Analysis 1a

HS 2025 – Prof. Dr. Bernhard Zgraggen

Autoren: Max-Alban Gächter

1 Reelle Zahlen

Zahlenmengen:	S. 1, 331, 335	Mengenlehre:	S. 335, 1230
Summenzeichen:	S. 6-7	Produktzeichen:	S. 7
Beweismethoden:	S. 5-6	Fakultät	S. 13

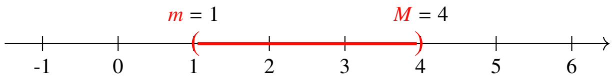
1.1 Zahlenmengen (S. 1, 331)

Ganze Zahlen:	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;
Natürliche Zahlen:	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;
	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;
Rationale Zahlen:	$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } (q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})\right\}$;
Irrationale Zahlen:	nichtperiodische Kommazahlen
Reelle Zahlen:	$\mathbb{R} =$ z.B. $\sqrt{2}, \pi, \phi$
Komplexe Zahlen	$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \epsilon \mathbb{R}\}$

1.2 Supremum und Infimum ⇒ 3. Folgen

$\sup(X)$ Kleinste obere Schranke ➔ Maximum ist immer auch Supremum

$\inf(X)$ Grösste untere Schranke ➔ minimum ist immer auch Infimum



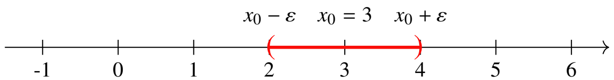
Maximum: $\max A \in A$, größtes Element der Menge.
Supremum: $\sup A$, kleinste obere Schranke, muss nicht in A liegen.
Merksatz: Maximum ⇒ Supremum, aber Supremum ⇏ Maximum.
Minimum: $\min A \in A$, kleinstes Element der Menge.
Infimum: $\inf A$, größte untere Schranke, muss nicht in A liegen.
Merksatz: Minimum ⇒ Infimum, aber Infimum ⇏ Minimum.

1.3 Umgebung

Jedes offene Intervall, dass die Zahl x_0 enthält, heisst eine Umgebung von x_0 $\quad U(x_0)$

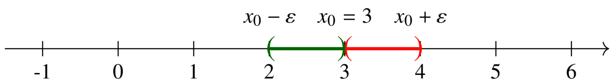
Es sei $\varepsilon > 0$. Unter der ε-Umgebung von x_0 versteht man das offene Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ $\quad U_\varepsilon(x_0)$

ε-Umgebung: $\quad U_\varepsilon(3) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$



Eine ε-Umgebung von x_0 ohne die Zahl x_0 selbst wird punktierte ε-Umgebung von x_0 genannt $\quad \dot{U}_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus x_0$

ε-Umgebung: $\quad \dot{U}_\varepsilon(3) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\} \setminus \{3\}$



1.4 Endliche Reihen (S. 19, 20)

Arithmetisch: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ | Geometrisch: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

1.5 Mittelwerte (S. 20)

Harmonisches Mittel (HM): $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Geometrisches Mittel (GM): $$\left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

Arithmetisches Mittel (AM): $$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)\right]^{-1}$$

$$\text{HM} \leq \text{GM} \leq \text{AM}$$

1.6 Speziele Ungleichungen (S. 31 - 34)

Bernoullische-Ungleichung: $(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a$
$\{a \in \mathbb{R},\ a \geq -1 \wedge n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$

Binomische-Ungleichung: $|a \cdot b| \leq \frac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2)$ für $a, b \in \mathbb{R}$

1.7 Binomischer Satz (S. 12)

Der Binomische Satz kann verwendet werden, um das Pascal-Dreieck zu berechnen.

