Памятка при написании билетов

1. Вещи, не написанные в билете выделяются красным цветом. Вещи, написанные частично выделяются оранжевым цветом. Вещи, полностью написанные никак не выделяются и пишутся чёрным цветом.
2. Если в билете написано “теорема о …” то не стоит сразу же писать формулировку и доказательство теоремы. Сначала дайте определения тем вещам, о которых вы говорите, если они не были введены в более ранних билетах. Например, в билете о единственности предела сходящейся последовательности стоит определить что такое предел, что такое сходящаяся последовательность и только после этого доказывать теорему.
3. Используйте [формулы](https://docs.google.com/document/d/1dBJxKQWnIO79kBFQdrsDVT1lx0lrbXV2v6LOgiU-wU8/edit?usp=sharing) для математических выражений. Даже одиночные переменные, такие как i стоит выделять в формулы. Это выглядит приятно.
4. Думайте о том, что пишете. Не стоит просто переписывать текст из тетрадки. Сначала поймите и убедитесь, что там всё верно.
5. Билет, который вы написали должен быть в первую очередь понятен. Иногда просто формального доказательства недостаточно, потому что его невозможно читать. Постарайтесь объяснить читателю те вещи, которые сначала показались вам непонятными, когда вы разбирались в билете.
6. Если вы читали билет(написанный кем то другим) и что то не поняли и долго разбирались, то допишите его так, чтобы другим не пришлось тратить много времени на разбирательства с билетом. Для людей, которые пишут билеты многие вещи могут показаться очевидными, хотя они могут при этом быть неочевидны большинству читателей. Мы стараемся всё расписывать, но иногда нам лень.

**Оглавление**

[Проблемы](#_tgi2eexmwyyn)

[Неопределённый интеграл](#_kq34mg6lkjx6)

[1. Первообразная и её общий вид.](#_bl8l3oqgswz8)

[2. Свойства неопределённого интеграла.](#_347guri58hwe)

[3. Интегрирование заменой переменной и подстановкой в неопределённом интеграле.](#_ufnbmgfmdn81)

[4. Интегрирование по частям неопределённого интеграла.](#_jxt7js29v7jo)

[Таблица неопределенных интегралов](#_8qdnont4evvn)

[Определённый интеграл](#_eeg28ty39kx4)

[5. Определённый интеграл. Необходимое условие интегрируемости функции.](#_8at6l6lh907b)

[6. Суммы Дарбу. Верхний и нижний интегралы Дарбу и их свойства.](#_ivekmrxrzcxp)

[7. Лемма Дарбу-Римана.](#_ohefqub7kmn1)

[8. Критерий интегрируемости.](#_srwt9iw6wbtr)

[a) В терминах s(T), S(T).](#_9gf86g3k1xnt)

[Колебание функции f на отрезке [a, b]: ([a, b]) = { f(x) | x [a, b] } - { f(x) | x [a, b] }](#_1nkbdvnbm4av)

[9. Свойства интеграла Римана.](#_yc9rpmj11rmv)

[10. Интегрируемость непрерывной функции.](#_nw8tnczb7j4h)

[11. Интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва.](#_ijq2ntdkaxk8)

[12. Интегрируемость функции монотонной на отрезке.](#_woq29hfdalw1)

[13. Теоремы о среднем для интеграла.](#_qdumkjxuilm)

[Первая теорема](#_kceql9htwlcu)

[Вторая теорема](#_xc8reob5e1xy)

[14. Свойства интеграла с переменным верхним пределом интегрирования: непрерывность, дифференцируемость.](#_ecgwwpdvvxah)

[Теорема о непрерывности](#_6tdq1ci2advp)

[Теорема о диффиренцируемости](#_x7o56xpa3kf5)

[15. Теорема и формула Ньютона-Лейбница.](#_3kjz6nschd08)

[Векторные пространства и ФМП](#_1t0vv4ljqnui)

[16. Метрические пространства. Открытые и замкнутые множества.](#_n0hwzjbmv5n3)

[17. Компактные множества в метрическом пространстве. Теорема о свойствах компакта в метрическом пространстве.](#_ec43alpxvmov)

[18. Теорема о компактности m- мерного отрезка.](#_4pjs6tjyxi9q)

[19. Два критерия компактности в m- мерном пространстве.](#_n7pjqz5z252n)

[20. Векторные пространстваRm. Скалярные произведения, модуль, расстояние.](#_q2yqmm1s409p)

[21. Сходимость в Rm и покоординатная сходимость.](#_43kybt9ii59t)

[22. Теорема Больцано-Вейерштрасса в Rm.](#_rcxdt6o535uf)

[23. Критерий Коши для последовательности в Rm.](#_ylgynp93vp6t)

[24. Предел функции по направлению и предел по совокупности переменных.](#_bvlu3vkbqjwv)

[25. Непрерывные функции многих переменных. Непрерывность сложной функции многих переменных.](#_38nqrefpqxua)

[26. Теоремы Вейерштрасса для функций многих переменных.](#_v4puvolhr5nt)

[27. Дифференцируемость функций многих переменных, вид нелинейной части.](#_o7lluw3c99q0)

[28. Достаточные условия дифференцируемости функций многих переменных.](#_v5depyuwty9v)

[29. Дифференцируемость вектор-функций, дифференциал, матрица Якоби.](#_ycq6nn92zqyw)

[30. Дифференцируемость суперпозиции вектор-функций.](#_r9q8d6aqkjzn)

[31. Равенство смешанных производных.](#_xexvc3bkhanq)

[32. Теорема существования неявно заданной функции одной переменной.](#_pd47yn87kr1)

[33. Разрешимость систем функциональных уравнений.](#_2vz4fxmbfvzh)

[34. Свойства отображений с неравным нулю Якобианом (связь Якобианов прямого и обратного отображений, существование локально обратного отображения, принцип открытости и сохранения области, локальная взаимнооднозначность и взаимнонепрерывная диффиренцируемость)](#_o0i875z63ys2)

[35. Достаточные условия локального абсолютного экстремума функций многих переменных](#_v7qiivccncgl)

[36. Оптимизационные задачи, условный экстремум, сведение к безусловному (абсолютному) экстремуму.](#_km5ly4vhv2nk)

[37. Метод множителей Лагранжа. Теорема Лагранжа.](#_w33dqj6ybkkf)

[38. Достаточные условия в методе множителей Лагранжа.](#_sh3ykw48oz58)

## 

## 

# Проблемы

1. В конспекте есть про множества Лебеговой меры нуль. И вроде Макаров периодически это говорил - возможно, стоит впилить.
2. В 15 билете недоказанный факт. Почему из непрерывности функции следует существование первообразной?

