2 Лабораторная работа "Интерполяция и приближение функций"

2.1 Краткий теоретический материал

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана *сетка* из $n+1$ узла $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. В узлах значения некоторой функции $y_i = y(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Требуется построить многочлен $L(x)$ степени не выше n, такой что $L(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$.

Многочлен $L(x)$ называется *интерполяционным многочленом* для функции $y(x)$, построенным по узлам (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$.

Величина $r(x) = y(x) - L(x)$ характеризует точность приближения функции $y(x)$ многочленом $L(x)$ в точке x и называется *погрешностью интерполяции* в точке x.

Верна следующая оценка

$$|r(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|\omega(x)|, \tag{5}$$

где $M = \max_{\xi\in[a,b]} |y^{(n+1)}(\xi)|$, $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$.

Способы построения интерполяционного многочлена.

Многочлен Лагранжа

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x),$$

где

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Многочлен Ньютона

$$\begin{aligned} N(x) = y_0 + p(x_0)(x - x_0) + p(x_0, x_1)(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \cdots + p(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}), \end{aligned} \tag{6}$$

где через $p(x_0, \ldots, x_{k-1})$ обозначена разделенная разность k-того порядка.

Разделенные разности считаются по следующему правилу:

Разность первого порядка

$$p(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0};$$

Разность второго порядка

$$p(x_0, x_1) = \frac{p(x_1) - p(x_0)}{x_2 - x_0};$$

...

Разность k-го порядка

$$p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) = \frac{p(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) - p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-2})}{x_k - x_0}.$$

Многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов

Пусть сетка на отрезке $[a, b]$ такова, что $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \ldots, n$, h некоторая постоянная, называемая *шагом сетки*. Такая сетка называется *равномерной*, а узлы этой сетки - *равноотстоящими*.

Многочлен Ньютона в этом случае имеет вид:

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 2!}(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{h^n n!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}), \quad (7)$$

где через $\Delta^k y_0$ обозначена конечная разность k-того порядка.

Конечные разности считаются по следующему правилу:

Разность первого порядка $\Delta y_0 = y_1 - y_0$.

Разность второго порядка $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$.

....

Разность k-го порядка $\Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0$.

Разности удобно вычислять, помещая их значения в таблицу

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	...
y_0	$y_1 - y_0 = \Delta y_0$	$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0$	$\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \Delta^3 y_0$	...
y_1	$y_2 - y_1 = \Delta y_1$	$\Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1$	$\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta^3 y_1$	...
y_2	$y_3 - y_2 = \Delta y_2$	$\Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta^2 y_2$	$\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = \Delta^3 y_2$	...
y_3	$y_4 - y_3 = \Delta y_3$	$\Delta y_4 - \Delta y_3 = \Delta^2 y_3$	$\Delta^2 y_4 - \Delta^2 y_3 = \Delta^3 y_3$	...
y_4	$y_5 - y_4 = \Delta y_4$	$\Delta y_5 - \Delta y_4 = \Delta^2 y_4$	...	...
y_5	$y_6 - y_5 = \Delta y_5$	...	...	...
y_6	...	...	...	...

Каждое значение таблицы получено вычитанием двух соседних значений предыдущего столбца. Аналогично можно составить таблицу разделенных разностей.

Сплайн-интерполяция

Интерполяционный многочлен при больших n зачастую сильно осциллирует, поэтому погрешности значений функций в промежуточных точках бывают слишком велики. Поэтому рекомендуется при больших n использовать *сплайн k-го порядка*, ($k < n$), то есть функцию $s(x)$, которая на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ является многочленом не выше k-й степени, кроме того, функция $s(x)$ и все ее производные до $k-1$ порядка непрерывны на отрезке $[x_0, x_n]$, и в заданных значениях x_i $s(x_i) = y_i$.

Опишем процесс построения сплайна второго порядка (параболического сплайна).

Пусть

$$s(x) = \begin{cases} a_0(x-x_0)^2 + b_0(x-x_0) + c_0, \text{ при } x \in [x_0, x_1], \\ a_1(x-x_1)^2 + b_1(x-x_1) + c_1, \text{ при } x \in [x_1, x_2], \\ a_2(x-x_2)^2 + b_2(x-x_2) + c_2, \text{ при } x \in [x_2, x_3], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}, \text{ при } x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

Задача построения сплайна заключается в определении коэффициентов a_i, b_i, c_i, $i = 0, \dots, n-1$.

