第二章 控制系统状态空间表达式的解

建立了控制系统的状态空间表达式后，本章讨论求解问题。

第二章 控制系统状态空间表达式的解

状态空间模式的数学模型的建立　　（前一章讨论的内容）

系统数学模型的分析　　（接下来三章的内容）

揭示系统状态的运动规律和基本特性

定量分析

确定系统由外部激励作用所引起的响应

状态方程的求解问题

运动规律的精确结果

定性分析

决定系统行为的关键性质

能控性、能观测性

稳定性

2.1 线性定常(时不变)(LTI)系统齐次状态方程的解

线性定常系统的运动可分为：

1、自由运动：

$$\xrightarrow{u=0}\boxed{\begin{array}{c}\Sigma=(A,B)\\ x(t_0)=x_0\end{array}}\xrightarrow{x}$$

状态方程：

齐次方程 $\dot{x}=Ax,\quad x(t_0)=x_0$

2、强迫运动：

状态方程：

非齐次方程 $\dot{x}=Ax+Bu,\quad x(t_0)=x_0$

齐次状态方程：$\dot{x}(t) = Ax(t)$ 控制输入为零

(1) 若A为标量，有：$\dot{x}(t) = ax(t)$

设初始时刻 t_0=0, 则 $x(t) = \mathrm{e}^{at}x(0) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(at)^k}{k!}x(0)$

(2) 若A为方阵，

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k x(0) = \mathrm{e}^{At}x(0) \quad ?}$$

验证 $\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!}x(0) = A\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k t^k}{k!}x(0) = Ax(t);$

级数矩阵 $\mathrm{e}^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(At)^k}{k!}$ 称为**矩阵指数**。

结论：方程 $\dot{x}(t)=Ax(t)$ 满足初始条件 $x(t)|_{t=t_0}=x(t_0)$

的解为

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k x(t_0) \\ &= \mathrm{e}^{A(t-t_0)}x(t_0) \end{aligned}}$$

当 $t_0=0$ 时，有

$$x(t)=\mathrm{e}^{At}x(0)$$

此解是系统输入u=0时的解，故称为零输入解或零输入响应或自由解。

证明：假设 $x(t)=b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_kt^k+\cdots$

则： $\dot{x}(t)=b_1+2b_2t+3b_3t^2+\cdots+kb_kt^{k-1}+\cdots$

代入齐次状态方程得：

$$b_1+2b_2t+3b_3t^2+\cdots+kb_kt^{k-1}+\cdots$$
$$=A(b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_kt^k+\cdots)$$

两边比较系数，有：

$$b_1=Ab_0$$

$$b_2=\frac{1}{2}Ab_1=\frac{1}{2!}A^2b_0$$

$$b_3=\frac{1}{3}Ab_2=\frac{1}{3!}A^3b_0$$

$$b_k=\frac{1}{k}Ab_{k-1}=\frac{1}{k!}A^kb_0$$

$\cdots\quad\cdots$

代入得：

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots$$

$$= (I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \cdots)b_0$$

由于： $b_0 = x(0)=x_0$

$$x(t) = (I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \cdots)x_0 = (\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k)x_0$$

定义： $e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \cdots$

于是，齐次状态方程的解可表示为：

$$x(t) = e^{At}x_0$$

例 已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 求 e^{At}

解:

$$\mathrm{e}^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\frac{1}{4!}A^4t^4+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & t\\ -t & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}-t^2 & 0\\ 0 & -t^2\end{bmatrix}+\frac{1}{3!}\begin{bmatrix}0 & -t^3\\ t^3 & 0\end{bmatrix}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots & t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots\\ -\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots\right) & 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}.$$

2.2 矩阵指数函数—状态转移矩阵

2.2.1 状态转移矩阵

线性定常系统齐次状态方程 $\dot{x} = Ax$ 的解

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}x(t_0) \qquad t \geq t_0$$

(1) 反映了从初始状态 $x(t_0)$到任意时刻的状态向量 $x(t)$ 的一种变换关系。变换矩阵就是矩阵指数函数 $\mathrm{e}^{A(t-t_0)}$。

(2) 定义, $\Phi(t,t_0) = \Phi(t-t_0) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}$ 称为状态转移矩阵。

