Analysis 1b

HS 2025 – Prof. Dr. Bernhard Zgraggen
Autoren: Max-Alban Gächter

1 Differentialrechnung (S. 444)

Kurvenuntersuchungen S. 261 | Taylorreihe S. 455

1.1 Differenzialquotient (S. 444)

Die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 entspricht der Steigung der Tangente an $f(x)$ im Punkt x_0.

Differenzenquotient: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Differenzialquotient: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx} = \tan\alpha$

Die Existenz der Ableitung einer Funktion $f(x)$ für die Werte der Variable x ist gegeben, wenn diese Werte der Differenzialquotient einen endlichen Wert besitzt.

1.2 Tangente / Normale / Zwischenwinkel

Tangente: $y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+y_0$

Normale: $y = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)+y_0$

Zwischenwinkel: $\tan(\alpha) = \frac{m_1-m_2}{1+m_1\cdot m_2}$ ⇒ Winkel gegen Uhrz.

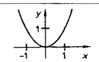
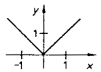
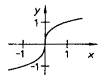
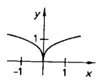
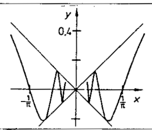
$\tan(\alpha) = \frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}$ ⇒ Winkel im Uhrzeigersinn

1.3 Einseitige Ableitungen (S. 445)

Rechtsseitig: $f_r'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ Linksseitig: $f_l'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$

$f_r'(x_0) = f_l'(x_0)$ ⇒ Konvergenz

Alle anderen Fälle ⇒ unbestimmte Divergenz ⇒ keine Ableitung!

	Beispiel	Graph
$f'(x_0)$ existiert	$f: x \mapsto x^2$ $f'(0)=0$	
$f_r'(x_0)$ existiert $f_l'(x_0)$ existiert $f_r'(x_0) \neq f_l'(x_0)$	$f: x \mapsto \lvert x\rvert$ $f_l'(0) = -1$ $f_r'(0)=1$	
An der Stelle x_0 existiert die uneigentliche Ableitung	$f: x \mapsto \sqrt[3]{x}$ $f_l'(0)=\infty$ $f_r'(0)=\infty$	
f besitzt die einseitigen uneigentlichen Ableitungen an der Stelle x_0.	$f: x \mapsto \sqrt{\lvert x\rvert}$ $f_l'(0) = -\infty$ $f_r'(0)=\infty$	
Die einseitigen und die einseitigen uneigentlichen Ableitungen existieren nicht	$f(x) = \begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x} & \text{für } x\neq 0 \\ 0 & \text{für } x=0 \end{cases}$ $f_l'(0)$und $f_r'(0)$ existieren nicht	

1.4 Ableitungsregeln (S. 445-448)

1.4.1 Elementare Regeln

Konstanten:	$c = \text{konst}$	$c' = 0$
Faktor:	$f(x) = c\cdot x^2$	$f'(x) = c\cdot 2\,x$
Summen:	$(u(x)+v(x)-w(x))'$	$u'(x)+v'(x)-w'(x)$
Potenzen:	$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$
	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3\,x^2$

1.4.2 Produktregel

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

1.4.3 Quotientenregel

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2} \quad \Rightarrow \text{als Produkt schreiben}$$

$$u(x)\cdot\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x)\cdot\frac{1}{v(x)} + u(x)\cdot\frac{-v'(x)}{v(x)^2}$$

1.4.4 Kettenregel

$$g(f(x))' = f'(x)\cdot g'(x)$$

1.4.5 Allgemeine Logarithmus-Ableitung

$$(\log_b(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' = \frac{1}{\ln(b)}\cdot(\ln(x))' = \frac{1}{\ln(b)}\cdot\frac{1}{x}$$

1.4.6 Umkehrfunktion

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

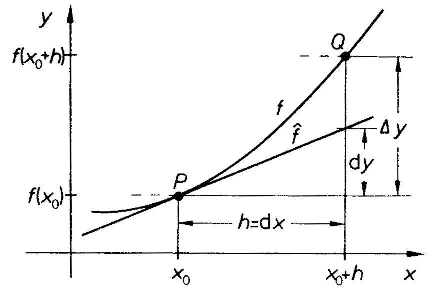
1.5 Wichtige Ableitungen (S. 446)

Funktionen	Ableitung	Funktionen	Ableitung
C (Konstante)	0	$\tan x\ \ (x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z})$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
x	1	$\cot x\ \ (x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\csc x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\sin^{-1} x\ \ (\lvert x\rvert<1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$	$\cos^{-1} x\ \ (\lvert x\rvert<1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\cot^{-1}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$e^{bx}\ \ (b\in\mathbb{R})$	$b\cdot e^{bx}$	$\sec^{-1} x\ \ (x>1)$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$a^x\ \ (a>0)$	$a^x\cdot\ln a$	$\csc^{-1} x\ \ (x>1)$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$a^{bx}\ \ (b\in\mathbb{R},\ a>0)$	$ba^{bx}\cdot\ln a$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\ln x\ \ (x>0)$	$\frac{1}{x}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\sin x$	$\cos x$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\coth x\ \ (x\neq 0)$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

1.6 Lineare Approximation / Differenzial dy (S. 459)

Differenzial = dy = df = "Höhenunterschied der Tangente"= "Linearzuwachs"

Differenzial: $dy = f'(x_0)\cdot dx = f'(x_0)\cdot h = f'(x_0)\cdot\Delta x = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$



$\Delta y \approx dy$ ➠ Approximation / Fehler Fehler: $\Delta y - dy \to 0 \quad h\to 0$

Die Tangente ist die beste lineare Approximation!