Из условия $s(x_i) = y_i$ имеем

$$c_i = y_i, \quad , i = 0, \dots n-1. \tag{8}$$

Из условий непрерывности функции s и ее производной s' имеем

$$a_i h_i^2 + b_i h_i = y_{i+1} - y_i, \quad i = 0, \dots, n-1, \tag{9}$$

$$2a_i h_i + b_i = b_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-2. \tag{10}$$

Здесь через h_i обозначена разность $x_{i+1} - x_i$.

Заметим, что число неизвестных системы (9-10) на единицу больше числа уравнений, поэтому можно ввести дополнительное условие, например $s'(x_0) = 0$. Получим $b_0 = 0$. Выразив a_i из уравнения (10), и подставив в уравнение (9), получим следующую реккурентную формулу

$$b_0 = 0; \quad b_{i+1} = \frac{2(y_{i+1} - y_i)}{h_i} - b_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \tag{11}$$

Затем последовательно найдем все a_i:

$$a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{2h_i}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{12}$$

Приближение функций методом наименьших квадратов

Пусть заданы точки (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$. Требуется среди функций специального вида

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \varphi_j(x)$$

выбрать ту, график которой проходит как можно ближе к заданным точкам.

Здесь $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$ – заданная система базисных чебышевских функций, a_j, $j = 1, \ldots, m$ - коэффициенты, подлежащие определению.

"Меру близости"функции $\varphi(x)$ к заданным точкам можно рассчитать как

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - y_i)^2.$$

Для определения коэффициентов a_j, $j = 1, \ldots, m$ решают систему линейных уравнений

$$Ca = b,$$

где $C = \{c_{kl}\}$ – матрица $m \times m$. Коэффициенты матрицы $c_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i)$, b - вектор-столбец с элементами $b_k = \sum_{i=1}^{n} \varphi_k(x_i) y_i$. a – вектор-столбец неизвестных коэффициентов $a = \mathrm{col}(a_1, \ldots, a_m)$.

Наиболее распространенные наборы функций φ_j:

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}\},$$
$$\{1 - x, x(1 - x), x^2(1 - x), \ldots, x^{m-1}(1 - x)\},$$
$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots\},$$
$$\{1, e^x, e^{2x}, \ldots, e^{(m-1)x}\}.$$

Заметим, что если $\varphi_j = x^{j-1}$, и $m = n$, то функция φ совпадает с интерполяционным многочленом, построенном по набору значений (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$.

2.2 Примеры

1. Дана таблица значений функции $y(x)$

x	1	4	5	6
y	2	3	2	3

Построить интерполяционный многочлен $L(x)$, *проходящий через заданные узлы.*

Решение.

$n = 3$, т.к. $x_0 = 1$, $x_3 = 6$. Построим многочлены l_0, l_1, ..., l_3.

$$l_0 = \frac{(x-4)(x-5)(x-6)}{(1-4)(1-5)(1-6)} = 2 - 1.233x + 0.25x^2 - 0.0167x^3,$$

$$l_1 = \frac{(x-1)(x-5)(x-6)}{(4-1)(4-5)(4-6)} = -5 + 6.833x - 2x^2 + 0.1667x^3,$$

$$l_2 = \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(5-1)(5-4)(5-6)} = 6 - 8.5x + 2.75x^2 - 0.25x^3,$$

$$l_3 = \frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(6-1)(6-4)(6-5)} = -2 + 2.9x - x^2 + 0.1x^3.$$

Тогда

$$L(x) = 2l_0(x) + 3l_1(x) + 2l_2(x) + 3l_3(x) = -5 + 9.733x - 3x^2 + 0.2667x^3.$$

2. С какой погрешностью можно найти $\log_2 0.9$ *по известным значениям* $\log_2 \frac{1}{2}$, $\log_2 \frac{1}{4}$, $\log_2 1$ *?*

Решение.