Binomischer Satz: $$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } n \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n$$

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-k+1} \cdot \binom{n}{k} \qquad \binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{k}{k}$$

1.8 Vollständige Induktion (S. 5 - 6)

Beispiel: Vollständige Induktion

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(VA) für $n = 1$ $$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{1} 1 = 1 \qquad \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

(VE) (1) $$\sum_{i=1}^{n} i \overset{\checkmark}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

(VE) (2) $$\sum_{i=1}^{n+1} i \overset{?}{=} \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

(VE) (3) $$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=n+1}^{n+1} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \ \dots$$

$$\dots = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \dots$$

$$\dots = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \overset{\checkmark}{=} \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

2 Funktionen (S. 49)

Monotonie:	S. 51	Beschränktheit:	S. 52	Umkehrfunktion:	S. 53

2.1 Schreibweise von Funktionen

$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f$ mit $x \mapsto f(x)$ $\qquad f : x \mapsto f(x)$ $\qquad y = f(x)$ mit $x \in \mathbb{D}_f$

$f^{-1} : \mathbb{W}_f \to \mathbb{D}_f$ mit $y \mapsto f^{-1}(y)$ $\qquad f^{-1} : y \mapsto f^{-1}(y)$ $\qquad x = f^{-1}(y)$ mit $y \in \mathbb{W}_f$

2.2 Eigenschaften von Funktionen

Monotonie:	Siehe Bronstein S. 51
Beschränktheit:	Siehe Bronstein S. 52
Umkehrbarkeit:	Streng monotone Funktionen sind umkehrbar
Restriktion:	Nur einen Teil von D_f betrachten ➔ Umkehrbarkeit

2.3 Transformationen

Nr.	Transformation	Funktionsgleichung
1	Streckung in x-Richtung um $\frac{1}{a}$	$y = f(ax)$
	Spiegelung an der y-Achse (bei $a < 0$)	$y = f(ax)$
2	Verschiebung nach links $(+b)$ oder rechts $(-b)$	$y = f(x \pm b)$
3	Streckung in y-Richtung um c	$y = c \cdot f(x)$
	Spiegelung an der x-Achse (bei $c < 0$)	$y = c \cdot f(x)$
4	Verschiebung nach oben $(+d)$ oder unten $(-d)$	$y = f(x) \pm d$

Beispiel: Transformation

$$f(x) = \ln(x) \longrightarrow g(x) = \frac{2}{3}\ln((3x + 2) \cdot 5)$$

Streckung in x-Richtung um $\frac{1}{3}$	$\ln(3x)$
Verschiebung nach links um $\frac{2}{3}$	$\ln(3x + 2)$
Verschiebung nach oben um $\ln(5)$	$\ln(3x + 2) + \ln(5) = \ln((3x + 2) \cdot 5)$
Stauchung in y-Richtung um $\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot \ln((3x + 2) \cdot 5)$

2.4 Greade / Ungerade / Periodische Funktionen

Gerade:	$f(-x) = f(x)$	symmetrisch zu y-Achse	$(-x)^2 = x^2$
Ungerade:	$f(-x) = -f(x)$	punktsymmetrisch Nullstelle	$(-x)^3 = -(x^3)$
Periodisch:	$f(x) = f(x \pm p)$	wiederholend mit Periode p	$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$

2.5 Verkettung oder Mittelbare Funktion

$h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ $\qquad f(x) = 2x + 1$; $g(x) = x^2$ $\qquad \mathbb{D}_h = \mathbb{D}_f$
$\qquad h(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^2$ $\qquad \mathbb{W}_h = \mathbb{W}_g$

$h(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ $\qquad g(x) = x^2$; $f(x) = 2x + 1$ $\qquad \mathbb{D}_h = \mathbb{D}_g$
$\qquad h(x) = f(g(x)) = 2 \cdot (x^2) + 1$ $\qquad \mathbb{W}_h = \mathbb{W}_f$

Reihenfolge ist entscheidend: $\quad g \circ f \neq f \circ g$

2.6 Polynom Funktionen (S. 65)

Lineare Funktion:	$y = f(x) = ax + b$	$-\frac{b}{a}$
Quadratische Funktion:	$y = f(x) = ax^2 + bx + c$	$\frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$
Polynom n-ten Grades:	$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$	

2.7 Ganzratinale Funktionen (S. 63)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

Lineare Funktion: $x = -\frac{b}{a}$

Quadratische Funktion: $x_1,\ x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$

Polynom n-ten Grades: Binomen oder Hornerschema (2.9)

$\Rightarrow$ Eine Funktion vom Grad n hat **höchstens** n verschiedene Nullstellen!