# 

# Неопределённый интеграл

## 1. Первообразная и её общий вид.

- первообразная для функции на промежутке , если

**Теорема об общем виде первообразной**

Пусть - первообразная для на

**тогда**

- общий вид первообразной для на

1. - первообразная на
2. - первообразная на

**Док-во:**

**1)**Возьмём

Пусть

Тогда

**2)** Пусть - первообразная на

Рассмотрим функцию

Заметим, что

на

По теореме Лагранжа (теорема о конечных приращениях):

Значит верно

Значит, где

(На всякий случай, - тождественно равно(на всей области определения))

## 2. Свойства неопределённого интеграла.

**Неопределенный интеграл** - совокупность всех первообразных функции   
По доказанной теореме об общем виде первообразной, можно написать следующее:

**Свойства:**

**1)**Пусть - имеет первообразную на , тогда:

**2)**ПустьF(x) - диффиренцируема на Е, тогда:

**3)**Пусть и имеют первообразную на , тогда:

а) - имеет первообразную на

б)

**4)**Пусть имеет первообразную на , тогда:

**Док-во:+**

**1)** Пусть - первообразная на

Тогда

**2)**

**3) a)** Положим

Тогда

Следовательно - первообразная для на

**б)** Требуется доказать равенство множеств и

Под множеством понимается множество всевозможных сумм элементов, взятых из и .

(как мы помним, неопределённый интеграл - множество)

Покажем, что

Теперь покажем, что

, где

**4)** Пусть - первообразная на

Тогда - первообразная т.к.

Теперь аналогично докажем равенство множеств и

Возьмём произвольный .

Теперь возьмём произвольный

## 

## 

## 3. Интегрирование заменой переменной и подстановкой в неопределённом интеграле.

**Теорема**

Пусть - дифференцируема на , у существует первообразная на , определена на .

**Тогда**

- первообразная на

**Док-во:**

Просто продифференцируем и убедимся

**Следствия:**

**1)**

**2)** - это та форма, в которой мы обычно юзаем эту теорему.

## 4. Интегрирование по частям неопределённого интеграла.

**Теорема:**

Пусть и определены и дифференцируемы на и первообразная дляна

Тогда первообразная для на и выполнено равенство:

**Док-во:**

Т.к. дифференцируемы на , то по свойству производной дифференцируема на и верно равенство:

Перенесём слагаемые и получим

Т.к. левая часть имеет первообразную, то и правая её имеет.  
В таком случае, от обеих частей существуют и неопределённые интегралы и если мы их возьмём - равенство сохранится.

(вообще говоря , но т.к. в обеих частях стоят интегралы, эта константа всё равно съестся. Формально, нужно опять доказывать равенство множеств при таком переходе, но это довольно очевидно.

Так как (по определению дифференциала), то формулу, доказанную в теореме можно переписать в более красивом виде

. Здесь ,

## 

## 

## Таблица неопределенных интегралов

# Определённый интеграл

## 5. Определённый интеграл. Необходимое условие интегрируемости функции.

**Разбиение отрезка** - конечное упорядоченное по возрастанию множество точек .

**Обозначения:**

- отрезок - один из сегментов, концами которого явл. элементы разбиения

- длина отрезка , то есть

**Мелкость разбиения** -

**Интегральная сумма** функции на отрезке по разбиению :

Пусть - построеная на основе разбиения. Тогда:

интегральная сумма

Функция **интегрируема** на , если , где называется **определенным интегралом** или **интегралом Римана** функции на .

Обозначается

Другими словами, - определенный интеграл функции на , если:

**Теорема.** Необходимое условие интегрируемости функций.

Если функция интегрируема на отрезке , то ограничена на .

**Док-во:**

От противного. Пусть интегрируемана , но при этом неограничена на нем.

Пусть - определенный интеграл на . Возьмем некоторый . По определению предела найдется такая , что . Другими словами, . Но так как не ограничена, а - конечно, то также не ограничена на одном из отрезков . Тогда на нем можно выбирать точку , сколь угодно большую по модулю, а значит, и вся суммаможет быть сколь угодно велика по модулю и выходить за пределы интервала . Противоречие.

*Более строго о том, как выбрать эту точку и что с ней дальше делать:*

Без ограничения общности будем считать, что на неограничена сверху.

Пусть , то есть сумма на всех отрезках, кроме выбранного.

На существует точка такая что .

*Comment: Может возникнуть желание убрать из выражения, ведь мы требуем, чтобыбыла больше заданного числа и вроде бы если мы не будем из числа что то вычитать, оно тем более будет больше. Но может быть отрицательно и в этом случае вы всё испортите*

Выберем ,такое, что , выбрано ранее.

Тогда

## 

## 

## 

## 6. Суммы Дарбу. Верхний и нижний интегралы Дарбу и их свойства.

Здесь и далее используются обозначения из билета [№5](#_8at6l6lh907b).

**Обозначения:**

= ,

**Верхняя сумма Дарбу** функции на отрезке , соответствующая разбиению :

Соответственно, **нижняя**:

Рассмотрим разность:

называется **колебанием** функции на -том участке.

**Верхний интеграл Дарбу**:

**Нижний:**

**Свойства** интегралов Дарбу:

**1.1.**

**1.2.**   
**1.3** (3)

**Док-во:**

Докажем для (1), для (2) аналогично

Здесь док-во почему то для 2-х точек. Вообще что нужно для любого их количества, но это док-во несложно обобщить.  
Теперь докажем (3)

**Док-во:**

Да, собственно, очевидно же.  
Т.к. - число, то можно выбрать его в качестве

потому что на каждом отрезке в мы выбираем минимум, а в - максимум. Значит каждое слагаемое в меньше или равно каждого слагаемого в .

**2.** Пусть - измельчение . Тогда , .  
Это доказывается в лоб, понять легко, но писать громоздко.

**3.** Для любых разбиений , из :.

**Док-во:**Берём любые разбиения из . Рассмотрим .

– измельчение и . По 2 свойству [1 свойство]

**4.**   
**Док-во:**

+в лекциях Макаров ещё вводил и доказывал некоторые свойства точных верхних и точных нижний граней

## 7. Лемма Дарбу-Римана.

Пусть функция ограничена на отрезке .

**Тогда**

**Док-во:**  
Зафиксируем произвольное . Пусть и - верхняя и нижняя грани множества значений на . По определению , .

Пусть - количество точек разбиения на .

Возьмем

Возьмем любое разбиение , такое что

Построим разбиение

Так как - измельчение , то по свойству сумм Дарбу *(1)*

Теперь рассмотрим точки, принадлежащие и не принадлежащие , то есть точки из множества .

Их не более, чем (т.к. - число точек из ,лежащих в , а точки и лежат в )

Пусть - такая точка, и Так как , то .

Пусть - инфинумы множеств значений на соответственно.

Очевидно, .

