4 Лабораторная работа "Методы решения нелинейных уравнений и систем"

4.1 Краткий теоретический материал

Пусть на отрезке $[a,b]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет и притом единственный корень. (Отрезок $[a,b]$ можно определить, например, графически). Предположим, что функция $y = f(x)$ является непрерывной на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах отрезка разные знаки :

$$f(a)f(b) < 0. \tag{21}$$

В этом случае для поиска корней можно воспользоваться *методом половинного деления (методом дихотомий)*. Метод этот заключается в последовательном делении отрезка пополам. На одном из двух получившихся отрезков оказывается корень, причем отрезок, который будем вновь делить, определяем с помощью условия вида (21). Процесс деления отрезка прекращается, когда длина отрезка становится меньше заданной точности ε. Тогда приближенное значение корня равно середине отрезка.

Пусть теперь функция $y = f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные $f'(x)$ и $f''(x)$. Кроме того, производные не меняют знак на отрезке $[a,b]$. Выберем начальное приближение $x_0 \in [a,b]$ так, что

$$f(x_0)f''(x_0) > 0. \tag{22}$$

Тогда

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{23}$$

Итерационный процесс прекращают, когда одна из величин $|x_{n+1} - x_n|$ или $|f(x_{n+1})|$ становится меньше заданной точности ε.

Описанный метод носит название *метода Ньютона.*

Отметим, что метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости, т.е.

$$|x_{n+1} - x^*| = O|x_n - x^*|^2,$$

где x^* – точное значение корня уравнения $f(x) = 0$.

В случаях громоздкой производной метод Ньютона можно несколько изменить.

Модифицированный метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{24}$$

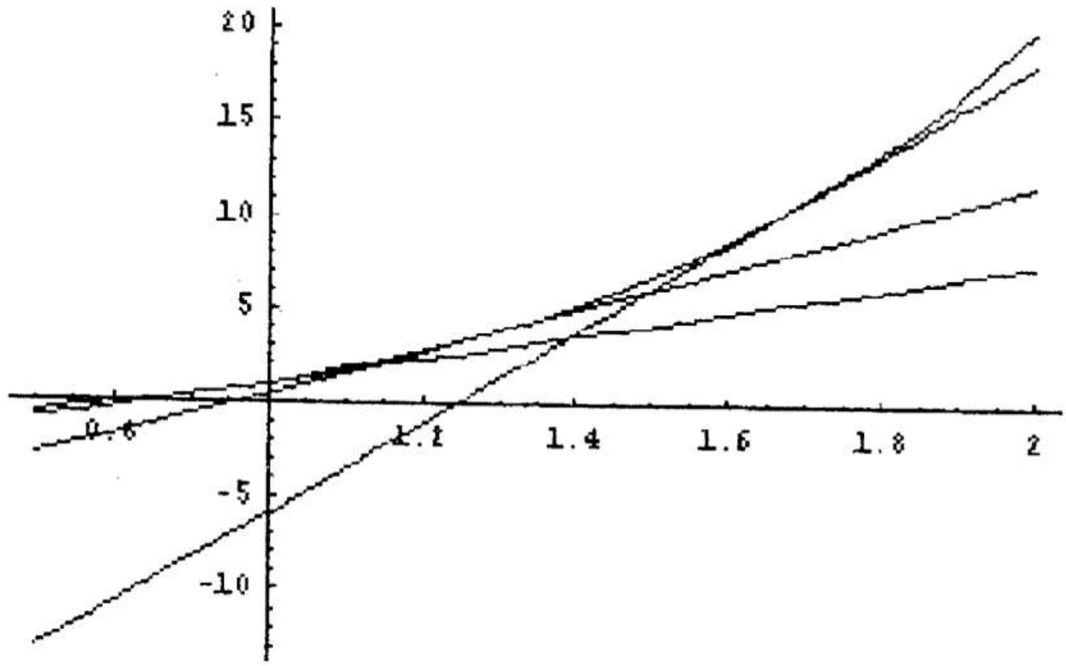

Рис. 2: Геометрическая интерпретация метода Ньютона

Метод секущих

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{25}$$

Заметим, что метод является двухшаговым, так как для вычисления $n+1$-й итерации надо знать два предыдущих значения x_n и x_{n-1}. Поэтому x_0 можно определить произвольно, а x_1 – например, по формуле (23).

