磁悬浮小球系统

——陈若愚 2020-06-10

1. 系统模型：

磁悬浮球系统采用固高公司的 GML2001 型，其具体的工作图如图 1 所示，硬件部分由功放电路、驱动电路、电磁铁和红外测距传感器组成。

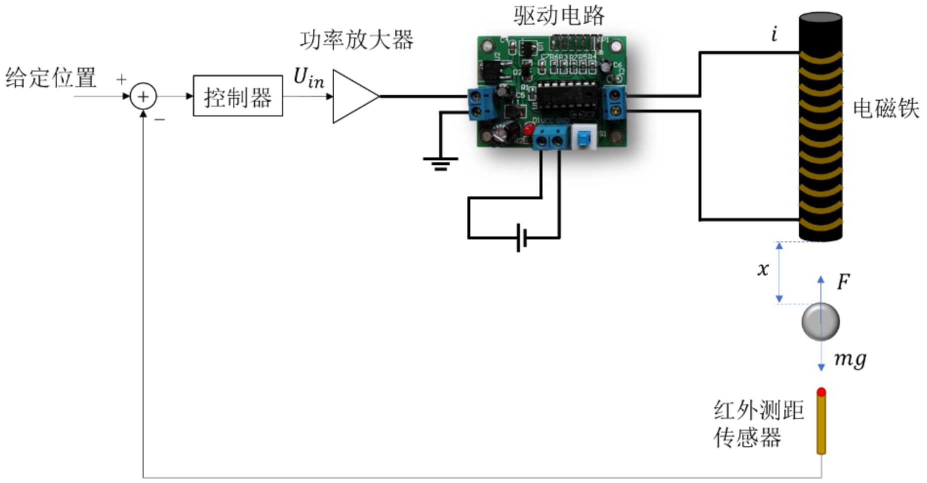

图 1. 磁悬浮系统工作原理图

2. 参数定义：

定义一下必要的几个参数以及对应的参数的说明，以及设定，如表 1 所示：

表 1. 磁悬浮球系统参数说明

符号	含义	单位
m	钢球重量	kg
μ_0	真空磁导率	H/m
A	磁导截面积	m^2
N	电磁铁线圈匝数	*匝*
i_0	平衡电流	A
x_0	平衡位移	m
K_a	功率放大器增益	\

3. 系统模型：

首先构建系统的动态方程：
由小球的位移得：

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(i,x) + mg \tag{1}$$

其中x表示小球与电磁铁的距离，$F(i,x)$是小球所受的电磁力，其大小与电磁铁电流i与小球与电磁铁距离x有关：

$$F(i,x) = K\left(\frac{i}{x}\right)^2 \tag{2}$$

若小球动态平衡：

$$F(i_0,x_0) + mg = 0 \tag{3}$$

其中(i_0,x_0)代表平衡位置时，电磁铁电流i与小球位置x。

控制器输入电压与电磁铁电流关系：

$$U_{in} = K_a i \tag{4}$$

将电磁铁吸力F在平衡点处泰勒级数展开：

$$F(i,x) = F(i_0,x_0) + \frac{\mu_0 N^2 i_0 A}{2{x_0}^2} i - \frac{\mu_0 N^2 {i_0}^2 A}{2{x_0}^3} x \tag{5}$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{\mu_0 N^2 i_0 A}{2{x_0}^2} i - \frac{\mu_0 N^2 {i_0}^2 A}{2{x_0}^3} x \tag{6}$$

选择U_{in}作为控制器信号输入，则在平衡点处线性化模型：

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{\mu_0 N^2 i_0 A}{2m{x_0}^2 K_a} U_{in} - \frac{\mu_0 N^2 {i_0}^2 A}{2m{x_0}^3} x \tag{7}$$

对(7)式进行拉氏变换：

$$s^2 X(s) = \frac{\mu_0 N^2 i_0 A}{2m{x_0}^2 K_a} U_{in}(s) - \frac{\mu_0 N^2 {i_0}^2 A}{2m{x_0}^3} X(s) \tag{8}$$

则，将$X(s)$作为系统输出信号，$U_{in}(s)$作为系统的输入信号，整理得传递函数：

$$G(s) = \frac{\frac{\mu_0 N^2 i_0 A}{2m{x_0}^2 K_a}}{s^2 + \frac{\mu_0 N^2 {i_0}^2 A}{2m{x_0}^3}} \tag{9}$$

选取系统状态变量：$x_1 = x(t)$，$x_2 = \dot{x}(t)$, 取控制输入$u = U_{in}(t)$，即可获得理想状况下磁悬浮系统的状态空间模型：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{\mu_0 N^2 {i_0}^2 A}{2m{x_0}^3} x_1 + \frac{\mu_0 N^2 i_0 A}{2m{x_0}^2 K_a} u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{10}$$

其系统框图如图 2 所示：

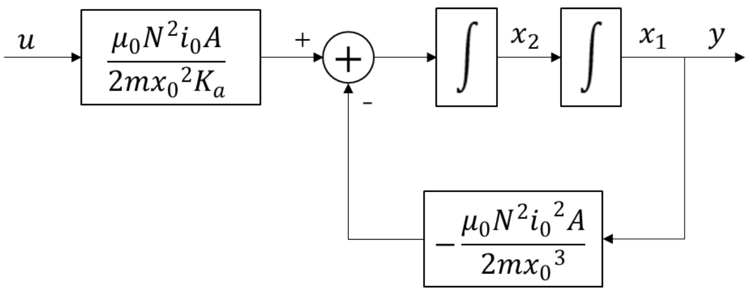

图 2：理想条件下磁悬浮球控制系统状态框图

但是实际上现实模型并不理想，线圈的耦合，以及扰动都有可能影响该磁悬浮系统，因此实际的磁悬浮球系统状态空间模型可如下表示：

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = -\dfrac{\mu_0 N^2 {i_0}^2 A}{2m{x_0}^3} x_1 + \dfrac{\mu_0 N^2 i_0 A}{2m{x_0}^2 K_a} u + f(x_1, x_2) + w \\
y = x_1
\end{cases} \tag{11}
$$

其中w代表外部扰动，$f(x_1,x_2)$代表由状态系统原因导致的反馈，即x_1,x_2对系统的影响，系统框图如图 3 所示。

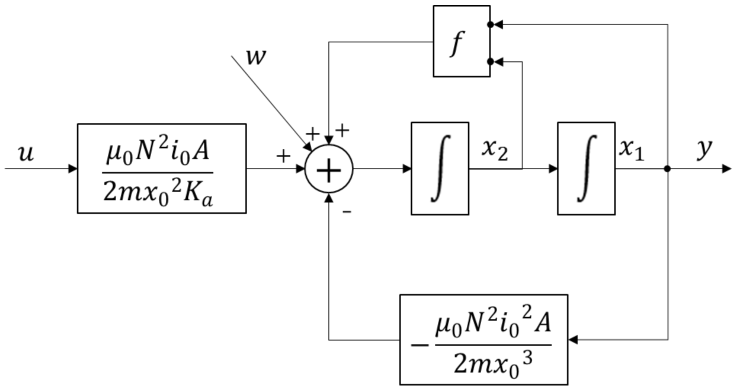

图 3：磁悬浮球控制系统状态框图

参考文献

[1] 张鋆豪，张文安．磁悬浮球系统的线性自抗扰控制与参数整定[J]. 系统科学与数学，2017(37):1756.