Тогда на отрезке нижние суммы Дарбу для разбиений и отличаются не более, чем на , а суммарно не более, чем на (по определению ).

Тогда

Вспоминая *(1):*

, то есть, подводя итоги:

.

Совершенно аналогично найдем .

После чего возьмем и поймем, что теорема доказана.

## 8. Критерий интегрируемости.

## a) В терминах , .

## **Колебание** функции на отрезке :

**Обозначение:**

Сразу заметим, что

**Теорема:** Критерий интегрируемости.

Пусть функция ограничена на отрезке .

**Тогда**

интегрируема на тогда и только тогда, когда

**Док-во:**

Необходимость:

Так как интегрируема, то:

Возьмем любое

Так как - грани множества интегральных сумм, то:

То есть

Достаточность:

Возьмем произвольный > 0, пусть - такое разбиение , при котором

Так как , то:

Так как может быть сколь угодно мал, а - константы, то

Теперь воспользуемся леммой Дарбу-Римана, которая утверждает, что для каждой ограниченной функции верно:

Но у нас , так что на самом деле здесь написано, что определенный интеграл на по определению равен

б) В терминах, .

**Теорема:** Критерий интегрируемости.

Пусть функция ограничена на .

**Тогда**

интегрируема на тогда и только тогда, когда .

**Док-во:**

Доказательство достаточности является частью приведенного в пункте а.

Необходимость:

От противного.

Пусть

По лемме Дарбу-Римана получим, что при мелкости разбиения, стремящейся к нулю, точные грани множества интегральных сумм стремятся к разным числам, то есть у самой интегральной суммы предела нет и функция не интегрируема.

## 9. Свойства интеграла Римана.

**1)** Если интегрируема на и , то интегрируема на .

**Док-во:**Возьмём любое и покажем, что. Тогда по критерию Дарбу-Римана функция будет интегрируема.  
Т.к. интегрируема на , то по найдётся .

Пусть.

Т.к. - измельчение ,то

Рассмотрим разбиение отрезка , состоящее из всех точек входящих в .

Т.к. каждая его точка входит в , то

Таким образом, для любого мы нашли разбиение

**2)**Если интегрируема на и на , то интегрируема на , причём

**Док-во:**Возьмём

Т.к. интегрируема на , то по   
Т.к. интегрируема на , то по

Пусть . Тогда

Таким образом, функция инегрируема на по критерию интегрируемости Дарбу-Римана.

(т.к. приверно то, что )

**3.**Если и интегрируемы на , то интегрируема на и .

**4.**Если интегрируема на , то интегрируема на и

**Док-во:** 3-е и 4-ое свойства доказываются аналогичной 2-ому пункту техникой, простым расписыванием по определению.

**5.**Если и интегрируема на то

**Док-во:**Непосредственно по определению интеграла имеем:

**6.**Если интегрируема на , то интегрируема на и

**Док-во:** Сначала покажем, что интегрируема на с использованием критерия интегрируемости Дарбу-Римана.

Возьмём

Т.к. интегрируема на , то.

Рассмотрим произвольное . [т.к. - точная верхняя грань, то она положительна, т.к. иначе поменяем местами x, y и знак поменяется].  
Таким образом, А значит для того же разбиения верно . Таким образом - интегрируема на .

Теперь опять распишем интеграл по определению:

.

Важное замечание:  
Может показаться, что первая часть док-ва не нужна. Вот, вроде бы, всё и показали в самом конце. Раз первый интеграл меньше второго, то он должен существовать, неправда ли?  
Но на самом деле мы здесь неявно пользовались первой частью док-ва.  
Вот мы пишем что модуль интеграла равен модулю предела, потом переносим модуль под предел. Но так можно сделать только если предел существует. А его существование гарантируется тем, что функция интегрируема - это дано по условию. Потом мы дальше переходим к сумме модулей - и опять же нужно, чтобы правый предел существовал. Вот его уже существование гарантируется первой частью теоремы. Потому что он и есть по определению наш интеграл от .

**7.**Пусть и интегрируемы на . Тогда интегрируема на .

**Док-во:**Т.к. и интегрируемы на - они ограничены на (по необходимому условию интегрируемости). В таком случае, .

По найдутся разбиения

Положим . Тогда

Рассмотрим по тому же разбиению

Тогда

**8.**Пусть на во всех точках кроме

**Тогда**

**Док-во:** Рассмотрим ,

Тогда на во всех точках кроме

Покажем, что по определению.

.

Возьмём .Выберем

Тогда при т.к. по выбору и существует не более точек, в которых отлично от нуля и в каждой оно по модулю не превосходит по выбору

Таким образом, . Т.к. , то по уже доказанному свойству:

**9.**Вроде, это даже не свойство, а определение  
, где . Видимо, в изначальном определении подразумевается, что .  
**10.**  
**Док-во:** При - доказано в пункте 6. Остаётся лишь заметить, что  
При

На самом деле, смысл всех этих 3-х страниц не в том чтобы их выучить, а в том, чтобы понять методы доказательств и смочь вывести что угодно с использованием этих методов. Уверен, что здесь есть много мест к которым можно придраться и только понимая методы вы сможете ответить на любой вопрос.

## 10. Интегрируемость непрерывной функции.

- непрерывна на интегрируема на

**Док-во:**  
По [свойству Кантора](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%9A%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B0_%E2%80%94_%D0%93%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B5): - равномерно непрерывна на

Берем

следовательно

## 

## 

## 11. Интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва.

**Пусть:**

- непрерывна на , кроме быть может конечного числа точек с разрывом первого рода.

**Тогда:**

интегрируема на

**Док-во:**

Рассмотрим точку в которой функция терпит разрыв.

Для простоты будем считать, что это единственная точка с таким свойством - иначе можно поделить нашу область интегрирования на части на каждой из которых существует единственная такая точка, а потом воспользоваться тем свойством интеграла, что .

Определим новую функцию по следующему правилу:

для

для

непрерывна на

Значит - интегрируема на

По восьмому свойству интеграла Римана: f - так же интегрируема и

**Пусть:**

- ограничена на , - непрерывна на , кроме быть может конечного числа точек разрыва.

**Тогда:**

интегрируема на

**Док-во:**

Поступим аналогичным образом предыдущей теореме и скажем, что такая точка единственная на отрезке . Пусть это точка .

Покажем, что интегрируема на . Док-во того, что она интегрируема на - аналогично. По соответствующему свойству получим, что она будет интегрируема на .

Возьмём . Пусть ограничена числом .

Возьмём . Заметим, что

в силу ограниченности числом .

Тогда .

непрерывна на , значит по найдётся

Выберем разбиение отрезка следующим образом:  
, тогда

Таким образом, интегрируема на . Аналогично интегрируема на , значит интегрируема на .

