1 Лабораторная работа "Элементы теории погрешностей"

1.1 Краткий теоретический материал

Приближенным числом a называется число, незначительно отличающееся от точного значения A и заменяющее его в вычислениях.

Предельной абсолютной погрешностью приближенного числа a называется величина Δ, такая что $|a - A| \le \Delta$.

Предельной относительной погрешностью приближенного числа a называется величина δ, такая что $|\frac{a-A}{a}| \le \delta$.

Из определений следует, что $a - \Delta \le A \le a + \Delta$. Для краткости пользуются записью $A = a \pm \Delta$.

Всякое положительное число a может быть представлено в виде конечной или бесконечной десятичной дроби

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \dots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \dots,$$

где α_i - цифры числа a, $(\alpha_i = 0, 1, \dots, 9)$. На практике мы преимущественно имеем дело с приближенными числами, представляющие собой конечные десятичные дроби,

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \dots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1}, \quad \alpha_m \ne 0.$$

Значащей цифрой приближенного числа называется всякая цифра в его изображении, кроме нуля, и нуль, если он находится между значащими цифрами или является представителем сохраненного разряда.

Значащая цифра называется *верной*, если абсолютная погрешность числа не превышает половины единицы разряда, соответствующей этой цифре.

Действия над приближенными числами

Пусть имеются два числа $A = a \pm \Delta a$, $B = b \pm \Delta b$.

Погрешность суммы чисел A и B (обозначается $\Delta(A+B)$) равна сумме погрешностей чисел A и B, или

$$\Delta(A+B) = \Delta A + \Delta B.$$

Имеют место следующие формулы

$$\Delta(A-B) = \Delta A + \Delta B,$$
$$\Delta(A \cdot B) = |B|\Delta A + |A|\Delta B,$$
$$\Delta\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{|B|\Delta A + |A|\Delta B}{B^2},$$
$$\Delta(f(A)) = |f'(A)|\Delta A,$$

где f - некоторая дифференцируемая функция.

Вычисление значений многочлена по схеме Горнера

При решении практических задач часто необходимо вычислять значения многочленов в некоторой точке x. Если коэффициенты многочлена или точка x заданы с погрешностью, то при вычислении степеней x погрешность

2. Даны числа $x = 1.2 \pm 0.1$, $y = 2.3 \pm 0.3$ Найти $x + y$, $x - y$, xy, $\frac{y}{x}$, x^3, $\cos y$.

Решение.

Найдем погрешности указанных действий

$$\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y = 0.1 + 0.3 = 0.4.$$

Тогда $x + y = (1.2 + 2.3) \pm 0.4 = 3.5 \pm 0.4$.

$$\Delta(x - y) = \Delta x + \Delta y = 0.4. \quad (x - y) = (1.2 - 2.3) \pm 0.4 = -1.1 \pm 0.4.$$

$$\Delta(x \cdot y) = |x|\Delta y + |y|\Delta x = 1.2 \cdot 0.3 + 2.3 \cdot 0.1 = 0.59.$$

$$xy = (1.2 \cdot 2.3) \pm 0.59 = 2.76 \pm 0.59.$$

$$\Delta\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{|y|\Delta x + |x|\Delta y}{x^2} = \frac{2.3 \cdot 0.1 + 1.2 \cdot 0.3}{1.2^2} = 0.41,$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2.3}{1.2} \pm 0.41 = 1.98 \pm 0.41,$$

$$\Delta(x^3) = |3x^2|\Delta x = 3 \cdot 1.2^2 \cdot 0.1 = 0.43.$$

$$x^3 = 1.2^3 \pm 0.43 = 1.728 \pm 0.43.$$

$$\Delta(\cos y) = |-\sin y|\Delta y = |\sin 2.3| \cdot 0.3 = 0.224.$$

$$\cos y = \cos 2.3 \pm 0.224 = -0.667 \pm 0.224.$$

3. Найти значение многочлена $y = 3x^3 + 2x + 2$ в точке 5 по схеме Горнера.

Решение.

Воспользуемся формулой (1)

$$P_0 = 3, \quad P_1 = 3 \cdot 5 + 0 = 15, \quad P_2 = 15 \cdot 5 + 2 = 77, \quad P_3 = 77 \cdot 5 + 2 = 387.$$

Значит $P(5) = 387$.

4. Найти многочлен, получающийся при делении многочлена

$$P(x) = 4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 9$$

на $x - 2$.