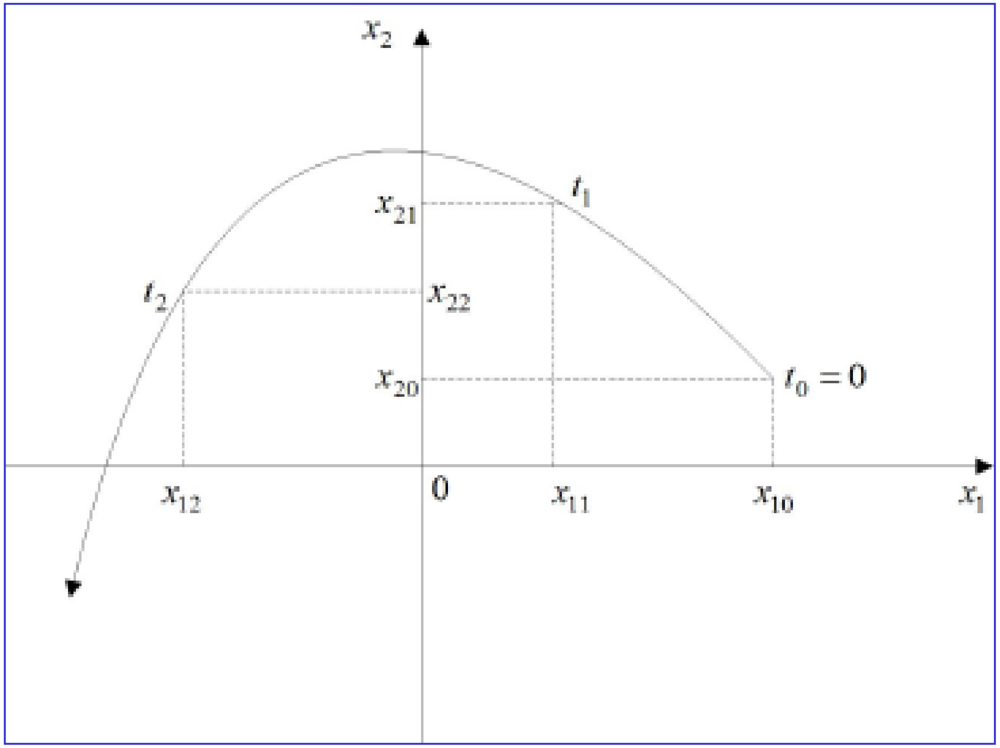
这样，线性系统的自由解又可表示

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0)$$

(3) 当$t_0 = 0$时，状态转移矩阵为 $\Phi(t) = \mathrm{e}^{At}$

状态方程解为 $x(t) = \Phi(t)x(0)$

状态转移矩阵的几何意义



$$x(t_1)=\Phi(t_1)x(0)$$

$$x(t_2)=\Phi(t_2)x(0)$$

$$x(t_2)=\Phi(t_2-t_1)x(t_1)$$

代入比较，得

$$\Phi(t_2)=\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1)$$

$$e^{At_2}=e^{A(t_2-t_1)}e^{At_1}$$

矩阵指数和状态转移矩阵是从两个不同的角度所提出来的概念，矩阵指数是一个数学函数的概念，而状态转移矩阵是表征从初始状态到t时刻状态之间的转移关系。

2.2.2 转移矩阵的基本性质

1、组合性（分解性）

$$\Phi(t_1+t_2)=\Phi(t_1)\Phi(t_2)$$

$$\Phi(t_1+t_2)=\Phi(t_1-(-t_2))$$
$$=\Phi(t_1-0)\Phi(0-(-t_2))=\Phi(t_1)\Phi(t_2).$$

2、 $$\Phi(0)=\Phi(t-t)=e^{A0}=I$$

3、可逆性 $$\Phi^{-1}(t)=[\Phi(t)]^{-1}=\Phi(-t)$$

$$[e^{At}]^{-1}=e^{-At}$$

$$\Phi^{-1}(t-t_0)=\Phi(t_0-t)$$

$$\Phi(t-t_0)\Phi(t_0-t)=e^{A(t-t_0)}e^{A(t_0-t)}=e^{A\cdot 0}=I$$

2.2 矩阵指数函数—状态转移矩阵

$$\mathrm{e}^{(A+B)t} = I + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A+B)^2 t^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3 t^3 + \cdots$$

$$= I + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A^2 + AB + BA + B^2)t^2 + \cdots$$

$$\mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{Bt} = (I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots)(I + Bt + \frac{1}{2!}B^2t^2 + \cdots)$$

$$= I + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2)t^2 + \cdots$$

$$e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$$

2.2.3 几个特殊的矩阵指数函数

1、若A为对角阵

$$A=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\Rightarrow e^{At}=\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

2、若A能通过非奇异变换对角化，即若有 $T^{-1}AT=\Lambda$

则

$$e^{At}=\Phi(t)=T\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}T^{-1}$$

3、若A为Jordan矩阵

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$e^{At}=e^{Jt}=e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

4、若

$$A=\begin{bmatrix}\sigma & \omega \\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}$$

则

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}e^{\sigma t}$$

对照

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathrm{e}^{At}=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$$

2.2.4 矩阵指数的计算

1、根据定义直接计算

【例2—1】已知系统矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$ 求 e^{At}

解:

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}t+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}^2t^2+\frac{1}{3!}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}t^3+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1-t^2+t^3+\cdots & t-\frac{3}{2}t^2-\frac{7}{6}t^3+\cdots\\ -2t+3t^2-\frac{7}{3}t^3+\cdots & 1-3t+\frac{7}{2}t^2-\frac{5}{2}t^3+\cdots\end{bmatrix}$$

此法步骤简单，适合用计算机计算，但无法得到解析解。

2 标准型法：

(1). 设A具有n个互异的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_n$则有

$$e^{At} = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}$$

其中T满足

$$T^{-1}AT = \Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_, , \cdots, \lambda_n].$$

【例2—2】求 e^{At}, $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

解: 1) 特征值

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

2) 特征向量

由 $Ap_i = \lambda_i p_i$ 得:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3) 构造变换矩阵

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix},\qquad T^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix},$$

则有

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

(2). 设A具有n个重特征值λ，则有

$$J=T^{-1}AT$$

$$e^{At}=Te^{Jt}T^{-1}$$

$$=T\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda t} \\ & & & e^{\lambda t} \end{bmatrix}T^{-1}$$

➢**当A同时具有重特征值和互异特征值时，可根据(1)(2) 两原则求出** e^{At}

例2—3 已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 12 & -16 & 7\end{bmatrix}$，求 e^{At} 。

解：1）求特征值

$$\left|\lambda I-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ -12 & 16 & \lambda-7\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-3)=0$$

$\lambda_1=\lambda_2=2$ 二重特征值, $\lambda_3=3$

2) 计算特征向量和广义特征向量，求变换矩阵

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ \lambda_1 & 1 & \lambda_3\\ \lambda_1^{\ 2} & 2\lambda_1 & \lambda_3^{\ 2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 4 & 9\end{bmatrix},\qquad T^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & 4 & -1\\ -6 & 5 & -1\\ 4 & -4 & 1\end{bmatrix}$$

3) 求矩阵指数

$$J=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-3 & 4 & -1\\ -6 & 5 & -1\\ 4 & -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 12 & -16 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 4 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=Te^{Jt}T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 4 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2t} & te^{2t} & 0\\ 0 & e^{2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 4 & -1\\ -6 & 5 & -1\\ 4 & -4 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3e^{2t}-6te^{2t}+4e^{3t} & 4e^{2t}+5te^{2t}-4e^{3t} & -e^{2t}-te^{2t}+e^{3t}\\ -12e^{2t}-12te^{2t}+12e^{3t} & 13e^{2t}+10te^{2t}-12e^{3t} & -3e^{2t}-2te^{2t}+3e^{3t}\\ -36e^{2t}-24te^{2t}+36e^{3t} & 36e^{2t}+20te^{2t}-36e^{3t} & -8e^{2t}-4te^{2t}+9e^{3t}\end{bmatrix}$$

3 拉氏变换法：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \xrightarrow{L} sx(s) - x(0) = Ax(s)$$

$$x(s) = (sI - A)^{-1}x(0) \xrightarrow{L^{-1}} x(t) = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]x(0)$$

而

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}x(0)$$

有：

$$\mathrm{e}^{At} = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

故可用拉氏反变换求矩阵指数

$$\mathrm{e}^{At} = \Phi(t) = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

例2-4 用Laplace 变换法计算矩阵指数：

解：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} \qquad sI-A=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s(s+3)+2}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

对此式采用部分分式法分解

则有：

$$e^{At}=L^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\\ -\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & -\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\boxed{L^{-1}\left(\frac{a}{s+b}\right)=ae^{-bt}}$$

4. 化有限项法（凯莱—哈密顿定理法）

根据凯莱-哈密顿定理，有

$$A^k = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_{n-1} A^{n-1}, k \geq n.$$

可以有

$$\mathrm{e}^{At} = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) A + \cdots + \alpha_{n-1}(t) A^{n-1}.$$

进一步，A的特征值有

$$\mathrm{e}^{\lambda t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda^{n-1}.$$

1) A特征根两两互异：

$$\alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_1{}^{n-1}=\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$$

$$\alpha_0+\alpha_1\lambda_2+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_2{}^{n-1}=\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_0+\alpha_1\lambda_n+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_n{}^{n-1}=\mathrm{e}^{\lambda_n t}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1{}^2 & \cdots & \lambda_1{}^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2{}^2 & \cdots & \lambda_2{}^{n-1}\\ & \cdots & & \cdots & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n{}^2 & \cdots & \lambda_n{}^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\\ \vdots\\ e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

2) A有n重特征值 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=\lambda$

$$e^{\lambda t}=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda+\cdots+\alpha_{n-1}(t)\lambda^{n-1}$$