1.7 Approximationsfehler

Die Fehler beziehen sich auf den Arbeitspunkt (z.B. x_0)

Absoluter Fehler: $R(x) = \Delta y - dy = f(x) - \hat{f}(x)$ Einheit von y

Relativer Fehler: $R(x) = \frac{\Delta y - dy}{y_0} = \frac{f(x)-\hat{f}(x)}{f(x_0)}$ einheitenlos

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \qquad dy = f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad \hat{f}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(\Delta x)$

Beispiel: Approximationsfehler

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad \text{für } x_0 = 4 \text{ mit } \Delta x = 0.1$$

Δy	$=$	$f(4+0.1)-f(4)$	$=$	$\sqrt{4.1}-\sqrt{4}$	$=$	0.024845
dy	$=$	$f'(4)\cdot 0.1$	$=$	$\frac{1}{2\cdot\sqrt{4}}\cdot 0.1$	$=$	0.025
$R_1(x)$	$=$	$\lvert\Delta y - dy\rvert$	$=$	$\lvert 0.024845-0.025\rvert$	$=$	0.0000155
$f(x)$	$=$	$f(4+0.1)$	$=$	$\sqrt{4.1}$	$=$	2.024845
$\hat{f}(x)$	$=$	$f(4)+f'(4)(0.1)$	$=$	$\sqrt{4}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{4}}\cdot 0.1$	$=$	2.025
$R_2(x)$	$=$	$f(x)-\hat{f}(x)$	$=$	$\lvert 2.024845-2.025\rvert$	$=$	0.0000155
		$R_1(x)$	$=$	$R_2(x)$	$=$	$\boxed{0.0000155}$

1.8 Fehlerfortpflanzung (S. 866)

Absolut: $\Delta x \to \Delta y \qquad \Delta y \approx dy = f'(x_0)\cdot\Delta x$

Relativ: $\Delta x \to \frac{\Delta y}{y_0} \qquad \frac{\Delta y}{y_0} \approx \frac{dy}{y_0} = \frac{f'(x_0)\cdot\Delta x}{f(x_0)}$

	Δx (abs)	$\frac{\Delta x}{x}$ (rel)
$\Delta y \approx dy$ (abs)	A	B
$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}$ (rel)	C	D

⇒ Tabelle ist bidirektional
⇒ (Umkehrfunktionen)

2 Taylor-Theorie

2.1 Taylor-Reihe (Approximation höherer Ordnung)

n	Ordnung der Approximationsfunktion $p_n(x)$
$h = x - x_0$	Abstand zum Entwicklungspunkt

$$T_n(x) = f(x_0) + \overbrace{f'(x_0) \cdot h}^{\text{1. Ordnung}} + \overbrace{\frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2}^{\text{2. Ordnung}} + \ldots + \overbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n}^{n\text{. Ordnung}}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot h^k \Big|_{h=x-x_0}$$

Der Approximationsfehler $R_n(x_0, h)$ entspricht $f(x) - p_n(x)$ und wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

2.2 Fehler R_n der Taylor-Reihe

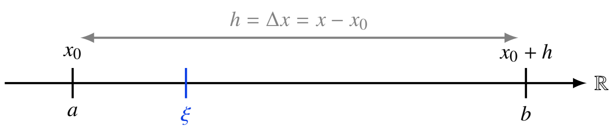
Der Fehler ist nicht klar berechenbar, sondern nur auf einem Intervall "bestimmbar"
➡ Worst Case!
Voraussetzung: f auf Intervall $[a; b]$ mind. $(n + 1)$ mal ableitbar

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Lagrange: $|R_n| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}\right| \leq \left|\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}\right|$

Cauchy: $|R_n| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot h^{n+1} \cdot (1-\theta)^n\right|$

$0 < \theta < 1$ $\xi = x_0 + \theta \cdot h$
θ steuert Lage von ξ auf Intervall



2.2.1 Verhalten von R_n

1)	$n \to \infty$	"Normal"	$R_n \to 0$	$\lvert h\rvert$ fix
2)	$n \to 0^+$	"Normal"	$R_n \to 0$	n fix
		$\lvert f^{n+1}(\tilde{x})\rvert < K^{n+1}$		$(K < 0, n \in \mathbb{N}_0), \tilde{x} \in (a; b)$

Bsp: Lagrange prüfung frage 2026

Die „Faustregel“ $\sin(x) \approx x$ für kleine x“ entspricht einer Taylor-Approximation der Sinus-Funktion bei $x_0 = 0$.

a) Welche Approximationsordnung liegt vor?
b) Schätzen Sie den absoluten Approximationsfehler mit Hilfe der Formel von Lagrange für $|x| \leq 0.5$ durch einen Term in x und auch durch eine passende Zahl ab.

a) $\sin x \approx x \implies$ 1.Ordnung

b) $R_n(x_0) = \frac{f^{n+1}(\xi) \cdot \Delta x}{(n+1)!} \leq \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!} \quad \Rightarrow \quad R_1(x_0) = \frac{f^{1+1}(\xi) \cdot \Delta x}{(1+1)!} \leq \frac{Mx_0^{1+1}}{(1+1)!}$

$M = \max(\sin(x)) = 1 \quad ; \quad m = \min(\sin(x)) = -1$

$R_1(x_0) \leq \frac{Mx_0^2}{(2)!} \quad \Rightarrow \quad R_1\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{(2)!} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$