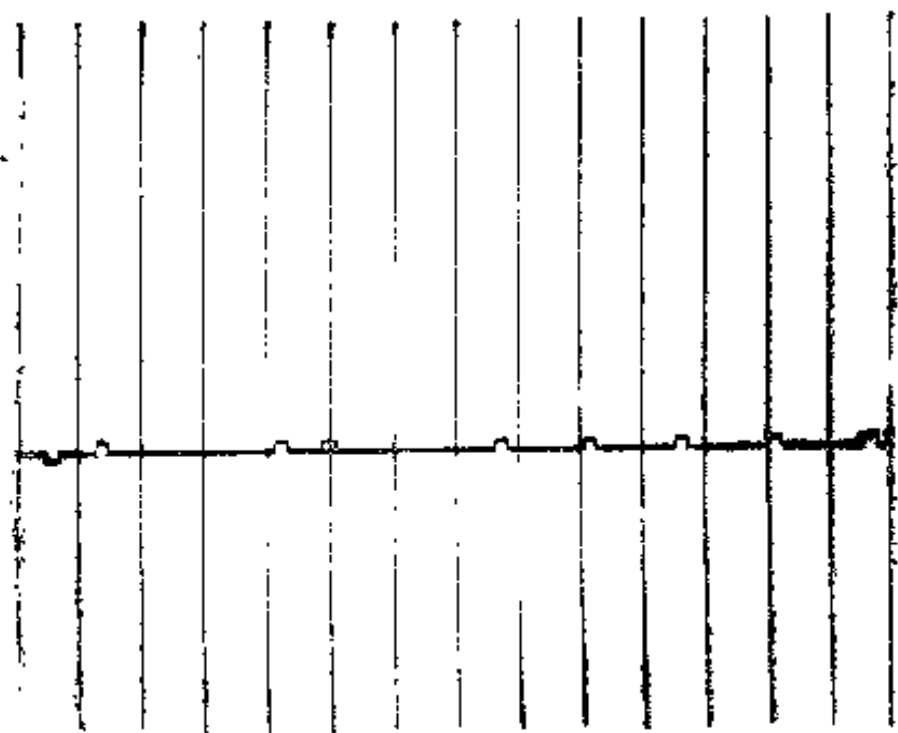


图7—22 自振荡消除后的波形

参 考 文 献

- 1 王广雄：滑环伺服系统的设计，自动化技术与应用，1卷2期，1982。
- 2、王广雄，苏宝库，姚一新：高精度伺服系统中的一类自振荡信息与控制，13卷4期，1984。
- 3、王广雄，苏宝库：高分辨率数字锁相回路的设计，自动化学报，6卷3期，1980。