两端对λ 求1至 $n-1$阶导数得：

$$te^{\lambda t}=\alpha_1(t)+2\alpha_2(t)\lambda+\cdots+(n-1)\alpha_{n-1}\lambda^{n-2}$$

$$t^2e^{\lambda t}=2\alpha_2(t)+6\alpha_3(t)\lambda+\cdots+(n-1)(n-2)\alpha_{n-1}\lambda^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$t^{n\text{-}1}e^{\lambda t}=(n-1)!\alpha_{n-1}(t)$$

解方程组可求得

$$\alpha_i(t),\quad i=0,1,2,\cdots,n-1.$$

写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-2}(t) \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\lambda_1^{n-3} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & \cdots & \frac{n-1}{1!}\lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda_1 t} \\ \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} \\ \frac{t}{1!}e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

例2－6 已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$ ，用有限项法求 e^{At}

解：特征值：$\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$

$\therefore \lambda_1=-1, \qquad \lambda_2=-2$ 两两互异

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1\\ 1 & \lambda_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{-t}\\ e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}\\ e^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

例2－6 已知 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ ，用有限项法求 e^{At}

$$e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A$$

$$=(2e^{-t}-e^{-2t})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+(e^{-t}-e^{-2t})\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

例 2-7 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\end{bmatrix}$，求 e^{At} 。

解：

（1）求A的特征值

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ -2 & 5 & \lambda-4\end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$$

$\lambda_1=\lambda_2=1,\qquad \lambda_3=2$ 二重特征值

2.2 矩阵指数函数—状态转移矩阵

（2）求系数 $\alpha_i(t)\ \ (i=0,1,2)$

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\\ \alpha_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\lambda_1\\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^{\ 2}\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^{\ 2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}te^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_3 t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -2\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}te^{t}\\ e^{t}\\ e^{2t}\end{bmatrix}$$

或解方程组 $\mathrm{e}^{\lambda t}=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda+\alpha_2(t)\lambda^2$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_3=2\qquad & \mathrm{e}^{2t}=\alpha_0(t)+2\alpha_1(t)+4\alpha_2(t)\\
\lambda_1=\lambda_2=1\qquad & \mathrm{e}^{t}=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)+\alpha_2(t)\\
\text{1 是重根，故需补充方程}\qquad & \mathrm{t}\mathrm{e}^{t}=\alpha_1(t)+2\alpha_2(t)
\end{aligned}\right\}$$

（3）求 e^{At}

$$e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A+\alpha_2(t)A^2$$

$$=(-2te^t+e^{2t})\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+(3te^t+2e^t-2e^{2t})\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&-5&4\end{bmatrix}$$

$$+(-te^t-e^t+e^{2t})\begin{bmatrix}0&0&1\\2&-5&4\\8&-18&11\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2te^t+e^{2t}&3te^t+2e^t-2e^{2t}&-te^t-e^t+2e^{2t}\\-2te^t-2e^t+2e^{2t}&3te^t+5e^t-4e^{2t}&-te^t-e^t+2e^{2t}\\-2te^t-4e^t+4e^{2t}&3te^t+8e^t-8e^{2t}&-te^t-3e^t+4e^{2t}\end{bmatrix}$$

2.3 线性定常系统非齐次方程的解

考虑系统： $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0$

将$x(t)$左乘 e^{-At}后求导得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-At}x(t)\right) = \mathrm{e}^{-At}\left(\dot{x}(t) - Ax(t)\right) = \mathrm{e}^{-At}Bu(t)$$

两边积分得：

$$\int_0^t \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\mathrm{e}^{-A\tau}x(\tau)\right)\right\}\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{e}^{-A\tau}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

可以得到

$$\mathrm{e}^{-At}x(t)-Ix(0)=\int_0^t \mathrm{e}^{-A\tau}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$x(t)=\mathrm{e}^{At}x(0)+\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad t\geq 0$$

更一般的形式为：

$$x(t)=\mathrm{e}^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad t\geq t_0$$

系统的动态响应由两部分组成：
一部分是由初始状态引起的系统自由运动，叫做**零输入响应**；
另一部分是由控制输入所产生的受控运动，叫做**零状态响应**。

【例2-8】系统状态方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad (t\geq 0) \qquad x(0)=\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}, u(t)=1(t)$$

求解方程。

解：

$$\Phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$x(t)=\Phi(t)x_0+\int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}$$

$$+\int_0^t\begin{bmatrix}2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}(2e^{-t}-e^{-2t})x_1(0)+(e^{-t}-e^{-2t})x_2(0)\\(-2e^{-t}+2e^{-2t})x_1(0)+(-e^{-t}+2e^{-2t})x_2(0)\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\-e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}(2e^{-t}-e^{-2t})x_1(0)+(e^{-t}-e^{-2t})x_2(0)\\(-2e^{-t}+2e^{-2t})x_1(0)+(-e^{-t}+2e^{-2t})x_2(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(2e^{-t}-e^{-2t})x_1(0)+(e^{-t}-e^{-2t})x_2(0)+\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\(-2e^{-t}+2e^{-2t})x_1(0)+(-e^{-t}+2e^{-2t})x_2(0)+e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