2.8 Hornerschema (S. 966)

Zerlegt eine ganzrationale Funktion vom Grad n in einen Linearfaktor (Nullstelle) und ein Polynom vom Grad $n - 1$

2.8.1 Vorgehen Hornerschema

1. Nullstelle x_0 raten
2. Von oben nach unten summieren
3. Diagonal nach rechts mit x_0 multiplizieren

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\
x_0 & & a'_{n-1}x_0 & \ldots & a'_1 x_0 & a'_0 x_0 \\
\hline
 & a'_{n-1} & a'_{n-2} & \ldots & a'_0 & f(x_0) \\
x_0 & & a''_{n-2}x_0 & \ldots & a''_0 x_0 & \\
\hline
 & a''_{n-2} & a''_{n-3} & \ldots & f'(x_0) &
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\Rightarrow f^{(n)}(x_0) = 0 \to \text{Nullstelle} \\
\Rightarrow f^{(n)}(x_0) \neq 0 \to y\text{-Stelle}
\end{array}$$

Bsp. Hornerschema: $x^3 + x - 10 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & 1 & -10 \\
2 & & 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 & 10 \\
\hline
 & 1 & 2+0 & 4+1 & 10-10
\end{array}
\quad \Rightarrow f(x) = (x-2)(x^2+2x+5)$$

2.9 Gebrochenratinale Funktionen (S. 63m 67)

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0}$$

Echt gebrochen	$n < m$
gleich Gradig	$n = m$
Unecht gebrochen	$n > m$

Jede unecht gebrochene Funktion lässt sich als Summe einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenen Funktion schreiben. $\Rightarrow$ **Polynomdivision**

2.10 Polynomdivision (S. 15)

Liefert Summe aus **ganzrationaler Funktion** und **echt gebrochener Funktion**.

$$R(x) = \frac{P_4(x)}{Q_2(x)} = \frac{3x^4 - 10x^3 + 22x^2 - 24x + 10}{x^2 - 2x - 3}, \quad n > m \quad \Rightarrow \text{unecht gebrochen}$$

$$\begin{array}{l}
(3x^4 - 10x^3 + 22x^2 - 24x + 10) \ : \ (x^2 - 2x + 3) \\
\underline{3x^2 \cdot (x^2 - 2x + 3)} \\
\quad - 4x^3 + 13x^2 - 24x + 10 \\
\quad \underline{- 4x \cdot (x^2 - 2x + 3)} \\
\qquad 5x^2 - 12x + 10 \\
\qquad \underline{5 \cdot (x^2 - 2x + 3)} \\
\qquad\quad - 2x - 5
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad R(x) = 3x^2 - 4x + 5 + \frac{2x-5}{x^2-2x+3}$$

2.11 Partialbruchzerlegung (S. 15)

Jede echt gebrochenrationale Funktion kann eindeutig in eine Summe von Partialbrüchenmit teilfremden *Zähler-* und *Nennerpolynom* zerlegt werden.

