Восьмое задание по алгоритмам

Ситдиков Руслан

9 апреля 2018 г.

Задача 1

Реализуем поиск в ширину из вершины s - $O(\mid V \mid + \mid E \mid)$. Тогда, пусть длина кратчайшего пути - d. Тогда на получившемся дереве на d - уровне находится вершина t и все вершины, находящиеся на каком-то кратчайшем пути находятся над t. Реализуем поиск в ширину из вершины t - $O(v+e)$. Тогда на получившемся уровне на $d-i$ уровне находятся вершины, которые, если лежат на каком-то кратчайшем пути, лежат на i уровне в первом дереве. Допустим, какая-то вершина, которая не лежит на кратчайшем пути, лежит на уровне i в первом дереве поиска и на уровне $d-i$ во втором дереве поиска.Тогда пройдем по пути от t до v(назовем ее так) за $d-i$ шагов и от v до s за i шагов(ввиду неориентированности графа мы так можем). Получаем, что он все-таки лежит на кратчайшем пути. Посчитаем количество разных вершин, которые сохранили позицию - $O(V)$. Итого асимптотика - $O(\mid V \mid + \mid E \mid)$
P.S. Алгоритм взят с сайта https://e-maxx.ru/algo/.

Задача 4

Воспользуемся поиском в ширину со следующей модификацией:

1. Вершины, в которые мы попадаем из нулевого ребра заносим на i-тое место в массив списков (i-уровень, по совместительству расстояние).

2. Вершины, в которые мы попадаем из единичного ребра заносим на $i+1$ уровень.

3. При поиске приоритет имеют ребра длины 0.

Таким образом к асимптотике поиска в ширину добавляются:

1. Расстановка приоритетов - $O(E)$.

2. Занесение вершин - $O(V)$.

Итого асимптотика : $O(\mid V \mid + \mid E \mid)$.

Доказательство.
Реализуя этот алгоритм мы просто относимся к множеству вершин, открытых из вершины v посредством перехода по ребру длины 0 как к одной вершине. И доказательство его корректности аналогично доказательству корректности поиска длины пути на единичных ребрах при поиске в ширину.

Задача 3

Рассмотрим граф с циклами отрицательного веса. В таком графе минимальное расстояние между вершинами, содержащимися в таком цикле, не определено(мы всегда можем обозначить путь между ними длиной меньше любого вещественного числа). Если мы послушаем профессора, то минимальная длина пути между такими вершинами станет определена и равна числу a. Длину меньше a в исходном графе мы всегда можем найти. **Ответ: Нет.**

Задача 6

Структура дерева сама подсказывает решение задачи. Именно, обозначим корнем дерева любую вершину и назовем её r. Пусть $I(u)$ обозначает размер максимального независимого множества вершин поддерева, корнем которого является вершина u. Тогда ответом на задачу будет являться $I(r)$. Нетрудно видеть, что если мы включаем вершину u в максимальное независимое множество, то его мощность увеличивается на 1, но его детей мы брать не можем (так как они соединены ребром с вершиной u); если же мы не включаем эту вершину, то мощность максимального независимого множества будет равна сумме размеров независимых множеств детей этой вершины. Остается только выбрать максимум из этих двух вариантов, чтобы получить решение задачи:

$$I(u) = max(1 + \sum_{grandchild\ w\ of\ u} I(w), \sum_{child\ w\ of\ u} I(w)).$$

Псевдокод: Считаем, что в вершине u хранится $I(u)$:
$function\ getindependentset(Node\ u)$
$childrensum = 0$
$grandchildrensum = 0$
$for\ i := 1\ to\ childnumdo$
$childrensum = childrensum + getindependentset(children[i])$
$for\ i := 1\ to\ grandchildrennum$
$grandchildrensum = grandchildrensum + getindependentset(grandchildren[i])$
$I(u) = max(1 + grandchildrensum, childrensum)$
$return\ I(u)$
Вызов $getindependentset(r)$ даст ответ на задачу. Время выполнения алгоритма, очевидно, $O(|V| + |E|)$.