2.4 线性时变系统的解

1 线性时变系统齐次状态方程的解

系统描述：

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

t_0为初始时刻，$a_{ij}(t)$为分段连续函数。

解的一般形式：

利用逐次逼近法

$$x(t) = \left[I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_1 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3)\mathrm{d}\tau_3\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_1 + \cdots \right] x(t_0).$$

特殊情况：

$$A(t)\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\mathrm{d}\tau\right)=\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\mathrm{d}\tau\right)A(t)$$

$$\Leftrightarrow\ x(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\mathrm{d}\tau\right)x(t_0).$$

例　考虑系统 $\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1/(t+1)^2\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(t),\quad x(t_0)$ 给定

求 $x(t)$

解:

$$A(t)=\begin{bmatrix}0 & 1/(t+1)^2\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$A(t)A(\tau)=A(\tau)A(t)=0,$$

$$\int_{t_0}^{t}\big(A(t)A(\tau)-A(\tau)A(t)\big)\,\mathrm{d}\tau=0,$$

$$A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\mathrm{d}\tau A(t),$$

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\mathrm{d}\tau\right)x(t_0)$$

$$= \exp\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t_0)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t_0)$$

2 线性时变系统的状态转移矩阵

对于连续时间线性时变系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

其中，t_0为初始时刻，$a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$分段连续。

系统的状态转移矩阵是如下矩阵微分方程和初始条件

$$\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0), \quad \Phi(t_0,t_0) = I$$

的nxn解阵$\Phi(t,t_0)$

状态转移矩阵的性质

$$(1)\quad \frac{\mathrm{d}\Phi(t,t_0)}{\mathrm{d}t}=A(t)\Phi(t,t_0),\quad \Phi(t_0,t_0)=I.$$

状态转移矩阵的性质

(1) $$\frac{\mathrm{d}\Phi(t,t_0)}{\mathrm{d}t} = A(t)\Phi(t,t_0),\quad \Phi(t_0,t_0) = I.$$

(2) $$\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0) = \Phi(t_2,t_0).$$

状态转移矩阵的性质

(1) $$\frac{\mathrm{d}\Phi(t,t_0)}{\mathrm{d}t} = A(t)\Phi(t,t_0),\quad \Phi(t_0,t_0) = I.$$

(2) $$\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0) = \Phi(t_2,t_0).$$

(3) $$\Phi^{-1}(t,t_0) = \Phi(t_0,t).$$

状态转移矩阵的性质

(1) $$\frac{\mathrm{d}\Phi(t,t_0)}{\mathrm{d}t} = A(t)\Phi(t,t_0),\ \ \Phi(t_0,t_0) = I.$$

(2) $$\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0) = \Phi(t_2,t_0).$$

(3) $$\Phi^{-1}(t,t_0) = \Phi(t_0,t).$$

对于时变齐次方程，其解为 $x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0)$

3 线性时变系统非齐次状态方程的解

考虑系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

其中，t_0为初始时刻，$a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$分段连续。

系统的解为：

$$x(t) = \Phi(t,t_0)c(t)$$

$c(t)$ 为待定向量。

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t,t_0)c(t) + \Phi(t,t_0)\dot{c}(t)$$
$$= A(t)\Phi(t,t_0)c(t) + \Phi(t,t_0)\dot{c}(t)$$

代入状态方程得：

$$A(t)\Phi(t,t_0)c(t) + \Phi(t,t_0)\dot{c}(t) = A(t)\Phi(t,t_0)c(t) + B(t)u(t)$$

于是
$$\dot{c}(t) = \Phi^{-1}(t,t_0)B(t)u(t)$$

等式两端积分得：

$$c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^{t} \left(\Phi(\tau,t_0)\right)^{-1} B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

令 $t = t_0$，则有：

$$c(t_0) = x(t_0)$$

$$c(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(\Phi(\tau,t_0)\right)^{-1}B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0)+\Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau,t_0)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\Phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,t_0)\Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\Phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