2.11.1 Vorgehen Partialbruchzerlegung

(1) kontrolle echt gebrochen ($n < m$)
 Ja: $\Rightarrow$ (2) Nein: $\Rightarrow$ Polynomdivision

(2) Nenner faktorisieren (pro Faktor ein Teilbruch)

(3) Berechnung Zählerkonstanten

(3.1) Gleichnahmig machen

(3.2) Zählergleichung

(3.3) Einsetzen von 'guten' x-Werten

2.11.2 Fälle Partialbruchzerlegung:

Fall 1 $\frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_m}{x-\alpha_m}$

Fall 2 $\frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{(x-\alpha_1)^{k_1} \ldots (x-\alpha_m)^{k_l}} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{M_1}{x-\alpha_m} + \ldots + \frac{M_{k_l}}{(x-\alpha_m)^{k_l}}$

Fall 3 $\frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{(x-\alpha_1)^{k_1} \ldots (x^2+p_1 x+q_1)^{k_l}} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{B}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{C_{k_l}x + D_{k_l}}{(x^2+p_1 x+q_1)^{k_l}}$

Bsp. Partialbruchzerlegung:

(1) $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2} \quad \Rightarrow \quad (n < m)$

(2) $a^2 - x^2 = (a+x)(a-x)$

(3) $\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x}$

(3.1) $\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{A(a-x)+B(a+x)}{a^2+x^2}$

(3.2) $1 = A(a-x) + B(a+x)$

(3.3) $x = a \quad \Rightarrow B(2a) = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2a}$
 $x = -a \Rightarrow A(2a) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2a}$

2.12 Trigonometrische Funktionen (S. 77-89)

$\sin(x)$:	$D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\to$	$W_f = [-1, 1]$
$\cos(x)$:	$D_f = [0, \pi]$	$\to$	$W_f = [-1, 1]$
$\tan(x)$:	$D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\to$	$W_f = \mathbb{R}$
$\cot(x)$:	$D_f = (0, \pi)$	$\to$	$W_f = \mathbb{R}$
$\arcsin(x)$:	$D_f = [-1, 1]$	$\to$	$W_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos(x)$:	$D_f = [-1, 1]$	$\to$	$W_f = [0, \pi]$
$\arctan(x)$:	$D_f = \mathbb{R}$	$\to$	$W_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\text{arccot}(x)$:	$D_f = [-1, 1]$	$\to$	$W_f = (0, \pi)$

2.12.1 Wichtige Formeln:

$\sin\alpha = \sin x = \sin(180° - \alpha)$ $\quad$ $\cos\alpha = \cos x = \cos(180° - \alpha)$

$\sin\alpha = \cos x = \cos(90° - \alpha)$ $\quad$ $\cos\alpha = \sin x = \sin(90° - \alpha)$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ $\quad$ $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1}$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ $\quad$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\sin\beta \mp \sin\alpha\cos\beta$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\quad$ $\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$

$m_1 m_2 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1 \perp m_2 \quad \Longleftrightarrow \quad m_{tangente} \perp m_{normale}$

3 Folgen und Reihen (S. 19, 470)

Exponentialgesetze:	S. 8	Logarithmengesetze:	S. 9
Grenzwertsätze:	S. 471		

3.1 Spezielle Folgen und Reihen (S. 20)

Arithmetische Folge:	Bronstein S.19	$a_{i+1} = a_i + i \cdot d$	$d = \Delta a_i = a_{i+1} - a_i$
Geometrische Folge:	Bronstein S.20	$a_i = q^i \cdot a_0$	$q = \frac{a_{i+1}}{a_i}$
Spezielle Reihen	Bronstein S.20		

3.2 Beschränktheit / Monotonie (S. 51, 470)

3.2.1 Beschränktheit

$W_f \subset [a; b]$ und $a,\ b \in \mathbb{R}$

3.2.2 Monotonie

$d^{(1)} \geq 0$	$q^{(2)} \geq 1$	monoton wachsend	$\uparrow$
$d > 0$	$q > 1$	streng monoton wachsend	$\Uparrow$
$d \leq 0$	$0 < q \leq 1$	monoton fallend	$\downarrow$
$d < 0$	$0 < q < 1$	streng monoton fallend	$\Downarrow$

(1) d arithmetische Folge (2) q geometrische Folge ($a_1 > 0$)

3.3 Konvergenz / Divergenz (S. 471)

3.3.1 Konvergenz

Es existiert ein Grenzwert g $\in \mathbb{R}$

Toleranzungleichung: $|a_n - g| < \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$

Gesucht ist ein n_0, ab welchem alle Werte von $n \geq n_0$ in $U_\varepsilon(g)$ liegen.