Метод хорд

Для уменьшения вычислительной работы применяют следующую модификацию метода секущих:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{26}$$

В описанных выше методах требования к функциям такие же, как в методе Ньютона. Условие окончания итераций также остается неизменным.

Все описанные выше методы являются частным случаем *метода простой итерации*.

Общий вид метода простой итерации

Если $h(x)$ – некоторая функция, не обращающаяся в 0 на отрезке $[a, b]$, то уравнение $f(x) = 0$ эквивалентно уравнению $x = x + h(x)f(x)$. Обозначим

$\varphi(x) = x + h(x)f(x)$ и рассмотрим решение уравнения $x = \varphi(x)$ при условии, что существует положительное число $q < 1$, такое что на отрезке $[a, b]$

$$|\varphi'(x)| \le q. \tag{27}$$

Тогда, полагая x_0 – любое число на отрезке $[a, b]$, организуем итерационный процесс по правилу

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{28}$$

Итерационный процесс оканчивается, когда выполнено условие

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1-q}{q}\varepsilon,$$

где ε заданная точность.

Предварительно число итераций, требуемое для достижения точности ε, можно оценить по формуле

$$N = \left[\log_q \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}\right] + 1. \tag{29}$$

В последней формуле квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Метод простой итерации в общем случае имеет линейную скорость сходимости, т.е.

$$|x_{n+1} - x^*| = O|x_n - x^*|,$$

где x^* – точное значение корня уравнения $f(x) = 0$.

Отметим, что выбор функции $h(x)$, такой, чтобы было выполнено условие (27) – непростая задача. В случаях, когда это затруднительно, разумно пользоваться готовыми формулами (23)-(26)

Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Согласно методу Ньютона последовательные приближения вычисляются по формулам

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{\Delta_x(x_n, y_n)}{\Delta(x_n, y_n)}, \\ y_{n+1} = y_n - \frac{\Delta_y(x_n, y_n)}{\Delta(x_n, y_n)}, \end{cases} \quad n = 0, 1, \ldots$$

где

$$\Delta_x(x, y) = \begin{vmatrix} f(x, y) & f'_y(x, y) \\ g(x, y) & g'_y(x, y) \end{vmatrix}, \quad \Delta_y(x, y) = \begin{vmatrix} f'_x(x, y) & f(x, y) \\ g'_x(x, y) & g(x, y) \end{vmatrix},$$

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \end{vmatrix},$$

$\Delta(x,y) \neq 0$.

Начальные приближения определяются графически или грубой прикидкой.

Метод простой итерации для систем нелинейных уравнений

Пусть дана система двух уравнений с двумя неизвестными, записанная в следующем виде

$$\begin{cases} x = \phi(x,y), \\ y = \psi(x,y). \end{cases} \tag{30}$$

Пусть, кроме того, в некоторой замкнутой окрестности $R(a \leq x \leq A, b \leq y \leq B)$ имеется ровно одно решение системы (30), функции ϕ, ψ определены и непрерывно дифференцируемы в R, и в R выполнены неравенства

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| \leq q_1 < 1, \\ \left|\frac{\partial\phi}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| \leq q_2 < 1. \end{cases} \tag{31}$$

Тогда процесс итераций

$$\begin{cases} x_{n+1} = \phi(x_n,y_n), \\ y_{n+1} = \psi(x_n,y_n). \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{32}$$

с начальным приближением $(x_0,y_0) \in R$ сходится к точному решению системы с любой заданной точностью ε.

Итерации можно прекратить, если выполнено условие

$$|x_{n+1} - x_n| + |y_{n+1} - y_n| \leq \frac{1-M}{M}\varepsilon,$$

где M – наибольшее из чисел q_1, q_2.