上式称为状态转移方程：以状态转移矩阵为核心工具。

第一项是由初始状态引起的响应；

第二项是由控制输入引起的响应。

2.5 离散时间系统状态方程求解

<u>求解方法</u>
- 矩阵差分方程的迭代法（递推法）
- Z变换法

2.5.1 递推法：

考虑离散时间系统：

$$x(k+1)=G(k)x(k)+H(k)u(k),\qquad k=0,1,2,\cdots,$$

则有：

$$x(1)=G(0)x(0)+H(0)u(0),$$

$$x(2)=G(1)x(1)+H(1)u(1),$$

$$x(3)=G(2)x(2)+H(2)u(2),$$

$$\vdots$$

$$x(l)=G(l-1)x(l-1)+H(l-1)u(l-1)$$

当给定初始状态$x(0)$和输入信号序列$u(0),u(1),\ldots,u(l-1)$，即可求得$x(l)$

定常情形：$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$

G和H都是常值矩阵，于是可得

$$x(1)=Gx(0)+Hu(0),$$

$$x(2)=Gx(1)+Hu(1)=G^2x(0)+GHu(0)+Hu(1),$$

$$x(3)=Gx(2)+Hu(2)=G^3x(0)+G^2Hu(0)+GHu(1)+Hu(2),$$

依次递推下去，有

$$x(k)=G^kx(0)+\sum_{i=0}^{k-1}G^{k-1-i}Hu(i)$$

与连续系统状态的解很相似

此式称为线性定常离散系统的状态转移方程。

其中，$\Phi(k)=G^k$ 称为线性离散定常系统的状态转移矩阵。

状态转移矩阵的性质：

(1) $\Phi(k+1)=G\Phi(k),\quad \Phi(0)=I.$

(2) $\Phi(k_2-k_0)=\Phi(k_2-k_1)\Phi(k_1-k_0).$

(3) $\Phi^{-1}(k)=\Phi(-k).$

离散系统状态转移方程的一般形式：

$$x(k)=\Phi(k)x(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k-1-i)Hu(i).$$

或

$$x(k)=\Phi(k)x(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\Phi(j)Hu(k-1-j)$$

2.5.2 Z变换法

考虑离散时间系统：

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k),\quad k=0,1,2,\cdots,$$

取Z变换得：

$$zx(z)-zx(0)=Gx(z)+Hu(z)$$

$$x(z)=(zI-G)^{-1}zx(0)+(zI-G)^{-1}Hu(z)$$

取Z反变换得：

$$x(k)=Z^{-1}\left((zI-G)^{-1}z\right)x(0)+Z^{-1}\left((zI-G)^{-1}Hu(z)\right)$$

由解的唯一性可得：

$$Z^{-1}\left((zI-G)^{-1}z\right)=G^{k}\qquad Z^{-1}\left((zI-G)^{-1}Hu(z)\right)=\sum_{i=0}^{k-1}G^{k-1-i}Hu(i)$$

例2-12 考虑离散时间系统：

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

其中：

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

试求$u(k)$=1时，系统状态方程的解。

解法1：

$$x(1) = Gx(0) + Hu(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.84 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = Gx(1) + Hu(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1.84 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.84 \\ -0.84 \end{bmatrix}$$

$$x(3)=Gx(2)+Hu(2)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.84\\ -0.84\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.16\\ 1.386\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2.84 & 0.16 & \cdots\\ -1 & 1.84 & -0.84 & 1.386 & \cdots\end{bmatrix}$$

依次递推下去，可得到状态的离散序列表达式：

$$x(k)=\begin{bmatrix}-\frac{17}{6}(-0.2)^k+\frac{22}{9}(-0.8)^k+\frac{25}{18}\\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k-\frac{17.6}{9}(-0.8)^k+\frac{7}{18}\end{bmatrix} \qquad k=1,2,\cdots$$

解法2：用Z变换法，先计算

$$
(zI-G)^{-1}=\begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{bmatrix}^{-1}
$$

$$
=\frac{1}{(z+0.2)(z+0.8)}\begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} \frac{4}{3}\frac{1}{z+0.2}-\frac{1}{3}\frac{1}{z+0.8} & \frac{5}{3}\frac{1}{z+0.2}-\frac{5}{3}\frac{1}{z+0.8} \\ -\frac{0.8}{3}\frac{1}{z+0.2}+\frac{0.8}{3}\frac{1}{z+0.8} & -\frac{1}{3}\frac{1}{z+0.2}+\frac{4}{3}\frac{1}{z+0.8} \end{bmatrix}
$$

则有：

$$\Phi(k)=Z^{-1}\left((zI-G)^{-1}z\right)$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{4}{3}(-0.2)^k-\frac{1}{3}(-0.8)^k & \frac{5}{3}(-0.2)^k-\frac{5}{3}(-0.8)^k \\ -\frac{0.8}{3}(-0.2)^k+\frac{0.8}{3}(-0.8)^k & -\frac{1}{3}(-0.2)^k+\frac{4}{3}(-0.8)^k \end{bmatrix}$$