3.3.2 Bestimmt divergent gegen +∞

Ungleichung: $f_n > K$ wenn $n \geq n_0$ für $K > 0$

3.3.3 Bestimmt divergent gegen -∞

Ungleichung: $f_n < k$ wenn $n \geq n_0$ für $k < 0$

3.3.4 Unbestimmt divergent

Alles, was nicht konvergent oder bestimmt divergent ist

3.4 Grenzwerte (S. 471)

Die Folgen a_n und b_n sind konvergent!

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \quad \text{für } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

3.5 Rechnen $\Longrightarrow \infty$

3.5.1 Bestimmte Formen

$\infty + \infty = \infty \qquad -\infty - \infty = -\infty \qquad 0 \cdot [a,b] = 0 \cdot \text{beschränkt} = 0$

$g + \infty = \infty \qquad g - \infty = -\infty \qquad (g \in \mathbb{R})$

$\infty \cdot \infty = \infty \qquad -\infty \cdot (\infty) = -\infty \qquad g \cdot \infty = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$

$\frac{1}{\infty} = 0 \qquad \frac{g}{\infty} = 0 \qquad g \in \mathbb{R}$

$\frac{\infty}{0+} = \infty \qquad \frac{\infty}{0-} = -\infty \qquad \frac{\infty}{g} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$

$\frac{1}{0+} = \infty \qquad \frac{1}{0-} = -\infty \qquad g \in \mathbb{R} - 0$

$\frac{g}{0+} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases} \qquad \frac{g}{0-} = \begin{cases} -\infty & g > 0 \\ \infty & g < 0 \end{cases}$

3.5.2 Unbestimmte Formen

$\frac{0}{0} = ? \qquad \frac{\infty}{\infty} = ? \qquad \infty \cdot 0 = ? \qquad \infty^0 = ? \qquad 0 \cdot \infty = ? \qquad \infty - \infty = ? \qquad 0^0 = ?$

$1^\infty = ?$ Ausser 1 ist eine Konstante, dann gilt $1^\infty = 1$

3.6 Grenzwerte $\longrightarrow \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{-2n^2 + 4n - 5}{8n^2 - 3n + 7} \right)$$

$f(n) = \frac{-2n^2 + 4n - 5}{8n^2 - 3n + 7}$ Algebraisch erweitern mit $\frac{1}{n^2}$: $f(n) = \frac{-2 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{8 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}}$

$f(n) = \frac{-2 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{8 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} f(n) = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{-2n^2(4n - 5)}{8n^2(-3n + 7)} \right)$$

$f(n) = \frac{-2n^2(4n - 5)}{8n^2(-3n + 7)}$ Algebraisch erweitern mit $\frac{1}{n^3}$: $f(n) = \frac{-8 + \frac{10}{n}}{-24 + \frac{56}{n}}$

$f(n) = \frac{-8 + \frac{10}{n}}{-24 + \frac{56}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} f(n) = \frac{-8}{-24} = \frac{1}{3}$

3.7 Bolzano-Prinzip

Jede beschränkte, monotone Zahlenfolge ist konvergent!