Приведение системы уравнений к виду, удобному для итераций

Пусть дана система

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

Будем искать функции ϕ и ψ системы (30) в виде

$$\phi(x,y) = x + \alpha_{11}f(x,y) + \alpha_{12}g(x,y),$$
$$\psi(x,y) = y + \alpha_{21}f(x,y) + \alpha_{22}g(x,y),$$

где коэффициенты α_{ij}, $i = 1,2$, $j = 1,2$ определяются приближенно из системы

$$\begin{cases} 1 + \alpha_{11}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + \alpha_{12}\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \\ \alpha_{11}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} + \alpha_{12}\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} = 0, \\ \alpha_{21}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + \alpha_{22}\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \\ 1 + \alpha_{21}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} + \alpha_{22}\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{33}$$

При таком выборе условие (31) будет выполнено, если частные производные функций f и g изменяются не очень быстро в окрестности точки (x_0, y_0).

4.2 Примеры

1. Найти корень квадратный из числа $a = 2$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение.

Рассмотрим уравнение $x^2 - a = 0$. (Именно его корнем является число $\sqrt{a}$). Воспользуемся методом Ньютона. $f(x) = x^2 - a$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$. По формуле (23) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$ или

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Для нашей задачи $a = 2$, значит, грубой прикидкой находим, что корень находится на отрезке $[1, 1.5]$. В качестве x_0 возьмем число 1.5, так как по условию (22) $f(1.5)f''(1.5) = 2.25 \cdot 2 > 0$. Тогда последовательные приближения

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) = 1.417, \quad |x_1 - x_0| = 0.083 > 10^{-3}; \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(1.417 + \frac{2}{1.417}\right) = 1.414, \quad |x_2 - x_1| = 0.003 > 10^{-3}; \\ x_3 &= \frac{1}{2}\left(1.414 + \frac{2}{1.414}\right) = 1.412, \quad |x_3 - x_2| = 0.002 > 10^{-3}; \\ x_4 &= \frac{1}{2}\left(1.412 + \frac{2}{1.412}\right) = 1.412, \quad |x_4 - x_3| = 0.000 < 10^{-3}. \end{aligned}$$

Значит, $\sqrt{2} = 1.412 \pm 10^{-3}$.

2. Методом простой итерации решить уравнение $\sqrt{x} - \cos 0.387x = 0$. Оценить, сколько итераций потребуется, чтобы найти корень с точностью 10^{-4}.

Решение.

Преобразуем уравнение к виду $x = \cos^2 0.387x$. Тогда положим $\varphi(x) = \cos^2 0.387x$. Тогда $\varphi'(x) = -2\cos 0.387x \sin 0.387x \cdot 0.387 = 0.387 \sin 0.774x$. Тогда $|\varphi'(x)| \le 0.387 = q < 1$. Так как условие (27) выполнено, то метод простой итерации можно применять, положив, например $x_0 = 0$. Тогда $x_1 = \cos^2 0.387 \cdot 0 = 1$.

Оценим, сколько итераций потребуется. Согласно (29)

$$N = \left[\log_{0.387} \frac{10^{-3}(1-0.387)}{|1-0|}\right] + 1 = 8.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_2 &= \cos^2 0.387 \cdot 1 = 0.8575; \\ x_3 &= \cos^2 0.387 \cdot 0.8575 = 0.8938; \\ x_4 &= \cos^2 0.387 \cdot 0.8938 = 0.8850; \\ x_5 &= \cos^2 0.387 \cdot 0.8850 = 0.8872; \\ x_6 &= \cos^2 0.387 \cdot 0.8872 = 0.8867; \\ x_7 &= \cos^2 0.387 \cdot 0.8867 = 0.8868; \\ x_8 &= \cos^2 0.387 \cdot 0.8868 = 0.8868. \end{aligned}$$

Значит, $x = 0.887 \pm 0.001$.

3. Найти вещественные корни системы

$$\begin{cases} 2x^3 - y^2 - 1 = 0, \\ xy^3 - y - 4 = 0. \end{cases}$$

Решение

Грубой прикидкой находим начальное приближение $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

$$\Delta_x(x,y) = \begin{vmatrix} 2x^3 - y^2 - 1 & -y \\ xy^3 - y - 4 & 3xy^2 - 1 \end{vmatrix} =$$
$$= (2x^3 - y^2 - 1)(3xy^2 - 1) - (-y)(xy^3 - y - 4).$$

$$\Delta_y(x,y) = \begin{vmatrix} 6x^2 & 2x^3 - y^2 - 1 \\ y^3 & xy^3 - y - 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 6x^2(xy^3 - y - 4) - y^3(2x^3 - y^2 - 1).$$