Для оценки погрешности воспользуемся формулой (5). Имеем $f(x) = \log_2(x)$, $n = 2$, $f'''(x) = \frac{1}{2\ln 2} \frac{}{x^3}$; $\max_{t\in[\frac{1}{4},1]} |f'''(t)| = f'''(\frac{1}{4}) = \frac{64}{2\ln 2}$. Тогда

$$|r(0.9)| \le \frac{32}{3!\ln 2} \left| \left(0.9 - \frac{1}{4}\right) \left(0.9 - \frac{1}{2}\right) (0.9 - 1) \right| = 0.2.$$

3. Дана таблица значений функции

x	*1*	*2*	*4*	*6*
y	*2*	*-1*	*-2*	*-6*

Используя интерполяционный многочлен Ньютона, найти $y(3)$.

Решение.

Узлы не являются равноотстоящими, т.к. $2 - 1 \ne 4 - 2$.

Построим таблицу разделенных разностей.

x	y	$p(x_i)$	$p(x_i, x_{i+1})$	$p(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
1	2	$\frac{-1-2}{2-1} = -3$	$\frac{-0.5+3}{4-1} = 0.83$	$\frac{-0.37-0.83}{6-1} = -0.24$
2	-1	$\frac{-2+1}{4-2} = -0.5$	$\frac{-2+0.5}{6-2} = -0.37$	
4	-2	$\frac{-6+2}{6-4} = -2$		
6	-6			

Для построения многочлена Ньютона нам необходима верхняя строка построенной таблицы.

Имеем по формуле (6)

$$N(x) = 2 + (-3)(x-1) + 0.83(x-1)(x-2) - 0.24(x-1)(x-2)(x-4),$$

или

$$N(x) = 8.58 - 8.85x + 2.51x^2 + 0.24x^3.$$

$$y(3) = N(3) = -1.86.$$

Заметим, что из-за округлений значений разделеных разностей возникает некоторая погрешность при вычислении $N(6)$.

4. Построить многочлен наименьшей степени, принимающий в данных точках заданные значения

x	0.1	0.2	0.3	0.4
y	6	0	2	6

Решение.

Узлы являются равноотстоящими, т.к. $0.2 - 0.1 = 0.3 - 0.2 = 0.4 - 0.3$, поэтому построим многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов. $h = 0.1$.

Построим таблицу конечных разностей.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.1	6	$0 - 6 = -6$	$2 + 6 = 8$	$2 - 8 = -6$
0.2	0	$2 - 0 = 2$	$4 - 2 = 2$	
0.3	2	$6 - 2 = 4$		
0.4	6			

Для построения многочлена Ньютона нам необходима верхняя строка построенной таблицы.

Имеем по формуле (7)

$$N(x) = 6 + \frac{-6}{0.1}(x - 0.1) + \frac{8}{0.1^2 \cdot 2}(x - 0.1)(x - 0.2) + \\ + \frac{-6}{0.1^3 \cdot 6}(x - 0.1)(x - 0.2)(x - 0.4),$$

или

$$N(x) = 26 - 290x + 1000x^2 - 1000x^3.$$

5. Для функции $y = e^x$ построить многочлен второй степени наилучшего среднеквадратичного приближения, используя значение функции в 5 узлах на отрезке $[-1, 1]$.

Решение.

Выберем 5 узлов на отрезке $[-1, 1]$, $x_1 = -1$, $x_2 = -0.5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0.5$, $x_5 = 1$.

Найдем $y_i = e^{x_i}$, $y_1 = e^{-1} = 0.3860$, $y_2 = 0.607$, $y_3 = 1$, $y_4 = 1.649$, $y_5 = 2.718$.

Так как требуется приблизить функцию многочленом второй степени $\varphi = a_1 + a_2x + a_3x^2$, то $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, $\varphi_3(x) = x^2$. Таким образом, $m = 3$. Найдем коэффициенты матрицы C.

$$c_{11} = \sum_{i=1}^{5} \varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) = \sum_{i=1}^{5} 1 = 5,$$

$$c_{12} = \sum_{i=1}^{5} \varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i) = \sum_{i=1}^{5} x_i = 0,$$

$$c_{13} = \sum_{i=1}^{5} \varphi_1(x_i)\varphi_3(x_i) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = \frac{5}{2},$$

$$c_{21} = c_{12},$$

$$c_{22} = \sum_{i=1}^{5} \varphi_2(x_i)\varphi_2(x_i) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = \frac{5}{2},$$

$$c_{23} = \sum_{i=1}^{5} \varphi_2(x_i)\varphi_3(x_i) = \sum_{i=1}^{5} x_i^3 = 0,$$

$$c_{31} = c_{13},$$

$$c_{32} = c_{23},$$

$$c_{33} = \sum_{i=1}^{5} \varphi_3(x_i)\varphi_3(x_i) = \sum_{i=1}^{5} x_i^4 = \frac{17}{8}.$$

