

1 Differentialrechnung (S. 444)

Kurvenuntersuchungen S. 261 | Taylorreihe S. 455

1.1 Differenzialquotient (S. 444)

Die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 entspricht der Steigung der Tangente an $f(x)$ im Punkt x_0 .

Differenzenquotient:
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Differenzialquotient:
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \tan \alpha$$

Die Existenz der Ableitung einer Funktion $f(x)$ für die Werte der Variable x ist gegeben, wenn diese Werte der Differenzialquotient einen endlichen Wert besitzt.

1.2 Tangente / Normale / Zwischenwinkel

Tangente:
$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$$

Normale:
$$y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + y_0$$

Zwischenwinkel:
$$\tan(\alpha) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow \text{Winkel gegen Uhrz.}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow \text{Winkel im Uhrzeigersinn}$$

1.3 Einseitige Ableitungen (S. 445)

Rechtsseitig: $f'_r(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ Linksseitig: $f'_l(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$

$f'_r(x_0) = f'_l(x_0) \Rightarrow$ Konvergenz

Alle anderen Fälle \Rightarrow unbestimmte Divergenz \Rightarrow keine Ableitung!

	Beispiel	Graph
$f'(x_0)$ existiert	$f: x \mapsto x^2$ $f'(0) = 0$	
$f'_r(x_0)$ existiert $f'_l(x_0)$ existiert $f'_r(x_0) \neq f'_l(x_0)$	$f: x \mapsto x $ $f'_r(0) = 1$ $f'_l(0) = -1$	
An der Stelle x_0 existiert die uneigentliche Ableitung	$f: x \mapsto \sqrt[3]{x}$ $f'_r(0) = \infty$ $f'_l(0) = \infty$	
f besitzt die einseitigen uneigentlichen Ableitungen an der Stelle x_0 .	$f: x \mapsto \sqrt{ x }$ $f'_r(0) = -\infty$ $f'_l(0) = \infty$	
Die einseitigen und die einseitigen uneigentlichen Ableitungen existieren nicht	$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ $f'_r(0)$ und $f'_l(0)$ existieren nicht	

1.4 Ableitungsregeln (S. 445-448)

1.4.1 Elementare Regeln

Konstanten:	$c = \text{konst}$	$c' = 0$
Faktor:	$f(x) = c \cdot x^2$	$f'(x) = c \cdot 2x$
Summen:	$(u(x) + v(x) - w(x))'$	$u'(x) + v'(x) - w'(x)$
Potenzen:	$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

1.4.2 Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

1.4.3 Quotientenregel

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \Rightarrow \text{als Produkt schreiben}$$

$$u(x) \cdot \left(\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$$

1.4.4 Kettenregel

$$g(f(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

1.4.5 Allgemeine Logarithmus-Ableitung

$$(\log_b(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$$

1.4.6 Umkehrfunktion

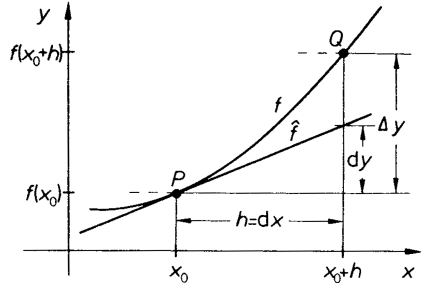
$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

1.5 Wichtige Ableitungen (S. 446)

Funktionen	Ableitung	Funktionen	Ableitung
C (Konstante)	0	$\tan x$ ($x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$)	$\frac{1}{\cos^2 x}$
x	1	$\cot x$ ($x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$)	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\csc x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\sin^{-1} x$ ($ x < 1$)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$\cos^{-1} x$ ($ x < 1$)	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\cot^{-1}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^{bx} ($b \in \mathbb{R}$)	$b \cdot e^{bx}$	$\sec^{-1} x$ ($x > 1$)	$\frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}$
a^x ($a > 0$)	$a^x \cdot \ln a$	$\csc^{-1} x$ ($x > 1$)	$-\frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}$
a^{bx} ($b \in \mathbb{R}, a > 0$)	$ba^{bx} \cdot \ln a$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\ln x$ ($x > 0$)	$\frac{1}{x}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\sin x$	$\cos x$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\coth x$ ($x \neq 0$)	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

1.6 Lineare Approximation / Differenzial dy (S. 459)

Differenzial = $dy = df$ = "Höhenunterschied der Tangente" = "Linearzuwachs"
Differenzial: $dy = f'(x_0) \cdot dx = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$



$\Delta y \approx dy \Rightarrow$ Approximation / Fehler Fehler: $\Delta y - dy \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0$

Die Tangente ist die beste lineare Approximation!