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 6x^2(3xy^2 - 1) - (-2y)(y^3).$$

$$x_1 = 1 - \frac{\Delta_x(1,2)}{\Delta(1,2)} = 1.2551,$$
$$y_1 = 2 - \frac{\Delta_y(1,2)}{\Delta(1,2)} = 1.6327,$$
$$x_2 = 1.2551 - \frac{\Delta_x(1.2551, 1.6327)}{\Delta(1.2551, 1.6327)} = 1.2345,$$
$$y_2 = 1.6327 - \frac{\Delta_y(1.2551, 1.6327)}{\Delta(1.2551, 1.6327)} = 1.6615,$$

$$x_3 = 1.2345 - \frac{\Delta_x(1.2345, 1.6615)}{\Delta(1.2345, 1.6615)} = 1.2343,$$
$$y_3 = 1.6615 - \frac{\Delta_y(1.2345, 1.6615)}{\Delta(1.2345, 1.6615)} = 1.6615,$$
$$x_4 = 1.2343 - \frac{\Delta_x(1.2343, 1.6615)}{\Delta(1.2343, 1.6615)} = 1.2343,$$
$$y_4 = 1.6615 - \frac{\Delta_y(1.2343, 1.6615)}{\Delta(1.2343, 1.6615)} = 1.6615.$$

Видим,что при последующих итерациях с точностью до четырех знаков после запятой решение не изменяется. Значит $x = 1.2343 \pm 10^{-4}$, $y = 1.6615 \pm 10^{-4}$.

4. Для системы

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0, \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 \end{cases}$$

найти положительные корни с тремя верными знаками.

Решение.

Перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} x = \frac{x^3+y^3}{6} + \frac{1}{2} = \phi(x, y), \\ y = \frac{x^3-y^3}{6} + \frac{1}{3} = \psi(x, y). \end{cases}$$

Рассмотрим квадрат $R : (0 \le x \le 0.9, 0 \le y \le 0.9)$. Для точек этого квадрата имеем

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \le 0.95 < 1, \\ \left|\frac{\partial\phi}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| = \frac{x^2}{2} + \left|\frac{-y^2}{2}\right| \le 0.95 < 1. \end{cases}$$

$M = 0.95 < 1$, значит, можно применять метод итераций, полагая $x_0 = 0.5$,

$y_0 = 0.5$.

$$x_1 = \frac{0.5^3 + 0.5^3}{6} + \frac{1}{2} = 0.542, \quad y_1 = \frac{0.5^3 - 0.5^3}{6} + \frac{1}{3} = 0.333,$$
$$|0.5 - 0.542| + |0.5 - 0.333| = 0.209 > \frac{0.95}{1 - 0.95} 10^{-4} = 1.9 \cdot 10^{-3};$$
$$x_2 = \frac{0.542^3 + 0.333^3}{6} + \frac{1}{2} = 0.533, \quad y_2 = \frac{0.542^3 - 0.333^3}{6} + \frac{1}{3} = 0.354,$$
$$|0.542 - 0.533| + |0.333 - 0.354| = 0.03 > 1.9 \cdot 10^{-3};$$
$$x_3 = \frac{0.533^3 + 0.354^3}{6} + \frac{1}{2} = 0.533, \quad y_3 = \frac{0.533^3 - 0.354^3}{6} + \frac{1}{3} = 0.351,$$
$$|0.533 - 0.533| + |0.354 - 0.351| = 0.003 > 1.9 \cdot 10^{-3};$$
$$x_3 = \frac{0.533^3 + 0.351^3}{6} + \frac{1}{2} = 0.532, \quad y_3 = \frac{0.533^3 - 0.351^3}{6} + \frac{1}{3} = 0.351,$$
$$|0.533 - 0.532| + |0.351 - 0.351| = 0.001 > 1.9 \cdot 10^{-3};$$
$$x_4 = \frac{0.532^3 + 0.351^3}{6} + \frac{1}{2} = 0.532, \quad y_4 = \frac{0.532^3 - 0.351^3}{6} + \frac{1}{3} = 0.351,$$
$$|0.532 - 0.532| + |0.351 - 0.351| < 1.9 \cdot 10^{-3}.$$

5. Привести систему к виду, удобному для итераций

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x^3 - y = 0, \end{cases}$$

полагая $x_0 = 0.8$, $y_0 = 0.55$.