而$u(k)$=1，故 $u(z)=\dfrac{z}{z-1}$

$$zx(0)+Hu(z)=\begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{z}{z-1} \\ \dfrac{z}{z-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{z^2}{z-1} \\ \dfrac{-z^2+2z}{z-1} \end{bmatrix}$$

$$x(z)=(zI-G)^{-1}(zx(0)+Hu(z))$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{17}{6}\frac{z}{z+0.2}+\frac{22}{9}\frac{z}{z+0.8}+\frac{26}{18}\frac{z}{z-1} \\ \frac{3.4}{6}\frac{z}{z+0.2}-\frac{17.6}{9}\frac{z}{z+0.8}+\frac{7}{18}\frac{z}{z-1} \end{bmatrix}$$

经Z反变换得：

$$x(k)=\begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k-\frac{22}{9}(-0.8)^k+\frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k-\frac{17.6}{9}(-0.8)^k+\frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

2.6 连续时间状态空间表达式的离散化

2.6.1 离散化方法

考虑定常系统： $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$

其状态方程的解为：

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

假设：

(1) 等采样周期T：

(2) $u(t) \equiv u(kT), \quad kT \le t \le (k+1)T.$

(3) $x(k) = \begin{cases} x(t), & t = kT \\ 0, & t \ne kT \end{cases}$

令 $t=(k+1)T, \quad t_0=kT,$

则有：$$x((k+1)T)=\mathrm{e}^{AT}x(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T}\mathrm{e}^{A[(k+1)T-\tau]}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\mathrm{e}^{AT}x(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T}\mathrm{e}^{A[(k+1)T-\tau]}B\mathrm{d}\tau u(kT)$$

令 $t=(k+1)T-\tau$, 则 $\mathrm{d}\tau=-\mathrm{d}t,$

$$\boxed{\begin{array}{l} kT\le t\le (k+1)T \\ T\ge\tau\ge 0 \end{array}}$$

$$x((k+1)T)=\mathrm{e}^{AT}x(kT)+\int_0^{\tau}\mathrm{e}^{At}B\mathrm{d}tu(kT)$$

$$=\mathrm{e}^{AT}x(kT)+\int_0^{\tau}\mathrm{e}^{At}\mathrm{d}tBu(kT)$$

令

$$G = \mathrm{e}^{AT}$$

$$H = \left(\int_0^T \mathrm{e}^{At} \mathrm{d}\tau \right) B$$

则线性时不变系统离散状态方程为：

$$x((k+1)T) = Gx(kT) + Hu(kT).$$

一般地

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k).$$

结论：

对于连续时间的状态空间表达式：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

离散化之后，得离散时间状态空间表达式为：

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

式中

$$G = e^{AT}$$

$$H = \left(\int_0^T e^{At} \cdot dt \right) \cdot B$$

2.6.2 近似离散化

考虑系统 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$

当采样周期T很小时，有

$$\dot{x}(t)\approx\big(x((k+1)T)-x(kT)\big)/T$$

令 $t=kT$ 比较两式

$$\big(x((k+1)T)-x(kT)\big)/T=Ax(kT)+Bu(kT),$$

经整理

$$x((k+1)T) = \left(I + TA\right)x(kT) + TBu(kT)$$

记：

$$G(T) = I + TA,$$

$$H(T) = TB.$$

有

$$x((k+1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT)$$

此即所得近似离散化方程

例： 定常系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试求离散系统的状态空间描述。

解： 先求 $G = e^{AT}$

$$G(T) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = L^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= L^{-1}\left\{ \frac{1}{s(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

再求

$$H=\left(\int_0^T e^{At}dt\right)\cdot B=\int_0^T\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}dt\cdot\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}T+\frac{1}{4}e^{-2T}-\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2}e^{-2T}+\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(T+\frac{e^{-2T}-1}{2})\\ \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\end{bmatrix}$$

故离散化状态方程为:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}T+\frac{1}{4}e^{-2T}-\frac{1}{4}\\ 0 & e^{-2T}\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(T+\frac{e^{-2T}-1}{2})\\ \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\end{bmatrix}u(k)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

(2) 采用近似离散化

$$G = I + TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & T \\ 0 & -2T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1-2T \end{bmatrix}$$

$$H = TB = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$$

(3) 将以上两种结果对比，采样周期T很小时，两者极为接近。

2.6.3 线性时变系统的离散化

考虑时变系统：$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$

其状态方程的解为：

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

假设：

(1) 等采样周期T：

(2) $u(t) \equiv u(kT), \quad kT \le t \le (k+1)T.$

(3) $x(k) = \begin{cases} x(t), & t = kT \\ 0, & t \ne kT \end{cases}$

令 $t=(k+1)T$， $t_0=kT$， 则有：

$$x((k+1)T)=\Phi(k+1,k)x(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\Phi(k+1,k)x(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)\mathrm{d}\tau u(kT)$$

$$G(k)=\Phi(k+1,k)$$

$$H(k)=B\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi((\mathrm{k}+1)\mathrm{T},\tau)B(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$x(k+1)=G(k)x(k)+H(k)u(k).$$