## 

## 

## 12. Интегрируемость функции монотонной на отрезке.

**Пусть:**

- монотонна на ,

**Тогда:**

интегрируема на

**Док-во:**

Без ограничения общности: - возрастает

Выберем

Берем

В силу монотонности

Таким образом,

Comment: Это может показаться немного странно, но монотонности действительно достаточно, не нужно ни непрерывности, ни ограниченности.  
Вы спросите, что же делать, если есть, например, какие-нибудь ужасные точки разрыва или функция уходит куда-нибудь в бесконечность?  
На самом деле, монотонность - довольно сильное условие и многих плохих случаев не может случиться с монотонной функцией.

Например, можно доказать, функция, монотонная на отрезке - ограничена на нём.

Вот так то.

## 

## 

## 13. Теоремы о среднем для интеграла.

### Первая теорема

**Пусть:**

- интегрируемы на на

**Тогда:**

**Док-во:**

т.к. - интегрируема на , то по необходимому условию интегрируемости - ограничена на .

Сейчас объясним, как из предпоследней строчки следует последняя.  
Во-первых, интегралы из последней строчки существуют в силу того, что и - интегрируемы и в силу свойств из билета 9.  
В таком случае, можно расписать их по определению

Аналогично и второе неравенство.

### Вторая теорема

**Пусть:**

- интегрируема на - непрерывна на ,на

**Тогда:**

**Док-во:**

непрерывна интегрируема,на

по первой теореме.Пусть это равенство (1)

**1 случай:** Пусть.

Тогда по (1) получим нас устроит вообще

**2 случай:**

Из (1) имеем

Фактически , где и

В силу того, что непрерывна и существуют точки на , где достигает и , (а она достигает своих и по 2 [теореме Вейерштрасса](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%92%D0%B5%D0%B9%D0%B5%D1%80%D1%88%D1%82%D1%80%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%B0_%D0%BE_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8_%D0%BD%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B5)),по теореме [о промежуточном значении](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BE_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D0%B6%D1%83%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%BD%D0%BE%D0%BC_%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B8):, то есть , откуда следует, что

## 

## 

## 14. Свойства интеграла с переменным верхним пределом интегрирования: непрерывность, дифференцируемость.

- интегрируема на

То есть мы имеем дело с функциональным отображением:

Это и есть определение интеграла с переменным верхним пределом интегрирования

### Теорема о непрерывности

**Пусть:**

- интегрируема на

**Тогда:**

непрерывна на

**Док-во:**

Чтобы доказать, что - непрерывна на в точке нужно доказать, что .

Возьмём .  
Т.к. - интегрируема на - она ограничена на .

В таком случае, .

Выберем .

Возьмём .

Тогда и

### Теорема о диффиренцируемости

**Пусть:**

- непрерывна на

**Тогда:**

дифференцируема на

**Док-во:**

Для того, чтобы доказать, что д

ифференцируема на , нужно доказать, что . Чтобы найти производную - нужно, соответственно посчитать этот предел. Давайте сразу найдём его. Утверждается, что .

Сделаем некоторые преобразования, прежде чем считать предел:

[аналогично доказательству прошлой теоремы]

По 2 теореме о среднем:

Таким образом, требуется доказать, что

Т.к. , то (это легко показать по определению)

Значит

Т.к. - непрерывна на , то значение в любой точке равно пределу в этой точке, т.е. . Таким образом, вспоминая всю цепочку действий, получаем, что , то есть .  
Comment: На самом деле, я особо не задумывался над тем, что будет, если (а оно может быть), но вполне очевидно, что всё будет нормально и в некоторых местах просто придётся немножко попереставлять пределы интегрирования. Скорее всего, Макаров забьёт. Но всё же перед тем как идти сдавать ему - подумайте как вы будете отвечать на такой вопрос, чтобы не лажануть сидя уже перед ним.

## 15. Теорема и формула Ньютона-Лейбница.

**Пусть:**

непрерывна на

**Тогда:**

**Док-во:**

1. - т.к. - непрерывна
2. По той же причине первообразная, а значит
3. По теореме о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом интегрирования   
   А значит - это первообразная на   
   Тогда общий вид первообразной выглядит так:   
   Рассмотрим произвольную из таких первообразных .  
    =

**Следствие:**

Если - непрерывно дифференцируема(то есть её производная непрерывна) на , то

**Док-во:**

Т.к. - непрерывна, то можно воспользоваться теоремой Ньютона-Лейбница.  
учитывая тот факт, что получим требуемое равенство.

# 

# 

# Векторные пространства и ФМП (функции многих переменных)

## 16. Метрические пространства. Открытые и замкнутые множества.

Множество называется **метрическим пространтством**, если на нем задана функция (называемая **метрикой**), для которой выполняются следующие три свойства:

1. (неравенство треугольника)

Элементы называют **точками**.

Метрическое пространство с заданной метрикой обозначают .

Из этих свойств сразу же выводится следующий факт:

**Док-во:**

Возьмем любые .

, что и требовалось доказать.

**Открытый шар** с центром в точке радиуса - множество

Обозначается

Точка называется **внутренней точкой** множества , если существует открытый шар с центром в , полностью содержащийся в.

**Открытое множество** - такое, что все его точки - внутренние.

**Замкнутое множество** - такое, что дополнение к нему - открытое.

А также еще немного вещей, которые могут понадобиться:

**Теорема:**

Любой открытый шар - открытое множество.

**Док-во:**

Возьмем любую точку в нем. Пусть расстояние от нее до центра шара , а радиус шара . Тогда шар с центром в и радиусом полностью лежит в исходном шаре, то есть любая точка открытого шара - внутренняя. Тогда исходный шар открытое множество.

**Внутренность множества** , внутренностью называется - множество всех его внутренних точек.

**Теорема:**

Внутренность любого множества - открытое множество.

**Док-во:**

Для очевидно.

Иначе по определению: . - по предыдущей теореме, открытое множество .

Последовательность точек **сходится** к , если последовательность сходится к нулю.

**Предельная точка** множества - это точка, такая, что существует сходящаяся к ней последовательность точек, принадлежащих . *(Сама может ему не принадлежать!)*

Альтернативное определение: любой открытый шар с центром в содержит хотя бы одну точку из .

И еще одно: любой открытый шар с центром в содержит бесконечно много точек из .

Множество всех предельных точек обозначается так .

**Замыкание множества** - его объединение со своим множеством предельных точек.

Обозначается так

**Теорема:** 1 Критерий замкнутости.

Множество замкнуто тогда и только тогда, когда совпадает со своим замыканием.

Или, альтернативно: когда содержит все свои предельные точки.

**Док-во:**

Необходимость:

Пусть содержит все свои предельные точки, докажем, что оно замкнуто.

