Пятое задание по алгоритмам

Ситдиков Руслан

12 марта 2018 г.

1 Задача

Алгоритм

Разделим наш массив на l различных массивов, где l - кол-во различных первых букв в словах. Далее, в наших уже новых массивах рекурсивно выполняем аналогичную сортировку слова по второй букве. В конце соединяем полученные массивы в лексикографическом порядке.

Корректность

Алгоритм аналогичен поразрядной сортировке (MSD - Most Significant Digit), доказательство корректности то же.

Асимптотика

Сложность алгоритма $O(n \cdot k)$, где k — длина слова, а n — количество слов.

2 Задача

Вначале узнаем значение $\frac{n}{2}$-ого элемента и его соседних двух (справа и слева). Далее алгоритм выполняет их сравнение, возможны три случая:
1)Правый и левый элементы меньше $\frac{n}{2}$-ого. Следовательно, $\frac{n}{2}$-ый элемент и будет искомым.
2)Правый и левый элементы, соответсвенно, меньше и больше $\frac{n}{2}$-ого. Следовательно, искомый элемент находиться в правой части массива. Удаляем левую часть массива ($n \to \frac{n}{2}$). На следующем шаге запускаем рекурсивно наш алгоритм на уже половине массива. В конечном итоге мы совершим $\log_2 n$ операций (считая за $O(1)$ затраты времени на получение значений элемента и его соседних).
3)Правый и левый элементы, соответсвенно, больше и меньше $\frac{n}{2}$-ого. Следовательно, искомый элемент находиться в левой части массива. Удаляем правую часть массива ($n \to \frac{n}{2}$). На следующем шаге запускаем рекурсивно наш алгоритм на уже половине массива. В конечном итоге мы совершим $\log_2 n$ операций (считая за $O(1)$ затраты времени на получение значений элемента и его соседних).

3 Задача

При $n = 1 \ mod 3$ этот элемент будет принадлежать куче, которую мы сначала не взвешиваем, при $n = 2 \ mod 3$, эти два элемента распределим по двум кучам, которые взвешиваем. Теперь можем предположить, что n делится на 3.

Разделим наши монеты на три одинаковые по количеству элементов группы и взвесим две из них. Если они равны, то фальшивая монета находится в третьей. Выполняем аналогичные действия с ней. Если же одна из групп перевесила, то выполняем аналогичные действия с более легкой. В конце мы придем к одному ответу за $log_3 n$ действий.

4 Задача

Допустим, что $k < \log_3 n$. k — количество взвешиваний, тогда количество различных всевозможных случаев равно — 2^k. $k < \log_3 n$, $2^k < 2^{\log_3 n} < 2^{\log_2 n} = n$. Но по принципу Дирихле останутся монеты, не проверенные на фальшивость. Отсюда следует, что $k < \log_3 n$, следовательно меньше чем за $\log_3 n$ узнать какая из монет фальшивая, нельзя.

5 Задача

Пусть даны два массива X и Y. Найдем медианы в наших массивах за $O(1)$($m1$ и $m2$ соответственно). Далее, объеденим массивы в массив Z и выполним сравнение наших медиан. Возможны три случая:

1) $m1 = m2$

Тогда искомая медиана и есть $\mathrm{M} = \mathrm{m1} = \mathrm{m2}$.

2) $m1 < m2$.

Тогда медиана объединенного массива находится в массиве Z, состоящем из $x_i \in X : \frac{n}{2} \leq i \leq n$ и $y_i \in Y : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}$. Далее рекурсивно запускаем алгоритм на массиве Z, который имеет размеры n. Следовательно, размеры массива Z на каждом шагу уменьшаются в два раза и за $\log_2 n$ действий мы найдем медиану.

2) $m1 > m2$.

Тогда медиана объединенного массива находится в массиве Z, состоящем из $x_i \in X : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ и $y_i \in Y : \frac{n}{2} \leq i \leq n$. Далее рекурсивно запускаем алгоритм на массиве Z, который имеет размеры n. Следовательно, размеры массива Z на каждом шагу уменьшаются в два раза и за $\log_2 n$ действий мы найдем медиану.

Корректность

Мы рассмотрели все возможные неравенства/равенства медиан изначальных массивов и наш алгоритм каждый раз уменьшает длинну конечного массива. Следовательно, на каком-то шагу придет к одному элементу, который и будет нашим ответом.

Сложность

Алгоритм работает за $O(\log_2 n)$.

6 Задача

Задача легко решается если применить теорему Безу, согласно ей всякий целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем свободного члена нашего многочлена.

Запишем функцию f:

$$f = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0', \text{ где}$$

$$a_0' = a_0 - y$$

В случае, когда все коэффициенты уравнения делятся нацело на a_n, то можем ещё раз сократить нашу функцию:

$$f = x^n + a_{n-1}' \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1' \cdot x + a_0', \text{ где}$$

$$a_i' = \frac{a_i}{a_n}, 1 \leq i \leq n, a_0' = \frac{a_0 - y}{a_n}$$

Далее, перебирая и подставляя в уравнение все делители свободного члена a_0', мы находим все возможные целые решения уравнения. Отбросив неположительные ответы, находим ответ к задаче.

7 Задача

а) Проведем $\frac{n}{2}$ взвешиваний, разделив наши монеты на две группы. В первой будут все, которые победили, во второй - проигравшие. После этого найдем в них самые тяжелую и легкую, соответственно. Это потребует еще $\frac{n}{2}$ взвешиваний для каждого массива. Следовательно, у нас будет $\frac{3n}{2}$ взвешиваний(разбирали на семинаре).