Также найдем элементы столбца b.

$$b_1 = \sum_{i=1}^{5} \varphi_1(x_i)y_i = \sum_{i=1}^{5} e^{x_i} = 6.341,$$

$$b_2 = \sum_{i=1}^{5} \varphi_2(x_i)y_i = \sum_{i=1}^{5} x_i e^{x_i} = 2.872,$$

$$b_3 = \sum_{i=1}^{5} \varphi_3(x_i)y_i = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 e^{x_i} = 3.650.$$

Решим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{17}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.341 \\ 2.872 \\ 3.650 \end{pmatrix}.$$

Получим $a_1 = 0.944$, $a_2 = 1.147$, $a_3 = 0.5477$.

Таким образом, имеем многочлен $\varphi(x) = 0.944 + 1.147x + 0.5477x^2$.

Многочлен $\varphi(x)$ хорошо приближает функцию $y = e^x$. Это можно видеть на рисунке 1.

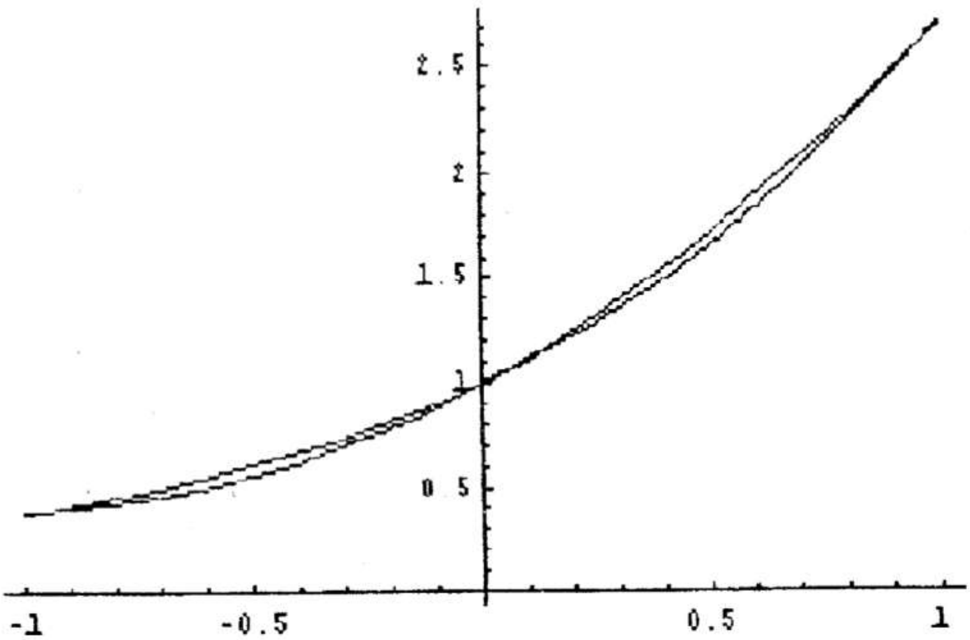

Рис. 1: Среднеквадратичное приближение функции $y = e^x$ многочленом второй степени

6. Построить параболический сплайн для таблично заданной функции.

x	1	2	3	4	5	6
y	2	3	5	3	4	6

Решение.

Ищем функцию $s(x)$ в виде

$$s(x) = \begin{cases} a_0(x-1)^2 + b_0(x-1) + 2, & \text{при } x \in [1,2], \\ a_1(x-2)^2 + b_1(x-2) + 3, & \text{при } x \in [2,3], \\ a_2(x-3)^2 + b_2(x-3) + 5, & \text{при } x \in [3,4], \\ a_3(x-4)^2 + b_3(x-4) + 3, & \text{при } x \in [4,5], \\ a_4(x-5)^2 + b_4(x-5) + 4, & \text{при } x \in [5,6], \end{cases}$$