Возьмем любую точку из дополнения к . Так как все предельные точки лежат в , то - не предельная. Тогда найдется открытый шар с центром в , не содержащий точек из , то есть целиком лежащий в дополнении. Тогда дополнение к открыто, а - замкнуто.

Достаточность:

Пусть замкнуто, докажем, что оно содержит все свои предельные точки.

От противного.

Пусть - предельная точка . Тогда в любом открытом шаре с центром в найдется точка из , то есть никакой открытый шар с центром в не лежит целиком в , а значит, не открыто, откуда не замкнуто. Противоречие.

**Теорема**: 2 критерий замкнутости.

замкнуто

**Док-во:**

Н: Y замкнуто => => те

Д: Пусть тогда те , а следовательно по 1 критерию Y замкнуто

## 17. Компактные множества в метрическом пространстве. Теорема о свойствах компакта в метрическом пространстве.

Совокупность открытых множеств называется **покрытием** множества , если .

**Компакт** - это такое множество , что из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

**Диаметр множества** :

**Ограниченное множество** - такое, что его диаметр конечен.

**Теорема:**

Если - компакт в , то:

1. - ограничено.
2. - замкнуто.
3. Любое замкнутое подмножество также компакт.

**Док-во:**

Ограниченность:

Возьмем следующее покрытие : выберем какую-нибудь точку в и построим открытые шары всевозможных положительных радиусов с центром в ней. Так как - компакт, то из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Возьмем в этом подпокрытии шар наибольшего радиуса (допустим, ), все точки должны лежать в нем. Но тогда по правилу треугольника расстояние между любыми двумя точками не превышает , то есть ограничено.

Замкнутость:

Доказательство этого пункта приводится только для пространства, **отделимого по Хаусдорфу** - такого, что для любых двух различных точек в нем найдутся такие открытые шары с центрами в них, что их пересечение пусто.

Пусть

Докажем по определению, что открыто, тогда - замкнуто.

возьмем пару непересекающихся открытых шаров

*(Вот где была нужна отделимость по Хаусдорфу)*

Так как любая точка в теперь принадлежит некоторому открытому шару из , то является покрытием открытыми множествами и из него можно выделить конечное подпокрытие . Возьмем множество , то есть множество шаров с центром в , “соответствующих” шарам в . Их конечное число, так что мы имеем право взять среди них шар с наименьшим радиусом и заметить, что он не пересекается с , а так как - покрытие , то этот шар не пересекает и целиком лежит в . Тогда, по определению, - открытое, откуда - замкнутое.

Третий пункт:

Пусть - замкнутое подмножество . Докажем, что - компакт.

Возьмем - покрытие открытыми множествами и докажем, что из него можно выделить конечное подпокрытие.

Пусть . Так как замкнуто, то открыто. Рассмотрим множество . Заметим, что оно покрывает . Действительно, любая точка не только , но и всего пространства либо лежит в и покрывается , либо в и покрывается . Кроме того, всякое множество из - открытое. Тогда из можно выделить - конечное подпокрытие , а разность будет:

1. Покрывать .
2. Являться конечным подмножеством .

Мы доказали, что из любого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, а значит, - компакт.

Теорема доказана.

## 

## 

## 18. Теорема о компактности - мерного отрезка.

**m-мерный отрезок (брус)** - декартово произведение отрезков. Или же такое множество из пространства , что найдутся числа , что выполняется:

**Теорема:**

Любой брус компактен.

**Док-во:**

*(Практически полный аналог соответствующей теоремы из первого семестра.)*

От противного.

Пусть - брус, но не компакт. Тогда существует его покрытие открытыми множествами , из которого нельзя выделить конечное подпокрытие(по определению компакта).

Пусть

“Разделим” на брусьев поменьше - то есть разобьем каждый отрезок из тех, произведение которых образует , пополам, получив набор отрезков и рассмотрим всевозможные произведения , где .

Каждое из этих произведений является брусом, а их объединение образует . Тогда для какого-то из них из нельзя выделить конечное подпокрытие (так как иначе объединение конечных подпокрытий этих брусьев будет конечным подпокрытием ). Назовем его . Теперь “разделим” его и будем продолжать этот цикл бесконечно долго, находя так же . В итоге мы получим, последовательность вложенных брусьев , для каждого из которых нельзя выделить конечное подпокрытие. Эта последовательность по каждой координате сходится к некоторой точке (для каждой координаты это показывается отдельно по теореме Кантора из первого семестра). Но точка покрывается всего одним открытым множеством из , из которого можно выбрать открытый шар с центром в радиуса , и этот шар будет также покрывать все , начиная с некоторого k (диаметр которого меньше ).

*Комментарий:*

*При желании вы можете выразить , начиная с которого брусья лежат внутри шара. В таком случае не забывайте, что здесь, в отличие от одномерного случая, мало покоординатного неравенства. Диаметр бруса в стандартной евклидовой метрике будет равен:*

## 

## 

## 19. Два критерия компактности в - мерном пространстве.

**Теорема 1:**

- компакт в - ограничено в и - замкнуто в

**Док-во:**

по теореме о свойствах компакта в метрическом пространстве - ограничено и замкнуто.

Пусть -ограничено и замкнуто.

Т.к. ограничено, тобрус ( т.к. - ограничено - оно ограничено по каждой координате, а значит для каждой координаты будет существовать отрезок, в котором лежат все значения этой координаты. Наш брус - как раз произведение таких отрезков)

Т.к. -компакт, то по теореме о свойствах компакта в метрическом пространстве, любое замкнутое подмножество компакта есть компакт, то есть - компакт.

**Теорема 2:**

- компакт в {} : :

По 1-ой теореме, - ограничено и замкнуто  
- ограничено, значит по т. Больцано-Вейерштрасса

- замкнуто, значит т.к. - предельная точка, а по критерию замкнутости содержит все свои предельные точки.

Рассмотрим произвольную - предельную точку , то есть такую, что. По условию теоремы, . Но предел последовательности (если он существует) равен пределу любой его подпоследовательности, то есть .

Таким образом, - замкнуто(по критерию замкнутости).

Теперь покажем, что ещё и ограничено.

Пойдём от противного, пусть - не ограничено, тогда т.е. +- неограничено.

По условию теоремы. А т.к. существует предел, то - ограничена. Но с другой стороны . Пришли к противоречию.

**Теорема**

Если - компакт в -линейном нормированном пространстве(ЛНП) ограничен и замкнут, то -конечномерное.

Без док-ва.

## 

## 20. Векторные пространства. Скалярные произведения, модуль, расстояние.

Рассмотрим пространство

Элемент из него будем обозначать так:

, где - числа действительные.

Определим (умножение на скаляр) следующим образом:

В таком случае, можно убедиться, что верны следующие свойства

**Свойства операций:**1)

2)

3) .