连续系统离散化的几点说明：

(1) 近似离散化是一般离散化的特例

(2) 定常系统离散化是时变系统离散化的特例

(3) 一般说来，没有精确离散化

(4) 离散化是有条件的，“连续化”是无条件的

(5) 连续系统的结论可以在离散系统中找到对应，反之则未必

总　　结

一、线性连续系统的运动分析

（一）线性定常系统运动分析

1 运动的分类 $\begin{cases} \text{自由运动} \\ \text{强迫运动} \end{cases}$

2 运动解的形式

自由运动的解：　$X(t) = \Phi(t - t_0) X_0$

强迫运动的解：

$$t = 0\text{时，} \quad X(t) = \Phi(t) X_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) B u(\tau) d\tau \qquad t \in [0, \infty)$$

$$t \neq 0\text{时，} \quad X(t) = \Phi(t - t_0) X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) B u(\tau) d\tau \qquad t \in [t_0, \infty)$$

其中 $\Phi(t - t_0)$ 为状态转换矩阵。

总　　结

3 状态转换矩阵的概念

定义：满足关系式 $\begin{cases}\dot{\Phi}(t-t_0)=A\Phi(t-t_0)\\ \Phi(0)=I\end{cases}$

称 $\Phi(t-t_0)$ 为系统的状态转移矩阵。

对线性定常系统

$$\Phi(t-t_0)=e^{A(t-t_0)}$$

4 e^{At} 的计算方法

1）根据矩阵指数的定义求解：

$$e^{At}=I+At+\frac{A^2}{2!}t^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}t^k$$

2） 用拉氏变换法求解：

$$e^{At}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$$

3) 将e^{At}化为A的有限项多项式来求解：

$$e^{At}=a_0(t)I+a_1(t)A+\cdots+a_{n-1}(t)A^{n-1}$$

总　　结

a） A的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两相异时，

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

b）A的特征值为 λ_1 (n重根）

$$\begin{bmatrix} a_{n-1}(t) \\ a_{n-2}(t) \\ \vdots \\ a_1(t) \\ a_0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & (n-1)\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\lambda_1^{n-3} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & \cdots & \frac{n-1}{1!}\lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \\ \frac{1}{1!}te^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

总　　结

4)通过非奇异变换法求解：

（1）当A的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为两两相异时，

$$e^{At}=P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

（2）当A的特征值为 λ_1（n重根）

$$e^{At}=Q\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & te^{\lambda_1 t} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}Q^{-1}$$

式中： P、Q为使A化为对角线、约当规范形的变换矩阵。

总　　　结

5 状态转移矩阵的性质

（1）可逆性：
$$\Phi^{-1}(t-t_0)=\Phi(t_0-t)$$

（2）分解性：
$$\Phi(t_1+t_2)=\Phi(t_1)\Phi(t_2)$$

（3）传递性：
$$\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0)$$

（4）

$\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A$ 即：$\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)=\Phi(t)A$

6 由状态转移矩阵求解系统矩阵A

$$A=\dot{\Phi}(0)$$

总　　结

二、线性离散系统的运动分析

（一）线性离散系统的状态空间描述

1　将标量差分方程化为状态空间描述

2　将脉冲传递函数化为状态空间描述

（二）线性离散系统的运动分析

1　求解方法 $\begin{cases} \text{矩阵差分方程的迭代法} \\ \text{Z变换法} \end{cases}$

2　线性定常离散系统解的形式

总 结

$$X(k)=G^kX(0)+\sum_{i=0}^{k-1}G^{k-i-1}Hu(i) \qquad (1)$$

或：

$$x(k)=\Phi(k)x(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k-i-1)Hu(i)$$

$$=\Phi(k)x(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(i)Hu(k-i-1)$$

其中 $\Phi(k)=G^k$ 为离散系统的状态转移矩阵。

3 线性连续系统的离散化

1) 三个基本假定

2) 定常系统状态方程的离散化

3）近似方法

总　　结

2）线性定常系统离散化 $\begin{cases} \dot{X}(t) = AX + Bu \\ y = CX + Du \end{cases}$

则其离散化方程为

$$\begin{cases} X(k+1) = GX(k) + Hu(k) \\ y(k) = CX(k) + Du(k) \end{cases} \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

式中，G、H、C、D为常矩阵，且

$$G = e^{AT}$$

$$H = \left(\int_0^T e^{At} \cdot dt\right).B$$

3）近似方法

$$G(kT) = I + TA(kT) \qquad (2)$$

$$H(kT) = TB(kT)$$