Здесь мы уже подставили значения $c_i = y_i$. Все $h_i = 1$. Воспользуемся формулой (11)

$$b_0 = 0; \quad b_1 = \frac{2(y_1 - y_0)}{h_0} - b_0 = 2(3 - 2) - 0 = 2,$$

$$b_2 = \frac{2(y_2 - y_1)}{h_1} - b_1 = 2(5 - 3) - 2 = 2,$$

$$b_3 = \frac{2(y_3 - y_2)}{h_2} - b_2 = 2(3 - 5) - 2 = -6,$$

$$b_4 = \frac{2(y_4 - y_3)}{h_3} - b_3 = 2(4 - 3) + 6 = 8,$$

$$b_5 = \frac{2(y_5 - y_4)}{h_4} - b_4 = 2(6 - 4) - 8 = -4,$$

Найдем теперь a_i по формуле (12)

$$a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{2h_i},$$

$$a_0 = \frac{b_1 - b_0}{2h_0} = \frac{2 - 0}{2} = 1,$$

$$a_1 = \frac{b_2 - b_1}{2h_1} = \frac{2 - 2}{2} = 0,$$

$$a_2 = \frac{b_3 - b_2}{2h_2} = \frac{-6 - 2}{2} = -4,$$

$$a_3 = \frac{b_4 - b_2}{2h_3} = \frac{8 + 6}{2} = 7,$$

$$a_4 = \frac{b_5 - b_4}{2h_4} = \frac{-4 - 8}{2} = -6.$$

Тогда

$$s(x) = \begin{cases} (x - 1)^2 + 2, \text{ при } x \in [1, 2], \\ 2(x - 2) + 3, \text{ при } x \in [2, 3], \\ -4(x - 3)^2 + 2(x - 3) + 5, \text{ при } x \in [3, 4], \\ 7(x - 4)^2 - 6(x - 4) + 3, \text{ при } x \in [4, 5], \\ -6(x - 5)^2 + 8(x - 5) + 4, \text{ при } x \in [5, 6]. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что условия интерполяции, непрерывности для функции $s(x)$ выполнены, а также выполнено условие непрерывности производной.

2.3 Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Построить многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов.

2. Функция $y(x)$ задана таблицей

x	1	4	5	8
y	2	3	5	13

Как можно найти x, при котором $y(x) = 4$?

3. Зная значения $\sin x$ при $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, найти $\sin\frac{\pi}{12}$ и оценить погрешность.

4. Дана таблица натуральных логарифмов чисел от 1 до 10. Какова погрешность линейной интерполяции, если шаг равен 0.001?

5. Можно ли применять метод наименьших квадратов, если $m > n$?

6. Для таблично заданной функции построить функцию наилучшего среднеквадратичного приближения, полагая $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = \sin x$, $\varphi_3(x) = \cos x$.

x	-1	0	2	3
y	2	3	5	3

7. Описать алгоритм построения сплайна первого порядка (линейного сплайна).

8. Получить формулы для вычисления коэффициентов кубического сплайна. Сколько дополнительных условий на функцию s придется ввести?

9. Как определить погрешность сплайн-интерполяции?

10. С помощью сплайн-интерполяции определить значение таблично заданной функции $y(x)$ в точке $x = 0.9$.

x	-1	0	1	2	3	4
y	2	3	5	6	7	10

11. Показать, что имеется не более одного многочлена степени не выше n, такого, что $L(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$.

12. Провести для интерполяционного многочлена Ньютона оценку остаточного члена.

2.4 Задание к лабораторной работе

Для фукции $y(x)$, заданной таблично, построить многочлен Ньютона или Лагранжа (по выбору), параболический сплайн и функцию наилучшего среднеквадратичного приближения, полагая

$$\varphi_1 = 1 - x, \quad \varphi_2 = x(1-x)^{i-1}, \quad i = 2, \ldots, 5, \text{ если } N = 3k,$$

$$\varphi_1 = 1 - x, \quad \varphi_i = x^{i-1}(1-x), \quad i = 2, \ldots, 5, \text{ если } N = 3k+1,$$

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = \sin x, \quad \varphi_3 = \cos x, \quad \varphi_4 = \sin 2x, \quad \varphi_5 = \cos 2x,$$

если $N = 3k + 2$, где N - количество букв в Ф.И.О.

Уметь определять значения функции в произвольной точке.

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	0.2N	0.3m	0.5k	0.6N	0.7m	k	0.8 N	1.2k	1.3m	N

Здесь m–количество букв в фамилии, k- количество букв в имени.