4) Этот выглядит следующим образом:

5)

6)

7)

8)

**Опр.**

- линейно зависима, если , среди которых есть не ноль, такие что

Линейное пространство *(вот здесь видимо, всё же, подразумевается, что мы знаем что такое линейное пространство в общем виде)* называется конечномерным, если - линейно независимая, а - линейно зависима.

- -мерное векторное пространтво.

Легко показать, что - конечномерное(а точнее -мерное)

**Введём скалярное произведение векторов.**

Из определения вытекают следующие свойства

**Свойства:**

1)

2)

3)

4)

5)

- -мерное, евклидово линейное пространство.

**Неравенство Коши-Буняковского**

Док-во:

1). Тогда, как несложно проверить, достигается равентво .

2)

Это многочлен 2 степени т.к.   
И он по свойству скалярного произведения.

Значит

**Нормы в**

Определим норму следующим образом

**Свойства:**1)

2)

3)

**Докажем** 3-е свойство:

По неравенству Коши-Буняковского

Извлекая из обеих частей корень и используя определение нормы, получаем, что

В итоге получаем

Вспоминая начало док-ва, мы понимаем, что получили следующее

откуда следует требуемое равенство

**Метрика в**

Опять же, из определения следуют некоторые свойства. **Свойства:  
1.**

**2.**

**3.**

**4.**

**Док-во:**

Последний переход сделан по 3-ему свойству нормы.

**Связь между нормами**

На самом деле, нормы можно ввести и другие.

- введённая ранее

Установим связь между ними.

В итоге получили

**Опр.** (эквивалентны), если

**Теорема:**

**Док-во:**

Чтобы показать, что требуется показать, что .

Возьмём - размерности пространства.

Тогда

Таким образом,

**Следствие**

Можно доказывать наличие предела по любой из этих 3-х норм.

*Комментарий к параграфу: Мы здесь ввели какое-то конкретное векторное пространство, определили в нём конкретные метрики, конкретное скалярное произведение и конкретную норму.  
На самом же деле, все эти понятия по-нормальному вводятся немножко не так.  
Как вводится векторное пространство и скалярное произведение вы все уже знаете из курса алгебры.*[*Метрика*](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) *- произвольное отображение из декартового квадрата множества в , обладающее свойствами, которые были написаны выше в параграфе.*

*Аналогично* [*норма*](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) *- произвольное отображение из множества в , обалающее свойствами, которые были написаны в параграфе.*

*Это всё неплохо бы понимать, потому что я не знаю что конкретно говорил Макаров на лекциях и вполне возможно он это всё проговаривал. Ну и как минимум он об этом обо всём знает.*

## 21. Сходимость в и покоординатная сходимость.

Говорят, что последовательность сходится к (записывается как ), если

В данном случае нас устраивает любая из 3-х введённых раньше норм, их эквивалентность доказана ранее.

Говорят, что - сходится, когда

**Свойства:**

**1)**

**Док-во:**

Берём

Заметим, что

Таким образом,

Берём

По условию

Значит

Значит

**2)** Если - сходится, то она ограничена

а так же ограничена покоординатно (по 1 норме)

**3)** Если и , то

**4)** Если , , то

**5)** Если ,то (предел любой подпоследовательности равен пределу последовательности)

*Comment:Свойства 2-5 нужно уметь доказать в случае чего. Все док-ва аналогичны соответствующим для пределов последовательностей в . При этом, в конспекте они идут без док-ва и по этому на экзамене скорее всего достаточно лишь упомянуть, что док-ва аналогичны.*

## 22. Теорема Больцано-Вейерштрасса в .

**Теорема**

У любой ограниченной последовательности найдётся сходящаяся подпоследовательность.

**Док-во:1 способ (простой, но не по Макарову)**Абсолютно аналогично док-ву для пределов в   
Т.к. - ограничена - найдётся -мерный брус, в котором лежат все точки из неё.

Тогда поделим его на частей аналогично [док-ву](#_yjetzez79x4p) компактности -мерного бруса.

Найдётся часть, в которой лежит бесконечное количество точек.

Выберем её и опять поделим на частей и.т.д.

Каждый раз из выбранной на очередной итерации части будем выбирать некую точку, которую мы ещё не выбирали ранее. Т.к. там бесконечное число точек - мы сможем это сделать.  
В итоге получим сходящуюся последовательность.

*Сильно не расписывал, т.к. это вариант для тех, кто уверен в себе. Всё таки Макаров не очень любит чужие док-ва и может начать задавать вопросы.*

**2 способ (посложнее, по Макарову)**

Т.к. ограничена, то ограничена и соответствующая последовательность - последовательность -тых координат векторов из последовательности .

Рассмотрим сначала последовательность 1-ых координат. Она ограничена, значит существует сходящаяся подпоследовательность

Подпоследовательность вторых координат - ограничена, значит у неё тоже существует сходящаяся подпоследовательность

Будем продолжать дальше, пока не дойдём до последней координаты.   
Пусть в конце мы получили подпоследовательность последних координат .

По построению, - подпоследовательность

- подпоследовательность

…

При этом сходится по её выбору, а значит и сходится т.к. это её подпоследовательность.

Аналогично и для остальных координат.

Значит,

По свойству предела в получаем, что

Таким образом, мы нашли сходящуюся подпоследовательность.

## 23. Критерий Коши для последовательности в .

Последовательность называется фундаментальной, если

**Теорема**

фундаментальная она сходится

**Док-во:**

По Макарову так, хотя через покоординатную сходимость легче.

Возьмём . Пусть - предел .

Из определения предела по найдётся

Тогда по неравенству треугольника

Значит, последовательность фундаментальна.

А здесь таки покоординатно

Значит, раз последовательность фундаментальна, то каждая из последовательностей - тоже фундаментальна.

Значит, каждая из последовательностей сходится. Отсюда из теоремы о покоординатной сходимости, получаем, что сходится.

## 24. Предел функции по направлению и предел по совокупности переменных.

Введём ФНП(функции нескольких переменных)

Для некоторого подмножества

-график функции

Примеры:

1. Параболоид - график функции вида
2. Полушар

**Предел ФМП**

Пусть (множество, на котором определена функция) - открытое в

**Опр.**(По Коши)Говорят, что ,если

1.- определена в , кроме, быть может,

2. верно

Часто пишут так: и говорят, что это-кратный предел.

На самом деле, это просто предел в точке

**Опр.**(По Гейне) Говорят, что ,если

1.

**Свойства предела ФМП:**

1. (Коши)(Гейне)
2. Предел единственный
3. - локально ограничена в (существует окрестность, в которой она ограничена), если в существует предел
4. Если,то
5. Арифметические свойства

**Предел ФМП в точке по направлению**

Аналогично, пусть - открыто в .

направление в точке .

- единичный вектор()

(в трехмерном случае)

Где

- определение предела по направлению .