Beispiel: Grenzwert von rekursiver Folge

Folge: $a_1 = \frac{1}{4}; a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$

1. Monotonie
   Beweisen mit Ansatz $a_{n+1} \geq a_n$ bzw. $a_{n+1} \leq a_n \to$ Induktion
2. Beschränktheit
   Erste Schranke = Erster Wert der Reihe
   Zweite Schranke: Annahme, es gibt Grenzwert g und er ist Supremum bzw. Infimum
3. Beweisen (oder widerlegen), dass g sup bzw. inf ist
   Ansatz: $a_n \leq g$ bzw. $a_n \geq g$ mit vollständiger Induktion beweisen

4 Grenzwerte

4.1 Links- / Rechtsseitiger Grenzwert (S. 55)

Eine kritische Stelle x_0 kann von links und rechts angenähert werden.

Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = g^-$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = g^+$

- Wenn $g^- = g^+ = g \Rightarrow$ Konvergenz
- Wenn $g^- \neq g^+ \Rightarrow$ Unbestimmte Divergenz

4.2 Konvergenz, Divergenz (S. 472)

4.2.1 Konvergenz von $f(x)$ $\Rightarrow$ 1.2 Umgebung

$x \to \infty$ Toleranzungleichung: $|f(x) - g| < \varepsilon$ wenn $x > M(\varepsilon)$
$x \to -\infty$ Toleranzungleichung: $|f(x) - g| < \varepsilon$ wenn $x < m(\varepsilon)$

$x \to x_0$ Toleranzungleichung: $|f(x) - g| < \varepsilon$ $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$

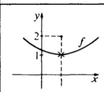
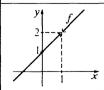
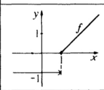
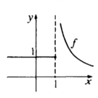
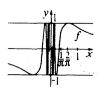
4.2.2 Bestimmte Divergenz von $y = f(x)$

Quadrant	Kriterium	Folgerung
I	$y \to \infty$ $(x \to \infty)$	$y > K$ wenn $x > M(K)$
II	$y \to \infty$ $(x \to -\infty)$	$y > K$ wenn $x < m(K)$
III	$y \to -\infty$ $(x \to -\infty)$	$y < k$ wenn $x < m(k)$
IV	$y \to -\infty$ $(x \to \infty)$	$y < k$ wenn $x > M(k)$
	$f(x) \to \infty$	$y > K > 0$ wenn $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$
	$f(x) \to -\infty$	$y < k < 0$ wenn $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$

4.3 Stetigkeit (S. 59-63, 127)

Definition Stetigkeit: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Eine Funktion ist stetig, wenn der Funktionsgraph gezeichnet werden kann, ohne dass der Stift abgesetzt werden muss.

Art der Unstetigkeitsstelle	Bedingungen	Beispiel $f: x \mapsto f(x) =$	Graph von f
hebbare Unstetigkeitsstelle	$\lim_{x\to x_0} f(x) = g$ und $g \neq f(x_0)$	$\begin{cases} \frac{1}{4}(x-1)^2 + 1 & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$	
	$\lim_{x\to x_0} f(x) = g$ und $x_0 \notin D_f$	$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$	
Unstetigkeitsstelle 1. Art (Sprungstelle)	g^+ und g^- existieren in x_0, aber $g^+ \neq g^-$	$\begin{cases} x - 1 & \text{für } x \geqq 1 \\ -1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$	
Unstetigkeitsstelle 2. Art	mindestens g^+ oder g^- existieren in x_0 nicht	$\begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{für } x > 1 \\ 1 & \text{für } x \leqq 1 \end{cases}$	
	f ist für $x \uparrow x_0$ und $x \downarrow x_0$ unbestimmt divergent (Oszillationsstelle)	$\sin \frac{1}{x}$	

4.4 Nullstellen bestimmen gemäss Bolzano (S. 12)

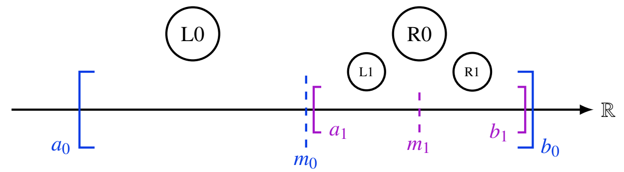
$f(x)$ auf Intervall $[a;b]$ stetig; $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen
➔ Es existiert (mindestens) eine Nullstelle ξ