1.7 Approximationsfehler

Die Fehler beziehen sich auf den Arbeitspunkt (z.B. x_0)

Absoluter Fehler: $R(x) = \Delta y - dy = f(x) - \hat{f}(x)$ Einheit von y

Relativer Fehler: $R(x) = \frac{\Delta y - dy}{y_0} = \frac{f(x) - \hat{f}(x)}{f(x_0)}$ einheitenlos

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad dy = f'(x_0) \cdot \Delta x \quad \hat{f}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(\Delta x)$

Beispiel: Approximationsfehler

$f(x) = \sqrt{x}, \quad \text{für } x_0 = 4 \text{ mit } \Delta x = 0.1$

Δy	$=$	$f(4 + 0.1) - f(4)$	$=$	$\sqrt{4.1} - \sqrt{4}$	$=$	0.024845
dy	$=$	$f'(4) \cdot 0.1$	$=$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} \cdot 0.1$	$=$	0.025
$R_1(x)$	$=$	$ \Delta y - dy $	$=$	$ 0.024845 - 0.025 $	$=$	0.0000155
$f(x)$	$=$	$f(4 + 0.1)$	$=$	$\sqrt{4.1}$	$=$	2.024845
$\hat{f}(x)$	$=$	$f(4) + f'(4)(0.1)$	$=$	$\sqrt{4} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} \cdot 0.1$	$=$	2.025
$R_2(x)$	$=$	$f(x) - \hat{f}(x)$	$=$	$ 2.024845 - 2.025 $	$=$	0.0000155
		$R_1(x)$	$=$	$R_2(x)$	$=$	0.0000155

1.8 Fehlerfortpflanzung (S. 866)

Absolut: $\Delta x \rightarrow \Delta y \quad \Delta y \approx dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$

Relativ: $\Delta x \rightarrow \frac{\Delta y}{y_0} \quad \frac{\Delta y}{y_0} \approx \frac{dy}{y_0} = \frac{f'(x_0) \cdot \Delta x}{f(x_0)}$

	Δx (abs)	$\frac{\Delta x}{x}$ (rel)
$\Delta y \approx dy$ (abs)	A	B
$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}$ (rel)	C	D

\Rightarrow Tabelle ist bidirektional
 \Rightarrow (Umkehrfunktionen)

2 Taylor-Theorie

2.1 Taylor-Reihe (Approximation höherer Ordnung)

n Ordnung der Approximationsfunktion $p_n(x)$
 $h = x - x_0$ Abstand zum Entwicklungspunkt

$$T_n(x) = f(x_0) + \overbrace{f'(x_0) \cdot h}^{1. \text{ Ordnung}} + \overbrace{\frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2}^{2. \text{ Ordnung}} + \dots + \overbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n}^{n. \text{ Ordnung}}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot h^k \quad \Big|_{h=x-x_0}$$

Der Approximationsfehler $R_n(x_0, h)$ entspricht $f(x) - p_n(x)$ und wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

2.2 Fehler R_n der Taylor-Reihe

Der Fehler ist nicht klar berechenbar, sondern nur auf einem Intervall "bestimmbar"
⇒ Worst Case!

Voraussetzung: f auf Intervall $[a; b]$ mind. $(n + 1)$ mal ableitbar

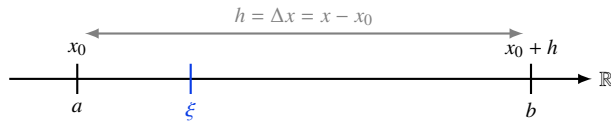
$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Lagrange: $|R_n| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} \right| \leq \left| \frac{M_{x_0}^{n+1}}{(n+1)!} \right|$

Cauchy: $|R_n| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot h^{n+1} \cdot (1 - \theta)^n \right|$

$$0 < \theta < 1 \quad \xi = x_0 + \theta \cdot h$$

θ steuert Lage von ξ auf Intervall



2.2.1 Verhalten von R_n

- 1) $n \rightarrow \infty$ "Normal" $R_n \rightarrow 0$ $|h|$ fix
- 2) $n \rightarrow 0^+$ "Normal" $R_n \rightarrow 0$ n fix
 $|f^{n+1}(\tilde{x})| < K^{n+1}$ ($K < 0, n \in \mathbb{N}_0, \tilde{x} \in (a; b)$)

Bsp: Lagrange prüfung 2026

Die „Faustregel“ $\sin(x) \approx x$ für kleine x “ entspricht einer Taylor-Approximation der Sinus-Funktion bei $x_0 = 0$.

- a) Welche Approximationsordnung liegt vor?
- b) Schätzen Sie den absoluten Approximationsfehler mit Hilfe der Formel von Lagrange für $|x| \leq 0.5$ durch einen Term in x und auch durch eine passende Zahl ab.

a) $\sin x \approx x \implies 1. \text{ Ordnung}$

b) $R_n(x_0) = \frac{f^{n+1}(\xi) \cdot \Delta x}{(n+1)!} \leq \frac{M_{x_0}^{n+1}}{(n+1)!} \implies R_1(x_0) = \frac{f^{1+1}(\xi) \cdot \Delta x}{(1+1)!} \leq \frac{M_{x_0}^{1+1}}{(1+1)!}$

$$M = \max(\sin(x)) = 1 \quad ; \quad m = \min(\sin(x)) = -1$$

$$R_1(x_0) \leq \frac{M_{x_0}^2}{(2)!} \implies R_1\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{(2)!} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$