**Теорема.**

Если , то верно

**Док-во:**

Берём . Тогда .

Берём . Тогда

Покажем, что .

Для этого нам нужно выбрать такое , что будет верно.

Выберем . Т.к. , то . То есть точка лежит в

Тогда по второй строчке док-ва получаем .

**Повторные пределы**

- ФНП  
Пусть определена в окрестности и

Тогда по определению

Это и будем называть повторным пределом

**Теорема**

Пусть - обычный предел в

Если , то

**Док-во:**

Берём

Тогда

Переходим к пределу в неравенстве.

Значит

Итак,

**Теорема:**

Пусть

то

**Док-во:** Очевидно следует из предыдущей теоремы.

## 25. Непрерывные функции многих переменных. Непрерывность сложной функции многих переменных.

**Непрерывность ФМП**

**Опр.**Пусть - определена на - открытом подмножестве

- непрерывна в , если

**По Коши**

;

Здесь важно, что может принимать значение равное . Это единственное отличие от определения предела.

**По Гейне**

Здесь так же важное отличие от определения предела в том, что может принимать значение . Ну и ещё в том, что предел равен

**Свойства:**

**1,2,3** - Сумма, произведение, частное непрерывных функций - непрерывная функция.

Для частного важно, что   
**4.**- локально ограничена в т.е. ограничена в некоторой окрестности.  
**5.** Непрерывность сложной функции:  
Пусть- непр в

Пусть

Рассмотрим точку

Рассмотрим функцию , непрерывную в

Рассмотрим функцию

Утверждается, что непрерывна в

**Док-во:**Возьмём

Тогда по Гейне получим

В силу теоремы о покоординатной сходимости,

Тогда в силу непрерывности в получаем, что .

Таким образом, .

Тогда по определению по Гейне получаем, что непрерывна в .

**Непрерывность функций многих переменных на множестве**

- непрерывна на множестве если непрерывна в каждой точке.

- непрерывна на компакте , если непрерывна в любой точке лежащей в компакте.

## 26. Теоремы Вейерштрасса для функций многих переменных.

**1-ая теорема Вейерштрасса**

Если непрерывна на компакте , то - ограничена на

**Док-во:**

(о/п) Пусть - неограничена на , то

Т.к. - компакт, то по второму критерию компактности в .

- непрерывна в , тогда

, то есть - ограничена.

Но по построению . То есть не существует такого , чтобы все элементы (под)последовательности были меньше-равны ему. То есть подпоследовательность не ограничена. Противоречие

**2-ая теорема Вейерштрасса**

Если непрерывна на компакте , то -

**Док-во:**

(о/п) Пусть и она не достигается на , то есть

Рассмотрим непрерывную на . Тогда по 1-ой теореме Вейерштрасса .

, то есть - не является точной верхней границей. Противоречие.

**Теорема Кантора**

Если непрерывна на компакте , то равномерна непрерывна на нём.

Без док-ва.

## 27. Дифференцируемость функций многих переменных, вид нелинейной части.

*Почему то тот, кто писал решил забить на палочки над векторами. В итоге они слились с другими вещами в некоторых местах, так что будьте осторожны.*

**Производная по направлению**

Пусть , X - открытое множество, ,

задано направление , где с направляющим вектором .

Зададим функцию .

Если существует производная , то она называется производной функции по направлению .

Пусть теперь , где 1 стоит на k-м месте (т.е. - это направление одной из координатных осей).

Производная f по направлению называется частной производной ФМП.

По определению (вики), частная производная - это предел отношения приращения функции по выбранной переменной к приращению этой переменной, т.е.

**Линейные функционалы**

Пусть задано отображение . называется линейно однородной функцией (линейным функционалом), если

и

**Дифференцируемость**

Пусть , X - открытое, f - определена на X, .

1. - дифференцируема в точке , если
2. - дифференцируема в точке , если

**Дифференциал**

Пусть -дифференцируема в точке . (Полным) дифференциалом функции в точке называется линейный функционал

Дифференциалом переменной называют приращение этой переменной, то есть .

Дифференциал функции зависит от точки , поскольку в нём используются частные производные по всем переменным в этой точке и от вектора приращения , который состоит из приращений (дифференциалов переменных) по каждой из переменных.

**Замечание (вид нелинейной части?)**

; где

Доказательство:

Докажем, что .

Пусть дано . Определим

Проверим, что при .

, причём , и , т.е. есть произведение бмф на ограниченную функцию .

Докажем равенство:

Докажем, что с условием : .

По определению , где - бмф.

, а поскольку , то

## 

## 28. Достаточные условия дифференцируемости функций многих переменных.

**Теорема**

Если для все частные производные в некоторой окрестности и они непрерывны (в точке )

**Тогда**

дифферецируема в точке

**Док-во: проводим для m = 2**

в

Возьмём . *(У Макарова этого нет, но по смыслу требуется)*

*Comment: . Аналогично и для*

Поскольку при зафиксированной одной переменной (например, ) имеет производную по другой () в , выполняются условия теоремы Лагранжа на отрезке ().

По т. Лагранжа, :

При :

и в силу непрерывности частных производных

тогда ,   
Где , - БМФ, а

В силу замечания из предыдущего билета, .

Получаем: , ч.т.д.

## 

## 

## 29. Дифференцируемость вектор-функций, дифференциал, матрица Якоби.

**Вектор-функция многих переменных** - отображение .

Вектор-функцию можно представить в виде совокупности p функций многих переменных:

|  |
| --- |
|  |
| ... |
|  |

**o-малое и O-большое**

в точке ,

если ,

то есть ,

где

на множестве ,

если ,

то есть .

**Теорема** (везде и ):

Доказательство (1 пункт):  
По определению о-малое   
  
По определению O-большое (а значит и ):  
.  
  
Пусть .  
, то есть при .  
Тогда

**Линейные операторы**

Отображение называется линейным оператором, если

Пусть система векторов - базис в .

Тогда линейный оператор можно представить в виде

, где -координатные функции, являющиеся линейными функционалами.

**Дифференцируемость**

Пусть задана ВФМП , -открытое, .

ВФМП **дифференцируема** в точке ,

если -линейный оператор, -окрестность,

Если дифференцируема в точке , то линейный оператор

называется **дифференциалом**.

**Теорема**. ВФМП дифференцируема в точке ФМП -дифференцируема в .

“Ввиду линейности.”

**Координатное представление дифференциала**

Т.к. дифференциал ВФМП - линейный оператор, его можно записать в матричном виде:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | ( … ) | ( … ) |
|  |  |  |  |
|  |  | ( … ) | ( … ) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| … |  |  |
| ……………... |  | ... |
| … |  |  |

Матрица, составленная из частных производных функции в точке называется **матрицей Якоби** ВФМП в точке . Матрица обозначается как .