Решение.

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $g(x, y) = x^3 - y$.

Составим систему (33). Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 1.6, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 1.1,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} = 1.92, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} = -1,$$

Получаем систему

$$\begin{cases} 1 + 1.6\alpha_{11} + 1.92\alpha_{12} = 0, \\ 1.1\alpha_{11} - \alpha_{12} = 0, \\ 1.6\alpha_{21} + 1.92\alpha_{22} = 0, \\ 1 + 1.1\alpha_{21} - \alpha_{22} = 0. \end{cases}$$

Решая, получим

$$\alpha_{11} = -0.3, \quad \alpha_{12} = -0.3, \quad \alpha_{21} = -0.5, \quad \alpha_{22} = 0.4.$$

Тогда

$$\begin{cases} \phi(x, y) = x - 0.3(x^2 + y^2 - 1) - 0.3(x^3 - y), \\ \psi(x, y) = y - 0.5(x^2 + y^2 - 1) + 0.4(x^3 - y). \end{cases}$$

4.3 Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Почему методы (23)-(26) являются частными случаями метода простой итерации? Как в каждом из случаев выглядит функция $h(x)$?

2. Составить алгоритм поиска корня p-й степени из заданного числа a. Сколько итераций потребуется,чтобы найти корень третьей степени из числа 235 с точностью 10^{-4}?

3. Привести систему к виду, удобному для итераций

$$\begin{cases} x^2y^2 - 3x^2 - 6y^3 + 8 = 0, \\ x^4 - 9y + 2 = 0. \end{cases}$$

4. Найти константы q_1, q_2 для системы

$$\begin{cases} \sin x - y = 1.32, \\ \cos y - x = -0.85. \end{cases}$$

5. Изобразить графическую интерпретацию метода хорд.

6. Для каких положительных значений x сходится $x^{x^{x^{\cdots}}}$, то есть последовательность $\varphi_n(x) = x^{\varphi_{n-1}(x)}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\varphi_0(x) = 1$?

7. Какие особенности возникают при решении уравнения $x^2 = 0$ по методу Ньютона?

8. Как можно обобщить метод Ньютона и метод простой итерации для систем уравнений с n неизвестными?

4.4 Задание к лабораторной работе

Определите номер задания как остаток от деления числа N на 4. (N – суммарное количество букв в вашем Ф.И.О). Число m равно количеству букв в вашем полном имени.

Задание А. Найти положительные корни уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

1. $x^5 - ax + b = 0$, $a = 3 + 0.1m$, $b = 0.4 + 0.03m$. Методом Ньютона.

2. $x^7 - ax - b = 0$, $a = 2 + 0.05m$, $b = 0.1 + 0.01m$. Методом Ньютона.

3. $e^{-x} + x^2 - a = 0$, $a = 2 + 0.05m$. Методом простой итерации.

0. $e^{-x} - (x - a)^2 = 0$, $a = 1 + 0.04m$. Методом простой итерации.

Задание Б

1. Найти решения системы методом простой итерации

$$\begin{cases} ax^3 - y^2 - 1 = 0, \\ xy^3 - y - 4 = 0, \end{cases} \qquad a = 1 + 0.5m$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

2. Найти решения системы методом простой итерации

$$\begin{cases} ax^2 - xy - 5x + 1 = 0, \\ x + 3\lg x - y^2 = 0, \end{cases} \qquad a = 2 + 0.1m$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. Найти решения системы методом Ньютона

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + b) = x^2, \\ ax^2 + 2y^2 = 1, \end{cases} \qquad a = 0.5 + 0.1m, \quad b = 0.01m$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

0. Найти решения системы методом Ньютона

$$\begin{cases} e^{xy} = x^2 - y + a, \\ (x + 0.5)^2 + y^2 = b, \end{cases} \qquad a = 1 + 0.1m, \quad b = 0.6 + 0.01m$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.