Воспользуемся схемой Горнера

$$P_0 = 4, \quad P_1 = 4 \cdot 2 + 5 = 13, \quad P_2 = 13 \cdot 2 - 3 = 23, \quad P_3 = 23 \cdot 2 + 0 = 46.$$

Имеем

$$\frac{P(x)}{x - 2} = 4x^3 + 13x^2 + 23x + 46.$$

может сильно накапливаться. В этих случаях для уменьшения вычислительной погрешности применяют алгоритм вычисления значений многочлена по схеме Горнера.

Рассмотрим

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= (\dots(((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + \dots)x + a_n$$

Из последнего представления многочлена видно, что возможен следующий алгоритм счета

$$P_0 = a_0, \quad P_k = P_{k-1}x + a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{1}$$

Тогда $P_n = P(x)$ – значение многочлена в точке x, а

$$f(y) = P_0y^{n-1} + P_1y^{n-2} + \dots + P_{n-2}y + P_{n-1}$$

– является многочленом, полученным при делении многочлена $P(y)$ на $(y - x)$.

Рассмотрим, как накапливается погрешность при применении схемы Горнера.

$$\Delta P_0 = \Delta a_0, \quad \Delta P_1 = \Delta P_0|x| + |P_0|\Delta a_0, \text{ и т.д.} \tag{2}$$

Таким образом, при такой схеме учитывается только погрешность сложения и погрешность умножения.

1.2 Примеры

1. Найти верные и значащие цифры числа $A = 1203.456 \pm 0.37$

Решение.

Все цифры являются значащими, так как единственный ноль, который имеется в десятичном представлении числа A, заключен между значащими цифрами 2 и 3.

Проверим, какие цифры являются верными. Проверку начнем с последней цифры в записи числа (6). 6 соотвествует разряд 10^{-3}. $0.37 > \frac{1}{2}10^{-3}$, значит, по определению, цифра 6 не является значащей. Цифре 5 соответствует разряд 10^{-2}. $0.37 > \frac{1}{2}10^{-2}$, Аналогично имеем $0.37 > \frac{1}{2}10^{-1}$, значит, цифра 4 не является верной. $0.37 < \frac{1}{2}10^{0}$, значит, цифра 3, (следовательно и все предыдущие цифры) являются верными.

Ответ: значащие цифры 1 2 0 3 4 5 6,

верные цифры 1 2 0 3.

1.3 Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Округляя следующие числа до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительные погрешности полученных приближенных чисел.

а) 0.34567 б) 34.6754 в) 0.0009 г) 0.98723 д) -1.674523 е) -10.6734

2. Определить абсолютную погрешность следующих приближенных чисел по их относительным погрешностям

а) $a = 1345$, $\delta = 0,1\%$ б) $a = 0,6785$, $\delta = 5\%$, в) $a = 13.45$, $\delta = 10\%$, г) $a = -232,78$, $\delta = 13\%$.

3. Определить количество верных знаков в числе a, если известна его относительная погрешность а) $a = 1345$, $\delta = 0,1\%$ б) $a = 0.6785$, $\delta = 5\%$, в) $a = 13.45$, $\delta = 10\%$, г) $a = -232,78$, $\delta = 13\%$.

4. Доказать, что относительная погрешность суммы нескольких чисел одного и того же знака заключена между наименьшей и наибольшей погрешностями слагаемых.

5. Доказать, что относительная погрешность разности двух положительных чисел больше относительных погрешностей этих чисел.

6. Высота h и радиус R основания цилиндра измерены с точностью до 0.5%. Какова предельная относительная погрешность вычисления объема цилиндра?

7. С какой точностью следует определить радиус основания R и высоту h цилиндра, чтобы его объем можно было измерить с точностью 1%?

1.4 Задание к лабораторной работе

Найти значение многочлена

$$P(x) = a_0x^5 + 0.387x^4 + 1.4789x^3 + 1.0098x^2 + 1.222x + a_5$$

в точке $x = x_0$, используя схему Горнера. Известно, что $a_0 = 1.234 \pm 0.001$, $a_5 = -2.345 \pm N \cdot 10^{-4}$, $x = 0.234N \pm 3 \cdot 10^{-3}$. (N – количество букв в вашем ФИО).

Рассчитать погрешность полученного значения. Найти верные и значащие цифры результата. Рассчитать, какой бы была погрешность, если бы вычисления велись без применения схемы Горнера, и сравнить с погрешностью, полученной при применении схемы Горнера.

Найти коэффициенты многочлена, полученного при делении многочлена $P(x)$ на $x - c$, где $c = 0.987 \pm N \cdot 10^{-4}$.