4.4.1 Bisektion (Intervallschachtelung)

Die Nullstelle lässt sich mittels Bisektion (Intervallschachtelung) näherungsweise berechnen:

1. $I_0 = [a;b] = [a_0;b_0]$ gesamtes Intervall
2. I_0 halbieren ➔ $m = \frac{a_0+b_0}{2}$
3. Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel bestimmen:
   $\Rightarrow$ links: $f(a) \cdot f(m) < 0$
   $\Rightarrow$ rechts: $f(a) \cdot f(m) > 0$
4. Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel: $I_1 = [a_1;b_1]$
5. Schritte 2. - 4. n mal wiederholen: $I_{n+1} \in I_n$
6. $\ldots \xi \in (a;b)$ mit $f(\xi) = 0$ (Nullstelle)

$$n_{min} = \log_2 \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon_{max}}$$



4.5 Asymptotenbestimmung $\Rightarrow$ 2.9 || 2.10

Asymptote einer gebrochen rationalen Funktion $r(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ bestimmen gemäss:

	$m < n$	$m = n$	$n < m$
$\lim_{x\to\pm\infty} r(x)$	∞ oder $-\infty$	$\frac{a_n}{b_m}$	0
Asymptote	ganzrat. Teil der Polynomdivision	Parallel zur x-Achse $y = g(x) = \frac{a_m}{b_n}$	x-Achse

Bsp. Asymptotenbestimmung

$m < n: \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow x + \frac{x}{x-1} \Rightarrow x + \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 1 + \frac{1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \Rightarrow f(x) = x + 1 + 0$

$m = n: \frac{x}{x-1} \Rightarrow \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow f(x) = 1$

$n < m: \frac{x}{x^2-1} \Rightarrow \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

4.6 Spezielle Grenzwerte

$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

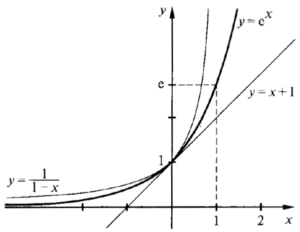
$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln(a)} \qquad \lim_{x\to 0+} x^{\sin(x)} = 1 \qquad \lim_{x\to 0+} z^z = 1$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1$

4.7 Wichtige Funktionen

4.7.1 Exponentialfunktion (S. 73)

$$e^{1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \qquad e^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \qquad e^{x} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$



Definitions- / Wertebereich:
$D_f = \mathbb{R} \to W_f = \mathbb{R}^{+}$

Einschliessung:

$e^{x} \geq 1 + x \quad$ für $x \in \mathbb{R}$

$e^{x} \leq \frac{1}{1-x} \quad$ für $x < 1$

4.7.2 Hyperbolische Funktionen (S. 89)

$$e^{x} = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \sinh(x) + \cosh(x)$$

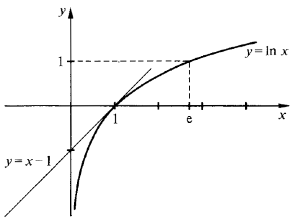
$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$	$\mathbb{R} \to [1; \infty)$
$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})}$	$\mathbb{R} \to (-1; 1)$

$|\sinh(x)| < \cosh(x)$

4.7.3 Area-Funktionen (Umkehrung Hyperbolische. F.) (S. 93)

$\operatorname{arsinh}(x)$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\operatorname{arcosh}(x)$	$[1; \infty) \to \mathbb{R}_0^{+}$
$\operatorname{artanh}(x)$	$\lvert x\rvert < 1 \to \mathbb{R}$

4.7.4 Logarithmusfunktion (S. 73)



Definitions- / Wertebereich:
$D_f = \mathbb{R}^{+} \to W_f = \mathbb{R}$

Einschliessung:
$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$