Если , то определитель матрицы Якоби системы функций называется **якобианом**. Обозначения:

## 30. Дифференцируемость суперпозиции вектор-функций.

Некоторые свойства o-малое и О-большое (везде и )

1. в точке
2. в точке

**Теорема о дифференцируемости суперпозиции вектор-функций**

- дифференцируема в

- дифференцируема в

**тогда**

- дифференцируема в

**Док-во:**

- дифференцируема:

Обозначим , т.к. при

, ч.т.д

## 

## 31. Равенство смешанных производных.

- дважды диффиренцируема в , если существуют все частные производные

**Теорема о равенстве смешанных производных**

-дважды диффиренцируема

**тогда**

не имеет значения порядок диффиренцирования:

**Док-во: m = 2**

Рассмотрим:

1) По формуле конечных приращений для функций одной переменной:

(прибавим и вычтем)

Следовательно

2) C другой сторорны:

Аналогично

3) Таким образом:

## 

## 32. Теорема существования неявно заданной функции одной переменной.

**Определение:** Пусть дано функциональное уравнение (1) F(x,y) = 0, где

1. F(x, y) определена в

Говорят, что функциональное уравнение (1) определяет неявно-заданную функцию (или функциональное уравнение (1) разрешимо относительно переменной y в ), если

**Теорема:** Пусть дано функциональное уравнение (1), где

1. непрерывно-дифференцируема в ;
2. ,

тогда

1. , такие, что функциональное-уравнение (1) определяет неявно заданную функцию y=f(x), определенную в со значением в
2. непрерывно-дифференцируема в

**Доказательство:**

1 пункт

Пусть (для определённости)

1. Так как - непрерывно-дифференцируема в , а в самой точке   
   то - прямоугольник , для всех точек которого
2. Рассмотрим на . Поскольку производная по в рассматриваемом, то возрастает на этом отрезке.  
   По условию, . Обозначим .  
   В силу возрастания функции, .
3. -- непрерывна в Рассмотрим функции , которые непрерывны в т. (поскольку дифференцируемы в этой точке).  
   Следовательно .
4. Берём . Рассмотрим функцию

(следует из п. 3)

по т. Больцано-Коши

Итак, получена неявно заданная функция поскольку  
 в

2 пункт

Сперва докажем непрерывность функции в:

Итак, непрерывна в . В частности, непрерывна в .

Докажем, что - дифференцируема в т. .

- дифф. в т. по условию. Рассмотрим приращение в :

Будем считать, что и достаточно малы, так что (в которой определена нзф) и откуда .

Тогда (так определена ).

Тогда по определению дифференцируемости

поделим на

;

в силу непрерывности в , при . Кроме того, как бмф.

Производная есть по определению предел левой части при . Тогда

, т.е. f-дифф. в т.

3 пункт

Возьмём , аналогично п. 2 можно доказать, что

непрерывна в как частное непрерывных в этой окрестности частных производных.

## 

## 

## 33. Разрешимость систем функциональных уравнений.

Пусть дана система функциональных уравнений:

…

*Комментарий:*

*Обратите внимание, что функций столько же, сколько игреков. Это важно для теоремы.*

Обозначим вектор как , как , введем ВФМП (вектор-функцию многих переменных) . Теперь нашу систему можно переписать в таком виде:

*(1)*

Будем говорить, что уравнение *(1)* определяет **неявно заданную ВФМП** в некоторой , если:

Также говорят: система уравнений **разрешима** относительно .

**Теорема** (Достаточное условие разрешимости системы функциональных уравнений)

Пусть в некоторой окрестности определена ВФМП , причем:

1. непрерывно дифференцируема в .
2. Якобиан производной по не равен нулю в .

Тогда:

Существует ВФМП , определенная в некоторой и принимающая значения из некоторой , что:

1. непрерывно дифференцирума.

## 

## 

## 34. Свойства отображений с неравным нулю Якобианом (связь Якобианов прямого и обратного отображений, существование локально обратного отображения, принцип открытости и сохранения области, локальная взаимнооднозначность и взаимнонепрерывная диффиренцируемость)

Везде в этом билете означает ВФМП из некоторого подмножества в .

**Теорема.** (Связь Якобианов прямого и обратного отображений)

Пусть - взаимооднозначное отображение, т.е. биекция, причем и непрерывно дифференцируемы.

Тогда

Что в частности означает, что оба Якобиана нигде не равны нулю.

**Док-во:**

Так как композиция и - тождественное отображение, то матрица Якоби этой композиции - единичная, а ее определитель равен 1. С другой стороны, Якобиан композиции равен произведению Якобианов(что следует из теоремы о дифференцируемости суперпозиции вектор функций), откуда и получаем то, что требуется доказать.

**Теорема.** (Существование локально обратного отображения)

Пусть непрерывно дифференцируема в открытом множестве , причем

Пусть .

Тогда:

Существует , в которой определена обратная к функция , причем также непрерывно дифференцируема, и

**Док-во:**

Пусть для .

Рассмотрим следующую систему функциональных уравнений:

Заметим, что .

Осталось проверить, что в точке удовлетворяет условию теоремы о достаточном условии разрешимости системы функциональных уравнений (билет №33)

Причем нам нужна разрешимость относительно .

, так как

Непрерывная дифференцируемость в наличии, так как это разность непрерывно дифференцируемых функций.

Якобиан по это определитель матрицы ее производной по , а это якобиан , который нулю не равен.

Тогда в некоторой окрестности существует ВФМП , причем она непрерывно дифференцируема и , откуда , то есть . Теорема доказана.

**Теорема**. (Принцип открытости)

Пусть непрерывно дифференцируема на открытом и ,

тогда множество -открыто.

**Доказательство:**

Берём . .

Поскольку , . Тогда по теореме о существовании локально обратного отображения, .

И . Следовательно, и , тогда открыто по определению.

Теорема:(принцип сохранности области)

Пусть F - н-д на

## 

## 

## 35. Достаточные условия локального абсолютного экстремума функций многих переменных

Если- f и f дифф в , то все частные производные = 0 или неопределены

Критерий Сильвестра():

все главные миноры КФ положительны КФ положительно определена

КФ отрицательно определена

Эта квадратичая форма называется матрицей Гессе.  
Если кто не помнит - там стоят вторые производные.

Если :

1)Положительно определенная квадратичная форма, то - тсл min f

2)Отрицательно определенная квадратичная форма, то - тсл max f

3)Если - вообще хз что

4)Иначе - седловая точка

## 36. Оптимизационные задачи, условный экстремум, сведение к безусловному (абсолютному) экстремуму.

## 37. Метод множителей Лагранжа. Теорема Лагранжа.

## 38. Достаточные условия в методе множителей Лагранжа.