

Задача № 1 по курсу «Компьютерные методы моделирования и обработки данных». Метод молекулярной динамики в задачах физики плазмы. Плазменные колебания

Реализуйте численное решение уравнений движения электронного газа в плазме:

1. (5 баллов) Реализуйте уравнения движения N электронов внутри некоторого физически малого кубического объёма V . В качестве нейтрализующего фона используйте N ионов, статически расположенных случайным образом внутри объёма V .
2. (5 баллов) Реализуйте вычисление суммарного электрического заряда частиц Q внутри контрольного объёма $V_c < V$. Постройте зависимость $Q(t)$. По данным измерений Q рассчитайте среднее $\mathcal{E}[Q]$ и дисперсии $\mathcal{D}[Q]$. Какова особенность наблюдаемой зависимости $Q(t)$?
3. (5 баллов) Рассчитайте и проанализируйте спектр флюктуаций $\mathcal{S}[Q(t)]$.
4. (5 баллов) Модифицируйте уравнения движения электронов, учтя движение ионов. Как изменится характер зависимости $Q(t)$?
5. (5 баллов) Анимируйте траектории движения ионов и электронов в объёме V .

Задача № 2 по курсу «Компьютерные методы моделирования и обработки данных». Метод линий, численное решение одномерного уравнения теплопроводности

Реализуйте метод линий и численно решите с его помощью одномерное уравнение теплопроводности для следующих задач:

1. (5 баллов) Нагрев однородного металлического стержня. Подвод тепла осуществляется со стороны левого конца стержня, $x = 0$, постоянным тепловым потоком величины $q = 1 \text{ кВт}/\text{м}^2$. Правый конец стержня, $x = L$, поддерживается при постоянной температуре терmostата, $u_t = 300 \text{ К}$. Теплообменом на боковой поверхности стержня пренебречь. В начальный момент времени температура стержня равна температуре терmostата.
2. (5 баллов) Сравните полученное численное решение с аналитическим, построив набор пространственных распределений в несколько различных моментов времени. Для получения аналитического решения можно использовать метод Фурье или метод функций Грина.
3. (5 баллов) Модифицируйте уравнение теплопроводности для анализа нагрева столба полностью ионизованной плазмы длиной $L = 20 \text{ м}$. Через левый конец столба поступает тепловой поток $q_{\parallel} = 1 \text{ МВт}/\text{м}^2$. Правая граница столба, $x = L$, поддерживается при постоянной температуре $u = 1000 \text{ К}$. В начальный момент времени плазма имеет температуру $u_0 = 10 \text{ эВ}$.
4. (5 баллов) Сравните стационарный профиль температур столба с аналитическим двухточечным профилем.
5. (5 баллов) Анимируйте процесс нагрева столба плазмы.

Задача № 3 по курсу «Компьютерные методы моделирования и обработки данных». Численное решение одномерной краевой задачи.

Численно решите краевую задачу для уравнения нагрева плазменного столба из предыдущей задачи, $\nabla_{\parallel} q_{\parallel} = 0$:

1. (5 баллов) Преобразуйте уравнение (с учётом граничных условий) с использованием метода конечных разностей.
2. (5 баллов) Используйте библиотеку SciPy для численного решения получающей системы нелинейных алгебраических уравнений. Убедитесь в корректности получаемого решения путём прямого сравнения с аналитическим ответом.
3. (5 баллов) Преобразуйте решаемое уравнение, разделив перенос энергии между ионами и электронами. Проверьте корректность получаемых распределений температур ионов и электронов.
4. (5 баллов) Исследуйте влияние столкновительности плазмы на разность устанавливающихся профилей ионов и электронов.
5. (5 баллов) Добавьте в уравнение переноса энергии ионами феноменологический член $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp} \sim q_{\perp}/\lambda_{\perp}$ для учёта поперечного выноса энергии. Поперечный поток тепла $q_{\perp} \sim \kappa_{\perp} T_i/\lambda_{\perp}$, масштаб $\lambda_{\perp} \sim 1\text{cm}$ считается внешним параметром.

Задача № 4 по курсу «Компьютерные методы моделирования и обработки данных». Численное решение одномерного уравнения Шрёдингера, поиск спектра собственных состояний.

Получите численное решение и спектр уравнения Шрёдингера для частицы, движущейся в потенциале Кулона:

1. (5 баллов) Получите конечно-разностное представление для уравнения Шрёдингера задачи.
2. (5 баллов) Используйте библиотеку SciPy для нахождения спектра полученного на предыдущем шаге линейного оператора. Сравните собственные числа оператора с аналитическими значениями.
3. (5 баллов) Модифицируйте потенциал Кулона, превратив его в потенциал Юкавы.
4. (5 баллов) Численно решите полученную задачу, получите спектр нового оператора Гамильтона. Сравните спектры двух операторов (для потенциалов Кулона и Юкавы).
5. (5 баллов) Постройте на одном графике несколько волновых функций, отвечающих близким собственным значениям оператора Гамильтона (на выбор).